

Davi de Freitas Barros

**Emissão Superradiante de 1 e 2 Fótons por  
uma Memória Quântica de Átomos Frios**

Belo Horizonte

2020

Davi de Freitas Barros

**Emissão Superradiante de 1 e 2 Fótons por uma  
Memória Quântica de Átomos Frios**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Orientador: Pablo Lima Saldanha

Belo Horizonte

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

B277e Barros, Davi de Freitas.  
Emissão superradiante de 1 e 2 fótons por uma memória quântica de átomos frios / Davi de Freitas Barros. – 2020.  
87f., enc. : il.

Orientador: Pablo Lima Saldanha.  
Tese (doutorado) – Universidade Federal de Minas Gerais,  
Departamento de Física.  
Bibliografia: f. 82-87.

1. Radiação. 2. Átomos. 3. Óptica quântica. 4. Fótons.  
I. Título. II. Saldanha, Pablo Lima. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Física.

CDU – 530.145 (043)



Universidade Federal de Minas Gerais  
Instituto de Ciências Exatas  
Programa de Pós-Graduação em Física  
Caixa Postal 702  
30.123-970 Belo Horizonte - MG - Brasil

Telefone (xx) (31) 3409 5637  
(xx) (31) 3409 5633  
Fax (xx) (31) 3409 5688  
(xx) (31) 3409 5600  
e-mail pgfisica@fisica.ufmg.br

**ATA DA SESSÃO DE ARGUIÇÃO DA 364ª TESE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA, DEFENDIDA POR Davi de Freitas Barros** orientado pelo professor Pablo Lima Saldanha, para obtenção do grau de **DOUTOR EM CIÊNCIAS, área de concentração Física**. Às 09:00 horas de dezessete de fevereiro de dois mil e vinte, na sala 4129 do Departamento de Física da UFMG, reuniu-se a Comissão Examinadora, composta pelos professores **Pablo Lima Saldanha** (Orientador - Departamento de Física/UFMG), **Carlos Henrique Monken** (Departamento de Física/UFMG), **Pedro Ernesto Schiavinatti Tavares** (Departamento de Física/UFMG), **José Wellington Rocha Tabosa** (Departamento de Física/UFPE) e **Raul Celistrino Teixeira** (Departamento de Física/UFSCar) para dar cumprimento ao Artigo 37 do Regimento Geral da UFMG, submetendo o Mestre **Davi de Freitas Barros** à arguição de seu trabalho de Tese de Doutorado, que recebeu o título de "**Emissão Superradiante de 1 e 2 Fótons por uma Memória Quântica de Átomos Frios**". Às 14:00 horas do mesmo dia, o candidato fez uma exposição oral de seu trabalho durante aproximadamente 50 minutos. Após esta, os membros da comissão prosseguiram com a sua arguição, e apresentaram seus pareceres individuais sobre o trabalho, concluindo pela aprovação do candidato.

Belo Horizonte, 17 de Fevereiro de 2020.

Prof. Pablo Lima Saldanha  
Orientador do estudante  
Departamento de Física/UFMG

Prof. José Wellington Rocha Tabosa  
Departamento de Física/UFPE

Prof. Carlos Henrique Monken  
Departamento de Física/UFMG

Prof. Raul Celistrino Teixeira  
Departamento de Física/UFSCar

Prof. Pedro Ernesto Schiavinatti Tavares  
Departamento de Física/UFMG

Candidato

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer principalmente ao Prof. Pablo Saldanha que me ofereceu o tema e se manteve fundamental nesta pesquisa. Além de ter sido um orientador muito necessário e justo, foi também uma pessoa companheira. Espero que seja um amigo de longa data daqui em diante.

Não há forma fácil de incluir tanta gente maravilhosa que eu conheci durante estes cinco anos. Se eu fosse completamente honesto, esta sessão se tornaria um capítulo a parte. Por isto, peço que me perdoem por não encontrar seus nomes escritos aqui, espero que cada um de vocês se encontrem em algum pedaço do que irei listar. Aos migos do adventure spacetime, vocês são eternos. A todos os que passaram na república de satanás (incluindo Hermes, Ororo e Formiga), foi um prazer dividir um pedaço do meu dia-a-dia e de minhas histórias com cada um de vocês. Aos companheiros da Sonserina, sentirei muita falta das discussões profundas, do veneno destilado (brinks, mas nem tanto), das caricaturas fofas e dos cafés compartilhados. Ao povo da astro, vocês são a Grifinória deste departamento; desculpa todas as conversas secretas que eu bisbilhotei da minha sala e todas as gritarias que a gente fez vocês aturarem, vocês são minha segunda casa de coração. À galera do cafofo em suas várias gerações, que as trevas estejam sempre presente em vocês. À galera do bandejão, aquele abraço, emito-vos muitos bróthons; sentirei muita falta de todas as péssimas piadas e de toda a raiva que compartilhamos. Ao pessoal da salinha, obrigado pelas discussões dos mais diversos assuntos e pelo cafezinho. Falando em café, abraços ao pessoal da sala e do clube do café. Ao pessoal da yoga, obrigado pela paz e amizade de vocês. A quem conseguiu aguentar quinze minutos de pula-pula, espero ter vocês comigo por muitos carnavais ainda. À galerinha que vai no Jaeh, joga um Dixit, vai numas cachoeiras e outras cositas mais, é nós, fh. Queria agradecer a uma certa família que herdou a Lorraine, agradeço por vocês terem sido a minha família mineira. Queria mandar um grandíssimo abraço a todos os que foram felizes comigo naquela casa com tocador de vinil que amamos; obrigado por aturarem tanto Radiohead quando ninguém queria. Aos amigos que estão longe, mas ainda pertim do coração, espero revê-los em vários Paratys ainda. Pessoal de Viçosa, galera gente boa demais, sentirei saudades. Abraço aos amigos que me receberam desde que eu era um recém-chegado em BH, quando ninguém entendia nada do que eu falava, mas ainda assim eram super educados e fizeram eu entender que nesta cidade tem gente massa demais. Rafamés do rolê, valeu por me fazer não ter a mínima ideia de onde eu ia acabar na noite belorizontina. Geral da chapelaria do Alberto, os rachas foram poucos, mas a resenha continuará. Galera do fifinha, obrigado por toda a raiva que me fizeram passar nesse jogo ingrato e todas as pizzas de sabor duvidoso que pedimos. Aos companheiros de acampamento, parceroooooooooooooooooo.

Sem meus pais, esta tese simplesmente não seria. O apoio deles, de todas as formas possíveis, fizeram dela algo possível. Gostaria de agradecê-los de todo o coração, a eles e a meus irmãos também, pelo apoio e incentivo.

Finalmente, gostaria de deixar meus mais sinceros agradecimentos à UFMG e ao departamento de Física: seus professores e pessoal do administrativo. Agradeço imensamente aos órgãos de fomento nacionais, em especial ao CNPq que financiou este doutorado.

# Resumo

Neste trabalho, utilizamos uma memória quântica formada por uma nuvem de átomos de 3 níveis para estudar a dinâmica de emissão de luz em estado de Fock contendo uma ou duas excitações, explicitando o caráter superradiante nestes processos. Um feixe laser de escrita pode induzir transições nesses átomos deixando uma ou duas excitações coerentemente distribuídas na nuvem, armazenando informação. Posteriormente, um feixe laser de leitura retira essas excitações na forma de fótons que são emitidos de forma superradiante e num modo que depende da informação armazenada. Com este tipo de arranjo, é possível atestar o caráter quântico da luz e garantir que uma formulação semi-clássica é inadequada para descrever o fenômeno. Como elemento principal, desenvolvemos uma teoria analítica para a interação dos átomos com a luz, obtendo o perfil espaço-temporal da emissão e demonstrando que os fótons gerados na leitura se acoplam a um modo do campo conjugado ao utilizado durante a escrita para preparar o estado da nuvem. De acordo com a teoria, o pacote de onda de dois fótons é consistente com o perfil temporal obtido na emissão de fótons independentes e idênticos ao obtido na emissão superradiante de um único fóton. Estas conclusões são comparadas com experimentos de armazenamento de informação quântica por nuvens de átomos frios realizados pelo grupo de ótica quântica da UFPE, em que podemos constatar uma boa concordância entre os resultados experimentais e as previsões teóricas. Esses estudos permitiram a caracterização, pela primeira vez, da emissão superradiante de dois fótons por um conjunto de átomos.

**Palavras-chave:** Superradiância, Átomos Frios, Memória Quântica, Óptica Quântica

# Abstract

In this work, we consider a quantum memory formed by an ensemble of 3-level atoms to study the emission of light in a Fock state for one and two excitations, exhibiting the superradiant character in these processes. In this setup, a writing laser beam may induce quantum transitions between pairs of levels, leaving either one or two of these atoms excited in an appropriate coherently distributed state across the cloud, thus storing quantum information. After that, a reading laser beam extracts this information in the form of one or two photons, respectively, in a superradiant emission at a specific mode of the electromagnetic field that depends on the details of the stored state. Then, we can certify the quantum nature of light, making sure that a semi-classical approach is inadequate to describe this phenomenon. The central point is the development of an analytical theory for the interaction between atoms and light in this context. We find the beam's spatio-temporal profile, showing that the modes in which the generated read and write photons are counterpropagating. Following the theory, the two-photon wavepacket is consistent with the profile obtained for two independent photons, each identical to the one achieved for a single superradiant emission. These conclusions match with experimental studies of quantum information storage by a cloud of cold atoms realized by the quantum optics group at UFPE, where we notice a good agreement between theory and experiment. These studies allowed the first characterizations of the superradiant emission of two photons by an atomic ensemble.

**Keywords:** Superradiance, Cold Atoms, Quantum Memory, Quantum Optics



# Sumário

1	INTRODUÇÃO . . . . .	9
2	INTERAÇÃO DE ÁTOMOS COM LUZ QUÂNTICA . . . . .	13
2.1	Quantização do Campo Eletromagnético Livre . . . . .	13
2.2	Interação com um Átomo de 2 Níveis . . . . .	17
2.3	Emissão Espontânea no Formalismo de Weisskopf-Wigner . . . . .	19
2.4	Interação de um Átomo com Campo Clássico . . . . .	22
3	SUPERRADIÂNCIA . . . . .	25
3.1	Modelo de Dicke Básico . . . . .	25
3.2	Modelo para Emissão por Fontes Independentes . . . . .	28
3.3	Obtenção das Taxas de Emissão Independente via Decoerência . . . . .	31
3.4	Modelo Clássico para Superradiância . . . . .	32
3.5	Superradiância em Meios Extensos . . . . .	34
4	MEMÓRIAS QUÂNTICAS . . . . .	39
4.1	Armazenamento de Informação por Memórias Atômicas . . . . .	39
4.2	Emissão de Fótons Direcionados com Efeito de Memória . . . . .	42
5	TEORIA PARA SUPERRADIÂNCIA DE ESTADOS DE FOCK . . . . .	47
5.1	Preparação do Estado de uma Excitação . . . . .	48
5.2	Dinâmica de Emissão . . . . .	50
5.3	Evolução Temporal na Emissão de um Fóton . . . . .	52
5.4	Fator Superradiante . . . . .	58
5.5	Preparação do Estado de duas Excitações . . . . .	60
5.6	Evolução Temporal na Emissão de Dois Fótons . . . . .	61
6	ANÁLISE DO EXPERIMENTO . . . . .	68
6.1	Estatísticas de Detecções . . . . .	70
6.2	Perfil Temporal da Emissão de Fóton Único . . . . .	73
6.3	Perfil Temporal da Emissão de Pares de Fótons . . . . .	76
7	CONCLUSÕES . . . . .	80
	REFERÊNCIAS . . . . .	82

# 1 Introdução

Quando átomos emitem luz na presença de outros átomos, as propriedades de emissão podem ser alteradas através de efeitos coletivos da interação das cargas com o campo eletromagnético. Em particular, quando esta emissão é acelerada pelos efeitos coletivos, a emissão é dita superradiante, e foi primeiramente teorizada na emissão espontânea de conjuntos de átomos de dois níveis por Dicke [1]. Este tipo de fenômeno pode ser obtido nas mais diversas condições envolvendo a teoria quântica da emissão de luz por átomos [2], e possui relação com outros efeitos análogos como a superfluorescência [3] onde a coerência e emaranhamento são essenciais na descrição, e também fornece um ganho coletivo, como também é encontrado na superluminescência, ou emissão espontânea amplificada, que é um efeito resultante da natureza quântica da luz [4]. Apesar de ter sido inicialmente prevista para a dinâmica de sistemas quânticos, sabe-se que a superradiância é um fenômeno comum também em sistemas clássicos [5–7], sendo até mesmo encontrado na geração de ondas sonoras por cordas de piano [8].

Nesta análise, os osciladores comunicam-se através do campo em que estão imersos, de forma que a taxa de energia que cada um cede à onda gerada depende da amplitude de todos os osciladores ao mesmo tempo. Porém, quando estamos diante de uma situação em que se verifica que um número preciso de fótons é envolvido no processo, um tratamento quântico é inevitável. Seja o caso em que um conjunto de átomos emite um único fóton. Ao contrário da análise clássica, um fóton detectado está diretamente associado à uma transição atômica de algum dos átomos. Desta forma, a natureza quântica é expressa em sua essência: um evento quântico ocorre com probabilidade definida pela interferência de diversas possibilidades, em particular, para haver a superradiância, as amplitudes de emissão pelos átomos distintos precisam se superpor construtivamente. Enquanto isto, a identidade do átomo emissor precisa ser fundamentalmente incerta para que haja superposição coerente. Vemos assim que todas as principais características próprias da mecânica quântica estão envolvidas neste fenômeno.

Experimentos realizados na última década estudam um cenário similar ao que será tratado nessa tese, em que uma nuvem de átomos é excitada por um feixe de laser pouco intenso que é espalhado pelo ensemble [9, 10]. Neste tipo de arranjo, a superradiância se encontra na taxa de emissão da luz espalhada. Porém, apesar de descrever o conjunto de átomos como sistemas de dois níveis, ou seja, sistemas quânticos, não há garantias de que a luz é gerada em estados de um fóton único. Portanto, uma análise semi-clássica, onde a luz é tratada de forma clássica mas os átomos possuem uma descrição quântica, é capaz de ilustrar várias das características exibidas.

Em sistemas genéricos que poderiam exibir superradiância, a complexidade do problema pode se tornar muito grande e o efeito pode se ocultar em meio a outros efeitos relevantes [2]. Por exemplo, se a estrutura interna do átomo não for efetivamente descrita por apenas dois níveis, então vários canais de emissão podem causar a decoerência do sistema [11]. Se os átomos estiverem muito próximos entre si a interação de dipolo com os demais átomos se torna significativa. Assim, cada átomo pode passar a ter níveis de energia distintos dos demais e a coletividade é reduzida [12, 13]. Já se a nuvem for extensa, efeitos de propagação e a reabsorção dos fótons emitidos apresentam toda uma fenomenologia à parte que compete com os efeitos coletivos associados à super ou sub-radiância [5, 14]. Desta forma, o sistema físico analisado nesse trabalho, que consiste na emissão de superradiante de fótons por ensembles atômicos que armazenam excitações coerentemente distribuídas nos átomos, é uma plataforma de estudo interessante, pois permite um controle único dos vários problemas citados, permitindo que os aspectos essenciais do fenômeno sejam extraídos com clareza. Além disso, a aceleração da extração de radiação pode trazer vantagens no uso de nuvens atômicas em memórias quânticas [15, 16].

O tipo de arranjo que utilizaremos para estudar superradiância é baseado em um tipo de memória quântica utilizada em repetidores quânticos para comunicação a distância sob presença de atenuação de sinal, sob o protocolo DLCZ (Duan–Lukin–Cirac–Zoller) [17]. Em uma memória usual, a informação é utilizada de entrada em um sistema físico que a armazena durante um intervalo de tempo desejado até ser necessário recuperá-la num momento posterior. Uma memória quântica ideal, e que armazenasse a informação contida em fótons, seria um sistema físico capaz de absorver um fóton de entrada coerentemente durante um intervalo de tempo longo, e sob ação externa, emitir um fóton de saída portando a mesma informação que o de entrada [18]. Este tipo de memória pode ser realizada utilizando transparência eletromagnética induzida (EIT) [19–21], por exemplo, para reduzir a velocidade do fóton no meio, ou até mesmo congelá-lo [22, 23]. Ainda que este tipo de memória seja viável [24, 25] e este tipo de fenômeno possa ser utilizado para armazenar fótons únicos [26] e até mesmo para conectar nós distintos em uma rede [27], a estratégia adotada no protocolo DLCZ é de natureza diferente desta estratégia abordada acima.

Em vez de armazenar um estado qualquer numa nuvem atômica, o protocolo DLCZ permite que repetidores quânticos possam gerar estados emaranhados entre nós distantes em uma rede, através de um processo de duas etapas. A primeira etapa pode ser repetida inúmeras vezes até que uma determinada tarefa seja concluída. A função do repetidor é de aumentar a probabilidade deste evento ocorrer por simples repetição, com a condição de que seja possível preservar o sistema no estado em que o resultado correto foi obtido. No protocolo DLCZ, esta primeira etapa permite que nós separados em uma cadeia se tornem emaranhados. Após dois pares de nós consecutivos passarem por essa etapa, um segundo passo implementa a troca de emaranhamento (SWAP) entre eles, dobrando a distância

em que há o emaranhamento entre nós, sem que seja necessário que cada metade ocorra *coincidentemente*. Em [17], é mostrado que ao ser possível que haja um atraso entre a realização do primeiro passo do protocolo entre pares de nós consecutivos, extrai-se um ganho exponencial no número de repetições necessárias para gerar emaranhamento em longas distâncias.

Apesar de não operar estritamente como uma memória quântica, no sentido discutido acima, também denomina-se cada um destes passos do protocolo de escrita e leitura, respectivamente, pois, assim como em uma memória usual, é entre estas etapas que o sistema físico precisa ser preservado em um estado coerente. No protocolo DLCZ estas etapas são realizadas através da detecção de fótons únicos emitidos por sistemas de três níveis. Cada nó desta rede pode ser materializado através de nuvens de átomos frios controladas por luz laser, em que três dos níveis são isolados para emitir os fótons envolvidos no processo. Eis que entra o estudo da superradiância: a emissão dos fótons pela nuvem contendo inúmeros átomos pode exibir os efeitos coletivos associados ao efeito. O diferencial obtido ao incluir a emissão nesse processo de duas etapas é que passamos a ter um controle maior no tipo de estado que se pode gerar na nuvem entre a escrita e a leitura. Quando temos uma nuvem gerando fótons devido a um espalhamento direto de um laser, não há nenhuma forma de estimar as propriedades da luz emitida, senão pela própria medição direta. Se, em vez disso, utilizamos um processo de duas etapas, podemos utilizar uma delas para controlar que tipo de luz será emitida na outra, via pós-seleção. Podemos utilizar deste método para garantir que, durante a leitura, o estado quântico da luz emitida se aproxime de um estado de Fock, e que a estatística observada seja incompatível com modelos semi-clássicos que são aplicados a outros tipos de experimentos.

O experimento que pretendemos estudar faz parte de uma sequência de trabalhos [16, 28–30] realizados em uma colaboração do professor Pablo Saldanha na UFMG com a equipe do professor Daniel Felinto na UFPE. Em um primeiro momento [16, 28], foi estudado o perfil temporal do fóton emitido, dado na forma de um pacote de onda de fóton [31–33]. Nestes trabalhos, tanto o caráter superradiante, quanto o regime de fóton único foram comprovados durante a emissão do fóton de leitura da memória quântica baseada no protocolo DLCZ. Já numa segunda etapa desta sequência [29, 30], em que o autor desta tese passa a fazer parte dos estudos teóricos, passamos a investigar o formato do pacote de onda de dois fótons, além de modificarmos a teoria para elaborar um formalismo mais simples que fosse passível de generalização para o estudo de emissão de luz em estados de Fock com até dois fótons.

Para explicar o experimento estudado e elaborar a teoria que busca descrever os resultados obtidos, partimos no capítulo 2 de uma descrição básica do campo eletromagnético segundo o formalismo quântico adaptado do texto canônico [8], além de como átomos de dois níveis interagem com este campo tanto através da emissão espontânea quanto quando

interage com um feixe de luz laser. Em seguida, no capítulo 3 tratamos em específico da teoria da superradiância tanto de acordo com o formalismo quântico no cenário mais simples descrito por Dicke em [1], quanto em ensembles de átomos distribuídos numa região extensa, como descrita em [34], além de comparar com a teoria clássica para a superradiância, assim como descrito em [8]. Já no capítulo 4, entramos em mais detalhes na descrição de como átomos de três níveis podem ser utilizados em memórias atômicas e mostraremos a natureza do experimento que utilizamos para demonstrar superradiância da emissão de luz em estados de Fock. A partir do esboço dos passos realizados no experimento, no capítulo 5 mostramos o ponto central da tese: a teoria para a obtenção dos pacotes de onda para um e dois fótons detectados na fase de leitura da memória de nuvens de átomos frios, que também está elaborada no artigo principal associado ao trabalho de doutorado [30], com algumas mudanças que serão discutidas no capítulo. Dada a teoria, no capítulo 6, descrevemos em detalhe como funciona o experimento que iremos analisar e apresentamos a comparação dos dados obtidos com os resultados derivados do capítulo de teoria, mostrando com concordância satisfatória que a análise que obtivemos é apropriada para descrever o fenômeno da superradiância de um e dois fótons, como discutido nos artigos [29, 30]. Finalmente, no capítulo 7, apresentaremos as considerações finais do trabalho.

## 2 Interação de Átomos com Luz Quântica

Para descrever a interação da luz com a nuvem de átomos frios armadilhados, iremos fazer uma revisão de tópicos de ótica quântica e física atômica essenciais ao fenômeno, baseado principalmente na referência [8]. Neste trabalho, os átomos interagem com a luz tanto no nível quântico, quanto no nível clássico: o efeito da luz laser sobre os átomos será o que se espera de um campo clássico; já a radiação que é gerada pelos átomos será tratada quanticamente, pois veremos que é possível contar o número de fótons que são emitidos. Além disto, no tratamento de superradiância, procuraremos deixar claro quais as características da teoria que precisam do formalismo completo da mecânica quântica dentre aquelas que podem ser explicadas dentro da fenomenologia clássica. Assim, sempre que houver, iremos levar em conta primeiro uma justificativa clássica, para somente quando não for possível, tomar a explicação através da quântica.

Na seção 2.1 partiremos da quantização do campo eletromagnético no vácuo para obter a descrição quântica da luz e o comportamento de fótons enquanto não são absorvidos ou emitidos. Na seção 2.2 descreveremos como átomos podem ser tratados como sistemas de 2 ou 3 níveis, que garante uma simplificação da dinâmica dos átomos e permite um tratamento analítico. Reunindo estes elementos, iremos obter o hamiltoniano de interação de dipolo entre o campo e o átomo, para saber qual o efeito da emissão ou absorção de fótons na transição atômica ao longo de um dado par de níveis atômicos. Na seção 2.3 descreveremos a dinâmica de emissão espontânea, tanto de um ponto de vista clássico quanto de um ponto de vista da emissão de um sistema de dois níveis (quântico); assim veremos que a irreversibilidade do processo pode surgir de uma dinâmica unitária (e portanto reversível) de forma aproximada, dado que a dimensão do espaço de Hilbert dos modos do campo eletromagnético que acoplam com o sistema de dois níveis é muito maior e a diferença de energia entre eles pode ser arbitrariamente pequena. Por fim, na seção 2.4, faremos uma revisão breve da interação de um átomo de dois níveis com um campo monocromático ressonante, que resulta numa inversão de população periódica e será utilizada no processo de leitura da memória quântica.

### 2.1 Quantização do Campo Eletromagnético Livre

Para implementar a quantização canônica do campo eletromagnético, vamos por as equações de Maxwell em uma forma em que as ondas eletromagnéticas apareçam como soluções para um conjunto de equações canônicas de Hamilton. Mas antes disso, vamos realizar dois passos: primeiro, transformaremos as equações de Maxwell que dão origem às equações de onda para os campos  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  e  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  em uma equação para o potencial vetor

$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  no calibre de Coulomb; segundo, utilizaremos modos de onda plana para simplificar a dependência espacial do problema, ficando apenas com a dependência temporal na amplitude dos modos normais a serem resolvidos por conjuntos de equações independentes.

No calibre de Coulomb, que não é invariante por transformações relativísticas, o potencial vetor satisfaz  $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$  em um dado referencial preferencial. Nele, podemos ignorar o potencial escalar,  $\phi(\mathbf{r}, t) = 0$ , se considerarmos que, neste referencial, não há densidade líquida de cargas:  $\rho(\mathbf{r}, t) = 0$ . Além disto, também temos que, neste calibre, o potencial vetor é suficiente para estudar as soluções das equações de Maxwell que se comportam como ondas propagantes. Além disto, não iremos considerar a presença de correntes para estudar a quantização do campo nesta seção, logo, o conteúdo das equações de Maxwell fica assim:

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0, \quad \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (2.1b)$$

que são resumidas na equação de onda para o potencial vetor sem fontes

$$-\frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.2)$$

dado que  $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0$  e em conjunto com as definições dos campos elétrico e magnético:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \quad (2.3)$$

Aqui,  $c$  é a velocidade da luz:  $c^2 = 1/\mu_0\epsilon_0$ . Por fim, podemos exibir a energia do sistema em função do potencial vetor:

$$U = \int d^3\mathbf{r} \left[ \frac{\epsilon_0}{2} \left| \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)|^2 \right]. \quad (2.4)$$

Estas expressões contêm um acoplamento entre amplitudes do campo em posições vizinhas devido ao termo não-local  $\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ . Podemos eliminar esse acoplamento se utilizarmos a representação em modos normais, dada pela transformada de Fourier das componentes do campo, que são tratadas como um conjunto de funções apenas de  $t$ :

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}; t) \equiv \int d^3\mathbf{r} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{\sqrt{2\pi^3}} \quad (2.5)$$

para resolver a equação de onda (2.2) através de um conjunto de equações independentes:

$$\frac{k^2}{\mu_0} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}; t) + \epsilon_0 \frac{d^2 \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}; t)}{dt^2} = 0. \quad (2.6)$$

De acordo com a condição dada pelo calibre de Coulomb,  $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}; t)$  satisfaz  $\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}; t) = 0$ .

A densidade espectral da energia para ambos os modos conjugados  $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}; t)$  e  $\tilde{\mathbf{A}}(-\mathbf{k}; t)$  é obtida diretamente da equação (2.4), onde definimos  $k^2 = |\mathbf{k}|^2$  e utilizamos  $\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}; t) = 0$  para simplificar a fórmula e chegar a:

$$U = \int d^3\mathbf{k} \left[ \frac{\epsilon_0}{2} \frac{d\tilde{\mathbf{A}}(-\mathbf{k}; t)}{dt} \cdot \frac{d\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}; t)}{dt} + \frac{k^2}{2\mu_0} \tilde{\mathbf{A}}(-\mathbf{k}; t) \cdot \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{k}; t) \right]. \quad (2.7)$$

As condições  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}^*(\mathbf{r}, t)$  que relatam que os campos são reais passam a tomar a forma  $\tilde{\mathbf{A}}^*(\mathbf{k}; t) = \tilde{\mathbf{A}}(-\mathbf{k}; t)$ , garantindo que a densidade de energia também seja real. Ao tentar obter equações para os operadores de campo quantizados, os operadores hamiltonianos que fornecem as equações diferenciais corretas para os operadores na representação de Heisenberg:  $\hat{A}_i(\mathbf{k}; t) \equiv e^{i\hat{H}_{\text{em}}t/\hbar} \hat{A}_i(\mathbf{k}) e^{-i\hat{H}_{\text{em}}t/\hbar}$  dependem do hamiltoniano

$$\hat{H}_{\text{em}} = \int d^3\mathbf{k} \left[ \frac{1}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{P}}(-\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{k}) + \frac{k^2}{2\mu_0} \hat{\mathbf{A}}(-\mathbf{k}) \cdot \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{k}) \right], \quad (2.8)$$

em que  $\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{k})$  é o momento conjugado ao potencial vetor  $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{k})$ .

Agora iremos expandir esses operadores-vetores  $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{k})$  e  $\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{k})$  nos termos que carregam a natureza vetorial no espaço de momentos e nos que atuam no espaço de Hilbert:

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{k}) = \sum_i \mathbf{e}_i(\mathbf{k}) \hat{A}_i(\mathbf{k}), \quad \hat{\mathbf{P}}(\mathbf{k}) = \sum_i \mathbf{e}_i(\mathbf{k}) \hat{P}_i(\mathbf{k}), \quad (2.9)$$

com  $i = 1, 2$  e  $\mathbf{e}_1(\mathbf{k})$ ,  $\mathbf{e}_2(\mathbf{k})$  e  $\mathbf{u}(\mathbf{k}) \equiv \mathbf{k}/k$  formando um trio de vetores ortonormais e orientados de maneira que  $\mathbf{e}_1(\mathbf{k}) \times \mathbf{e}_2(\mathbf{k}) = \mathbf{u}(\mathbf{k})$ . Assim as relações de comutação canônicas são expressas na forma  $[\hat{A}_i(\mathbf{k}), \hat{P}_j(\mathbf{k}')] = i\hbar \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{i,j}$  e a equação (2.8) pode ser reescrita na forma

$$\hat{H}_{\text{em}} = \int d^3\mathbf{k} \left[ \frac{1}{2\epsilon_0} \sum_i \hat{P}_i(-\mathbf{k}) \hat{P}_i(\mathbf{k}) + \frac{k^2}{2\mu_0} \sum_i \hat{A}_i(-\mathbf{k}) \hat{A}_i(\mathbf{k}) \right]. \quad (2.10)$$

Das equações dinâmicas na representação de Heisenberg:

$$\frac{d\hat{A}_i(\mathbf{k}; t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}_i(\mathbf{k}; t), \hat{H}], \quad \frac{d\hat{P}_i(-\mathbf{k}; t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{P}_i(-\mathbf{k}; t), \hat{H}], \quad (2.11)$$

chegamos às equações diferenciais idênticas às que são obtidas em um oscilador harmônico:

$$\frac{d\hat{A}_i(\mathbf{k}; t)}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0} \hat{P}_i(-\mathbf{k}; t), \quad \frac{d\hat{P}_i(-\mathbf{k}; t)}{dt} = -\frac{k^2}{\mu_0} \hat{A}_i(\mathbf{k}; t), \quad (2.12)$$

que dão origem à equação da onda para o potencial vetor equivalente à equação (2.6):

$$\frac{k^2}{\mu_0} \hat{A}_i(\mathbf{k}; t) + \epsilon_0 \frac{d^2 \hat{A}_i(\mathbf{k}; t)}{dt^2} = 0. \quad (2.13)$$

As equações acopladas em (2.12) podem ser transformadas em equações desacopladas de primeira ordem se definirmos os operadores

$$\hat{a}_i^-(\mathbf{k}) \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_0 ck}{2\hbar}} \hat{A}_i(\mathbf{k}) + \frac{i}{\sqrt{2\hbar \epsilon_0 ck}} \hat{P}_i(-\mathbf{k}), \quad \hat{a}_i^+(\mathbf{k}) \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_0 ck}{2\hbar}} \hat{A}_i(-\mathbf{k}) - \frac{i}{\sqrt{2\hbar \epsilon_0 ck}} \hat{P}_i(\mathbf{k}) \quad (2.14)$$



que satisfazem as relações de comutação  $[\hat{a}_i^-(\mathbf{k}), \hat{a}_j^+(\mathbf{k}')] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\delta_{i,j}$ . Os potenciais e seus momentos conjugados são recuperados através de

$$\hat{A}_i(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 ck}} (\hat{a}_i^-(\mathbf{k}) + \hat{a}_i^+(-\mathbf{k})), \quad \hat{P}_i(\mathbf{k}) = -i\sqrt{\frac{\hbar\epsilon_0 ck}{2}} (\hat{a}_i^-(-\mathbf{k}) - \hat{a}_i^+(\mathbf{k})), \quad (2.15)$$

logo, a expressão para o hamiltoniano do problema pode ser reescrita na seguinte forma

$$\frac{1}{2\epsilon_0} \hat{P}_i(-\mathbf{k}) \hat{P}_i(\mathbf{k}) + \frac{k^2}{2\mu_0} \hat{A}_i(-\mathbf{k}) \hat{A}_i(\mathbf{k}) = \hbar ck [\hat{a}_i^+(\mathbf{k}) \hat{a}_i^-(\mathbf{k}) + \hat{a}_i^+(-\mathbf{k}) \hat{a}_i^-(-\mathbf{k}) + \delta(0)] \quad (2.16)$$

em que aplicamos a relação de comutação para fazer a seguinte simplificação:

$$\hat{a}_i^+(\mathbf{k}) \hat{a}_i^-(\mathbf{k}) + \hat{a}_i^-(\mathbf{k}) \hat{a}_i^+(\mathbf{k}) = 2\hat{a}_i^+(\mathbf{k}) \hat{a}_i^-(\mathbf{k}) + \delta(0). \quad (2.17)$$

O termo de densidade de energia do vácuo, representado por  $\hbar\omega\delta(0)$ , em que definimos  $\omega = ck$ , será omitido por gerar uma contribuição uniforme para qualquer estado do campo, logo não possui nenhum efeito sobre qualquer fenômeno descrito neste trabalho.

As condições  $\hat{A}_i^\dagger(\mathbf{k}) = \hat{A}_i(-\mathbf{k})$  e  $\hat{P}_i^\dagger(\mathbf{k}) = \hat{P}_i(-\mathbf{k})$  são convertidas em  $\hat{a}_i^{-\dagger}(\mathbf{k}) = \hat{a}_i^+(\mathbf{k})$ . Daqui em diante, iremos descartar o símbolo  $\pm$  nos operadores  $\hat{a}_i^\pm(\mathbf{k})$  por simplicidade, dado que o símbolo  $\dagger$  cumpre o papel de distinguir  $\hat{a}_i^-(\mathbf{k}) \equiv \hat{a}_i(\mathbf{k})$  de  $\hat{a}_i^+(\mathbf{k}) = \hat{a}_i^\dagger(\mathbf{k})$ . Assim, finalmente obtemos a fórmula do hamiltoniano para o campo eletromagnético livre de fontes em sua versão final:

$$\hat{H}_{\text{em}} \equiv \int d^3\mathbf{k} \hbar\omega \sum_i \hat{a}_i^\dagger(\mathbf{k}) \hat{a}_i(\mathbf{k}). \quad (2.18)$$

A partir desta fórmula, a evolução temporal destes operadores na representação de Heisenberg é simplesmente

$$\frac{d\hat{a}_i(\mathbf{k}; t)}{dt} = -i\omega\hat{a}_i(\mathbf{k}; t), \quad (2.19)$$

que é uma equação linear, de primeira ordem, desacoplada e que possui solução harmônica:

$$\hat{a}_i(\mathbf{k}; t) = \hat{a}_i(\mathbf{k}) e^{-i\omega t}. \quad (2.20)$$

A partir da equação (2.15), a evolução temporal de um modo do campo é dada por

$$\hat{A}_i(\mathbf{k}; t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega}} [\hat{a}_i(\mathbf{k}) e^{-i\omega t} + \hat{a}_i^\dagger(-\mathbf{k}) e^{i\omega t}], \quad (2.21)$$

de forma que o potencial vetor no espaço direto evolui temporalmente da seguinte forma

$$\hat{A}_i(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{8\pi^3\epsilon_0}} \int d^3\mathbf{k} \frac{\hat{a}_i(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} + \hat{a}_i^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}}{\sqrt{2\omega}} \quad (2.22)$$

e é fácil verificar que esta amplitude satisfaz a equação de onda (2.2) oriunda das equações de Maxwell em uma região do espaço livre de fontes.

Os estados quânticos que compõem o espaço de Hilbert sobre o qual os operadores  $\hat{a}_i(\mathbf{k})$  atuam podem ser deduzidos a partir da relação de comutação  $[\hat{a}_i(\mathbf{k}), \hat{a}_j^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\delta_{i,j}$  e do fato que ambos os operadores  $\hat{a}_i(\mathbf{k})\hat{a}_i^\dagger(\mathbf{k})$  e  $\hat{a}_i^\dagger(\mathbf{k})\hat{a}_i(\mathbf{k})$  possuem apenas autovalores reais não-negativos. Estes estados podem ser construídos a partir do estado de vácuo  $|\emptyset\rangle$ , definido por  $\hat{a}_i(\mathbf{k})|\emptyset\rangle = 0$ , e aplicações do operador criação  $\hat{a}_i^\dagger(\mathbf{k})$  sobre ele. Por exemplo, o vetor (não-normalizável)  $\hat{a}_i^\dagger(\mathbf{k})|\emptyset\rangle \equiv |\mathbf{k}_i\rangle$  representa o campo com um fóton no modo de onda plana  $\mathbf{k}$  cuja polarização é na direção  $\mathbf{e}_i(\mathbf{k})$ . De forma geral, um estado de um ou mais fótons num modo pode ser obtido através de

$$\hat{a}_\phi \equiv \sum_i \int d^3\mathbf{k} \phi_i(\mathbf{k})\hat{a}_i(\mathbf{k}), \quad (2.23)$$

onde  $\phi_i(\mathbf{k})$  são as amplitudes da distribuição do modo e satisfazem  $\sum_i \int d^3\mathbf{k} \phi_i(\mathbf{k})\phi_i^*(\mathbf{k}) = 1$ , fazendo que a relação de comutação entre dois desses modos de campo seja dada por  $[\hat{a}_\phi, \hat{a}_\varphi^\dagger] = \sum_i \int d^3\mathbf{k} \phi_i(\mathbf{k})\varphi_i^*(\mathbf{k})$ , que define um produto interno entre os modos  $\phi$  e  $\varphi$ . Em particular, o comutador dos operadores  $\hat{a}_\phi$  e  $\hat{a}_\phi^\dagger$  de um mesmo modo é dado por  $[\hat{a}_\phi, \hat{a}_\phi^\dagger] = 1$ , enquanto que entre modos ortogonais, o comutador de  $\hat{a}_\phi$  e  $\hat{a}_\varphi^\dagger$  é dado por  $[\hat{a}_\phi, \hat{a}_\varphi^\dagger] = 0$ .

## 2.2 Interação com um Átomo de 2 Níveis

Agora iremos encontrar o hamiltoniano quantizado que descreve a evolução das propriedades da fonte que gera a onda eletromagnética. Um átomo qualquer, mesmo o mais simples deles, o átomo de hidrogênio, é descrito por um conjunto discreto de níveis atômicos numa estrutura contendo infinitos estados possíveis. Porém, a interação do átomo com a luz em um intervalo de frequências bem definido permite que possamos isolar apenas um subconjunto reduzido destes níveis, o que permite que um tratamento analítico seja realizado.

Consideraremos, a princípio, o sistema físico mais simples possível: o átomo de dois níveis. Cada um dos níveis corresponde a uma função de onda estacionária para o movimento relativo entre o elétron e o núcleo e o hamiltoniano que descreve a evolução desses dois níveis a menos da interação com o campo eletromagnético é simplesmente

$$\hat{H}_a \equiv \hbar\omega_0 |e\rangle\langle e|, \quad (2.24)$$

em que  $\hbar\omega_0$  é a diferença entre as energias do estado excitado  $|e\rangle$  e fundamental  $|g\rangle$ . O zero da energia potencial é escolhido para coincidir com a energia do estado fundamental.

Uma propriedade importante dos auto-estados do operador momento angular orbital é que tais funções de onda possuem paridade bem definida. Dentro da aproximação de dipolo para a interação com o campo, auto-estados do operador paridade não contribuem para o momento de dipolo  $\hat{\mathbf{p}}$  [8]. Assim, os dois níveis selecionados para formar o modelo do átomo de dois níveis precisam possuir paridades distintas para que a interação com a

luz surja a nível de interação de dipolo. Desta restrição, deduz-se que o operador de Pauli  $\sigma_3 \equiv \frac{1}{2} |g\rangle\langle g| - \frac{1}{2} |e\rangle\langle e|$  não aparece para na expressão de  $\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{k})$ , mas apenas os operadores  $\hat{\sigma}_1 \equiv \frac{1}{2} |g\rangle\langle e| + \frac{1}{2} |e\rangle\langle g|$  e  $\hat{\sigma}_2 \equiv \frac{1}{2i} |g\rangle\langle e| - \frac{1}{2i} |e\rangle\langle g|$ . Afim de manter a notação mais simples, definiremos  $\hat{\sigma}_- \equiv |g\rangle\langle e|$  e  $\hat{\sigma}_+ \equiv |e\rangle\langle g|$ . Nesta aproximação, a fonte passa a ser descrita como um objeto puntiforme localizado em  $\mathbf{r}_0$ , e portanto, o momento de dipolo, ao contrário do que acontece com o campo eletromagnético, não é descrito por um contínuo de graus de liberdade distintos, mas sim através de

$$\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{k}) \equiv e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0} (\mathbf{p}_1 \hat{\sigma}_1 + \mathbf{p}_2 \hat{\sigma}_2). \quad (2.25)$$

Como  $\hat{\mathbf{p}}(-\mathbf{k}) = \hat{\mathbf{p}}^\dagger(\mathbf{k})$ , temos que  $\mathbf{p}_1$  e  $\mathbf{p}_2$  são vetores reais definidos pelas propriedades espaciais dos estados estacionários que compõem o sistema de dois níveis. Neste trabalho, consideraremos que a polarização da luz que interage com os níveis atômicos é circular isto implica, em particular, que  $p_0 \equiv |\mathbf{p}_1|/\sqrt{2} = |\mathbf{p}_2|/\sqrt{2}$  e  $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = 0$ . Ao longo do eixo perpendicular a ambos  $\mathbf{p}_1$  e  $\mathbf{p}_2$ , podemos utilizar estes vetores para definir a convenção de direções de polarização que define  $\mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{e}_1(\mathbf{k}_0)$  e  $\mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{e}_2(\mathbf{k}_0)$  ao longo deste eixo em que  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \perp \mathbf{k}_0$ .

O termo de interação de dipolo elétrico, seguindo a referência [8], é dado por

$$\hat{H}_1 = -\hat{\mathbf{p}}(\mathbf{r}_0) \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}_0). \quad (2.26)$$

Com o auxílio da equação para o dipolo elétrico (2.25) e do momento conjugado do campo (2.15), ambos no espaço recíproco, temos que o termo de interação é dado por

$$\hat{H}_1 = -i \int d^3\mathbf{k} \sqrt{2} p_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0} (\mathbf{e}_1 \hat{\sigma}_1 + \mathbf{e}_2 \hat{\sigma}_2) \cdot \sum_i \mathbf{e}_i(-\mathbf{k}) \sqrt{\frac{\hbar\omega\epsilon_0}{2}} [\hat{a}_i(-\mathbf{k}) - \hat{a}_i^\dagger(\mathbf{k})]. \quad (2.27)$$

Agora faremos a aproximação escalar, em que consideraremos que a interação é privilegiada o longo de  $\mathbf{u}(\mathbf{k}_0)$ , tal que  $\mathbf{e}_1(\mathbf{k}) \approx \mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2(\mathbf{k}) \approx \mathbf{e}_2$ , chegando a

$$\hat{H}_1 \approx i \int d^3\mathbf{k} \hbar g(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0} \left[ (\hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_+) \frac{\hat{a}_1(-\mathbf{k}) - \hat{a}_1^\dagger(\mathbf{k})}{\sqrt{2}} - i(\hat{\sigma}_- - \hat{\sigma}_+) \frac{\hat{a}_2(-\mathbf{k}) - \hat{a}_2^\dagger(\mathbf{k})}{\sqrt{2}} \right], \quad (2.28)$$

definindo  $g(\mathbf{k}) = -p_0 \sqrt{\omega\epsilon_0/2\hbar}$ . Neste ponto, eliminamos os termos do tipo  $\hat{\sigma}_- \hat{a}(-\mathbf{k})$  e  $\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})$ , com base na aproximação de onda girante que será justificada na próxima seção, e reorganizamos os termos, obtendo

$$\hat{H}_1 \approx i \int d^3\mathbf{k} \hbar g(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0} \left[ \hat{\sigma}_+ \frac{\hat{a}_1(-\mathbf{k}) + i\hat{a}_2(-\mathbf{k})}{\sqrt{2}} - \hat{\sigma}_- \frac{\hat{a}_1^\dagger(\mathbf{k}) - i\hat{a}_2^\dagger(\mathbf{k})}{\sqrt{2}} \right]. \quad (2.29)$$

Por fim, redefinimos os modos do campo eletromagnético da seguinte forma

$$\hat{a}(\mathbf{k}) \equiv \frac{\hat{a}_1(\mathbf{k}) + i\hat{a}_2(\mathbf{k})}{\sqrt{2}} \quad (2.30)$$

e representa um modo do campo com luz circularmente polarizada, com isto,

$$\hat{H}_1 = i \int d^3\mathbf{k} \hbar g(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0} [\hat{\sigma}_+ \hat{a}(-\mathbf{k}) - \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})] \quad (2.31)$$

ou, fazendo algumas manipulações para deixar a expressão em termos somente de  $\hat{a}(\mathbf{k})$  e  $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})$ ,

$$\hat{H}_1 = i \int d^3\mathbf{k} \hbar g(\mathbf{k}) [e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0} \hat{\sigma}_+ \hat{a}(\mathbf{k}) - e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0} \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})]. \quad (2.32)$$

Finalmente, se reintroduzimos os termos de evolução livre em (2.18) e em (2.24) que formam o hamiltoniano livre do problema

$$\hat{H}_0 \equiv \hat{H}_{\text{em}} + \hat{H}_a, \quad (2.33)$$

chegamos ao hamiltoniano completo do sistema,

$$\begin{aligned} \hat{H} = \hbar\omega_0 |e\rangle\langle e| + \int d^3\mathbf{k} \hbar\omega \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) \hat{a}(\mathbf{k}) \\ + i \int d^3\mathbf{k} \hbar g(\mathbf{k}) [e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0} \hat{\sigma}_+ \hat{a}(\mathbf{k}) - e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0} \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})]. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Para poder descrever a evolução das amplitudes de probabilidade, especificaremos a base na qual os estados serão escritos. Para descrever o átomo, a base é formada por  $|g\rangle$  e  $|e\rangle$ , os estados fundamental e excitado, e para o campo, os estados para o campo que serão usados a princípio serão  $|\emptyset\rangle$  e  $|\mathbf{k}\rangle$ , o estado de vácuo e os estados contendo um fóton no modo normal de vetor de onda  $\mathbf{k}$  na polarização estabelecida. O hamiltoniano em (2.34) possui a simetria que garante a conservação do número de excitações. Assim, por exemplo, o estado de menor energia  $|g\rangle |\emptyset\rangle$  é um auto-estado do hamiltoniano:  $\hat{H} |g\rangle |\emptyset\rangle = 0$ , que caracteriza o estado sem nenhuma excitação. Já o conjunto de estados dado por  $|e\rangle |\emptyset\rangle$  e  $|g\rangle |\mathbf{k}\rangle$  não são individualmente auto-estados do hamiltoniano mas o subespaço vetorial gerado por eles é fechado sob a ação do hamiltoniano:

$$\hat{H} \left( \alpha |e\rangle |\emptyset\rangle + \int d^3\mathbf{k} \beta(\mathbf{k}) |g\rangle |\mathbf{k}\rangle \right) = \alpha' |e\rangle |\emptyset\rangle + \int d^3\mathbf{k} \beta'(\mathbf{k}) |g\rangle |\mathbf{k}\rangle, \quad (2.35)$$

que caracterizam estados com uma excitação. Vale lembrar que esta simetria é válida apenas dentro da aproximação de onda-girante. É a partir deste conjunto de estados que iremos estudar a seguir a emissão espontânea de um fóton por um átomo de dois níveis inicialmente preparado no estado excitado e com o campo no estado de vácuo.

## 2.3 Emissão Espontânea no Formalismo de Weisskopf-Wigner

Para estudar a emissão espontânea, consideraremos a situação mais simples possível que já exhibe esse fenômeno, um átomo excitado interagindo com o campo no estado de vácuo

$$|\psi_0\rangle \equiv |e\rangle |\emptyset\rangle. \quad (2.36)$$

A evolução temporal será tomada utilizando-se a representação de interação em que o hamiltoniano (2.34) é separado em duas partes: um termo que envolve apenas a dinâmica local  $\hat{H}_0$  e o termo em (2.32) que envolve a interação entre elas. A razão em dividir o hamiltoniano em duas partes reside em que a parte local é um hamiltoniano cujo resultado já obtemos: os estados que utilizamos como base para descrever o problema são os seus auto-estados. Desta forma, em vez de gerar uma unitária de evolução temporal  $\hat{U}(t) \equiv e^{-i\hat{H}t/\hbar}$  através do hamiltoniano completo, faremos  $\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}_0t/\hbar}\hat{U}_{\text{int}}(t)$ , em que  $\hat{U}_{\text{int}}(t) \equiv e^{-i\hat{H}_{\text{int}}t/\hbar}$ . Apesar de parecer uma expressão mais elaborada para se gerar o operador de evolução, o novo hamiltoniano  $\hat{H}_{\text{int}}(t)$  possui características que simplificam a integração temporal [35] e é dado por  $\hat{H}_{\text{int}}(t) = e^{i\hat{H}_0t/\hbar}\hat{H}_1e^{-i\hat{H}_0t/\hbar}$ , que é idêntica à forma como um operador na representação de Heisenberg evolui no tempo de acordo com o hamiltoniano local. Como já sabemos resolver o problema para a evolução do átomo e campo sem interação, podemos aplicar os operadores de evolução livre sobre  $\hat{a}(\mathbf{k})$  e  $\hat{\sigma}_-$ :

$$\hat{H}_{\text{int}}(t) = i \int d^3\mathbf{k} \hbar g(\mathbf{k}) \left[ e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0 - i(\omega - \omega_0)t} \hat{\sigma}_+ \hat{a}(\mathbf{k}) - e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0 + i(\omega - \omega_0)t} \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) \right]. \quad (2.37)$$

A dependência temporal oscila no tempo com frequência dada por  $\omega - \omega_0$ , portanto os modos de frequência próxima à frequência natural  $\omega_0$  são os mais importantes durante a interação; no caso de valores de  $|\omega - \omega_0|$  muito elevados, a contribuição ao longo de metade da oscilação tende a ser anulada pela contribuição durante a metade seguinte. Essa seleção de intervalo de frequência relevante que ajuda a permitir que o átomo possa ser modelado por um sistema de dois níveis; os demais níveis do átomo são pouco relevantes por interagir com a luz de frequência muito distintas, ou são evitados via regras de seleção. Aqui podemos justificar o uso da aproximação de onda girante: os termos do hamiltoniano que contêm  $\hat{\sigma}_- \hat{a}(\mathbf{k})$  ou  $\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})$  terão variação temporal na forma  $e^{\pm i(\omega + \omega_0)t}$  e, para qualquer valor de  $\omega$ , os termos de interação possuem variação temporal rápida.

De posse deste hamiltoniano e do estado inicial, podemos agora prosseguir no cálculo da evolução temporal do estado quântico de uma excitação na representação de interação  $|\psi(t)\rangle \equiv \hat{U}_{\text{int}}(t)|\psi_0\rangle$ , através da evolução temporal das amplitudes de estado na base formada por  $|e\rangle|\emptyset\rangle$  e  $|g\rangle|\mathbf{k}\rangle$

$$|\psi(t)\rangle = \alpha(t)|e\rangle|\emptyset\rangle + \int d^3\mathbf{k} \beta(\mathbf{k}; t)|g\rangle|\mathbf{k}\rangle. \quad (2.38)$$

A condição inicial em (2.36) garante que  $\alpha(0) = 1$  e  $\beta(\mathbf{k}; 0) = 0$ . A equação de Schrödinger em termos dessas amplitudes é portanto

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \int d^3\mathbf{k} g(\mathbf{k}) e^{-i(\omega - \omega_0)t} \beta(\mathbf{k}; t) \quad (2.39a)$$

$$\frac{d\beta(\mathbf{k}, t)}{dt} = -g(\mathbf{k}) e^{i(\omega - \omega_0)t} \alpha(t). \quad (2.39b)$$

O primeiro passo para aplicar o método de Weisskopf-Wigner na resolução desse conjunto de equações diferenciais, é aproveitar que  $\beta(\mathbf{k}; 0) = 0$  e integrar a equação (2.39b) ao longo

do intervalo de 0 ao instante  $t$ :

$$\beta(\mathbf{k}; t) = -g(\mathbf{k}) \int_0^t dt' e^{i(\omega - \omega_0)t'} \alpha(t'). \quad (2.40)$$

Em seguida, reintroduzimos essa expressão de volta a equação diferencial de  $\alpha(t)$  em (2.39a):

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = - \int d^3\mathbf{k} |g(\mathbf{k})|^2 \int_0^t ds e^{-i(\omega - \omega_0)(t-t')} \alpha(t'), \quad (2.41)$$

ou na forma equivalente (dada a mudança de variáveis  $s = t - t'$ )

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = - \int d^3\mathbf{k} |g(\mathbf{k})|^2 \int_0^t ds e^{-i(\omega - \omega_0)s} \alpha(t - s), \quad (2.42)$$

podemos fazer o par de aproximações que caracteriza o método.

A aproximação consiste em ignorar a dependência de  $\alpha(t - s)$  em  $s$  e ignorar o limite superior de integração:

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = - \int d^3\mathbf{k} |g(\mathbf{k})|^2 \int_0^\infty ds e^{-i(\omega - \omega_0)s} \alpha(t), \quad (2.43)$$

de forma que esta equação passa a tomar a forma

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = -\gamma\alpha(t), \quad (2.44)$$

em que definimos  $\gamma$  como o trecho independente do tempo fatorado após as aproximações:

$$\gamma = \int d^3\mathbf{k} |g(\mathbf{k})|^2 \int_0^\infty ds e^{-i(\omega - \omega_0)s}. \quad (2.45)$$

Para ilustrar a natureza das aproximações, vemos que o termo de interação  $H_1$  possui magnitude muito menor que o termo de energia local  $H_0$ , de forma que, na representação de interação, as amplitudes  $\alpha(t)$  e  $\beta(\mathbf{k}; t)$  variem numa taxa muito inferior que  $\omega$  ou  $\omega_0$ , sendo assim justificável a substituição de  $\alpha(t - s) \approx \alpha(t)$ . Além disso, a aproximação de Weisskopf-Wigner também não é válida para tempos curtos, de ordem de grandeza próxima a  $\omega^{-1}$ , tal que o número de ciclos que são integrados seja grande o suficiente para ser considerado virtualmente ilimitado.

A solução dessa equação diferencial é simplesmente uma exponencial de taxa  $\gamma$

$$\alpha(t) = e^{-\gamma t}. \quad (2.46)$$

Com esta solução, podemos obter também a evolução temporal das amplitudes  $\beta(\mathbf{k}; t)$  a partir de (2.40):

$$\beta(\mathbf{k}; t) = -g(\mathbf{k}) \int_0^t dt' e^{i(\omega - \omega_0 + i\gamma)t'}. \quad (2.47)$$

A taxa de decaimento  $\gamma$  tem uma componente real definida como  $\Gamma \equiv 2 \operatorname{Re}\{\gamma\}$  que pode ser reescrita como

$$\Gamma = \int d^3\mathbf{k} |g(\mathbf{k})|^2 \int_{-\infty}^\infty ds e^{-i(\omega - \omega_0)s}. \quad (2.48)$$

Como essa componente real é positiva, em  $t \rightarrow \infty$  a amplitude  $\alpha(t)$  tende a zero, ou seja, o átomo decai para o nível fundamental emitindo um fóton. Ainda neste limite, a amplitude de probabilidade de observar o fóton no modo de onda plana de vetor de onda  $\mathbf{k}$  é  $\beta(\mathbf{k}) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \beta(\mathbf{k}; t)$ , ou

$$\beta(\mathbf{k}) = -\frac{g(\mathbf{k})}{\omega - \omega_0 + i\gamma}. \quad (2.49)$$

Este denominador é característico de uma amplitude espectral lorentziana e condiz com a transformada de Fourier de um campo oscilando com decaimento exponencial. Além disso, vemos que a direcionalidade do fóton emitido é determinada apenas pelas propriedades particulares da interação de dipolo entre o átomo e o campo, descritas na função  $g(\mathbf{k})$ .

Este resultado pode ser interpretado da seguinte maneira: a aproximação de Weisskopf-Wigner resulta em um modelo markoviano para a evolução do sistema. Ou seja, a cada instante de tempo, a variação na amplitude  $\alpha(t)$ , que representa o sistema com a excitação ainda presente no átomo, depende apenas da própria amplitude, como descrita na equação diferencial (2.44). Este tipo de evolução é irreversível, no sentido que, apenas definindo o estado inicial do átomo e mantendo o campo no estado de vácuo, não é possível que a probabilidade de encontrar a excitação presente no átomo cresça com o tempo. A causa desta irreversibilidade reside no acoplamento de um único sistema de dois níveis com um continuum de modos do campo eletromagnético. Ainda assim, na descrição completa do problema, a excitação é transferida coerentemente do átomo para o campo.

## 2.4 Interação de um Átomo com Campo Clássico

Seja um átomo de dois níveis interagindo com um campo eletromagnético descrito classicamente e oriundo de uma fonte externa, isto é, que não inclui o campo gerado pelo próprio átomo. Este campo será tratado parametricamente como um sistema que evolui no tempo de acordo com a equação de onda livre de fontes. Por ser descrito classicamente, em vez de consideramos os operadores  $\hat{a}(\mathbf{k})$ , que evoluem no tempo da forma  $\hat{a}(\mathbf{k}; t) = \hat{a}(\mathbf{k})e^{-i\omega t}$ , representaremos o campo através da amplitude  $\tilde{a}(\mathbf{k}; t) = \tilde{a}(\mathbf{k})e^{-i\omega t}$ . Baseado no hamiltoniano de interação entre átomo e campo na equação (2.37), a dinâmica para a evolução quântica do átomo apenas será dada por

$$\hat{H}_{\text{int}}(t) = i \int d^3\mathbf{k} \hbar g(\mathbf{k}) \left[ e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0 - i(\omega - \omega_0)t} \hat{\sigma}_+ \tilde{a}(\mathbf{k}) - e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0 + i(\omega - \omega_0)t} \hat{\sigma}_- \tilde{a}^*(\mathbf{k}) \right]. \quad (2.50)$$

A solução mais simples para este problema surge se nos limitarmos a considerar um modo quasi-monocromático de onda plana do campo, ressonante com a frequência natural de oscilação, tal que  $\omega = \omega_0$  e  $\mathbf{k} \approx \mathbf{k}_0$ . Assim, podemos simplificar ainda mais o hamiltoniano:

$$\hat{H}_{\text{int}} = -\frac{i\hbar\Omega^*}{2} e^{i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}_0} \hat{\sigma}_- + \frac{i\hbar\Omega}{2} e^{-i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}_0} \hat{\sigma}_+, \quad (2.51)$$

onde  $\Omega \equiv \int d^3\mathbf{k} \hbar g(\mathbf{k}) \tilde{a}(\mathbf{k})$  é uma grandeza que caracteriza a interação e  $|\Omega|$  corresponde à frequência de Rabi para as oscilações atômicas. Este hamiltoniano pode ser reescrito como

$$\hat{H}_{\text{int}} = -\hbar \text{Im}\{\Omega e^{-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_0}\} \hat{\sigma}_1 + \hbar \text{Re}\{\Omega e^{-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_0}\} \hat{\sigma}_2. \quad (2.52)$$

Desta forma, o efeito do hamiltoniano pode ser descrito como uma rotação da esfera de Bloch que descreve o espaço de estados de um sistema de dois níveis em torno de uma direção perpendicular ao eixo que intercepta a esfera nos pontos referentes aos estados  $|g\rangle$  e  $|e\rangle$ : estes estados percorrem um grande círculo na esfera que leva um estado  $|g\rangle$  a um  $|e\rangle$  e vice-versa com frequência angular  $|\Omega|/2$  [36].

Na representação de interação, temos que um átomo inicialmente preparado no estado fundamental  $|\psi_0\rangle = |g\rangle$  evolui para um estado do tipo

$$|\psi(t)\rangle = \alpha(t) |g\rangle + \beta(t) |e\rangle, \quad (2.53)$$

em que  $\alpha(0) = 1$  e  $\beta(0) = 0$ . De acordo com (2.51), a equação de Schrödinger em termos dessas amplitudes é dada por

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{\Omega^*}{2} e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_0} \beta(t), \quad \frac{d\beta(t)}{dt} = -\frac{\Omega}{2} e^{-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_0} \alpha(t). \quad (2.54)$$

estas equações também são semelhantes às equações de Hamilton do oscilador harmônico, com a diferença de que agora temos equações envolvendo variáveis complexas. Através de uma simples manipulação dos termos dessa equação, podemos reescrevê-la como as equações diferenciais satisfeitas pelas funções trigonométricas  $\sin\left(\frac{|\Omega|}{2}t\right)$  e  $\cos\left(\frac{|\Omega|}{2}t\right)$ . Logo, as soluções deste conjunto de equações, satisfazendo as condições iniciais dadas, são

$$\alpha(t) = \cos\left(\frac{|\Omega|}{2}t\right), \quad \beta(t) = -\frac{\Omega}{|\Omega|} e^{-i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_0} \sin\left(\frac{|\Omega|}{2}t\right). \quad (2.55)$$

A dinâmica caracterizada por um hamiltoniano constante no tempo corresponde a uma rotação da esfera de Bloch em torno do eixo definido pelas componentes que acompanham dos operadores de Pauli em (2.52), de acordo com a figura 1. Em particular, os estados  $|g\rangle$  e  $|e\rangle$  se encontram nos pólos da esfera de Bloch e a evolução eventualmente leva um estado inicialmente preparado no estado fundamental ao estado excitado, e vice-versa. O efeito do campo monocromático sobre o átomo de dois níveis é a indução de uma oscilação descrita por uma frequência  $|\Omega|$ , e estas oscilações são conhecidas como oscilações de Rabi.

No capítulo 5 iremos utilizar ambas as dinâmicas descritas neste capítulo ao descrever a evolução temporal de um conjunto de átomos de três níveis. As regras de seleção, válidas na aproximação de dipolo para a interação do átomo com o campo, determinam que a luz de polarizações ortogonais possam interagir com o átomo, permitindo que, por um lado, o átomo interaja com o campo descrito classicamente por uma onda monocromática, enquanto que por outro lado, interaja com o campo eletromagnético no estado de vácuo, exigindo a aplicação dos dois métodos resumidos neste capítulo.



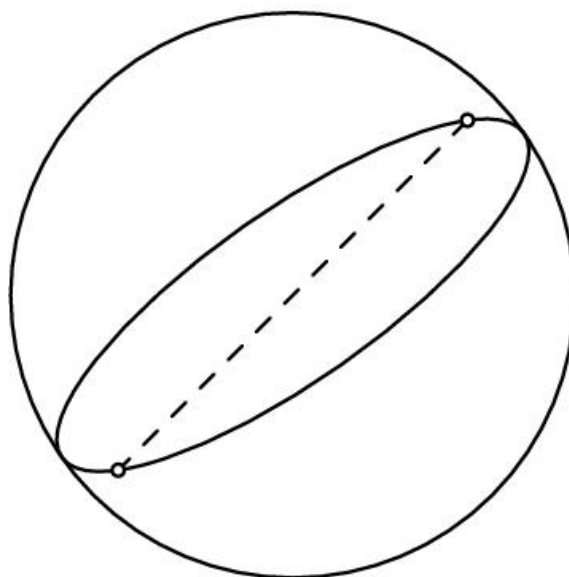


Figura 1 – Representação do espaço de estados exibindo a evolução temporal dos estados  $|g\rangle$  e  $|e\rangle$  na presença de um campo elétrico ressonante com a transição  $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ .

## 3 Superradiância

Quando um conjunto de átomos emite luz, costuma-se considerar que cada fonte age independentemente das outras. Se não há interação entre as partes que constituem um ensemble, a luz gerada pode ser calculada a partir da interação quântica do campo eletromagnético com o dipolo elétrico de cada átomo. Neste caso, a intensidade da luz é simplesmente dada pela soma das intensidades de cada um dos campos gerados. Este modelo do processo de emissão desconsidera que é possível observar efeitos de interferência entre as ondas geradas pelas diferentes fontes. A *decoerência* é predominante na maior parte dos fenômenos físicos que não são deliberadamente projetados para suprimi-la; o que frequentemente salva a descrição da emissão por conjuntos de átomos via emissões independentes. Porém, quando a interferência não pode ser desprezada para a obtenção das propriedades corretas da luz, a dinâmica atômica precisa ser tratada coletivamente, abrindo espaço para efeitos interessantes. Dentre eles, a superradiância (sub-radiância) surge como um(a) aumento (diminuição) na taxa de decaimento de um dado arranjo de átomos devido a efeitos coletivos [1].

Neste capítulo, faremos uma breve revisão do fenômeno de superradiância para nos familiarizarmos com as situações em que há a necessidade de tratar muitos átomos interagindo coletivamente com a luz. Na seção 3.1, será estudada a emissão de  $N$  átomos de 2 níveis no cenário ideal em que eles estão próximos uns dos outros ao mesmo tempo em que interações átomo-átomo mediadas pelo campo eletromagnético são desprezadas. Na seção 3.2, veremos como podemos descrever a emissão observada quando as fontes são independentes, ainda utilizando o formalismo quântico para tal. Desta forma, podemos comparar as duas situações físicas para ver quais as diferenças que resultam na modificação da taxa de emissão. Para complementar, na seção 3.3, mostramos uma maneira diferente de se obter a emissão com taxas convencionais, através do fenômeno de decoerência, para os casos particulares de  $N = 2$  e  $N = 3$ . Na seção 3.4, será discutido como que, apesar de ter sido descoberta a partir de um modelo quântico, a superradiância pode aparecer mesmo quando ambas as fontes e a luz possam ser tratadas classicamente. Por fim, na seção 3.5, discutiremos com mais detalhes a superradiância no tipo de geometria que será aplicada para descrever a emissão coletiva nas memórias quânticas em nuvens de átomos frios.

### 3.1 Modelo de Dicke Básico

O primeiro estudo de superradiância, sugerindo que a luz gerada por um conjunto de muitos átomos pode ser emitida de forma mais acelerada, foi realizado por Dicke em

1954 [1]. Naquele trabalho, foi analisado como um conjunto de átomos de 2 níveis evolui temporalmente a partir do instante em que todos estão excitados

$$|\psi_0\rangle = |ee\dots e\rangle, \quad (3.1)$$

onde  $|ee\dots e\rangle = |e\rangle_1 |e\rangle_2 \dots |e\rangle_N$  é o estado em que todos os  $N$  átomos estão no nível excitado  $|e\rangle$ . Daí, estima-se o perfil temporal da luz emitida a partir do decréscimo da energia que é convertida em radiação.

Em uma primeira aproximação, considera-se que todos os átomos são arranjados em uma região do espaço de dimensões muito menores que o comprimento de onda da luz, e que a modificação nos níveis de energia graças à interação de dipolo entre eles é desprezada. Na notação que utilizaremos, o estado de (3.1) é representado por

$$|N, 0\rangle_N \equiv |ee\dots e\rangle, \quad (3.2)$$

O índice 0 em todos os estados dessa sequência de decaimento (estados de Dicke) é introduzido pois esta é apenas uma sequência de decaimento possível que possui dimensão  $N + 1$ , um para cada número de excitações. Em comparação com a dimensão do espaço de estados de  $N$  átomos de 2 níveis ( $2^N$ ) há toda uma gama de estados que não são acessados através desta sequência. Em particular, a dimensão do espaço de estados que contém  $n$  átomos excitados num conjunto de  $N$  é  $\binom{N}{n} = N!/n!(N-n)!$ . Após o primeiro decaimento, o estado com  $N - 1$  átomos no nível  $|e\rangle$  e 1 no nível  $|g\rangle$  é dado por

$$|N - 1, 0\rangle_N \equiv \frac{|ge\dots e\rangle + |eg\dots e\rangle + \dots + |ee\dots g\rangle}{\sqrt{N}}, \quad (3.3)$$

pois o fóton emitido não contém informação sobre a identidade do átomo que o emitiu. O estado descrevendo  $n$  excitações é dado por  $|n, 0\rangle_N$  e contém todas as permutações com  $n$  átomos no nível  $|e\rangle$  e  $N - n$  no nível  $|g\rangle$ , com amplitudes idênticas em cada um deles, dada por  $\binom{N}{n}^{-1/2}$  para que o estado seja normalizado. Por fim, o processo de emissão termina em

$$|0, 0\rangle_N \equiv |gg\dots g\rangle, \quad (3.4)$$

como resumido na figura 2. Os demais estados não são acessados na sequência de emissão superradiante de Dicke, dado que a emissão deve preservar a simetria de troca entre os átomos, pois, como a distância entre os átomos é muito menor que o comprimento de onda da luz, não será possível atribuir a nenhum dos átomos em particular a emissão dos fótons que serão detectados no campo distante devido ao efeito de difração.

Tomando  $N = 3$  como um exemplo para entender a natureza desses estados, o estado maximamente excitado é

$$|3, 0\rangle_3 = |eee\rangle. \quad (3.5a)$$

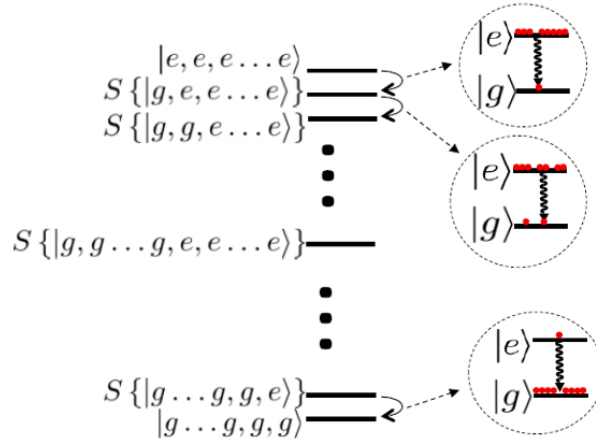


Figura 2 – Diagrama com a evolução dos estados do ensemble ao longo da cadeia de decaimento de Dicke. Os estados de superposição sem discriminação de qual átomo decaiu é descrito pelo símbolo  $S$ .

Já o estado após a primeira emissão possui amplitudes iguais para todos os vetores que indicam qual átomo decaiu:

$$|2, 0\rangle_3 = \frac{|gee\rangle + |ege\rangle + |eeg\rangle}{\sqrt{3}}. \quad (3.5b)$$

O estado subsequente é semelhante, pois a segunda metade da cadeia pode ser obtida a partir da primeira com a simples substituição de  $e$  por  $g$  em cada posição

$$|1, 0\rangle_3 = \frac{|egg\rangle + |geg\rangle + |gge\rangle}{\sqrt{3}}. \quad (3.5c)$$

E finalmente,

$$|0, 0\rangle_3 = |ggg\rangle. \quad (3.5d)$$

Para encontrar a taxa de decaimento, nos baseamos em [37] para computar como que o operador  $\hat{\sigma}_- = \sum_i \hat{\sigma}_{-,i}$  atua em um estado  $|n, 0\rangle_N$  qualquer, em que  $\hat{\sigma}_{-,i} = |g\rangle\langle e|_i$  atua somente no  $i$ -ésimo átomo. A aplicação do operador  $\hat{\sigma}_-$  sobre o estado  $|2, 0\rangle_3$  para realizar a transição resulta em

$$\hat{\sigma}_- |2, 0\rangle_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{\sigma}_- |eeg\rangle + \hat{\sigma}_- |ege\rangle + \hat{\sigma}_- |g ee\rangle), \quad (3.6)$$

que pode ser calculada sabendo que o operador  $\hat{\sigma}_-$  atua levando o estado a uma superposição em que cada um dos átomos no nível  $|e\rangle$  é levado ao nível  $|g\rangle$ :

$$\hat{\sigma}_- |2, 0\rangle_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(|geg\rangle + |egg\rangle + |gge\rangle + |egg\rangle + |gge\rangle + |geg\rangle). \quad (3.7)$$

Comparando os termos repetidos, correspondentes a configurações de átomos pós emissão oriundas de uma mesma configuração pré emissão, e.g.,  $|gge\rangle$  pode ser fruto da aplicação

de  $\hat{\sigma}_-$  sobre  $|gee\rangle$  ou  $|ege\rangle$ , nota-se que

$$\hat{\sigma}_- |2, 0\rangle_3 = 2 \frac{|gge\rangle + |geg\rangle + |egg\rangle}{\sqrt{3}}, \quad (3.8)$$

logo  $\hat{\sigma}_- |2, 0\rangle_3 = 2 |1, 0\rangle_3$ . Deste resultado, vemos que surge um fator de 2 em relação à transição de um átomo do nível  $|e\rangle$  para o nível  $|g\rangle$ , veremos que esse fator numérico está relacionado a uma taxa maior que a encontrada na emissão por átomos independentes, onde um cálculo semelhante prevê um fator de  $\sqrt{2}$ . Seguindo uma lógica semelhante, pode-se mostrar que, no caso geral, a atuação do operador  $\hat{\sigma}_-$  sobre um estado de Dicke  $|n, 0\rangle_N$  qualquer é dado por [1]

$$\hat{\sigma}_- |n, 0\rangle_N = \sqrt{n(N - n + 1)} |n - 1, 0\rangle_N. \quad (3.9)$$

A amplitude de transição do estado  $|n, 0\rangle_N$  para o estado  $|n - 1, 0\rangle_N$  nos fornece a razão entre as taxas de decaimento, pois a taxa  $\Gamma_{n,N}$  é oriunda de um termo de interação com o campo e é proporcional ao autovalor de  $\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-$ , onde  $\hat{\sigma}_+ = \hat{\sigma}_-^\dagger$  [2], tal que

$$\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- |n, 0\rangle_N = n(N - n + 1) |n, 0\rangle_N. \quad (3.10)$$

Se comparada com o decaimento de apenas um átomo  $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$  com taxa  $\Gamma_{1,1} = \Gamma_1$ , onde  $\Gamma_1$  é a taxa de emissão de um átomo individual, encontramos taxa de emissão na superradiância de Dicke

$$\Gamma_{n,N} = n(N - n + 1)\Gamma_1 \quad (3.11)$$

que também pode ser lida como uma função do produto do número de átomos excitados antes da emissão  $n$  pelo número de átomos no nível fundamental após a emissão  $N - n + 1$ . Em particular, quando o sistema está no estado  $|1, 0\rangle_N$ , então  $\Gamma_{1,N} = N\Gamma_1$ , ou seja, a taxa de emissão do único fóton é  $N$  vezes maior que a emitida por um único átomo; se o sistema parte do estado  $|2, 0\rangle_N$ , então  $\Gamma_{2,N} = 2(N - 1)\Gamma_1$ , e a taxa de emissão do primeiro dos dois fótons que pode ser emitido é modificada por um fator  $N - 1$ . No limite em que  $N \gg 1$ , e estamos considerando apenas a emissão de poucos fótons, i.e.  $n \ll N$ , a modificação da taxa de emissão  $N - n + 1$  pode ser aproximada por apenas  $N$ , de forma que  $\Gamma_{n,N} \approx nN\Gamma_1$ . Neste cenário, como será analisado na seção seguinte, o efeito da coletividade na emissão é dado pelo surgimento de  $N$  na expressão para a taxa, já que  $n$  aparece também na cadeia de emissão por átomos independentes.

## 3.2 Modelo para Emissão por Fontes Independentes

A emissão simples, sem exibir superradiância, também pode ser descrita por esse formalismo. Para que um conjunto de átomos sob as mesmas condições de proximidade não exibam superradiância, basta que a superposição de estados após uma dada emissão

seja desfeita. Por exemplo, na emissão de um conjunto com inicialmente duas excitações, a taxa da primeira emissão ainda é dada por  $\Gamma_{2,2} = 2\Gamma_1$ , ao longo de

$$\hat{\sigma}_- |ee\rangle = |ge\rangle + |eg\rangle. \quad (3.12)$$

Porém, se logo após a emissão ocorrer, o estado de superposição for reduzido a um dos estados com a identidade do átomo excitado bem definida, seja  $|eg\rangle$  ou  $|ge\rangle$ , então a taxa de emissão ao longo do segundo decaimento será  $\Gamma_1$ , visto que

$$\hat{\sigma}_- |ge\rangle = \hat{\sigma}_- |eg\rangle = |gg\rangle. \quad (3.13)$$

É apenas quando a superposição é mantida, e com fases idênticas para as amplitudes, que a taxa é dada por (5.32)

$$\hat{\sigma}_-(|ge\rangle + |eg\rangle) = 2|gg\rangle. \quad (3.14)$$

Já se a fase relativa entre as amplitudes for  $\pi$ , definindo um estado

$$|1, 1\rangle_2 \equiv \frac{|ge\rangle - |eg\rangle}{\sqrt{2}} \quad (3.15)$$

necessário para completar o conjunto de estados ortogonais que formam base para o par de átomos de 2 níveis, a taxa resultante passa a ser nula, devido à interferência destrutiva entre as duas possibilidades de se chegar ao estado  $|gg\rangle$

$$\hat{\sigma}_-(|ge\rangle - |eg\rangle) = 0. \quad (3.16)$$

Neste caso, o efeito de interferência destrutiva que causa uma diminuição na taxa de emissão é chamado de subradiância [2, 37].

Se a superposição de estados não se mantiver após cada decaimento e o estado pós emissão for descrito por  $|N-1, 0\rangle_{N-1} \otimes |g\rangle$  em vez de  $|N-1, 0\rangle_N$ , o número de átomos no nível fundamental não afeta a taxa  $\Gamma_n$  do passo de emissão seguinte, que não depende do número total de átomos  $N$

$$\Gamma_n = \Gamma_{n,n} \quad (3.17)$$

e segue apenas uma dependência linear com  $n$ :

$$\Gamma_n = n\Gamma_1. \quad (3.18)$$

$\Gamma_n \leq \Gamma_{n,N}$ , de acordo com (3.11) e (3.18); a igualdade é satisfeita apenas para  $n = N$ , ou seja, durante a primeira emissão. Note que não importa qual o átomo que o processo de emissão identifica como o originário do fóton para deduzir o valor da taxa. Assim, se, em vez de ser descrita por uma superposição de vetores, o processo de emissão deixar o ensemble de átomos numa mistura estatística de qual o átomo que se encontra no nível  $|g\rangle$ , a taxa de emissão é dada por  $\Gamma_n$ . Ainda que essa mistura estatística não informe qual a origem do fóton, para haver o efeito coletivo é necessário que esta indeterminação seja coerente.

A relação da taxa em (3.18) com o número de excitações  $n$  é idêntica à obtida por um conjunto independente de  $N$  fontes de um fóton emitindo em paralelo. Um conjunto de fótons independentes emitidos nos instantes  $t_1, t_2, \dots, t_N$  é caracterizado por uma densidade de probabilidade fatorável:

$$p(t_1, t_2, \dots, t_N) = p(t_1) p(t_2) \cdots p(t_N) \quad (3.19)$$

em que cada  $p(t)$  representa a densidade de probabilidade de haver emissão de um único fóton sendo emitido com taxa  $\Gamma_1$  nesse instante:

$$p(t) = \Gamma_1 e^{-\Gamma_1 t}, \quad (3.20)$$

e assim, (3.19) fica da seguinte forma

$$p(t_1, t_2, \dots, t_N) = \Gamma_1^N e^{-\Gamma_1(t_1+t_2+\cdots+t_N)}. \quad (3.21)$$

As variáveis  $t_1, t_2, \dots, t_N$  podem assumir qualquer valor  $0 < t_i$ , e são independentes umas das outras. Se passarmos a considerar que os instantes  $t_1, t_2, \dots, t_N$  são ordenados, tal que  $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N$ , o domínio de integração passa a ser  $N!$  vezes menor, pois essa ordenação de variáveis é apenas uma das  $N!$  possíveis e distintas entre si. Compensando essa restrição nos limites de integração com um fator de normalização igual a  $N!$ , chegamos a

$$p(t_1, t_2, \dots, t_N) = N! \Gamma_1^N e^{-\Gamma_1(t_1+t_2+\cdots+t_N)}. \quad (3.22)$$

Em seguida, podemos definir novas variáveis:  $\tau_1 = t_1$ ,  $\tau_2 = t_2 - t_1$ , etc. que medem o intervalo de tempo entre as detecções e que possuem limites de integração independentes:  $0 < \tau_i$ . Reescrevendo  $t_1 = \tau_1$ ,  $t_2 = \tau_1 + \tau_2$ , etc, a densidade de probabilidade conjunta em função dos  $\tau_i$  é dada por

$$p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N) = N! \Gamma_1^N e^{-\Gamma_1[N\tau_1 + (N-1)\tau_2 + \cdots + \tau_N]} \quad (3.23)$$

pois o jacobiano nessa mudança de coordenadas é simplesmente 1. Assim, voltamos a descrever a estatística através de um conjunto de variáveis independentes, de forma que

$$p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N) = p_N(\tau_1) p_{N-1}(\tau_2) \cdots p_1(\tau_N) \quad (3.24)$$

para distribuições de probabilidade dadas pela taxa de decaimento clássicas encontradas na equação (3.18)

$$p_n(\tau) = \Gamma_n e^{-\Gamma_n \tau}, \quad (3.25)$$

lembrando que  $\Gamma_n = n\Gamma_1$ . Ou seja, a taxa de decaimento dada pela expressão que não leva em consideração a superradiância descreve um fenômeno que coincide com a emissão de fótons independentes. A dependência de  $\Gamma_n$  com  $n$  indica apenas que os  $n$  átomos excitados aumentam a probabilidade de emissão de um fóton por um fator de  $n$ , devido a cada um deles poder ser a fonte a emitir independentemente.

Caso a taxa seja superradiante, uma interpretação seguindo essas linhas não é óbvia. Conforme o ensemble de átomos emite, há formação de emaranhamento entre eles, de forma que a probabilidade de um dado átomo emitir não é dada apenas pelo estado reduzido do mesmo, que, já após o primeiro decaimento, passa a ser incerto. Apenas a análise do sistema se comportando coletivamente permite o entendimento do fenômeno na formulação apresentada.

### 3.3 Obtenção das Taxas de Emissão Independente via Decoerência

Mesmo quando não há nenhum monitoramento que revele qual a fonte que emitiu um dado fóton, eliminando a superradiância, o limite em que o fenômeno se confunde com a emissão por fontes independentes também surge quando a coerência de fase nas superposições é perdida. Para ver como a taxa de emissão de um estado emaranhado é sensível à fase relativa, basta observar como o estado de (3.15) reage à aplicação de  $\hat{\sigma}_-$  em (3.16), correspondendo a uma taxa de emissão nula. Esta análise nos permite separar os estados ortogonais em um conjunto de estados superradiantes ( $|2, 0\rangle_2$ ,  $|1, 0\rangle_2$  e  $|0, 0\rangle_2$ ) e um estado sub-radiante ( $|1, 1\rangle_2$ ). Quando a taxa de emissão dos dois estados que contém 1 excitação cada são comparados, nota-se que a taxa da emissão sem efeito coletivo é o valor médio das taxas sub- e superradiantes. A incerteza na fase entre  $|ge\rangle$  e  $|eg\rangle$  é responsável por gerar uma taxa de decaimento média que corresponde à de uma emissão convencional.

Para  $N = 3$ , são necessários dois novos pares de estados para completar a base ortogonal de um trio de átomos. Primeiro, encontraremos  $|2, 1\rangle_3$  e  $|2, 2\rangle_3$  que, junto de  $|2, 0\rangle_3$  para completar os  $\binom{3}{2}$  estados da base do subespaço correspondente a 2 excitações:

$$|2, 1\rangle_3 \equiv \frac{|eeg\rangle + e^{2\pi i/3}|ege\rangle + e^{4\pi i/3}|gee\rangle}{\sqrt{3}}, \quad (3.26a)$$

$$|2, 2\rangle_3 \equiv \frac{|eeg\rangle + e^{4\pi i/3}|ege\rangle + e^{8\pi i/3}|gee\rangle}{\sqrt{3}}. \quad (3.26b)$$

Da forma que são construídos, esses estados são ortogonais entre si. O efeito da aplicação de  $\hat{\sigma}_-$  sobre  $|2, 1\rangle_3$  e  $|2, 2\rangle_3$  é dado por [37]

$$\hat{\sigma}_- \frac{|eeg\rangle + e^{2\pi i/3}|ege\rangle + e^{4\pi i/3}|gee\rangle}{\sqrt{3}} = -\frac{|gge\rangle + e^{2\pi i/3}|geg\rangle + e^{4\pi i/3}|egg\rangle}{\sqrt{3}}, \quad (3.27a)$$

$$\hat{\sigma}_- \frac{|eeg\rangle + e^{4\pi i/3}|ege\rangle + e^{8\pi i/3}|gee\rangle}{\sqrt{3}} = -\frac{|gge\rangle + e^{4\pi i/3}|geg\rangle + e^{8\pi i/3}|egg\rangle}{\sqrt{3}}, \quad (3.27b)$$

e assim encontramos mais um par de estados que formam uma base ortogonal com  $|1, 0\rangle_3$  e são conectados com os estados de  $n = 2$  pela aplicação de  $\hat{\sigma}_-$ . Portanto, definimos

$$|1, 1\rangle_3 \equiv -\frac{|gge\rangle + e^{2\pi i/3}|geg\rangle + e^{4\pi i/3}|egg\rangle}{\sqrt{3}}, \quad (3.28a)$$

$$|1, 2\rangle_3 \equiv -\frac{|gge\rangle + e^{4\pi i/3}|geg\rangle + e^{8\pi i/3}|egg\rangle}{\sqrt{3}} \quad (3.28b)$$



de forma que  $\hat{\sigma}_- |2, 1\rangle_3 = |1, 1\rangle_3$  e  $\hat{\sigma}_- |2, 2\rangle_3 = |1, 2\rangle_3$ , ambos com taxa de decaimento dada por  $\Gamma_1$ . Enquanto isso, o efeito da aplicação de  $\hat{\sigma}_-$  sobre  $|1, 1\rangle_3$  ou  $|1, 2\rangle_3$  resulta em  $\hat{\sigma}_- |1, 1\rangle_3 = \hat{\sigma}_- |1, 2\rangle_3 = 0$ , assim como no caso do decaimento frustrado do singlete. Como no caso  $N = 2$ , o valor médio entre as taxas de decaimento para um dado número de excitações coincide com a taxa da emissão sem efeito coletivo, pois, para  $n = 2$

$$\frac{4\Gamma_1 + \Gamma_1 + \Gamma_1}{3} = 2\Gamma_1 \quad (3.29)$$

e para  $n = 1$ ,

$$\frac{3\Gamma_1 + 0 + 0}{3} = \Gamma_1, \quad (3.30)$$

revelando o padrão de emissão sem efeito coletivo, onde a taxa média é  $\Gamma_n = n\Gamma_1$ . Este resultado demonstra que se houver uma mistura estatística entre os estados com fase relativa diferentes, ou seja, que as fases entre os estados com diferentes identificações para os átomos excitados for mal definida, então os efeitos coletivos são eliminados por decoerência.

Este padrão vale para um número qualquer de átomos de dois níveis. Para um dado número de excitações  $n$ , o número de estados ortogonais é  $\binom{N}{n}$  e cada um desses estados pertence a uma sequência própria de decaimento. Os estados de Dicke formam um subespaço de dimensão  $N + 1$ , variando o número de excitações de  $N$  a 0. Da mesma forma, outras sequências são formadas, possuindo total de estados de uma cadeia de decaimento sob a ação de  $\hat{\sigma}_-$  variados.  $k$  é o índice que indica o estado específico  $|n, k\rangle_N$  dentro do conjunto que contém o mesmo número de excitações  $n$ . Para cada  $n$ ,  $1 \leq k \leq \binom{N}{n}$ , assim, o total de estados coincide com a dimensão do espaço completo:  $\sum_{n=0}^N \binom{N}{n} = 2^N$ .

### 3.4 Modelo Clássico para Superradiância

Osciladores clássicos agrupados numa região pequena do espaço, se comparado com as dimensões do comprimento de onda da luz gerada pelo processo radiativo, também podem exibir uma mudança na taxa de emissão pela interação conjunta com o meio [8]. As variáveis canônicas que descrevem as fontes são  $q_i$  e  $p_i$ . O conjunto de equações dinâmicas que descrevem um oscilador amortecido interagindo individualmente com o campo é

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{1}{m} p_i \\ \dot{p}_i &= -m\omega_0^2 q_i - \Gamma p_i. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Neste caso não há superradiância ou acoplamento entre os átomos, a intensidade do campo gerado corresponde simplesmente à soma das intensidades dos termos individuais.

Se os osciladores compartilham do mesmo meio de oscilação de forma coerente, o campo responsável pelo amortecimento — devido à reação à geração da onda — é

composto pela superposição das contribuições de todas as fontes. Assim, as equações precisam levar em conta o acoplamento mediado pelo campo

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{1}{m}p_i \\ \dot{p}_i &= -m\omega_0^2q_i - \Gamma \sum_j p_j.\end{aligned}\tag{3.32}$$

Uma das soluções para esse problema é obtida caso o estado inicial satisfaça  $q_{i,0} = q_{j,0}$  e  $p_{i,0} = p_{j,0}$ , ou seja, que as fontes oscilem em fase. Neste caso, a dinâmica é resumida na evolução de  $Q_0 = \sum_i q_i$  e  $P_0 = \sum_i p_i$  que respeitam as equações de movimento

$$\begin{aligned}\dot{Q}_0 &= \frac{1}{m}P_0 \\ \dot{P}_0 &= -m\omega_0^2Q_0 - N\Gamma P_0\end{aligned}\tag{3.33}$$

e as variáveis originais do problema são recuperadas através de  $q_i = Q_0/N$  e  $p_i = P_0/N$ . Como se pode notar, a dinâmica coletiva prevê uma taxa de amortecimento  $N$  vezes maior que a encontrada na dinâmica incoerente.

Assim como no caso quântico, podemos recuperar a taxa de decaimento usual se a relação de fase entre os osciladores for indefinida. Definindo um conjunto de variáveis auxiliares por

$$Q_k = \sum_{j=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}kj} q_j\tag{3.34}$$

$$P_k = \sum_{j=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i}{N}kj} p_j,\tag{3.35}$$

que são basicamente componentes da série de Fourier das variáveis originais, as equações dinâmicas se tornam

$$\begin{aligned}\dot{Q}_k &= \frac{1}{m}P_k \\ \dot{P}_k &= -m\omega_0^2Q_k - \delta_{k,0}N\Gamma P_0.\end{aligned}\tag{3.36}$$

Percebe-se assim que uma dessas componentes ( $k = 0$ ) decai com taxa  $N\Gamma$ , como visto anteriormente, porém as outras  $N - 1$  componentes oscilam sem decair, e portanto, sem transmitir energia para o meio. Logo, se a fase relativa entre os átomos for indefinida, ou seja, se o sistema estiver em qualquer uma das configurações de maneira equiprovável, então a taxa média de decaimento será simplesmente  $\Gamma$ .

O decaimento do conjunto de osciladores é afetado por compartilharem do meio que absorve a energia das oscilações quando a fase relativa entre eles é bem definida. O resultado é uma taxa de decaimento dependente do número total de átomos, semelhante ao que ocorre na superradiância de Dicke (3.11) no limite em que  $n \ll N$ . Porém, na descrição clássica, a intensidade da luz emitida gera um sinal no detector que é compatível

com uma descrição obtida a partir de sistemas emitindo independentemente, a menos da modificação na taxa de decaimento ( $\Gamma \rightarrow N\Gamma$ ).

A interpretação física para essa instância de superradiância é dada pela taxa de troca de energia entre o ensemble interagindo com o campo com todos os átomos oscilando em fase [8]. Se um único átomo interage com um dado modo, a amplitude de oscilação deste átomo decai em proporção ao crescimento da amplitude de oscilação do modo do campo. Quando há vários átomos, a taxa de crescimento da amplitude do campo é dada pela soma das amplitudes dos estados dos  $N$  átomos, de acordo com o princípio da superposição; daí, o efeito da reação do campo sobre os átomos leva em consideração uma amplitude  $N$  vezes maior se os átomos estão na mesma região do espaço. Um aumento de  $N$  na amplitude corresponde a um aumento de  $N^2$  na energia irradiada pelos átomos, desta forma, podemos notar que cada um dos  $N$  átomos cede energia ao campo (igualmente) numa taxa  $N$  vezes maior. Em outras palavras, a coerência na emissão coletiva implica numa modificação na taxa de cada átomo por um fator  $N$ , como indicado em (3.11).

Vale ressaltar que no limite  $n \ll N$ , as descrições quântica e clássica para o problema da emissão coletiva possuem resultados semelhantes, de forma que os pacotes de onda obtidos  $p(t_1, t_2, \dots, t_N)$  são idênticos. Na análise clássica, a geração da luz é dada por um sistema físico com dipolo elétrico maior, correspondendo à soma dos efeitos de vários dipolos menores. Por outro lado, na descrição quântica em termos de estados de Dicke, em nenhuma etapa da cadeia de decaimento, o valor médio do dipolo elétrico de nenhum dos átomos  $\langle \psi | \hat{\mathbf{p}}_i | \psi \rangle$  nem da contribuição conjunta de todos eles  $\sum_i \langle \psi | \hat{\mathbf{p}}_i | \psi \rangle$  é não-nulo, já que tais estados são compostos por auto-estados do operador paridade, enquanto  $\hat{\mathbf{p}}_i$  possui apenas elementos fora da diagonal nesta mesma base. O processo se dá por uma sequência de emissões espontâneas, cuja cadeia de decaimento se torna mais extensa que a dada por apenas um par de estados no decaimento de um único átomo de dois níveis. A natureza quântica da superradiância precisa ser atestada verificando o caráter corpuscular da luz emitida, através da comprovação estatística de que o número de cliques observados no aparato de detecção corresponde genuinamente à contagem de fótons emitidos por átomos de dois níveis interagindo quanticamente com a luz.

### 3.5 Superradiância em Meios Extensos

Quando os átomos não se encontram próximos entre si, se comparado com o comprimento de onda da luz, a relação de fase na função de onda do fóton emitido, dada pela diferença entre a posição dos átomos, se torna bastante relevante para definir as propriedades de emissão do fóton [2, 34]. Sejam as posições dos átomos  $\mathbf{r}_i$  e um dado modo de onda plana descrito pelo vetor de onda  $\mathbf{k}_1$ , o operador de abaixamento coletivo que atua sobre o ensemble quando um fóton é emitido é derivado do hamiltoniano de interação

e é dado por

$$\hat{\sigma}_-(\mathbf{k}) = \sum_i e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} \hat{\sigma}_{-,i}. \quad (3.37)$$

Se o estado inicial do processo de emissão é o estado maximamente excitado  $|e e \dots e\rangle$ , após a emissão, ele passa a ser

$$\hat{\sigma}_-(\mathbf{k}_1) |e e \dots e\rangle = e^{i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}_1} |g e \dots e\rangle + e^{i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}_2} |e g \dots e\rangle + \dots + e^{i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}_N} |e e \dots g\rangle. \quad (3.38)$$

Já a aplicação de  $\hat{\sigma}_+(\mathbf{k}_1) = \hat{\sigma}_-^\dagger(\mathbf{k}_1)$  sobre  $\hat{\sigma}_-(\mathbf{k}_1) |e e \dots e\rangle$  resulta em

$$\hat{\sigma}_+(\mathbf{k}) \hat{\sigma}_-(\mathbf{k}) |e e \dots e\rangle = N |e e \dots e\rangle. \quad (3.39)$$

Deste resultado, tomando em consideração a normalização dos estados, pode-se mostrar que a taxa de decaimento ainda é dada por  $N\Gamma_1$  se a nuvem interage apenas com um modo do campo.

No sentido inverso, podemos analisar como um sistema que parte do estado  $|g g \dots g\rangle$  reage à interação com o modo do campo contendo um fóton. Neste caso, a aplicação do operador  $\hat{\sigma}_+$  sobre o estado  $|g g \dots g\rangle$  resulta em

$$\hat{\sigma}_+(\mathbf{k}_1) |g g \dots g\rangle = e^{-i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}_1} |e g \dots g\rangle + e^{-i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}_2} |g e \dots g\rangle + \dots + e^{-i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}_N} |g g \dots e\rangle. \quad (3.40)$$

que pode ser melhor representado se considerarmos que  $|\psi_0\rangle \equiv |g g \dots g\rangle$  é o estado de um ensemble em que todos os  $N$  átomos se encontram no nível  $|g\rangle$ , enquanto  $|e_i\rangle$  representa um ensemble em que  $N - 1$  átomos se encontram no nível  $|g\rangle$  enquanto o  $i$ -ésimo se encontra no nível  $|e\rangle$ . Nesta forma, (3.40) é reescrita como

$$\hat{\sigma}_+(\mathbf{k}_1) |\psi_0\rangle = \sqrt{N} |\tilde{e}_1\rangle_N, \quad (3.41)$$

onde definimos

$$|\tilde{e}_1\rangle_N \equiv \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i e^{-i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}_i} |e_i\rangle. \quad (3.42)$$

De forma semelhante a (3.39), a aplicação subsequente de  $\hat{\sigma}_-(\mathbf{k}_1)$  resulta em  $\sqrt{N} |\psi_0\rangle$ , que indica que essa transição ocorre com frequência  $N$  vezes maior que a da transição a partir de um único átomo. A taxa entre dois estados acoplados via  $\hat{\sigma}_\pm$  é dada tanto pela aplicação de  $\hat{\sigma}_-\hat{\sigma}_+$  sobre estado com menor número de excitações, quanto por  $\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_-$  sobre o estado de maior número de excitações, como pode ser verificado via conservação da probabilidade do sistema estar em um dos dois estados.

Porém, se após a nuvem ter absorvido um fóton do modo  $\mathbf{k}_1$ , ele emitir um fóton no modo  $\mathbf{k}_2$ , retornando ao estado  $|\psi_0\rangle$  em seguida, a taxa de emissão será dada pela relação

$$\hat{\sigma}_-(\mathbf{k}_2) |\tilde{e}_1\rangle_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i e^{-i(\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{r}_i} |\psi_0\rangle, \quad (3.43)$$

que mostra que a taxa de absorção de um fóton no modo  $\mathbf{k}_1$  seguido pela emissão de um fóton no modo  $\mathbf{k}_2$  é dada pela função

$$\Phi(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i e^{-i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}_i}. \quad (3.44)$$

Mais precisamente, a taxa é proporcional a  $|\Phi(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)|^2$ , como será justificado de forma mais geral no capítulo 5. Esta função recupera o resultado das seções anteriores na medida em que  $\mathbf{r}_i \approx \mathbf{r}_0$ , para todos os  $i$  átomos, e cada um dos átomos contribuem com o mesmo fator de fase. Neste caso,  $\Phi(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) = \sqrt{N} e^{-i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}_0}$  e  $|\Phi(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)|^2 = N$ .

Agora, iremos considerar o caso particular em que todos os átomos se encontram alinhados e distribuídos periodicamente, ou seja,  $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1} = \mathbf{r}$ , para todo  $1 \leq i \leq N$ . Assim, a taxa de emissão de um fóton numa direção  $\mathbf{k}_2$ , dado que a fila de átomos absorveu um fóton no modo  $\mathbf{k}_1$ , partindo do estado  $|\psi_0\rangle$ , é proporcional a

$$\Phi(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) = \frac{e^{-i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}_0}}{\sqrt{N}} \sum_i \left[ e^{-i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}} \right]^i. \quad (3.45)$$

Esta função é a mesma encontrada em uma grade de difração com  $N$  fendas e possui periodicidade definida por  $\mathbf{r}$ . Como na grade de difração, a emissão fica mais direcionada quanto maior for o valor de  $N$ . A probabilidade de que haja emissão do fóton fora da região que satisfaz

$$(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} \approx 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.46)$$

é pequena se  $N$  é grande. Se a distribuição na posição dos átomos é aleatória, então essa periodicidade some, e apenas enquanto  $\mathbf{k}_1 \approx \mathbf{k}_2$  a probabilidade de emissão é significativa.

Com este exemplo vemos que a emissão por um conjunto esparsos de fontes depende bastante da relação entre os modos envolvidos. Ao longo da emissão espontânea de um conjunto de átomos contendo apenas uma excitação, os átomos interagem com um contínuo de modos do campo eletromagnético. Como resultado, em todo um conjunto de modos que não são necessariamente próximos do modo do campo que preparou o estado (assumindo que a excitação se deu pela absorção de uma onda plana), o efeito superradiante é suprimido. As características precisas da taxa de emissão e da direcionalidade da emissão de um único fóton superradiante (ou sub-radiante) são definidas completamente pela função  $\Phi(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$  de (3.45).

O cálculo da progressão da taxa de emissão de um número maior de excitações, em que  $n$  fótons foram absorvidos do modo de vetor de onda  $\mathbf{k}_1$  pelo ensemble no estado inicial  $|\psi_0\rangle$  e são, posteriormente, emitidos no modo de vetor de onda  $\mathbf{k}_2$  do campo, precisa levar em conta que um mesmo átomo não pode absorver uma excitação múltiplas vezes. A taxa de emissão do segundo fóton pode ser encontrada através da aplicação de  $\hat{\sigma}_-(\mathbf{k}_2)\hat{\sigma}_+(\mathbf{k}_1)$  sobre o estado

$$|\tilde{e}_1\rangle_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_i} |e_i\rangle, \quad (3.47)$$

que já contém 1 átomo excitado devido à absorção de um fóton em  $\mathbf{k}_1$ . O número de átomos  $N$  dá a constante que garante a normalização do estado. Para calcular a taxa, observamos primeiro o efeito da aplicação de  $\hat{\sigma}_+(\mathbf{k}_1)$  sobre  $|\tilde{e}_1\rangle_N$

$$\hat{\sigma}_+(\mathbf{k}_1) |\tilde{e}_1\rangle_N = \sqrt{2(N-1)} |\tilde{e}_1 \tilde{e}_1\rangle_N, \quad (3.48)$$

definindo

$$|\tilde{e}_1 \tilde{e}_1\rangle_N = \frac{1}{\sqrt{2N(N-1)}} \sum_i e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_i} \sum_{j \neq i} e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_j} |e_i e_j\rangle_N, \quad (3.49)$$

onde  $|i j\rangle_N$  representa o estado em que o  $i$ -ésimo e o  $j$ -ésimo átomos do ensemble se encontram no nível  $|e\rangle$ , enquanto todos os outros se encontram no nível  $|g\rangle$ .  $[2N(N-1)]^{-1/2}$  é a constante de normalização deste estado, dado que  $N(N-1)$  é o número de termos que aparecem na expressão acima, e o  $1/\sqrt{2}$  surge para corrigir a normalização, dado que cada par  $|i j\rangle = |j i\rangle$  é contado duas vezes. Note que, os termos  $i = j$  foram excluídos da somatória, refletindo o fato que um mesmo átomo não pode ter sido o responsável pela absorção de 2 fótons.

Em seguida, verificamos a atuação do operador  $\hat{\sigma}_-(\mathbf{k}_2)$  sobre o resultado de (3.48), acompanhada de um rearranjo de índices mudos, resulta em

$$\hat{\sigma}_-(\mathbf{k}_2) |\tilde{e}_1 \tilde{e}_1\rangle_N = \sqrt{\frac{2}{N(N-1)}} \sum_i e^{-i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}_i} \sum_{j \neq i} e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_j} |e_j\rangle. \quad (3.50)$$

Neste ponto, podemos deixar explícitos os termos  $j \neq i$  que estão ausentes na expressão acima, para separarmos as somatórias em  $i$  e  $j$  e aplicarmos a definição de  $\Phi(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$  em (3.44), chegando assim ao resultado

$$\hat{\sigma}_-(\mathbf{k}_2) |\tilde{e}_1 \tilde{e}_1\rangle_N = \sqrt{\frac{2N}{N-1}} \Phi(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) |\tilde{e}_1\rangle_N - \sqrt{\frac{2}{N-1}} |\tilde{e}'_1\rangle_N, \quad (3.51)$$

onde

$$|\tilde{e}'_1\rangle_N \equiv \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i e^{-i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r}_i} |e_i\rangle \quad (3.52)$$

é um vetor de estado normalizado com relação de fase dada por  $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_1$ . Portanto, vemos que na superradiância de Dicke, a emissão é acelerada apesar dos fótons poderem ser emitidos em quaisquer direções.

Note que, se  $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_1$ , a expressão fornece a taxa encontrada para a superradiância de Dicke (3.11) para  $n = 2$ , lembrando que  $\Phi(0) = \sqrt{N}$  e vendo que  $|\tilde{e}'_1\rangle = |\tilde{e}_1\rangle$ :

$$\hat{\sigma}_-(\mathbf{k}_2) |\tilde{e}_1 \tilde{e}_1\rangle_N = \sqrt{2(N-1)} |\tilde{e}_1\rangle_N. \quad (3.53)$$

O mesmo vale se os estados ocupam efetivamente (em comparação com as dimensões dadas pelos comprimentos de onda definidos por  $\mathbf{k}_1$  e  $\mathbf{k}_2$ ) a mesma posição no espaço,

pois, nesse caso  $\mathbf{k}_{1,2} \cdot \mathbf{r}_i \approx \mathbf{k}_{1,2} \cdot \mathbf{r}_j \approx \mathbf{k}_{1,2} \cdot \mathbf{r}_0$ , e daí vemos que  $|\tilde{e}'_1\rangle_N \approx e^{-i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}_0} |\tilde{e}_1\rangle_N$  e  $\Phi(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \approx \sqrt{N} e^{-i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}_0}$ . Quando aplicamos estas relações a (3.51), chegamos a

$$\hat{\sigma}_-(\mathbf{k}_2) |\tilde{e}_1 \tilde{e}_1\rangle_N \approx \sqrt{2(N-1)} e^{-i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}_0} |\tilde{e}_1\rangle_N \approx \sqrt{2(N-1)} |\tilde{e}'_1\rangle_N, \quad (3.54)$$

que também reflete a fórmula da superradiância de Dicke (3.11), como é de se esperar, pois esta fórmula foi obtida justamente no limite em que os átomos estão próximos entre si.

Se nenhuma das duas condições anteriores se aplicam e, além disso, os estados  $|\tilde{e}_1\rangle_N$  e  $|\tilde{e}'_1\rangle_N$  são praticamente ortogonais entre si, o espalhamento do fóton pela nuvem modifica o estado da última, deixando-a, com uma certa amplitude de probabilidade, no estado  $|\tilde{e}'_1\rangle_N$ , devido aos átomos não poderem ser excitados mais de uma vez. Porém, no limite em que  $1 \ll N|\Phi(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)|^2$ , o efeito da interferência superradiante é dominante, nos permitindo desprezar o efeito da saturação na excitação atômica. Neste caso, o espalhamento pode deixar o sistema em um estado diferente, porém a taxa associada ao sistema ser mantido no estado original é muito maior, e faz desta a interação relevante. Além disso, sendo  $1 \ll N$ , podemos simplificar esta expressão ainda mais, fazendo  $N - 1 \approx N$ , resultando em

$$\hat{\sigma}_-(\mathbf{k}_2) |\tilde{e}_1 \tilde{e}_1\rangle_N \approx \sqrt{2}\Phi(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) |\tilde{e}_1\rangle_N, \quad (3.55)$$

e a taxa superradiante é novamente função somente do termo  $|\Phi(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)|^2$ .

Esta última expressão em (3.55) também é obtida se descartarmos o termo oriundo da impossibilidade de um único átomo absorver um fóton duas vezes. Neste caso, temos um sistema em que cada um dos átomos se comporta efetivamente como um oscilador harmônico que pode ser excitado inúmeras vezes. Esta análise nos permite apontar uma analogia entre o modelo clássico de superradiância com um modelo quântico em que as fontes são descritas por um conjunto de osciladores harmônicos em que cada um está em um estado coerente. As principais diferenças entre a superradiância clássica e a superradiância de Dicke são: a limitação no número de excitação que cada átomo pode absorver, e que está associada ao termo  $N - n + 1$  de (3.11); o valor médio nulo do operador momento de dipolo no decaimento ao longo da cadeia de estados de Dicke, visto que, no modelo quântico para o resultado clássico, os estados coerentes das fontes possuem momento de dipolo médio nulo apenas para o estado de vácuo. Neste trabalho, o diferencial quântico da superradiância que iremos explorar tem relação com o último dos pontos indicados acima. Iremos considerar um sistema físico em que o efeito da saturação dos átomos não é relevante, mas que garantimos que foi preparado num estado sem nenhum momento de dipolo macroscópico, semelhante a um estado de Dicke [38] para  $n = 2$ , que precisa ser descrito pela mecânica quântica.

## 4 Memórias Quânticas

Como vimos no capítulo anterior, a superradiância foi inicialmente estudada no caso em que cada uma das fontes partem do nível mais excitado dentre os dois níveis do modelo usado para tratar os átomos. Este é o cenário em que o efeito quântico na aceleração do decaimento é mais evidente, pois, a partir de um estado sem emaranhamento nenhum, as emissões espontâneas naturalmente induzem a formação de emaranhamento no sistema numa cadeia que termina no estado em que todos os átomos se encontram no nível fundamental. Já na memória quântica usada no protocolo DLCZ [17], que iremos revisar aqui, o processo de escrita produz um estado com apenas uma excitação, que ainda assim é capaz de exibir superradiância, como demonstrado nos trabalhos realizados pelo grupo do Prof. Daniel Felinto com a colaboração do orientador desta tese, Prof. Pablo Saldanha [16, 28]. A proposta deste trabalho é fazer uma análise mais simplificada do fenômeno de superradiância com luz em estado de Fock [29, 30, 39, 40], e estendê-la para o tratamento da próxima etapa da cadeia superradiante, em que dois átomos são inicialmente transferidos para um nível excitado, conforme descrito em [29, 30].

Na seção 4.1, analisaremos um modelo fictício de interação de um único átomo com um modo do campo eletromagnético para ilustrar como átomos podem ser utilizados para armazenar informação quântica que é extraída na forma de fótons. Nesta introdução iremos apenas mostrar elementos básicos do protocolo DLCZ para indicar de onde o método de preparação da nuvem atômica foi inspirado. Já na seção 4.2, veremos com mais detalhes o que acontece durante o processo de escrita, em que a detecção de um fóton pode ser utilizada para preparar um estado específico para a nuvem, e como efeitos de interferência podem garantir que a emissão durante a leitura seja direcionada. Em paralelo, iremos esboçar a configuração do experimento em que a teoria descrita no capítulo 5 se aplica. Os detalhes da configuração experimental são elaborados no capítulo 6, onde os resultados também estão expostos.

### 4.1 Armazenamento de Informação por Memórias Atômicas

Em sistemas clássicos para processamento de informação, os dados são armazenados e processados através de elementos binários, os bits, com cada bit estando em um de dois estados: zero ou um. Já no processamento de informação quântica, os correspondentes quânticos dos bits, os qubits, podem também se encontrar nesses mesmos estados, agora descritos por  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , respectivamente, mas com a grande diferença de também poderem estar em qualquer superposição do tipo  $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ , para  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ . Um dispositivo de memória quântica precisa, por definição, ser capaz de armazenar tais estados quânticos,



preservando a coerência por um dado intervalo de tempo.

A escolha de um sistema físico para o uso como qubit deve levar em conta a sua aplicação. Durante um passo de computação, o importante é a facilidade de implementação das operações quânticas, já durante a transmissão da informação, o sistema físico precisa ser isolado do meio para otimizar a capacidade de preservar o estado. Enquanto a luz é ideal para o transporte de informação em meios transparentes devido à alta velocidade e à inexistente interação com outros fótons no vácuo, é inviável aplicar as transformações necessárias [41] ou armazená-la por um longo período de tempo sem a presença de matéria através de efeitos não-lineares no meio em questão [42, 43]. Por outro lado, átomos ou íons apresentam as características opostas, podendo interagir facilmente com outros átomos e serem mantidos coerentemente através de armadilhas electromagnéticas [44, 45].

Assim, as vantagens de cada sistema podem ser obtidas em conjunto pelo uso de ambas tecnologias. Enquanto conjuntos de átomos podem ser utilizados para o armazenamento e manipulação, fótons são usados para a transmissão dos dados. Neste cenário, o estudo da absorção e emissão coerente de luz por conjuntos de átomos é essencial [20–22], desta forma, os efeitos coletivos da emissão da luz se tornam importantes. Dentre estes efeitos, a superradiância cumpre um papel especial sobre a taxa de extração da informação e a direcionalidade da emissão [2, 5, 9, 10, 14, 16, 28, 29, 34], como vimos no capítulo anterior.

A depender do tipo de luz usada, a interação luz-matéria pode ser descrita através da teoria clássica [8]. Neste regime, a luz pode ser utilizada para modificar o estado dos átomos, porém não é possível que informação quântica seja armazenada ou extraída desta maneira. Porém, quando a luz é tratada quanticamente a informação quântica pode ser trocada entre os dois meios. Por exemplo, um conjunto de átomos interagindo com o campo no estado de vácuo emite luz que passa a carregar a informação contida neste estado.

Um único átomo pode codificar a informação de um qubit através da superposição dos estados do átomo nos níveis fundamental  $|g\rangle$  e excitado  $|e\rangle$ . Se um átomo está inicialmente no estado  $|e\rangle$  e emitir, por simplicidade, em um único modo de onda plana do campo  $\mathbf{k}$ , fará com que o campo que inicialmente se encontra no estado de vácuo  $|\emptyset\rangle$  passe a estar num estado  $|\mathbf{k}\rangle$  que representa o campo enquanto o modo de vetor de onda  $\mathbf{k}$  é o único excitado e está excitado com apenas um fóton. Enquanto isso, um átomo que está inicialmente no estado  $|g\rangle$  não sofre nenhum efeito nem causa mudança no campo. Portanto, um estado quântico, que a princípio era codificado nos graus de liberdade atômicos, passa a ser codificado nos graus de liberdade do campo

$$(\alpha |g\rangle + \beta |e\rangle) |\emptyset\rangle \rightarrow |g\rangle (\alpha |\emptyset\rangle + \beta |\mathbf{k}\rangle), \quad (4.1)$$

que se propaga para longe da fonte, permitindo a transmissão da informação inicialmente armazenada no átomo. Esta extração é coerente, pois as fases nas amplitudes da função de onda são preservadas. Este é um exemplo simples de como a informação quântica pode

ser transmitida entre portadores através da interação luz–matéria.

Contudo, esta interação de um único átomo com um único modo do campo eletromagnético no vácuo é extremamente simplificada. A interação de um único átomo com o continuum de modos do campo que é responsável pelo processo irreversível de emissão espontânea resulta na luz sendo emitida em qualquer direção e a taxa de extração é pré-determinada pelas propriedades do átomo. Para que tenhamos mais controle sobre as propriedades da emissão deste fóton, precisaremos de levar em conta o fato que vários átomos fazem parte do processo numa nuvem atômica, e que os efeitos coletivos não podem ser descartados. Estas considerações serão deixadas para as seções seguintes.

Outra limitação desta primeira implementação é que não há nenhum controle do instante em que a excitação é extraída. Enquanto houver um átomo no nível  $|e\rangle$ , o sistema está sujeito a emitir a luz a qualquer instante. Uma característica básica de uma memória é o uso sob demanda [17, 46–49], logo, o nível  $|e\rangle$  não é ideal para fins de armazenamento da informação. Uma maneira de contornar este problema é através do uso de um átomo de três níveis em uma configuração do tipo  $\Lambda$  como na figura 3 em que as transições permitidas pelas regras de seleção são somente entre  $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$  e entre  $|e\rangle \leftrightarrow |s\rangle$ . Se ao invés de codificar a informação nos níveis  $|g\rangle$  e  $|e\rangle$  forem utilizados os níveis  $|g\rangle$  e  $|s\rangle$

$$|\psi\rangle = \alpha |g\rangle + \beta |s\rangle, \quad (4.2)$$

o átomo continua neste estado até que um campo externo altere esta condição de equilíbrio.

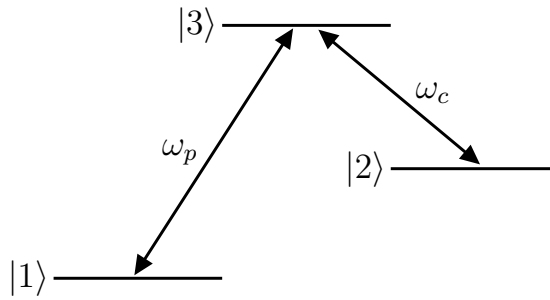


Figura 3 – Configuração do tipo  $\Lambda$  para um átomo de três níveis. No nosso trabalho os estados  $|1\rangle$ ,  $|2\rangle$  e  $|3\rangle$  representam os níveis  $|g\rangle$ ,  $|s\rangle$  e  $|e\rangle$ , respectivamente

No momento em que um laser apropriado incide sobre o átomo, induzindo a transição  $|s\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ , o átomo pode daí decair do nível  $|e\rangle$  para o nível  $|g\rangle$ , como anteriormente. Em metade das realizações, o decaimento que ocorre de início é  $|e\rangle \leftrightarrow |g\rangle$ , neste caso o sistema termina percorrendo os seguintes passos:

$$(\alpha |g\rangle + \beta |s\rangle) |\emptyset\rangle \rightarrow (\alpha |g\rangle + \beta |e\rangle) |\emptyset\rangle \rightarrow |g\rangle (\alpha |\emptyset\rangle + \beta |\mathbf{k}\rangle). \quad (4.3)$$

Na outra metade das vezes, o sistema sofre uma ou mais emissões na transição  $|e\rangle \leftrightarrow |s\rangle$  e assim o átomo volta ao nível  $|s\rangle$  enquanto um fóton é emitido:

$$(\alpha |g\rangle + \beta |s\rangle) |\emptyset\rangle \rightarrow (\alpha |g\rangle + \beta |e\rangle) |\emptyset\rangle \rightarrow \alpha |g\rangle |\emptyset\rangle + \beta |s\rangle |\mathbf{k}'\rangle. \quad (4.4)$$

A dinâmica continua até eventualmente a emissão ocorrer em  $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ , já que  $|g\rangle$  é o estado final do processo irreversível:

$$(\alpha |g\rangle + \beta |s\rangle) |\emptyset\rangle \rightarrow |g\rangle (\alpha |\emptyset\rangle + \beta |\mathbf{k} \mathbf{k}^m\rangle), \quad (4.5)$$

onde  $n$  é o número de fótons emitidos antes do decaimento para o nível  $|g\rangle$ . Porém, como veremos adiante, apenas quando nenhum fóton é emitido na transição  $|e\rangle \rightarrow |s\rangle$  ( $n = 0$ ) que os efeitos coletivos são permitidos no processo de leitura da memória, como também discutido em [16].

Temos assim que a extração da informação é controlada, ainda que de forma estocástica, se utilizamos um átomo de três níveis. Porém, como lidamos com uma emissão espontânea para realizar essa operação, não podemos simplesmente reverter o processo para escrever a informação inicialmente contida em um feixe incidente no átomo. Assim, precisamos de uma maneira de utilizar a emissão espontânea como mecanismo de escrita, além de leitura.

## 4.2 Emissão de Fótons Direcionados com Efeito de Memória

Tomando em consideração agora que a nuvem consiste de vários átomos e que interage com todo o contínuo de modos do campo eletromagnético, iremos estudar o efeito da detecção na fase da escrita e como que isso prepara um estado específico que será lido durante a fase da leitura de uma memória quântica baseada no protocolo DLCZ. É através desta preparação de estado que é possível que durante a leitura o fóton emitido seja bem direcionado. Sem esta direcionalidade, a eficiência do protocolo DLCZ ou do nosso estudo de superradiância, por exemplo, seria muito prejudicada, dado que é impraticável detectar um fóton que possa ser emitido em qualquer direção no espaço livre. A seguir, iremos apresentar o esboço do experimento que iremos utilizar para estudar superradiância de estado de Fock, enquanto justificamos como que o efeito de interferência quântica permite que a emissão dos fótons durante a leitura da memória seja direcionada.

A figura 4 ilustra o experimento realizado em [29, 30] e será discutido em mais detalhes no capítulo 6, baseado na memória quântica do protocolo DLCZ [17]. O ensemble de átomos de três níveis é preparado num estado em que todos os átomos se encontram no nível fundamental  $|g\rangle$ , em seguida, o laser de escrita, fora da ressonância com a transição  $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$  e de vetor de onda  $\mathbf{k}_w$ , acompanhado da emissão espontânea na transição  $|e\rangle \rightarrow |s\rangle$ , induz a transferência de um ou mais átomos em  $|g\rangle \rightarrow |e\rangle \rightarrow |s\rangle$ , acompanhada

pela emissão do número equivalente de fótons no modo de escrita, como mostrado na parte (a) da figura 4. Nos experimentos, o modo de escrita é selecionado por uma fibra ótica monomodo e os detectores podem distinguir a detecção de até dois fótons durante esta etapa.

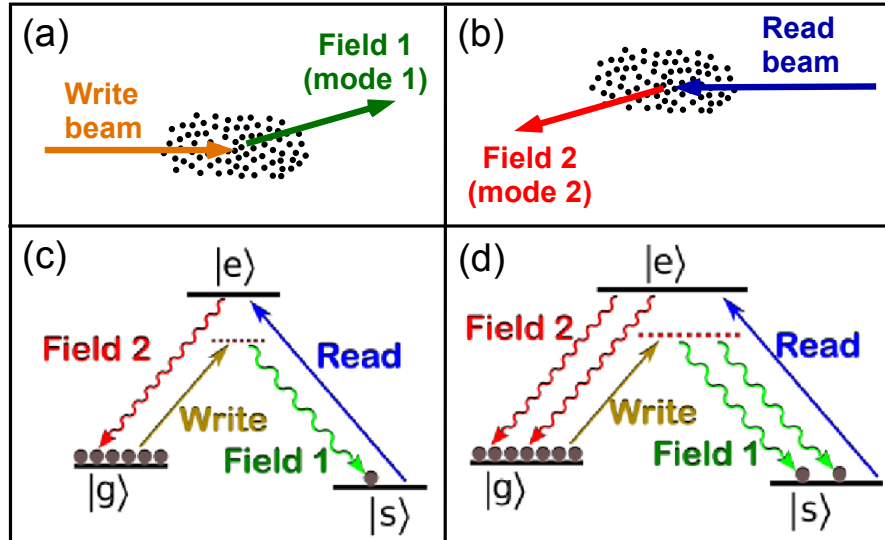


Figura 4 – Arranjo para uma memória atômica. (a) Um laser de escrita induz uma transição atômica  $|g\rangle \rightarrow |e\rangle \rightarrow |s\rangle$  em um ou mais átomos, acompanhada da emissão de fótons no modo de escrita (modo 1). (b) A incidência do laser de leitura converte as excitações na forma de átomos deixados no nível  $|s\rangle$  em fótons emitidos no modo de leitura (modo 2). (c) Representação dos processos de escrita e leitura quando uma excitação apenas é armazenada na nuvem. (d) Representação do processo de escrita e leitura quando duas excitações são armazenadas na nuvem.

Quando um único fóton é detectado durante o processo de escrita, a nuvem passa a estar em um estado de superposição com relação a identidade do átomo que sofreu a transição que resultou na emissão do fóton detectado. Esta indistinguibilidade de quem se encontra no nível  $|s\rangle$  depende do perfil do laser de escrita e do modo definido pela fibra ótica que carrega o fóton até o detector. A informação quântica contida neste estado de superposição é então armazenada na nossa memória atômica. Então, o laser de leitura ressonante com a transição  $|s\rangle \rightarrow |e\rangle$  e de vetor de onda  $\mathbf{k}_r$  permite que o átomo no nível  $|s\rangle$  retorne ao nível  $|g\rangle$  com uma emissão de fóton no modo de leitura, como descrito na parte (b) da figura 4. Este modo é selecionado devido ao casamento de fase que acontece ao longo de todo o processo que envolve os passos realizados antes e depois de a informação ser armazenada na nuvem, como descrito na parte (c) da figura 4. Se há a detecção de dois fótons durante a fase de leitura, será preservada na memória a informação quântica referente a superposição dos estados em que dois átomos estão no nível  $|s\rangle$ . O laser de leitura permite então que ambos os átomos voltem ao nível  $|g\rangle$ , emitindo o par de fótons no modo de leitura. Todo este processo está descrito na parte (d) da figura 4.

Se o laser de escrita é descrito por uma onda plana de vetor de onda  $\mathbf{k}_w$  e o fóton é emitido também em um modo de onda plana dado por  $\mathbf{k}$ , então o estado deixado pelo processo de escrita é obtido de forma semelhante ao que fizemos na equação (3.40)

$$\hat{\sigma}_{se}(\mathbf{k})\hat{\sigma}_{eg}(\mathbf{k}_w)|gg\dots g\rangle = \sum_i e^{-i(\mathbf{k}_w-\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}_i}|s_i\rangle, \quad (4.6)$$

onde  $|s_i\rangle \equiv \hat{\sigma}_{se,i}\hat{\sigma}_{eg,i}|gg\dots g\rangle$  é o estado em que o  $i$ -ésimo átomo se encontra no nível  $|s\rangle$ ,  $\hat{\sigma}_{eg}(\mathbf{k})$  é definido como na equação (3.37)

$$\hat{\sigma}_{eg}(\mathbf{k}) = \sum_i e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i}\hat{\sigma}_{eg,i} \quad (4.7)$$

e  $\hat{\sigma}_{se}(\mathbf{k}) = \hat{\sigma}_{es}^\dagger(\mathbf{k})$ , com  $\hat{\sigma}_{es}(\mathbf{k})$  definido por

$$\hat{\sigma}_{es}(\mathbf{k}) = \sum_i e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i}\hat{\sigma}_{es,i}, \quad (4.8)$$

representando o efeito da emissão e absorção coletivas de um fóton no modo de vetor de onda  $\mathbf{k}$ , respectivamente. O estado resultante desta transição envolvendo duas ondas distintas é

$$|\psi_w\rangle \propto \int d^3\mathbf{k} g(\mathbf{k}) \sum_i e^{-i(\mathbf{k}_w-\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}_i}|s_i\rangle|\mathbf{k}\rangle, \quad (4.9)$$

em que  $g(\mathbf{k})$  é um fator de interação do fóton com o átomo no decaimento espontâneo que especifica a taxa de emissão para as várias direções. Na ocasião em que o fóton emitido é detectado em um modo de onda plana dado por  $\mathbf{k}_1$ , então o estado atualizado do sistema passa a ser dado pela projeção em  $\mathbf{k}_1$ :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i e^{-i(\mathbf{k}_w-\mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{r}_i}|s_i\rangle. \quad (4.10)$$

Note que o fóton que será detectado pode ser emitido em várias direções, de acordo com  $g(\mathbf{k})$ ; apenas com a seleção no modo de vetor de onda  $\mathbf{k}_1$  é que a etapa da escrita é concluída. Somente assim, obtemos a nuvem em um estado bem definido de equilíbrio do sistema, que se mantém após o laser de escrita ser desligado.

Vimos no capítulo 3, na equação (3.43), que se um fóton de um modo de onda plana é absorvido por uma nuvem contendo átomos de dois níveis, ele tende a ser reemitido na mesma direção, pois a taxa de emissão é uma função da vetor de onda do fóton gerado e do absorvido segundo

$$\Phi(\mathbf{k}_a - \mathbf{k}_e) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i e^{-i(\mathbf{k}_a-\mathbf{k}_e)\cdot\mathbf{r}_i}, \quad (4.11)$$

onde  $\mathbf{k}_a$  é o vetor de onda do fóton absorvido e  $\mathbf{k}_e$  o do fóton emitido. Se os átomos são distribuídos aleatoriamente por todo o espaço e  $N \rightarrow \infty$ , esta função passa a ser aproximada por

$$\Phi(\mathbf{k}_a - \mathbf{k}_e) \propto \delta(\mathbf{k}_a - \mathbf{k}_e). \quad (4.12)$$

De fato, neste limite, independente do formato da onda incidente, o fóton que vai ser emitido no processo será idêntico ao absorvido, no que refere ao quesito espacial. Com a nuvem fazendo o papel de memória entre dois passos de emissão estimulada pela interação com o laser, em que agora temos um processo envolvendo átomos de três níveis, veremos que há quatro diferentes modos do campo eletromagnético interagindo de forma a satisfazer

$$\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k}_2 = 0. \quad (4.13)$$

Os vetores  $\mathbf{k}_w$  e  $\mathbf{k}_r$  representam fótons do laser que são absorvidos da nuvem, enquanto os vetores  $\mathbf{k}_1$  e  $\mathbf{k}_2$  representam fótons emitidos e que são detectados. Assim, a escrita e leitura fazem parte um processo de mistura de 4 ondas, cuja interferência das interações com os vários átomos seleciona apenas aqueles modos do campo que satisfazem a relação (4.13) conjuntamente.

Na segunda parte da memória descrita na figura 4, o efeito da incidência do laser sobre o estado (4.10), que incita a emissão do fóton da leitura é

$$\hat{\sigma}_{ge}(\mathbf{k})\hat{\sigma}_{es}(\mathbf{k}_r)|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i e^{-i(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_i} |g g \cdots g\rangle, \quad (4.14)$$

onde  $\hat{\sigma}_{ge}(\mathbf{k}) = \hat{\sigma}_{eg}^\dagger(\mathbf{k})$  e  $\mathbf{k}_r$  é o vetor de onda do laser de leitura. O estado após a emissão do fóton é portanto

$$|\psi_r\rangle \propto \int d^3\mathbf{k} g(\mathbf{k})\Phi(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k}) |g g \cdots g\rangle |\mathbf{k}\rangle, \quad (4.15)$$

se ignorarmos detalhes da dinâmica de emissão, que analisaremos somente no próximo capítulo. Como  $\Phi(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k}) \propto \delta(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k})$ , podemos simplificar o estado ao fim do processo como

$$|\psi_r\rangle = |g g \cdots g\rangle |\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r\rangle. \quad (4.16)$$

O fóton que é extraído na fase de leitura é dado por um modo de onda plana  $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r$ , ou seja, a nuvem emite de maneira perfeitamente direcionada, dentro de todas as aproximações utilizadas.

A princípio, assumimos que tanto os dois lasers eram gerados em modo de onda plana dados por  $\mathbf{k}_w$  e  $\mathbf{k}_r$  quanto o modo de detecção durante a escrita  $\mathbf{k}_1$ . Desta forma, o único modo de onda plana em que vai haver detecção de fótons é em  $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r$ . Se ainda for imposto que os lasers são contra-propagantes e de frequência aproximadamente iguais, teremos que  $\mathbf{k}_w + \mathbf{k}_r = 0$ , e assim garantimos que os detectores dos fótons emitidos precisam também estar alinhados e apontando em direções opostas:  $\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_1$ . Relaxando um pouco estas condições impostas, podemos considerar que os lasers ainda são descritos por ondas planas, mas agora tomemos que a detecção durante a escrita se dá através de uma fibra monomodo. Neste caso, resta saber qual será o perfil de emissão do fóton

de leitura. No próximo capítulo será elaborado com mais detalhes como que o fóton a ser emitido na leitura acopla a uma fibra monomodo idêntica a da escrita e também posicionada de forma a detectar fótons contra-propagantes aos fótons detectados durante a primeira etapa.

A partir disto, pode-se configurar o sistema óptico de forma que as fibras óticas que transportam a luz dos lasers se alinhem, de forma que o feixe emitido por uma delas acople bem à outra; o mesmo para as duas fibras que transportam os fótons até os detectores. A nuvem atômica é centrada no ponto de interseção dos dois pares de feixes contra-propagantes. A interação da luz com a matéria cria a correlação entre as 4 ondas, ainda que devido ao efeito de memória, isto não ocorra ao mesmo tempo. Em particular, esta separação temporal é central para que possamos definir o momento preciso em que a fase de leitura começa. Por um lado, a configuração de mistura de 4 ondas garante a eficiência do processo devido a direcionalidade do feixe de escrita, enquanto o efeito de memória garante a precisão temporal que é necessária para calcular os detalhes temporais do processo de emissão.

Com os feixes e detectores alinhados, o experimento é realizado pela repetição em rodadas da seguinte sequência: a armadilha magneto-óptica (MOT) é desligada e os campos magnéticos são anulados; o feixe de bombeio incide sobre a nuvem durante um intervalo de tempo suficiente para que todos os átomos fiquem no nível  $|g\rangle$ ; o feixe de leitura também incide durante um intervalo curto para que poucos fótons sejam espalhados; o feixe de leitura é ligado por um instante da ordem do inverso da taxa de emissão superradiante para que seja possível obter o pacote de onda do fóton emitido. Durante os instantes em que o laser de escrita e o de leitura estão ligados, os foto-detectores (APD's) da escrita e leitura também são ativados nos intervalos respectivos. Os resultados de medição dos detectores da escrita e leitura só são usados quando há a correlação, isto ajuda a eliminar ruído, pois um clique na leitura só é relevante se há um clique na escrita. Além disto, durante a leitura é possível discriminar, com precisão de nanosegundo, qual o instante de chegada do fóton. É com esta informação que o pacote de onda do fóton de leitura é obtido: ele é dado pelo histograma das detecções em função do tempo.

## 5 Teoria para Superradiância de Estados de Fock

Neste capítulo, desenvolvemos a teoria para a emissão de fótons únicos e duplos na memória quântica, publicada em [30], que é baseada na teoria para fótons únicos desenvolvida em [16]. A principal diferença entre estes tratamentos e as teorias anteriores que descrevem o comportamento de emissão de nuvens atômicas [2] é que assumimos que o feixe laser incidente leva a uma transparência eletromagneticamente induzida (EIT) [20, 21] para a luz emitida propagando no meio, eliminando efeitos complexos envolvendo a reabsorção do fóton emitido pelo resto da nuvem do tratamento. Com algumas aproximações adicionais, passa a ser possível descrever o processo de leitura da memória atômica como uma combinação de oscilações de Rabi com uma emissão espontânea partindo dos átomos. Assim, chega-se a uma expressão analítica para o formato do pacote de onda da luz emitida pela nuvem, que dispensa o uso de simulações numéricas graças ao conjunto de aproximações aplicadas.

Em comparação com a teoria em [16], a teoria apresentada aqui é mais elementar e intuitiva, porém menos genérica ao considerar um feixe de leitura ressonante e desconsiderar os efeitos de decoerência gerados por campos magnéticos remanescentes da armadilha, que podem ser uma fonte de ruído relevante. Ainda assim, as simplificações são consistentes com os avanços experimentais obtidos para a aquisição dos novos resultados, que foram expostos em [29]. Esta nova teoria para a emissão superradiante de um fóton possui a vantagem adicional de poder ser estendida para a análise de muitas excitações oriundas do ensemble atômico.

Na seção 5.1 iremos esboçar a teoria que determina qual o estado preparado pelo processo de escrita da memória quando há apenas uma fotodetecção nesta fase. Em seguida, em 5.2 iremos construir o hamiltoniano que descreverá a evolução do sistema durante o processo de leitura, que se aplicará tanto na emissão de apenas um fóton, quanto na emissão de um par. A seção 5.3 possui a solução da equação de Schrödinger quando a condição inicial é de uma nuvem contendo apenas um átomo no estado  $|s\rangle$  e prevê a emissão de um fóton e também o formato do seu pacote de onda. A taxa de emissão obtida para esse processo exhibe o efeito da superradiância característico deste problema, a expressão para a correção superradiante é obtida na seção 5.4. As seções 5.5 e 5.6 concluem o capítulo tratando da preparação e emissão do estado de duas excitações emitindo dois fótons, respectivamente.



## 5.1 Preparação do Estado de uma Excitação

Como visto na figura 4, a nuvem atômica parte de um estado  $|\psi_0\rangle = |g \dots g\rangle$  em que todos os átomos se encontram no mesmo nível atômico  $|g\rangle$ . O estado atômico que se conecta com o nível  $|g\rangle$  pela interação com o laser de escrita é denominado por  $|e\rangle$ , o operador que promove essa transição no  $i$ -ésimo átomo é denotado por  $\hat{\sigma}_{eg,i} \equiv |e\rangle\langle g|_i$ . Desta forma, a aplicação deste operador sobre o estado inicial leva ao estado  $|e_i\rangle$  onde apenas o  $i$ -ésimo átomo se encontra no nível excitado  $|e\rangle$ , enquanto todos os outros permanecem no nível fundamental  $|g\rangle$ . Neste esquema de átomo de três níveis do tipo  $\Lambda$ , contando dois níveis meta-estáveis e um excitado, o átomo que se encontra em  $|e\rangle$  pode decair para um nível auxiliar  $|s\rangle$ , numa transição dada por  $\hat{\sigma}_{se,i} \equiv |s\rangle\langle e|_i$ , através da interação com luz de polarização ortogonal à da luz interagente na transição  $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$ . Assim, a aplicação conjunta de  $\hat{\sigma}_{eg,i}$  e  $\hat{\sigma}_{se,i}$  sobre o estado  $|\psi_0\rangle$  deixa o ensemble no estado  $|s_i\rangle$ , em que apenas o  $i$ -ésimo átomo se encontra no nível  $|s\rangle$  e todos os demais em  $|g\rangle$ .

O feixe laser de escrita é aproximado por uma onda plana com vetor de onda  $\mathbf{k}_w$  fora de sintonia com a transição  $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$ . Devido à dessintonia, a transição Raman  $|g\rangle \rightarrow |e\rangle \rightarrow |s\rangle$  induzida sobre os átomos ocorre com probabilidade pequena, e é acompanhada do espalhamento da luz laser em um fóton de polarização correspondente à transição  $|e\rangle \rightarrow |s\rangle$ , como mostra a Fig. 4. A detecção deste fóton em um modo normal de propagação  $a_1$ , definido por uma fibra acoplada ao foto-detector, prepara a nuvem em um estado de superposição, em que a identidade do átomo que originou o fóton é indeterminada, segundo as regras da mecânica quântica. O operador de aniquilação ligado a esse modo é definido por

$$\hat{a}_1 = \int d^3\mathbf{k} \phi_1(\mathbf{k}) \hat{a}(\mathbf{k}), \quad (5.1)$$

onde  $\hat{a}(\mathbf{k})$  é o operador de aniquilação para uma onda plana de vetor de onda  $\mathbf{k}$ . A dependência em  $\mathbf{k}$  da função  $\phi_1(\mathbf{k})$  é altamente concentrada em torno do vetor de onda  $\mathbf{k}_1$  definido pela posição e pelas características da fibra óptica.

O processo perturbativo que determina o espalhamento do fóton ao longo da transição  $|g\rangle \rightarrow |e\rangle \rightarrow |s\rangle$  é modelado por

$$\sum_i \int d^3\mathbf{k} g(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_i} \hat{\sigma}_{sg,i} \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}),$$

onde  $g(\mathbf{k})$  representa o coeficiente de interação da onda plana de vetor  $\mathbf{k}$  com o átomo de dois níveis, segundo (2.34) a menos da reintrodução da dependência espacial da interação do átomo com o campo, pois há agora vários átomos interagindo. A ação dessa operação sobre um estado inicial dado por  $|\psi_0\rangle |\emptyset\rangle$ , onde  $|\emptyset\rangle$  representa o estado de vácuo para o campo eletromagnético, promove a transição de primeira ordem

$$|\psi_0\rangle |\emptyset\rangle \rightarrow \lambda \sum_i \int d^3\mathbf{k} g(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_i} |s_i\rangle |\mathbf{k}\rangle, \quad (5.2)$$

onde  $|s_i\rangle = \hat{\sigma}_{sg,i} |\psi_0\rangle$ ,  $\lambda$  é o coeficiente da teoria de perturbação dependente do tempo considerada no Cap. 2 e  $|\mathbf{k}\rangle$  é o estado do campo em que o modo de onda plana de vetor  $\mathbf{k}$  contém um fóton.

A pós-seleção dada pelas fotodeteccões no detector no modo do campo 1 é modelada pela aplicação de  $a_1$  definido em (5.1) no estado da equação (5.2); assim, considerando que apenas uma transição de primeira ordem ocorreu na interação dos átomos com o campo, o estado resultante após o processo de escrita é dado por

$$|\psi_0\rangle |\emptyset\rangle \rightarrow \lambda \sum_i \int d^3\mathbf{k} g(\mathbf{k}) \phi_1(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_i} |s_i\rangle |\emptyset\rangle. \quad (5.3)$$

O estado que é preparado no processo de escrita e que é dado como condição inicial para a evolução durante o processo de leitura é uma superposição de estados em que a identidade do átomo que se encontra no nível auxiliar é bem definida:

$$|\psi_1\rangle = \sum_i \alpha_i |s_i\rangle, \quad (5.4)$$

onde, segundo (5.3) e dado que na região do espaço de momentos em torno de  $\mathbf{k}_1$ , definido como o centro da distribuição  $\phi_1(\mathbf{k})$  em (5.1), a função  $g(\mathbf{k})$  varia lentamente, resulta em

$$\alpha_i \propto \int \phi_1(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_i} d^3\mathbf{k}, \quad (5.5)$$

tal que o estado é normalizado:  $\sum_i |\alpha_i|^2 = 1$ . Agora, podemos fazer uma mudança de variáveis para deixar explícito o termo de fase dado pelo feixe de escrita centrado em  $\mathbf{k}_w$  e pela pós-seleção da detecção do fóton na fibra que seleciona modos centrados em  $\mathbf{k}_1$ . Definiremos  $\alpha_i = a_i e^{-i(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r}_i}$  tal que

$$|\psi_1\rangle = \sum_i a_i e^{-i(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r}_i} |s_i\rangle. \quad (5.6)$$

As amplitudes  $a_i$  são dadas por

$$a_i \propto \int \phi_1(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i} d^3\mathbf{k}, \quad (5.7)$$

que mostram explicitamente que são obtidas pela transformada de Fourier de uma função praticamente simétrica em torno de  $\mathbf{k}_1$ . A função  $f(\mathbf{k}) = \phi_1(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k})$  é próxima de uma função par, na medida que as amplitudes  $a_i$  não possuem nenhum termo de fase complexa oscilante significativo.

É essa superposição dos estados  $|s_i\rangle$  em (5.4) ou (5.6) que garante que a emissão durante a leitura será coerente, e que justifica que a localização do emissor seja fundamentalmente indeterminada. Caso a detecção do fóton se desse com o uso de uma fibra multi-modo, por exemplo, não seria possível garantir que a nuvem armazenaria um estado puro, pois a detecção seria incapaz de distinguir qual a relação de fase precisa entre as amplitudes dos  $|s_i\rangle$ , visto que esta depende das propriedades espaciais do modo do campo de emissão.

## 5.2 Dinâmica de Emissão

Após o laser de escrita ter sido desligado, a nuvem se mantém em repouso com alguns átomos no estado fundamental e outros no nível auxiliar, sem que nenhuma transição possa ocorrer. Quando o laser de leitura ressonante com a transição  $|s\rangle \rightarrow |e\rangle$  é ligado, passa a ocorrer uma inversão de população entre esses estados, e os átomos que agora estão no nível  $|e\rangle$  podem decair espontaneamente para o nível  $|g\rangle$ , emitindo um fóton com a polarização adequada para ser detectado pelo aparato eletrônico, como mostra a Fig. 4. Sob a ação do laser de leitura, há o espalhamento de fótons devido à fluorescência ao longo da transição  $|e\rangle \rightarrow |s\rangle$ , porém, a emissão desses fótons afeta a coerência do estado remanescente, destruindo a pureza do estado de superposição quântica em que a excitação se distribui por vários átomos. Sem essa coerência, o fenômeno de interferência associado à superradiância que será detalhado no restante dessa seção não é estabelecido: nem a direcionalidade dos fótons é bem definida, nem a taxa de emissão é incrementada. Os fótons detectados ao final da leitura são, em sua maioria, oriundos da nuvem enquanto nenhum outro fóton for emitido pelo processo de fluorescência. Assim, ignoraremos o termo de fluorescência do hamiltoniano, que afeta a eficiência da memória quântica, mas não participa diretamente da geração dos fótons detectados.

Durante o processo de leitura, a dinâmica é dada por um hamiltoniano que descreve a interação dos átomos com o laser e também com os modos do campo que serão excitados após a emissão espontânea. O hamiltoniano  $\hat{H}(t)$  é dependente do tempo pois o termo de interação dos átomos com o laser varia no tempo com a frequência  $\omega_r$  do laser, e será separado em  $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{H}_1(t)$  para que possamos utilizar o formalismo de representação de interação. O laser é tratado como um termo paramétrico na evolução dos átomos, ou seja, a ação do laser sobre os átomos não é acompanhada por uma reação dos átomos sobre o estado do campo do laser. Assim, o efeito de uma emissão ou absorção de uns poucos fótons pela nuvem não altera o estado do laser.  $\hat{H}_0$  é composto pelos termos de energia dos níveis de todos os átomos e pela energia de todos os modos do campo eletromagnético [38]:

$$\hat{H}_0 = \sum_i (-\hbar\omega_{se} |s_i\rangle\langle s_i| - \hbar\omega_{ge} |g_i\rangle\langle g_i|) + \int d^3\mathbf{k} \hbar\omega \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\hat{a}(\mathbf{k}), \quad (5.8)$$

onde  $\hbar\omega_{ge} = E_e - E_g$  e  $\hbar\omega_{se} = E_e - E_s$  são as diferenças de energia para o estado excitado dos átomos, que é definida como o zero da escala:  $E_e = 0$ ;  $\hbar\omega$  é a energia associada a cada fóton de vetor de onda  $\mathbf{k}$ , em que  $\omega = c|\mathbf{k}|$ , e  $\hat{a}(\mathbf{k})$  e  $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})$  são os operadores aniquilação e criação de fótons no modo de onda plana  $\mathbf{k}$ , respectivamente. O estado de vácuo aqui é usado para definir o zero da energia do campo sem que haja nenhum efeito nos resultados descritos neste trabalho. Por sua vez,  $\hat{H}_1(t)$  consiste do termo de interação dipolar dos átomos com o laser de leitura ao longo da transição  $|s\rangle \rightarrow |e\rangle$  e do termo de interação dipolar entre o átomo e o campo ao longo da transição  $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ , onde ambos aqui serão

considerados na aproximação escalar:

$$\hat{H}_1(t) = - \sum_i \hat{p}_{se,i} E_0 \sin(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_i - \omega_r t) - \sum_i \int d^3\mathbf{k} \hat{p}_{ge,i} \left( \hat{E}^{(+)}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i} + \hat{E}^{(-)}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i} \right). \quad (5.9)$$

O primeiro termo leva em consideração que o feixe de leitura é uma onda plana, estabelecendo uma relação de fase entre os átomos dada por  $\mathbf{k}_r$ . Como o laser é tratado parametricamente, a evolução temporal deste termo do hamiltoniano é explícita, i.e., não é oriunda da própria dinâmica hamiltoniana, o campo oscila com frequência  $\omega_r = c|\mathbf{k}_r|$  e possui amplitude  $E_0 = \alpha\mathcal{E}_0$ , onde  $\mathcal{E}_0$  é a amplitude do campo elétrico para um único fóton e  $\alpha$  é a amplitude do estado coerente que modela o estado do laser. A interação com os átomos promove uma oscilação de Rabi entre os níveis que é caracterizada por  $\hat{p}_{se} E_0 \sin(\omega_r t)$  para  $t > 0$ , que é quando o laser é ligado;  $\hat{p}_{se,i} = p_{se} \hat{\sigma}_{se,i} + p_{es} \hat{\sigma}_{es,i}$ , onde  $\hat{\sigma}_{es,i} = |e_i\rangle\langle s_i|$ ,  $\hat{\sigma}_{se,i} = |s_i\rangle\langle e_i|$ ,  $p_{se} = -q \langle s|\hat{r}|e\rangle$  e  $p_{es} = -q \langle e|\hat{r}|s\rangle$  dão o momento de dipolo associado à transição  $|e\rangle \leftrightarrow |s\rangle$  e  $-q$  é a carga do elétron. Já no segundo termo, temos o coeficiente de interação com os componentes de onda plana do campo  $\hat{E}^{(+)}(\mathbf{k}) = \tilde{E}_0(\mathbf{k}) \hat{a}(\mathbf{k})$  e  $\hat{E}^{(-)}(\mathbf{k}) = \tilde{E}_0^*(\mathbf{k}) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})$ , sendo amplitude do campo elétrico de um fóton dada por  $\tilde{E}_0(\mathbf{k}) = i\sqrt{\hbar\omega/2\epsilon_0}$  e com o dipolo de momento  $\hat{p}_{ge,i}$  na posição  $\mathbf{r}_i$  e ao longo da transição  $|e\rangle \leftrightarrow |g\rangle$  descrito por  $\hat{\sigma}_{ge,i} = |g_i\rangle\langle e_i|$  e  $\hat{\sigma}_{eg,i} = |e_i\rangle\langle g_i|$ .

Para deixar os cálculos mais simples, removendo todas as oscilações rápidas com o auxílio da aproximação de onda girante [38], faremos uma mudança de representação e, a partir daqui, usaremos o hamiltoniano na representação de interação:  $\hat{H}_{\text{int}}(t) = \hat{U}_0^\dagger(t) \hat{H}_1(t) \hat{U}_0(t)$  que pode ser calculado, dado que a solução das equações de Schrödinger com apenas o hamiltoniano  $\hat{H}_0$  é de fácil obtenção:  $\hat{U}_0(t) \equiv e^{-i\hat{H}_0 t/\hbar}$ . Assim, os operadores na representação de interação passam a ser dados por:

$$\hat{\sigma}_{se,i} \rightarrow e^{-i\omega_{se}t} \hat{\sigma}_{se,i} \quad \hat{\sigma}_{ge,i} \rightarrow e^{-i\omega_{ge}t} \hat{\sigma}_{ge,i} \quad \hat{a}(\mathbf{k}) \rightarrow e^{-i\omega t} \hat{a}(\mathbf{k}), \quad (5.10)$$

e o hamiltoniano de interação é descrito por:

$$\hat{H}_{\text{int}}(t) = \frac{i}{2} \sum_i \hbar\Omega_0 e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_i} \hat{\sigma}_{se,i} + i \sum_i \int d^3\mathbf{k} \hbar g^*(\mathbf{k}) e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i + (\omega - \omega_{ge})t]} \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) \hat{\sigma}_{ge,i} + \text{c.H.}, \quad (5.11)$$

com  $\hbar\Omega_0 = p_{se} E_0$  e  $i\hbar g^*(\mathbf{k}) = p_{ge} \tilde{E}_0^*(\mathbf{k})$  de forma a simplificar as equações diferenciais obtidas a partir deste hamiltoniano. A dependência temporal do termo de interação com o laser some devido à condição de ressonância imposta ( $\omega_{se} = \omega_r$ ). Agora, a dependência temporal do hamiltoniano aparece apenas com o acoplamento com o campo de radiação, na forma de oscilações rápidas no coeficiente de interação sempre que a frequência do fóton emitido diferir muito da frequência da transição  $|e\rangle \leftrightarrow |g\rangle$ . Resolvendo a equação de Schrödinger com base nesse hamiltoniano, partindo dos estados iniciais presentes em (5.4) e em (5.60), deduziremos as propriedades da nuvem e do campo ao longo do processo de leitura da memória.

### 5.3 Evolução Temporal na Emissão de um Fóton

Se o estado inicial for aquele exibido por (5.4), então a atuação do hamiltoniano em (5.11) leva a um estado da forma

$$|\psi_1\rangle |\emptyset\rangle \rightarrow \sum_i [\alpha_i(t) |s_i\rangle |\emptyset\rangle + \beta_i(t) |e_i\rangle |\emptyset\rangle] + \int d^3\mathbf{k} \gamma(t; \mathbf{k}) |\psi_0\rangle |\mathbf{k}\rangle \quad (5.12)$$

dado que o termo de interação com o laser promove a inversão de população dos estados  $|s_i\rangle$  para os estados  $|e_i\rangle$ , e o termo de acoplamento com o campo está associado à excitação do campo para o estado  $|\mathbf{k}\rangle$ , deixando a nuvem de volta ao estado  $|\psi_0\rangle$ . Como em  $t = 0$  o sistema se encontra no estado preparado pela escrita, temos que  $\alpha_i(0) = \alpha_i$ ,  $\beta_i(0) = 0$  e  $\gamma(0; \mathbf{k}) = 0$ , lembrando que  $\alpha_i = a_i e^{-i(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r}}$ , onde  $a_i$  é definido na equação (5.7). A equação de Schrödinger em termo dessas amplitudes se mostra como um conjunto de equações diferenciais:

$$\frac{d\alpha_i(t)}{dt} = \frac{\Omega_0}{2} e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_i} \beta_i(t), \quad (5.13a)$$

$$\frac{d\beta_i(t)}{dt} = -\frac{\Omega_0}{2} e^{-i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_i} \alpha_i(t) - \int d^3\mathbf{k} g(\mathbf{k}) e^{-i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i + (\omega - \omega_{ge})t]} \gamma(t; \mathbf{k}), \quad (5.13b)$$

$$\frac{d\gamma(t; \mathbf{k})}{dt} = \sum_i g^*(\mathbf{k}) e^{i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i + (\omega - \omega_{ge})t]} \beta_i(t), \quad (5.13c)$$

que governa a dinâmica da nuvem e campo.

Da forma com a qual se encontra, estas equações envolvem um número impraticável de variáveis para descrever a nuvem ( $2N$ , onde  $N$  seria o número total de átomos). Porém, a dinâmica coletiva, dentro da aproximação do método de Weisskopf-Wigner que será discutida mais adiante, satisfaz um sistema de equações da seguinte forma

$$\frac{d\alpha_i(t)}{dt} = \frac{\Omega_0}{2} e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_i} \beta_i(t), \quad (5.14a)$$

$$\frac{d\beta_i(t)}{dt} = -\frac{\Omega_0}{2} e^{-i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_i} \alpha_i(t) - \sum_j \frac{\Gamma_{ij}}{2} \beta_j(t), \quad (5.14b)$$

onde  $\Gamma_{ij}$  é o termo de acoplamento devido ao decaimento coletivo da nuvem. Este conjunto de equações diferenciais é semelhante às equações da dinâmica de um ensemble de osciladores clássicos em (3.32). Isto é natural, pois a dinâmica de evolução do estado de um fóton em um meio linear coincide com o tratamento clássico [31–33]. Assim como na superradiância de sistemas clássicos, esse conjunto de equações lineares pode ser simplificado através da aplicação de modos normais de oscilações [9], que são as soluções desacopladas ( $\alpha_k(t)$  e  $\beta_k(t)$ ) desse conjunto de equações, tal que

$$\frac{d\alpha_k(t)}{dt} = \frac{\Omega_0}{2} \beta_k(t), \quad (5.15a)$$

$$\frac{d\beta_k(t)}{dt} = -\frac{\Omega_0}{2} \alpha_k(t) - \frac{\Gamma_k}{2} \beta_k(t), \quad (5.15b)$$

onde  $\Gamma_{\mathbf{k}}$  é a solução do problema de autovalores da matriz  $\Gamma_{ij}$ . Portanto, cabe ao processo de escrita definir a distribuição inicial em termos desses modos normais durante o processo de leitura. Tomando os resultados obtidos em [16, 28], a taxa de decaimento exibido no estudo de memórias quânticas do tipo estudado é bem definida, ou seja, que o processo de escrita prepara um estado muito próximo de um dos modos normais. Em particular, isso significa que as amplitudes  $\beta_i(t)$  satisfazem

$$\sum_j \Gamma_{ij} \beta_j(t) = \Gamma \beta_i(t), \quad (5.16)$$

onde  $\Gamma$  é a taxa de decaimento específica do modo preparado.

Desta maneira, podemos tomar como base apenas um par de variáveis para descrever o conjunto de átomos:  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$ , de forma que  $\alpha_i(t) = \alpha(t)\alpha_i$  e  $\beta_i(t) = \beta(t)\beta_i$ . Com apenas um único modo normal de decaimento, as amplitudes dos vários átomos evoluem em conjunto e a razão entre todas elas é constante. Podemos deixar a informação que descreve essa distribuição fixa na definição dos vetores de estado

$$|s_\chi\rangle \equiv \sum_i \alpha_i |s_i\rangle, \quad \text{e} \quad |e_\chi\rangle \equiv \sum_i \beta_i |e_i\rangle. \quad (5.17)$$

Com essas variáveis, o estado quântico durante o processo de escrita é dado por

$$|\psi_1\rangle |\emptyset\rangle \rightarrow \alpha(t) |s_\chi\rangle |\emptyset\rangle + \beta(t) |e_\chi\rangle |\emptyset\rangle + \int d^3\mathbf{k} \gamma(t; \mathbf{k}) |\psi_0\rangle |\mathbf{k}\rangle \quad (5.18)$$

e as condições iniciais são  $\alpha(0) = 1$ ,  $\beta(0) = 0$  e  $\gamma(0; \mathbf{k}) = 0$ . As equações de Schrödinger para  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$  são dadas por

$$\alpha_i \frac{d\alpha(t)}{dt} = \beta_i e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_i} \frac{\Omega_0}{2} \beta(t), \quad (5.19a)$$

$$\beta_i \frac{d\beta(t)}{dt} = -\alpha_i e^{-i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_i} \frac{\Omega_0}{2} \alpha(t) - \int d^3\mathbf{k} g(\mathbf{k}) e^{-i[\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_i + (\omega - \omega_{ge})t]} \gamma(t; \mathbf{k}). \quad (5.19b)$$

Daí, fica claro que se  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  são escolhidos de forma que

$$\alpha_i = \beta_i e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_i}, \quad (5.20)$$

então (5.19a) se torna

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{\Omega_0}{2} \beta(t). \quad (5.21a)$$

Para simplificar a equação (5.19b), usaremos que  $\sum_i |\alpha_i|^2 = \sum_i |\beta_i|^2 = 1$ , e para isso, multiplicamos ambos os lados da equação por  $\beta_i^*$  e somamos sobre todos os átomos, de forma que

$$\frac{d\beta(t)}{dt} = -\frac{\Omega_0}{2} \alpha(t) - \int d^3\mathbf{k} g(\mathbf{k}) \sum_i \beta_i^* e^{-i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_i} e^{-i(\omega - \omega_{ge})t} \gamma(t; \mathbf{k}). \quad (5.21b)$$

Agora, se reescrevemos  $\beta_i$  em função de  $\alpha_i$  através de  $\alpha_i = a_i e^{-i(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{r}_i}$  e  $\beta_i = \alpha_i e^{-i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_i}$ , podemos expressar  $\beta_i$  como  $\beta_i = a_i e^{-i(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r) \cdot \mathbf{r}_i}$ . Além disso, podemos definir uma

função para a somatória sobre os átomos no lado direito da equação (5.21b) que também aparece no lado direito da equação (5.13c), encontrando uma função que resume o efeito da distribuição da excitação ao longo da nuvem, qualquer que seja o modo de onda plana  $\mathbf{k}$  que interage com um estado coletivo determinado pelas amplitudes  $a_i$ . Aqui iremos definir

$$\Phi(\mathbf{k}) \equiv \sum_i a_i e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i}. \quad (5.22)$$

Esta função  $\Phi(\mathbf{k})$  carrega todas as características dos efeitos da superradiância, como veremos.

Com estas simplificações, as equações (5.13) são reescritas na forma

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \frac{\Omega_0}{2}\beta(t) \quad (5.23a)$$

$$\frac{d\beta(t)}{dt} = -\frac{\Omega_0}{2}\alpha(t) - \int d^3\mathbf{k} g(\mathbf{k})\Phi^*(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k})e^{-i(\omega - \omega_{ge})t}\gamma(t; \mathbf{k}) \quad (5.23b)$$

$$\frac{d\gamma(t; \mathbf{k})}{dt} = g^*(\mathbf{k})\Phi(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k})e^{i(\omega - \omega_{ge})t}\beta(t). \quad (5.23c)$$

Essas equações representam o campo eletromagnético interagindo com um sistema coletivo de dois níveis descrito por  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$ . Enquanto as propriedades da interação com o  $i$ -ésimo átomo estão contidas no termo  $g(\mathbf{k})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i}$ , a interação com esse sistema coletivo é descrita por  $g(\mathbf{k})\Phi^*(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k})$ . Como é de se esperar, se há apenas um átomo em  $\mathbf{r}_0$  interagindo com a luz, de forma que  $\beta_i = \delta_{i,0}$ , recupera-se o caso trivial com  $\Phi_0^*(\mathbf{k}) = e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0}$ .

Integrando (5.23c) de  $t' = 0$  a  $t' = t$ , dado que  $\gamma(0; \mathbf{k}) = 0$ , a amplitude  $\gamma(t; \mathbf{k})$  que descreve o campo emitido pelo sistema coletivo é dada por

$$\gamma(t; \mathbf{k}) = g^*(\mathbf{k})\Phi(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k}) \int_0^t dt' e^{i(\omega - \omega_{ge})t'}\beta(t'), \quad (5.24)$$

que, a menos do termo  $\Phi(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k})$  diferindo de  $e^{-i(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k})\cdot\mathbf{r}_0}$ , é idêntica em sua dependência com a amplitude  $\beta(t)$  à amplitude de emissão de um fóton por um único átomo.

Vemos assim, que as propriedades espaciais presentes na emissão coletiva devem estar associadas a  $\Phi(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k})$ . Agora, precisamos saber quais consequências podem ser extraídas da função

$$\Phi(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k}) = \sum_i a_i e^{-i(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k})\cdot\mathbf{r}_i}. \quad (5.25)$$

A partir dessa relação, podemos deduzir de onde vem a direcionalidade do fóton emitido durante o processo de leitura. A somatória sobre as fases  $e^{-i(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k})\cdot\mathbf{r}_i}$  em um conjunto de átomos que se estendem aleatoriamente por uma região do espaço muito maior que o comprimento de onda característico da luz será considerável apenas quando  $\mathbf{k} \approx \mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r$ . Dado que o feixe de leitura e o de escrita são contrapropagantes e a frequência de ambos são próximas entre si, temos que  $\mathbf{k}_w + \mathbf{k}_r \approx 0$ . Assim, o caso é que o fóton emitido durante

o processo de leitura também deve ser contrapropagante com o fóton detectado no processo de escrita:  $\mathbf{k} \approx -\mathbf{k}_1$ . Todo o processo de detecção do par com o auxílio dos dois feixes funciona em uma configuração de mistura de quatro ondas que precisa satisfazer

$$\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k}_2 \approx 0, \quad (5.26)$$

onde  $\mathbf{k}_2$  descreve o modo de detecção na leitura.

Esta mistura de quatro ondas só é satisfeita se o ensemble atômico se comporta como um sistema paramétrico, ou seja, todas as propriedades da nuvem de átomos frios ao fim do processo retornam aos valores iniciais. Neste caso, não há nenhuma informação armazenada nos outros graus de liberdade que evitariam o efeito de interferência responsável pelo casamento de fase. Em particular, a condição sobre as propriedades espaciais dos modos das quatro ondas em uma emissão direcionada dos fótons de leitura, característica essencial nas memórias aplicadas no protocolo DLCZ [17].

Para poder calcular as propriedades temporais do fóton emitido, precisamos obter  $\beta(t)$  para usar em (5.24). Reutilizando esta própria equação em (5.23b), obtemos uma equação integro-diferencial para  $\beta(t)$

$$\frac{d\beta(t)}{dt} = -\frac{\Omega_0}{2}\alpha(t) - \int d^3\mathbf{k} |g(\mathbf{k})\Phi(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k})|^2 e^{-i(\omega - \omega_{ge})t} \int_0^t dt' e^{i(\omega - \omega_{ge})t'} \beta(t'), \quad (5.27)$$

que será resolvida através do método de Weisskopf-Wigner [38]. Primeiro, podemos reescrever essa equação em função de  $s = t - t'$

$$\frac{d\beta(t)}{dt} = -\frac{\Omega_0}{2}\alpha(t) - \int d^3\mathbf{k} |g(\mathbf{k})\Phi(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k})|^2 \int_0^t ds e^{-i(\omega - \omega_{ge})s} \beta(t - s), \quad (5.28)$$

onde  $s$  representa o intervalo de memória dos valores anteriores de  $\beta(t')$  que afetam a equação diferencial em  $t$ . Comparado com  $e^{i(\omega - \omega_{ge})s}$ ,  $\beta(t - s)$  varia lentamente, de forma que podemos tomar o seguinte passo dentro da integração em  $d^3\mathbf{k}$

$$\int_0^t ds e^{-i(\omega - \omega_{ge})s} \beta(t - s) \rightarrow \beta(t) \int_0^t ds e^{-i(\omega - \omega_{ge})s}, \quad (5.29)$$

eliminando os efeitos de memória na emissão espontânea. O próximo passo consiste em estender a integral de 0 à  $t$  para uma integral de 0 à  $\infty$ , que é aceitável, pois o trecho da integração mais importante se encontra onde os valores de  $s$  são próximos de zero — estas considerações limitam o grau de precisão temporal que pretendemos observar neste tipo de experimento, pois, para intervalos de tempo da ordem de  $\omega_{ge}^{-1}$ , os efeitos de memória são importantes. Além disso, temos que

$$\text{Re}\left\{\int_0^\infty ds e^{-i(\omega - \omega_{ge})s}\right\} = \pi\delta(\omega - \omega_{ge}). \quad (5.30)$$

O termo imaginário dá origem ao efeito Lamb coletivo [50], modificando o nível de energia natural do estado excitado do conjunto de dipolos. Esse efeito é importante quando



os átomos estão muito próximos entre si com relação ao comprimento de onda da luz na transição ressonante [34]. Como, no experimento analisado, a densidade atômica é moderada, não iremos tratar deste efeito aqui. Por fim, usando os resultados em (5.28), (5.29) e (5.30), chegamos em uma equação diferencial para  $\beta(t)$  semelhante à (5.15b):

$$\frac{d\beta(t)}{dt} = -\frac{\Omega_0}{2}\alpha(t) - \frac{\Gamma}{2}\beta(t), \quad (5.31)$$

onde  $\Gamma$  é dado em função do termo de interação  $g(\mathbf{k})$ , do fator de cooperação  $\Phi(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k})$  e da frequência de transição  $\omega_{ge}$ :

$$\Gamma = 2\pi \int d^3\mathbf{k} \delta(\omega - \omega_{ge}) |g(\mathbf{k})\Phi(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k})|^2. \quad (5.32)$$

As soluções que surgem de (5.23a) e (5.31) são as mesmas que surgem de um oscilador amortecido com equações diferenciais idênticas para  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$  dadas por

$$\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} + \frac{\Gamma}{2} \frac{d\alpha(t)}{dt} + \left(\frac{\Omega_0}{2}\right)^2 \alpha(t) = 0. \quad (5.33)$$

Se comparadas com a equação

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0, \quad (5.34)$$

vemos que a frequência natural delas é  $\omega_0 = \Omega_0/2$  e a taxa de amortecimento é  $2\gamma = \Gamma/2$ . Portanto, as soluções devem ser da seguinte forma:

$$\alpha(t) = \cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right)e^{-\frac{\Gamma}{4}t} + a \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right)e^{-\frac{\Gamma}{4}t} \quad (5.35a)$$

$$\beta(t) = b \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right)e^{-\frac{\Gamma}{4}t} \quad (5.35b)$$

para que as condições iniciais  $\alpha(0) = 1$  e  $\beta(0) = 0$  sejam satisfeitas. Já para satisfazer (5.23a) e (5.31), as constantes precisam assumir os seguintes valores:  $a = \Gamma/2\Omega$ ,  $b = -\Omega_0/\Omega$  e  $\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 - (\Gamma/2)^2}$ . Estes resultados serão utilizados mais a frente quando formos obter a solução das equações de Schrödinger da emissão de um par de fótons. Para simplificar as equações iremos reescrever a solução quando  $\alpha(0) = 1$  e  $\beta(0) = 0$  com a ajuda do parâmetro  $\phi$  definido por

$$\sin(\phi) = \frac{\Gamma}{2\Omega_0} \quad \text{e} \quad \cos(\phi) = \frac{\Omega}{\Omega_0}, \quad (5.36)$$

resultando em

$$\alpha(t) = \sec \phi e^{-\Gamma t/4} \cos\left(\frac{\Omega}{2}t - \phi\right), \quad (5.37a)$$

$$\beta(t) = -\sec \phi e^{-\Gamma t/4} \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right). \quad (5.37b)$$

Por fim, deduziremos a densidade de probabilidade de detectar o único fóton num dado instante  $t$  após o laser de leitura ter sido ligado. No caso de haver somente um fóton a ser emitido, a informação sobre qualquer propriedade do fóton está presente em  $\gamma(t; \mathbf{k})$ . Em particular, se consideramos  $t \rightarrow \infty$  então a energia do sistema estará toda na forma de excitação do campo e denominaremos  $\gamma(\mathbf{k}) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t; \mathbf{k})$  como a função espectral que comporta todos os detalhes do pacote de onda do fóton emitido, e que satisfaz

$$\int d^3\mathbf{k} |\gamma(\mathbf{k})|^2 = 1. \quad (5.38)$$

De acordo com (5.24), a função  $\gamma(\mathbf{k})$  é dada por

$$\gamma(\mathbf{k}) = g^*(\mathbf{k})\Phi(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k}) \int_0^\infty dt' e^{i(\omega - \omega_{ge})t'} \beta(t'). \quad (5.39)$$

Se reescrevemos a integral da densidade no espaço de momentos  $\int d^3\mathbf{k} |\gamma(\mathbf{k})|^2$ :

$$\int d^3\mathbf{k} |\gamma(\mathbf{k})|^2 = \int d^3\mathbf{k} |g(\mathbf{k})\Phi(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k})|^2 \int_0^\infty dt' \int_0^\infty dt'' e^{-i(\omega - \omega_{ge})(t' - t'')} \beta^*(t')\beta(t''), \quad (5.40)$$

que nesta forma apresenta duas integrações temporais, como apenas uma única integral no tempo, e compararmos com o teorema de Parseval, resumido na seguinte relação:

$$\int_{-\infty}^\infty d\omega |\tilde{f}(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^\infty dt |f(t)|^2, \quad (5.41)$$

nós obtemos a densidade de probabilidade temporal  $\rho(t)$  através do argumento da integral única no tempo. Na equação (5.41),  $f(t)$  é uma função qualquer com transformada de Fourier dada por  $\tilde{f}(\omega)$ . A densidade de probabilidade temporal  $\rho(t)$  corresponde a  $|f(t)|^2$  e é naturalmente normalizada, vide (5.38).

Para poder equiparar (5.40) e (5.41) e encontrar  $\rho(t)$ , aplicaremos novamente a aproximação do método de Weisskopf-Wigner utilizada em (5.29). Fazendo a mudança de variáveis  $s = t' - t''$  e  $t = (t' + t'')/2$ , chegamos a

$$\int d^3\mathbf{k} |\gamma(\mathbf{k})|^2 = \int d^3\mathbf{k} |g(\mathbf{k})\Phi(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k})|^2 \int_0^\infty dt \int_{-t}^t ds e^{-i(\omega - \omega_{ge})s} \beta^*\left(t + \frac{s}{2}\right) \beta\left(t - \frac{s}{2}\right). \quad (5.42)$$

A aproximação nos permite desacoplar as integrais em  $s$  e  $t$  ao fazer

$$\beta^*\left(t + \frac{s}{2}\right) \beta\left(t - \frac{s}{2}\right) \rightarrow |\beta(t)|^2 \quad \text{e} \quad \int_{-t}^t ds e^{-i(\omega - \omega_{ge})s} \rightarrow \int_{-\infty}^\infty ds e^{-i(\omega - \omega_{ge})s}. \quad (5.43)$$

Logo, a integral em  $s$  pode ser incorporada na integração em  $\mathbf{k}$  na forma

$$\int_{-\infty}^\infty ds e^{-i(\omega - \omega_{ge})s} = 2\pi\delta(\omega - \omega_{ge}),$$

resultando, ao comparar com a definição de  $\Gamma$  em (5.24), em

$$\int d^3\mathbf{k} |\gamma(\mathbf{k})|^2 = \int_0^\infty dt \Gamma |\beta(t)|^2. \quad (5.44)$$

Com isso, construímos a densidade de probabilidade do pacote de onda do fóton num instante  $t$  qualquer:

$$\rho(t) = \Gamma |\beta(t)|^2. \quad (5.45)$$

Usando a equação (5.35b), chegamos a uma fórmula explícita para a densidade de probabilidade de detecção do fóton na emissão de apenas uma excitação

$$\rho(t) = \frac{\Gamma \Omega_0^2}{\Omega_0^2 - (\Gamma/2)^2} \sin^2 \left( \frac{\sqrt{\Omega_0^2 - (\Gamma/2)^2}}{2} t \right) e^{-\frac{\Gamma}{2}t}. \quad (5.46)$$

Esta é uma solução genérica para o problema da onda gerada por um oscilador harmônico amortecido pela própria emissão de radiação. Note que esta solução contém um termo de oscilação senoidal, que aqui é justificado pelas oscilações de Rabi induzidas pela interação dos átomos com o laser de leitura, e um termo de decaimento exponencial que surge pelo decaimento atômico ao longo da transição  $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ , acompanhado da emissão de um fóton que remove energia da nuvem. Como na solução do oscilador amortecido clássico, o termo de decaimento provoca uma mudança na frequência de oscilação dependente da taxa de amortecimento e descrita por  $\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 - (\Gamma/2)^2}$ .

## 5.4 Fator Superradiante

Seja  $k = |\mathbf{k}|$ , a taxa de emissão dada por (5.32) pode ser calculada na aproximação escalar para a luz, onde  $g(\mathbf{k}) = g(k)$ . Assim, devido à relação de dispersão  $ck = \omega$ , e definindo  $k_{ge} = \omega_{ge}/c$ , podemos expressar  $\Gamma$  como

$$\Gamma = \frac{|g(k_{ge})|^2}{c} \int d^3\mathbf{k} \delta(k - k_{ge}) |\Phi(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k})|^2, \quad (5.47)$$

visto que  $g(k)\delta(k - k_{ge}) = g(k_{ge})\delta(k - k_{ge})$  e que  $\delta(\omega - \omega_{ge}) = \delta(k - k_{ge})/c$ . A taxa de emissão para um único átomo isolado surge quando  $\Phi(\mathbf{k}) = e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0}$ , tal que

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \frac{|g(k_{ge})|^2}{c} \int d^3\mathbf{k} \delta(k - k_{ge}) \\ &= |g(k_{ge})|^2 4\pi k_{ge}^2 / c, \end{aligned} \quad (5.48)$$

onde  $4\pi k_{ge}^2$  é a integral de área da superfície esférica de raio  $k_{ge}$ . O fator que determina a modificação da taxa de emissão devido ao efeito coletivo  $\chi$  é definido pela razão da taxa de emissão  $\Gamma$  pela taxa da emissão de um átomo isolado  $\Gamma_0$ , ou seja,  $\Gamma = \chi\Gamma_0$  e

$$\chi = \frac{1}{4\pi k_{ge}^2} \int d^3\mathbf{k} \delta(k - k_{ge}) |\Phi(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k})|^2. \quad (5.49)$$

Em particular, se  $\chi > 1$  a emissão é superradiante.

Para calcular  $\chi$ , aplicaremos a expressão para  $\Phi(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k})$  da equação (5.25) e separaremos a contribuição dos termos  $i = j$  dos termos da soma  $i \neq j$

$$\chi = \frac{1}{4\pi k_{ge}^2} \sum_i |a_i|^2 \int d^3\mathbf{k} \delta(k - k_{ge}) + \frac{1}{4\pi k_{ge}^2} \sum_{i \neq j} a_i^* a_j \int d^3\mathbf{k} \delta(k - k_{ge}) e^{i(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}. \quad (5.50)$$

O termo  $i = j$  dá simplesmente 1, dado que  $\sum_i |a_i|^2 = 1$  e que a integral da superfície esférica cancela com o  $4\pi k_{ge}^2$  no denominador. Já o termo  $i \neq j$  pode ser simplificado, dado que é quando  $\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k} \approx 0$  que as somatórias envolvendo  $e^{i(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}$  são significativas. Dentro deste regime, a condição  $k = k_{ge}$  imposta na delta de Dirac representa uma superfície esférica que corta o ponto que satisfaz  $\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k} = 0$ . Próximo a este ponto podemos tomar uma espécie de aproximação paraxial, em que a superfície esférica é substituída por um disco  $D$ , onde a variável de integração inclui somente os vetores  $\mathbf{k}_\perp = \mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k}$  perpendiculares à  $\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r$ :

$$\chi \approx 1 + \frac{1}{4\pi k_{ge}^2} \sum_{i \neq j} a_i^* a_j \int_D d^2\mathbf{k}_\perp e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}. \quad (5.51)$$

A emissão é bastante direcionada de forma que a área de superfície de  $D$  é muito menor que a área de superfície da esfera definida por  $k = k_{ge}$ . Como a contribuição dos termos de somatória  $i = j$  é justamente dada pela área de superfície da região, podemos reintroduzir estes elementos de volta à somatória sem afetar muito o valor dessa correção da taxa  $\chi$ . Portanto, podemos reescrever a somatória em termos de  $\Phi(\mathbf{k})$  novamente:

$$\chi \approx 1 + \frac{1}{4\pi k_{ge}^2} \int_D d^2\mathbf{k}_\perp |\Phi(\mathbf{k}_\perp)|^2. \quad (5.52)$$

De acordo com as equações (5.7) e (5.25), e dado que  $\mathbf{k}_w + \mathbf{k}_r = 0$ ,  $\Phi(\mathbf{k})$  deve ser uma função de  $\mathbf{k}$  semelhante a  $\phi_1(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k})$ , imposta pela fibra ótica usada na detecção dos fótons durante o processo de leitura. Desta forma, a função  $\Phi(\mathbf{k}_\perp)$  deve ser da forma  $\Phi(\mathbf{k}_\perp) \approx \Phi(0)e^{-W^2 k_\perp^2/4}$ , onde  $W$  é a largura da região gaussiana da nuvem de átomos que se encontra efetivamente preparada no estado de superposição com um dos átomos no nível  $|s\rangle$ . Computando a integral sobre a gaussiana, resultando em  $2\pi/W^2$ , chegamos à

$$\chi \approx 1 + \frac{|\Phi(0)|^2}{2W^2 k_{ge}^2}. \quad (5.53)$$

Retornando à equação (5.25), temos que  $\Phi(0) = \sum_i a_i$ , com isto, podemos considerar que as amplitudes  $a_i$  variam em fase muito pouco, isto é,  $a_i \approx e^{-i\bar{\phi}} |a_i|$ , e  $\bar{\phi}$  é somente uma fase global. Dado que a probabilidade de encontrar um dos átomos no nível  $|s\rangle$  é dada por  $p_i = |a_i|^2$ , então

$$|\Phi(0)|^2 \approx \left( \sum_i \sqrt{p_i} \right)^2. \quad (5.54)$$

O significado desta quantidade pode ser obtida considerando dois casos limites: seja  $p_i = \delta_{i,0}$ , onde apenas um dos átomos está deterministicamente no nível  $|s\rangle$ , então  $(\sum_i \sqrt{p_i})^2 = 1$ , por outro lado, se houverem  $N$  átomos e o estado for tal que seja igualmente provável de se encontrar:  $p_i = 1/N$ , então  $(\sum_i \sqrt{p_i})^2 = N$ . Podemos assim interpretar  $\mathcal{N} \equiv (\sum_i \sqrt{p_i})^2$  como um número efetivo de átomos que de fato contribuem para o estado de superposição. Coletando estes resultados, obtemos uma expressão para a taxa superradiante como uma função apenas das propriedades da nuvem neste modo selecionado pelo processo de escrita e da frequência da transição dos átomos emitindo entre os níveis  $|g\rangle$  e  $|e\rangle$ :

$$\chi \approx 1 + \frac{\mathcal{N}}{2W^2 k_{ge}^2}. \quad (5.55)$$

Essa expressão obtida no parágrafo acima e também encontrada na literatura [9, 16] demonstra que a correção superradiante pode ser escrita como uma função da direcionalidade se definimos  $\Delta \mathbf{k}_\perp$  como a incerteza na distribuição de momento no plano perpendicular a  $\mathbf{k}_2$  ao longo do centro da distribuição. Desta forma, dado que a distribuição é gaussiana,  $\Delta \mathbf{k}_\perp W = 1/2$  e a fórmula para o fator superradiante passa a ser função da incerteza angular  $\Delta \Omega \equiv \Delta \mathbf{k}_\perp / k_{ge}^2$  [2], que é válida no regime paraxial:

$$\chi \approx 1 + \mathcal{N} \Delta \Omega. \quad (5.56)$$

Assim podemos ver que uma distribuição em forma alongada é apropriada para observar um efeito superradiante forte. Sendo uma nuvem de densidade constante, o aumento da largura não afeta a correção do fator superradiante, pois enquanto o número de átomos aumenta, a direcionalidade do feixe emitido diminui na mesma proporção. Como essa direcionalidade não depende da extensão da nuvem, é possível obter um maior fator  $\mathcal{N}$  em uma nuvem com densidade fixa, preservando  $\Delta \Omega$ . Assim como na profundidade óptica, apenas a densidade superficial de átomos ao longo da transversal é importante, enquanto que na longitudinal a dimensão da nuvem de átomos, além da densidade linear, também importa.

## 5.5 Preparação do Estado de duas Excitações

Se durante o processo de escrita há o registro de duas ou mais fotodeteções, a transição descrita em (5.2) não é suficiente para descrever o estado remanescente na nuvem. Em segunda ordem de interação do tipo  $|g\rangle \rightarrow |e\rangle \rightarrow |s\rangle$ , a interação leva a um estado do tipo

$$|\psi_0\rangle |\emptyset\rangle \rightarrow \frac{\lambda^2}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \iint d^3 \mathbf{k} d^3 \mathbf{k}' g(\mathbf{k}) g(\mathbf{k}') e^{-i(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}_i} e^{-i(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}_j} |s_i s_j\rangle |\mathbf{k} \mathbf{k}'\rangle, \quad (5.57)$$

em que  $|s_i s_j\rangle = \hat{\sigma}_{sg,i} \hat{\sigma}_{sg,j} |\psi_0\rangle$  é o estado da nuvem contendo dois átomos no nível auxiliar, e  $|\mathbf{k} \mathbf{k}'\rangle$  é o estado do campo contendo dois fótons nos modos definidos por  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{k}'$ . A dupla

foto-deteccção é modelada pela dupla aplicação de  $a_1$  (5.1) neste estado, resultando em

$$\begin{aligned} & |\psi_0\rangle |\emptyset\rangle \\ & \rightarrow \frac{\lambda^2}{\sqrt{2}} \sum_i \sum_{j \neq i} \iint d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}' g(\mathbf{k})g(\mathbf{k}')\phi(\mathbf{k})\phi(\mathbf{k}')e^{-i(\mathbf{k}_w-\mathbf{k}_1-\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}_i}e^{-i(\mathbf{k}_w-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}_j} |s_i s_j\rangle |\emptyset\rangle \end{aligned} \quad (5.58)$$

que, devido ao modo ser quase-monocromático em torno de  $\mathbf{k}_1$ , pode ser simplificada por

$$|\psi_0\rangle |\emptyset\rangle \rightarrow \frac{\lambda^2 g^2(\mathbf{k}_1)}{\sqrt{2}} \sum_i \sum_{j \neq i} \iint d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}' \phi(\mathbf{k})\phi(\mathbf{k}')e^{-i(\mathbf{k}_w-\mathbf{k}_1-\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}_i}e^{-i(\mathbf{k}_w-\mathbf{k}_1-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}_j} |s_i s_j\rangle |\emptyset\rangle. \quad (5.59)$$

Comparando com (5.4), o estado com duas excitações preparado por este processo será aproximado por  $|\psi_2\rangle$ , ou seja,

$$|\psi_2\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_i \sum_{j \neq i} \alpha_i \alpha_j |s_i s_j\rangle, \quad (5.60)$$

onde o termo  $1/\sqrt{2}$  é incluído para compensar a redundância na contagem de termos oriunda da equivalência entre  $|s_i s_j\rangle$  e  $|s_j s_i\rangle$  (se  $i \neq j$  e  $i' \neq j'$ ,  $\langle s_i s_j | s_{i'} s_{j'} \rangle = \delta_{ii'}\delta_{jj'} + \delta_{ij'}\delta_{ji'}$ ). Porém este estado não é precisamente normalizado e, como discutido na seção 3.5, esta é uma aproximação para o estado real que é melhor quanto maior for o número de átomos na nuvem, dado que a diferença entre a somatória com e sem os termos  $i = j$  passa a ser uma fração cada vez menor do total de termos na somatória:  $\sum_i |\alpha_i^2| \ll \sum_{i,j} |\alpha_i|^2 |\alpha_j|^2 = 1$ .

## 5.6 Evolução Temporal na Emissão de Dois Fótons

Quando o processo de leitura começa, o ensemble evolui de acordo com o hamiltoniano em (5.11), dado que estamos na representação de interação. Este operador se divide em duas partes distintas: a primeira descreve o acoplamento dos átomos com o campo do laser, e é responsável pela transição  $|s\rangle \leftrightarrow |e\rangle$  sem que a identidade do átomo que está em um desses dois níveis seja identificada; a segunda promove a emissão espontânea de cada um dos átomos do nível  $|e\rangle$  pro nível  $|g\rangle$ , acompanhada pela emissão de um fóton no modo do campo que pode acoplar ao modo da fibra que leva ao detector. Dado que um átomo tanto no nível  $|s\rangle$  quanto no nível  $|e\rangle$  contam como um átomo *excitado*, o termo do acoplamento com o laser não implica numa transferência de excitação: a nuvem continua excitada, enquanto o campo permanece sem ganhar energia. Já o segundo termo faz o átomo deixar de estar em um dos níveis excitados para ir ao nível  $|g\rangle$  enquanto um fóton passa a ser criado no campo. Desta forma podemos associar o primeiro termo do hamiltoniano a uma interação que não causa transferência de excitação entre nuvem e campo, enquanto o segundo, sim. Toda esta análise vale para um ensemble contendo qualquer número de excitações; porém, agora que a nuvem é preparada com mais de uma

excitação, esta diferenciação em subespaços distinguindo a localização da excitação passa a ser mais útil.

Partindo do estado  $|\psi_2\rangle$  em (5.60), que iremos redefinir como  $|s_\chi s_\chi\rangle \equiv |\psi_2\rangle$ , podemos computar o efeito do termo  $\sum_i e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_i} \hat{\sigma}_{se,i}$  do hamiltoniano, dado que assumimos que  $\hat{\sigma}_{es,i} |s_i s_i\rangle = \sqrt{2} |s_i e_i\rangle$  em boa aproximação, resultando em

$$\sum_i e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_i} \hat{\sigma}_{se,i} |s_\chi s_\chi\rangle = \sqrt{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \alpha_i \beta_j |s_i e_j\rangle, \quad (5.61)$$

lembrando que  $\beta_i$  é definido em (5.20). Vemos que, assim como na dinâmica de emissão de 1 único fóton em (5.17), a interação acopla o estado  $|s_\chi s_\chi\rangle$  com

$$|s_\chi e_\chi\rangle \equiv \sum_i \sum_{j \neq i} \alpha_i \beta_j |s_i e_j\rangle, \quad (5.62)$$

de forma que  $\sum_i e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_i} \hat{\sigma}_{se,i} |s_\chi s_\chi\rangle = \sqrt{2} |s_\chi e_\chi\rangle$ . Pode-se constatar também, com o auxílio de  $\hat{\sigma}_{es,i} |s_i e_i\rangle = \sqrt{2} |e_i e_i\rangle$ , que a interação acopla  $|s_\chi e_\chi\rangle$  com

$$|e_\chi e_\chi\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_i \sum_{j \neq i} \beta_i \beta_j |e_i e_j\rangle, \quad (5.63)$$

de forma que  $\sum_i e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_i} \hat{\sigma}_{se,i} |s_\chi e_\chi\rangle = \sqrt{2} |e_\chi e_\chi\rangle$ . Um estado genérico obtido a partir  $|\psi_2\rangle$  em (5.60) e evoluindo seguindo  $H_{\text{int}}(t)$  em (5.11), em que as duas excitações ainda se encontram na nuvem, será uma combinação linear de  $|s_\chi s_\chi\rangle$ ,  $|s_\chi e_\chi\rangle$  e  $|e_\chi e_\chi\rangle$ . Se uma das excitações é emitida pelo termo do hamiltoniano, que permite que um átomo no nível  $|e\rangle$  decaia para o nível  $|g\rangle$ , acompanhado pela emissão de um fóton em qualquer modo do campo eletromagnético, teremos duas famílias de estados diferentes:  $|s_\chi\rangle |\mathbf{k}\rangle$  e  $|e_\chi\rangle |\mathbf{k}\rangle$ . O primeiro vem da aplicação de  $\sum_i e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_i} \hat{\sigma}_{ge,i} a^\dagger(\mathbf{k})$  sobre  $|s_\chi e_\chi\rangle |\emptyset\rangle$ ,

$$\sum_i e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_i} \hat{\sigma}_{ge,i} a^\dagger(\mathbf{k}) |s_\chi e_\chi\rangle |\emptyset\rangle = \sum_i \left( \sum_{j \neq i} e^{-i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_j} \beta_j \right) \alpha_i |s_i\rangle |\mathbf{k}\rangle, \quad (5.64)$$

resultando, via (5.17), (5.20) e (5.25), em

$$\sum_i e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_i} \hat{\sigma}_{ge,i} a^\dagger(\mathbf{k}) |s_\chi e_\chi\rangle |\emptyset\rangle \approx \Phi(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_l + \mathbf{k}_r - \mathbf{k}) |s_\chi\rangle |\mathbf{k}\rangle, \quad (5.65)$$

e o segundo da aplicação sobre  $|e_\chi e_\chi\rangle$

$$\sum_i e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_i} \hat{\sigma}_{ge,i} a^\dagger(\mathbf{k}) |e_\chi e_\chi\rangle |\emptyset\rangle = \sqrt{2} \sum_i e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_i} \beta_i^2 |e_i\rangle |\mathbf{k}\rangle + \sqrt{2} \sum_i e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_i} \beta_i \sum_{j \neq i} \beta_j |e_j\rangle, \quad (5.66)$$

que, reunindo ambos os termos em apenas uma somatória sem a restrição  $j \neq i$ , resulta em

$$\sum_i e^{i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}_i} \hat{\sigma}_{ge,i} a^\dagger(\mathbf{k}) |e_\chi e_\chi\rangle |\emptyset\rangle \approx \sqrt{2} \Phi(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_l + \mathbf{k}_r - \mathbf{k}) |e_\chi\rangle |\mathbf{k}\rangle. \quad (5.67)$$

Por fim, vemos que o sistema no estado  $|e_\chi\rangle |\mathbf{k}\rangle$  pode emitir um segundo fóton, em um processo descrito por

$$\sum_i e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}_i} \hat{\sigma}_{ge,i} a^\dagger(\mathbf{k}') |e_\chi\rangle |\mathbf{k}\rangle = \Phi(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k}') |\psi_0\rangle |\mathbf{k}\mathbf{k}'\rangle. \quad (5.68)$$

O estado do sistema ao longo da evolução será composto por cada um dos vetores considerados no parágrafo anterior:

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle |\emptyset\rangle &\rightarrow \lambda(t) |s_\chi s_\chi\rangle |\emptyset\rangle + \mu(t) |s_\chi e_\chi\rangle |\emptyset\rangle + \nu(t) |e_\chi e_\chi\rangle |\emptyset\rangle \\ &+ \int d^3\mathbf{k} \xi(t; \mathbf{k}) |s_\chi\rangle |\mathbf{k}\rangle + \int d^3\mathbf{k} \zeta(t; \mathbf{k}) |e_\chi\rangle |\mathbf{k}\rangle \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2}} \iint d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}' \eta(t; \mathbf{k}, \mathbf{k}') |\psi_0\rangle |\mathbf{k}\mathbf{k}'\rangle, \end{aligned} \quad (5.69)$$

Tendo em mãos a ação do operador  $\sum_i e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} \hat{\sigma}_{ge,i} a^\dagger(\mathbf{k})$  sobre  $|s_\chi e_\chi\rangle$  e  $|e_\chi e_\chi\rangle$ , podemos computar o efeito do hamiltoniano de interação sobre os estados cujas ambas as excitações estão na nuvem, e assim podemos obter as equações de Schrödinger para todas as amplitudes do estado em (5.69).

A partir daí, obtém-se as equações diferenciais para  $\lambda(t)$ ,  $\mu(t)$  e  $\nu(t)$ :

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} \mu(t) \quad (5.70a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mu(t)}{dt} &= -\frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} \lambda(t) + \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} \nu(t) \\ &- \int d^3\mathbf{k} g(\mathbf{k}) \Phi^*(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k}) e^{-i(\omega - \omega_{ge})t} \xi(t; \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (5.70b)$$

$$\frac{d\nu(t)}{dt} = -\frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} \mu(t) - \sqrt{2} \int d^3\mathbf{k} g(\mathbf{k}) \Phi^*(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k}) e^{-i(\omega - \omega_{ge})t} \zeta(t; \mathbf{k}), \quad (5.70c)$$

e mostram que, a menos do termo de decaimento para os estados em que a nuvem contém uma excitação e um fóton foi emitido, as amplitudes satisfazem equações diferenciais acopladas que preveem que há troca de energia entre os átomos nos níveis  $|s\rangle$  e  $|e\rangle$  associadas às oscilações de Rabi. As equações diferenciais para  $\xi(t; \mathbf{k})$  e  $\zeta(t; \mathbf{k})$  são:

$$\frac{d\xi(t; \mathbf{k})}{dt} = \frac{\Omega_0}{2} \zeta(t; \mathbf{k}) + g^*(\mathbf{k}) \Phi(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k}) e^{i(\omega - \omega_{ge})t} \mu(t) \quad (5.71a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta(t; \mathbf{k})}{dt} &= -\frac{\Omega_0}{2} \xi(t; \mathbf{k}) + \sqrt{2} g^*(\mathbf{k}) \Phi(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k}) e^{i(\omega - \omega_{ge})t} \nu(t) \\ &- \sqrt{2} \int d^3\mathbf{k}' g(\mathbf{k}') \Phi^*(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k}') e^{-i(\omega' - \omega_{ge})t} \eta(t; \mathbf{k}, \mathbf{k}'). \end{aligned} \quad (5.71b)$$

O lado direito destas equações exibem uma parte em termos de  $\xi(t; \mathbf{k})$  e  $\zeta(t; \mathbf{k})$  relacionados às oscilações de Rabi com frequência natural  $\Omega_0$ , uma parte em termos de  $\mu(t)$  e  $\nu(t)$  que completa a interação da nuvem com o campo ao longo da emissão do primeiro fóton e a parte em termos de  $\eta(t; \mathbf{k}, \mathbf{k}')$  que representa a emissão do segundo fóton. Por fim,



encontra-se as equações diferenciais de  $\eta(t; \mathbf{k}, \mathbf{k}')$  que completam a interação responsável pela emissão do segundo fóton:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta(t; \mathbf{k}, \mathbf{k}')}{dt} = & \frac{1}{\sqrt{2}} g^*(\mathbf{k}') \Phi(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k}') e^{i(\omega' - \omega_{ge})t} \zeta(t; \mathbf{k}) \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} g^*(\mathbf{k}) \Phi(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k}) e^{i(\omega - \omega_{ge})t} \zeta(t; \mathbf{k}'). \end{aligned} \quad (5.72)$$

Inspirado pela natureza do problema que envolve a evolução da extração de até duas excitações da nuvem, podemos sugerir que as amplitudes  $\lambda(t)$ ,  $\mu(t)$  e  $\nu(t)$  são obtidas em termos da solução do problema da emissão de apenas um fóton que estão dadas em (5.37):

$$\lambda(t) = \alpha(t)^2, \quad \mu(t) = \sqrt{2}\alpha(t)\beta(t), \quad \nu(t) = \beta(t)^2. \quad (5.73)$$

Também utilizamos a equação (5.24), que define  $\gamma(t; \mathbf{k})$  na emissão de um fóton, para descrever as amplitudes do estado com um fóton já emitido:

$$\xi(t; \mathbf{k}) = \sqrt{2}\alpha(t)\gamma(t; \mathbf{k}), \quad \zeta(t; \mathbf{k}) = \sqrt{2}\beta(t)\gamma(t; \mathbf{k}), \quad (5.74)$$

os termos envolvendo  $\sqrt{2}$  são necessários para garantir a normalização adequada, como veremos abaixo. Por fim, reutilizando a definição de  $\gamma(t; \mathbf{k})$ , sugerimos a solução do termo que descreve o par de fótons emitidos

$$\eta(t; \mathbf{k}, \mathbf{k}') = \gamma(t; \mathbf{k})\gamma(t; \mathbf{k}'). \quad (5.75)$$

Assim, podemos expressar a evolução do sistema (5.69) durante a extração de duas excitações em termos das amplitudes  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  e  $\gamma(t; \mathbf{k})$ , obtidas para a emissão de uma excitação,

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle |\emptyset\rangle \rightarrow & \alpha(t)^2 |s_\chi s_\chi\rangle |\emptyset\rangle + \sqrt{2}\alpha(t)\beta(t) |s_\chi e_\chi\rangle |\emptyset\rangle + \beta(t)^2 |e_\chi e_\chi\rangle |\emptyset\rangle \\ & + \sqrt{2} \int d^3\mathbf{k} \gamma(t; \mathbf{k}) \alpha(t) |s_\chi\rangle |\mathbf{k}\rangle + \sqrt{2} \int d^3\mathbf{k} \gamma(t; \mathbf{k}) \beta(t) |e_\chi\rangle |\mathbf{k}\rangle \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} \iint d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}' \gamma(t; \mathbf{k}) \gamma(t; \mathbf{k}') |\psi_0\rangle |\mathbf{k} \mathbf{k}'\rangle. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Como um teste de consistência, podemos verificar se esse estado é normalizado. Aqui iremos separar as três diferentes famílias de estados e olhar cada probabilidade do sistema estar com ambas as excitações contidas na nuvem, com uma excitação na nuvem e uma no campo, e com ambas as excitações na nuvem. No primeiro caso, temos

$$|\alpha(t)|^4 + 2|\alpha(t)|^2|\beta(t)|^2 + |\beta(t)|^4 = (|\alpha(t)|^2 + |\beta(t)|^2)^2, \quad (5.77)$$

que é igual ao quadrado da probabilidade de se encontrar o sistema no estado em que a excitação está contida na nuvem durante a emissão de um único fóton. No segundo caso, temos

$$2|\alpha(t)|^2 \int d^3\mathbf{k} |\gamma(t; \mathbf{k})|^2 + 2|\beta(t)|^2 \int d^3\mathbf{k} |\gamma(t; \mathbf{k})|^2 = 2(|\alpha(t)|^2 + |\beta(t)|^2) \int d^3\mathbf{k} |\gamma(t; \mathbf{k})|^2, \quad (5.78)$$

que aqui pode ser lida como 2 vezes o produto da probabilidade encontrada para a excitação estar na nuvem pela probabilidade para a excitação ter sido emitida até o instante  $t$ . Por fim, no terceiro caso, a probabilidade de que ambos os fótons tenha sido emitido até o instante  $t$  é dada por

$$\int d^3\mathbf{k} |\gamma(t; \mathbf{k})|^2 \int d^3\mathbf{k}' |\gamma(t; \mathbf{k}')|^2 = \left( \int d^3\mathbf{k} |\gamma(t; \mathbf{k})|^2 \right)^2, \quad (5.79)$$

que é simplesmente o quadrado da probabilidade de encontrar o único fóton já extraído no problema anterior. Somando as três partes, vemos imediatamente através do teorema binomial que o resultado obtido é

$$\left( |\alpha(t)|^2 + |\beta(t)|^2 + \int d^3\mathbf{k} |\gamma(t; \mathbf{k})|^2 \right)^2 = 1, \quad (5.80)$$

confirmando a normalização do estado da emissão de duas excitações sugerida.

A partir desta sugestão, precisamos verificar se as equações diferenciais do problema de emissão de dois fótons pela nuvem são, de fato, solucionadas tendo como base o que nós já obtivemos no problema da emissão de um único fóton. Para isto, iremos calcular as derivadas das amplitudes na emissão de dois fótons com base nas derivadas das amplitudes da emissão de um único fóton. De acordo com as equações em (5.73), podemos reescrever o conjunto de equações diferenciais em (5.70) na forma

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = 2\alpha(t) \frac{d\alpha(t)}{dt} \quad (5.81a)$$

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \sqrt{2} \frac{d\alpha(t)}{dt} \beta(t) + \sqrt{2}\alpha(t) \frac{d\beta(t)}{dt} \quad (5.81b)$$

$$\frac{d\nu(t)}{dt} = 2\beta(t) \frac{d\beta(t)}{dt}, \quad (5.81c)$$

que, de acordo com as equações diferenciais do problema da emissão de um único fóton em (5.23a), se tornam

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = \Omega_0 \alpha(t) \beta(t) \quad (5.82a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mu(t)}{dt} = & -\frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} \alpha(t)^2 - \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}} \beta(t)^2 \\ & - \sqrt{2} \int d^3\mathbf{k} g(\mathbf{k}) \Phi^*(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_l + \mathbf{k}_r - \mathbf{k}) e^{-i(\omega - \omega_{ge})t} \alpha(t) \gamma(t; \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (5.82b)$$

$$\frac{d\nu(t)}{dt} = -\Omega_0 \alpha(t) \beta(t) - 2 \int d^3\mathbf{k} g(\mathbf{k}) \Phi^*(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_l + \mathbf{k}_r - \mathbf{k}) e^{-i(\omega - \omega_{ge})t} \beta(t) \gamma(t; \mathbf{k}) \quad (5.82c)$$

e que podem ser reconvertidas em função de  $\lambda(t)$ ,  $\mu(t)$ ,  $\nu(t)$ ,  $\xi(t; \mathbf{k})$  e  $\zeta(t; \mathbf{k})$  novamente, resultando em (5.70). Seguindo um caminho parecido, podemos também reescrever as equações diferenciais em (5.71) a partir de (5.74), de tal maneira que teremos

$$\frac{d\xi(t; \mathbf{k})}{dt} = \sqrt{2} \frac{d\alpha(t)}{dt} \gamma(t; \mathbf{k}) + \sqrt{2}\alpha(t) \frac{d\gamma(t; \mathbf{k})}{dt} \quad (5.83a)$$

$$\frac{d\zeta(t; \mathbf{k})}{dt} = \sqrt{2} \frac{d\beta(t)}{dt} \gamma(t; \mathbf{k}) + \sqrt{2}\beta(t) \frac{d\gamma(t; \mathbf{k})}{dt}, \quad (5.83b)$$

que, de acordo com as equações diferenciais do problema da emissão de um único fóton em (5.23b), se tornam

$$\frac{d\xi(t; \mathbf{k})}{dt} = \frac{\Omega_0}{\sqrt{2}}\beta(t)\gamma(t; \mathbf{k}) + \sqrt{2}g^*(\mathbf{k})\Phi(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k})e^{i(\omega - \omega_{ge})t}\alpha(t)\beta(t) \quad (5.84a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta(t; \mathbf{k})}{dt} = & -\frac{\Omega_0}{\sqrt{2}}\alpha(t)\gamma(t; \mathbf{k}) + \sqrt{2}g^*(\mathbf{k})\Phi(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k})e^{i(\omega - \omega_{ge})t}\beta(t)^2 \\ & - \sqrt{2} \int d^3\mathbf{k}' g(\mathbf{k}')\Phi^*(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k}')e^{-i(\omega' - \omega_{ge})t}\gamma(t; \mathbf{k}')\gamma(t; \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (5.84b)$$

e que podem ser reconvertidas em função de  $\mu(t)$ ,  $\nu(t)$ ,  $\xi(t; \mathbf{k})$ ,  $\zeta(t; \mathbf{k})$  e  $\eta(t; \mathbf{k}, \mathbf{k}')$  novamente, resultando em (5.71). Por fim, resta calcular a derivada da componente do vetor de estado com ambos os fótons emitidos  $\eta(t; \mathbf{k}, \mathbf{k}')$ . Partindo da proposta em (5.75), podemos reescrever a equação diferencial em (5.72) na forma

$$\frac{d\eta(t; \mathbf{k}, \mathbf{k}')}{dt} = \frac{d\gamma(t; \mathbf{k})}{dt}\gamma(t; \mathbf{k}') + \gamma(t; \mathbf{k})\frac{d\gamma(t; \mathbf{k}')}{dt}. \quad (5.85)$$

que, retomando novamente as equações diferenciais da emissão de um único fóton em (5.23c), se torna

$$\begin{aligned} \frac{d\eta(t; \mathbf{k}, \mathbf{k}')}{dt} = & g^*(\mathbf{k}')\Phi(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k}')e^{i(\omega' - \omega_{ge})t}\beta(t)\gamma(t; \mathbf{k}) \\ & + g^*(\mathbf{k})\Phi(\mathbf{k}_w - \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_r - \mathbf{k})e^{i(\omega - \omega_{ge})t}\beta(t)\gamma(t; \mathbf{k}'), \end{aligned} \quad (5.86)$$

e que podem ser reconvertidas em função de  $\zeta(t; \mathbf{k})$  novamente, resultando em (5.72). Este procedimento acima prova que o ansatz contido em (5.76) é capaz de satisfazer as equações diferenciais que caracterizam a emissão de dois fótons, dada a solução para a emissão de um fóton único. Portanto, como sabemos que para um dado conjunto de equações diferenciais lineares que satisfazem um conjunto completo de condições iniciais — como é o nosso caso, em que sabemos que  $\lambda(0) = 1$  enquanto  $\mu(0) = \nu(0) = \xi(0; \mathbf{k}) = \zeta(0; \mathbf{k}) = \eta(0; \mathbf{k}, \mathbf{k}') = 0$  — temos a solução única para a evolução temporal da função de onda do problema, fundamentada na solução obtida no problema da emissão de um único fóton.

Agora, iremos, a partir deste resultado, encontrar qual o pacote de onda que será observado pelo detector na detecção do par no domínio temporal. A quantidade importante que dá as propriedades do par é  $\eta(t; \mathbf{k}, \mathbf{k}') = \gamma(t; \mathbf{k})\gamma(t; \mathbf{k}')$ . Seja novamente  $t \rightarrow \infty$ , considerando o pacote de onda já desacoplado da nuvem, teremos  $\eta(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \eta(t; \mathbf{k}, \mathbf{k}')$  e

$$\eta(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \gamma(\mathbf{k})\gamma(\mathbf{k}'). \quad (5.87)$$

Dado isto, a densidade de probabilidade conjunta de detecção pode ser obtida ao analisar

$$\iint d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}' |\eta(\mathbf{k}, \mathbf{k}')|^2 = 1 \quad (5.88)$$

na forma de uma integral dupla nos dois instantes que caracterizam o par emitido, e com base no teorema de Parseval, como em (5.41). Portanto, como  $\eta(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \gamma(\mathbf{k})\gamma(\mathbf{k}')$ :

$$\iint d^3\mathbf{k} d^3\mathbf{k}' |\eta(\mathbf{k}, \mathbf{k}')|^2 = \int d^3\mathbf{k} |\gamma(\mathbf{k})|^2 \int d^3\mathbf{k}' |\gamma(\mathbf{k}')|^2. \quad (5.89)$$

Disto, podemos concluir que a densidade de probabilidade  $\rho(t', t'')$  da detecção de dois fótons em instantes  $t'$  e  $t''$   $\rho(t', t'')$  é simplesmente

$$\rho(t', t'') = \rho(t')\rho(t''), \quad (5.90)$$

onde  $\rho(t)$  é a densidade de probabilidade de um fóton único obtida em (5.46). A equação (5.90) implica que a nuvem emite um par de fótons estatisticamente independente, ou seja, se, ao detectar o par, o instante de detecção de um dos fótons for ignorado, recuperamos o perfil temporal da emissão de um fóton único para o fóton restante. Além disto, nenhuma informação adicional pode ser extraída a partir da densidade de probabilidade conjunta.

## 6 Análise do Experimento

Neste capítulo, iremos descrever os detalhes do experimento relatado nas referências [29, 30] e seus resultados que serão utilizados para comparar com a teoria desenvolvida no capítulo anterior. Um único aparato experimental, esboçado na figura 5, coleta os eventos em que há a emissão de um e dois fótons pela nuvem durante o processo de leitura. Os dois casos ocorrem a depender da detecção durante o processo de escrita; sob a verificação de apenas uma ou duas foto-deteccões durante a escrita, o processo de leitura há de induzir a emissão de um ou dois fótons que serão devidamente detectados e cujo o instante de chegada ao detector é registrado.

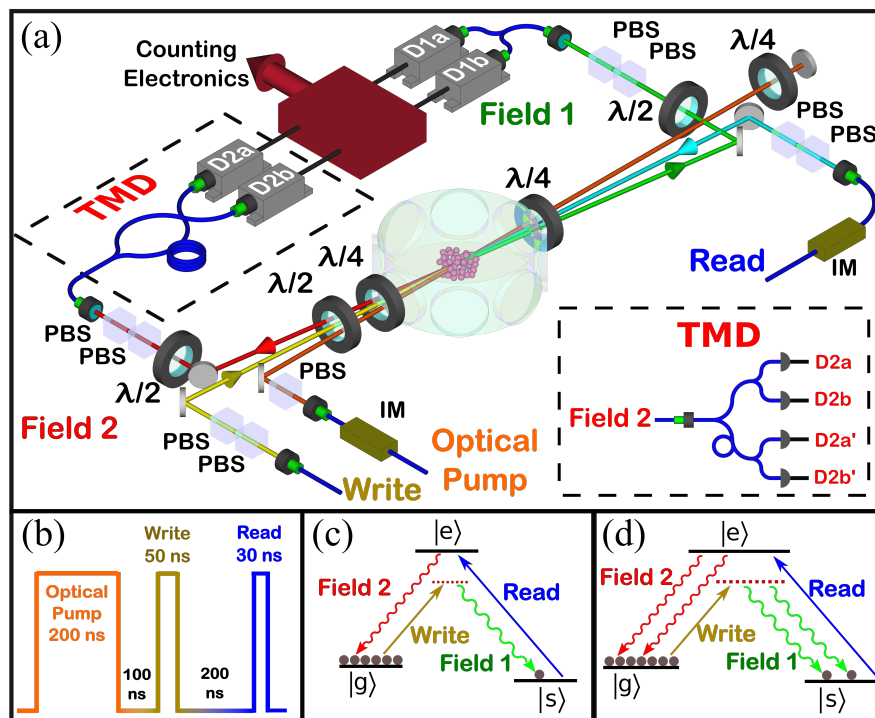


Figura 5 – Arranjo experimental utilizado para o estudo de superradiância de estado de Fock. PBS representa o divisor de feixe polarizador,  $\lambda/2$  as placas de meia-onda,  $\lambda/4$  as placas de quarto-de-onda, IM o modulador de intensidade que serve para controlar o feixe de leitura de forma mais precisa e TMD é o multiplexador utilizado para obter as estatísticas de detecção de até 4 contagens.

O experimento é composto por um ensemble de átomos de Rubídio 87 [51] reunidos e resfriados por uma armadilha magneto-óptica, que é então desligada durante 2ms para a realização de cada uma das rodadas do experimento, que acontece enquanto os átomos se encontram em queda livre. Esta armadilha é composta por uma câmara de vácuo contendo os átomos de Rubídio e os átomos são sustentados no centro da câmara devido

ao resfriamento Doppler promovido por pares de feixes laser contra-propagantes ao longo dos três eixos espaciais, e por um campo magnético com simetria aproximadamente radial que auxilia os feixes a aprisionar os átomos resfriados no centro da câmara de vácuo [44, 45]. Após a armadilha ser desligada, espera-se 1ms para que estes campos decaiam até um nível mínimo, através de um esquema especial de bobinas, seguindo o método da referência [52], e todos os átomos exibam um tempo de coerência nos níveis atômicos muito maior que o intervalo entre as etapas de escrita e leitura. Além disso, os feixes de laser continuam atuando sobre o ensemble por mais 0.9ms na linha ressonante com a transição  $F = 1 \rightarrow F' = 2$  para que os átomos sejam bombeados para o nível atômico  $|g\rangle \equiv |5S_{1/2}, F = 2, m_F = -2\rangle$ , o estado fundamental do nosso estudo. Após isto, os feixes são desligados durante 1.1ms, que é quando a sequência de 1000 intervalos de amostragem é realizada. A temperatura da amostra fica abaixo de 1mK, de forma que o movimento dos átomos pode ser desprezado enquanto o experimento acontece de fato.

Em cada uma das repetições, um feixe de bombeio [53] de polarização circular  $\sigma^-$  é inicialmente aplicado durante 200ns e dessintonizado ao vermelho por 32MHz da transição  $F = 2 \rightarrow F' = 3$ ; este feixe cumpre o papel de garantir que o estado inicial do processo de escrita seja  $|g\rangle$  todas as vezes. Este feixe é refletido por um espelho e incide na nuvem em ambas as direções, reduzindo o efeito mecânico que o feixe poderia exercer sobre os átomos.

Uma vez no estado fundamental  $|g\rangle$ , os átomos são levados ao estado auxiliar  $|s\rangle \equiv |5S_{1/2}, F = 1, m_F = 0\rangle$  passando por  $|e\rangle \equiv |5P_{3/2}, F = 2, m_F = -1\rangle$  através de um processo Raman, induzido por um feixe de polarização  $\sigma^+$  dessintonizado ao vermelho da transição  $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$  por 22MHz, e acompanhado da emissão de fótons de polarização  $\sigma^-$ . Com a geração destes fótons, há a chance que estes sejam coletados pela fibra ótica que leva ao esquema de detecção  $D_1$ , capaz de discriminar se foi detectado no mínimo um ou dois fótons, devido ao esquema de divisor de feixe nas fibras descrito na figura 5 que possui duas saídas:  $D_{1a}$  e  $D_{1b}$ . Desta forma, a contagem de uma ou duas foto-detecções corresponde aproximadamente a medições projetivas — dentro do limite de baixa probabilidade de espalhamento durante a leitura — que nos permitem preparar a nuvem nos estados de uma  $|\psi_1\rangle$  e duas excitações  $|\psi_2\rangle$ , considerados no capítulo anterior.

O estado do ensemble de átomos é mantido durante um intervalo de 200ns enquanto ambos os lasers de escrita e leitura são desligados. Após esse intervalo, os átomos que foram transferidos do nível  $|g\rangle$  ao nível  $|s\rangle$  de forma coerente e atestada pelas detecções são então excitados de volta ao nível  $|e\rangle$  por um pulso intenso e ressonante com a transição  $|s\rangle \rightarrow |e\rangle$ , que incide na amostra durante um intervalo de 30ns. Este feixe de leitura pode eventualmente resultar na transferência dos átomos de volta ao estado fundamental  $|g\rangle$ , acompanhado pela emissão de fótons de polarização  $\sigma^+$ . Estes fótons são então direcionados para a fibra ótica acoplada ao aparato de detecção que é capaz de detectar o

tempo de chegada de até dois fótons com precisão de nanosegundos devido ao esquema de multiplexação temporal (TMD) [54] descrito na figura 5. Este aparato de multiplexação consiste em uma sequência de dois divisores de feixe de fibra, em que um dos caminhos deste interferômetro possui uma extensão que implica em um atraso de 100ns com relação ao percurso que a luz segue através do outro caminho. A consequência desta montagem, é que o par de detectores  $D_{2a}$  e  $D_{2b}$  pode registrar até quatro fótons, dado que o sinal eletrônico de saída, no caso em que há fótons passando por braços distintos do aparato, exhibe um atraso na ordem de 100ns, portanto, há efetivamente a contagem de fótons através de quatro detectores:  $D_{2a}$ ,  $D_{2b}$ ,  $D_{2a'}$  e  $D_{2b'}$ .

O modo do fóton emitido na etapa de escrita é selecionado por uma fibra óptica em um modo gaussiano com um diâmetro  $4\sigma$  de  $150\mu\text{m}$  sobre a localidade do ensemble atômico, e forma um ângulo de aproximadamente  $2^\circ$  com a direção do feixe de escrita, que possui um diâmetro  $4\sigma$  de  $420\mu\text{m}$  [38]. Os campos do feixe de leitura e de detecção dos fótons na segunda etapa são contra-propagantes e são casados com os modos dos campos de escrita e detecção dos fótons da primeira etapa, respectivamente. Esta configuração corresponde a uma mistura de quatro ondas entre os campos considerados e resulta na eficiência encontrada para as detecções de conjuntos de dois ou quatro fótons correlacionados. De fato, durante a escrita pode haver a emissão de diversos fótons que não são detectados por  $D_{1a}$  ou  $D_{1b}$ . Da mesma forma, durante a leitura pode haver a emissão espontânea de fótons ao longo de  $|e\rangle \rightarrow |s\rangle$ . Porém, sempre que houver um destes eventos, as condições para haver a interferência construtiva que garante o efeito de mistura de quatro ondas são invalidadas. Portanto, as detecções correlacionadas selecionam as vezes em que as condições assumidas pela teoria são satisfeitas de maneira natural.

## 6.1 Estatísticas de Detecções

No cenário ideal em que há uma probabilidade significativa de haver contagem correlacionada de fótons nos detectores, o feixe de escrita induz a transição dos átomos no nível  $|g\rangle$  para o nível  $|s\rangle$  com a emissão de um fóton de polarização  $\sigma^-$  para cada átomo que for transferido para o nível auxiliar. Nesse estágio, o sistema conjunto do campo e nuvem após a interação através do laser e do decaimento espontâneo se completar pode ser descrito pelo estado normalizado

$$|\Psi\rangle = \sqrt{1-p} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{p^n} |n\rangle_a |n\rangle_c, \quad (6.1)$$

onde  $|n\rangle_a$  e  $|n\rangle_c$  representam uma nuvem com  $n$  átomos no nível  $|s\rangle$  e o campo no estado de Fock contendo  $n$  fótons, respectivamente. Aqui, tanto a nuvem quanto o campo contêm excitações no modo apropriado, definido pela geometria do arranjo experimental. Durante o processo de escrita, o laser está fora de ressonância e a intensidade é baixa, que a taxa de

espalhamento  $p$  dos vários fótons nesta distribuição de Poisson é muito baixa:  $p \ll 1$ . Essa distribuição de Poisson é esperada se as emissões dos vários fótons são independentes entre si, logo, após o intervalo de interação, a probabilidade de  $n$  fótons terem sido emitidos deixando a nuvem com  $n$  excitações é proporcional a  $p^n$ . Esta independência na emissão assumida durante a preparação do estado possui paralelo com a independência de emissão durante a fase da leitura que será investigada ao final do capítulo.

No cenário ideal em que temos um detector com resolução de fótons individuais, o resultado da medição nos indica qual o estado preparado pelo processo de escrita:  $|n\rangle_a$ . Porém, um detector que registra apenas se pelo menos um fóton foi detectado será mais impreciso com relação ao estado que podemos deduzir. Utilizando o formalismo de matriz de densidade, podemos aproximar o estado preparado por

$$\rho_1 = \frac{1-p}{p} \sum_{n=1}^{\infty} p^n |n\rangle\langle n|_a. \quad (6.2a)$$

Por outro lado, se o resultado da medição reflete que pelo menos dois fótons foram detectados, podemos aproximar o estado por

$$\rho_2 = \frac{1-p}{p^2} \sum_{n=2}^{\infty} p^n |n\rangle\langle n|_a. \quad (6.2b)$$

Assim, mesmo com um conjunto de detectores imperfeitos, poderíamos reestabelecer o caso ideal em que se preparam os estados  $|n\rangle_a$  no limite em que a interação é muito fraca:  $p \rightarrow 0$ . Neste sentido em que o experimento trata da emissão superradiante de estados de Fock; no limite  $p \rightarrow 0$ , o número de excitações é bem definido.

Como, no laboratório, a condição  $p \rightarrow 0$  é uma idealização, precisamos verificar o quão próximo do caso ideal nós estamos ao fazer a análise da estatística temporal, pois a teoria pretende analisar a emissão da nuvem nestes estados de Fock, em contraste com o efeito causado por uma fonte de luz clássica. Assim, podemos comparar a estatística de detecções de números de fótons distintos como prevista pelas equações (6.2), com os limites impostos por uma teoria semi-clássica para a detecção da luz. Na figura 6, temos a frequência de contagens em coincidência para as várias possibilidades consideradas, em (a) há as probabilidades  $P_{1,1}$ ,  $P_{1,2}$  e  $P_{1,3}$  de se obter a contagem em coincidência de uma foto-deteção na parte da escrita, e uma, duas ou três foto-deteções na parte da leitura, respectivamente, e está relacionado ao estado  $\rho_1$ ; para a figura (b), as probabilidades  $P_{2,1}$ ,  $P_{2,2}$  e  $P_{2,3}$  possuem o mesmo significado a menos do número de detecções contadas na etapa da escrita, que agora passam a ser duas, e estão relacionadas ao estado  $\rho_2$ .

No cenário ideal em que os detectores são ideais, o termo  $P_{2,1}$  não surgiria nos resultados de medição, pois uma nuvem que é preparada num estado com pelo menos dois átomos no nível  $|s\rangle$  é capaz de emitir ao menos dois fótons na etapa de leitura. Porém, como os detectores são imperfeitos, há uma probabilidade de que um dos fótons que são emitidos da nuvem na leitura não sejam contabilizados, justificando o termo  $P_{2,1}$ , que assim como o



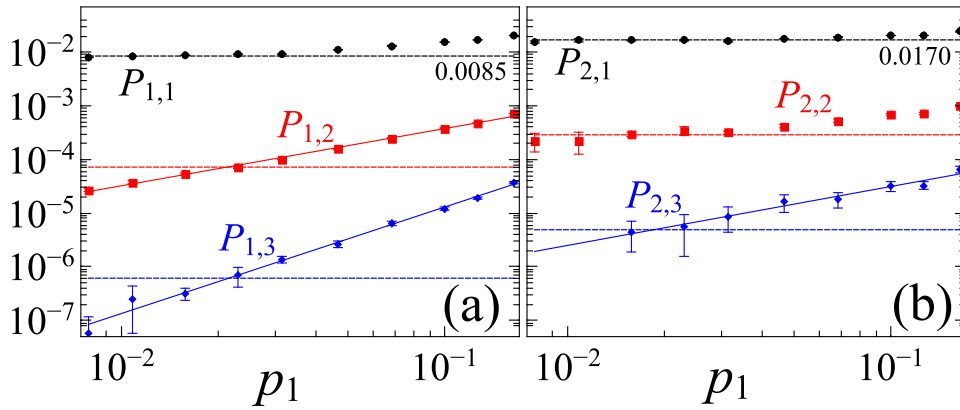


Figura 6 – Probabilidades  $P_{i,j}$  de detectar  $j$  fótons na fase da leitura condicionados a detecção de  $i$  fótons na fase da escrita como uma função da probabilidade  $p_1$  de detectar um fóton na escrita, sendo  $i = 1$  na parte (a) e  $i = 2$  na parte (b). Os círculos, quadrados e losangos indicam as probabilidades de detecção de um, dois e três fótons na leitura, respectivamente. As linhas contínuas são os ajustes lineares para o conjunto de dados experimentais. As linhas tracejadas negras correspondem ao patamar da probabilidade de detecção de um único fóton ( $P_{1,1} = 0.0085$  em (a) e  $P_{2,1} = 0.0170$  em (b)), enquanto as linhas tracejadas vermelhas e azuis fornecem o comportamento poissoniano da probabilidade de detecção de dois ou três foto-deteccções, respectivamente, que surge da análise estatística da contagens de coincidência induzidos por um campo clássico.

termo  $P_{2,2}$  é constante, ao mesmo tempo em que os eventos que acumulam na contagem de  $P_{2,1}$  são mais frequentes que em  $P_{2,2}$ , pois este último precisa levar em consideração a eficiência de detecção em ambos os detectores ao mesmo tempo. Naturalmente,  $P_{2,1} \approx 2P_{1,1}$ , que reflete o fato que a presença de dois fótons a serem detectados durante a leitura de um deles tem o dobro de chance de ocorrer, em comparação a quando só há, provavelmente, a presença de um único fóton.

Para obter esses dados, usou-se uma variação do experimento em que um multiplexador temporal é instalado na parte da leitura para que seja possível a resolução de número de fóton para a obtenção de até quatro foto-deteccções. O eixo das abcissas da figura 6 mede a frequência de deteccções de uma única deteccção na escrita  $p_1$  e é aproximadamente proporcional à taxa de emissão de um único fóton  $p$ :  $p_1 \approx \eta_1 p$ , onde  $\eta_1$  é a constante que caracteriza a eficiência destes detectores. Assim, podemos controlar a interação da luz com o ensemble de átomos através da intensidade do laser de escrita e medir o efeito através de  $p_1$ . Além disso, neste gráfico as barras e erro são obtidas através da incerteza na acumulação de eventos de deteccção, proporcional a raiz quadrada do número de contagens utilizadas para obter as frequências.

Dentro do regime em que  $p \ll 1$ , o termo mais importante para o perfil de  $P_{1,1}$  é o de uma constante em  $p_1$ , assim como  $P_{2,2}$ , como observado nas equações (6.2a) e (6.2b), onde os estados  $|1\rangle_a$   $|2\rangle_a$  são preparados com maior probabilidade, respectivamente.  $P_{1,2}$

e  $P_{2,3}$ , por sua vez, devem variar como uma função linear em  $p_1$ , como demonstrado na figura 6, em que o coeficiente angular encontrado para o ajuste linear de  $P_{1,2} \propto p_1^{s_{1,2}}$  é estimado em  $s_{1,2} = 1.07 \pm 0.02$  e para  $P_{2,3} \propto p_1^{s_{2,3}}$  é  $s_{2,3} = 1.10 \pm 0.07$ . Por fim, a equação (6.2b) prevê que  $P_{1,3} \propto p_1^{s_{1,3}}$  seja aproximadamente uma função quadrática em  $p_1$ , que pode ser constatado pelo valor de  $s_{1,3} = 1.99 \pm 0.07$ , estimado a partir da figura 6.

Estes dados confirmam que, para  $p_1 \ll 1$ , o número de fótons detectados durante a etapa de leitura é fortemente condicionado pelo número de foto-deteccões obtidas durante a fase de leitura. Em outras palavras, os componentes de altas ordens na função de correlação do campo entre as duas etapas são fortemente suprimidas, em que o caráter quantizado da luz se torna proeminente. Se compararmos com o perfil de detecção esperado para uma fonte de luz em um estado coerente, os termos de detecção de ordens mais altas, seguem em medida proporcional ao valor de um único fóton descrito por  $P_{1,1}$  e  $P_{2,1}$ .

Em ambas os lados da figura 6, as linhas tracejadas em vermelho e em azul correspondem ao quadrado e ao cubo, respectivamente, do valor obtido para o platô da linha preta que descreve a taxa de detecção de um único fóton, aproximadamente. Desta forma, podemos comprovar que dentro de certos valores de  $p_1$  realizados experimentalmente, há uma supressão das probabilidades  $P_{1,2}$  e  $P_{1,3}$  que indicam que há um regime claramente sub-poissoniano, apesar que, devido a baixa eficiência de detecção para que fosse possível a obtenção de cinco ou mais foto-deteccões simultâneas na faixa de intensidade do laser de escrita adequada, não foi possível alcançar o regime sub-poissoniano para  $P_{2,3}$ . Esta incompatibilidade com um modelo semi-clássico para a luz reflete o caráter quântico no fenômeno reportado neste experimento.

## 6.2 Perfil Temporal da Emissão de Fóton Único

O arranjo experimental que estuda a estatística de deteccões e compara com o modelo clássico é diferente do arranjo que estuda o perfil temporal da chegada dos fótons na etapa de leitura. Dado que a intensidade para o laser de escrita mínima necessária para entrarmos no regime sub-poissoniano, não é mais necessário que possamos detectar até quatro fótons simultaneamente durante a leitura, assim não precisamos do aparato de multiplexação temporal. Aqui, os valores experimentais encontrados para a probabilidade de detecção de fótons da escrita e do coeficiente de correlação são  $p_1 = 0.015$  e  $g_2 = 0.405 \pm 0.004 \approx P_{1,2}/P_{1,1}^2$ , respectivamente, onde  $g_2$  é a função de correlação de segunda ordem do campo e se encontra bem abaixo do nível poissoniano, que é  $g_{2,c} = 1$ , isto é um indicativo de que a luz gerada precisa ser tratada como um sistema quantizado [55, 56]. Portanto, duas modificações são feitas com relação ao exibido na figura 5. Primeiro, o pulso de leitura é alongado para 190ns para que dê tempo de os fótons serem emitidos e que seja razoável assumir que a intensidade do laser seja constante durante o processo.

Segundo, há a substituição, como dito, do sistema de multiplexação temporal por uma fibra simples, pois além de serem desnecessárias as detecções de três ou quatro fótons, o tempo de leitura agora é maior que o atraso implicado por este aparato.

Com estas modificações, podemos agora analisar os aspectos superradiantes do problema. Para isto, obteremos a estatística temporal de detecção, que nos permite estudar os pacotes de onda dos fótons gerados na leitura. Nesta seção, trataremos da emissão de um único fóton durante a leitura, enquanto que a emissão de pares de fótons será tratada na próxima. A partir da discretização dos instantes em que as foto-deteções ocorrem, podemos comparar o histograma obtido com a expressão teórica calculada em (5.46) e que repetiremos aqui para facilitar a comparação com os parâmetros experimentais:

$$\rho(t) = \frac{\chi\Gamma_0\Omega_0^2}{\Omega_0^2 - (\chi\Gamma_0/2)^2} \sin^2 \left( \frac{\sqrt{\Omega_0^2 - (\chi\Gamma_0/2)^2}}{2} t \right) e^{-\frac{\chi\Gamma_0}{2}t}, \quad (6.3)$$

com  $\Omega_0$  é a frequência de Rabi dependente da intensidade do feixe de leitura e que é um parâmetro livre do ajuste teórico para a curva experimental,  $\Gamma_0/2\pi = 6.065\text{MHz}$  [51] é a taxa de decaimento natural do nível  $|e\rangle$  para o nível  $|g\rangle$  e  $\chi$  é o fator superradiante, que também é deixado como parâmetro de ajuste da equação, e é função da densidade de átomos na nuvem. Assim, esperamos que a probabilidade de haver foto-deteção na leitura durante um intervalo  $(t, t + \Delta t)$  com janela de detecção  $\Delta t = 0.5\text{ns}$ , condicionada a um evento de detecção na escrita, seja

$$\frac{p_c(t)}{P_{1,1}} = \rho(t)\Delta t, \quad (6.4)$$

normalizada por  $P_{1,1} = 0.063$ , que é a probabilidade de se registrar uma contagem em coincidência a qualquer que seja o momento em cada rodada do experimento.

Os resultados do experimento para as contagens de coincidência de um fóton em cada etapa estão expostos abaixo na figura 7. Nela, comparamos a mudança no perfil da distribuição temporal conforme a intensidade do laser de leitura ou a densidade de átomos muda. Os pontos experimentais em preto do lado (a) da figura indica o formato do pacote de onda para uma profundidade óptica máxima obtida de  $OD_1 = 31.4 \pm 0.4$  e máxima potência do feixe de leitura de  $P_{R,1} = 3.95\text{mW}$ . A profundidade óptica é a medida do fator de atenuação exponencial de um feixe ressonante ao atravessar um objeto translúcido, em particular, a transição que foi utilizada para medir a profundidade óptica da amostra foi a  $|g\rangle \rightarrow |5P_{3/2}, F = 3, m_F = -3\rangle$  e este valor de profundidade óptica implica em um número médio de átomos interagentes  $N_1 \approx 1.9 \times 10^6$ , de acordo com [28]. Como  $OD \propto N$ , quanto maior a profundidade óptica, mais evidente é o efeito da superradiância no perfil da emissão, além disto, feixes de laser intensos são também necessários para que as oscilações de Rabi sejam induzidas a ponto de se tornarem evidentes nos resultados experimentais. O ajuste teórico que melhor representa estes resultados, e está representado na figura pela

linha tracejada vermelha, é dado por  $\Omega_0 = 0.4 \times 10^9 \text{ rad/s}$  e  $\chi_1 = 4.0$ , de maneira a casar com a frequência das oscilações de Rabi e com a taxa de decaimento, respectivamente. A linha azul representa um decaimento exponencial puro com a taxa estimada e serve para guiar a visualização dos dados. Estes valores teóricos para os parâmetros correspondem a uma intensidade de laser de  $P_R = 2.1 \text{ mW}$  e um número médio de átomos interagentes de  $N_1 \approx 1.1 \times 10^6$ , de acordo com [28]. Portanto, as estimativa obtida pelo perfil da emissão são aproximadamente a metade da obtida pelos métodos alternativos descritos na referência [28], sem que fique claro exatamente quais são os motivos para essa atenuação.

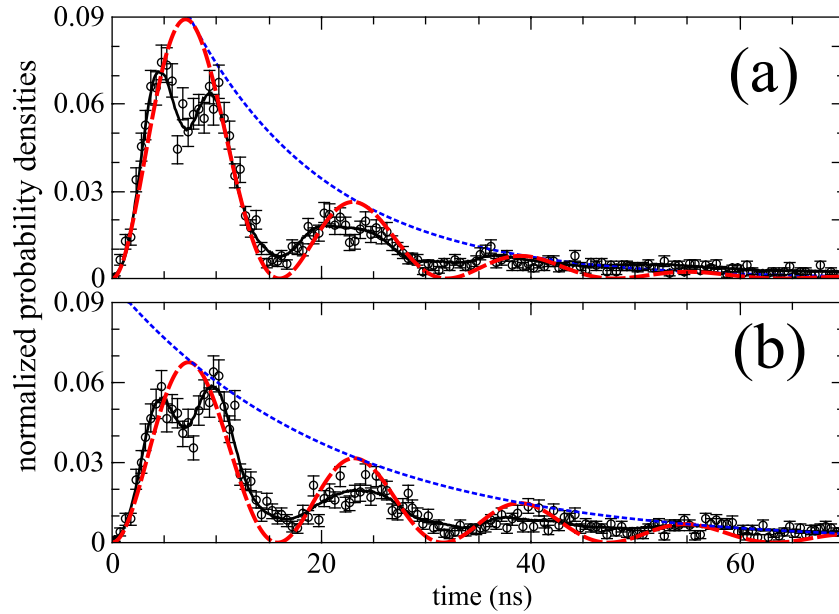


Figura 7 – Pacote de onda do fóton único (conjunto de pontos pretos sem barra de erro) para  $OD_1$  (a) e  $OD_2$  (b) pacote de onda de um dos fótons do par com o tempo de chegada do outro fóton ignorado (círculos pretos com barra de erro). As linhas tracejadas em vermelho representam o ajuste teórico de acordo com a equação (5.46). As linhas tracejadas em azul representam apenas o termo de decaimento exponencial para guiar os olhos.

Já no lado (b) da figura 7, temos uma escolha diferente de parâmetros, em que a profundidade óptica é reduzida para  $OD_2 = 15.9 \pm 0.5$ . Esta grandeza é reduzida através da redução da intensidade do laser de aprisionamento, como descrito em mais detalhes na referência [28]. Na referência [29], há uma comparação entre as mudanças que tanto a intensidade do laser de leitura quanto o número de átomos provoca no pacote de onda do fóton emitido. Porém, aqui nos concentraremos apenas no efeito do aumento da densidade de átomos armadilhados, focando na caracterização do efeito superradiante sobre a dinâmica de extração do fóton. De acordo com a equação (5.55), que reproduziremos aqui para facilitar,

$$\chi \approx 1 + \frac{N}{2W^2 k_{ge}^2}, \quad (6.5)$$

podemos observar que  $\chi - 1 \propto N$ , e como  $OD \propto N$  também, temos que  $\chi - 1 \propto OD$ . Portanto, nesta nova configuração, não é necessário que haja um reajuste manual dos parâmetros da curva teórica, pois podemos estimar o coeficiente de superradiância a partir do valor estabelecido anteriormente. Após uma aplicação direta da regra de três, chegamos a  $\chi_2 - 1 = (\chi_1 - 1)(OD_2/OD_1)$  resultando em  $\chi_2 = 2.52$ . Ao comparar com os dados experimentais, vemos que o casamento continua satisfatório, além disso, podemos conferir que o número de átomos interagindo com a luz possui um efeito relevante sobre a taxa em que o fóton é extraído, enquanto a frequência das oscilações de Rabi é afetada de forma menos pronunciada. De toda forma, em ambos os casos, o efeito da superradiância na emissão de um único fóton fica evidente, dado que  $\chi > 1$ .

Por fim, vamos comentar sobre as discrepâncias entre a solução teórica e o resultado experimental obtido. Primeiramente, há um vale no meio da primeira oscilação de Rabi, e que acontece por volta dos 7ns. Esta variação no pacote de onda não tem relação com a dinâmica particular que estamos estudando. Sua origem advém da imperfeição com que o laser de leitura é ligado, que não é rápido o suficiente, e ele próprio exhibe uma breve oscilação em torno deste mesmo instante de tempo. Para o experimento em questão, esta imperfeição não pode ser removida por questões técnicas, e num limite em que a operação do laser for mais precisa, essa discrepância deve desaparecer. Em segundo lugar, o comportamento do pacote de onda para tempos posteriores mostra que a probabilidade de detecção atinge um platô, eliminando a visibilidade das oscilações nessa faixa. Este ruído também pode ser eliminado através da introdução de filtros, que, por outro lado, diminui a taxa de contagens na coleta de dados. Como a taxa de contagem de coincidência de quatro fótons é muito baixa, necessária para a análise a ser feita na próxima seção, foi necessário que o experimento fosse otimizado para aumentar a frequência destes eventos.

### 6.3 Perfil Temporal da Emissão de Pares de Fótons

O pacote de onda da emissão de dois fótons é obtido a partir dos eventos de contagem de coincidência de quatro fótons, um par na escrita e um par na leitura. Com os instantes de chegada na leitura, podemos então obter algumas distribuições de probabilidades que serão comparadas com os resultados teóricos descritos na seção 5.6. Em particular, a conclusão principal da teoria, resumida na equação (5.90), de que os tempos de chegada dos fótons são descritos por uma distribuição de probabilidades que é fatorável na distribuições de fóton único em dois instantes:

$$\rho(t', t'') = \rho(t')\rho(t''), \quad (6.6)$$

com  $\rho(t)$  dado pela equação (5.46). O pacote de onda de pares de fótons é uma função de duas variáveis:  $t'$  e  $t''$ . Como o gráfico da distribuição de probabilidade de  $\rho(t', t'')$  precisa de uma representação tridimensional, selecionaremos alguma variáveis específicas para

representar os dados. Outras variáveis de interesse são, por exemplo, o tempo de espera para o primeiro fóton ser detectado  $t_1$  e o intervalo entre ambas as detecções  $\tau$ .

Na figura 8, exibimos em (a) e (b) as frequências de contagens para tempos  $t_1$  de chegada do primeiro fóton, em que em (a) utilizamos a situação em que o laser de aprisionamento é mais intenso e há mais átomos contribuindo para o efeito superradiante com  $OD_1 = 31.4 \pm 0.4$ , enquanto em (b) o número de átomos é menor e  $OD_2 = 15.9 \pm 0.5$ . Já em (c) e (d), temos a frequência dos eventos em que os dois fótons chegam com diferença de tempo dada por  $\tau$ , também com a diferença que entre (c) e (d) o número de átomos diminui. A probabilidade de detectar o primeiro fóton em um intervalo de tempo  $(t_1, t_1 + \Delta t)$  é dada por

$$\frac{p_{c,1}(t_1)}{P_{2,2}} = \left[ \int_{t_1}^{\infty} dt'' \rho(t_1, t'') + \int_{t_1}^{\infty} dt' \rho(t', t_1) \right] \Delta t, \quad (6.7)$$

em que ambos as ordens de chegada são considerados em cada uma das integrais: seja  $t' < t''$  ou  $t'' < t'$ , respectivamente. Nesta equação,  $P_{2,2}$  é a probabilidade de haver detecção a qualquer instante, condicionado apenas na coincidência de uma dupla detecção tanto na escrita quanto na leitura, tal que a taxa de detecções de quatro fótons obtida foi de 14mHz. Já a probabilidade de detectar os fótons com um intervalo  $(\tau, \tau + \Delta t)$  de atraso entre si é dada por

$$\frac{p_{c,\delta}(\tau)}{P_{2,2}} = \left[ \int_0^{\infty} dt'' \rho(t'' + \tau, t'') + \int_0^{\infty} dt' \rho(t', t' + \tau) \right] \Delta t, \quad (6.8)$$

e também inclui as duas possibilidades:  $t'' < t'$  e  $t' < t''$  em cada um dos respectivos termos. Assim, com a aplicação das equações (5.46) e (5.90) e após realizar as devidas integrações, chega-se a

$$\frac{p_{c,1}(t_1)}{P_{2,2}} = a_1 \sin^2 \left( \frac{\Omega}{2} t_1 \right) e^{-\Gamma t_1} [1 + b_1 \sin(\Omega t_1) - c_1 \cos(\Omega t_1)] \Delta t, \quad (6.9)$$

em que  $\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 - (\Gamma/2)^2}$ ,  $a_1 = 2\Gamma\Omega_0^2/\Omega^2$ ,  $b_1 = \Gamma\Omega/2\Omega_0^2$  e  $c_1 = \Gamma^2/4\Omega_0^2$ . Também temos

$$\frac{p_{c,\delta}(\tau)}{P_{2,2}} = a_\delta e^{-\Gamma\tau/2} [1 + b_\delta \sin(\Omega\tau) + c_\delta \cos(\Omega\tau)] \Delta t, \quad (6.10)$$

com  $a_\delta = \Gamma\Omega^4/2(\Omega^2 + \Gamma^2)$ ,  $b_\delta = 3\Gamma\Omega/4\Omega_0^2$  e  $c_\delta = 3\Omega^2/2\Omega_0^2 - 1$ . Estas expressões são utilizadas para traçar o ajuste teórico para os dados coletados e exibidos na figura 8 e estão exibidas na forma de uma linha vermelha tracejada. Os parâmetros das curvas teóricas utilizadas na figura 8 são obtidos do ajuste feito na figura 7, para manter a consistência da análise.

Assim como para o experimento da emissão de um fóton, o ajuste representa bem o resultado experimental, e em particular, sugere que os fótons emitidos pela nuvem são independente. No gráfico do tempo de chegada do primeiro fóton, notamos que a taxa de

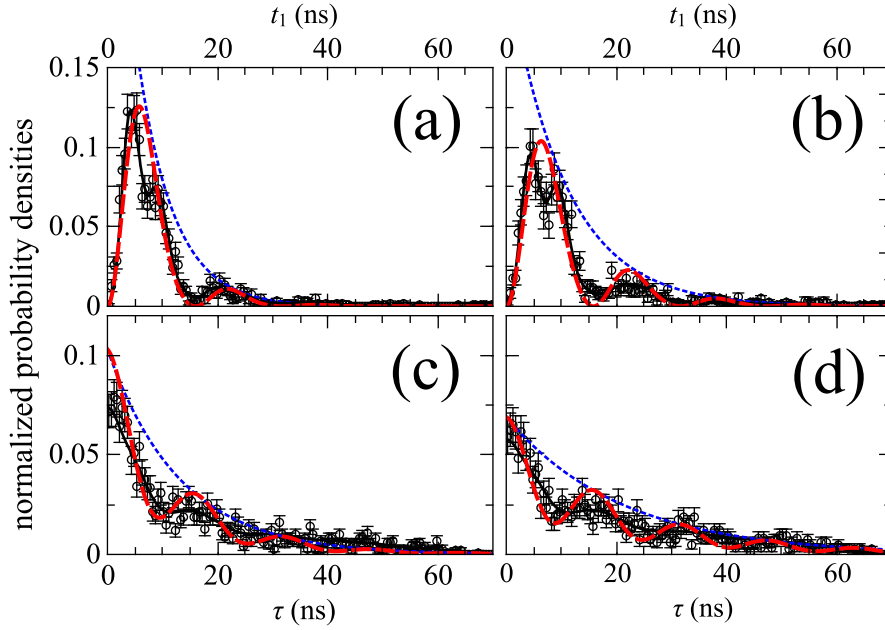


Figura 8 – Pacotes de onda do par de fótons para uma nuvem com  $OD_1 = 31.4 \pm 0.4$  do lado esquerdo e  $OD_2 = 15.9 \pm 0.5$  do lado direito. Nas partes (a) e (b) temos as probabilidades de detecção normalizadas do primeiro fóton do par em função de  $t_1$ . Nas partes (c) e (d) temos a densidade de probabilidade normalizada de detectar o par de fótons com um intervalo de tempo  $\tau$  entre si. As linhas tracejadas em vermelho representam o ajuste teórico de acordo com as equações (6.9) nos quadros (a) e (b), e de acordo com (6.10) nos quadros (c) e (d). Já as linhas tracejadas azuis novamente representam somente o termo de decaimento exponencial.

decaimento é o dobro da figura para o tempo de chegada do fóton único. Isto se dá pois há uma aceleração natural na chegada de um fóton entre dois possíveis que é oriunda apenas de um efeito estatístico. Por outro lado, se calculado o tempo de chegada do segundo fóton, esta função ela possui um decaimento mais lento que o do fóton único, de forma que se for tirada a média de ambas as expressões, o resultado é o da própria emissão de um fóton, ignorando-se o outro. Considerar que o fóton pode ter chegado por primeiro ou ter sido o segundo é o mesmo que construir a estatística ignorando a chegada do outro. Além disso, se estes fótons forem independentes, então temos que

$$\int_0^{\infty} dt'' \rho(t', t'') = \rho(t') \quad (6.11)$$

e a distribuição de probabilidade de um fóton independente do outro é simplesmente a mesma que a distribuição da emissão de um fóton único. A figura 7 mostra os dados deste tipo de detecção, que recai sobre os dados da emissão de um único fóton, indicando a condição de independência na emissão. Na estatística exibida em função do intervalo entre as detecções também temos um perfil condizente com a emissão de dois fótons independentes. Tanto o decaimento exponencial com taxa  $\Gamma$  quanto as oscilações de Rabi estão presentes, e podem ser explicadas inteiramente através da hipótese de que os fótons

são, de fato, independentes, pelo menos sob o nível de precisão que foi alcançado neste experimento.



## 7 Conclusões

O que a análise teórica, respaldada pelos dados experimentais obtidos com o experimento de memória quântica envolvendo nuvens de átomos frios, nos mostra é que o ensemble atômico age como um sistema que armazena uma ou duas excitações de forma linear, em que cada uma delas é armazenada independentemente das demais. Além disto, demonstramos que o perfil temporal de emissão dos fótons é descrito por apenas dois parâmetros, envolvendo o efeito da superradiância em meios extensos e a frequência de Rabi induzida pelo feixe de luz laser utilizado para operar a memória. Como o processo de extração de cada um dos fótons ocorre de forma análoga a um processo de mistura de quatro ondas com casamento de fase imposto pela extensão espacial da nuvem, o modo de emissão durante a leitura é direcionado de acordo com as propriedades espaciais dos demais modos do campo que interagem com o ensemble.

O tratamento da emissão de um fóton único é uma versão simplificada do trabalho original realizado pelo grupo [16, 28], em que agora admitimos que o campo magnético é completamente anulado, nos permitindo focar na teoria mais simples possível e que ainda fornecesse um bom ajuste às curvas experimentais. Vale ressaltar que estes trabalhos preliminares já apresentavam uma característica importante, toda a análise teórica foi feita sem envolver cálculo computacional, em contraste ao padrão de tratamentos teóricos de emissão de luz por tais sistemas, que envolvem a integração numérica de equações dinâmicas que mascaram parcialmente os mecanismos por trás dos fenômenos observados. Partindo desta teoria simplificada, pudemos extrapolar a análise anterior e estudar o perfil de emissão de uma nuvem contendo mais de uma excitação.

De acordo com a teoria de superradiância de Dicke, o processo de emissão em cascata de um conjunto de átomos contendo diversas excitações exhibe um perfil temporal bastante elaborado, refletindo a mudança na taxa de emissão a cada fóton emitido [1]. Esta análise também é obtida de maneira analítica quando o arranjo dos átomos possui simetrias específicas e efeitos de propagação possam ser desprezados [2]. O caso em que temos o perfil de emissão temporal e espacial de uma quantidade grande de átomos distribuídos aleatoriamente não possuía um estudo puramente analítico, até onde o autor pôde constatar na literatura. Para manter uma análise simplificada, partimos do pressuposto de que o número de átomos que participam do processo de emissão é muito maior que o número de excitações armazenadas no ensemble e que no nosso arranjo podemos assumir que a nuvem é transparente aos fótons emitidos devido ao fenômeno da transparência eletromagneticamente induzida (EIT). Ao contrário dos estudos convencionais de superradiância, em que se assume que o sistema parte de um estado maximamente excitado, e portanto, completamente saturado de excitações, utilizamos

a memória quântica para preparar a nuvem em estados com um número bem definido e pequeno de excitações, estudando o cenário em que o ensemble se encontra longe da saturação. Assim, podemos argumentar que, se o perfil temporal de emissão da cadeia superradiante de Dicke é mais complicado que o tratado aqui, isso se dá devido a um conjunto finito de átomos de dois níveis se saturar com o aumento do número de excitações.

O resultado disto é que, neste regime em que o total de átomos é praticamente ilimitado, um conjunto de átomos de dois níveis tem um comportamento análogo ao de um oscilador harmônico quântico, em que há infinitos níveis de energia igualmente espaçados, e portanto, pode armazenar as excitações sem efeitos não-lineares. Além disto, assumimos que os átomos são distribuídos de forma completamente uniforme, e assim, ao serem preparados de maneira adequada, apenas um modo do campo eletromagnético interage efetivamente com a nuvem, devido à interferência destrutiva que irá ocorrer no acoplamento com todos os outros modos. Estas duas características do nosso sistema determinam as propriedades temporais e espaciais da emissão dos fótons, respectivamente.

Neste trabalho, realizamos o cálculo direto apenas em dois casos específicos, em que a nuvem contém uma ou duas excitações, de acordo com o número de contagens observadas durante o processo de escrita da memória. Para deduzir a evolução temporal consistente com a emissão de um par de fótons independente, assumimos duas hipóteses de maior relevância: a nuvem contém muitos átomos espalhados de forma aleatória e o sub-sistema atômico se comporta de maneira markoviana, isto é, a evolução temporal não apresenta efeitos de memória. Esta natureza markoviana é consistente com o método de Weisskopf-Wigner aplicado na evolução temporal da emissão espontânea de um único átomo isolado. Nenhuma destas duas considerações se aplicam somente aos casos em que há apenas uma ou duas excitações na nuvem. De fato, isto nos leva a concluir que o nosso tratamento é válido para um número qualquer de excitações, desde que preservada a restrição de que o número de átomos seja efetivamente ilimitado. Portanto, qualquer observação experimental que demonstre que há interação entre os fótons armazenados deve estar associada à violação de pelo menos uma das duas hipóteses, isto é, ou há um efeito de saturação na nuvem, ou o acoplamento luz-matéria é forte o suficiente para escapar ao regime de evolução sem memória.

De forma geral, podemos encarar a nuvem de átomos de três níveis como um reservatório ideal de fótons: cada excitação armazenada durante a escrita pode ser extraída fielmente durante a leitura, qualquer que seja o modo espacial do campo de entrada.

Em uma colaboração com o grupo experimental de ótica quântica da UFPE, nossos trabalhos teóricos permitiram a caracterização, pela primeira vez, da emissão superradiante de dois fótons por um conjunto de átomos. Esperamos que este estudo contribua com a compreensão não somente de memórias atômicas baseadas no protocolo DLCZ, como de nuvens de átomos frios emitindo e absorvendo luz em outras possíveis aplicações.

# Referências

- [1] Dicke, R. H.: *Coherence in Spontaneous Radiation Processes*. Phys. Rev., 93:99–110, Jan 1954. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.93.99>. Citado 6 vezes nas páginas 9, 12, 25, 26, 28 e 80.
- [2] Gross, M. e S. Haroche: *Superradiance: An essay on the theory of collective spontaneous emission*. Physics Reports, 93(5):301 – 396, 1982, ISSN 0370-1573. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157382901028>. Citado 9 vezes nas páginas 9, 10, 28, 29, 34, 40, 47, 60 e 80.
- [3] Bonifacio, R e LA Lugiato: *Cooperative radiation processes in two-level systems: Superfluorescence*. Physical Review A, 11(5):1507, 1975. Citado na página 9.
- [4] Kouznetsov, Dmitrii, Jean François Bisson, Kazunori Takaichi e Ken ichi Ueda: *High-power single-mode solid-state laser with a short, wide unstable cavity*. J. Opt. Soc. Am. B, 22(8):1605–1619, Aug 2005. <http://josab.osa.org/abstract.cfm?URI=josab-22-8-1605>. Citado na página 9.
- [5] Rehler, Nicholas E. e Joseph H. Eberly: *Superradiance*. Phys. Rev. A, 3:1735–1751, May 1971. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.3.1735>. Citado 3 vezes nas páginas 9, 10 e 40.
- [6] Eberly, Joseph H.: *Superradiance Revisited*. American Journal of Physics, 40(10):1374–1383, 1972. <https://doi.org/10.1119/1.1986858>. Citado na página 9.
- [7] Bhatti, D., S. Oppel, R. Wiegner, G. S. Agarwal e J. von Zanthier: *Simulating Dicke-like superradiance with classical light sources*. Phys. Rev. A, 94:013810, Jul 2016. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.94.013810>. Citado na página 9.
- [8] Mandel, Leonard e Emil Wolf: *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge university press, 1995. Citado 9 vezes nas páginas 9, 11, 12, 13, 17, 18, 32, 34 e 40.
- [9] Araújo, Michelle O., Ivor Krešić, Robin Kaiser e William Guerin: *Superradiance in a Large and Dilute Cloud of Cold Atoms in the Linear-Optics Regime*. Phys. Rev. Lett., 117:073002, Aug 2016. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.117.073002>. Citado 4 vezes nas páginas 9, 40, 52 e 60.
- [10] Roof, S. J., K. J. Kemp, M. D. Havey e I. M. Sokolov: *Observation of Single-Photon Superradiance and the Cooperative Lamb Shift in an Extended Sample of Cold Atoms*. Phys. Rev. Lett., 117:073003, Aug 2016. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.117.073003>. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 40.

- [11] Agarwal, GS: *Quantum statistical theory of coherent emission from a system of multi-level atoms*. Physics Letters A, 45(1):15–17, 1973. Citado na página 10.
- [12] Stephen, MJ: *First-Order Dispersion Forces*. The Journal of Chemical Physics, 40(3):669–673, 1964. Citado na página 10.
- [13] Friedberg, R., S.R. Hartmann e J.T. Manassah: *Limited superradiant damping of small samples*. Physics Letters A, 40(5):365 – 366, 1972, ISSN 0375-9601. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375960172905336>. Citado na página 10.
- [14] MacGillivray, J. C. e M. S. Feld: *Theory of superradiance in an extended, optically thick medium*. Phys. Rev. A, 14:1169–1189, Sep 1976. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.14.1169>. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 40.
- [15] Eisaman, M. D., L. Childress, A. André, F. Massou, A. S. Zibrov e M. D. Lukin: *Shaping Quantum Pulses of Light Via Coherent Atomic Memory*. Phys. Rev. Lett., 93:233602, Nov 2004. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.93.233602>. Citado na página 10.
- [16] Mendes, Milrian S, Pablo L Saldanha, José W R Tabosa e Daniel Felinto: *Dynamics of the reading process of a quantum memory*. New Journal of Physics, 15(7):075030, 2013. <http://stacks.iop.org/1367-2630/15/i=7/a=075030>. Citado 9 vezes nas páginas 10, 11, 39, 40, 42, 47, 53, 60 e 80.
- [17] Duan, L M, MD Lukin, J Ignacio Cirac e Peter Zoller: *Long-distance quantum communication with atomic ensembles and linear optics*. Nature, 414(6862):413, 2001. Citado 6 vezes nas páginas 10, 11, 39, 41, 42 e 55.
- [18] Lvovsky, Alexander I, Barry C Sanders e Wolfgang Tittel: *Optical quantum memory*. Nature photonics, 3(12):706, 2009. Citado na página 10.
- [19] Harris, S. E., J. E. Field e A. Imamoglu: *Nonlinear optical processes using electromagnetically induced transparency*. Phys. Rev. Lett., 64:1107–1110, Mar 1990. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.64.1107>. Citado na página 10.
- [20] Boller, K. J., A. Imamoglu e S. E. Harris: *Observation of electromagnetically induced transparency*. Phys. Rev. Lett., 66:2593–2596, May 1991. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.66.2593>. Citado 3 vezes nas páginas 10, 40 e 47.
- [21] Fleischhauer, Michael, Atac Imamoglu e Jonathan P. Marangos: *Electromagnetically induced transparency: Optics in coherent media*. Rev. Mod. Phys., 77:633–673, Jul 2005. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.77.633>. Citado 3 vezes nas páginas 10, 40 e 47.

- [22] Fleischhauer, M. e M. D. Lukin: *Dark-State Polaritons in Electromagnetically Induced Transparency*. Phys. Rev. Lett., 84:5094–5097, May 2000. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.84.5094>. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 40.
- [23] Lukin, MD e Ataç Imamoğlu: *Controlling photons using electromagnetically induced transparency*. Nature, 413(6853):273, 2001. Citado na página 10.
- [24] Ma, Lijun, Oliver Slattery e Xiao Tang: *Optical quantum memory based on electromagnetically induced transparency*. Journal of Optics, 19(4):043001, feb 2017. Citado na página 10.
- [25] Hsiao, Ya Fen, Pin Ju Tsai, Hung Shiue Chen, Sheng Xiang Lin, Chih Chiao Hung, Chih Hsi Lee, Yi Hsin Chen, Yong Fan Chen, Ite A. Yu e Ying Cheng Chen: *Highly Efficient Coherent Optical Memory Based on Electromagnetically Induced Transparency*. Phys. Rev. Lett., 120:183602, May 2018. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.120.183602>. Citado na página 10.
- [26] Eisaman, MD, A André, F Massou, M Fleischhauer, AS Zibrov e MD Lukin: *Electromagnetically induced transparency with tunable single-photon pulses*. Nature, 438(7069):837, 2005. Citado na página 10.
- [27] Chaneliere, T, DN Matsukevich, SD Jenkins, S Y Lan, TAB Kennedy e Alex Kuzmich: *Storage and retrieval of single photons transmitted between remote quantum memories*. Nature, 438(7069):833, 2005. Citado na página 10.
- [28] Oliveira, Rafael A. de, Milrian S. Mendes, Weliton S. Martins, Pablo L. Saldanha, José W. R. Tabosa e Daniel Felinto: *Single-photon superradiance in cold atoms*. Phys. Rev. A, 90:023848, Aug 2014. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.90.023848>. Citado 7 vezes nas páginas 11, 39, 40, 53, 74, 75 e 80.
- [29] Ortiz-Gutiérrez, L., L. F. Muñoz Martínez, D. F. Barros, J. E. O. Morales, R. S. N. Moreira, N. D. Alves, A. F. G. Tieco, P. L. Saldanha e D. Felinto: *Experimental Fock-State Superradiance*. Phys. Rev. Lett., 120:083603, Feb 2018. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.120.083603>. Citado 8 vezes nas páginas 11, 12, 39, 40, 42, 47, 68 e 75.
- [30] Barros, Davi F., Luis F. Muñoz-Martínez, Luis Ortiz-Gutiérrez, Camilo A.E. Guerra, Johan E.O. Morales, Raoni S.N. Moreira, Natália D. Alves, Ayanne F.G. Tieco, Daniel Felinto e Pablo L. Saldanha: *Fock-state superradiance in a cold atomic ensemble*. Optics Communications, 2019, ISSN 0030-4018. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401819300471>. Citado 6 vezes nas páginas 11, 12, 39, 42, 47 e 68.

- [31] Bialynicki-Birula, I.: *On the Wave Function of the Photon*. Acta Physica Polonica A, 86(1):97–116, julho 1994. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 52.
- [32] Sipe, J. E.: *Photon wave functions*. Phys. Rev. A, 52:1875–1883, Sep 1995. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.52.1875>. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 52.
- [33] Saldanha, Pablo L e C H Monken: *Interaction between light and matter: a photon wave function approach*. New Journal of Physics, 13(7):073015, 2011. <http://stacks.iop.org/1367-2630/13/i=7/a=073015>. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 52.
- [34] Scully, Marlan O.: *Collective Lamb Shift in Single Photon Dicke Superradiance*. Phys. Rev. Lett., 102:143601, Apr 2009. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.102.143601>. Citado 4 vezes nas páginas 12, 34, 40 e 56.
- [35] Sakurai, Jun John, Jim Napolitano *et al.*: *Modern quantum mechanics*, volume 185. Pearson Harlow, 2014. Citado na página 20.
- [36] Allen, Leslie e Joseph H Eberly: *Optical resonance and two-level atoms*, volume 28. Courier Corporation, 1987. Citado na página 23.
- [37] Wiegner, R., J. von Zanthier e G. S. Agarwal: *Quantum-interference-initiated super-radiant and subradiant emission from entangled atoms*. Phys. Rev. A, 84:023805, Aug 2011. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.84.023805>. Citado 3 vezes nas páginas 27, 29 e 31.
- [38] Scully, Marlan O e M Suhail Zubairy: *Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1997. Citado 5 vezes nas páginas 38, 50, 51, 55 e 70.
- [39] Ourjountsev, Alexei, Rosa Tualle-Brouri e Philippe Grangier: *Quantum Homodyne Tomography of a Two-Photon Fock State*. Phys. Rev. Lett., 96:213601, Jun 2006. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.96.213601>. Citado na página 39.
- [40] Cooper, Merlin, Laura J. Wright, Christoph Söller e Brian J. Smith: *Experimental generation of multi-photon Fock states*. Opt. Express, 21(5):5309–5317, Mar 2013. <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-21-5-5309>. Citado na página 39.
- [41] Combes, Joshua e Daniel J. Brod: *Two-photon self-Kerr nonlinearities for quantum computing and quantum optics*. Phys. Rev. A, 98:062313, Dec 2018. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.98.062313>. Citado na página 40.
- [42] Gorshkov, Alexey V., Axel André, Michael Fleischhauer, Anders S. Sørensen e Mikhail D. Lukin: *Universal Approach to Optimal Photon Storage in Atomic Media*. Phys. Rev.

- Lett., 98:123601, Mar 2007. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.98.123601>. Citado na página 40.
- [43] Saglamyurek, Erhan, Taras Hrushevskiy, Logan Cooke, Anindya Rastogi e Lindsay J. LeBlanc: *Single-photon-level light storage in cold atoms using the Autler-Townes splitting protocol*. Phys. Rev. Research, 1:022004, Sep 2019. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevResearch.1.022004>. Citado na página 40.
- [44] Raab, E. L., M. Prentiss, Alex Cable, Steven Chu e D. E. Pritchard: *Trapping of Neutral Sodium Atoms with Radiation Pressure*. Phys. Rev. Lett., 59:2631–2634, Dec 1987. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.59.2631>. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 69.
- [45] Steane, A. M., M. Chowdhury e C. J. Foot: *Radiation force in the magneto-optical trap*. J. Opt. Soc. Am. B, 9(12):2142–2158, Dec 1992. <http://josab.osa.org/abstract.cfm?URI=josab-9-12-2142>. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 69.
- [46] C. W. Chou, H. de Riedmatten, D. Felinto S. V. Polyakov S. J. van Enk e H. J. Kimble: *Measurement-induced entanglement for excitation stored in remote atomic ensembles*. Nature, 438:828–832, 2005. <https://www.nature.com/articles/nature04353>. Citado na página 41.
- [47] Chou, Chin Wen, Julien Laurat, Hui Deng, Kyung Soo Choi, Hugues de Riedmatten, Daniel Felinto e H. Jeff Kimble: *Functional Quantum Nodes for Entanglement Distribution over Scalable Quantum Networks*. Science, 316(5829):1316–1320, 2007, ISSN 0036-8075. <https://science.sciencemag.org/content/316/5829/1316>. Citado na página 41.
- [48] Kimble, H. J.: *The quantum internet*. 453:1023–1030, 2008. <https://www.nature.com/articles/nature07127>. Citado na página 41.
- [49] K. S. Choi, A. Goban, S. B. Papp S. J. van Enk e H. J. Kimble: *Entanglement of spin waves among four quantum memories*. 468:412–416, 2010. <https://www.nature.com/articles/nature09568>. Citado na página 41.
- [50] Röhlberger, Ralf, Kai Schlage, Balaram Sahoo, Sebastien Couet e Rudolf Ruffer: *Collective Lamb Shift in Single-Photon Superradiance*. Science, 328(5983):1248–1251, 2010, ISSN 0036-8075. <http://science.sciencemag.org/content/328/5983/1248>. Citado na página 55.
- [51] Steck, Daniel A: *Rubidium 87 D line data*, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 68 e 74.
- [52] Almeida, A. J. F. de, M. A. Maynard, C. Banerjee, D. Felinto, F. Goldfarb e J. W. R. Tabosa: *Nonvolatile optical memory via recoil-induced resonance in a pure two-level*

- system*. Phys. Rev. A, 94:063834, Dec 2016. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.94.063834>. Citado na página 69.
- [53] HAPPER, WILLIAM: *Optical Pumping*. Rev. Mod. Phys., 44:169–249, Apr 1972. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.44.169>. Citado na página 69.
- [54] Fitch, M. J., B. C. Jacobs, T. B. Pittman e J. D. Franson: *Photon-number resolution using time-multiplexed single-photon detectors*. Phys. Rev. A, 68:043814, Oct 2003. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.68.043814>. Citado na página 70.
- [55] Kimble, H. J., M. Dagenais e L. Mandel: *Photon Antibunching in Resonance Fluorescence*. Phys. Rev. Lett., 39:691–695, Sep 1977. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.39.691>. Citado na página 73.
- [56] Paul, H.: *Photon antibunching*. Rev. Mod. Phys., 54:1061–1102, Oct 1982. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.54.1061>. Citado na página 73.