

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS  
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA



# Teorema da curva invariante de Birkhoff e bilhares não-elásticos

*Luciana Menezes Vasconcelos*

Belo Horizonte - MG

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS  
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA



Luciana Menezes Vasconcelos  
Orientadora: Prof<sup>ª</sup>. Sônia Pinto de Carvalho

## **Teorema da curva invariante de Birkhoff e bilhares não-elásticos**

Dissertação submetida à banca examinadora, designada pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas-ICEX da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Belo Horizonte - MG  
2020

Vasconcelos, Luciana Menezes.

V331t Teorema da curva invariante de Birkhoff e bilhares não –  
elásticos [manuscrito] / Luciana Menezes Vasconcelos.– 2020.  
109 f. il.

Orientadora: Sônia Pinto de Carvalho.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas  
Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de  
Matemática.

Referências: f.106-109.

1. Matemática – Teses. 2. Decomposição, Método de –Teses.  
3. Invariantes – Teses. 4. Bilhar (Jogo) – Teses. 5. Superfícies  
(Matemática). I. Carvalho, Sônia Pinto de. II. Universidade  
Federal de Minas Gerais; Instituto de Ciências Exatas,  
Departamento de Matemática. III.Título.

CDU 51(043)



FOLHA DE APROVAÇÃO

*Teorema da curva invariante de Birkhoff e  
bilhares não-elásticos*

**LUCIANA MENEZES VASCONCELOS**

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Profa. Sônia Pinto de Carvalho  
UFMG

Prof. André Salles de Carvalho  
USP

Prof. Javier Alexis Correa Mayobre  
UFMG

Belo Horizonte, 17 de fevereiro de 2020.

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus que me deu força suficiente para enfrentar todos os desafios vividos nesses anos.

Aos meus pais, Ana e Luciano, com quem divido todas as minhas alegrias e angústias, aqueles que se doaram inteiramente e renunciaram aos seus próprios sonhos para que, muitas vezes, pudessem realizar os meus. Agradeço por se empenharem tanto, por me estimular quando eu não acreditava em mim mesma, por nunca medirem esforços para me proporcionar sempre o melhor.

Ao meu irmão e grande amigo, Thiago, por ser meu porto seguro e por estar sempre ao meu lado.

À minha família que, longe ou perto, jamais deixou de acompanhar cada erro e cada acerto.

Aos professores Gerson e Wilberclay que não foram apenas mestres, mas amigos e estiveram presentes em todos os momentos. Obrigada por me fazer acreditar que era possível chegar até aqui.

Aos professores da UFS e UFMG pelos ensinamentos, incentivos e apoio. Em especial, aos professores Paulo e Ivanete, agradeço a paciência, atenção e o acolhimento.

À minha orientadora, Sônia, por aceitar me orientar, pela disponibilidade, paciência, incentivo, dedicação, aprendizado e por suas importantes contribuições para o meu crescimento profissional e pessoal.

À todos os meus amigos que suportaram minha ausência, ouviram meus desabafos, respeitaram meus limites e acreditaram em meu sonho. Em especial, agradeço aos meus amigos, Robert e Igor, por todo o carinho e apoio.

Aos amigos do mestrado, pelos momentos de estudo, pela troca de conhecimento e experiências e pelas conversas durante o café. Agradeço, também, à Raquel e ao Cássio pela disposição e por ter me ajudado com a dissertação em diversos momentos.

Aos membros da banca, pela disponibilidade e pelas valiosas sugestões e correções.

À FAPEMIG e ao CNPq pelo fundamental auxílio financeiro.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigada.

*“A persistência é o menor caminho do êxito”.*

*Charles Chaplin*

## Resumo

Um dos objetivos deste trabalho foi compreender o Teorema da Curva Invariante de Birkhoff o qual foi demonstrado inicialmente pelo próprio Birkhoff e possui como consequência importante que toda curva rotacional invariante projeta-se injetivamente sobre  $S^1$ . Além disso, apresentaremos bilhares, denotados de bilhares não-elásticos, que possuem uma lei de reflexão modificada, correspondendo a uma contração nas fibras verticais de uma curva rotacional invariante. Estes consistem exemplos simples de sistemas dinâmicos com conjuntos limites tendo decomposição dominada. Provaremos que, sob algumas hipóteses de diferenciabilidade e alguns limites na contração, existe uma faixa compacta no espaço de fase, de tal forma que a aplicação de bilhar não-elástico é um difeomorfismo  $C^2$  dessa faixa em sua imagem.

**Palavras-chave:** Bilhares. Bilhares não-elásticos. Decomposição dominada. Teorema da Curva Invariante de Birkhoff.

## Abstract

One of the objectives of this paper was to understand Birkhoff's Invariant Curve Theorem which was first demonstrated by Birkhoff himself and has as an important consequence that every invariant rotational curve projects injectively over  $S^1$ . In addition, we will present billiards, denoted non-elastic billiards, which have a modified law of reflection, corresponding to a contraction in the vertical fibers of an invariant rotational curve. These consist of simple examples of dynamic systems with limit set having dominated decomposition. We will prove that under some assumptions of differentiability and some limits in contraction, there is a compact range in phase space, where the application of non-elastic billiard map is a  $C^2$  diffeomorphism.

**Keywords:** Billiards. Non-elastic billiards. Dominated decomposition. Birkhoff's Invariant Curve Theorem.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Aplicação do tipo Twist e Função Geradora</b>	<b>5</b>
2.1	Aplicações do tipo Twist . . . . .	5
2.2	Função Geradora . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Teorema da Curva Invariante de Birkhoff</b>	<b>12</b>
3.1	Teorema de Birkhoff . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Órbitas periódicas e rotações no círculo</b>	<b>26</b>
4.1	Definições e generalidades . . . . .	26
4.2	Rotações no círculo . . . . .	31
4.3	Número de Rotação . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Bilhares</b>	<b>39</b>
5.1	Definições e generalidades . . . . .	39
5.2	Propriedades da aplicação de bilhar . . . . .	46
5.3	Bilhar Circular . . . . .	54
5.4	Bilhar Elíptico . . . . .	59
5.4.1	Espaço de fase do bilhar elíptico . . . . .	79
<b>6</b>	<b>Decomposição dominada e bilhares não-elásticos</b>	<b>82</b>
6.1	Preliminares . . . . .	82
6.2	Decomposição dominada, campos de cones e formas quadráticas . . . . .	84
6.3	Frentes e focalização . . . . .	87
6.3.1	Frente Cáustica . . . . .	94
6.4	Bilhar clássico em ovais . . . . .	96
6.5	Bilhar não-elástico convexo . . . . .	98
6.5.1	Exemplos . . . . .	103
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>108</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Nesta dissertação estudaremos as aplicações do tipo Twist, em particular o Teorema de Birkhoff sobre curvas rotacionais invariantes. Usaremos este teorema em um tipo muito especial de aplicação Twist - o sistema dinâmico definido pelo problema do bilhar em uma oval no plano. A partir daí, perturbaremos a aplicação, definindo bilhares não-elásticos que exibirão alguns dos comportamentos previstos pelo Teorema de Pujals-Sambarino para conjuntos limite de aplicações com decomposição dominada, que será o caso destes novos bilhares não-elásticos. Cada um destes conceitos e teoremas serão desenvolvidos nos capítulos que seguem esta introdução.

No capítulo 2, estudaremos alguns aspectos da dinâmica de aplicações do tipo Twist. Uma aplicação diferenciável  $f : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$  é do tipo Twist uniforme se seu levantamento  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por  $(x, y) \mapsto (F_1(x, y), F_2(x, y))$  satisfaz às seguintes propriedades:  $F_1(x + 1, y) = 1 + F_1(x, y)$ ;  $(\partial_1 F_1(x, y))(\partial_2 F_2(x, y)) - (\partial_2 F_1(x, y))(\partial_1 F_2(x, y)) = 1$ , ou seja,  $F$  preserva área; existe uma constante  $c > 0$  tal que  $0 < c \leq \partial_2 F_1(x, y) \leq \frac{1}{c}$ .

Embora esta definição possa, a princípio, não parecer tão natural, existem exemplos de sistemas dinâmicos nos quais estas aplicações surgem naturalmente [15], como os bilhares convexos que estudaremos mais à frente.

No capítulo 3, trataremos das curvas rotacionais invariantes, que são curvas homotopicamente não triviais invariantes por uma aplicação Twist. Um exemplo de existência de tais curvas ocorre nos bilhares que possuem cáusticas, como veremos no capítulo 5. Ainda neste capítulo provaremos o Teorema da Curva Invariante de Birkhoff.

Mais precisamente, consideremos  $\Gamma$  uma curva. Dizemos  $\Gamma$  é uma curva rotacional invariante por uma aplicação Twist  $f$  se  $\Gamma$  é a imagem de uma curva parametrizada contínua, fechada e simples (sem auto-interseção), homotopicamente não trivial, tal que  $f(\Gamma) = \Gamma$ . Por exemplo, o cilindro está completamente folheado por curvas rotacionais invariantes pela aplicação que no recobrimento se escreve:  $F(x, y) = (x + y, y)$  e restrita a cada uma das curvas ( $y = \text{cte}$ ) temos uma rotação. O teorema de Birkhoff então afirma que:

**Teorema de Birkhoff:** *Seja  $f : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$  uma aplicação Twist. Suponhamos que  $U \subset S^1 \times \mathbb{R}$  seja um subconjunto aberto e invariante, homeomorfo ao cilindro  $S^1 \times \mathbb{R}$ ,  $\text{int}(Cl U) = U$  e tal que existem números  $a$  e  $b$  tais que  $S^1 \times (-\infty, a] \subset U \subset S^1 \times (-\infty, b]$ .*

*Então  $\partial U$ , a fronteira de  $U$ , é o gráfico de uma função Lipschitz  $g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ .*

A consequência mais importante deste resultado é que toda curva rotacional invariante projeta-se injetivamente sobre  $S^1$  e, portanto, é um gráfico.

---

No capítulo 4, faremos algumas definições e propriedades acerca das órbitas periódicas e número de rotação de aplicações do círculo. Mostraremos que todo ponto do círculo tem órbita periódica sob rotação racional e que nenhum ponto do círculo terá órbita periódica sob rotação irracional. Além disso, demonstraremos que um homeomorfismo,  $f : S^1 \rightarrow S^1$ , que preserva orientação, só tem órbitas periódicas então todas tem o mesmo período.

No capítulo 5, apresentaremos algumas definições e propriedades relacionadas aos bilhares convexos definidos em regiões planas convexas com bordo  $C^2$ .

O problema do bilhar no plano Euclidiano, introduzido por Birkhoff [2] no começo do século XX, consiste no movimento livre de uma partícula pontual em uma região limitada, sendo refletida elasticamente na fronteira, ou seja, obedece a lei da reflexão. Como o movimento é livre na região, toda a dinâmica é determinada por dois pontos consecutivos de reflexão na fronteira ou pelo ponto de reflexão e a direção do movimento imediatamente após cada reflexão. Se a curva da fronteira for uma oval (i.e. uma curva fechada, regular, simples, orientada, pelo menos  $C^2$  e estritamente convexa), o bilhar define um difeomorfismo Twist que preserva área e logo um sistema dinâmico disceto bidimensional conservativo.

Neste capítulo provaremos estas e outras propriedades do bilhar e estudaremos dois exemplos: o bilhar no círculo e na elipse, que são integráveis, no sentido de que existe uma constante de movimento.

Iniciaremos o capítulo 6, apresentando as ferramentas necessárias para trabalhar com o conceito de decomposição dominada. A grosso modo, dizemos que um conjunto invariante  $\Lambda$  por um difeomorfismo  $f$  tem decomposição dominada se o fibrado tangente sobre  $\Lambda$  se dividir em dois sub-fibrados invariantes que são invariantes sob  $Df$  e, além disso, a ação de um domina a ação do outro. Algumas consequências importantes desta propriedade foram dadas por Pujals e Sambarino em [16]. Em particular, caracterizam o conjunto limite de um difeomorfismo  $C^2$  em uma superfície compacta, tendo decomposição dominada. Eles mostram que se o conjunto limite  $L(f)$  tem decomposição dominada então pode ser decomposto como  $L(f) = \mathcal{I} \cup \mathcal{R} \cup \tilde{\mathcal{L}}$  onde

- $\mathcal{I}$  é um conjunto de pontos periódicos com períodos limitados contidos em uma união disjunta finita de arcos periódicos hiperbólicos ou curvas simples fechadas.
- $\mathcal{R}$  é uma união finita de curvas fechadas simples periodicamente hiperbólicas que suportam uma rotação irracional.
- $\tilde{\mathcal{L}}$  pode ser decomposto em uma união disjunta de conjuntos compactos invariantes e transitivos finitos (chamados conjuntos básicos). Os pontos periódicos são densos em  $\tilde{\mathcal{L}}$ .

Em seguida, apresentaremos os bilhares não-elásticos, que são uma composição de um bilhar convexo clássico seguido de uma mudança no ângulo de reflexão, correspondendo a uma contração nas fibras verticais de uma curva rotacional invariante.

Para construir a aplicação de bilhar não elástico, tomamos primeiramente uma aplicação de bilhar  $C^2$  em uma oval,  $B(\varphi_0, \alpha_0) = (\varphi_1, \alpha_1)$ , tendo  $\gamma_0$  como curva rotacional invariante  $C^2$ , dada pelo gráfico de  $\alpha = g(\varphi)$ . Um subconjunto compacto do espaço de fase  $[0, 2\pi) \times (0, \pi)$  com interior vazio e cuja fronteira consiste de duas curvas rotacionais distintas (não necessariamente invariantes e nem gráficos) será chamada de faixa compacta.

---

Sejam  $I \in \mathbb{R}$  um intervalo fechado, com interior não vazio e contendo 0 em seu interior e  $h : I \rightarrow I$  uma contração  $C^2$ , estritamente crescente com  $h(0) = 0$ . Definimos uma aplicação de bilhar não-elástico  $P$  em uma faixa compacta  $\Sigma$  contendo  $\gamma_0$  por  $P(\varphi_0, \alpha_0) = (\varphi_1, \alpha_1 - h(\alpha_1 - g(\varphi_1)))$  com  $\Sigma$  escolhida tal que se  $(\varphi, \alpha) \in \Sigma$  então  $\alpha - g(\varphi) \in I$ .

Provaremos então o seguinte resultado:

**Teorema:** [14] *Dada uma aplicação de bilhar oval  $B$ , com  $\gamma_0 = \{\varphi, g(\varphi)\}$  sua curva rotacional invariante  $C^2$ , consideremos a faixa compacta  $\Sigma$  contendo  $\gamma_0$  em seu interior e um intervalo fechado  $I \subset \mathbb{R}$ , tal que  $\alpha - g(\varphi) \in I$  se  $(\varphi, \alpha) \in \Sigma$ . Se  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função  $C^2$  satisfazendo  $h(0) = 0$  e  $0 \leq 1 - \underline{l} < h'(0) < 1$  (com  $\underline{l}$  dependendo somente de  $\gamma_0$ ), então existe uma faixa compacta  $S \subset \Sigma$  tal que a aplicação de bilhar não elástico  $P$  definida por  $B$ ,  $g$  e  $h$  é um difeomorfismo  $C^2$  de  $S$  em  $P(S)$ . Seu conjunto limite  $L(P)$  contém  $\gamma_0$  e tem decomposição dominada.*

Este resultado nos guiará a construir exemplos de bilhares não-elásticos em ovais com conjunto limite tendo decomposição dominada e suportando uma rotação racional ou uma rotação irracional (peças do tipo  $\mathcal{I}$  ou  $\mathcal{R}$  do teorema de Pujals-Sambarino), como, por exemplo, no círculo e na elipse.

## Capítulo 2

# Aplicação do tipo Twist e Função Geradora

Neste capítulo, apresentaremos a definição fundamental de aplicação Twist, a existência da função geradora de uma aplicação, bem como algumas proposições relacionadas a tal função. Veremos que a condição  $0 < c \leq \partial_2 F_1(x, y)$  implica que o vetor tangente,  $t = \partial F(x, y) = (\partial_2 F_1(x, y), \partial_2 F_2(x, y))$ , à curva  $\bar{\gamma}_x$  tem sempre a primeira componente positiva, ou seja, a curva projeta-se difeomorficamente sobre o eixo real  $x$ . Assim, aplicações Twist desviam as linhas verticais.

### 2.1 Aplicações do tipo Twist

Primeiramente, vamos definir a seguinte relação de equivalência: dados dois pontos  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , dizemos que  $x_1$  está relacionado com  $x_2$  ( $x_1 \sim x_2$ ) se, e somente se,  $x_1 - x_2 = k \in \mathbb{Z}$ . Denotaremos o conjunto das classes de equivalência, dadas por esta relação, por  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  é homeomorfo à esfera unidimensional unitária,  $S^1$ , e então podemos definir o conjunto  $C = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$  como sendo o cilindro.

**Definição 2.1. (Levantamento)** Seja  $f : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ , chamamos a função  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $(x, y) \mapsto (F_1(x, y), F_2(x, y))$  de **levantamento** da função  $f$ , se para todo ponto  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  vale que

$$\phi \circ F(x_0, y_0) = f \circ \phi(x_0, y_0)$$

onde  $\phi(x, y) = (x \pmod{1}, y)$ .

**Observação 2.1.** Devemos notar que  $F$  é um levantamento se, e somente se,  $F(x + 1, y) = F(x, y) + (1, 0)$ . Um levantamento não é único e, mais ainda, para cada  $f$  existe uma quantidade enumerável de levantamentos.

Consideremos um difeomorfismo  $f$  de  $C$ , cujo levantamento ao plano, denotado por  $F$ , possui as seguintes componentes

$$\bar{x} = F_1(x, y) \quad \text{e} \quad \bar{y} = F_2(x, y),$$

ou seja,

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y}) = (F_1(x, y), F_2(x, y)).$$

**Definição 2.2.** A aplicação  $F$  é dita **Twist uniforme** se  $F$  satisfaz às seguintes propriedades:

- (a)  $F_1(x + 1, y) = 1 + F_1(x, y)$ ;
- (b)  $(\partial_1 F_1(x, y))(\partial_2 F_2(x, y)) - (\partial_2 F_1(x, y))(\partial_1 F_2(x, y)) = 1$ , ou seja,  $F$  preserva área;
- (c) existe uma constante  $c > 0$  tal que

$$0 < c \leq \partial_2 F_1(x, y) \leq \frac{1}{c}$$

ou seja,  $F$  satisfaz a condição de Twist uniforme.

Se trocarmos a condição (c), por

$$0 < c \leq \partial_2 F_1(x, y),$$

a aplicação é dita **Twist monótona**, porém se trocarmos por

$$0 \leq \partial_2 F_1(x, y),$$

a aplicação é dita simplesmente **Twist**.

A aplicação standard definida no cilindro por

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned}$$

onde:

- $\bar{x} = x + \bar{y}$ ;
- $\bar{y} = y - \frac{\alpha}{2\pi} \text{sen}(2\pi x) \pmod{1}$ ;
- $x$  é o ângulo longitudinal no cilindro com período igual a 1,  $y \in \mathbb{R}$  é a altura no cilindro e  $\alpha$  é um parâmetro real.

é um exemplo de aplicação Twist uniforme.

De fato, temos que

(a)

$$\begin{aligned} F_1(x + 1, y) &= x + 1 + y - \frac{\alpha}{2\pi} \text{sen}(2\pi x + 2\pi) \pmod{1} \\ &= 1 + (x + y - \frac{\alpha}{2\pi} \text{sen}(2\pi x) \pmod{1}) \\ &= 1 + F_1(x, y). \end{aligned}$$

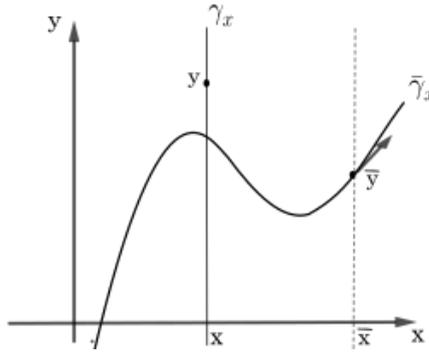
(b)  $(\partial_1 F_1)(\partial_2 F_2) - (\partial_2 F_1)(\partial_1 F_2) = (1 - \alpha \cos(2\pi x) \pmod{1})(1) - (1)(-\alpha \cos(2\pi x) \pmod{1}) = 1$ .

(c) Como  $\partial_2 F_1 = 1$  então, tomando  $c = 1$ , obtemos

$$0 < c \leq \partial_2 F_1(x, y) \leq \frac{1}{c}.$$

Agora, daremos uma interpretação geométrica para a condição Twist. Para isso, consideremos  $x \in \mathbb{R}$  e a curva  $\gamma_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por  $\gamma_x(s) = (x, s)$  que corresponde a uma reta vertical em  $\mathbb{R}^2$ . A imagem de  $\gamma_x$  pela aplicação denotada por  $\tilde{\gamma}_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  será dada por

$$s \mapsto (F_1(x, s), F_2(x, s)) = (\bar{x}, \bar{y}).$$



**Figura 2.1:** Interpretação geométrica da condição Twist.

A condição

$$0 < c \leq \partial_2 F_1(x, y)$$

implica que o vetor tangente,  $t = \partial F(x, y) = (\partial_2 F_1(x, y), \partial_2 F_2(x, y))$ , à curva  $\tilde{\gamma}_x$  tem sempre a primeira componente positiva, ou seja, a curva projeta-se difeomorficamente sobre o eixo real  $x$ . Assim, tal imagem pode ser vista como o gráfico de uma função da coordenada  $x$ . Podemos dizer, então, que a aplicação  $F$  desvia as linhas verticais.

## 2.2 Função Geradora

Pelo item (c) da definição (2.2), temos que  $\partial_2 F_1(x, y) \geq c > 0$  o que implica que  $\bar{x} = F_1(x, y)$  pode ser resolvida para  $y$ . Pelo Teorema da Função Implícita, existe  $u$  tal que  $y = u(x) = u(x, \bar{x})$ . Enquanto que pelo item (a), temos que  $F_1(x + 1, y) = 1 + F_1(x, y)$  o que implica que  $F_1(x + 1, u(x + 1, \bar{x} + 1)) = 1 + F_1(x, u(x, \bar{x}))$  e, conseqüentemente,  $y = u(x + 1, \bar{x} + 1) = u(x, \bar{x})$ .

Em virtude desta periodicidade, a aplicação  $u$  pode ser projetada sobre um outro cilindro,  $\bar{C}$ , obtido do plano  $x\bar{x}$ , por meio de uma aplicação que identifique os pontos  $(x, \bar{x})$  e  $(\hat{x}, \hat{\bar{x}})$  tais que  $x = \hat{x} + k$  e  $\bar{x} = \hat{\bar{x}} + k$  onde  $k \in \mathbb{Z}$ .

Definamos um campo de vetores  $\omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  por

$$\omega(x, \bar{x}) = (-u(x, \bar{x}), F_2(x, u(x, \bar{x}))) := (-u(x, \bar{x}), v(x, \bar{x})).$$

## 2.2. FUNÇÃO GERADORA

---

Equivalentemente, podemos considerar sua forma diferencial associada

$$\omega = -udx + vdx.$$

**Proposição 2.1.** *A forma diferencial  $\omega$  é fechada.*

**Demonstração:** Sabemos que  $\bar{x} = F_1(x, u(x, \bar{x}))$  então, derivando em ambos os lados,

$$1 = \frac{\partial F_1(x, u(x, \bar{x}))}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial F_1(x, u(x, \bar{x}))}{\partial u} \frac{\partial u(x, \bar{x})}{\partial \bar{x}}$$

o que implica que

$$\frac{\partial u(x, \bar{x})}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{\frac{\partial F_1(x, u(x, \bar{x}))}{\partial u}}.$$

Portanto,

$$\partial_{\bar{x}} u = \frac{1}{\frac{\partial F_1(x, u(x, \bar{x}))}{\partial u}}. \quad (2.1)$$

Analogamente, temos que  $\frac{\partial F_1(x, u(x, \bar{x}))}{\partial x} = \partial_1 F_1 + \partial_2 F_1 \partial_x u$ . Então,

$$\partial_x u(x, \bar{x}) = -\frac{\partial_1 F_1(x, u(x, \bar{x}))}{\partial_2 F_1(x, u(x, \bar{x}))}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{x}} u + \partial_x v &= \partial_{\bar{x}} u(x, \bar{x}) + \frac{\partial F_2(x, u(x, \bar{x}))}{\partial x} + \partial_2 F_2(x, u(x, \bar{x})) \partial_x u(x, \bar{x}) \\ &= \frac{1}{\partial_2 F_1} + \partial_1 F_2 - \partial_2 F_2 \frac{\partial_1 F_1}{\partial_2 F_1} \\ &= \frac{1 + \partial_1 F_2 \partial_2 F_1 - \partial_2 F_2 \partial_1 F_1}{\partial_2 F_1} \\ &= \frac{1-1}{\partial_2 F_1} \text{ (pela condição (b))} \\ &= 0 \end{aligned}$$

e o resultado segue. ■

**Observação 2.2.** O rotacional do campo é dado por  $\text{rot } \omega = \partial_x v + \partial_{\bar{x}} u$  então, pela Proposição 2.1, temos que o campo  $\omega$ , definido anteriormente, possui rotacional nulo no plano. Mas, pelo Lema de Poincaré,  $\omega$  é o gradiente de uma função  $h$  no plano. Ou seja, existe uma função  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{aligned} -y &:= -u(x, \bar{x}) = \partial_1 h(x, \bar{x}) \\ \bar{y} &:= v(x, \bar{x}) = F_2(x, u(x, \bar{x})) = \partial_2 h(x, \bar{x}). \end{aligned}$$

A aplicação  $h$  não necessariamente detém a propriedade de periodicidade da aplicação  $u$ ,  $h(x+1, \bar{x}+1) = h(x, \bar{x})$  não necessariamente é válida para todo  $(x, \bar{x}) \in \mathbb{R}^2$ .

## 2.2. FUNÇÃO GERADORA

---

Porém, para que isto ocorra é necessário e suficiente que a integral de linha do campo  $\omega = (-u, v)$  sobre qualquer curva fechada, de classe  $C^1$  por partes que se projete em  $\bar{C}$ , começando em  $(x, \bar{x})$  e terminando em  $(x + 1, \bar{x} + 1)$  seja nula, consequência do Teorema de Stokes.

Seja  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva fechada, de classe  $C^1$  por partes. Se  $h(x + 1, \bar{x} + 1) - h(x, \bar{x}) = 0$  temos que,

$$0 = h(x + 1, \bar{x} + 1) - h(x, \bar{x}) = \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} -u dx + \int_{\gamma} v d\bar{x}.$$

Portanto,

$$\int_{\gamma} -u dx = - \int_{\gamma} v d\bar{x}.$$

Agora, suponhamos que o levantamento  $F$  de  $f$ , também satisfaça:

(d)  $F$  é tal que a integral de linha do campo  $\omega$  sobre  $\gamma$  é nula. A função  $F$  com esta propriedade é dita **exata**.

Pelo que foi discutido anteriormente, temos que esta condição implica que

$$h(x + 1, \bar{x} + 1) = h(x, \bar{x}).$$

Logo, assim como a aplicação  $u$ , a aplicação  $h$  também induz uma aplicação no cilindro  $\bar{C}$ . Além disso, sabemos, pela condição Twist uniforme, que

$$0 < c \leq \partial_2 F_1(x, u(x, \bar{x})) \leq \frac{1}{c}.$$

Então,

$$0 < c \leq (\partial_2 F_1(x, u(x, \bar{x})))^{-1} \leq \frac{1}{c}.$$

Mas, por (2.1),  $\partial_{\bar{x}} u(x, \bar{x}) = (\partial_2 F_1(x, u(x, \bar{x})))^{-1}$ . Então,

$$\begin{aligned} 0 < c \leq (\partial_2 F_1(x, u(x, \bar{x})))^{-1} \leq \frac{1}{c} &\Leftrightarrow 0 < c \leq \partial_{\bar{x}} u(x, \bar{x}) \leq \frac{1}{c} \\ &\Leftrightarrow 0 > -c \geq -\partial_{\bar{x}} u(x, \bar{x}) \geq -\frac{1}{c} \end{aligned}$$

Como  $\partial_{\bar{x}} u(x, \bar{x}) = -\frac{\partial^2 h(x, \bar{x})}{\partial x \partial \bar{x}}$ , segue que

$$-\frac{1}{c} \leq \frac{\partial^2 h(x, \bar{x})}{\partial x \partial \bar{x}} \leq -c < 0.$$

**Definição 2.3.** Seja  $F$ , tal que  $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ , o levantamento de um difeomorfismo  $f$  ao cilindro  $C$  que satisfaz as propriedades (a), (b), (c) e (d). Então existe uma função duas vezes continuamente diferenciável  $h(x, \bar{x})$ , chamada **Função Geradora** de  $F$

tal que

$$\begin{aligned} h(x+1, \bar{x}+1) &= h(x, \bar{x}) \\ -\frac{1}{c} &\leq \frac{\partial^2 h(x, \bar{x})}{\partial x \partial \bar{x}} \leq -c < 0 \end{aligned}$$

e, além disso,

$$\begin{aligned} y &= -\partial_1 h(x, \bar{x}) \\ \bar{y} &= \partial_2 h(x, \bar{x}) \end{aligned}$$

onde  $x, \bar{x}, y, \bar{y}$  satisfazem  $\bar{x} = F_1(x, y)$  e  $\bar{y} = F_2(x, y)$ .

Agora, daremos um significado geométrico para a função  $h$ . Consideremos  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva de classe  $C^1$  por partes, definida por  $\gamma(s) = (x(s), \bar{x}(s))$ , onde  $\gamma(0) = (x_0, \bar{x}_0)$  e  $\gamma(1) = (x_1, \bar{x}_1)$ .

Dessa forma, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_{\gamma} -u dx + \int_{\gamma} v d\bar{x} \\ &= \int_0^1 dh(\gamma(t)) \frac{d\gamma(t)}{dt} dt \\ &= \int_0^1 \frac{d(h \circ \gamma)(t)}{dt} dt \\ &= h(\gamma(1)) - h(\gamma(0)) \\ &= h(x_1, \bar{x}_1) - h(x_0, \bar{x}_0). \end{aligned}$$

Portanto,

$$h(x_1, \bar{x}_1) - h(x_0, \bar{x}_0) = \int_{\gamma} -u dx + \int_{\gamma} v d\bar{x}.$$

Reescrevendo  $(x, y) = (x, u(x, \bar{x}))$  e denotando por  $\beta$  a representação de  $\gamma$  nas novas variáveis e  $\beta(0) = (x_0, y_0)$ ,  $\beta(1) = (x_1, y_1)$  os valores extremos da curva podemos reescrever a primeira integral do segundo membro acima como

$$\int_{\gamma} -u dx = \int_{\beta} -y dx.$$

Assim, podemos ver que este termo corresponde à área sob a curva  $\beta$ .

Quanto à segunda integral, também faremos uma mudança de variáveis. Neste caso, consideremos  $m : (x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ . Observemos que, nestas novas variáveis,  $F_2 dF_1 = \bar{y} d\bar{x}$  e  $\beta(s) \rightarrow F(\beta(s))$ .

Sabemos que  $v(x, \bar{x}) = F_2(x, u(x, \bar{x}))$  e  $\bar{x} = F_1(x, y)$  então  $d\bar{x} = \partial_x F_1 dx + \partial_y F_1 dy$ . Dessa

## 2.2. FUNÇÃO GERADORA

forma,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} v d\bar{x} &= \int_{\beta} F_2(\partial_x F_1 dx + \partial_y F_1 dy) \\ &= \int_{\beta} F_2 dF_1 \\ &= \int_{F \circ \beta} \bar{y} d\bar{x}. \end{aligned}$$

Com isso, podemos verificar que este termo pode ser interpretado como a área sob a curva  $F \circ \beta$ .

Podemos resumir a interpretação geométrica da função geradora  $h$  de  $F$  na proposição a seguir.

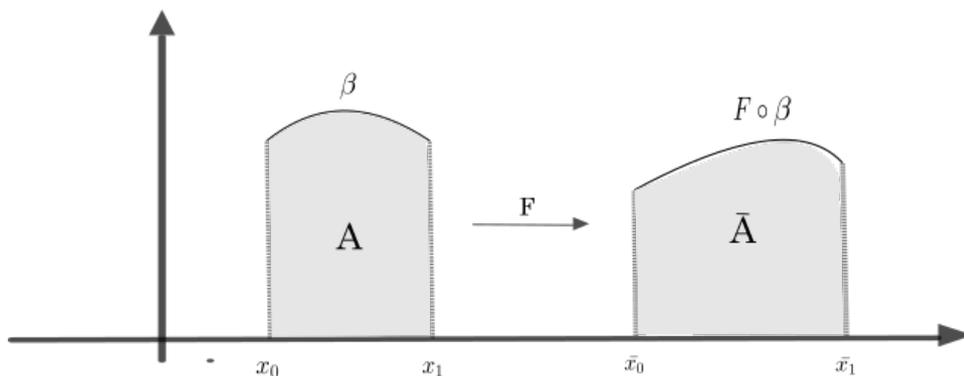
**Proposição 2.2.** *Seja  $\beta$  uma curva qualquer de classe  $C^1$  no plano  $(x, y)$ , onde  $\beta(0) = (x_0, y_0)$  e  $\beta(1) = (x_1, y_1)$ . Então,*

$$h(x_1, \bar{x}_1) - h(x_0, \bar{x}_0) = \int_{\beta} -y dx + \int_{F \circ \beta} \bar{y} d\bar{x}.$$

**Demonstração:** Seja  $\bar{x}_0 = F_1(x_0, y_0)$  e  $\bar{x}_1 = F_1(x_1, y_1)$ . Então,

$$\begin{aligned} h(x_1, \bar{x}_1) - h(x_0, \bar{x}_0) &= \int_{\gamma} -u dx + \int_{\gamma} v d\bar{x} \\ &= \int_{\beta} -y dx + \int_{\gamma} v d\bar{x} \\ &= - \int_{\beta} y dx + \int_{F \circ \beta} \bar{y} d\bar{x} \\ &= \int_{F \circ \beta} \bar{y} d\bar{x} - \int_{\beta} y dx \\ &= \bar{A} - A \end{aligned}$$

onde  $A$  e  $\bar{A}$  correspondem às áreas hachuradas da imagem a seguir.



**Figura 2.2:** Interpretação geométrica de  $h$ .

■

## Capítulo 3

# Teorema da Curva Invariante de Birkhoff

Neste capítulo apresentaremos uma prova do resultado conhecido como Teorema da Curva Invariante de Birkhoff o qual foi provado inicialmente pelo próprio Birkhoff. A consequência mais importante deste resultado é que toda curva rotacional invariante projeta-se injetivamente sobre  $S^1$  e, portanto, é um gráfico. A referência principal que usamos neste capítulo foi o livro de [17].

### 3.1 Teorema de Birkhoff

**Definição 3.1.** Dizemos que  $\Gamma$  é uma **curva rotacional invariante** por uma aplicação do tipo Twist  $f$  se  $\Gamma$  é a imagem de uma curva parametrizada contínua, fechada e simples (sem auto-interseção), homotopicamente não trivial, tal que  $f(\Gamma) = \Gamma$ .

O cilindro está completamente folheado por curvas rotacionais invariantes. Uma vez que, se considerarmos o levantamento  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dado por  $F(x, y) = (x + y, y)$ , o conjunto dos pontos  $(x, y)$  tais que  $x \in S^1$  e  $y$  fixado é um exemplo da definição (3.1).  $F$  restrita a cada uma das curvas ( $y = \text{const.}$ ) temos uma rotação.

**Teorema 3.1. (Birkhoff)** *Seja  $f : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$  uma aplicação do tipo Twist que preserva área. Suponha que  $U \subset S^1 \times \mathbb{R}$  seja um subconjunto aberto tal que,*

- (i)  $U$  é homeomorfo ao cilindro  $S^1 \times \mathbb{R}$ ;
- (ii)  $U$  é invariante por  $f$ ;
- (iii) existem números  $a$  e  $b$  tais que  $S^1 \times (-\infty, a] \subset U \subset S^1 \times (-\infty, b]$ ;
- (iv)  $\text{int}(Cl U) = U$ ;

*Então  $\partial U$ , a fronteira de  $U$ , é o gráfico de uma função Lipschitz  $g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ .*

#### Demonstração:

Queremos provar que  $\partial U$  é o gráfico de uma função Lipschitz  $g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  e, para isso, precisamos que cada ponto  $p \in S^1$  esteja associado a um ponto  $g(p) \in \mathbb{R}$  de forma que o par

### 3.1. TEOREMA DE BIRKHOFF

---

$(p, g(p)) \in \partial U$  e, além disso, não exista outro par em  $\partial U$  tal que a sua primeira coordenada seja  $p$ .

Pelo item (iii) do teorema temos que dado um ponto  $(\theta, s) \in U$  subindo uma vertical, começando deste, a partir de um determinado ponto a vertical sairá do aberto  $U$ .

Consideremos  $g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $g(\theta) = \sup\{y \in \mathbb{R}; \theta \times (-\infty, y] \subset U\}$ . Ao final, provaremos que  $g$  é a função Lipschitz desejada.

Notemos que  $(p, g(p)) \in \partial U$ . Então, provaremos inicialmente que a restrição da projeção canônica  $\pi_1 : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1$  ao subconjunto  $\partial U$  é injetiva uma vez que já é sobrejetiva. Em seguida, concluiremos que  $\partial U$  é, de fato, o gráfico da função  $g$ .

Consideremos o recobrimento universal  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$  do cilindro e fixemos um levantamento  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de  $f$ . Além disso, consideremos o subconjunto  $U_1 = \pi^{-1}(U)$ , isto é, o levantamento do aberto  $U$  ao plano  $\mathbb{R}^2$ .

Observemos que:

- $U$  é conexo, uma vez que, pelo item (i) do teorema, é homeomorfo ao cilindro  $S^1 \times \mathbb{R}$ ;
- $Cl U$  é conexo, já que  $U$  é conexo e o fecho de todo conjunto conexo é também conexo;
- $\partial U$  é conexo, pois  $\partial U = Cl U \setminus U$ .

Como a projeção é contínua e  $U_1 = \pi^{-1}(U)$  temos que  $U_1$  é aberto. Somando-se a isso, pelo item (i) do teorema, temos que  $U$  é homeomorfo ao cilindro  $S^1 \times \mathbb{R}$  dessa forma, é induzido um homomorfismo entre  $U_1 = \pi^{-1}(U)$  e  $\mathbb{R}^2 = \pi^{-1}(S^1 \times \mathbb{R})$ . Logo,  $U_1$  é conexo e simplesmente conexo (já que  $\mathbb{R}^2$  o é e pela garantia da existência do homomorfismo induzido).

Temos que  $U_1$  é invariante pelo levantamento  $F$  de  $f$ , pois como  $f(U) \subset U$  e  $U_1 = \pi^{-1}(U)$  obtemos  $f(\pi(U_1)) \subset \pi(U_1)$ . Como  $F$  é levantamento de  $f$ ,  $f(\pi(U_1)) = \pi(F(U_1))$ . Assim,  $\pi(F(U_1)) \subset \pi(U_1)$  e, conseqüentemente,  $F(U_1) \subset U_1$ .

Além disso,  $U_1$  é invariante por translações horizontais, ou seja,

$$U_1 + (1, 0) = \{(x, y) + (1, 0); (x, y) \in U_1\} = U_1.$$

Consideremos

$$V = \{(x, y); (x, s) \in U_1, \forall s \in [a, y]\}$$

o subconjunto de pontos de  $U_1$  que são acessíveis por semi-retas verticais.

Por construção, temos que  $V$  é um conjunto conexo por caminhos e, somando a isso,  $V$  é aberto.

**Afirmção:**  $V$  é aberto.

Com efeito, seja  $(x, y) \in V$ . Vamos mostrar que existe  $\delta > 0$  tal que  $B_\delta((x, y)) \subset V$ . Por definição, para todo  $s \in [a, y]$ ,  $(x, s) \in U_1$  que é aberto. Logo, existe  $\delta_1 > 0$  para cada  $s_1 \in [a, y]$  tal que  $B_{\delta_1}((x, s_1)) \subset U_1$ .

Tomemos  $\delta = \inf \delta_1$ . Dessa forma,  $B_\delta((x, s_1)) \subset U_1$  para todo  $s_1 \in [a, y]$  e, conseqüentemente,  $B_\delta((x, y)) \subset V$ .

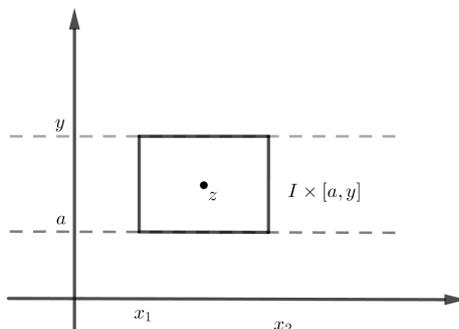
### 3.1. TEOREMA DE BIRKHOFF

Para provar que  $V = U_1$  vamos considerar os seguintes lemas:

**Lema 3.1.** *Sejam  $I = [x_1, x_2]$  um intervalo e  $y \in \mathbb{R}$  tais que  $(x_1, y)$  e  $(x_2, y)$  pertencem a  $V$  e  $I \times \{y\} \subset U_1$  então  $I \times [a, y] \subset U_1$ .*

**Demonstração:**

Seja  $\gamma \subset U_1$  uma curva simples e fechada formada por  $I \times \{a\} \cup I \times \{y\}$  e pelos segmentos verticais  $\{x_1\} \times (a, y) \cup \{x_2\} \times (a, y)$ .



**Figura 3.1:** Esboço para demonstração do lema (3.1).

Notemos que o interior de  $\gamma$  não contém nenhum ponto da fronteira de  $U_1$ . De fato, se existisse um ponto  $z \in \partial U_1$  tal que  $z \in \text{int } \gamma$  teríamos que  $\partial U_1 \subset \text{int } \gamma$ , pela conexidade. Caso contrário, se  $\partial U_1 \not\subset \text{int } \gamma$  então existiria um aberto  $W \subset \text{int } \gamma$ ,  $W \neq \emptyset$  e  $W$  contendo  $z$ , de forma que  $W \cup W^c$  seria uma cisão não trivial para  $\partial U_1$ , o que geraria um absurdo já que  $\partial U_1$  é conexo.

Além disso, temos que  $\gamma$  não contém nenhum ponto do complementar de  $U_1$  em seu interior pois, caso contrário, como  $U_1$  é aberto, segue que  $\partial U_1 \subset \text{int } \gamma$  e, dessa forma,  $\partial U_1 \subset \text{int } \gamma$  implicando que  $\gamma$  conteria um ponto de fronteira em seu interior recaindo no caso anterior.

Dessa forma,

$$\begin{cases} \partial U_1 \cap \text{int } \gamma = \emptyset \\ U_1^c \cap \text{int } \gamma = \emptyset \end{cases}$$

Logo,  $\text{int } \gamma \subset U_1$ . Como  $\gamma \subset U_1$  segue que  $I \times [a, y] \subset U_1$ . ■

Consideremos o subconjunto de pontos  $p \in U_1$  tais que toda vizinhança aberta que contém  $p$  intersecta  $V$  e seu complementar em  $U_1$ ,  $U_1 \setminus V$ . Denotaremos este conjunto por  $\partial_{U_1} V$ .

Vamos apresentar, agora, um lema que caracteriza o conjunto  $\partial_{U_1} V$ .

**Lema 3.2.**  *$\partial_{U_1} V$  é a união disjunta (possivelmente enumerável) de segmentos verticais  $S_i$  cujas extremidades estão em  $\partial U_1$ .*

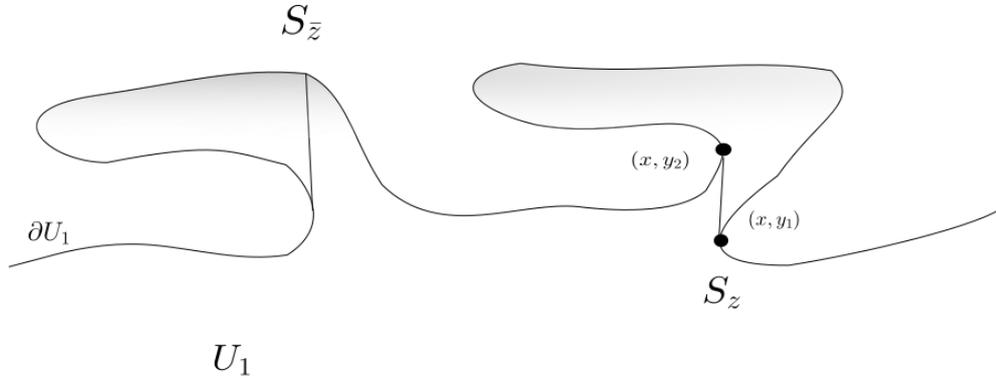
Além disso, se  $p \in S_i$  então toda bola centrada em  $p$  é subdividida por  $S_i$  em dois abertos  $U_i^+$  e  $U_i^-$  no qual um deles é disjunto de  $V$ .

**Demonstração:** Seja  $z \in \partial_{U_1} V$ . Como  $V$  é aberto segue que  $z = (x, y) \notin V$ . Notemos que existe subconjunto (semi-reta vertical)

$$\{x\} \times (y_1, y_2)$$

### 3.1. TEOREMA DE BIRKHOFF

onde  $y \in (y_1, y_2)$  contido em  $U_1$  e tal que  $(x, y_1), (x, y_2) \in \partial U_1$ .  $(x, y_1)$  será o primeiro ponto fora de  $U_1$  descendo a vertical  $(x, y + s)$  e  $(x, y_2)$  será o primeiro ponto fora de  $U_1$  subindo a vertical  $(x, y + s)$  onde  $s \in (-\infty, +\infty)$ .



**Figura 3.2:** Esboço para demonstração do lema (3.2).

Vejamos que  $y_1$  existe pelo fato de  $z \notin V$  e  $y_2$  existe usando a hipótese de que existem  $a, b \in \mathbb{R}$  com  $a < b$  tais que  $S^1 \times (-\infty, a] \subset U \subset S^1 \times (-\infty, b]$  e  $U_1 = \pi^{-1}(U)$ .

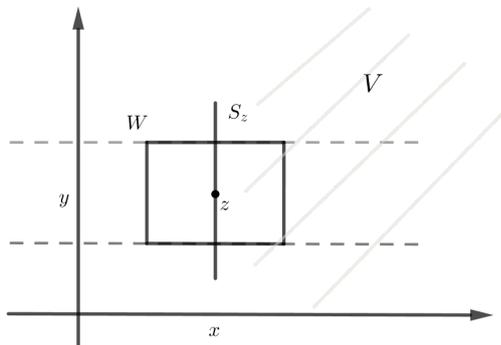
Denotemos o subconjunto  $\{x\} \times (y_1, y_2)$ , o qual está relacionado ao ponto  $z$ , por  $S_z$ .

Com isso, concluímos que

$$\partial_{U_1} V \subset \bigcup_{z \in \partial_{U_1} V} S_z.$$

Reciprocamente, seja  $w \in \bigcup_{z \in \partial_{U_1} V} S_z$ . Temos que  $w \in S_z$  para algum  $z \in \partial_{U_1} V$ . Precisamos provar que  $S_z \subset \partial_{U_1} V$ . Para isso, basta mostrar que  $S_z \cap \partial_{U_1} V$  é aberto e fechado em  $S_z$ , já que, com isso, concluímos que  $S_z \cap \partial_{U_1} V = S_z$  ou  $S_z \cap \partial_{U_1} V = \emptyset$ . Mas, como  $z \in S_z$  e  $z \in \partial_{U_1} V$  segue-se que  $S_z \cap \partial_{U_1} V = S_z$  e, conseqüentemente,  $S_z \subset \partial_{U_1} V$ .

Consideremos uma vizinhança aberta  $W = I \times (y - \epsilon, y + \epsilon)$  em  $U_1$  do ponto  $z$ , onde  $I$  é um aberto que contém  $x$  e  $\epsilon$  é um número real suficientemente pequeno.



**Figura 3.3:** Esboço para demonstração do Lema 3.2.

Notemos que, se  $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) \in W \cap V$  teremos

$$\{\bar{x}\} \times (y - \epsilon, y + \epsilon) \subset V,$$

### 3.1. TEOREMA DE BIRKHOFF

---

pela construção de  $V$ .

Dessa forma,

$$V \cap W = \left\{ \bigcup_{\bar{x} \in I \subset U_1} \{\bar{x}\} \times (y - \epsilon, y + \epsilon); (\bar{x}, \bar{y}) \in W \cap V \right\}$$

é a união de segmentos verticais e  $\{x\} \times (y - \epsilon, y + \epsilon) \subset \partial_{U_1}(V \cap W)$ .

**Afirmção:**  $S_z \subset U_1 \setminus V$ .

Temos que  $z \in \partial_{U_1}V$  e como  $V$  é aberto,  $z \notin V$ . Como  $z \notin V$  e  $z \in S_z$  segue que existe  $\bar{z} \in S_z$  (abaixo de  $z$ ) tal que  $\bar{z} \notin V$ . Caso contrário, se todos os pontos abaixo dele pertencessem a  $V$  deveríamos ter que  $z \in V$ . Logo,  $\{x\} \times (z, \bar{z}) \not\subset V$ . Analogamente, cada ponto acima de  $z$  não pertence a  $V$ . Como  $\bar{z} \notin V$  existe  $\bar{\bar{z}} \in S_z$  tal que  $\bar{\bar{z}} \notin V$ , o que implica que  $\{x\} \times (z, \bar{\bar{z}}) \not\subset V$ . Recursivamente, concluímos que  $S_z \cap V = \emptyset$ . Portanto,  $S_z \subset U_1 \setminus V$ .

**Afirmção:**  $\{x\} \times (y - \epsilon, y + \epsilon) \subset \partial_{U_1}V$ .

Denotemos  $A = \{x\} \times (y - \epsilon, y + \epsilon)$  e suponhamos que  $A \not\subset \partial_{U_1}V$ . Temos que  $A \subset S_z \subset U_1 \setminus V$  e como  $V \cap \partial_{U_1}V = \emptyset$  concluímos que  $\partial_{U_1}V \subset V^c$  e, assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} A \subset V^c \\ A \not\subset \partial_{U_1}V \\ \partial_{U_1}V \subset V^c \end{array} \right.$$

Logo,  $A \cap (V^c \setminus \partial_{U_1}V) \neq \emptyset$  e, conseqüentemente,  $A \cap (V^c \cap (\partial_{U_1}V)^c) \neq \emptyset$ , o que gera um absurdo. Uma vez que,  $A \subset \partial_{U_1}(V \cap W) \subset Cl_{U_1}(V \cap W) \subset Cl_{U_1}V = V \cup \partial_{U_1}V = (V^c \cap (\partial_{U_1}V)^c)^c$ .

Portanto,  $\{x\} \times (y - \epsilon, y + \epsilon) \subset \partial_{U_1}V$ .

Como  $\{x\} \times (y - \epsilon, y + \epsilon) \subset S_z \subset U_1 \setminus V$  temos que  $\{x\} \times (y - \epsilon, y + \epsilon) \subset \partial_{U_1}V$ . Dessa maneira,  $S_z \cap \partial_{U_1}V$  é aberto em  $S_z$  já que  $\{x\} \times (y - \epsilon, y + \epsilon)$  é aberto em  $S_z$ .

Além disso,  $S_z \cap \partial_{U_1}V$  é fechado em  $S_z$  já que  $S_z$  é fechado em si próprio e  $\partial_{U_1}V$  é fechado em  $U_1$ .

Dessa forma,  $S_z \cap \partial_{U_1}V = S_z$  e, conseqüentemente,  $S_z \subset \partial_{U_1}V$ . Como  $w$  e  $z$  foram arbitrários, segue que

$$\bigcup_{z \in \partial_{U_1}V} S_z \subset \partial_{U_1}V.$$

Agora, notemos que se  $(u, y)$  e  $(v, y)$  pertencem a  $W \cap V$ , onde  $u < v$ , teremos pelo Lema 3.1,

$$[u, v] \times (y - \epsilon, y + \epsilon) \subset V.$$

Pois  $[u, v] \times \{y\} \subset V$ , se existissem pontos em  $[u, v] \times \{y\}$  que não estivessem em  $V$  um dos extremos não estaria. Além disso,  $V$  é aberto em  $U_1$ .

Desta forma, temos que se  $W$  possuir pontos de  $V$  em ambos os lados de  $W \setminus S_z$  teremos que a faixa (incluindo os pontos de  $S_z$ ) estará totalmente contida em  $V$ , o que é um absurdo.

### 3.1. TEOREMA DE BIRKHOFF

Com isso, concluímos que existe um número real  $\delta > 0$ , suficientemente pequeno, tal que

$$(x - \delta, x + \delta) \times (y - \epsilon, y + \epsilon) \setminus \{x\} \times (y - \epsilon, y + \epsilon)$$

possui duas componentes, uma contida em  $V$  e outra contida em  $U_1 \setminus V$ .

Somando-se a isso, podemos afirmar que

$$\partial_{U_1} V = \dot{\bigcup}_i S_i$$

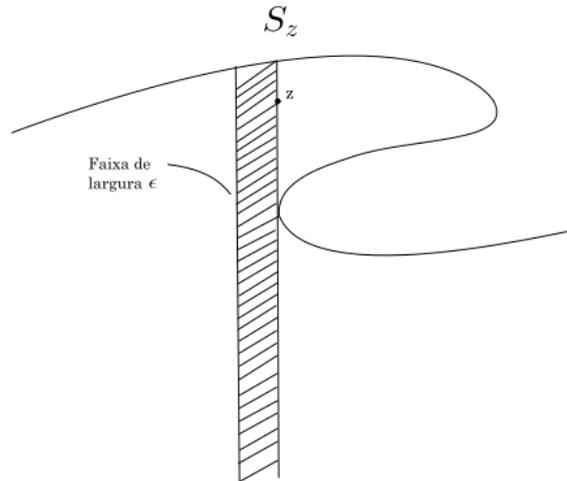
onde os subconjuntos  $S_i$  são disjuntos entre si, já que dois subconjuntos deste tipo com interseção não-vazia coincidem pela maneira que foram definidos.

**Afirmção:** O conjunto dos  $S_z$  é enumerável.

Com efeito, pelo que foi demonstrado no lema, temos que para cada  $q \in S_z$  toda bola centrada em  $q$  é subdividida por  $S_z$  em dois abertos, um dos quais é disjunto de  $V$ .

Como  $S_z$  é compacto em  $\mathbb{R}^2$  temos que existe uma subcobertura finita de bolas, com a característica acima, que cobrem  $S_z$ .

Sabemos que o extremo inferior de  $S_z$  é acessível por vertical, que está totalmente contida em  $V$ . Denotemos  $\{B_i\}$  a subcobertura finita garantida acima, onde  $p_i \in S_z$  é o centro da bola  $B_i$ . Além disso, consideremos  $\epsilon_i = \text{"raio}(B_i)$ " e tomemos  $\epsilon = \min_{i \in \{1, \dots, n\}} \{\epsilon_i\}$ .



**Figura 3.4:** Esboço para demonstração do Lema 3.2.

Como  $B_i$  é subdividida em abertos, no qual um deles é disjunto de  $V$ , temos que existe uma faixa de tamanho  $\epsilon$  totalmente contida em  $V$ , ou seja, essa faixa é acessível por verticais.

Suponha que exista uma quantidade infinita, no intervalo  $[0, 1]$ , de  $S_z$ . Então teremos acumulação em algum  $S_w$ , ou seja, existe  $S_{w'}$  tal que  $\text{dist}(S_w, S_{w'}) < \epsilon$ .

Analogamente ao que fizemos,  $S_{w'}$  é compacto então admitirá subcobertura finita, consideremos  $\epsilon_{w'}$  como sendo o menor raio das bolas dessa subcobertura. Teremos, então, que a faixa de comprimento  $\epsilon_{w'}$  estará contida em  $V$ . Como  $\text{dist}(S_w, S_{w'}) < \epsilon$ , teremos que as faixas irão se interceptar, o que gera um absurdo. Uma vez que, dado  $p \in S_{w'}$  toda vizinhança  $W$  contém pontos que estão em  $U_1 \setminus V$  e  $V$  ao mesmo tempo, pois  $S_{w'}$  está contida na faixa de  $S_w$ .

### 3.1. TEOREMA DE BIRKHOFF

Logo, teremos uma quantidade enumerável de  $S_z$ .

Como existem no máximo uma quantidade enumerável de intervalos do tipo  $S_z \subset \partial_{U_1} V$ , concluímos a demonstração do lema. ■

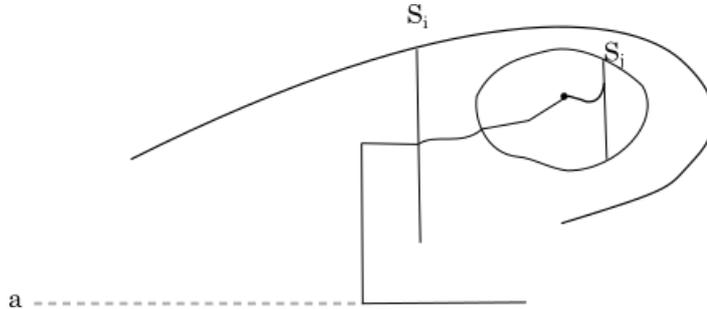
**Lema 3.3.** *Para todo  $i$ ,  $U_1 \setminus S_i$  é a união de duas componentes conexas, uma das quais é disjunta de  $V$  e tem fronteira disjunta de  $S_j$ , para  $j \neq i$ .*

*Segue então que a componente de  $U_1 \setminus S_i$ , disjunta de  $V$ , tem fronteira formada por  $S_i$  e um subconjunto da fronteira de  $U_1$  (uma "bolsa" inacessível por segmentos verticais contidos em  $U_1$ ).*

**Demonstração:** Pelo Lema 3.2, cada vizinhança é subdividida em dois abertos, um dos quais é disjunto de  $V$ .

Consideremos  $A_i$  a componente conexa que está totalmente contida em  $U_1 \setminus V$ . Notemos que,  $A_i$  é uma "bolsa" inacessível por verticais, já que o conjunto acessível por verticais é  $V$  e  $A_i$  está em seu complementar. Além disso, como  $S_i$  é um segmento de reta que é fronteira de  $V$  temos que  $A_i$  está localizado a direita ou a esquerda de  $S_i$ .

Suponhamos que exista um caminho  $\gamma$  em  $U_1$  começando em  $A_i$  e terminando em  $S_j$ , para algum  $j \neq i$ , que não passe por nenhum outro  $S_k$ . Ou seja, estamos supondo, por absurdo, que  $A_i \cap S_j \neq \emptyset$ .



**Figura 3.5:** Esboço para demonstração do Lema 3.3.

Agora, vamos prolongar o caminho  $\gamma$  até um ponto do interior de  $S_i$ . Com isso, obtemos um novo caminho

$$\bar{\gamma} : [0, 1] \longrightarrow U_1$$

tal que  $\bar{\gamma}((0, 1)) \subset U_1 \setminus \cup_k S_k$ ,  $\bar{\gamma}(0) \in \text{int } S_i$ ,  $\bar{\gamma}(1) \in \text{int } S_j$ , para algum  $j \neq i$ . Isto é,  $\bar{\gamma}$  liga  $S_i$  a  $S_j$ .

Consideremos o caminho obtido a partir de  $\bar{\gamma}$  construído da seguinte maneira:

1. Prolongamos  $\bar{\gamma}$  para a esquerda ou para a direita, partindo de  $S_i$ , por um pequeno segmento horizontal em  $V$  terminando em um ponto  $(x_0, y_0)$ . Com isso, o novo caminho estará definido por

$$\bar{\gamma}_1 : [-\epsilon, 1] \longrightarrow U_1$$

que liga um ponto de  $V$  a  $S_j$ .

2. Adicionamos a  $\bar{\gamma}_1$  o segmento vertical  $\{x_0\} \times [a, y_0]$ .

### 3.1. TEOREMA DE BIRKHOFF

---

3. Estendemos  $\bar{\gamma}$  para  $(1, 1 + \epsilon]$  por um pequeno segmento horizontal em  $V$  terminando em um ponto  $(x_1, y_1)$ .
4. Adicionamos o segmento vertical  $\{x_1\} \times [a, y_1]$ .
5. Fechamos o caminho por meio do segmento  $\overline{AB}$  onde  $A = (x_0, a)$  e  $B = (x_1, a)$ .

Pela construção acima, obtemos uma curva  $\Gamma$  simples, fechada em  $U_1$ . Esta curva separa o plano em duas componentes conexas, pelo Teorema da Curva de Jordan.

Consideremos os extremos de  $S_i$ . Por hipótese, eles pertencem a  $\partial U_1$  que é conexa. Por outro lado, pela construção, estão em componentes conexas distintas de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ , contrariando a conexidade.

Logo, não existe caminho em  $U_1$  iniciando em algum ponto de  $A_i$  e finalizando em um ponto do interior do segmento  $S_j$  com  $j \neq i$ . Portanto,

$$A_i \cap S_j = \emptyset.$$

Fazemos a mesma construção supondo  $\partial A_i \cap S_j \neq \emptyset$  e, com isso, concluímos que  $A_i$  é uma componente conexa tal que:

$$\begin{cases} A_i \subset U_1 \setminus V \\ \partial A_i \cap S_j = \emptyset \end{cases}$$

Notemos que, se  $A_i \subset U_1 \setminus S_i$  temos que  $A_i$  é a componente conexa desejada, porém se  $A_i \cap S_i \neq \emptyset$  consideramos a componente conexa  $A'_i \subset A_i$  tal que  $A'_i = A_i \setminus S_i$ . Assim,  $A'_i \cap S_i = \emptyset$  e  $A'_i \subset A_i \subset U_1 \setminus V$ .

E, conseqüentemente,

$$A'_i \subset U_1 \setminus V \text{ e } \partial A'_i \cap S_j = \emptyset$$

sendo  $A'_i$  a componente desejada. ■

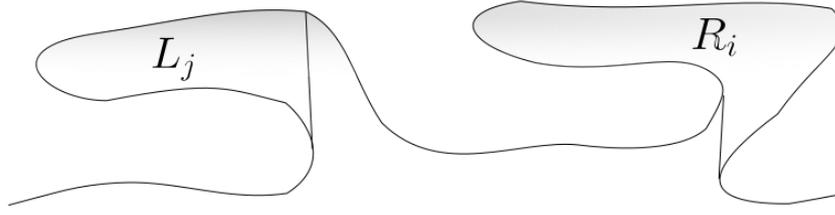
Pelo Lema 3.3 concluímos que,

$$\begin{aligned} Cl_{U_1} A_i &= int A_i \cup \partial_{U_1} A_i \\ &= A_i \cup S_i. \end{aligned}$$

E, assim,

$$\begin{aligned} V \cap Cl_{U_1} A_i &= V \cap (A_i \cup S_i) \\ &= (V \cap A_i) \cup (V \cap S_i) \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

Denotemos por  $R_i$  as componentes conexas de  $U_1 \setminus S_i$  que encontram-se a direita de  $S_i$  e por  $L_j$  as componentes que situam-se a esquerda de  $S_j$ .



**Figura 3.6:** Identificação das componentes  $R_i$  e  $L_j$ .

Definamos

$$R := \cup R_j \text{ e } L := \cup L_k$$

**Afirmção:**  $U_1 = Cl_{U_1}R \cup Cl_{U_1}L \cup V$

Para demonstrar a afirmação, primeiramente mostraremos que  $U_1 = V \cup \left( \bigcup_{i \in I} Cl_{U_1}A_i \right)$ .

Vejamus que se  $p \in U_1$  e  $p \notin Cl_{U_1}V$  então, como  $U_1$  é conexo por caminhos temos que existe um caminho  $\gamma : [0, 1] \rightarrow U_1$  que liga  $p$  a  $q$  onde  $q \in Cl_{U_1}V$  de modo que  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma(1) = q$  e  $\gamma([0, 1)) \subset U_1 \setminus Cl_{U_1}V$ .

Como  $Cl_{U_1}V = V \cup \partial_{U_1}V$  então  $q \in \partial_{U_1}V$ , ou seja,  $q \in S_i$ . Caso contrário, se  $q \in V$  então  $\gamma([0, 1)) \cap \partial_{U_1}V \neq \emptyset$ , o que não pode ocorrer pela construção da  $\gamma$ .

Mas como  $Cl_{U_1}A_i \cup V = A_i \cup S_i \cup V$ , por construção, contém uma vizinhança de  $q$ , concluímos que  $p \in \gamma([0, 1)) \subset A_i$ .

Assim,

$$U_1 = Cl_{U_1}V \cup \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) = V \cup \partial_{U_1}V \cup \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) = V \cup \left( \bigcup_k S_k \right) \cup \left( \bigcup_i A_i \right) = V \cup \left( \bigcup_{i \in I} Cl_{U_1}A_i \right)$$

já que  $Cl_{U_1}A_i = A_i \cup S_i$ .

Agora, notemos que  $Cl_{U_1}A_i$  são componentes conexas de  $U_1 \setminus V$ . De fato, sabemos que  $Cl_{U_1}A_i$  é fechado em  $U_1$  o que implica que  $Cl_{U_1}A_i$  é fechado em  $U_1 \setminus V$ . Além disso,  $Cl_{U_1}A_i$  é aberto em  $U_1 \setminus V$  pois  $V \cup Cl_{U_1}A_i$  contém uma vizinhança de  $\partial_{U_1}A_i$ , ou seja, para qualquer  $q \in \partial_{U_1}A_i$  temos  $B(q, \epsilon) \cap (U_1 \setminus V) \subset Cl_{U_1}A_i$ .

Temos que  $V \cup \left( \bigcup_{j \in J} Cl_{U_1}R_j \right)$  é aberto em  $U_1$ , já que  $V$  é aberto em  $U_1$  e  $Cl_{U_1}R_j$  é aberto em  $U_1 \setminus V$ . E consequentemente seu complementar

$$\begin{aligned} U_1 \setminus \left( V \cup \left( \bigcup_{j \in J} Cl_{U_1}R_j \right) \right) &= (U_1 \setminus V) \cap \left( \bigcap_{j \in J} (U_1 \setminus Cl_{U_1}R_j) \right) \\ &= \bigcup_i Cl_{U_1}L_i \end{aligned}$$

é fechado.

Logo,  $Cl_{U_1}L = \bigcup_i Cl_{U_1}L_i$ . Analogamente, temos que  $Cl_{U_1}R = \bigcup_k Cl_{U_1}R_k$ . Com isso,

concluimos que

$$U_1 = Cl_{U_1}R \cup Cl_{U_1}L \cup V$$

Agora, veremos um lema que mostra o comportamento e a relação entre os conjuntos sob a aplicação da  $F$ .

**Lema 3.4.** *Sob as hipóteses do Teorema de Birkhoff, temos:*

- (1)  $F(V) \cap Cl_{U_1}L_k = \emptyset$ ;
- (2)  $F^{-1}(V) \cap Cl_{U_1}R_k = \emptyset$ ;
- (3)  $F^{-1}(Cl_{U_1}L_k) \cap V = \emptyset$ ;
- (4)  $F^{-1}(Cl_{U_1}L) \cap Cl_{U_1}R = \emptyset$ ;
- (5)  $F(Cl_{U_1}R) \cap Cl_{U_1}L = \emptyset$ ;
- (6)  $F(Cl_{U_1}R) \subsetneq R$ ;
- (7)  $F^{-1}(Cl_{U_1}L) \subsetneq L$ .

**Demonstração:**

(1) Seja  $z = (x, y) \in V$ . Então, pela definição de  $V$ ,  $(x, s) \in V \subset U_1$  onde  $s \in [a, y]$ . Como  $U_1$  é invariante por  $F$ , temos que  $F(x, s) \in U_1, \forall s \in [a, y]$ .

Como  $F$  é do tipo Twist a direita, a curva  $\gamma(s) = F(x, s)$  intersecta cada reta vertical da esquerda para a direita.

As componentes  $L_i$  estão a esquerda de  $S_i$ , então para entrar em  $L_i$  teria que cruzar  $S_i$  da direita para a esquerda. Portanto, se houvesse um ponto  $F(x, s)$  em  $L_i$  e conectássemos a um ponto de  $V$ , analogamente a demonstração do Lema 3.3, construiríamos uma curva fechada  $\Gamma$  de forma que os extremos de  $S_i$  estariam em componentes distintas de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ , contrariando assim a conexidade da fronteira de  $U_1$ .

Logo,  $F(V) \cap L_i = \emptyset$ .

Analogamente, temos que  $F(V) \cap Cl_{U_1}L_i = \emptyset$  já que  $Cl_{U_1}L_i = \text{int } L_i \cup \partial L_i$  e podemos fazer a construção num ponto pertencente a  $\partial L_i$ .

(2) Dado  $(x, y) \in V$  temos que  $(x, s) \in U_1, \forall s \in [a, y]$ . Dessa forma,  $F(x, s) \in U_1, \forall s \in [a, y]$  e, conseqüentemente,  $(x, s) \in F^{-1}(U_1), \forall s \in [a, y]$ .

A função  $F^{-1}(U_1)$  é do tipo Twist a esquerda então a curva  $\gamma(s) = F(x, s)$  intersecta cada reta vertical no sentido da direita para a esquerda. Por definição,  $R_i$  está a esquerda de  $S_i$  então se existir um ponto  $(x, s)$  em  $Cl_{U_1}L_i$ , fazendo uma construção análoga ao item (1) chegaríamos em um absurdo.

Logo,  $F^{-1}(V) \cap Cl_{U_1}R_k = \emptyset$ .

### 3.1. TEOREMA DE BIRKHOFF

---

(3) Suponhamos que  $F^{-1}(Cl_{U_1}L_k) \cap V \neq \emptyset$ . Seja  $z = (x, y) \in F^{-1}(Cl_{U_1}L_k) \cap V$  então obtemos

$$\begin{aligned} F(z) = F(x, y) &\in F(F^{-1}(Cl_{U_1}L_k) \cap V) = F(F^{-1}(Cl_{U_1}L_k)) \cap F(V) \\ &= Cl_{U_1}L_k \cap F(V) \\ &= \emptyset, \end{aligned}$$

o que é um absurdo.

Logo,  $F^{-1}(Cl_{U_1}L_k) \cap V = \emptyset$ .

(4) Suponhamos que  $F^{-1}(Cl_{U_1}L) \cap Cl_{U_1}R \neq \emptyset$ . Sabemos que  $L = \bigcup_k L_k$  e  $R = \bigcup_j R_j$ . Dessa forma,

$$F^{-1}(Cl_{U_1}L_k) \cap Cl_{U_1}(R_i) \neq \emptyset$$

para algum  $i, k \in J$ .

Como  $Cl_{U_1}L_k$  é conexo, pela continuidade da aplicação  $F^{-1}$ , a sua imagem  $F^{-1}(Cl_{U_1}L_k)$  também o é. Assim, como  $Cl_{U_1}R_i$  é também conexo, segue-se necessariamente que

$$F^{-1}(Cl_{U_1}L_k) \subset Cl_{U_1}R_i, \quad (3.1)$$

pois, como  $F^{-1}(Cl_{U_1}L_i) \cap V = \emptyset$ , temos que  $F^{-1}(Cl_{U_1}L_i) \subset Cl_{U_1}L_j$  ou  $F^{-1}(Cl_{U_1}L_i) \subset Cl_{U_1}R_k$ . Mas,  $F^{-1}(Cl_{U_1}L_k) \cap Cl_{U_1}(R_i) \neq \emptyset$  então, segue que  $F^{-1}(Cl_{U_1}L_i) \subset Cl_{U_1}R_k$ .

Como  $F^{-1}$  é tipo Twist para a esquerda, a curva  $F^{-1}(S_k)$  intersecta cada reta vertical no sentido da direita para a esquerda. Mas temos que  $S_i$  é vertical o que implica que  $F^{-1}(S_k)$  intersecta  $S_i$  transversalmente da direita para a esquerda (notemos que esta deverá entrar em  $R_i$  já que a função leva ponto de fronteira em ponto de fronteira). Isto implica que  $F^{-1}(S_k) \cap R_i \neq \emptyset$  e como  $V$  é acessível por semi-retas verticais, logo  $F^{-1}(S_k) \cap V \neq \emptyset$ , o que é um absurdo pois, por (3.1), concluímos que  $F^{-1}(Cl_{U_1}L_k) \subset Cl_{U_1}R$  e, conseqüentemente,  $F^{-1}(S_k) \subset Cl_{U_1}R$ . Mas  $Cl_{U_1}R \cap V = \emptyset$ .

Portanto,  $F^{-1}(Cl_{U_1}L) \cap Cl_{U_1}R = \emptyset$ .

(5) Suponhamos que  $F(Cl_{U_1}R) \cap Cl_{U_1}L \neq \emptyset$ . Analogamente ao item (4), temos que

$$F(Cl_{U_1}R_k) \cap Cl_{U_1}L_i \neq \emptyset$$

para algum  $i, k \in J$ . Como  $Cl_{U_1}R_k$  é conexo e  $F$  é contínua,  $F(Cl_{U_1}R_k)$  é conexo. E, conseqüentemente, como  $Cl_{U_1}L_i$  é conexo temos,

$$F(Cl_{U_1}R_k) \subset Cl_{U_1}L_i.$$

Aplicando argumento análogo ao do item (4), usando o fato de que  $F$  é uma aplicação do tipo Twist a direita, chegaremos a um absurdo e, com isso, concluímos o resultado desejado.

(6) Pelo item (2), temos que  $F^{-1}(V) \cap Cl_{U_1}R_k = \emptyset$  então  $V \cap F(Cl_{U_1}R_k) = \emptyset$  e,

### 3.1. TEOREMA DE BIRKHOFF

---

consequentemente,  $V \cap F(Cl_{U_1}R) = \emptyset$ .

Dessa forma,

$$\begin{aligned} F(Cl_{U_1}R) \subset U_1 \setminus V &= [V \cup Cl_{U_1}R \cup Cl_{U_1}L] \setminus V \\ &= Cl_{U_1}R \cup Cl_{U_1}L \end{aligned}$$

Logo,  $F(Cl_{U_1}R) \subset Cl_{U_1}R \cup Cl_{U_1}L$ .

Mas, pelo item (5),  $F(Cl_{U_1}R) \cap Cl_{U_1}L = \emptyset$ , o que implica que  $F(Cl_{U_1}R) \subset Cl_{U_1}R = R \cup \partial_{U_1}R$ . Como  $F(\partial_{U_1}R)$  é transversal segue que  $F(Cl_{U_1}R) \subseteq R$ . Pois, pela conexidade de  $R_k$  e continuidade da  $F$ , temos que  $F(R_k) \subseteq R_j$  e, além disso,  $F(S_k) \neq S_i, \forall k \neq i$  já que  $F$  é Twist e, portanto, desvia verticais.

Mais ainda,  $F(Cl_{U_1}R) \subsetneq R$  já que  $F$  é um homeomorfismo e  $Cl_{U_1}R$  e  $R$  não são homeomorfos.

(7) A demonstração é análoga a que foi feita no item (6), neste utilizaremos os itens (1) e (4) para encontrar as inclusões. ■

Demonstraremos, agora, que o conjunto  $U_1$  é igual a  $V$  para isso, precisamos mostrar que  $R = \emptyset$  e  $L = \emptyset$ .

**Lema 3.5.**  $U_1 = V$ .

**Demonstração:** Suponhamos que  $R \neq \emptyset$ . Pelo Lema 3.4, temos que  $F(Cl_{U_1}R) \subsetneq R$ , então podemos considerar  $p \in F^{-1}(R \setminus F(Cl_{U_1}R))$ . Sabemos que  $F$  é uma função contínua que preserva área então, pelo Teorema da Recorrência de Poincaré, para toda bola aberta  $B_p$ , contendo  $p$ , existe  $x \in B_p$  que retorna a  $B_p$ , isto é,  $F^n x \in B_p$  para algum  $n > 0$ . Portanto,

$$F^n(B_p) \cap B_p \neq \emptyset.$$

Podemos reduzir a bola o quanto for necessário de modo que

$$B_p \subset F^{-1}(R \setminus F(Cl_{U_1}R)).$$

E, consequentemente,

$$\begin{aligned} F(B_p) &\subset R \setminus F(Cl_{U_1}R) \\ F^2(B_p) &\subset F(R \setminus F(Cl_{U_1}R)) \\ &= F(R) \setminus F^2(Cl_{U_1}R) \\ &\subset F(Cl_{U_1}R) \setminus F^2(Cl_{U_1}R) \text{ pois } R \subset Cl_{U_1}R \\ F^3(B_p) &\subset F^2(Cl_{U_1}R) \setminus F^3(Cl_{U_1}R) \\ &\subset F(R) \setminus F^3(Cl_{U_1}R) \\ &\subset F(Cl_{U_1}R) \setminus F^3(Cl_{U_1}R) \\ &\vdots \\ F^n(B_p) &\subset F(Cl_{U_1}R) \setminus F^n(Cl_{U_1}R). \end{aligned}$$

### 3.1. TEOREMA DE BIRKHOFF

---

Portanto,  $F^n(B_p) \subset F(Cl_{U_1}R) \subset R$ .

Vejamos que se  $q \in F^n(B_p) \cap B_p$  então,  $F(q) \in F^{n+1}(B_p) \cap F(B_p)$ . Logo,

$$F(q) \in F(Cl_{U_1}R) \quad (3.2)$$

Além disso, temos que  $F(q) \in F(B_p)$ , mas  $F(B_p) \subset R \setminus F(Cl_{U_1}R)$ . Assim,

$$F(q) \notin F(Cl_{U_1}R). \quad (3.3)$$

Por (3.2) e (3.3) chegamos em um absurdo. Portanto,  $R \neq \emptyset$ .

Agora, suponhamos que  $L \neq \emptyset$ . Pelo item (7), temos que  $F^{-1}(Cl_{U_1}L) \subsetneq L$ . Além disso,  $F^{-1}$  é contínua. Analogamente ao que foi feito no caso anterior, consideremos  $p \in F(L \setminus F^{-1}(Cl_{U_1}L))$ . Pelo Teorema da Recorrência de Poincaré, para toda vizinhança  $B_p$ , contendo  $p$ , existe  $x \in B_p$  tal que

$$(F^{-1})^n(B_p) \cap B_p \neq \emptyset.$$

Podemos reduzir  $B_p$  de forma que,

$$B_p \subset F(L \setminus F^{-1}(Cl_{U_1}L)).$$

Assim,

$$\begin{aligned} F^{-1}(B_p) &\subset L \setminus F^{-1}(Cl_{U_1}L) \\ F^{-2}(B_p) &\subset F^{-1}(Cl_{U_1}L) \setminus F^{-2}(Cl_{U_1}L) \\ &\vdots \\ F^{-n}(B_p) &\subset F^{-1}(Cl_{U_1}L) \setminus F^{-n}(Cl_{U_1}L) \\ &\subset F^{-1}(Cl_{U_1}L) \subset L. \end{aligned}$$

Se  $q \in F^{-n}(B_p) \cap B_p$  então  $F^{-1}(q) \in F^{-n-1}(B_p) \cap F^{-1}(B_p)$ . E, conseqüentemente,  $F^{-1}(q) \in F^{-1}(Cl_{U_1}L)$  e  $F^{-1}(q) \in F^{-1}(B_p) \subset L \setminus F^{-1}(Cl_{U_1}L)$ , o que é um absurdo. Logo,  $L \neq \emptyset$ .

Então temos que  $U_1 = V$ , ou seja, todo ponto de  $U_1$  é acessível por retas verticais. ■

Agora, resta-nos observar que  $\partial U_1$  não contém segmento vertical. Notemos que, se  $p$  for ponto interior de um segmento  $S \subset \partial U_1$ , pela condição Twist, os pontos que não são acessíveis por verticais seriam levados por  $F$  em pontos acessíveis.

Com isso, concluímos que  $\partial U_1$  é o gráfico de uma função contínua

$$\phi_1(x) = \sup \{y; x \times (-\infty, y) \subset U_1\}$$

tal que  $\phi_1(x+1) = \phi_1(x)$ .

**Lema 3.6.**  $\phi_1(x)$  é uma função Lipschitz.

### 3.1. TEOREMA DE BIRKHOFF

---

**Demonstração:** Temos que a imagem de uma vertical por uma aplicação Twist monótona é um gráfico. Suponhamos que  $F$  seja do tipo Twist a direita, então existe um  $\delta > 0$  tal que  $\partial_2 F_1 > \delta$  em uma vizinhança de  $\partial U_1 = \text{graf } \phi_1$ .

Consideremos o par de pontos  $(x_0, \phi_1(x_0))$  e  $(\bar{x}_0, \phi_1(\bar{x}_0))$  com  $x_0 < \bar{x}_0$ .

Se  $\phi_1(x_0) > \phi_1(\bar{x}_0)$  então, pelo Teorema do Valor Médio temos que,

$$\begin{aligned} F_1(\bar{x}_0, \phi_1(x_0)) - F_1(\bar{x}_0, \phi_1(\bar{x}_0)) &= \partial_2 F_1(\phi_1(x_0) - \phi_1(\bar{x}_0)) \\ &> \delta(\phi_1(x_0) - \phi_1(\bar{x}_0)). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Mas,

$$F_1(\bar{x}_0, \phi_1(x_0)) - F_1(x_0, \phi_1(x_0)) < L(\bar{x}_0 - x_0) \quad (3.5)$$

já que  $\phi_1$  e a derivada de  $F_1$  são contínuas ( $\partial F_1$  é limitada pois  $U_1$  é limitado).

Sabemos que  $x \mapsto F_1(x, \phi_1(x))$  é monótona, uma vez que  $F$  é uma aplicação Twist monótona, então como  $\bar{x}_0 > x_0$  temos,

$$F_1(\bar{x}_0, \phi_1(\bar{x}_0)) > F_1(x_0, \phi_1(x_0)). \quad (3.6)$$

Então obtemos,

$$\begin{aligned} F_1(\bar{x}_0, \phi_1(x_0)) - L(\bar{x}_0 - x_0) &< F_1(x_0, \phi_1(x_0)) \quad (\text{por (3.5)}) \\ &< F_1(\bar{x}_0, \phi_1(\bar{x}_0)) \quad (\text{por (3.6)}) \\ &< F_1(\bar{x}_0, \phi_1(x_0)) - \delta(\phi_1(x_0) - \phi_1(\bar{x}_0)) \quad (\text{por (3.4)}) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\phi_1(x_0) - \phi_1(\bar{x}_0) < L\delta^{-1}(\bar{x}_0 - x_0).$$

Notemos que se  $\phi_1(x_0) < \phi_1(\bar{x}_0)$  repetimos o mesmo processo usando  $F^{-1}$  e, consequentemente, obtemos

$$\phi_1(\bar{x}_0) - \phi_1(x_0) < L'\delta'^{-1}(x_0 - \bar{x}_0).$$

Com isso, concluímos que  $\phi_1$  é uma função Lipschitz. ■

Temos que  $F$  é levantamento de  $f$ , preservando propriedades. Como  $\phi_1$  é periódica obtemos que  $\partial U$  será o gráfico de uma função Lipschitz  $\phi$ , definida em  $S^1$ . ■

Decorre deste teorema o seguinte resultado.

**Corolário 3.1.** *Se  $\gamma$  é uma curva rotacional invariante por uma  $f : C \rightarrow C$  projeção de uma aplicação Twist monótona, então  $\gamma$  é gráfico de uma função Lipschitz.*

## Capítulo 4

# Órbitas periódicas e rotações no círculo

Neste capítulo abordaremos alguns conceitos e principais resultados relacionados a órbitas periódicas do tipo  $(m, n)$ , rotações no círculo e número de rotação. Provaremos que nenhum ponto do círculo tem órbita periódica sob rotação irracional e, equivalentemente, que todo ponto do círculo tem órbita periódica sob rotação racional. Além disso, demonstraremos que se tivermos um homeomorfismo  $f : S^1 \rightarrow S^1$  que preserva orientação e  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  um levantamento de  $f$ . Então  $\rho(F) := \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{1}{n}(F^n(x) - x)$  existe para todo  $x \in \mathbb{R}$ .  $\rho(F)$  é independente de  $x$  e está bem definida a menos de um inteiro. E, mais ainda,  $f$  tem um ponto periódico se, e somente se,  $\rho(F)$  é racional. O número  $\rho(f) := [\rho(F)]$  será chamado de **número de rotação**.

### 4.1 Definições e generalidades

Iniciaremos esta seção com algumas definições preliminares para que em seguida vejamos alguns resultados.

**Definição 4.1.** Seja  $f : D \rightarrow D$  uma aplicação contínua tal que  $D$  é um espaço métrico. Dizemos que  $x \in D$  é um **ponto periódico** de período  $p$  se  $p$  é o menor inteiro tal que  $f^p(x) = x$ . Quando  $p = 1$ ,  $f(x) = x$ , dizemos que  $x$  é um **ponto fixo** para  $f$ .

**Definição 4.2.** Uma sequência  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ ,  $x_k$  pertencente a um domínio  $D$  é chamada de **órbita** para uma função  $g : D \rightarrow D$  quando  $g(x_k) = x_{k+1}$  para todo  $k \in \mathbb{Z}_+$ .

**Definição 4.3.** Se  $x$  é um ponto periódico então sua órbita  $x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x)$  é um conjunto finito, conhecido como **órbita periódica**.

**Definição 4.4.** Dizemos que a órbita periódica é do tipo  $(m, n)$  se

$$x_{k+n} = x_k + m,$$

para qualquer  $k \in \mathbb{Z}_+$  onde  $n$  é o período da órbita e  $m$  é o número de voltas, positivo ou negativo, que a órbita dá no cilindro  $C = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ .

**Definição 4.5.** Seja  $\{(x_k, y_k)\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$  uma órbita qualquer de  $F$ , levantamento de uma aplicação do tipo Twist  $f$ . Definimos o **número de rotação**  $\rho$ , dessa órbita, como sendo

$$\rho = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k - x_0}{k} = \lim_{k \rightarrow -\infty} \frac{x_k - x_0}{k},$$

quando os limites existirem e forem iguais.

**Proposição 4.1.** *Uma órbita do tipo  $(m, n)$  tem número de rotação  $\frac{m}{n}$ .*

**Demonstração:** Seja  $\{(x_k, y_k)\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$  uma órbita do tipo  $(m, n)$ . Mostraremos que fixado um natural  $r$  entre 0 e  $n$ , a sequência

$$\left\{ \frac{x_{r+qn} - x_0}{r + qn} \right\}$$

com  $q \in \mathbb{N}$  converge para  $\frac{m}{n}$ .

De fato, por definição, temos que

$$\begin{aligned} x_{r+qn} &= x_{r+(q-1)n+n} \\ &= x_{r+(q-1)n} + m \\ &= \dots \\ &= x_r + qm. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{q \rightarrow \pm\infty} \frac{x_{r+qn} - x_0}{r + qn} = \lim_{q \rightarrow \pm\infty} \frac{x_r + qm - x_0}{r + qn} = \frac{m}{n}.$$

Com isso, temos que

$$\rho = \frac{m}{n}.$$

■

**Observação 4.1.** Caso o número de rotação exista, ele mede a velocidade angular média (ângulo/iteração) na qual a órbita dá voltas no cilindro.

**Definição 4.6.** Consideremos  $\{(x_k, y_k)\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$  uma órbita do tipo  $(m, n)$ . A **ação** associada a ela é definida por

$$\Omega_{m,n} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

que é a função  $\Omega = \sum_k h(x_k, x_{k+1})$  restrita a configurações finitas. Ou seja,

$$\Omega_{m,n}(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = h(x_0, x_1) + h(x_1, x_2) + \dots + h(x_{n-1}, x_0 + m)$$

onde  $h$  é a função geradora de  $F$ .

**Definição 4.7.** Dizemos que uma configuração  $\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots$ , é **estacionária**, no sentido de seus segmentos serem pontos críticos de  $\Omega$ , se seus elementos satisfazem

$$\partial_2 h(x_{k-1}, x_k) + \partial_1 h(x_k, x_{k+1}) = 0.$$

**Proposição 4.2.** *A sequência  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$  é uma configuração estacionária se, e somente se,  $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$  é ponto crítico de  $\Omega_{m,n}$ .*

**Demonstração:** Sabemos que

$$\begin{aligned}\Omega_{m,n}(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) &= h(x_0, x_1) + h(x_1, x_2) + \dots + h(x_{n-1}, x_0 + m) \\ &= \sum_{i=0}^{n-2} h(x_i, x_{i+1}) + h(x_{n-1}, x_0 + m)\end{aligned}$$

então,

$$\frac{\partial \Omega_{m,n}}{\partial x_i} = \sum_{i=0}^{n-2} \frac{\partial h(x_i, x_{i+1})}{\partial x_i} + \frac{\partial h(x_{n-1}, x_0 + m)}{\partial x_i}.$$

Notemos que,

- se  $i \neq 0, n-1$ ,

$$\frac{\partial \Omega_{m,n}}{\partial x_i} = \frac{\partial h(x_{i-1}, x_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial h(x_i, x_{i+1})}{\partial x_i};$$

- se  $i = 0$ ,

$$\frac{\partial \Omega_{m,n}}{\partial x_i} = \frac{\partial h(x_0, x_1)}{\partial x_0} + \frac{\partial h(x_{n-1}, x_0 + m)}{\partial x_0};$$

- se  $i = n-1$ ,

$$\frac{\partial \Omega_{m,n}}{\partial x_i} = \frac{\partial h(x_{n-2}, x_{n-1})}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial h(x_{n-1}, x_0 + m)}{\partial x_{n-1}}.$$

Portanto, a sequência é estacionária para  $\Omega$  se, e somente se,  $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$  é ponto crítico de  $\Omega_{m,n}$ . ■

Esta proposição nos assegura que procurar órbitas periódicas tipo  $(m, n)$  de  $F$  é equivalente a procurar pontos críticos de  $\Omega_{m,n}$ .

Agora consideremos a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{aligned}s &= x_0 \\ \eta_1 &= x_1 - x_0 \\ \eta_2 &= x_2 - x_1 \\ &\vdots \\ \eta_{n-1} &= x_{n-1} - x_{n-2},\end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned}x_0 &= s \\ x_1 &= \eta_1 + s \\ x_2 &= \eta_1 + \eta_2 + s \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_{n-1} + s.\end{aligned}$$

Reescrevendo a expressão para  $\Omega_{m,n}$ , obtemos

$$\begin{aligned} \Omega_{m,n}(s, \eta_1 + s, \eta_1 + \eta_2 + s, \dots, \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_{n-1} + s) = & h(s, \eta_1 + s) + h(\eta_1 + s, \eta_1 + \eta_2 + s) \\ & + \dots + h(\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_{n-1} + s, s + m). \end{aligned}$$

**Proposição 4.3.**  $\Omega_{m,n}(s, \eta)$  é 1-periódica na variável  $s$ .

**Demonstração:** Precisamos mostrar que  $\Omega_{m,n}(s + 1, \eta) = \Omega_{m,n}(s, \eta)$ .

Notemos que,

$$\begin{aligned} \Omega_{m,n}(s + 1, \eta) &= \Omega_{m,n}(s + 1, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}) \\ &= h(s + 1, \eta_1 + s + 1) + h(\eta_1 + s + 1, \eta_1 + \eta_2 + s + 1) + \dots + \\ &\quad h(\eta_1 + \dots + \eta_{n-1} + s + 1, s + m + 1) \\ &= h(s, \eta_1 + s) + h(\eta_1 + s, \eta_1 + \eta_2 + s) + \dots + h(\eta_1 + \dots + \eta_{n-1} + s, s + m) \\ &= \Omega_{m,n}(s, \eta), \end{aligned}$$

já que  $h(s + 1, t + 1) = h(s, t)$ .

Portanto  $\Omega_{m,n}(s, \eta)$  é 1-periódica. ■

**Definição 4.8.** Consideremos

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \\ s &\mapsto \theta = s \pmod{1}. \end{aligned}$$

uma aplicação de recobrimento do círculo. Definamos a função  $\hat{\Omega}_{m,n}$  da seguinte forma:

$$\hat{\Omega}_{m,n}(\theta, \eta) := \Omega_{m,n}(s, \eta).$$

Então podemos escrever  $\hat{\Omega}_{m,n}$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_{m,n} : C_{m,n} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\theta, \eta) &\mapsto \hat{\Omega}_{m,n}(\theta, \eta) = \Omega_{m,n}(s, \eta) \end{aligned}$$

onde  $C_{m,n} = \{(\theta, \eta); \theta \in S^1, \eta \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ .

**Proposição 4.4.** *Sejam  $F$  um levantamento de uma função  $f$  e  $h$  uma função geradora de  $F$ . Temos que a seguinte desigualdade é satisfeita:*

$$h(x_0, x_1) \geq \frac{c}{2}(x_1 - x_0)^2$$

onde  $c > 0$  é a constante de Twist.

**Demonstração:** Observemos que

$$\begin{aligned}
 \int_{x_0}^{x_1} \int_s^{x_1} -\frac{\partial^2 h(s, t)}{\partial s \partial t} dt ds &= \int_{x_0}^{x_1} \int_s^{x_1} -\frac{\partial^2 h(s, t)}{\partial t \partial s} dt ds \\
 &= -\left( \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial h(s, x_1)}{\partial s} - \frac{\partial h(s, s)}{\partial s} ds \right) \\
 &= -\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial h(s, x_1)}{\partial s} ds + \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial h(s, s)}{\partial s} ds \\
 &= -h(x_1, x_1) + h(x_0, x_1) + h(x_1, x_1) - h(x_0, x_0) \\
 &= h(x_0, x_1) - h(x_0, x_0),
 \end{aligned}$$

já que  $h$  satisfaz as hipóteses do Teorema de Leibniz. Dessa forma,

$$h(x_0, x_1) = h(x_0, x_0) + \int_{x_0}^{x_1} \int_s^{x_1} -\frac{\partial^2 h(s, t)}{\partial s \partial t} dt ds.$$

Como  $-\frac{\partial^2 h(s, t)}{\partial s \partial t} \geq c$ , temos, pela monotonicidade das integrais, que

$$h(x_0, x_1) \geq h(x_0, x_0) + c \int_{x_0}^{x_1} \int_s^{x_1} dt ds.$$

Resolvendo a integral, obtemos

$$h(x_0, x_1) \geq \frac{c}{2}(x_1 - x_0)^2,$$

uma vez que  $h(x_0, x_0) \geq 0$ . ■

**Proposição 4.5.**  $\hat{\Omega}_{m,n}(\theta, \eta) = \Omega_{m,n}(s, \eta) \geq \frac{c}{2}[\eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_{n-1}^2 + (\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_{n-1} - m)^2]$ .

**Demonstração:** De fato, pela Proposição 4.4 temos

$$\begin{aligned}
 \hat{\Omega}_{m,n}(\theta, \eta) &= \Omega_{m,n}(s, \eta) \\
 &= h(s, \eta_1 + s) + h(\eta_1 + s, \eta_1 + \eta_2 + s) + \dots + h(\eta_1 + \dots + \eta_{n-1} + s, s + m) \\
 &\geq \frac{c}{2}(\eta_1 + s - s)^2 + \frac{c}{2}(\eta_1 + \eta_2 + s - \eta_1 - s)^2 + \dots + \\
 &\quad \frac{c}{2}(s + m - \eta_1 - \eta_2 - \dots - \eta_{n-1} - s)^2 \\
 &= \frac{c}{2}[\eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_{n-1}^2 + (m - \eta_1 - \eta_2 - \dots - \eta_{n-1})^2] \\
 &= \frac{c}{2}[\eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_{n-1}^2 + (\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_{n-1} - m)^2]
 \end{aligned}$$

onde  $c$  é a constante Twist. ■

**Lema 4.1.** A função  $\hat{\Omega}_{m,n}$  (ou  $\Omega_{m,n}$ ) possui um ponto de mínimo global, que será denotado por  $p$ .

## 4.2. ROTAÇÕES NO CÍRCULO

**Demonstração:** Dado  $b \in \mathbb{R}$ , consideremos  $\mathcal{F}_b = \{(\theta, \eta); \hat{\Omega}_{m,n}(\theta, \eta) \leq b\}$ . Afirmamos que  $\mathcal{F}_b$  é compacto.

Temos que a função  $\hat{\Omega}_{m,n}$  é contínua, logo  $\mathcal{F}_b$  é fechado já que  $\mathcal{F}_b = (\Omega_{m,n}^{-1}(b, +\infty))^c$  e  $\Omega_{m,n}^{-1}(b, +\infty)$  é aberto pois é pré-imagem de uma função contínua.

Além disso,  $\mathcal{F}_b$  é limitado. De fato, se não existir  $R > 0$  tal que  $\|\eta\|_S \leq R$  em  $\mathcal{F}_b$ , onde  $\|\cdot\|_S$  é a norma da soma, teremos  $\|\eta_i\|$  crescendo indefinidamente para algum  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ . Mas, sabemos que

$$\hat{\Omega}_{m,n}(\theta, \eta) \geq \frac{c}{2}[\eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_{n-1}^2 + (\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_{n-1} - m)^2],$$

então,

$$\hat{\Omega}_{m,n}(\theta, \eta) \longrightarrow +\infty.$$

Isto é um absurdo pois  $\hat{\Omega}_{m,n}(\theta, \eta) \leq b$ . Logo,

$$\mathcal{F}_b \subset S^1 \times Cl(B_R(0)),$$

para algum  $R > 0$ . Portanto,  $\mathcal{F}_b$  é compacto.

Como  $\hat{\Omega}_{m,n}$  é contínua temos que ela possui mínimo global em  $\mathcal{F}_b$  e, conseqüentemente, em  $C_{m,n}$ . ■

## 4.2 Rotações no círculo

Para representar o círculo podemos utilizar a notação multiplicativa

$$\begin{aligned} S^1 &= \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} \\ &= \{e^{2\pi i \phi}; \phi \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\cos 2\pi t, \text{sen } 2\pi t) \in \mathbb{R}^2; t \in [0, 1]\}, \end{aligned}$$

ou a notação aditiva

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

Denotaremos por  $R_\alpha$  a rotação por um ângulo  $2\pi\alpha$ ,

$$\begin{aligned} R_\alpha : S^1 &\longrightarrow S^1 \\ x &\mapsto x + \alpha \pmod{1}. \end{aligned}$$

As iteradas de uma rotação será dada por

$$R_\alpha^n(x) = x + n\alpha \pmod{1}.$$

Analogamente, dados  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  temos

$$R_\alpha \circ R_\beta(x) = x + (\alpha + \beta) \pmod{1}.$$

**Observação 4.2.** Se  $\alpha \in \mathbb{Q}$  podemos escrever da forma  $\alpha = \frac{p}{q}$  com  $p, q \in \mathbb{Z}$ . Logo,

$$R_\alpha^n(x) = x + n\frac{p}{q} \pmod{1}.$$

Fazendo  $n = q$ , obtemos

$$R_\alpha^n(x) = x + np \pmod{1} = x.$$

E, conseqüentemente  $R_\alpha^q$  é a transformação identidade. Com isso concluímos que todo ponto do círculo tem órbita periódica sob rotação racional.

Para analisarmos o caso em que  $\alpha$  é irracional precisamos das seguintes definições.

**Definição 4.9.** Um sistema dinâmico  $\Sigma = (X, \sigma)$  é um par consistindo de um espaço topológico compacto ou localmente compacto de Hausdorff  $X$  e um homeomorfismo  $\sigma : X \rightarrow X$ .

**Definição 4.10.** Um sistema dinâmico topológico invertível  $f : X \rightarrow X$  diz-se **topologicamente transitivo** se existe um ponto  $x \in X$  tal que sua órbita

$$\mathcal{O}_f(x) := \{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

é densa em  $X$ .

**Definição 4.11.** Um sistema dinâmico topológico  $f : X \rightarrow X$  é dito **minimal** se a órbita de qualquer ponto  $x \in X$  é densa em  $X$  ou ainda se  $f$  não tem conjuntos invariantes fechados próprios.

**Proposição 4.6.** *Se  $\alpha$  é irracional então a rotação é minimal.*

**Demonstração:** Consideremos  $x, z \in S^1$ . Precisamos mostrar que a semi-órbita positiva de  $x$  é densa. Para isso, provaremos que  $z$  pertence ao fecho de  $\{R_\alpha^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ .

Fixemos  $\epsilon > 0$ . Vamos pensar no círculo como o intervalo  $[0, 1)$  e dividi-lo em intervalos menores iguais entre si. Dado um inteiro  $m$ , para todo  $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$  consideremos os intervalos  $I_k := [\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m})$ .

O comprimento dos intervalos  $I_k$  é  $\frac{1}{m}$ . Se escolhermos  $m$  suficientemente grande, teremos  $\frac{1}{m} < \epsilon$ . Como nenhum ponto de  $S^1$  tem órbita periódica, pelo princípio da casa dos pombos, deve existir dois iterados de  $x$  em um mesmo intervalo.

Consideremos  $R_\alpha^l(x)$  e  $R_\alpha^p(x)$  os iterados. Então,

$$d(R_\alpha^p(x), R_\alpha^l(x)) < \frac{1}{m} < \epsilon,$$

supondo  $p > l$ .

Com isso,

$$d(R_\alpha^{p-l}(x), x) < \epsilon \tag{4.1}$$

pois  $R_\alpha^{-l}$  preserva distância.

Veamos que se  $y \in S^1$  então  $y = R_{y-x}(x)$  e

$$\begin{aligned} d(R_\alpha^{p-l}(y), y) &= d(R_\alpha^{p-l}(R_{y-x}(x)), R_{y-x}(x)) \\ &= d(R_{(p-l)\alpha+y-x}(x), R_{y-x}(x)) \\ &= d(R_{y-x}(R_\alpha^{p-l}(x)), R_{y-x}(x)) \\ &= d(R_\alpha^{p-l}(x), x) . \end{aligned}$$

Seja  $\theta \in [\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$  tal que  $\theta = (p-l)\alpha \pmod{1}$ . Então, como

$$\epsilon > d(R_\alpha^{p-l}(x), x) = d(x + \alpha(p-l) \pmod{1}, x) = |x + \theta - x| = |\theta| =: \rho$$

temos  $\rho < \epsilon$  e  $R_\alpha^{p-l} = R_\theta$ .

Seja  $N = \lfloor \frac{1}{\rho} \rfloor + 1$ . O conjunto  $\{R_{j\theta}(x); j = 0, 1, \dots, N\}$  de semi-órbitas positivas de  $x$  divide o círculo em intervalos de comprimento  $\rho < \epsilon$ . Logo, qualquer elemento de  $S^1$  está em um desses intervalos. Assim, existe  $n \leq N(p-l)$  tal que

$$\begin{aligned} d(R_\alpha^n(x), z) &\leq d(R_\alpha^{N(p-l)}(x), z) \\ &\leq d(R_\alpha^{N(p-l)}(x), R_{j\theta}(x)) \\ &= d(R_\alpha^{N(p-l)}(x), R_{j\alpha}^{p-l}(x)) \\ &= d(R_\alpha^N(x), R_\alpha^j(x)) \\ &= d(R_\alpha^{N-j}(x), x) \\ &\leq (N-j)\rho \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

■

**Teorema 4.1.** *Nenhum ponto do círculo tem órbita periódica sob rotação irracional.*

**Demonstração:** Sejam  $x$  um ponto do círculo e  $\alpha$  um número irracional associado à rotação  $R_\alpha$ . Observemos que, se houvesse algum inteiro  $n$  tal que  $R_\alpha^n(x) = x$ , como  $R_\alpha^n(x) = x + n\alpha \pmod{1}$ , teríamos  $n\alpha$  inteiro. O que não pode ocorrer.

■

### 4.3 Número de Rotação

Consideremos a projeção

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

onde  $[x]$  é a classe de equivalência de  $x$  em  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

**Proposição 4.7.** *Se  $f : S^1 \longrightarrow S^1$  é contínua então existe uma função contínua  $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ , chamado de levantamento de  $f$  para  $\mathbb{R}$ , tal que*

$$f \circ \pi = \pi \circ F,$$

### 4.3. NÚMERO DE ROTAÇÃO

---

ou seja,  $F([z]) = [F(z)]$ . Este levantamento é único a menos de uma constante inteira, e  $\deg(f) := F(x+1) - F(x)$  é um inteiro independente de  $x \in \mathbb{R}$  e do levantamento  $F$ . Este é chamado de **grau de  $f$** . Se  $f$  é um homeomorfismo então  $|\deg(f)| = 1$ .

**Demonstração:** Ver em [7]. ■

**Lema 4.2.** Se  $f$  preserva homomorfismo no círculo e  $F$  é um levantamento, então  $F(y) - y \leq F(x) - x + 1$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Demonstração:** Ver em [7]. ■

**Lema 4.3.** Se a sequencia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  satisfaz  $a_{m+n} \leq a_n + a_{m+k} + L$  para todo  $m, n \in \mathbb{N}$  e algum  $k$  e  $L$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  existe.

**Demonstração:** Ver em [7]. ■

Inicialmente, veremos algumas propriedades do levantamento.

**Propriedades:** Sejam  $f : S^1 \rightarrow S^1$  contínua,  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  levantamento de  $f$ .

(i) Se  $F$  é levantamento então  $F + k$  é levantamento para todo  $k \in \mathbb{Z}$ .

De fato, como  $F$  é contínua  $F + k$  também é contínua, para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Além disso,

$$\pi \circ (F + k) = \pi \circ F = f \circ \pi.$$

(ii)  $F(x + m) = F(x) + m \deg f$  tal que  $m \in \mathbb{Z}$ .

Com efeito,

$$\begin{aligned} F(x + m) &= F(x + m - 1) + \deg f \\ &= F(x + m - 2) + 2 \deg f \\ &= F(x + m - 3) + 3 \deg f \end{aligned}$$

já que  $F(x + 1) - F(x) = \deg f$ .

Portanto,  $F(x + m) = F(x + m - m) + m \deg f = F(x) + m \deg f$ .

(iii)  $F^n(x + m) = F^n(x) + m(\deg f)^n$  tal que  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

De fato,

$$\begin{aligned} F^n(x + m) &= F^{n-1}(F(x + m)) \\ &= F^{n-1}(F(x) + m(\deg f)) \\ &= F^{n-2}(F(F(x) + m(\deg f))) \\ &= F^{n-2}(F^2(x) + m(\deg f)^2) \text{ (por (ii)).} \end{aligned}$$

Por indução, segue que  $F^n(x + m) = F^{n-n}(F^n(x) + m(\deg f)^n) = F^n(x) + m(\deg f)^n$ .

(iv)  $F^n$  é levantamento de  $f^n$ .

Com efeito, faremos a demonstração por indução. Observemos que para  $n = 1$  a afirmação é verdadeira, por hipótese. Suponhamos que a propriedade seja válida para todo inteiro maior ou igual a 1 e menor que  $n$ .

Pela definição de levantamento e por hipótese de indução, temos que

$$\pi \circ F^n = (\pi \circ F^{n-1}) \circ F = (f^{n-1} \circ \pi) \circ F = f^{n-1} \circ (\pi \circ F) = f^{n-1} \circ f \circ \pi = f^n \circ \pi.$$

Logo,  $F^n$  é levantamento de  $f^n$ .

(v) Se  $\deg f = 1$  então  $F$  é crescente.

Como  $\deg f = 1$  segue que  $F(x+1) = 1 + F(x)$ . Então,

$$F(x) < F(x+1). \quad (4.2)$$

Suponhamos que  $F$  não seja crescente. Dessa forma, existe  $y \in (x, x+1)$  tal que

$$F(y) > F(x+1) > F(x),$$

por (4.2).

Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe  $z \in (x, y)$  tal que  $F(z) = F(x+1)$ . Mas,  $F(x+1) = F(x) + 1$  implica que  $F(z) = F(x) + 1$ . Assim,  $[F(z)] = [F(x)]$ .

Como  $\pi \circ F = f \circ \pi$  temos  $f([z]) = [F(z)] = [F(x)] = f([x])$ . E, sabendo que  $f$  é homeomorfismo, segue que  $f$  é inversível e, portanto, injetiva. Logo,  $z = x + n$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ . O que gera um absurdo pois  $z \in (x, y)$ .

Sendo assim,  $F$  é crescente.

**Proposição 4.8.** *Seja  $f : S^1 \rightarrow S^1$  um homeomorfismo que preserva orientação e  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  um levantamento de  $f$ . Então*

$$\rho(F) := \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (F^n(x) - x)$$

existe para todo  $x \in \mathbb{R}$ .  $\rho(F)$  é independente de  $x$  e está bem definida a menos de um inteiro. Se  $f$  tiver um ponto periódico então  $\rho(F)$  é racional. Vale a recíproca.

$\rho(f) := [\rho(F)]$  é chamado de **número de rotação**.

**Demonstração:** Vejamos que,

(i)  $\rho(F)$  independe de  $x$ .

Por hipótese,  $f$  é um homomorfismo que preserva orientação dessa forma  $\deg f = 1$ , isto é,  $F(x+1) = F(x) + 1$ .

Além disso, para  $x, y \in [0, 1)$  temos  $|F(y) - F(x)| < 1$ . De fato, se  $x, y \in [0, 1)$  então  $|y-x| < 1$ . Por um lado, como  $y-x \leq |y-x|$  segue que  $y-x < 1$  e, portanto,  $y < x+1$ . Daí, como  $F$  é crescente, aplicando  $F$  em ambos os lados da desigualdade, temos  $F(y) < F(x+1) = F(x)+1$ . Logo,  $F(y) - F(x) < 1$ . Por outro lado, como  $-y+x \leq |y-x|$  temos que  $-y+x < 1$  e, conseqüentemente,  $x < y+1$ . Aplicando  $F$  em ambos os lados,  $F(x) < F(y+1) = F(y)+1$ . Dessa forma,

$$|F(y) - F(x)| < 1.$$

Analogamente fazemos para  $F^n$  e concluímos que

$$|F^n(y) - F^n(x)| < 1.$$

### 4.3. NÚMERO DE ROTAÇÃO

---

Consequentemente,

$$\left| \frac{1}{n}(F^n(x) - x) - \frac{1}{n}(F^n(y) - y) \right| \leq \frac{1}{n}|F^n(x) - F^n(y)| + |x - y| \leq \frac{2}{n}$$

e os números de rotação de  $x$  e  $y$  coincidem.

(ii)  $\rho(F)$  existe.

Consideremos  $x \in \mathbb{R}$  e  $x_n = F^n(x)$ ,  $a_n := x_n - x$  e  $k = [a_n]$ . Então,

$$\begin{aligned} a_{m+n} &= F^{m+n}(x) - x \\ &= F^m(x_n) - x \\ &= F^m(F^n(x)) - F^n(x) + F^n(x) - x \\ &= F^m(F^n(x)) - F^n(x) + a_n. \end{aligned}$$

Mas se denotarmos  $y = F^n(x)$  e utilizarmos o Lema 4.2 aplicado a  $F^m$  obtemos que  $F^m(F^n(x)) - F^n(x) \leq F^m(x) - x + 1$ . Logo,

$$a_{m+n} \leq a_m + a_n + 1.$$

Pelo Lema 4.3, o limite  $\frac{a_n}{n}$  existe. Mas

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{n} &= \frac{x_n - x}{n} \\ &= \frac{F^n(x) - x}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (F^{i+1}(x) - F^i(x)) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (F(x_i) - F(x_i)) \\ &\geq \min_{0 \leq y \leq 1} F(y) - y. \end{aligned}$$

Portanto a sequência  $\frac{a_n}{n}$  é minorada e, consequentemente, o limite de  $\frac{a_n}{n}$  pertence aos reais. Denotaremos esse limite por  $\rho(F)$ . Além disso,

$$\rho(F + m) = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) + nm - x}{n} = \rho(F) + m$$

já que, por indução,

$$\begin{aligned} (F + m)^n(x) &= (F + m)^{n-1}((F + m)(x)) = (F + m)^{n-1}(F(x) + m) \\ &= (F + m)^{n-1}(F(x)) + m = \dots = F^n(x) + nm. \end{aligned}$$

(Como  $F$  é homomorfismo que preserva orientação  $F + m$  também é e, consequentemente,  $(F + m)^n$  é homomorfismo que preserva orientação.)

Com isso, concluímos que  $\rho(F)$  está bem definida (mod 1).

### 4.3. NÚMERO DE ROTAÇÃO

Agora, mostraremos que se  $f$  tiver um ponto periódico então  $\rho(F)$  é racional. Como  $f$  tem um ponto periódico com período  $q$ , existe  $x \in \mathbb{R}$  tal que  $f^q(\pi(x)) = \pi(x)$ . Sabendo que  $F$  é um levantamento de  $f$ , vimos que  $F^q$  é um levantamento de  $f^q$ , logo  $\pi \circ F^q = f^q \circ \pi$ . Daí,  $\pi(F^q(x)) = f^q(\pi(x)) = \pi(x)$ , isto é,  $\pi(F^q(x)) = \pi(x)$  e, portanto,  $[F^q(x)] = [x]$ . Então,  $F^q(x) = x + p$  onde  $p \in \mathbb{Z}$ . Para todo  $m$ ,

$$\begin{aligned} \rho(F) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{F^{mq}(x) - x}{mq} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{mq} \sum_{i=0}^{m-1} (F^q(F^{iq}(x)) - F^{iq}(x)) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{mq} \sum_{i=0}^{m-1} p \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{mp}{mq} \\ &= \frac{p}{q}. \end{aligned}$$

Suponhamos que  $\rho(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ . A definição de  $\rho$  implica que

$$\rho(F^m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(F^m)^n(x) - x}{n} = m \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{F^{mn}(x) - x}{mn} = m\rho(F).$$

Logo,  $\rho(F^q) = q\rho(F) = q\frac{p}{q} = p$ .

Como  $\rho(f)$  está definido a menos de um inteiro segue que  $\rho(f^q) = 0$ . Assim, é suficiente mostrar que se  $\rho(f) = 0$  então  $f$  tem ponto fixo. Vejamos:

**Afirmção:** Se  $\rho(f) = 0$  então  $f$  tem ponto fixo.

Suponhamos que  $f$  não tenha ponto fixo. Consideremos  $F$  um levantamento de  $f$  tal que  $F(0) \in [0, 1)$ .

Como  $f$  não tem ponto fixo então  $F(x) - x \notin \mathbb{Z}$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Portanto  $F(x) - x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Assim,  $0 < F(x) - x < 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Sabendo que  $F - Id$  é contínua em  $[0, 1]$ , os seus mínimo e máximo são atingidos e, portanto, existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 < \delta \leq F(x) - x \leq 1 - \delta < 1. \quad (4.3)$$

Como  $F - Id$  é periódica esta estimativa verifica-se para todo  $x$  nos reais. Em particular, podemos considerar  $x = F^i(0)$ . Observemos que,

$$F^n(0) = F^n(0) - 0 = \sum_{i=0}^{n-1} F^{i+1}(0) - F^i(0).$$

Por (4.3),  $\delta \leq F^{i+1}(0) - F^i(0) \leq 1 - \delta$ . Então,

$$n\delta \leq \sum_{i=0}^{n-1} F^{i+1}(0) - F^i(0) \leq (1 - \delta)n,$$

### 4.3. NÚMERO DE ROTAÇÃO

---

ou seja,  $n\delta \leq F^n(0) \leq (1 - \delta)n$ . Equivalentemente,

$$\delta \leq \frac{F^n(0)}{n} \leq 1 - \delta.$$

Fazendo  $n \rightarrow \infty$  obtemos  $\rho(f) \neq 0$ , já que  $\rho$  independe do  $x$  tomado. Com isso, provamos a contrapositiva. ■

**Proposição 4.9.** *Seja  $f : S^1 \rightarrow S^1$  um homeomorfismo que preserva orientação. Todas as órbitas periódicas tem o mesmo período. Ou seja, se  $\rho(f) = \left[\frac{p}{q}\right]$  com  $p, q \in \mathbb{Z}$  relativamente primos, então o levantamento  $F$  de  $f$  com  $\rho(f) = \frac{p}{q}$  satisfaz  $F^q(x) = x + p$  sempre que  $[x]$  é um ponto periódico.*

**Demonstração:** Vejamos que se  $\pi(x) = [x]$  é um ponto periódico e  $F$  um levantamento, temos que  $F^r(x) = x + s$  para algum  $r, s \in \mathbb{Z}$  e

$$\frac{p}{q} = \rho(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^{nr}(x) - x}{nr} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nr} \sum_{i=0}^{n-1} F^r(F^{ir}(x)) - F^{ir}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ns}{nr} = \frac{s}{r}.$$

Isso significa que  $s = \frac{r}{q}p = mp$  e  $r = mq$  onde  $m = \frac{r}{q}$ . E, portanto,  $F^{mq}(x) = x + mp$ . Vamos mostrar que  $F^q(x) = x + p$ .

Suponhamos que  $F^q(x) - p > x$ . Pela monotonicidade da  $F$ , temos

$$F^{2q}(x) - 2p = F^q(F^q(x)) - p - p \geq F^q(x) - p > x.$$

Por indução, concluímos que  $F^r(x) - s = F^{mq}(x) - mp > x$  o que gera um absurdo. Assim,

$$F^q(x) = x + p. \quad \blacksquare$$

## Capítulo 5

# Bilhares

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e exemplos relacionados aos bilhares. Abordaremos bilhares convexos, ou seja, bilhares em uma mesa cujo bordo é uma curva suave, fechada, convexa, plana, regular,  $C^k$  ( $k \geq 2$ ) e com curvatura estritamente positiva. Além disso, encontraremos a matriz derivada da aplicação de bilhar, demonstraremos que a aplicação é um difeomorfismo  $C^{k-1}$  e, faremos o estudo do bilhar circular e elíptico mostrando que ambos são integráveis. Concluiremos que uma trajetória do bilhar elíptico que passe por um foco continua passando pelos focos, alternando entre eles. Somando-se a isso provaremos que se o segmento inicial da trajetória passar exteriormente (ou interiormente) aos focos, todos os outros segmentos da trajetória serão tangentes a uma mesma elipse (ou a uma mesma hipérbole) confocal com a elipse inicial.

### 5.1 Definições e generalidades

O Bilhar é um modelo matemático no qual uma partícula se movimenta em linha reta dentro de uma região limitada fazendo reflexão elástica nos impactos com o bordo. No interior desta região o movimento é uniforme, ou seja, possui velocidade constante e a reflexão no bordo obedece a regra de óptica geométrica: o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

Nós trabalharemos com regiões do plano  $\mathbb{R}^2$  limitadas por uma oval  $\gamma$ , isto é, uma curva simples, regular, fechada, de classe  $C^k$  e com curvatura estritamente positiva.

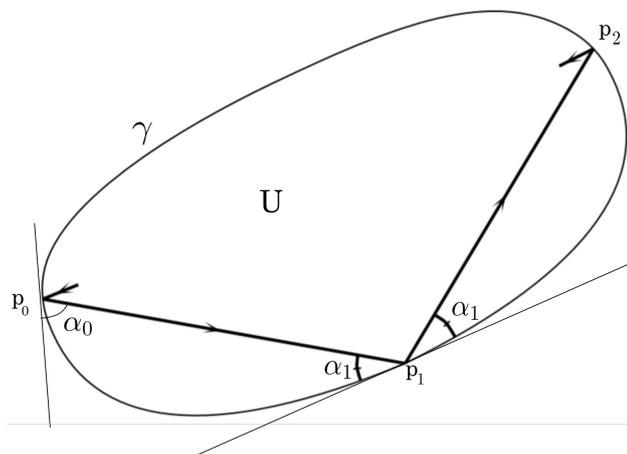


Figura 5.1: Bilhar.

Consideremos um ponto  $p_0$  em  $\gamma$  como sendo o ponto inicial no qual a partícula irá partir. Suponhamos que a partícula mova-se ao longo de uma reta  $r(p_0, \alpha_0)$  que passa por  $p_0$  e forma um ângulo  $\alpha_0$  com o vetor tangente a  $\gamma$  em  $p_0$ . Ao par  $(p_0, \alpha_0)$  associamos o par  $(p_1, \alpha_1)$  formado pelo ponto  $p_1 \in \gamma$ , interseção de  $r(p_0, \alpha_0)$  com a curva  $\gamma$ , e o ângulo  $\alpha_1$ , entre  $r(p_0, \alpha_0)$  e a tangente a  $\gamma$  em  $p_1$ . Esse processo pode ser observado na imagem (5.2). Analogamente, obedecendo a regra de reflexão de um espelho, encontramos o par  $(p_2, \alpha_2)$  associado a  $(p_1, \alpha_1)$ . Podemos repetir o mesmo argumento para cada par  $(p_i, \alpha_i)$  com  $i \geq 2$ .

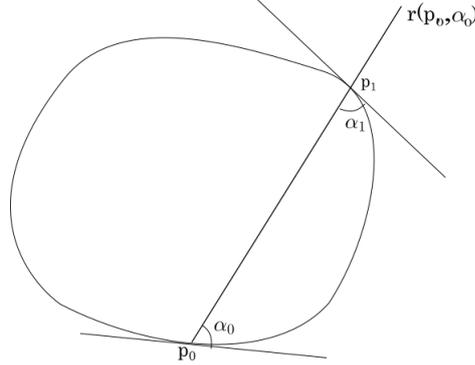


Figura 5.2: Aplicação de bilhar.

**Definição 5.1.** Seja  $\gamma(s)$  parametrização pelo comprimento de arco de  $\gamma$ . Uma **aplicação de bilhar** associada a  $\gamma$  é uma aplicação

$$T(s_0, \alpha_0) = (s_1, \alpha_1)$$

onde  $p_0 = \gamma(s_0)$ , a próxima batida  $p_1 = \gamma(s_1)$ ,  $\alpha_0$  é o ângulo entre  $\gamma'(s_0)$  e  $\gamma(s_1) - \gamma(s_0)$  e  $\alpha_1$  é o ângulo entre  $\gamma(s_1) - \gamma(s_0)$  e  $\gamma'(s_1)$ .

A aplicação  $T$  está definida sobre o conjunto  $A = [0, L) \times (0, \pi)$  onde  $L$  é o comprimento de  $\gamma$ . Dessa forma, teremos

$$\begin{aligned} T : \quad A &\longrightarrow A \\ (s_0, \alpha_0) &\longmapsto (s_1, \alpha_1) \end{aligned}$$

Seja  $h$  uma função definida da seguinte maneira: consideremos dois pontos  $p_0$  e  $p_1$  em  $\gamma$  com coordenadas  $s_0$  e  $s_1$  e seja  $h(s_0, s_1)$  menos a distância Euclidiana entre  $p_0$  e  $p_1$ . Assim, teremos

$$h(s_0, s_1) = -\text{dist}(\gamma(s_0), \gamma(s_1)) = -\|\gamma(s_1) - \gamma(s_0)\|,$$

ou seja,  $h^2(s_0, s_1) = \langle \gamma(s_1) - \gamma(s_0), \gamma(s_1) - \gamma(s_0) \rangle$ .

**Lema 5.1.** Se  $T(s_0, \alpha_0) = (s_1, \alpha_1)$  então  $\cos(\alpha_0) = \partial_1 h(s_0, s_1)$  e  $\cos(\alpha_1) = -\partial_2 h(s_0, s_1)$ .

**Demonstração:** Como  $h^2(s_0, s_1) = \langle \gamma(s_1) - \gamma(s_0), \gamma(s_1) - \gamma(s_0) \rangle$  temos, pela regra da cadeia e derivando em relação a  $s_0$ , que

$$2h(s_0, s_1)\partial_1 h(s_0, s_1) = -2 \langle \gamma'(s_0), \gamma(s_1) - \gamma(s_0) \rangle.$$

## 5.1. DEFINIÇÕES E GENERALIDADES

Analogamente, derivando em relação a  $s_1$  obtemos,

$$2h(s_0, s_1)\partial_2 h(s_0, s_1) = 2 \langle \gamma'(s_1), \gamma(s_1) - \gamma(s_0) \rangle .$$

Assim,

$$\begin{aligned} \partial_1 h(s_0, s_1) &= -\frac{1}{h} \langle \gamma'(s_0), \gamma(s_1) - \gamma(s_0) \rangle \\ &= \left\langle \gamma'(s_0), \frac{\gamma(s_1) - \gamma(s_0)}{\|\gamma(s_1) - \gamma(s_0)\|} \right\rangle \\ &= \cos(\alpha_0) \end{aligned}$$

e

$$\partial_2 h(s_0, s_1) = \frac{1}{h} \langle \gamma'(s_1), \gamma(s_1) - \gamma(s_0) \rangle = -\cos(\alpha_1)$$

Logo  $h$  é uma função geradora do bilhar. ■

**Lema 5.2.**  $\partial_{12}h(s_0, s_1) < 0$

**Demonstração:** Temos que,

$$\begin{aligned} \partial_{12}h(s_0, s_1) &= \frac{\partial^2 h(s_0, s_1)}{\partial s_0 \partial s_1} \\ &= \frac{\partial}{\partial s_0} \left( -\frac{\langle \gamma'(s_1), \gamma(s_1) - \gamma(s_0) \rangle}{\|\gamma(s_1) - \gamma(s_0)\|} \right) \\ &= \left\langle -\gamma'(s_1), \frac{\partial}{\partial s_0} \left( \frac{\gamma(s_1) - \gamma(s_0)}{\|\gamma(s_1) - \gamma(s_0)\|} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle -\gamma'(s_1), \frac{-\gamma'(s_0) \|\gamma(s_1) - \gamma(s_0)\| - \frac{\langle -\gamma'(s_0), \gamma(s_1) - \gamma(s_0) \rangle}{\|\gamma(s_1) - \gamma(s_0)\|} (\gamma(s_1) - \gamma(s_0))}{\|\gamma(s_1) - \gamma(s_0)\|^2} \right\rangle \\ &= \frac{\langle -\gamma'(s_1), -\gamma'(s_0) \rangle}{-h(s_1, s_0)} - \frac{1}{h(s_1, s_0)^2} \left\langle -\gamma'(s_0), \frac{\gamma(s_1) - \gamma(s_0)}{\|\gamma(s_1) - \gamma(s_0)\|} \right\rangle \langle -\gamma'(s_1), \gamma(s_1) - \gamma(s_0) \rangle \\ &= -\frac{\langle \gamma'(s_1), \gamma'(s_0) \rangle}{h(s_1, s_0)} + \frac{\partial_1 h(s_0, s_1)}{h(s_0, s_1)^2} \langle -\gamma'(s_1), \gamma(s_1) - \gamma(s_0) \rangle \\ &= -\frac{\langle \gamma'(s_1), \gamma'(s_0) \rangle}{h(s_1, s_0)} + \frac{\partial_1 h(s_0, s_1)}{h(s_0, s_1)} \left( \frac{1}{h(s_0, s_1)} \langle -\gamma'(s_1), \gamma(s_1) - \gamma(s_0) \rangle \right) \\ &= -\frac{\langle \gamma'(s_1), \gamma'(s_0) \rangle}{h(s_1, s_0)} - \frac{\partial_1 h(s_0, s_1) \partial_2 h(s_0, s_1)}{h(s_0, s_1)} \\ &= \frac{-\cos(\alpha_0 + \alpha_1) + \cos(\alpha_0) \cos(\alpha_1)}{h(s_1, s_0)} \\ &= \frac{\text{sen}(\alpha_0) \text{sen}(\alpha_1)}{h(s_1, s_0)}. \end{aligned}$$

Com isso,  $\partial_{12}h(s_0, s_1) < 0$ , pois tanto  $\alpha_0$  quanto  $\alpha_1$  estão entre  $0$  e  $\pi$  e a função  $h$  assume somente valores negativos. ■

**Proposição 5.1.** *Nas coordenadas  $(s_0, y_0)$ , onde  $y_0 = \cos(\alpha_0)$ , a aplicação de bilhar  $T(s_0, y_0) = (s_1, y_1)$  tem área preservada.*

**Demonstração:** Primeiramente garantiremos a existência de uma  $T$  tal que  $(s_0, y_0) \xrightarrow{T} (s_1, y_1)$ .

Sabemos que

$$y_0 = \partial_1 h(s_0, s_1) \text{ e } y_1 = -\partial_2 h(s_0, s_1).$$

Consideremos  $F_1 = y_1 + \partial_2 h(s_0, s_1)$  e  $F_2 = y_0 - \partial_1 h(s_0, s_1)$ .

Como

$$F_1(s_0, s_1, y_0, y_1) = 0 = F_2(s_0, s_1, y_0, y_1)$$

temos que

$$F(s_0, s_1, y_0, y_1) = (F_1(s_0, s_1, y_0, y_1), F_2(s_0, s_1, y_0, y_1)) = (0, 0).$$

Pelo Teorema da Função Implícita, existe  $T(s_0, y_0)$  se, e somente, se

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial s_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial s_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \end{bmatrix} \neq 0.$$

Mas, notemos que,

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial s_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial s_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \partial_2^2 h(s_0, s_1) & 1 \\ -\partial_2 \partial_1 h(s_0, s_1) & 0 \end{bmatrix} = \partial_2 \partial_1 h(s_0, s_1) = \partial_{12} h(s_0, s_1) < 0.$$

Portanto, existe  $T : (s_0, y_0) \rightarrow (s_1, y_1)$ .

Agora, mostraremos que o elemento de área  $dy_0 \wedge ds_0$  é preservado. Para isso, precisamos provar que

$$dy_0 \wedge ds_0 = dy_1 \wedge ds_1,$$

onde  $y_0 = \cos \alpha_0$  e  $y_1 = \cos \alpha_1$ .

Observemos que,

$$\begin{aligned} Dh(s_0, s_1) &= \partial_2 h(s_0, s_1) ds_1 + \partial_1 h(s_0, s_1) ds_0 \\ &= -\cos(\alpha_1) ds_1 + \cos(\alpha_0) ds_0 \\ &= -y_1 ds_1 + y_0 ds_0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

e,

$$\begin{aligned} D^2 h(s_0, s_1) &= d(\partial_2 h(s_0, s_1)) \wedge ds_1 + d(\partial_1 h(s_0, s_1)) \wedge ds_0 \\ &= (\partial_{12} h(s_0, s_1) ds_0 + \partial_2^2 h(s_0, s_1) ds_1) \wedge ds_1 + (\partial_1^2 h(s_0, s_1) ds_0 + \partial_2 \partial_1 h(s_0, s_1) ds_1) \wedge ds_0 \\ &= \partial_{12} h(s_0, s_1) ds_0 \wedge ds_1 + \partial_2^2 h(s_0, s_1) ds_1 \wedge ds_1 + \partial_1^2 h(s_0, s_1) ds_0 \wedge ds_0 + \partial_2 \partial_1 h(s_0, s_1) \\ &\quad ds_1 \wedge ds_0 \\ &= \left( \frac{\text{sen}(\alpha_0) \text{sen}(\alpha_1)}{h(s_1, s_0)} \right) ds_0 \wedge ds_1 + \left( \frac{\text{sen}(\alpha_0) \text{sen}(\alpha_1)}{h(s_1, s_0)} \right) ds_1 \wedge ds_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left( \frac{\text{sen}(\alpha_0) \text{sen}(\alpha_1)}{h(s_1, s_0)} \right) ds_0 \wedge ds_1 - \left( \frac{\text{sen}(\alpha_0) \text{sen}(\alpha_1)}{h(s_1, s_0)} \right) ds_0 \wedge ds_1 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Passando a diferencial em ambos os lados da equação (5.1), temos

$$0 = d(-y_1 ds_1 + y_0 ds_0) = -dy_1 \wedge ds_1 + dy_0 \wedge ds_0.$$

Portanto,

$$dy_0 \wedge ds_0 = dy_1 \wedge ds_1.$$

Portanto,  $T$  preserva área. ■

A função  $h$ , definida anteriormente, é uma função geradora do bilhar.

O conjunto  $\mathcal{O}(s_0, \alpha_0) = \{T^n(s_0, \alpha_0); n \in \mathbb{Z}\}$  é dito **órbita** de bilhar e a poligonal na mesa cujos vértices são os  $s_j$  que definem a órbita denominamos **trajetória do bilhar**. O conjunto de todos os pontos das órbitas de um bilhar formam o **espaço de fase** do bilhar.

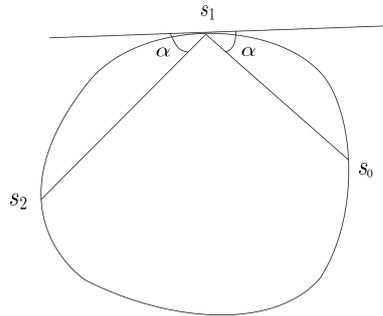
**Observação 5.1.** Consideremos três pontos consecutivos  $(s_1, y_1) = T(s_0, y_0)$ ,  $(s_2, y_2) = T(s_1, y_1)$ . Sabemos que

$$\frac{\partial h(s_0, s_1)}{\partial s_1} = -\cos(\alpha_1) \text{ e } \frac{\partial h(s_1, s_2)}{\partial s_1} = \cos(\alpha_1)$$

então,

$$\nabla \Omega = \frac{\partial h(s_0, s_1)}{\partial s_1} + \frac{\partial h(s_1, s_2)}{\partial s_1} = 0,$$

onde  $\Omega(s_1) = h(s_0, s_1) + h(s_1, s_2)$ .

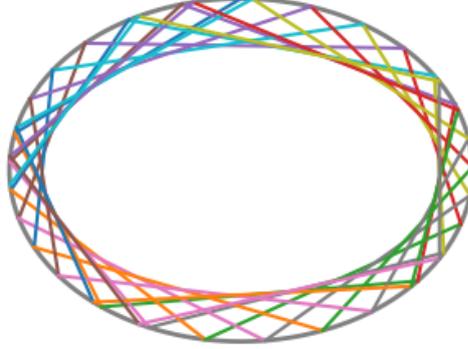


**Figura 5.3:** Trajetória de bilhar.

Ou seja, a função geradora ajuda a decidir quando uma sequência de pontos do bordo está em uma órbita. A grosso modo, é equivalente a supor que queiramos lançar uma bola de bilhar em um ponto  $s_0$  de forma que após um reflexo no ponto  $s_1$  esta bola chegue ao ponto  $s_2$ . Para encontrar o ponto  $s_1$  é suficiente determinar um ponto crítico do funcional  $s_1 \mapsto h(s_0, s_1) + h(s_1, s_2)$ .

Pelo que foi demonstrado no decorrer desta seção, concluímos que bilhares associados a curvas regulares estritamente convexas são exemplos de aplicações Twist que preservam área.

**Definição 5.2.** Uma **cáustica** é uma curva suave tangente a todos os segmentos das trajetórias da família ( $\alpha = \alpha_0$ ). Ou equivalentemente,  $\Gamma$  é uma cáustica do bilhar se uma trajetória que é tangente a  $\Gamma$  entre duas batidas for sempre tangente após as colisões com o bordo.



**Figura 5.4:** Cáustica de uma trajetória para o bilhar em uma elipse.

**Definição 5.3.** A órbita  $\mathcal{O}(s_0, \alpha_0)$  do ponto  $(s_0, \alpha_0) \in A$  é dita **periódica** se existir um  $l > 0$  tal que  $T^l(s_0, \alpha_0) = (s_0, \alpha_0)$ . Chamamos de **período** de  $(s_0, \alpha_0)$  o  $\min\{l > 0; T^l(s_0, \alpha_0) = (s_0, \alpha_0)\}$ .

**Proposição 5.2.** *Seja  $D$  uma região estritamente convexa, diferenciável e limitada com fronteira  $F$ . Então a aplicação de bilhar associada tem pelo menos duas órbitas distintas de período 2 que são descritas como segue: para uma delas a distância entre os pontos do bordo correspondentes é o diâmetro de  $D$  para outro a largura de  $D$ .*

**Demonstração:** Consideremos a função geradora  $h(s_0, s_1)$ . Sabemos que  $h(s_0, s_1)$  é tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial h(s_0, s_1)}{\partial s_1} = -\cos \alpha_1 \\ \frac{\partial h(s_0, s_1)}{\partial s_0} = \cos \alpha_0. \end{cases}$$

Temos que  $h(s_0, s_1)$  é uma função  $C^1$  no produto direto de duas cópias da fronteira de uma mesa de bilhar, ou seja, em  $F \times F$ . Como o domínio é compacto (basicamente o 2-toro) e  $h$  é contínua temos, pelo Teorema do Valor Extremo, que  $h$  assume valor máximo e mínimo.

Além disso, a função é diferenciável apenas fora da diagonal, ou seja, quando  $s_0 = s_1$ ,  $h(s_0, s_1)$  não é diferenciável. De fato, seja  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ . Temos,

$$\begin{aligned} r(h, k) &= h(s+h, s+k) - h(s, s) - h'(s, s)(h, k) \\ &= -\|\gamma(s+h) - \gamma(s+k)\| - \left( \frac{\partial h(s, s)}{\partial s}(h, k) + \frac{\partial h(s, s)}{\partial s}(h, k) \right) \\ &= -\|\gamma(s+h) - \gamma(s+k)\| - (\cos \alpha_0(h, k) - \cos \alpha_0(h, k)) \\ &= -\|\gamma(s+h) - \gamma(s+k)\|. \end{aligned}$$

Tomando  $k = \frac{h}{2} \rightarrow 0$  temos que  $-\|\gamma(s+h) - \gamma(s + \frac{h}{2})\| \neq 0$ . Então,

$$\frac{r(h, k)}{\|(h, k)\|} = -\frac{\|\gamma(s+h) - \gamma(s + \frac{h}{2})\|}{\|(h, \frac{h}{2})\|} \rightarrow 0 \text{ quando } h \rightarrow 0$$

## 5.1. DEFINIÇÕES E GENERALIDADES

com  $\|(h, k)\| = \sup\{|h|, |k|\}$ .

Notemos que o valor máximo de  $h$  é zero e ocorre ao longo da diagonal  $\{(s, s); s \in F\}$ , por outro lado, atinge seu valor mínimo em um ponto crítico  $d$ , ou seja, onde  $\nabla h = 0$ .

Seja  $(s_0, s_1)$  tal que  $h(s_0, s_1) = d$ . Sabemos que,

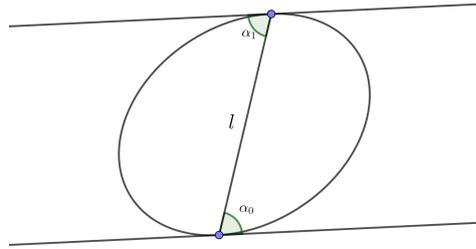
$$\nabla h = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial s_0} \\ \frac{\partial h}{\partial s_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_0 \\ -\cos \alpha_1 \end{bmatrix}$$

então, como o ângulo pertence ao intervalo  $[0, \pi)$ , temos que

$$\nabla h = 0 \iff \alpha_0 = \alpha_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Assim, existe uma órbita de período 2.

Agora, consideremos a situação em que os pontos são antípodas. Para isso, seja  $(s_0, g(s_0))$  a curva no toro onde  $g(s_0) = s_1$  é a coordenada do ponto de fronteira diferente de  $s_0$ , para o qual a reta através de  $s_0$  e  $s_1$  é de tal forma que o ângulo  $\pi - \alpha_0 = \alpha_1$  com a tangente ao ponto.



**Figura 5.5:** Bilhar tal que  $\alpha_0 = -\alpha_1$ .

Observemos que o diâmetro ocorre em uma órbita de período 2 onde a linha  $l$  (trajetória do bilhar) tem comprimento máximo e, conseqüentemente, o comprimento mínimo, das linhas como esta, será a largura.

Sobre a curva, a função  $h$  assume também um valor máximo  $w$ , o qual será negativo uma vez que,  $h$  é negativa nos pontos fora da diagonal.

Por hipótese, a curvatura é estritamente positiva então podemos parametrizar a curva por um ângulo  $\varphi$ , diferenciável, o qual é definido como o ângulo que a trajetória faz com uma direção de referência.

Então, como  $\pi - \alpha_0 = \alpha_1$  temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial h(s_0(\varphi), s_1(\varphi))}{\partial \varphi} &= \frac{\partial h}{\partial s_0} \frac{\partial s_0}{\partial \varphi} + \frac{\partial h}{\partial s_1} \frac{\partial s_1}{\partial \varphi} \\ &= \cos \alpha_0 \frac{\partial s_0}{\partial \varphi} - \cos \alpha_1 \frac{\partial s_1}{\partial \varphi} \\ &= \cos \alpha_0 \frac{\partial s_0}{\partial \varphi} + \cos \alpha_0 \frac{\partial s_1}{\partial \varphi} \\ &= \cos \alpha_0 \left( \frac{\partial s_0}{\partial \varphi} + \frac{\partial s_1}{\partial \varphi} \right). \end{aligned}$$

Temos que  $\frac{\partial \varphi}{\partial s_0}$  é a curvatura de  $F$  no ponto correspondente a  $s_0$ , portanto é estritamente positivo. Analogamente,  $\frac{\partial \varphi}{\partial s_1}$  é a curvatura de  $F$  no ponto correspondente a  $s_1$ . Com isso,

## 5.2. PROPRIEDADES DA APLICAÇÃO DE BILHAR

concluimos que  $\frac{\partial \varphi}{\partial s_0}$  e  $\frac{\partial \varphi}{\partial s_1}$  são maiores do que zero e, conseqüentemente,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s_0} + \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} > 0.$$

Dessa forma, no ponto crítico  $w$ , temos  $\cos \alpha_0 = 0$ . Como  $\cos \alpha_0 = \langle t(s_0), l \rangle = 0$  temos que  $l \perp t(s_0)$ , onde  $t(s_0)$  é a reta tangente a fronteira em  $s_0$ .

Além disso,  $\pi - \alpha_0 = \alpha_1$  o que implica que  $l \perp t(s_1)$  e, portanto,  $t(s_0)$  é paralelo a  $t(s_1)$ . Como as tangentes são paralelas segue que o comprimento minimal de tais linhas é a largura e o maximal o diâmetro.

Conseqüentemente, existe uma órbita de período 2 como máximo da distância e obtemos a outra pela construção acima. ■

## 5.2 Propriedades da aplicação de bilhar

Consideremos  $\varphi$  como sendo o ângulo de inclinação do vetor tangente a curva, isto é, o ângulo entre o vetor tangente e uma direção fixa, a qual chamaremos de  $x$ . Podemos parametrizar a curva usando  $\varphi$  como parâmetro, o qual varia entre 0 e  $2\pi$ . Somando-se a isso, dado o raio de curvatura  $R$ , da curva  $\gamma$ , temos a seguinte relação:

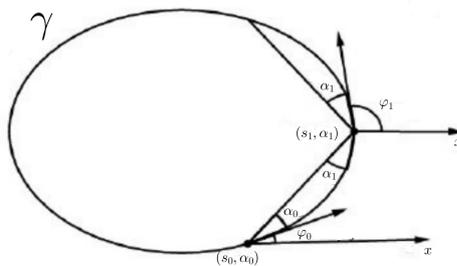
$$R(\varphi) = \frac{ds}{d\varphi}.$$

**Proposição 5.3.** A matriz derivada  $DT(s_0, \alpha_0)$  da aplicação  $T : (s_0, \alpha_0) \rightarrow (s_1, \alpha_1)$  é

$$DT(s_0, \alpha_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial s_0} & \frac{\partial s_1}{\partial \alpha_0} \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_0} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_0}{R_0 \sin \alpha_1} - \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_1} & \frac{L_0}{\sin \alpha_1} \\ \frac{L_0 - R_0 \sin \alpha_0}{R_0 R_1 \sin \alpha_1} - \frac{1}{R_0} & \frac{L_0}{R_1 \sin \alpha_1} - 1 \end{bmatrix}$$

onde  $R_0$  e  $R_1$  são raios de curvatura de  $\gamma$  nos pontos  $p_0 = (F(s_0), G(s_0))$  e  $p_1 = (F(s_1), G(s_1))$ , respectivamente,  $L_0$  é o comprimento da trajetória que liga  $p_0$  a  $p_1$  e  $F$  e  $G$  são as funções coordenadas de  $\gamma(s)$ .

**Demonstração:** Consideremos  $x = x(\varphi)$  e  $y = y(\varphi)$  equações paramétricas que descrevem  $\Gamma$  tendo  $\varphi$  como parâmetro.



**Figura 5.6:** Derivada da aplicação de bilhar.

Sejam  $\alpha_0$  e  $\varphi_0$  o ângulo inicial do bilhar e o ângulo de inclinação do vetor tangente,

## 5.2. PROPRIEDADES DA APLICAÇÃO DE BILHAR

---

respectivamente. A inclinação do segmento da trajetória inicial é dada por

$$\tan(\varphi_0 + \alpha_0) = \frac{y(\varphi_1) - y(\varphi_0)}{x(\varphi_1) - x(\varphi_0)}. \quad (5.2)$$

Como  $\gamma$  está parametrizada pelo comprimento de arco temos  $\|\gamma'(s)\| = 1$ . Então podemos considerar que

$$\frac{dx}{ds} = \cos \varphi \text{ e } \frac{dy}{ds} = \text{sen } \varphi.$$

Observemos que

$$x(\varphi_1) - x(\varphi_0) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} x'(\varphi) d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{dx}{ds} \frac{ds}{d\varphi} d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} R(\varphi) \cos \varphi d\varphi. \quad (5.3)$$

Analogamente,

$$y(\varphi_1) - y(\varphi_0) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} y'(\varphi) d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{dy}{ds} \frac{ds}{d\varphi} d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} R(\varphi) \text{sen } \varphi d\varphi. \quad (5.4)$$

Substituindo (5.3) e (5.4) em (5.2), obtemos

$$\tan(\varphi_0 + \alpha_0) = \left( \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} R(\varphi) \text{sen } \varphi d\varphi \right) \left( \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} R(\varphi) \cos \varphi d\varphi \right)^{-1}.$$

Com isso podemos encontrar o valor de  $\varphi_1$ , uma vez que já temos  $\varphi_0$  e  $\alpha_0$ . Além disso,

$$\varphi_1 - \alpha_1 = \varphi_0 + \alpha_0$$

ou equivalentemente,

$$\alpha_1 = \varphi_1 - \varphi_0 - \alpha_0. \quad (5.5)$$

Agora, consideremos as equações paramétricas com parâmetro  $s$  da seguinte maneira

$$x = F(s) \text{ e } y = G(s).$$

Sejam  $\tilde{p}_0 = (F(\tilde{s}_0), G(\tilde{s}_0))$  e  $\tilde{p}_1 = (F(\tilde{s}_1), G(\tilde{s}_1))$  pertencentes a  $\gamma$  e  $p_0 = (F(s_0), G(s_0))$  pertencente a uma vizinhança de  $\tilde{p}_0$ .

Definamos  $\theta_0$  como sendo o ângulo formado entre o eixo  $x$  e o segmento que liga  $p_0$  a  $p_1$ . Com isso, teremos

$$\theta_0 = \varphi_0 + \alpha_0.$$

Suponhamos que  $F'(s_0) \neq 0$  e  $F'(s_1) \neq 0$ .

Sabemos que

$$\gamma(s) = (F(s), G(s))$$

e, conseqüentemente,

$$\gamma'(s) = (F'(s), G'(s)).$$

Mas,  $F'(s) = x' = \cos \varphi$  e  $G'(s) = y' = \text{sen } \varphi$ . Então, em  $s_0$ , teremos que

$$\gamma'(s_0) = (\cos \varphi_0, \text{sen } \varphi_0).$$

Portanto,

$$\tan \varphi_0 = \frac{\text{sen } \varphi_0}{\cos \varphi_0} = \frac{G'(s_0)}{F'(s_0)}$$

e

$$\tan \varphi_1 = \frac{\text{sen } \varphi_1}{\cos \varphi_1} = \frac{G'(s_1)}{F'(s_1)}.$$

Sabendo que  $\theta_0 = \varphi_0 + \alpha_0$  e usando (5.2) obtemos que

$$\tan(\varphi_0 + \alpha_0) = \tan \theta_0 = \frac{G(s_1) - G(s_0)}{F(s_1) - F(s_0)}.$$

Logo,

$$\varphi_0 = \tan^{-1} \left( \frac{G'(s_0)}{F'(s_0)} \right), \quad \varphi_1 = \tan^{-1} \left( \frac{G'(s_1)}{F'(s_1)} \right), \quad \theta_0 = \tan^{-1} \left( \frac{G(s_1) - G(s_0)}{F(s_1) - F(s_0)} \right).$$

Como  $\alpha_0 = \theta_0 - \varphi_0$ , pois  $\theta_0 = \alpha_0 + \varphi_0$ , temos

$$\alpha_0 = \tan^{-1} \left( \frac{G(s_1) - G(s_0)}{F(s_1) - F(s_0)} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{G'(s_0)}{F'(s_0)} \right).$$

Definamos  $L(s_0, s_1)$  por

$$L(s_0, s_1) = \tan^{-1} \left( \frac{G(s_1) - G(s_0)}{F(s_1) - F(s_0)} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{G'(s_0)}{F'(s_0)} \right) \quad (5.6)$$

e observemos que  $L(s_0, s_1)$  é uma função que depende apenas de  $s_0$  e  $s_1$ .

Além disso, como  $\alpha_0 = \theta_0 - \varphi_0$  e  $\alpha_1 = \varphi_1 - \varphi_0 - \alpha_0$  temos que

$$\alpha_1 = \varphi_1 - \varphi_0 - \alpha_0 = \varphi_1 - \varphi_0 - \theta_0 + \varphi_0 = \varphi_1 - \theta_0.$$

Analogamente ao que foi feito anteriormente, temos que

$$\alpha_1 = \tan^{-1} \left( \frac{G'(s_1)}{F'(s_1)} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{G(s_1) - G(s_0)}{F(s_1) - F(s_0)} \right) =: M(s_0, s_1). \quad (5.7)$$

Montaremos, agora, a nossa matriz derivada através de alguns passos.

**P1)** Encontrar  $\frac{ds_1}{d\alpha_0}$ .

Derivando (5.6) implicitamente com relação a  $\alpha_0$ , obtemos

$$\frac{\partial L(s_0, s_1)}{\partial s_1} \frac{\partial s_1}{\partial \alpha_0} = 1.$$

Logo,

$$\frac{\partial s_1(s_0, s_1)}{\partial \alpha_0} = \frac{1}{\frac{\partial L(s_0, s_1)}{\partial s_1}}.$$

Mas, observemos que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L(s_0, s_1)}{\partial s_1} &= \left[ \tan^{-1} \left( \frac{G(s_1) - G(s_0)}{F(s_1) - F(s_0)} \right) \right]' \\
 &= \frac{\frac{G'(s_1)[F(s_1) - F(s_0)] - F'(s_1)[G(s_1) - G(s_0)]}{[F(s_1) - F(s_0)]^2}}{1 + \frac{[G(s_1) - G(s_0)]^2}{[F(s_1) - F(s_0)]^2}} \\
 &= \frac{\frac{G'(s_1)F(s_1) - G'(s_1)F(s_0) - F'(s_1)G(s_1) + F'(s_1)G(s_0)}{[F(s_1) - F(s_0)]^2}}{\frac{[F(s_1) - F(s_0)]^2 + [G(s_1) - G(s_0)]^2}{[F(s_1) - F(s_0)]^2}} \\
 &= \frac{\det \begin{bmatrix} F'(s_1) & G'(s_1) \\ F(s_0) - F(s_1) & G(s_0) - G(s_1) \end{bmatrix}}{[F(s_1) - F(s_0)]^2 + [G(s_1) - G(s_0)]^2}.
 \end{aligned}$$

Como  $p_0 \neq p_1$  teremos que o denominador será sempre diferente de zero. Além disso, observemos que

$$[F(s_1) - F(s_0)]^2 + [G(s_1) - G(s_0)]^2 = h^2(s_0, s_1) = L_0^2.$$

O determinante é igual a área do paralelogramo formado pelos vetores  $(F'(s_1), G'(s_1))$  e  $(F(s_0) - F(s_1), G(s_0) - G(s_1))$ , ou seja,

$$\det \begin{bmatrix} F'(s_1) & G'(s_1) \\ F(s_0) - F(s_1) & G(s_0) - G(s_1) \end{bmatrix} = \|(F'(s_1), G'(s_1))\| \|(F(s_0) - F(s_1), G(s_0) - G(s_1))\| \sin(\pi - \alpha_1).$$

Sabemos que  $\|(F'(s_1), G'(s_1))\| = 1$  e  $\|(F(s_0) - F(s_1), G(s_0) - G(s_1))\| = L_0$  então,

$$\frac{\partial L(s_0, s_1)}{\partial s_1} = \frac{L_0 \sin \alpha_1}{L_0^2} = \frac{\sin \alpha_1}{L_0}$$

e, conseqüentemente,

$$\frac{\partial s_1(s_0, s_1)}{\partial \alpha_0} = \frac{L_0}{\sin \alpha_1}.$$

**P2)** Encontrar  $\frac{ds_1}{ds_0}$ .

Derivando (5.6) implicitamente com relação a  $s_0$ , obtemos

$$\frac{\partial L(s_0, s_1)}{\partial s_0} + \frac{\partial L(s_0, s_1)}{\partial s_1} \frac{\partial s_1}{\partial s_0} = 0.$$

Logo,

$$\frac{\partial s_1}{\partial s_0} = - \frac{\frac{\partial L(s_0, s_1)}{\partial s_0}}{\frac{\partial L(s_0, s_1)}{\partial s_1}}.$$

Resta-nos encontrar  $\frac{\partial L(s_0, s_1)}{\partial s_0}$ . Observemos que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L(s_0, s_1)}{\partial s_0} &= \left[ \tan^{-1} \left( \frac{G(s_1) - G(s_0)}{F(s_1) - F(s_0)} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{G'(s_0)}{F'(s_0)} \right) \right]' \\
 &= \frac{-G'(s_0)[F(s_1) - F(s_0)] + F'(s_0)[G(s_1) - G(s_0)]}{[F(s_1) - F(s_0)]^2} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial s_0} \\
 &= \frac{1 + \frac{[G(s_1) - G(s_0)]^2}{[F(s_1) - F(s_0)]^2}}{1 + \frac{[G(s_1) - G(s_0)]^2}{[F(s_1) - F(s_0)]^2}} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial s_0} \\
 &= \frac{-G'(s_0)F(s_1) + G'(s_0)F(s_0) + F'(s_0)G(s_1) - F'(s_0)G(s_0)}{[F(s_1) - F(s_0)]^2} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial s_0} \\
 &= \frac{[F(s_1) - F(s_0)]^2 + [G(s_1) - G(s_0)]^2}{[F(s_1) - F(s_0)]^2} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial s_0} \\
 &= \frac{\det \begin{bmatrix} F'(s_0) & G'(s_0) \\ F(s_1) - F(s_0) & G(s_1) - G(s_0) \end{bmatrix}}{[F(s_1) - F(s_0)]^2 + [G(s_1) - G(s_0)]^2} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial s_0}.
 \end{aligned}$$

O determinante é igual a área do paralelogramo formado pelos vetores  $(F'(s_0), G'(s_0))$  e  $(F(s_1) - F(s_0), G(s_1) - G(s_0))$ , ou seja,

$$\det \begin{bmatrix} F'(s_0) & G'(s_0) \\ F(s_1) - F(s_0) & G(s_1) - G(s_0) \end{bmatrix} = \|(F'(s_0), G'(s_0))\| \|(F(s_1) - F(s_0), G(s_1) - G(s_0))\| \sin(\pi - \alpha_0).$$

Sabemos que  $\|(F'(s_1), G'(s_1))\| = 1$  e  $\|(F(s_1) - F(s_0), G(s_1) - G(s_0))\| = L_0$ , então

$$\frac{\partial L(s_0, s_1)}{\partial s_0} = \frac{L_0}{L_0^2} \sin \alpha_0 - \frac{1}{R_0} = \frac{\sin \alpha_0}{L_0} - \frac{1}{R_0} = \frac{R_0 \sin \alpha_0 - L_0}{R_0 L_0}$$

e, conseqüentemente,

$$\frac{\partial s_1(s_0, s_1)}{\partial s_0} = -\frac{\frac{\partial L(s_0, s_1)}{\partial s_0}}{\frac{\partial L(s_0, s_1)}{\partial s_1}} = \frac{\frac{R_0 \sin \alpha_0 - L_0}{R_0 L_0}}{\frac{\sin \alpha_1}{L_0}} = \frac{L_0}{R_0 \sin \alpha_1} - \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha_1}.$$

**P3)** Encontrar  $\frac{d\alpha_1}{ds_0}$ .

Derivando (5.7) implicitamente com relação a  $s_0$ , obtemos

$$\frac{\partial M(s_0, s_1)}{\partial s_0} + \frac{\partial M(s_0, s_1)}{\partial s_1} \frac{\partial s_1}{\partial s_0} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_0}.$$

Mas,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial M(s_0, s_1)}{\partial s_0} &= \left[ -\tan^{-1} \left( \frac{G(s_1) - G(s_0)}{F(s_1) - F(s_0)} \right) \right]' \\
 &= -\frac{-G'(s_0)[F(s_1) - F(s_0)] + F'(s_0)[G(s_1) - G(s_0)]}{[F(s_1) - F(s_0)]^2} \\
 &= -\frac{[G(s_1) - G(s_0)]^2}{1 + \frac{[G(s_1) - G(s_0)]^2}{[F(s_1) - F(s_0)]^2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \det \begin{bmatrix} F'(s_0) & G'(s_0) \\ F(s_1) - F(s_0) & G(s_1) - G(s_0) \end{bmatrix} \\
 &= \frac{[F(s_1) - F(s_0)]^2 + [G(s_1) - G(s_0)]^2}{\| (F'(s_0), G'(s_0)) \| \| (F(s_1) - F(s_0), G(s_1) - G(s_0)) \| \sin(\pi - \alpha_0)} \\
 &= \frac{-L_0 \operatorname{sen} \alpha_0}{L_0^2} \\
 &= \frac{-\operatorname{sen} \alpha_0}{L_0}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial M(s_0, s_1)}{\partial s_1} &= \left[ \tan^{-1} \left( \frac{G'(s_1)}{F'(s_1)} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{G(s_1) - G(s_0)}{F(s_1) - F(s_0)} \right) \right]' \\
 &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial s_1} - \frac{\frac{G'(s_1)[F(s_1) - F(s_0)] - F'(s_1)[G(s_1) - G(s_0)]}{[F(s_1) - F(s_0)]^2}}{1 + \frac{[G(s_1) - G(s_0)]^2}{[F(s_1) - F(s_0)]^2}} \\
 &= \frac{1}{R_1} - \frac{\det \begin{bmatrix} F'(s_1) & G'(s_1) \\ F(s_0) - F(s_1) & G(s_0) - G(s_1) \end{bmatrix}}{[F(s_1) - F(s_0)]^2 + [G(s_1) - G(s_0)]^2} \\
 &= \frac{1}{R_1} - \frac{\| (F'(s_1), G'(s_1)) \| \| (F(s_0) - F(s_1), G(s_0) - G(s_1)) \| \sin(\pi - \alpha_1)}{L_0^2} \\
 &= \frac{1}{R_1} - \frac{L_0 \operatorname{sen} \alpha_1}{L_0^2} \\
 &= \frac{1}{R_1} - \frac{\operatorname{sen} \alpha_1}{L_0}.
 \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_0} &= -\frac{\operatorname{sen} \alpha_0}{L_0} + \left( \frac{1}{R_1} - \frac{\operatorname{sen} \alpha_1}{L_0} \right) \left( \frac{L_0}{R_0 \operatorname{sen} \alpha_1} - \frac{\operatorname{sen} \alpha_0}{\operatorname{sen} \alpha_1} \right) \\
 &= -\frac{\operatorname{sen} \alpha_0}{L_0} + \frac{1}{R_0 R_1 \operatorname{sen} \alpha_1} - \frac{\operatorname{sen} \alpha_0}{R_1 \operatorname{sen} \alpha_1} - \frac{L_0 \operatorname{sen} \alpha_1}{L_0 R_0 \operatorname{sen} \alpha_1} + \frac{\operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_0}{L_0 \operatorname{sen} \alpha_1} \\
 &= \frac{1}{R_0 R_1 \operatorname{sen} \alpha_1} - \frac{\operatorname{sen} \alpha_0}{R_1 \operatorname{sen} \alpha_1} - \frac{1}{R_0} \\
 &= \frac{1 - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0}{R_0 R_1 \operatorname{sen} \alpha_1} - \frac{1}{R_0}
 \end{aligned}$$

**P4)** Encontrar  $\frac{d\alpha_1}{d\alpha_0}$ .

Derivando (5.7) implicitamente com relação a  $\alpha_0$ , obtemos

$$\frac{\partial M(s_0, s_1)}{\partial s_1} \frac{\partial s_1}{\partial \alpha_0} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_0}.$$

Então,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_0} &= \left( \frac{1}{R_1} - \frac{\text{sen } \alpha_1}{L_0} \right) \left( \frac{L_0}{\text{sen } \alpha_1} \right) \\ &= \frac{L_0}{R_1 \text{sen } \alpha_1} - 1.\end{aligned}$$

Portanto,

$$DT(s_0, \alpha_0) = \begin{bmatrix} \frac{L_0}{R_0 \text{sen } \alpha_1} - \frac{\text{sen } \alpha_0}{\text{sen } \alpha_1} & \frac{L_0}{\text{sen } \alpha_1} \\ \frac{L_0 - R_0 \text{sen } \alpha_0}{R_0 R_1 \text{sen } \alpha_1} - \frac{1}{R_0} & \frac{L_0}{R_1 \text{sen } \alpha_1} - 1 \end{bmatrix}$$

Consideremos  $\rho$ , a função mudança de coordenadas, dada por  $(s, \alpha) \mapsto (\varphi, \alpha)$ . Notemos que,

$$D\rho(s, \alpha) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial s} & \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial s} & \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R(\varphi)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

já que  $\frac{\partial s}{\partial \varphi} = R(\varphi)$ ,  $\varphi = \tan\left(\frac{G'(s)}{F'(s)}\right)$  e  $\alpha_{i+1} = \alpha_{i+1}(s_i, \alpha_i)$ .

Logo, a matriz derivada da aplicação  $(\varphi_0, \alpha_0) \xrightarrow{B} (\varphi_1, \alpha_1)$  é dada por

$$\begin{aligned}DB(\varphi_0, \alpha_0) &= D(\rho \circ T \circ \rho^{-1})(\varphi_0, \alpha_0) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{L_0}{R_0 \text{sen } \alpha_1} - \frac{\text{sen } \alpha_0}{\text{sen } \alpha_1} & \frac{L_0}{\text{sen } \alpha_1} \\ \frac{L_0 - R_0 \text{sen } \alpha_0}{R_0 R_1 \text{sen } \alpha_1} - \frac{1}{R_0} & \frac{L_0}{R_1 \text{sen } \alpha_1} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{L_0}{R_0 R_1 \text{sen } \alpha_1} - \frac{\text{sen } \alpha_0}{R_1 \text{sen } \alpha_1} & \frac{L_0}{R_1 \text{sen } \alpha_1} \\ \frac{L_0 - R_0 \text{sen } \alpha_0}{R_0 R_1 \text{sen } \alpha_1} - \frac{1}{R_0} & \frac{L_0}{R_1 \text{sen } \alpha_1} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{L_0 R_0}{R_0 R_1 \text{sen } \alpha_1} - \frac{\text{sen } \alpha_0 R_0}{R_1 \text{sen } \alpha_1} & \frac{L_0}{R_1 \text{sen } \alpha_1} \\ \frac{L_0 R_0 - R_0^2 \text{sen } \alpha_0}{R_0 R_1 \text{sen } \alpha_1} - \frac{R_0}{R_0} & \frac{L_0}{R_1 \text{sen } \alpha_1} - 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{R_1 \text{sen } \alpha_1} \begin{bmatrix} L_0 - R_0 \text{sen } \alpha_0 & L_0 \\ L_0 - R_1 \text{sen } \alpha_1 - R_0 \text{sen } \alpha_0 & L_0 - R_1 \text{sen } \alpha_1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Temos que  $\frac{\partial \pi_1 B}{\partial \alpha_0} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_0} = \frac{L_0}{R_1 \text{sen } \alpha_1}$  onde  $\pi_1$  é a projeção na primeira coordenada. Então, como  $0 < \alpha < \pi$ , segue que  $\frac{\partial \pi_1 B}{\partial \alpha_0} > 0$ .

Mas, sabemos que uma aplicação é Twist monótona se  $\frac{\partial F_1(\varphi_0, \alpha_0)}{\partial \alpha_0} > 0$  onde  $F_1$  é a função primeira coordenada. Logo,  $B$  tem a propriedade de Twist monótona.

**Teorema 5.1.** *Sejam  $\gamma$  uma oval,  $T$  a aplicação de bilhar de  $\gamma$ , definida pelas equações*

$$s_1 = s_1(s_0, \alpha_0) \text{ e } \alpha_1 = \alpha_1(s_0, \alpha_0).$$

Seja  $(\tilde{s}_0, \tilde{\alpha}_0)$  tal que  $(\tilde{s}_1, \tilde{\alpha}_1) = T(\tilde{s}_0, \tilde{\alpha}_0)$ . Então  $T$  é um difeomorfismo local de classe  $C^{k-1}$ , em alguma vizinhança de  $(\tilde{s}_0, \tilde{\alpha}_0)$ .

**Demonstração:** Consideremos  $x = F(s)$  e  $y = G(s)$ , as equações que descrevem  $\gamma$  tendo  $s$  como parâmetro. Sejam  $\tilde{p}_0 = (F(\tilde{s}_0), G(\tilde{s}_0))$  e  $\tilde{p}_1 = (F(\tilde{s}_1), G(\tilde{s}_1))$  pontos pertencentes a  $\gamma$ ,  $p_0 = (F(s_0), G(s_0))$  pertencente a uma vizinhança de  $\tilde{p}_0$  e  $p_1 = (F(s_1), G(s_1))$  pertencente a uma vizinhança de  $\tilde{p}_1$ .

## 5.2. PROPRIEDADES DA APLICAÇÃO DE BILHAR

Analogamente ao teorema anterior,

$$\theta_0 = \varphi_0 + \alpha_0.$$

Suponhamos  $F'(s_0) \neq 0$  e  $F'(s_1) \neq 0$  em vizinhanças pequenas de  $\tilde{s}_0$  e  $\tilde{s}_1$ , respectivamente. Definamos  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  tal que

$$\begin{aligned} f(s_0, \alpha_0, s_1, \alpha_1) &= (U(s_0, \alpha_0, s_1, \alpha_1), V(s_0, \alpha_0, s_1, \alpha_1)) \\ U(s_0, \alpha_0, s_1, \alpha_1) &= L(s_0, s_1) - \alpha_0 = 0 \\ V(s_0, \alpha_0, s_1, \alpha_1) &= M(s_0, s_1) - \alpha_1 = 0 \\ (s_1(\tilde{s}_0, \tilde{\alpha}_0), \alpha_1(\tilde{s}_0, \tilde{\alpha}_0)) &= (\tilde{s}_1, \tilde{\alpha}_1) \end{aligned} \tag{5.8}$$

onde  $L$  e  $M$  são dados pelas equações (5.6) e (5.7).

Pelo Teorema da Função Implícita, se tivermos que

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial s_1} & \frac{\partial U}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial V}{\partial s_1} & \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} \end{bmatrix} \neq 0$$

garantimos que existem funções  $s_1 = s_1(s_0, \alpha_0)$  e  $\alpha_1 = \alpha_1(s_0, \alpha_0)$ , de classe  $C^{k-1}$ , em uma vizinhança de  $(\tilde{s}_0, \tilde{\alpha}_0)$ .

Definamos

$$J := \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial s_1} & \frac{\partial U}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial V}{\partial s_1} & \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} \end{bmatrix}.$$

Por (5.8), temos que

$$\frac{\partial U}{\partial s_1} = \frac{\partial L}{\partial s_1}, \quad \frac{\partial U}{\partial \alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial s_1} = \frac{\partial M}{\partial s_1} \text{ e } \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} = -1.$$

Dessa forma,

$$\det J = \begin{bmatrix} \frac{\partial L(\tilde{s}_0, \tilde{s}_1)}{\partial s_1} & 0 \\ \frac{\partial M(\tilde{s}_0, \tilde{s}_1)}{\partial s_1} & -1 \end{bmatrix} = -\frac{\partial L(\tilde{s}_0, \tilde{s}_1)}{\partial s_1}.$$

Analogamente ao que vimos no resultado anterior,

$$\frac{\partial L(\tilde{s}_0, \tilde{s}_1)}{\partial s_1} = \frac{\det \begin{bmatrix} F'(\tilde{s}_1) & G'(\tilde{s}_1) \\ F(\tilde{s}_0) - F(\tilde{s}_1) & G(\tilde{s}_0) - G(\tilde{s}_1) \end{bmatrix}}{[F(\tilde{s}_1) - F(\tilde{s}_0)]^2 + [G(\tilde{s}_1) - G(\tilde{s}_0)]^2}.$$

O denominador será sempre estritamente positivo, uma vez que  $\tilde{p}_0$  é diferente de  $\tilde{p}_1$ . Precisamos, então, demonstrar que

$$\det \begin{bmatrix} F'(\tilde{s}_1) & G'(\tilde{s}_1) \\ F(\tilde{s}_0) - F(\tilde{s}_1) & G(\tilde{s}_0) - G(\tilde{s}_1) \end{bmatrix} \neq 0$$

mas isto é equivalente a mostrar que os vetores  $(F(\tilde{s}_0) - F(\tilde{s}_1), G(\tilde{s}_0) - G(\tilde{s}_1))$  e  $(F'(\tilde{s}_1), G'(\tilde{s}_1))$  não são paralelos.

Sabemos que  $\tilde{\alpha}_1 \neq 0, \pi$  logo estes não são paralelos. Com isso, concluímos que  $T$  é uma aplicação de classe  $C^{k-1}$  em uma vizinhança de  $(\tilde{s}_0, \tilde{\alpha}_0)$ .

Agora, resta-nos mostrar que a aplicação  $T^{-1}$  é de classe  $C^{k-1}$  em uma vizinhança de  $(\tilde{s}_0, \tilde{\alpha}_0)$ . Para isso, é suficiente considerarmos a aplicação  $T^{-1}(s, \alpha) = T(s, \pi - \alpha)$  em uma vizinhança de  $(\tilde{s}_1, \tilde{\alpha}_1)$ . A demonstração é análoga ao que foi feito anteriormente.

Portanto  $T$  é um difeomorfismo de classe  $C^{k-1}$  em uma vizinhança de  $(\tilde{s}_0, \tilde{\alpha}_0)$ . ■

**Definição 5.4.** Dizemos que um bilhar é **integrável** se existir uma função  $F$ , não constante, denominada **integral primeira**, que satisfaz

$$F = F \circ T.$$

Portanto, num bilhar integrável,  $F$  é constante ao longo das órbitas. Então, as órbitas preenchem, no espaço de fase, curvas invariantes de equação

$$F = \text{cte}$$

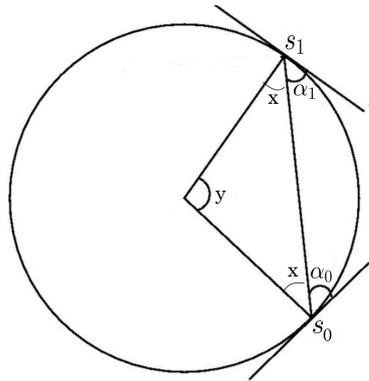
que são curvas de nível da função  $F$ .

Veremos adiante que o bilhar circular e o bilhar elíptico são integráveis. Segundo a conjectura de Birkhoff os únicos bilhares integráveis são em círculos e em elipses, porém esta conjectura ainda está em aberto e muitos matemáticos acreditam ser verdadeira.

### 5.3 Bilhar Circular

Seja  $D$  o disco unitário com fronteira  $B = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1\}$ . A aplicação de bilhar é dada por  $(s_0, \alpha_0) \rightarrow (s_0 + 2\alpha_0, \alpha_0)$ .

De fato, vejamos que a aplicação de bilhar pode ser escrita explicitamente em termos do parâmetro comprimento do círculo  $s$  e do ângulo  $\alpha \in (0, \pi)$ .



**Figura 5.7:** Construção do bilhar circular.

Observemos que no círculo  $\alpha_0 = \alpha_1$ , pois a reta  $t$ , tangente ao círculo em  $s_1$ , é perpendicular ao segmento  $\overline{Os_1}$ , onde  $O$  é o centro do círculo. Além disso, temos que  $s_1 = s_0 + y$ , onde  $y$  é o ângulo entre os segmentos que ligam o centro a  $s_0$  e  $s_1$ .

### 5.3. BILHAR CIRCULAR

Notemos que,

$$x + \alpha_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - \alpha_0$$

e

$$2x + y = \pi \Rightarrow y = \pi - 2x$$

onde  $x$  é o ângulo entre o segmento da trajetória e o segmento que liga  $s_0$  a origem.

Sendo assim,

$$y = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_0\right) = 2\alpha_0.$$

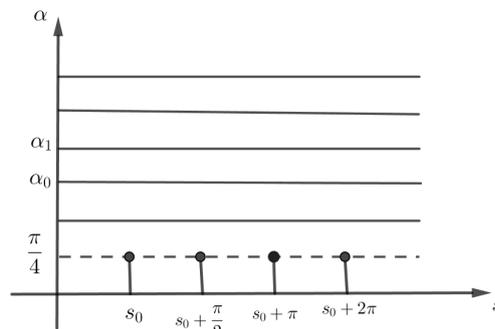
Logo,

$$s_1 = s_0 + 2\alpha_0.$$

Com isso, a aplicação de bilhar para o círculo será:

$$T : \quad A \quad \longrightarrow \quad A \\ (s, \alpha) \quad \mapsto \quad (s + 2\alpha, \alpha).$$

Notemos que a segunda coordenada da aplicação de bilhar do círculo fica preservada, sendo assim o espaço de fase  $(s, \alpha)$  será decomposto por curvas invariantes  $\alpha = \alpha_0$ .



**Figura 5.8:** Espaço de fase da aplicação do bilhar no círculo.

O círculo invariante  $\alpha = \alpha_0$  corresponde a todos os raios que fazem um ângulo constante com a limitação  $B$ . A união destes raios é o anel  $\cos^2 \alpha \leq x^2 + y^2 \leq 1$ .

No resultado a seguir mostraremos que uma cáustica do círculo será  $x^2 + y^2 = \cos^2(\alpha)$ .

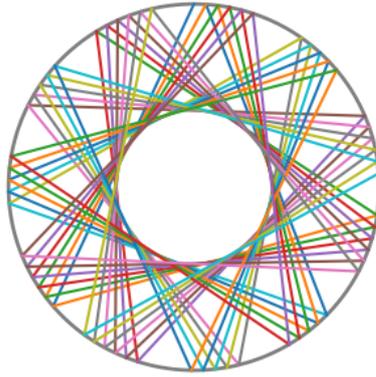


Figura 5.9: Cáustica do círculo.

**Proposição 5.4.** *Cada segmento da trajetória da partícula entre duas colisões consecutivas é tangente ao círculo  $B_\alpha = \{x^2 + y^2 = \cos^2 \alpha\}$  concêntrico com o círculo original  $B$ .*

**Demonstração:** Seja  $C = (0,0)$  o centro do círculo  $B$ . Consideremos duas trajetórias consecutivas cujos pontos de colisão consecutivos são  $s = (x, y)$  e  $\bar{s} = (\bar{x}, \bar{y})$ .

Consideremos um ponto  $p$  no segmento que une os pontos  $s$  e  $\bar{s}$  tal que o segmento que une o centro  $C$  ao ponto  $p$  seja perpendicular a este.

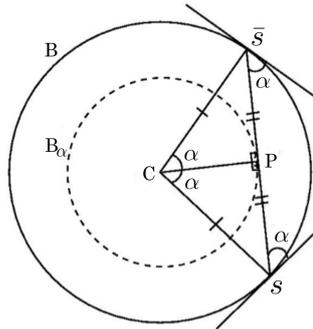


Figura 5.10: Cáustica do bilhar circular.

Notemos que os triângulos  $Csp$  e  $C\bar{s}p$  são semelhantes e, com isso,  $s\hat{C}p = \bar{s}\hat{C}p = \alpha$ . Então, segue que

$$p = \left( \frac{x + \bar{x}}{2}, \frac{y + \bar{y}}{2} \right),$$

ou seja,  $p$  é o ponto médio.

Além disso, como

$$\text{dist}(C, p) = \sqrt{\left(\frac{x + \bar{x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{y + \bar{y}}{2}\right)^2}$$

temos

$$\cos(\alpha) = \sqrt{\left(\frac{x + \bar{x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{y + \bar{y}}{2}\right)^2}.$$

Isto implica que,

$$\cos(\alpha)^2 = \left(\frac{x + \bar{x}}{2}\right)^2 + \left(\frac{y + \bar{y}}{2}\right)^2.$$

Portanto,  $p \in B_\alpha$ .

### 5.3. BILHAR CIRCULAR

Mas, como  $p$  é único ponto tal que o segmento que o une ao centro  $C$  é perpendicular ao segmento que liga  $s$  a  $\bar{s}$ , segue que este último segmento é tangente a  $B_\alpha$  em  $p$ , como queríamos. ■

Analogamente a construção feita anteriormente, temos que a aplicação de bilhar para um círculo de raio  $r$  será dada por

$$\begin{aligned} T : A &\longrightarrow A \\ (s, \alpha) &\mapsto (s + 2r\alpha, \alpha). \end{aligned}$$

Agora, vamos encontrar a função geradora do círculo. Sabemos que,  $\cos(\alpha_0) = \partial_1 h(s_0, s_1)$  e que  $s_1 = s_0 + 2\alpha_0$ , então

$$\partial_1 h(s_0, s_1) = \cos\left(\frac{s_1 - s_0}{2}\right).$$

Integrando em ambos os lados com relação a  $s_0$ , obtemos

$$h(s_0, s_1) = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{s_1 - s_0}{2}\right) + \text{const.}$$

Portanto a função geradora do círculo é:

$$h(s_0, s_1) = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{s_1 - s_0}{2}\right).$$

**Proposição 5.5.** *O bilhar circular é integrável.*

**Demonstração:** Sabemos que a aplicação  $T$  do bilhar circular é dada por

$$T(s_0, \alpha_0) = (s_0 + 2r\alpha_0, \alpha_0)$$

onde  $r$  é o raio do círculo.

A órbita do ponto  $(s_0, \alpha_0)$  é  $\{T^n(s_0, \alpha_0); n \in \mathbb{Z}\}$ , no espaço de fase, e está contida num segmento de reta paralelo ao eixo  $s$  com equação  $\alpha = \alpha_0$ . Se considerarmos  $F(s, \alpha) = \alpha$  teremos que

$$F(T(s, \alpha)) = F(s + 2r\alpha, \alpha) = \alpha = F(s, \alpha)$$

para todo  $(s, \alpha) \in [0, 2\pi) \times (0, \pi)$ .

Com isso, concluímos que o bilhar circular é integrável e  $F(s, \alpha) = \alpha$  é uma integral primeira para  $T$ . ■

**Proposição 5.6.** *Um ponto  $(\varphi_0, \alpha_0)$  no círculo unitário é periódico, de período  $n$ , se, e somente se, existe um número  $k$  tal que*

$$\alpha_0 = \frac{k}{n}\pi$$

com  $k$  e  $n$  primos entre si.

**Demonstração:**

### 5.3. BILHAR CIRCULAR

---

A aplicação de bilhar nas coordenadas  $(\varphi, \alpha)$  é tal que  $T(\varphi_0, \alpha_0) = (\varphi_1, \alpha_1)$ . Por (5.5), temos que

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \alpha_0 + \alpha_1,$$

porém no círculo  $\alpha_0 = \alpha_1$ , logo

$$\varphi_1 = \varphi_0 + 2\alpha_0$$

e, conseqüentemente,

$$T(\varphi_0, \alpha_0) = (\varphi_0 + 2\alpha_0, \alpha_0).$$

Suponhamos que o centro do círculo seja na origem e que  $\varphi_0 = 0$ . Em termos de  $\varphi$ , as equações do círculo são dadas por

$$x(\varphi) = \text{sen } \varphi \text{ e } y(\varphi) = -\text{cos}(\varphi).$$

Como  $T(\varphi_0, \alpha_0) = (\varphi_0 + 2\alpha_0, \alpha_0)$  temos que  $T^n(\varphi_0, \alpha_0) = (\varphi_n, \alpha_n)$  tal que  $\varphi_n = 2n\alpha_0$  e  $\alpha_n = \alpha_0$ , para todo  $n$ . Como a coordenada  $\varphi$  é tal que  $\varphi \equiv \varphi + 2m\pi \pmod{2\pi}$ , segue que dado  $n \geq 0$  existe um único  $p_n \geq 0$  tal que

$$\frac{n\alpha_0}{\pi} - 1 < p_n \leq \frac{n\alpha_0}{\pi}$$

de forma que  $2n\alpha_0 \equiv 2(n\alpha_0 - p_n\pi) \pmod{2\pi}$  e  $0 \leq 2(n\alpha_0 - p_n\pi) < 2\pi$ .

Com isso, temos que a órbita  $\mathcal{O}(\varphi_0, \alpha_0)$  restrita ao conjunto  $0 < \alpha < \pi$  e  $0 \leq \varphi < 2\pi$  é

$$\mathcal{O}(\varphi_0, \alpha_0) = \{(2(n\alpha_0 - p_n\pi), \alpha_0); n \geq 0, \frac{n\alpha_0}{\pi} - 1 < p_n \leq \frac{n\alpha_0}{\pi}\}.$$

Se  $\alpha_0 = \frac{k}{n}\pi$  com  $(k, n) = 1$ , temos

$$\begin{aligned} \varphi_n &= 2(n\alpha_0 - p_n\pi) \\ &= 2\left(n\frac{k}{n}\pi - p_n\pi\right) \\ &= 2\pi(k - p_n) \end{aligned}$$

e, assim,  $\varphi_n \equiv 0 \pmod{2\pi}$ . Portanto, a órbita é periódica.

Vamos provar que o período é  $n$ . Para isso, suponhamos que exista  $m < n$  tal que  $m$  seja o período da órbita. Então, temos que

$$\begin{aligned} \varphi_m &= 2(m\alpha_0 - p_m\pi) \\ &= 2\pi\left(m\frac{k}{n} - p_m\right). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Logo,  $\varphi_m \equiv 0 \pmod{2\pi}$ . Como  $0 \leq 2\pi\left(m\frac{k}{n} - p_m\right) < 2\pi$  e vale (5.9), segue que

$$m\frac{k}{n} - p_m = 0 \Rightarrow m\frac{k}{n} = p_m \in \mathbb{Z}^+.$$

#### 5.4. BILHAR ELÍPTICO

Visto que  $(k, n) = 1$  temos que  $m|n$ , o que gera um absurdo, uma vez que  $m < n$ . Portanto,  $n$  é o período.

Reciprocamente, sabendo que o par  $(\varphi_0, \alpha_0)$  é periódico, de período  $n$ , segue que

$$\begin{aligned} (\varphi_0, \alpha_0) &= T^n(\varphi_0, \alpha_0) \\ &= T^{n-1}(T(\varphi_0, \alpha_0)) \\ &= T^{n-1}(\varphi_0 + 2\alpha_0, \alpha_0) \\ &= T^{n-2}(\varphi_0 + 4\alpha_0, \alpha_0) \\ &= \dots \\ &= (\varphi_0 + n(2\alpha_0), \alpha_0). \end{aligned}$$

Logo,  $0 \equiv n(2\alpha_0) \pmod{2\pi}$ . Então, existe um número  $k$  tal que  $k2\pi = n2\alpha_0$  e, conseqüentemente,  $\alpha_0 = \frac{k}{n}\pi$ .

Resta-nos mostrar que  $(k, n) = 1$ . Para isso, suponhamos que  $(k, n) = d \neq 1$ . Dessa forma, teremos que  $k = d\bar{k}$  e  $n = d\bar{n}$  e, assim,  $\alpha_0 = \frac{\bar{k}}{\bar{n}}\pi$  com  $(\bar{k}, \bar{n}) = 1$ . Logo, pela parte anterior, segue que  $\bar{n}$  é o período da órbita, o que é um absurdo, pois  $\bar{n} < n$ . Portanto,  $(k, n) = 1$ . ■

#### 5.4 Bilhar Elíptico

Uma elipse é um conjunto de pontos cuja soma das distâncias a dois pontos,  $F_1$  e  $F_2$ , é constante. Os pontos fixos são os focos da elipse e a distância entre os focos e a origem chamamos de distância focal. A excentricidade,  $\epsilon$ , é o quociente entre a distância focal e o semi-eixo maior.

Suponhamos que  $\Gamma$  seja uma elipse de excentricidade  $\epsilon$ , com  $0 < \epsilon < 1$ , semi-eixos  $a$  e  $b$  e focos  $F_1$  e  $F_2$ . Temos que

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos t \\ y(t) &= b \sin t \end{aligned}$$

determinam  $\Gamma$ .

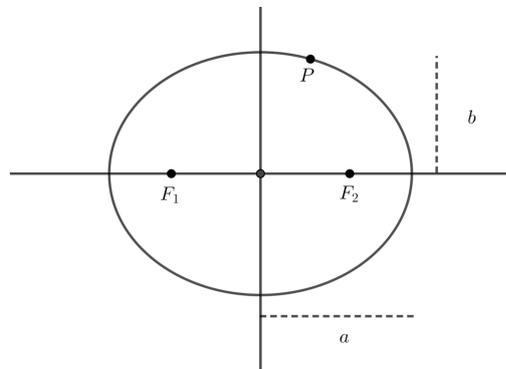


Figura 5.11: Elipse.

#### 5.4. BILHAR ELÍPTICO

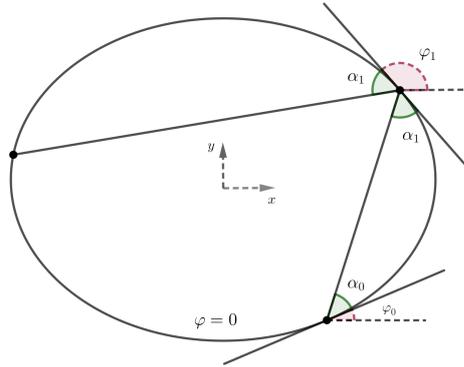
Podemos, também, determinar  $\Gamma$  fazendo

$$x(t) = c \cosh M \cos t$$

$$y(t) = c \sinh M \sin t$$

onde  $c$  é a distância focal, ou seja, a distância do foco a origem e  $M$  é dado por

$$\cosh M = \frac{1}{\epsilon}.$$



**Figura 5.12:** Bilhar elíptico.

Considerando  $\varphi$  o ângulo entre a tangente no ponto e o eixo  $x$ , temos que

$$\tan \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{c \sinh M \cos t}{c \cosh M \sin t} = -\tanh M \cot t.$$

Observemos que

$$\cosh M = \frac{1}{\epsilon} = \frac{a}{c} \text{ e } \cosh^2 M - 1 = \sinh^2 M$$

logo,

$$\sinh^2 M = \frac{1}{\epsilon^2} - 1 = \frac{1 - \epsilon^2}{\epsilon^2} = \frac{\frac{b^2}{a^2}}{\frac{c^2}{a^2}} = \frac{b^2}{c^2}$$

e, conseqüentemente,

$$c \sinh M = b.$$

Portanto,

$$\tan \varphi = -\frac{b}{a} \cot t$$

relaciona os parâmetros  $t$  e  $\varphi$ .

Dessa forma, sabendo que  $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ , temos

$$\sin^2 t = 1 - \frac{a^2 \tan^2 \varphi \sin^2 t}{b^2} = \frac{b^2 - a^2 \tan^2 \varphi \sin^2 t}{b^2},$$

mas isto implica que

$$b^2 \cos^2 \varphi \sin^2 t + a^2 \sin^2 \varphi \sin^2 t = b^2 \cos^2 \varphi.$$

Portanto,

$$\operatorname{sen} t = \frac{b \cos \varphi}{(b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}.$$

Analogamente, como  $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$ , segue que

$$\cos^2 t = 1 - \frac{b^2 \cos^2 \varphi}{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} = \frac{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - b^2 \cos^2 \varphi}{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}.$$

Logo,

$$\cos t = \frac{a \operatorname{sen} \varphi}{(b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}.$$

Sabemos que a curvatura, em termos do parâmetro  $t$ , é dada por  $K(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{\frac{3}{2}}}$  então,

$$K(t) = \frac{(-a \operatorname{sen} t)(-b \operatorname{sen} t) - (b \cos t)(-a \cos t)}{(a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}} = \frac{ab}{(a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} K(\varphi) &= \frac{ab}{\left[ a^2 \left( \frac{b^2 \cos^2 \varphi}{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \right) + b^2 \left( \frac{a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \right) \right]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{ab}{\left( \frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} \right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{(b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}{a^2 b^2}. \end{aligned}$$

Portanto, o raio de curvatura de  $\Gamma$ , em termos do parâmetro  $\varphi$ , será dado por

$$R(\varphi) = \frac{a^2 b^2}{(b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

**Proposição 5.7.** *Sejam  $\Gamma$  uma elipse,  $\overline{T_1 T_2}$  uma reta tangente a  $\Gamma$  em  $P$  e  $F_1$  e  $F_2$  os focos de  $\Gamma$ . Então os ângulos  $F_1 \hat{P} T_1$  e  $F_2 \hat{P} T_2$  são iguais.*

**Demonstração:** Consideremos  $H_1$  e  $H_2$  os pés das perpendiculares a  $\overline{T_1 T_2}$  traçadas a partir de  $F_1$  e  $F_2$ , respectivamente.

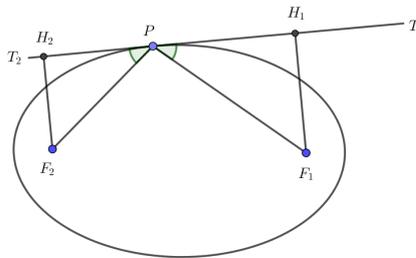


Figura 5.13: Elipse.

Observemos que é suficiente mostrarmos que  $\operatorname{sen} F_1 \hat{P} T_1 = \operatorname{sen} F_2 \hat{P} T_2$ , já que estes ângulos

#### 5.4. BILHAR ELÍPTICO

---

são no máximo  $\frac{\pi}{2}$ . Logo, basta provar que

$$\frac{F_1H_1}{F_1P} = \frac{F_2H_2}{F_2P}.$$

Suponhamos que  $P = (x(t_0), y(t_0))$ . Considerando  $c$  a distância focal da elipse temos que a soma das distâncias do vértice  $(0, b)$  aos focos é igual a  $2\sqrt{b^2 + c^2}$  enquanto que a soma das distâncias do vértice  $(a, 0)$  aos focos é igual a  $2a$ . Logo,  $a = \sqrt{b^2 + c^2}$ .

Sabemos que a equação da elipse é dada por  $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$ , então

$$(x+c)^2 + y^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$

Mas isto implica que,

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \frac{a^2 - cx}{a} = a - \epsilon x.$$

Logo,

$$F_1P = \sqrt{(x(t_0) - c)^2 + y^2(t_0)} = a - \epsilon x = a - \epsilon \cos t_0 = a(1 - \epsilon a \cos t_0) = a|\epsilon \cos t_0 - 1|.$$

Como  $F_1P + F_2P = 2a$  temos

$$F_2P = 2a - (a - \epsilon x) = a + \epsilon x = a(1 + \epsilon \cos t_0) = a|\epsilon \cos t_0 + 1|.$$

Sabemos que  $P = (a \cos t_0, b \sin t_0)$  e o vetor velocidade em  $P$  é dado por  $\vec{v} = (-a \sin t_0, b \cos t_0)$ . Para encontrar o comprimento  $F_1H_1$ , primeiramente vamos encontrar a equação da reta tangente,  $r$ , em  $P$ . Temos que  $r(\lambda) = P + \vec{v}\lambda$ , para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Então, dado  $(x, y) \in r$  obtemos

$$x = a \cos t_0 - (a \sin t_0)\lambda_0$$

$$y = b \sin t_0 + (b \cos t_0)\lambda_0,$$

para algum  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ .

Dessa forma,

$$\lambda_0 = \frac{x - a \cos t_0}{-a \sin t_0} = \frac{y - b \sin t_0}{b \cos t_0}$$

e, conseqüentemente,

$$r : [b \cos t_0]x + [a \sin t_0]y - ab \cos^2 t_0 - ab \sin^2 t_0 = 0.$$

Logo, a equação da reta  $r$  é

$$r : [b \cos t_0]x + [a \sin t_0]y - ab = 0.$$

Com isso,

$$F_1H_1 = d(F_1, r) = \frac{|b \cos t_0 \cdot c + a \sin t_0 \cdot 0 + (-ab)|}{\sqrt{b^2 \cos^2 t_0 + a^2 \sin^2 t_0}} = \frac{ab|\frac{c}{a} \cos t_0 - 1|}{\sqrt{b^2 \cos^2 t_0 + a^2 \sin^2 t_0}} = L|\epsilon \cos t_0 - 1|$$

onde  $L = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 t_0 + a^2 \sin^2 t_0}}$ .  
Analogamente, temos que

$$F_2H_2 = L|\epsilon \cos t_0 + 1|.$$

Logo,

$$\frac{F_1H_1}{F_1P} = \frac{L|\epsilon \cos t_0 - 1|}{a|\epsilon \cos t_0 - 1|} = \frac{L}{a} = \frac{L|\epsilon \cos t_0 + 1|}{a|\epsilon \cos t_0 + 1|} = \frac{F_2H_2}{F_2P}$$

e o resultado segue. ■

**Corolário 5.1.** *Seja  $\overline{T_1T_2}$  como na Proposição 5.7. O simétrico de  $F_1$  relativo a  $\overline{T_1T_2}$  pertence a reta  $\overline{F_2P}$  e, portanto, o menor caminho que une  $F_1$  e  $F_2$  via um ponto da reta  $\overline{T_1T_2}$  é aquele que passa pelo ponto de tangência  $P$ .*

**Demonstração:** Primeiramente, vamos prolongar o segmento  $\overline{F_2P}$  até um ponto  $F'_1$  tal que  $PF_1 = PF'_1$ . Em seguida, tracemos o segmento  $\overline{F_1F'_1}$ .

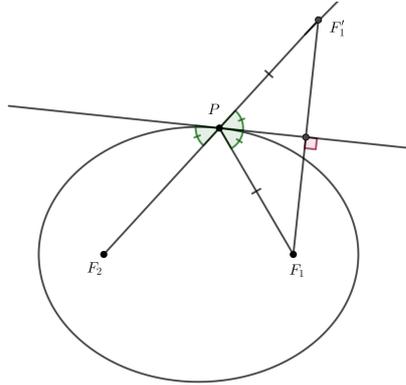


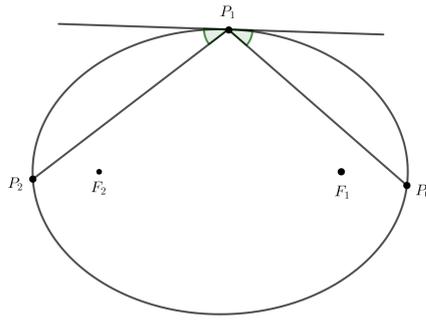
Figura 5.14: Elipse.

Pela proposição anterior, o ângulo  $F_1\hat{P}T_1$  é igual ao ângulo  $F_2\hat{P}T_2$ . Além disso, como os ângulos  $F_2\hat{P}T_2$  e  $T_1\hat{P}F'_1$  são opostos pelo vértice segue que eles são iguais. Com isso concluímos que  $\overline{T_1T_2}$  é bissetriz do ângulo  $F_1\hat{P}F'_1$  e, conseqüentemente, mediatriz do segmento  $\overline{F_1F'_1}$ . Logo,  $F'_1$  pertence a  $\overline{F_2P}$ . ■

Pela Proposição 5.7, concluímos que em qualquer elipse a reta tangente faz ângulos iguais com os raios focais. Assim, uma trajetória do bilhar que passe por um foco continua passando pelos focos, alternando entre eles.

**Proposição 5.8.** *Seja  $(\varphi_0, \alpha_0)$  uma condição inicial dada de modo que o segmento inicial da trajetória,  $\overline{P_0P_1}$ , não passe pelos focos. Se  $\overline{P_0P_1}$  passar exteriormente aos focos, todos os outros segmentos da trajetória serão tangentes a uma mesma elipse confocal com  $\Gamma$ . Se  $\overline{P_0P_1}$  passar interiormente aos focos, os segmentos serão tangentes a uma mesma hipérbole confocal com  $\Gamma$ .*

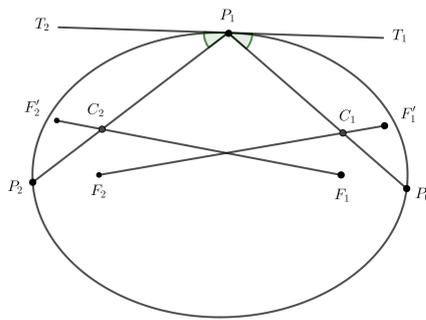
**Demonstração:** Consideremos uma elipse  $\Gamma$  de focos  $F_1$  e  $F_2$  e  $\overline{P_0P_1}$  o segmento inicial da trajetória de uma órbita que não passa pelos focos e  $\overline{P_1P_2}$  o segmento refletido após o impacto com  $\Gamma$  em  $P_1$ .



**Figura 5.15:** Bilhar elíptico - trajetória passando fora do segmento que une os focos.

Tomemos  $F'_1$  como a reflexão do ponto  $F_1$  com relação ao segmento  $\overline{P_0P_1}$  e  $F'_2$  como a reflexão do ponto  $F_2$  com relação a  $\overline{P_1P_2}$ . Tracemos as retas  $\overline{F_1F'_2}$  e  $\overline{F'_1F_2}$  e definamos os pontos  $C_1$  e  $C_2$  por

$$C_1 = \overline{F'_1F_2} \cap \overline{P_0P_1} \text{ e } C_2 = \overline{F_1F'_2} \cap \overline{P_1P_2}.$$

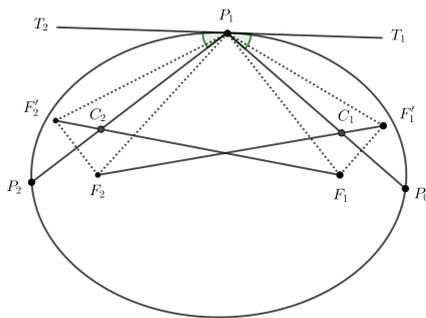


**Figura 5.16:** Bilhar elíptico - trajetória passando fora do segmento que une os focos.

Seja  $\overline{T_1T_2}$  a reta tangente a  $\Gamma$  em  $P_1$ . Sabemos que os ângulos  $\hat{P}_0\hat{P}_1T_1$  e  $\hat{P}_2\hat{P}_1T_2$  são iguais e pela Proposição 5.7 concluímos que  $F_1\hat{P}_1T_1 = F_2\hat{P}_1T_2$ . Dessa forma, teremos que os ângulos  $F_1\hat{P}_1P_0$  e  $F_2\hat{P}_1P_2$  são iguais.

O segmento  $\overline{P_0P_1}$  é mediatriz do segmento  $\overline{F_1F'_1}$ , por construção, e daí os ângulos  $F_1\hat{P}_1C_1$  e  $F'_1\hat{P}_1C_1$  são iguais, ou equivalentemente,  $F_1\hat{P}_1P_0 = F'_1\hat{P}_1P_0$  e, além disso,  $F_1P_1 = F'_1P_1$ .

De forma análoga, como  $\overline{P_1P_2}$  é mediatriz do segmento  $\overline{F_2F'_2}$  temos  $F_2\hat{P}_1P_2 = F'_2\hat{P}_1P_2$  e  $F_2P_1 = F'_2P_1$ .



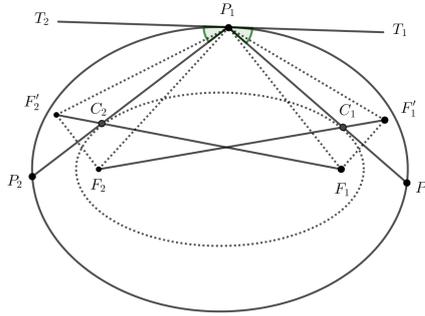
**Figura 5.17:** Bilhar elíptico - trajetória passando fora do segmento que une os focos.

Com isso, concluímos que  $F_1\hat{P}_1F'_1 = F_2\hat{P}_1F'_2$  e, conseqüentemente,

$$F_2\hat{P}_1F'_1 = F_1\hat{P}_1F'_2.$$

Pelo critério LLL, concluímos que os triângulos  $P_1F_2F'_1$  e  $P_1F'_2F_1$  são congruentes. Uma vez que,  $F_2\hat{P}_1F'_1 = F_1\hat{P}_1F'_2$ ,  $P_1F'_1 = P_1F_1$ ,  $P_1F_2 = P_1F'_2$  e, portanto,  $F'_1F_2 = F_1F'_2$ .

Como o segmento  $\overline{P_0P_1}$  é bissetriz do ângulo  $F_1\hat{P}_1F'_1$  e o segmento  $\overline{P_1P_2}$  é bissetriz do ângulo  $F_2\hat{P}_1F'_2$  consideraremos que  $\overline{P_0P_1}$  seja tangente a uma elipse de focos  $F_1$  e  $F_2$  no ponto  $C_1$  e que  $\overline{P_1P_2}$  seja tangente a uma elipse com focos também em  $F_1$  e  $F_2$  no ponto  $C_2$ . Mostraremos que as duas elipses coincidem.



**Figura 5.18:** Bilhar elíptico - trajetória passando fora do segmento que une os focos.

Para que  $C_1$  e  $C_2$  pertençam a mesma elipse precisamos que as somas das distâncias de  $C_1$  e  $C_2$  até os focos  $F_1$  e  $F_2$  sejam iguais, ou seja,

$$C_1F_1 + C_1F_2 = C_2F_1 + C_2F_2.$$

Como  $F_1C_1 = F'_1C_1$  e  $F_2C_2 = F'_2C_2$  então

$$F_2C_1 + F_1C_1 = F_2C_1 + F'_1C_1 = F'_1F_2$$

e

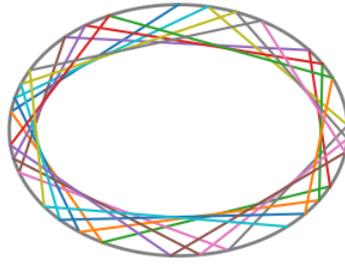
$$F_1C_2 + F_2C_2 = F_1C_2 + F'_2C_2 = F_1F'_2.$$

Como  $F_1F'_2 = F'_1F_2$  segue que  $F_1C_2 + F_2C_2 = F_1C_1 + F_2C_1$ . Portanto,  $C_1$  e  $C_2$  estão sobre a mesma elipse,  $\tilde{\Gamma}$ , de focos  $F_1$  e  $F_2$  e semi-eixo menor  $\tilde{a}(\varphi_0, \alpha_0)$  dado por

$$2\tilde{a} = F'_1F_2.$$

Como  $F_2C_1F_1$  é o menor caminho que une os dois focos via um ponto da reta  $\overline{P_0P_1}$ , concluímos, pelo Corolário 5.1, que  $C_1$  é o ponto de tangência entre  $\overline{P_0P_1}$  e  $\tilde{\Gamma}$ .

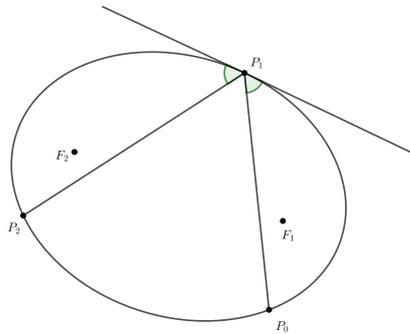
Analogamente,  $C_2$  é o ponto de tangência entre  $\overline{P_1P_2}$  e  $\tilde{\Gamma}$ .



**Figura 5.19:** Bilhar elíptico - trajetória passando fora do segmento que une os focos.

Agora, faremos o caso em que o segmento  $\overline{P_0P_1}$  não passa entre os focos.

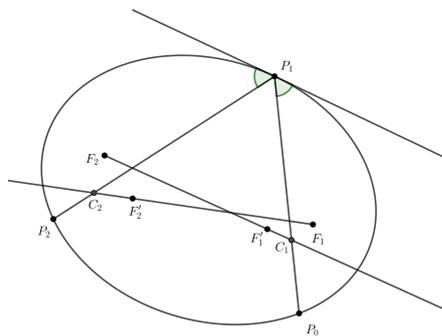
Consideremos uma elipse com focos  $F_1$  e  $F_2$  e  $\overline{P_0P_1}$  o segmento inicial da trajetória de uma órbita que passa entre os focos e  $\overline{P_1P_2}$  o segmento refletido após o impacto com  $\Gamma$  em  $P_1$ .



**Figura 5.20:** Bilhar elíptico - trajetória passando pelo segmento que une os focos.

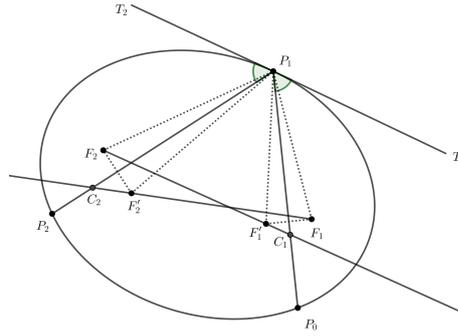
Consideremos  $F'_1$  e  $F'_2$  os simétricos de  $F_1$  e  $F_2$  relativos a  $\overline{P_0P_1}$  e  $\overline{P_1P_2}$ , respectivamente. Definamos

$$C_1 = \overline{F'_1F_2} \cap \overline{P_0P_1} \text{ e } C_2 = \overline{F_1F'_2} \cap \overline{P_1P_2}.$$



**Figura 5.21:** Bilhar elíptico - trajetória passando pelo segmento que une os focos.

Analogamente ao que fizemos no caso anterior, teremos que  $\overline{P_1P_2}$  é mediatriz do segmento  $F_2F'_2$  e daí  $F_2\hat{P}_1C_2 = F'_2\hat{P}_1C_2$ ,  $F_2P_1 = F'_2P_1$ ,  $F_1\hat{P}_1C_1 = F'_1\hat{P}_1C_1$  e  $F_1P_1 = F'_1P_1$ .



**Figura 5.22:** Bilhar elíptico - trajetória passando pelo segmento que une os focos.

Temos que

$$F_2C_1 - F_1C_1 = F_2C_1 - F_1' C_1 = F_1' F_2 \quad (5.10)$$

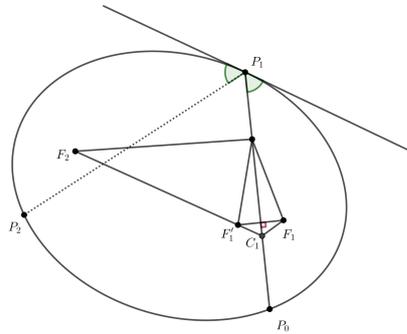
e  $F_1C_2 - F_2C_2 = F_1C_2 - F_2' C_2 = F_1F_2'$ . Além disso, temos que  $F_1' F_2 = F_1F_2'$ , com mesma argumentação do caso anterior.

Conseqüentemente,

$$F_2C_1 - F_1C_1 = F_1C_2 - F_2C_2.$$

Logo,  $C_1$  e  $C_2$  estão sobre uma hipérbole  $\tilde{\Gamma}(\varphi_0, \alpha_0)$  que possui  $\tilde{a}(\varphi_0, \alpha_0)$  como semi-eixo.

Vamos mostrar que  $C_1$  e  $C_2$  são os pontos de tangência. Consideremos  $C_1' \neq C_1$  um ponto pertencente a  $\overline{P_0P_1}$ .



**Figura 5.23:** Bilhar elíptico - trajetória passando pelo segmento que une os focos.

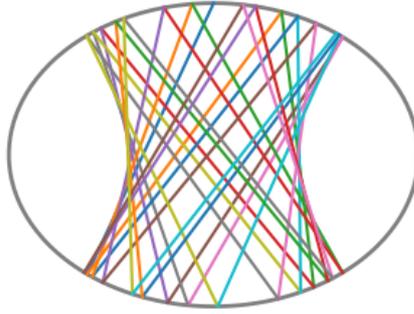
Observemos que  $C_1'$  não pertencerá a reta  $\overline{F_1'F_2}$ , logo  $F_2, F_1'$  e  $C_1'$  não são colineares. Dessa maneira,  $F_2C_1' < F_1'F_2 + F_1'C_1' = F_1'F_2 + F_1C_1'$  e, conseqüentemente,

$$F_2C_1' - F_1C_1' < F_1'F_2 = F_2C_1 - F_1C_1 \text{ (por (5.10))}.$$

Então, como  $C_1'$  é arbitrário segue que

$$F_2C_1 - F_1C_1 = \max\{F_2C - F_1C; C \text{ pertence a } \overline{P_0P_1}\}.$$

E assim,  $C_1$  é o ponto de tangência entre  $\tilde{\Gamma}$  e  $\overline{P_0P_1}$ . Analogamente, concluímos que  $C_2$  é o ponto de tangência entre  $\tilde{\Gamma}$  e  $\overline{P_1P_2}$ .



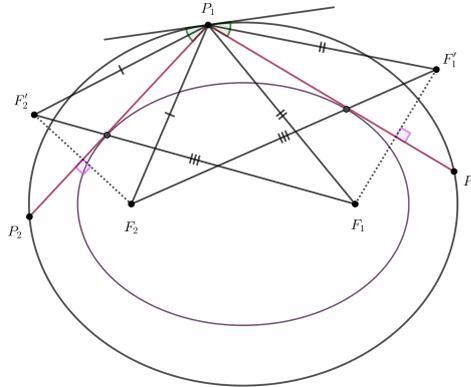
**Figura 5.24:** Bilhar elíptico - trajetórias passando pelo segmento que une os focos.

**Proposição 5.9.** A excentricidade  $\tilde{\epsilon}(\varphi_0, \alpha_0)$  da cáustica,  $\tilde{\Gamma}(\varphi_0, \alpha_0)$ , de uma trajetória do bilhar elíptico é dada por

$$\tilde{\epsilon}(\varphi_0, \alpha_0) = \epsilon \left[ \frac{(1 - \epsilon^2) \cos^2 \alpha_0 + \epsilon^2 \sin^2 \varphi_0}{1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

onde  $0 < \epsilon < 1$  é a excentricidade de  $\Gamma$ .

**Demonstração:** Sejam  $\overline{P_0P_1}$  e  $\overline{P_1P_2}$  dois segmentos consecutivos da trajetória de bilhar. Vamos refletir  $F_1$  em  $\overline{P_0P_1}$  para  $F'_1$  e  $F_2$  em  $\overline{P_1P_2}$  para  $F'_2$ .



**Figura 5.25:** Bilhar elíptico.

Sabemos que  $2\tilde{a} = F'_1F_2$ , ou seja, o semi-eixo  $\tilde{a}$  é dado por

$$\tilde{a}(\varphi_0, \alpha_0) = \frac{F'_1F_2}{2}. \quad (5.11)$$

Além disso,  $\tilde{\epsilon}(\varphi_0, \alpha_0) = \frac{c}{\tilde{a}(\varphi_0, \alpha_0)}$ . Então, se determinarmos o ponto  $F'_1$  obtemos  $\tilde{\epsilon}(\varphi_0, \alpha_0)$ . Para isso, consideremos  $H_1 = \overline{P_0P_1} \cap \overline{F_1F'_1}$  e então

$$H_1 = \frac{F_1 + F'_1}{2}. \quad (5.12)$$

Observemos que  $\vec{u} = (\cos(\varphi_0 + \alpha_0), \sin(\varphi_0 + \alpha_0))$  e  $\vec{v} = (\sin(\varphi_0 + \alpha_0), -\cos(\varphi_0 + \alpha_0))$  são vetores diretores das retas que passam por  $\overline{P_0P_1}$  e  $\overline{F_1F'_1}$ , respectivamente.

Suponhamos que  $P_0 = (a \cos t_0, b \sen t_0)$ . As equações das retas  $\overline{P_0P_1}$  e  $\overline{F_1F'_1}$  são

$$L_1(\lambda) = P_0 + \lambda \vec{u} = (a \cos t_0, b \sen t_0) + \lambda(\cos(\varphi_0 + \alpha_0), \sen(\varphi_0 + \alpha_0))$$

$$L_2(\mu) = F_1 + \mu \vec{v} = (c, 0) + \mu(\sen(\varphi_0 + \alpha_0), -\cos(\varphi_0 + \alpha_0)),$$

respectivamente, onde  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

Como  $H_1 \in L_1$  e  $H_1 \in L_2$ , existem  $\lambda_0, \mu_0 \in \mathbb{R}$  tais que

$$H_1 = P_0 + \lambda_0 \vec{u} \text{ e } H_1 = F_1 + \mu_0 \vec{v}.$$

Dessa forma,

$$(a \cos t_0, b \sen t_0) + \lambda_0(\cos(\varphi_0 + \alpha_0), \sen(\varphi_0 + \alpha_0)) = (c, 0) + \mu_0(\sen(\varphi_0 + \alpha_0), -\cos(\varphi_0 + \alpha_0))$$

ou seja,

$$\begin{cases} a \cos t_0 + \lambda_0 \cos(\varphi_0 + \alpha_0) = c + \mu_0 \sen(\varphi_0 + \alpha_0) \\ b \sen t_0 + \lambda_0 \sen(\varphi_0 + \alpha_0) = -\mu_0 \cos(\varphi_0 + \alpha_0) \end{cases}.$$

Podemos encontrar  $\lambda_0$  e  $\mu_0$  resolvendo o sistema

$$\begin{cases} \cos(\varphi_0 + \alpha_0)\lambda_0 - \sen(\varphi_0 + \alpha_0)\mu_0 = c - a \cos t_0 \\ \sen(\varphi_0 + \alpha_0)\lambda_0 + \cos(\varphi_0 + \alpha_0)\mu_0 = -b \sen t_0 \end{cases}.$$

Temos que  $\lambda_0 = c \cos(\varphi_0 + \alpha_0) - a \cos t_0 \cos(\varphi_0 + \alpha_0) - b \sen t_0 \sen(\varphi_0 + \alpha_0)$  e  $\mu_0 = -c \sen(\varphi_0 + \alpha_0) + a \cos t_0 \sen(\varphi_0 + \alpha_0) - b \sen t_0 \cos(\varphi_0 + \alpha_0) = -b \sen t_0 \cos(\varphi_0 + \alpha_0) - (c - a \cos t_0) \sen(\varphi_0 + \alpha_0)$ .

Por (5.12), concluímos que

$$\begin{aligned} F'_1 &= 2H_1 - F_1 \\ &= 2(F_1 + \mu_0 \vec{v}) - F_1 \\ &= F_1 + 2\mu_0 \vec{v} \\ &= (c, 0) + 2\mu_0(\sen(\varphi_0 + \alpha_0), -\cos(\varphi_0 + \alpha_0)) \\ &= (c + 2\mu_0 \sen(\varphi_0 + \alpha_0), -2\mu_0 \cos(\varphi_0 + \alpha_0)). \end{aligned}$$

Por (5.11), temos

$$\begin{aligned} (2\tilde{a})^2 &= (F'_1 F_2)^2 \\ &= [c + 2\mu_0 \sen(\varphi_0 + \alpha_0) + c]^2 + [2\mu_0 \cos(\varphi_0 + \alpha_0)]^2 \\ &= [2c + 2\mu_0 \sen(\varphi_0 + \alpha_0)]^2 + [2\mu_0 \cos(\varphi_0 + \alpha_0)]^2. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Substituindo o valor de  $\mu_0$  em (5.13), obtemos

$$\begin{aligned}
 (2\tilde{a})^2 &= \{[2c + 2(-b \operatorname{sen} t_0 \cos(\varphi_0 + \alpha_0) - (c - a \cos t_0) \operatorname{sen}(\varphi_0 + \alpha_0)) \operatorname{sen}(\varphi_0 + \alpha_0)]^2 \\
 &\quad + [2(-b \operatorname{sen} t_0 \cos(\varphi_0 + \alpha_0) - (c - a \cos t_0) \operatorname{sen}(\varphi_0 + \alpha_0)) \cos(\varphi_0 + \alpha_0)]^2\} \\
 &= 2c + (-2b \operatorname{sen} t_0 \cos(\varphi_0 + \alpha_0) - 2c \operatorname{sen}(\varphi_0 + \alpha_0) + 2a \cos t_0 \operatorname{sen}(\varphi_0 + \alpha_0)) \operatorname{sen}(\varphi_0 + \alpha_0))^2 \\
 &\quad + [-2b \operatorname{sen} t_0 \cos^2(\varphi_0 + \alpha_0) - 2c \operatorname{sen}(\varphi_0 + \alpha_0) \cos(\varphi_0 + \alpha_0) + 2a \cos t_0 \operatorname{sen}(\varphi_0 + \alpha_0) \\
 &\quad \cos(\varphi_0 + \alpha_0)]^2 \\
 &= [2c - 2b \operatorname{sen} t_0 \cos(\varphi_0 + \alpha_0) \operatorname{sen}(\varphi_0 + \alpha_0) - 2c \operatorname{sen}^2(\varphi_0 + \alpha_0) + 2a \cos t_0 \operatorname{sen}^2(\varphi_0 + \alpha_0)]^2 \\
 &\quad + [-2b \operatorname{sen} t_0 \cos^2(\varphi_0 + \alpha_0) - 2c \operatorname{sen}(\varphi_0 + \alpha_0) \cos(\varphi_0 + \alpha_0) + 2a \cos t_0 \operatorname{sen}(\varphi_0 + \alpha_0) \\
 &\quad \cos(\varphi_0 + \alpha_0)]^2 \\
 &= [-2b \operatorname{sen} t_0 \cos(\varphi_0 + \alpha_0) \operatorname{sen}(\varphi_0 + \alpha_0) + 2c \cos^2(\varphi_0 + \alpha_0) + 2a \cos t_0 \operatorname{sen}^2(\varphi_0 + \alpha_0)]^2 \\
 &\quad + [-2b \operatorname{sen} t_0 \cos^2(\varphi_0 + \alpha_0) - 2c \operatorname{sen}(\varphi_0 + \alpha_0) \cos(\varphi_0 + \alpha_0) + 2a \cos t_0 \operatorname{sen}(\varphi_0 + \alpha_0) \\
 &\quad \cos(\varphi_0 + \alpha_0)]^2.
 \end{aligned}$$

Denotando  $A = \operatorname{sen}(\varphi_0 + \alpha_0) \cos(\varphi_0 + \alpha_0)$  encontramos

$$\begin{aligned}
 (2\tilde{a})^2 &= [-2b \operatorname{sen} t_0 A + 2c \cos^2(\varphi_0 + \alpha_0) + 2a \cos t_0 \operatorname{sen}^2(\varphi_0 + \alpha_0)]^2 + [-2b \operatorname{sen} t_0 \cos^2(\varphi_0 + \alpha_0) \\
 &\quad - 2cA + 2a \cos t_0 A]^2. \\
 &= [4b^2 \operatorname{sen}^2 t_0 A^2 - 4bcA \operatorname{sen} t_0 \cos^2(\varphi_0 + \alpha_0) - 4abA \operatorname{sen} t_0 \cos t_0 \operatorname{sen}^2(\varphi_0 + \alpha_0) - 4bcA \\
 &\quad \operatorname{sen} t_0 \cos^2(\varphi_0 + \alpha_0) + 4c^2 \cos^4(\varphi_0 + \alpha_0) + 4acA^2 \cos t_0 - 4abA \operatorname{sen} t_0 \cos t_0 \operatorname{sen}^2(\varphi_0 + \\
 &\quad \alpha_0) + 4acA^2 \cos t_0 + 4a^2 \cos^2 t_0 \operatorname{sen}^4(\varphi_0 + \alpha_0)] + [4b^2 \operatorname{sen}^2 t_0 \cos^4(\varphi_0 + \alpha_0) + 4bcA \operatorname{sen} t_0 \\
 &\quad \cos^2(\varphi_0 + \alpha_0) - 4abA \operatorname{sen} t_0 \cos t_0 \cos^2(\varphi_0 + \alpha_0) + 4bcA \operatorname{sen} t_0 \cos^2(\varphi_0 + \alpha_0) + 4c^2 A^2 \\
 &\quad - 4acA^2 \cos t_0 - 4abA \operatorname{sen} t_0 \cos t_0 \cos^2(\varphi_0 + \alpha_0) - 4acA^2 \cos t_0 + 4a^2 A^2 \cos^2 t_0] \\
 &= 4b^2 A^2 \operatorname{sen}^2 t_0 + 4c^2 \cos^4(\varphi_0 + \alpha_0) + 4a^2 \cos^2 t_0 \operatorname{sen}^4(\varphi_0 + \alpha_0) + 4b^2 \operatorname{sen}^2 t_0 \cos^4(\varphi_0 + \alpha_0) \\
 &\quad - 8abA \operatorname{sen} t_0 \cos t_0 + 4c^2 A^2 + 4a^2 A^2 \cos^2 t_0 \\
 &= 4b^2 \cos^2(\varphi_0 + \alpha_0) \operatorname{sen}^2 t_0 + 4c^2 \cos^2(\varphi_0 + \alpha_0) - 8abA \operatorname{sen} t_0 \cos t_0 + 4a^2 \cos^2 t_0 \operatorname{sen}^2(\varphi_0 + \\
 &\quad \alpha_0) \\
 &= 4[a \cos t_0 \operatorname{sen}(\varphi_0 + \alpha_0) - b \operatorname{sen} t_0 \cos(\varphi_0 + \alpha_0)]^2 + 4c^2 \cos^2(\varphi_0 + \alpha_0).
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\tilde{a}^2 = [a \cos t_0 \operatorname{sen}(\varphi_0 + \alpha_0) - b \operatorname{sen} t_0 \cos(\varphi_0 + \alpha_0)]^2 + c^2 \cos^2(\varphi_0 + \alpha_0)$$

e, conseqüentemente,

$$\tilde{a}(\varphi_0, \alpha_0) = \{[a \cos t_0 \operatorname{sen}(\varphi_0 + \alpha_0) - b \operatorname{sen} t_0 \cos(\varphi_0 + \alpha_0)]^2 + c^2 \cos^2(\varphi_0 + \alpha_0)\}^{\frac{1}{2}}.$$

Sabendo que  $a = c \cosh M$ ,  $b = c \operatorname{senh} M$  e  $\operatorname{sen} t = \frac{\operatorname{senh} M \cos \varphi}{(\cosh^2 M \operatorname{sen}^2 \varphi + \operatorname{senh}^2 M \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}$  e

$\cos t = \frac{\cosh M \operatorname{sen} \varphi}{(\cosh^2 M \operatorname{sen}^2 \varphi + \sinh^2 M \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}$ , segue que

$$\tilde{a}(\varphi_0, \alpha_0) = \left\{ \left[ \frac{c \cosh^2 M \operatorname{sen} \varphi_0 \operatorname{sen}(\varphi_0 + \alpha_0) + c \sinh^2 M \cos \varphi_0 \cos(\varphi_0 + \alpha_0)}{(\cosh^2 M \operatorname{sen}^2 \varphi + \sinh^2 M \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \right]^2 + c^2 \cos^2(\varphi_0 + \alpha_0) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Logo,

$$\tilde{a}(\varphi_0, \alpha_0) = c \left\{ \frac{[\cosh^2 M \operatorname{sen} \varphi_0 \operatorname{sen}(\varphi_0 + \alpha_0) + \sinh^2 M \cos \varphi_0 \cos(\varphi_0 + \alpha_0)]^2}{\cosh^2 M \operatorname{sen}^2 \varphi + \sinh^2 M \cos^2 \varphi} + \cos^2(\varphi_0 + \alpha_0) \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (5.14)$$

Como  $\epsilon = \frac{1}{\cosh M}$  temos que  $\sinh^2 M = \cosh^2 M - 1 = \frac{1}{\epsilon^2} - 1 = \frac{1-\epsilon^2}{\epsilon^2}$ . Substituindo em (5.14) obtemos

$$\tilde{a}(\varphi_0, \alpha_0) = c \left\{ \frac{\left[ \left( \frac{1}{\epsilon^2} \right) \operatorname{sen} \varphi_0 \operatorname{sen}(\varphi_0 + \alpha_0) + \left( \frac{1-\epsilon^2}{\epsilon^2} \right) \cos \varphi_0 \cos(\varphi_0 + \alpha_0) \right]^2}{\left( \frac{1}{\epsilon^2} \right) \operatorname{sen}^2 \varphi + \left( \frac{1-\epsilon^2}{\epsilon^2} \right) \cos^2 \varphi_0} + \cos^2(\varphi_0 + \alpha_0) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

e, portanto,

$$\tilde{a}(\varphi_0, \alpha_0) = \frac{c}{\epsilon} \left\{ \frac{[\operatorname{sen} \varphi_0 \operatorname{sen}(\varphi_0 + \alpha_0) + (1 - \epsilon^2) \cos \varphi_0 \cos(\varphi_0 + \alpha_0)]^2}{1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0} + \epsilon^2 \cos^2(\varphi_0 + \alpha_0) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Denotando  $j = \operatorname{sen} \varphi_0 \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \varphi_0 \cos \alpha_0$  e  $B_1 = \operatorname{sen} \varphi_0 \operatorname{sen}(\varphi_0 + \alpha_0) + (1 - \epsilon^2) \cos \varphi_0 \cos(\varphi_0 + \alpha_0)]^2$ , temos

$$\begin{aligned} B_1 &= \operatorname{sen}^2 \varphi_0 \operatorname{sen}^2(\varphi_0 + \alpha_0) + 2 \operatorname{sen} \varphi_0 \operatorname{sen}(\varphi_0 + \alpha_0)(1 - \epsilon^2) \cos \varphi_0 \cos(\varphi_0 + \alpha_0) + (1 - \epsilon^2)^2 \\ &\quad \cos^2 \varphi_0 \cos^2(\varphi_0 + \alpha_0) \\ &= \operatorname{sen}^2 \varphi_0 [\operatorname{sen}^2 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 + 2j + \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi_0] + 2(1 - \epsilon^2) \operatorname{sen} \varphi_0 \cos \varphi_0 (\operatorname{sen} \varphi_0 \cos \alpha_0 + \\ &\quad \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \varphi_0)(\cos \varphi_0 \cos \alpha_0 - \operatorname{sen} \varphi_0 \operatorname{sen} \alpha_0) + (1 - \epsilon^2)^2 \cos^2 \varphi_0 (\cos^2 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 - 2j + \\ &\quad \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \operatorname{sen}^2 \varphi_0) \\ &= \operatorname{sen}^4 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 + 2j \operatorname{sen}^2 \varphi_0 + \operatorname{sen}^2 \varphi_0 \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi_0 + (2 - 2\epsilon^2) \operatorname{sen} \varphi_0 \cos \varphi_0 (\cos^2 \alpha_0 \\ &\quad \operatorname{sen} \varphi_0 \cos \varphi_0 - \operatorname{sen}^2 \varphi_0 \cos \alpha_0 \operatorname{sen} \alpha_0 + \cos^2 \varphi_0 \cos \alpha_0 \operatorname{sen} \alpha_0 - \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \cos \varphi_0 \operatorname{sen} \varphi_0) + \\ &\quad (1 - 2\epsilon^2 + \epsilon^4)(\cos^4 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 - 2j \cos^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \operatorname{sen}^2 \varphi_0) \\ &= \operatorname{sen}^4 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 + 2j \operatorname{sen}^2 \varphi_0 + \operatorname{sen}^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 \operatorname{sen}^2 \alpha_0 + 2 \cos^2 \alpha_0 \operatorname{sen}^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 - 2j \\ &\quad \operatorname{sen}^2 \varphi_0 + 2j \cos^2 \varphi_0 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi_0 \operatorname{sen}^2 \varphi_0 - 2\epsilon^2 \cos^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi_0 \operatorname{sen}^2 \varphi_0 + 2\epsilon^2 j \\ &\quad \operatorname{sen}^2 \varphi_0 - 2\epsilon^2 j \cos^2 \varphi_0 + 2\epsilon^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi_0 \operatorname{sen}^2 \varphi_0 + \cos^4 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 - 2j \cos^2 \varphi_0 + \\ &\quad \cos^2 \varphi_0 \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \operatorname{sen}^2 \varphi_0 - 2\epsilon^2 \cos^4 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 + 4j\epsilon^2 \cos^2 \varphi_0 - 2\epsilon^2 \cos^2 \varphi_0 \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \operatorname{sen}^2 \varphi_0 \\ &\quad + \epsilon^4 \cos^4 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 - 2\epsilon^4 j \cos^2 \varphi_0 + \epsilon^4 \cos^2 \varphi_0 \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \operatorname{sen}^2 \varphi_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \cos^2 \alpha_0 (\sin^4 \varphi_0 + \cos^4 \varphi_0) + 2 \cos^2 \alpha_0 \sin^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 - 2\epsilon^2 \cos^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \varphi_0 \\
&\quad + 2\epsilon^2 j (1 - \cos^2 \varphi_0) - 2\epsilon^2 j \cos^2 \varphi_0 + 4j\epsilon^2 \cos^2 \varphi_0 + 2\epsilon^2 \sin^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \varphi_0 \\
&\quad - 2\epsilon^2 \cos^4 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 - 2\epsilon^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha_0 \sin^2 \varphi_0 + \epsilon^4 \cos^4 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 - 2\epsilon^4 j \cos^2 \varphi_0 \\
&\quad + \epsilon^4 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha_0.
\end{aligned}$$

Então,

$$B_1 = \cos^2 \alpha_0 - 2\epsilon^2 \cos^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi_0 + 2\epsilon^2 j + \epsilon^4 \cos^4 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 - 2\epsilon^4 j \cos^2 \varphi_0 + \epsilon^4 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha_0.$$

Além disso, denotando  $B_2 = (1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0) \cos^2(\varphi_0 + \alpha_0)$ , temos

$$\begin{aligned}
B_2 &= (1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0) (\cos^2 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 - 2j + \sin^2 \alpha_0 \sin^2 \varphi_0) \\
&= \cos^2 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 - 2j + \sin^2 \alpha_0 \sin^2 \varphi_0 - \epsilon^2 \cos^4 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 + 2\epsilon^2 j \cos^2 \varphi_0 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0 \\
&\quad \sin^2 \alpha_0 \sin^2 \varphi_0 \\
&= \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 - 2j\epsilon^2 + \epsilon^2 \sin^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha_0 - \epsilon^4 \cos^4 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 + 2j\epsilon^4 \cos^2 \varphi_0 - \\
&\quad \epsilon^4 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha_0.
\end{aligned}$$

Observemos que  $\tilde{a}(\varphi_0, \alpha_0) = \frac{c}{\epsilon} \left\{ \frac{B_1 + B_2}{1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0} \right\}^{\frac{1}{2}}$ . Então,

$$\begin{aligned}
\tilde{a}(\varphi_0, \alpha_0) &= \frac{c}{\epsilon} \left\{ \frac{\cos^2 \alpha_0 + \epsilon^2 \sin^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha_0 - \epsilon^2 \cos^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi_0}{1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0} \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{c}{\epsilon} \left\{ \frac{\cos^2 \alpha_0 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 + \epsilon^2 \sin^2 \varphi_0 - \epsilon^2 \cos^2 \alpha_0 \sin^2 \varphi_0}{1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0} \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{c}{\epsilon} \left\{ \frac{\cos^2 \alpha_0 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 + \epsilon^2 \sin^2 \varphi_0 - \epsilon^2 \cos^2 \alpha_0 + \epsilon^2 \cos^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi_0}{1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0} \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{c}{\epsilon} \left\{ \frac{(1 - \epsilon^2) \cos^2 \alpha_0 + \epsilon^2 \sin^2 \varphi_0}{1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0} \right\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\tilde{\epsilon} = \frac{c}{\tilde{a}} = \epsilon \left\{ \frac{(1 - \epsilon^2) \cos^2 \alpha_0 + \epsilon^2 \sin^2 \varphi_0}{1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0} \right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

■

**Proposição 5.10.** *Consideremos  $\tilde{a}$  o semi-eixo maior da cáustica,  $\tilde{\Gamma}(\varphi_0, \alpha_0)$ , e  $\tilde{b}$  o semi-eixo menor. Se  $\tilde{a} > c$  então  $\tilde{\Gamma}(\varphi_0, \alpha_0)$  é uma elipse e  $\tilde{b}(\varphi_0, \alpha_0)$  satisfaz a equação*

$$\frac{\tilde{b}^2}{b^2} = \frac{\cos^2 \alpha_0 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0}{1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0}.$$

*Se  $\tilde{a} < c$ ,  $\tilde{\Gamma}(\varphi_0, \alpha_0)$  é uma hipérbole e seu semi-eixo conjugado  $\tilde{b}(\varphi_0, \alpha_0)$  satisfaz*

$$\frac{\tilde{b}^2}{b^2} = -\frac{\cos^2 \alpha_0 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0}{1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0}.$$

**Demonstração:** Se  $\tilde{a} > c$  temos que  $\tilde{\Gamma}$  é uma elipse e satisfaz  $\tilde{a}^2 = \tilde{b}^2 + c^2$ , ou seja,  $\tilde{b}^2 = \tilde{a}^2 - c^2$ . Dessa forma,

$$\frac{\tilde{b}^2}{b^2} = \frac{1}{b^2} \tilde{a}^2 - \frac{1}{b^2} c^2.$$

Mas,  $\tilde{a} = \frac{c}{\epsilon} \left[ \frac{(1 - \epsilon^2) \cos^2 \alpha_0 + \epsilon^2 \sin^2 \varphi_0}{1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0} \right]^{\frac{1}{2}}$  e  $b = \frac{c\sqrt{1 - \epsilon^2}}{\epsilon}$ . Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{b}^2}{b^2} &= \frac{\epsilon^2}{c^2(1 - \epsilon^2)} \frac{c^2 (1 - \epsilon^2) \cos^2 \alpha_0 + \epsilon^2 \sin^2 \varphi_0}{1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0} - \frac{\epsilon^2}{c^2(1 - \epsilon^2)} c^2 \\ &= \frac{1}{1 - \epsilon^2} \left[ \frac{(1 - \epsilon^2) \cos^2 \alpha_0 + \epsilon^2 \sin^2 \varphi_0}{1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0} - \epsilon^2 \right] \\ &= \frac{1}{1 - \epsilon^2} \left[ \frac{(1 - \epsilon^2) \cos^2 \alpha_0 + \epsilon^2(1 - \cos^2 \varphi_0) - \epsilon^2 + \epsilon^4 \cos^2 \varphi_0}{1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0} \right] \\ &= \frac{1}{1 - \epsilon^2} \left[ \frac{(1 - \epsilon^2) \cos^2 \alpha_0 - \epsilon^2(1 - \epsilon^2) \cos^2 \varphi_0}{1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0} \right] \\ &= \frac{\cos^2 \alpha_0 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0}{1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0}. \end{aligned}$$

Se  $\tilde{a} < c$  obtemos uma hipérbole, conseqüentemente  $c^2 = \tilde{b}^2 + \tilde{a}^2$ . Ou seja,  $\tilde{b}^2 = c^2 - \tilde{a}^2 = -(\tilde{a}^2 - c^2)$ . Logo,

$$\frac{\tilde{b}^2}{b^2} = - \left( \frac{\tilde{a}}{b^2} - \frac{c^2}{b^2} \right) = - \frac{\cos^2 \alpha_0 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0}{1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0}.$$

■

Agora, daremos uma interpretação física para o valor de  $\tilde{b}(\varphi_0, \alpha_0)$ .

O momento linear de uma partícula é o produto de sua massa  $m$  por sua velocidade  $\vec{v}$ . Enquanto o momento angular ( $L$ ) de uma partícula, em relação a um ponto, é o produto vetorial de sua posição por seu momento linear. Tal grandeza está associada a translação e rotação da partícula.

Se a partícula está em movimento retilíneo uniforme, o momento angular é constante. De fato, se  $\vec{r}(t)$  é a posição em função do tempo temos

$$L(t) = m\vec{r}(t) \times \vec{v} \implies \frac{dL(t)}{dt} = m\vec{v} \times \vec{v} + m\vec{r}(t) \times \vec{0} = \vec{0}.$$

Podemos notar este fato observando que  $L$  tem mesma direção e sentido e sua intensidade é dada pela área do paralelogramo gerado por  $\vec{r}$  e  $\vec{v}$ .

Voltando ao bilhar elíptico, temos que a bola de bilhar faz um movimento retilíneo uniforme entre um impacto e outro, dessa maneira o momento angular permanece constante no percurso e ao atingir o bordo a velocidade muda de direção.

Definamos os momentos angulares  $L_1$  e  $L_2$  da bola, em relação aos focos  $F_1$  e  $F_2$ , num instante  $t$  por

$$L_1(t) = \vec{r}_1(t) \times \vec{v}(t)$$

$$L_2(t) = \vec{r}_2(t) \times \vec{v}(t)$$

onde  $\vec{r}_1(t)$  e  $\vec{r}_2(t)$  são os vetores posição da bola referentes a  $F_1$  e  $F_2$ , respectivamente, e  $v(t)$  o

vetor velocidade.

Como o produto escalar  $L(t) = L_1(t) \cdot L_2(t)$  é constante ao longo de cada segmento, podemos determinar  $L(t)$  dando os valores nos instantes em que ocorre a colisão da bola com  $\Gamma$ .

**Proposição 5.11.** *Seja uma elipse  $\Gamma$ , com semi-eixos  $a > 1$  e  $b = 1$ . Dada uma condição inicial  $(\varphi_0, \alpha_0)$ , o produto escalar  $L(\varphi_0, \alpha_0)$ , é dado por*

$$L(\varphi_0, \alpha_0) = \frac{\cos^2 \alpha_0 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0}{1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0}.$$

**Demonstração:** Suponhamos que  $\vec{v}(\varphi_0, \alpha_0) = (\cos(\varphi_0 + \alpha_0), \sin(\varphi_0 + \alpha_0))$ . Então,

$$\begin{aligned} L &= \vec{r}_1 \times \vec{v} \cdot \vec{r}_2 \times \vec{v} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 & \vec{v} \cdot \vec{r}_2 \\ \vec{v} \cdot \vec{r}_1 & \vec{v} \cdot \vec{v} \end{vmatrix} \\ &= \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 - (\vec{v} \cdot \vec{r}_1)(\vec{v} \cdot \vec{r}_2). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Consideremos  $P_0 = (a \cos t_0, \sin t_0)$  pertencente a  $\Gamma$ , o ponto onde a partícula se encontra inicialmente.

Então,

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 &= \overline{P_0 F_1} \cdot \overline{P_0 F_2} \\ &= (-c - a \cos t_0, -\sin t_0) \cdot (c - a \cos t_0, -\sin t_0) \\ &= -(c + a \cos t_0)(c - a \cos t_0) + \sin^2 t_0 \\ \text{(ii)} \quad \vec{v} \cdot \vec{r}_2 &= (\cos(\varphi_0 + \alpha_0), \sin(\varphi_0 + \alpha_0)) \cdot (c - a \cos t_0, -\sin t_0) \\ &= (c - a \cos t_0) \cos(\varphi_0 + \alpha_0) - \sin t_0 \sin(\varphi_0 + \alpha_0) \\ \text{(iii)} \quad \vec{v} \cdot \vec{r}_1 &= (\cos(\varphi_0 + \alpha_0), \sin(\varphi_0 + \alpha_0)) \cdot (-c - a \cos t_0, -\sin t_0) \\ &= -(c + a \cos t_0) \cos(\varphi_0 + \alpha_0) - \sin t_0 \sin(\varphi_0 + \alpha_0). \end{aligned}$$

Substituindo estas relações em (5.15), obtemos

$$\begin{aligned} L &= -(c + a \cos t_0)(c - a \cos t_0) + \sin^2 t_0 + [(c - a \cos t_0) \cos(\varphi_0 + \alpha_0) - \sin(\varphi_0 + \alpha_0) \sin t_0] \\ &\quad [(c + a \cos t_0) \cos(\varphi_0 + \alpha_0) + \sin t_0 \sin(\varphi_0 + \alpha_0)] \\ &= -c^2 + ac \cos t_0 - ac \cos t_0 + a^2 \cos^2 t_0 + \sin^2 t_0 + [c \cos(\varphi_0 + \alpha_0) - a \cos t_0 \cos(\varphi_0 + \alpha_0) \\ &\quad - \sin(\varphi_0 + \alpha_0) \sin t_0][c \cos(\varphi_0 + \alpha_0) + a \cos t_0 \cos(\varphi_0 + \alpha_0) + \sin t_0 \sin(\varphi_0 + \alpha_0)] \\ &= -c^2 + a^2 \cos^2 t_0 + \sin^2 t_0 + c^2 \cos^2(\varphi_0 + \alpha_0) + ac \cos t_0 \cos^2(\varphi_0 + \alpha_0) + c \cos(\varphi_0 + \alpha_0) \\ &\quad \sin t_0 \sin(\varphi_0 + \alpha_0) - ac \cos t_0 \cos^2(\varphi_0 + \alpha_0) - a^2 \cos^2 t_0 \cos^2(\varphi_0 + \alpha_0) - a \cos t_0 \cos(\varphi_0 + \alpha_0) \\ &\quad \sin t_0 \sin(\varphi_0 + \alpha_0) - c \cos(\varphi_0 + \alpha_0) \sin(\varphi_0 + \alpha_0) \sin t_0 - a \cos t_0 \cos(\varphi_0 + \alpha_0) - \sin(\varphi_0 + \\ &\quad \alpha_0) \sin t_0 + \sin^2 t_0 \sin^2(\varphi_0 + \alpha_0) \end{aligned}$$

$$= -c^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_0 + \alpha_0) + a^2 \cos^2 t_0 \operatorname{sen}^2(\varphi_0 + \alpha_0) + \operatorname{sen}^2 t_0 \cos^2(\varphi_0 + \alpha_0) - 2a \cos t_0 \cos(\varphi_0 + \alpha_0) \operatorname{sen} t_0 \operatorname{sen}(\varphi_0 + \alpha_0). \quad (5.16)$$

Sabemos que  $b = 1$  e  $a = \frac{c}{\epsilon}$  então, substituindo em  $a^2 = b^2 + c^2$ , obtemos  $c^2 = \frac{c^2}{\epsilon^2} - 1 = \frac{c^2 - \epsilon^2}{\epsilon^2}$ . Portanto,

$$c^2 = \frac{\epsilon^2}{1 - \epsilon^2}.$$

Além disso, concluímos que

$$a^2 = 1 + \frac{\epsilon^2}{1 - \epsilon^2} = \frac{1 - \epsilon^2 + \epsilon^2}{1 - \epsilon^2} = \frac{1}{1 - \epsilon^2}.$$

E, conseqüentemente,  $a = \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}$ .

Além disso, sabemos que

$$\epsilon = \frac{1}{\cosh M}, \quad \operatorname{sen} t = \frac{b \cos \varphi}{(b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{e} \quad \cos t = \frac{a \operatorname{sen} \varphi}{(b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

logo

$$\begin{aligned} \operatorname{senh}^2 M &= \frac{1 - \epsilon^2}{\epsilon^2} \\ \cos t_0 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \frac{\operatorname{sen} \varphi_0}{\left(\frac{1}{1 - \epsilon^2} \operatorname{sen}^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\operatorname{sen} \varphi_0}{(1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0)^{\frac{1}{2}}} \\ \operatorname{sen} t_0 &= \frac{\cos \varphi_0}{\left(\frac{1}{1 - \epsilon^2} \operatorname{sen}^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\cos \varphi_0 (1 - \epsilon)^{\frac{1}{2}}}{(1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Agora, vamos determinar o valor de  $L$ . Para isso, observemos inicialmente que,

- $\operatorname{sen}^2(\varphi_0 + \alpha_0) = \operatorname{sen}^2 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 + 2 \operatorname{sen} \varphi_0 \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \alpha_0 \cos \varphi_0 + \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi_0$
- $\cos^2(\varphi_0 + \alpha_0) = \cos^2 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 - 2 \operatorname{sen} \varphi_0 \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \alpha_0 \cos \varphi_0 + \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \operatorname{sen}^2 \varphi_0$
- $\operatorname{sen}(\varphi_0 + \alpha_0) \cos(\varphi_0 + \alpha_0) = \operatorname{sen} \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 \cos \varphi_0 + \operatorname{sen} \alpha_0 \cos^2 \varphi_0 \cos \alpha_0 - \operatorname{sen}^2 \alpha_0 \operatorname{sen} \varphi_0 \cos \varphi_0 - \operatorname{sen}^2 \varphi_0 \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \alpha_0$   
 $= \operatorname{sen} \varphi_0 \cos \varphi_0 (\cos^2 \alpha_0 - \operatorname{sen}^2 \alpha_0) + \cos \alpha_0 \operatorname{sen} \alpha_0 (\cos^2 \varphi_0 - \operatorname{sen}^2 \varphi_0).$

Denotemos  $j = \operatorname{sen} \varphi_0 \operatorname{sen} \alpha_0 \cos \alpha_0 \cos \varphi_0$ . Observemos que podemos escrever  $L = l_1 + l_2$ , onde  $l_1 = -c^2 \operatorname{sen}^2(\varphi_0 + \alpha_0) + a^2 \cos^2 t_0 \operatorname{sen}^2(\varphi_0 + \alpha_0) + \operatorname{sen}^2 t_0 \cos^2(\varphi_0 + \alpha_0)$  e  $l_2 = -2a \cos t_0 \cos(\varphi_0 + \alpha_0) \operatorname{sen} t_0 \operatorname{sen}(\varphi_0 + \alpha_0)$ . Então,

$$\begin{aligned}
 l_1 &= - \left( \frac{\epsilon^2}{1 - \epsilon^2} \right) \text{sen}^2(\varphi_0 + \alpha_0) + \left( \frac{1}{1 - \epsilon^2} \right) \frac{\text{sen}^2 \varphi_0}{(1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0)} \text{sen}^2(\varphi_0 + \alpha_0) + \frac{(1 - \epsilon^2) \cos^2 \varphi_0}{(1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0)} \\
 &\quad \cos^2(\varphi_0 + \alpha_0) \\
 &= \left( \frac{1}{(1 - \epsilon^2)(1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0)} \right) [-\epsilon^2 \text{sen}^2(\varphi_0 + \alpha_0) + \epsilon^4 \text{sen}^2(\varphi_0 + \alpha_0) \cos^2 \varphi_0 + \text{sen}^2 \varphi_0 \\
 &\quad \text{sen}^2(\varphi_0 + \alpha_0) + \cos^2 \varphi_0 \cos^2(\varphi_0 + \alpha_0) - 2\epsilon^2 \cos^2 \varphi_0 \cos^2(\varphi_0 + \alpha_0) + \epsilon^4 \cos \varphi_0 \cos^2(\varphi_0 + \alpha_0)].
 \end{aligned}$$

Mas,  $\cos^2(\varphi_0 + \alpha_0) = 1 - \text{sen}^2(\varphi_0 + \alpha_0)$ , então

$$\begin{aligned}
 l_1 &= \left( \frac{1}{(1 - \epsilon^2)(1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0)} \right) [-\epsilon^2 \text{sen}^2(\varphi_0 + \alpha_0) + \text{sen}^2 \varphi_0 \text{sen}^2(\varphi_0 + \alpha_0) + \cos^2 \varphi_0 \\
 &\quad \cos^2(\varphi_0 + \alpha_0) - 2\epsilon^2 \cos^2 \varphi_0 \cos^2(\varphi_0 + \alpha_0) + \epsilon^4 \cos \varphi_0] \\
 &= \left( \frac{1}{(1 - \epsilon^2)(1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0)} \right) [-\epsilon^2(\text{sen}^2 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 + 2j + \text{sen}^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi_0) + \text{sen}^2 \varphi_0 \\
 &\quad (\text{sen}^2 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 + 2j + \text{sen}^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi_0) + \cos^2 \varphi_0 (\cos^2 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 - 2j + \text{sen}^2 \alpha_0 \text{sen}^2 \varphi_0) \\
 &\quad - 2\epsilon^2 \cos^2 \varphi_0 (\cos^2 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 - 2j + \text{sen}^2 \alpha_0 \text{sen}^2 \varphi_0) + \epsilon^4 \cos \varphi_0] \\
 &= \left( \frac{1}{(1 - \epsilon^2)(1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0)} \right) [\cos^2 \alpha_0 (\text{sen}^4 \varphi_0 + \cos^4 \varphi_0) + 2j(\text{sen}^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_0) + 2 \text{sen}^2 \varphi_0 \\
 &\quad \text{sen}^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi_0 - 2\epsilon^2 \cos^4 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 + 4\epsilon^2 j \cos^2 \varphi_0 - 2\epsilon^2 \cos^2 \varphi_0 \text{sen}^2 \varphi_0 \text{sen}^2 \alpha_0 - \epsilon^2 \text{sen}^2 \varphi_0 \\
 &\quad \cos^2 \alpha_0 - 2\epsilon^2 j - \epsilon^2 \text{sen}^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi_0 + \epsilon^4 \cos^2 \varphi_0].
 \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
 l_2 &= 2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \right) \frac{\text{sen} \varphi_0}{(1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0)^{\frac{1}{2}}} \frac{\sqrt{1 - \epsilon^2} \cos \varphi_0}{(1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0)^{\frac{1}{2}}} \cos(\varphi_0 + \alpha_0) \text{sen}(\varphi_0 + \alpha_0) \\
 &= \frac{2 \text{sen} \varphi_0 \cos \varphi_0 \cos(\varphi_0 + \alpha_0) \text{sen}(\varphi_0 + \alpha_0)}{1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0} \\
 &= \frac{2 \text{sen} \varphi_0 \cos \varphi_0 [\text{sen} \varphi_0 \cos \varphi_0 (\cos^2 \alpha_0 - \text{sen}^2 \alpha_0) + \cos \alpha_0 \text{sen} \alpha_0 (\cos^2 \varphi_0 - \text{sen}^2 \varphi_0)]}{1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 (1 - \epsilon^2)l_2 &= \frac{1}{1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0} [2 \text{sen}^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 (\cos^2 \alpha_0 - \text{sen}^2 \alpha_0) + \cos \alpha_0 \text{sen} \alpha_0 (\cos^2 \varphi_0 - \text{sen}^2 \varphi_0) \\
 &\quad - 2\epsilon^2 \text{sen}^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 (\cos^2 \alpha_0 - \text{sen}^2 \alpha_0) - 2\epsilon^2 \cos \alpha_0 \text{sen} \alpha_0 (\cos^2 \varphi_0 - \text{sen}^2 \varphi_0)] \\
 &= \frac{1}{1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0} [2 \text{sen}^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 - 2 \text{sen}^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 \text{sen}^2 \alpha_0 + 2j \cos^2 \varphi_0 - 2j \\
 &\quad \text{sen}^2 \varphi_0 - 2\epsilon^2 \text{sen}^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 + 2\epsilon^2 \text{sen}^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 \text{sen}^2 \alpha_0 - 2\epsilon^2 j \cos^2 \varphi_0 + \\
 &\quad 2\epsilon^2 j \text{sen}^2 \varphi_0].
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
L &= l_1 + l_2 \\
&= \left( \frac{1}{(1-\epsilon^2)(1-\epsilon^2 \cos^2 \varphi_0)} \right) [\cos^2 \alpha_0 (\sin^4 \varphi_0 + \cos^4 \varphi_0) + 2j(\sin^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_0) + 2 \sin^2 \varphi_0 \\
&\quad \sin^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi_0 - 2\epsilon^2 \cos^4 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 + 4\epsilon^2 j \cos^2 \varphi_0 - 2\epsilon^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha_0 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi_0 \\
&\quad \cos^2 \alpha_0 - 2\epsilon^2 j - \epsilon^2 \sin^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi_0 + \epsilon^4 \cos^2 \varphi_0] + l_2 \\
&= \left( \frac{1}{(1-\epsilon^2)(1-\epsilon^2 \cos^2 \varphi_0)} \right) \cos^2 \alpha_0 (\sin^4 \varphi_0 + \cos^4 \varphi_0) + 2j(\sin^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_0) + 2 \sin^2 \varphi_0 \\
&\quad \sin^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi_0 - 2\epsilon^2 \cos^4 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 + 4\epsilon^2 j \cos^2 \varphi_0 - 2\epsilon^2 \cos^2 \varphi_0 \sin^2 \varphi_0 \sin^2 \alpha_0 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi_0 \\
&\quad \cos^2 \alpha_0 - 2\epsilon^2 j - \epsilon^2 \sin^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi_0 + \epsilon^4 \cos^2 \varphi_0 + (1-\epsilon^2)l_2 \\
&= \left( \frac{1}{(1-\epsilon^2)(1-\epsilon^2 \cos^2 \varphi_0)} \right) [\cos^2 \alpha_0 (\sin^4 \varphi_0 + \cos^4 \varphi_0) - 2\epsilon^2 \cos^4 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 \\
&\quad - \epsilon^2 \sin^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi_0 + \epsilon^4 \cos^2 \varphi_0 + 2 \sin^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 - 2\epsilon^2 \sin^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0] \\
&= \left( \frac{1}{(1-\epsilon^2)(1-\epsilon^2 \cos^2 \varphi_0)} \right) [\cos^2 \alpha_0 (1 - 2 \sin^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0) - 2\epsilon^2 \cos^4 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 - \epsilon^2 \sin^2 \varphi_0 \\
&\quad \cos^2 \alpha_0 - \epsilon^2 \sin^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi_0 + \epsilon^4 \cos^2 \varphi_0 + 2 \sin^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 - 2\epsilon^2 \sin^2 \varphi_0 \cos^2 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0] \\
&= \left( \frac{1}{(1-\epsilon^2)(1-\epsilon^2 \cos^2 \varphi_0)} \right) [\cos^2 \alpha_0 - 2\epsilon^2 \cos^2 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 (\cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0) - \epsilon^2 \sin^2 \varphi_0 \cos^2 \alpha_0 \\
&\quad + \epsilon^4 \cos^2 \varphi_0 - \epsilon^2 \sin^2 \alpha_0 \cos^2 \varphi_0] \\
&= \left( \frac{1}{(1-\epsilon^2)(1-\epsilon^2 \cos^2 \varphi_0)} \right) [\cos^2 \alpha_0 - \epsilon^2 \cos \alpha_0 (\cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0) + \epsilon^4 \cos^2 \varphi_0 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0 \\
&\quad (\cos^2 \alpha_0 + \sin^2 \alpha_0)] \\
&= \left( \frac{1}{(1-\epsilon^2)(1-\epsilon^2 \cos^2 \varphi_0)} \right) [\cos^2 \alpha_0 - \epsilon^2 \cos \alpha_0 + \epsilon^4 \cos^2 \varphi_0 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0] \\
&= \left( \frac{1}{(1-\epsilon^2)(1-\epsilon^2 \cos^2 \varphi_0)} \right) [\cos^2 \alpha_0 (1-\epsilon^2) + \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0 (\epsilon^2 - 1)]
\end{aligned}$$

Portanto,

$$L(\varphi_0, \alpha_0) = \frac{\cos^2 \alpha_0 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0}{1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0}.$$

■

**Proposição 5.12.** *O momento angular  $L$  é conservado num choque, ou seja,  $L_{antes} = L_{depois}$ .*

**Demonstração:** Sabemos que os raios focais fazem ângulos iguais com a tangente e, conseqüentemente, com a normal. Denotemos por  $\beta$  o ângulo que a tangente  $T$  faz com o segmento  $\overline{PF_1}$ , onde  $P$  é o ponto do choque e  $F_1$  o foco. Consideremos  $\alpha$  o ângulo entre a trajetória de bilhar e a reta tangente em  $P$ .

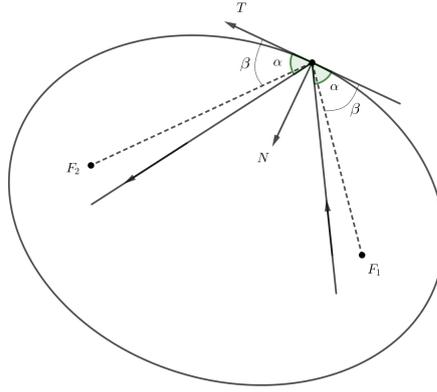


Figura 5.26: Bilhar elíptico.

Observemos que

$$\vec{v}_{antes} = v_{T_a} \vec{T} + v_{N_a} \vec{N}$$

$$\vec{v}_{depois} = v_{T_d} \vec{T} + v_{N_d} \vec{N}$$

então,

$$\vec{v}_a = v(\cos \alpha \vec{T} - \text{sen } \alpha \vec{N})$$

$$\vec{v}_d = v(\cos \alpha \vec{T} + \text{sen } \alpha \vec{N})$$

onde  $\vec{v}_{antes} = \vec{v}_a$  e  $\vec{v}_{depois} = \vec{v}_d$ .

Além disso,

$$\vec{r}_1 = r_1(\cos \beta \vec{T} - \text{sen } \beta \vec{N})$$

$$\vec{r}_2 = r_2(-\cos \beta \vec{T} - \text{sen } \beta \vec{N}).$$

Mas, sabemos que  $L = \vec{r} \times \vec{v}$ , então

$$L_{1_{antes}} = \vec{r}_1 \times \vec{v}_a = vr_1(-\cos \beta \text{sen } \alpha + \text{sen } \beta \cos \alpha) \hat{k}$$

$$L_{2_{antes}} = \vec{r}_2 \times \vec{v}_a = vr_2(\cos \beta \text{sen } \alpha + \text{sen } \beta \cos \alpha) \hat{k}$$

onde  $\hat{k} = \vec{T} \times \vec{N}$ .

Portanto,

$$\begin{aligned} L_{antes} &= L_{1_{antes}} \cdot L_{2_{antes}} \\ &= vr_1(-\cos \beta \text{sen } \alpha + \text{sen } \beta \cos \alpha) \hat{k} \cdot vr_2(\cos \beta \text{sen } \alpha + \text{sen } \beta \cos \alpha) \hat{k} \\ &= v^2 r_1 r_2 (-\cos^2 \beta \text{sen}^2 \alpha + \text{sen}^2 \beta \cos^2 \alpha) \\ &= v^2 r_1 r_2 (-\cos^2 \beta (1 - \cos^2 \alpha) + (1 - \cos^2 \beta) \cos^2 \alpha) \\ &= v^2 r_1 r_2 (\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta). \end{aligned}$$

Analogamente, temos que

$$L_{1_{depois}} = \vec{r}_1 \times \vec{v}_d = vr_1(\cos \beta \text{sen } \alpha + \text{sen } \beta \cos \alpha) \hat{k}$$

$$L_{2_{depois}} = \vec{r}_2 \times \vec{v}_d = vr_2(-\cos \beta \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha)\hat{k}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} L_{depois} &= L_{1_{depois}} \cdot L_{2_{depois}} \\ &= v^2 r_1 r_2 (\cos \beta \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha) (-\cos \beta \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha) \\ &= v^2 r_1 r_2 (-\cos^2 \beta \operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \beta \cos^2 \alpha) \\ &= v^2 r_1 r_2 (\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta). \end{aligned}$$

Com isso, concluímos o resultado desejado. ■

### 5.4.1 Espaço de fase do bilhar elíptico

Consideremos a função

$$F(\varphi, \alpha) = \frac{\cos^2 \alpha - \epsilon^2 \cos^2 \varphi}{1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi} \quad (5.17)$$

onde  $0 < \epsilon < 1$  é a excentricidade de  $\Gamma$ . Suponhamos que  $b = 1$ , semi-eixo menor, e que  $(\varphi_0, \alpha_0)$  é uma condição inicial.

Temos que  $F(\varphi, \alpha)$  é constante ao longo das órbitas cujas trajetórias são tangentes a uma mesma cáustica. Com isso concluímos que o bilhar elíptico é integrável. A função (5.17) é dita uma integral primeira para o bilhar elíptico.

As curvas de nível da função  $F(\varphi, \alpha)$ , esboçadas na figura abaixo nos fornecem a estrutura do espaço de fase do bilhar elíptico.

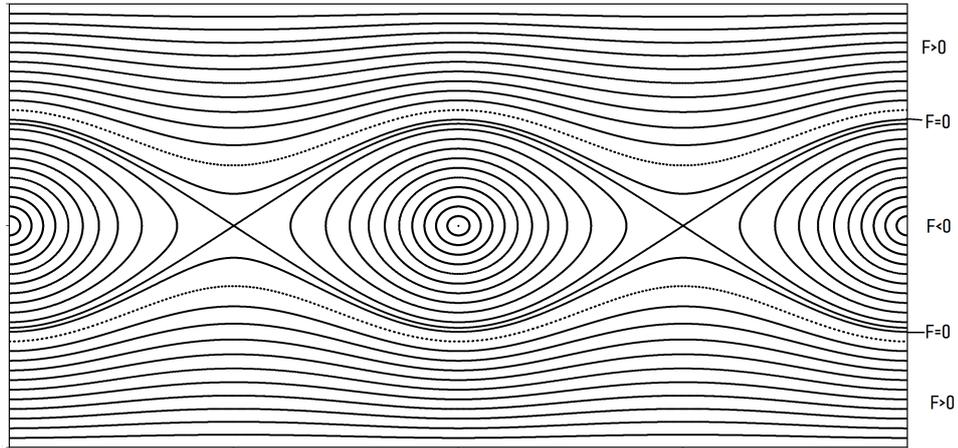
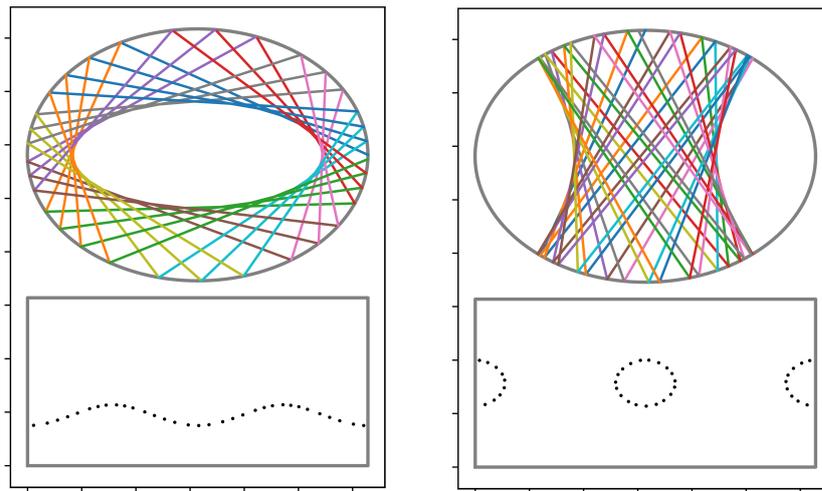


Figura 5.27: Espaço de fase do bilhar elíptico.

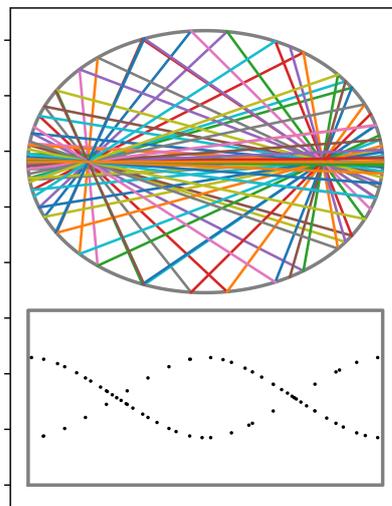
Ou seja,

- As trajetórias que têm uma elipse como cáustica correspondem as órbitas sobre as curvas que estão do lado de fora da região que possui formato de "infinito transladado";



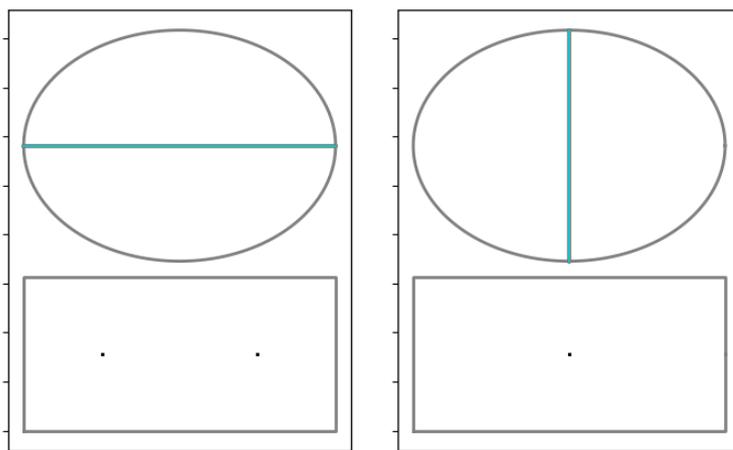
**Figura 5.28:** Trajetórias que tem uma elipse e uma hipérbole como cáusticas, respectivamente.

- As trajetórias que têm uma hipérbole como cáusticas correspondem as órbitas sobre as curvas no interior da região em formato de "infinito trasladado";
- A curva com formato de "infinito trasladado" corresponde a família de órbitas que passam pelos focos;



**Figura 5.29:** Órbitas e trajetórias de bilhares que passam pelos focos.

- Os pontos de interseção das curvas com formato de "infinito trasladado" e os pontos centrais das ilhas correspondem as órbitas periódicas de período 2.



**Figura 5.30:** Trajetórias e órbitas de período 2.

Observemos que as curvas no espaço de fase nas quais  $F \geq 0$  (Figura 5.27) são curvas rotacionais invariantes pela aplicação  $F$ , então, pelo Teorema da Curva Invariante de Birkhoff, são gráficos de funções Lipschitz.

## Capítulo 6

# Decomposição dominada e bilhares não-elásticos

Neste capítulo, num primeiro instante, daremos as definições de decomposição dominada e de campos de cones e um importante lema que fornece condições para que um determinado conjunto possua decomposição dominada. Em seguida, faremos uma análise do bilhar sob o ponto de vista da óptica. Por fim, trabalharemos com os bilhares convexos não-elásticos e provaremos que, sob algumas hipóteses de diferenciabilidade e alguns limites na contração, existe uma faixa compacta no espaço de fase de modo que a aplicação de bilhar é um difeomorfismo  $C^2$  da faixa sobre sua imagem. O conjunto de pontos limites contém a curva invariante e tem decomposição dominada. A partir deste resultado construiremos dois exemplos de bilhar não-elástico: o circular e o elíptico, com conjunto limite não trivial.

### 6.1 Preliminares

Vamos começar com algumas definições acerca de variedades que serão importantes nas demais seções.

Um subconjunto  $M \subset \mathbb{R}^3$  é uma **variedade topológica** de dimensão 2 se todo ponto de  $M$  possui, na métrica relativa de  $\mathbb{R}^3$ , uma vizinhança homeomorfa a um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$ .

Dada uma variedade topológica  $M$  e um ponto  $q \in M$ , consideremos  $(U, X)$ , onde  $U$  é um aberto em  $M$  e  $X$  é um homeomorfismo de um aberto de  $\mathbb{R}^2$  em  $U$ .

$(U, X)$  é chamada **vizinhança coordenada de  $q$** .

Temos que  $X(p) = q$  e  $X : X^{-1}(U) = U_0 \rightarrow U \subset M$ .

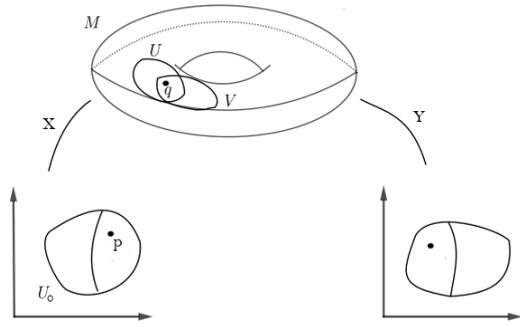


Figura 6.1: Variedade topológica e vizinhança coordenada.

Se \$q\$ pertence a outra vizinhança coordenada \$(V, Y)\$ temos que

$$Y^{-1} \circ X : X^{-1}(U \cap V) \longrightarrow Y^{-1}(U \cap V)$$

é chamado aplicação de **mudança de coordenada**.

**Definição 6.1.** Dizemos que \$(U, X)\$ e \$(V, Y)\$ são **\$C^\infty\$-compatíveis** se \$X^{-1} \circ Y\$ e \$Y^{-1} \circ X\$ são difeomorfismos de classe \$C^\infty\$ nos abertos \$X^{-1}(U \cap V)\$ e \$Y^{-1}(U \cap V)\$, respectivamente, sempre que \$U \cap V \neq \emptyset\$.

**Definição 6.2.** Uma **estrutura diferenciável \$C^\infty\$** em uma variedade topológica \$M\$ é uma família \$U = \{(U\_\alpha, X\_\alpha)\_{\alpha \in \Delta}\}\$ de vizinhanças coordenadas tais que

1. \$\bigcup\_{\alpha} U\_\alpha = M\$;
2. Para quaisquer \$\alpha, \beta\$, \$(U\_\alpha, X\_\alpha)\$ e \$(U\_\beta, X\_\beta)\$ são \$C^\infty\$-compatíveis se \$U\_\alpha \cap U\_\beta \neq \emptyset\$;
3. Qualquer vizinhança coordenada \$(V, Y)\$ é \$C^\infty\$-compatível com todos os \$(U\_\alpha, X\_\alpha) \in U\$.

Uma variedade topológica com uma estrutura diferenciável \$C^\infty\$ é chamada de **variedade diferenciável**.

**Definição 6.3.** Uma **métrica Riemanniana** (ou estrutura Riemanniana), em uma variedade diferencial \$M\$, é uma correspondência que associa a cada ponto \$q\$ de \$M\$ um produto interno \$<, >\$ (isto é, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente \$T\_q M\$ que varia diferencialmente no seguinte sentido:

Se \$X : U\_0 \subset \mathbb{R}^2 \to M\$ é um sistema de coordenadas locais em torno de \$q\$, com \$X(x\_1, x\_2) = q \in X(U\_0) = U\$ e \$\frac{\partial X(p)}{\partial x\_1} = dX(1, 0)\$ e \$\frac{\partial X(p)}{\partial x\_2} = dX(0, 1)\$ então \$\left\langle \frac{\partial X(q)}{\partial x\_i}, \frac{\partial X(q)}{\partial x\_j} \right\rangle\_q = g\_{ij}(x\_1, \dots, x\_n)\$ é uma função diferenciável em \$U\$.

Uma variedade diferenciável com uma dada métrica Riemanniana chama-se uma **variedade Riemanniana**.

**Definição 6.4.** Seja \$M\$ uma variedade de dimensão 2. O **fibrado tangente** de \$M\$, denotado por \$TM\$, é a união disjuntados espaços tangentes \$T\_q M\$ a \$M\$ em \$q\$, para todo \$q \in M\$, isto é,

$$TM = \bigcup_{q \in M} T_q M.$$

O conjunto \$TM\$ consta de todos os pares \$(q, v)\$ onde \$q \in M\$ e \$v \in T\_q M\$ é um vetor tangente a \$M\$ no ponto \$q\$.

## 6.2 Decomposição dominada, campos de cones e formas quadráticas

Seja  $M$  uma variedade Riemanniana e  $f$  um difeomorfismo de  $M$  em  $f(M) := \tilde{M} \subset M$ .

**Definição 6.5.** Seja  $\Lambda$  um conjunto invariante por  $f$ . Dizemos que o conjunto  $\Lambda$  tem **decomposição dominada** se o fibrado tangente sobre  $\Lambda$  é dividido em dois subfibrados  $T_\Lambda M = U \oplus V$  tais que

1.  $U$  e  $V$  são invariantes por  $Df$ ;
2. Os subfibrados  $U$  e  $V$  são contínuos, isto é,  $U_x$  e  $V_x$  variam continuamente com  $x \in \Lambda$ ;
3. Existem constantes  $c > 0$  e  $0 < \gamma < 1$  tal que para cada  $x \in \Lambda$

$$\|Df^n|_{U_x}\| \|Df^{-n}|_{V_{f^n(x)}}\| \leq c\gamma^n, \forall x \in \Lambda, n \geq 0.$$

**Definição 6.6.** Um conjunto  $\Lambda$  compacto invariante de um sistema dinâmico  $f : M \rightarrow M$  é **hiperbólico** se o fibrado tangente sobre  $\Lambda$  se dividir em dois subfibrados  $T_\Lambda M = E^S \oplus E^U$  tal que

1.  $E^S$  e  $E^U$  são invariantes por  $Df$ , isto é,  $Df(E_x^S) = E_{f(x)}^S$  e  $Df(E_x^U) = E_{f(x)}^U$ ;
2. Existe  $C > 0$  e  $0 < \lambda < 1$  tal que para algum  $x \in \Lambda$

$$\|Df^n|_{E_x^S}\| \leq C\lambda^n \text{ e } \|Df^{-n}|_{E_x^U}\| \leq C\lambda^n, n \geq 0.$$

Pelas definições dadas acima concluímos que qualquer decomposição hiperbólica é uma decomposição dominada.

Algumas consequências importantes desta propriedade foram dadas por Pujals e Sambarino em [16]. Um teorema de decomposição espectral foi obtido para um difeomorfismo  $C^2$  de superfície compacta tendo decomposição dominada sobre o conjunto limite

$$L(f) = \overline{\bigcup_{x \in M} (\omega(x) \cup \alpha(x))}$$

onde  $\omega(x)$  e  $\alpha(x)$  são conjuntos  $\omega$  e  $\alpha$ -limite de  $x$ , respectivamente.

**Teorema 6.1. (Pujals-Sambarino)** *Seja  $M$  uma 2-variedade compacta e  $f : M \rightarrow \tilde{M} \subset M$  um difeomorfismo  $C^2$ . Assuma que  $L(f)$  tem decomposição dominada. Então  $L(f)$  pode ser decomposto em*

$$L(f) = \mathcal{I} \cup \mathcal{R} \cup \tilde{\mathcal{L}}$$

tal que

1.  $\mathcal{I}$  é um conjunto de pontos periódicos com períodos limitados contidos em uma união disjunta finita de arcos periódicos hiperbólicos ou curvas simples fechadas.
2.  $\mathcal{R}$  é uma união finita de curvas fechadas simples periodicamente hiperbólicas que suportam uma rotação irracional.

3.  $\tilde{\mathcal{L}}$  pode ser decomposto em uma união disjunta de conjuntos compactos invariantes e transitivos finitos (chamados conjuntos básicos). Os pontos periódicos são densos em  $\tilde{\mathcal{L}}$ .

**Demonstração:** Ver em [16]. ■

**Definição 6.7.** O cone  $\gamma$  horizontal padrão em  $p \in \mathbb{R}^n$  é definido por

$$H_p^\gamma = \{(u, v) \in T_p\mathbb{R}^n; \|v\| \leq \gamma\|u\|\}.$$

Enquanto que o cone  $\gamma$  vertical padrão em  $p \in \mathbb{R}^n$  é definido por

$$H_p^\gamma = \{(u, v) \in T_p\mathbb{R}^n; \|u\| \leq \gamma\|v\|\}.$$

Mais geralmente, um cone  $K$  em  $\mathbb{R}^n$  é definido como a imagem de um cone padrão por uma transformação linear invertível.

**Definição 6.8.** Um campo de cones é uma transformação que associa a cada ponto  $p \in \mathbb{R}^n$  um cone  $K_p$  em  $T_p\mathbb{R}^n$ . Um difeomorfismo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  atua naturalmente em campos de cones por

$$(f_*K)_p = Df_{f^{-1}(p)}(K_{f^{-1}(p)}).$$

A existência de uma decomposição dominada decorre da existência de um campo de cone estritamente invariante e de um controle uniforme de expansões e/ou contrações como mostrado em [20].

Sejam  $u, v : M \rightarrow TM$  dois campos de vetores tais que  $u(x) = u_x$  e  $v(x) = v_x$  são vetores linearmente independentes em  $T_xM$ .

Esses vetores induzem uma forma quadrática não-degenerada  $Q$  em  $TM$  por

$$Q_x(au_x + bv_x) = ab$$

e um campo de cones dado em cada  $x$  por

$$\mathcal{C}(x) = \{w \in T_xM; Q_x(w) > 0\} \cup \{0\}$$

e cujas fronteiras, em cada ponto, são dadas por  $\mathcal{C}_0(x) = \{w \in T_xM; Q_x(w) = 0\}$ .

Observemos que se os campos de vetores forem contínuos teremos que a forma quadrática e o campo de cones são também contínuos.

Consideremos  $x \in M$ , um vetor  $w = au_x + bv_x \in T_xM$  e  $f : M \rightarrow M$ . Então

$$Df_x(u_x) = c_1u_{f(x)} + d_1v_{f(x)}$$

$$Df_x(v_x) = c_2u_{f(x)} + d_2v_{f(x)}$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} Df_x w &= aDf_x(u_x) + bDf_x(v_x) = a(c_1 u_{f(x)} + d_1 v_{f(x)}) + b(c_2 u_{f(x)} + d_2 v_{f(x)}) \\ &= (ac_1 + bc_2)u_{f(x)} + (ad_1 + bd_2)v_{f(x)} \\ &= a_1 u_{f(x)} + b_1 v_{f(x)} \end{aligned}$$

pertencente  $T_{f(x)}M$  é a imagem de  $w$  sob a derivada  $Df_x$ .

Então temos,

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = [Df_x]_U \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

onde  $[Df_x]_U$  é a matriz representação da derivada em  $x$  com a escolha de  $\{u_x, v_x\}$  e  $\{u_{f(x)}, v_{f(x)}\}$  como bases de  $T_xM$  e  $T_{f(x)}M$ , respectivamente.

Denotemos  $\mathcal{C}_\pm(x) = \{w \in T_xM; \pm Q_x(w) > 0\} \cup \{0\}$ , os cones abertos de, respectivamente, valores positivos e negativos ( com o vetor nulo incluso).

**Definição 6.9.** Um difeomorfismo  $f$  é chamado  $Q$ -separável se  $Df\mathcal{C}_+(x) \subset \mathcal{C}_+(f(x))$ . Analogamente, definimos difeomorfismos que são estritamente  $Q$ -separável,  $Q$ -monótona e estritamente  $Q$ -monótono. Ou seja, será

1. Estritamente  $Q$ -separável se  $Df(\mathcal{C}_+ \cup \mathcal{C}_0) \subset \mathcal{C}_+$ ;
2.  $Q$ - monótono se  $Q_x(Df(w)) \geq Q_x(w)$ , para todo  $w \in T_xM$ ;
3. Estritamente  $Q$ - monótono se  $Q_x(Df(w)) > Q_x(w)$ , para cada  $w \in T_xM$  com  $w \neq 0$ .

**Proposição 6.1.** Se um difeomorfismo  $f$  é estritamente  $Q$ -separável então tem decomposição dominada.

**Demonstração:** Ver em [22].

■

**Lema 6.1.** Seja  $\Lambda$  um subconjunto de  $M$  compacto e  $f$ -invariante. Se existir uma escolha de campos de vetores  $u, v$  tais que as entradas de  $[Df_x]_U$  são estritamente positivas para cada  $x \in \Lambda$  então  $\Lambda$  tem decomposição dominada.

**Demonstração:** Sejam  $u, v$  campos de vetores tais que as entradas de  $[Df_x]_U$  são estritamente positivas para todo  $x \in \Lambda$ .

Então para cada  $w = au_x + bv_x$  tal que  $x \in \Lambda$ ,  $a, b \geq 0$  e  $a^2 + b^2 > 0$  temos que  $a_1 b_1 > 0$  onde  $Df_x w = a_1 u_{f(x)} + b_1 v_{f(x)}$ .

Agora, notemos que dado  $w \in \mathcal{C}_+(x) \cup \mathcal{C}_0$  temos  $Q_x(w) \geq 0$ . Mas  $Df_x w = a_1 u_{f(x)} + b_1 v_{f(x)}$  e  $a^2 + b^2 > 0$  então  $a_1 b_1 > 0$ . Dessa forma,  $Df_x w \in \mathcal{C}_+(f(x)) = \{w \in T_{f(x)}M; Q_x(w) > 0\}$ .

Logo,

$$Df_x(\mathcal{C}_+(x) \cup \mathcal{C}_0) \subset \mathcal{C}_+(f(x)).$$

Com isso, concluímos que  $\mathcal{C}_+$  é estritamente  $Df$ -invariante, ou seja,  $f$  é estritamente  $Q$ -separável.

Pela Proposição 6.1 segue que  $\Lambda$  é decomposição dominada.

■

### 6.3 Frentes e focalização

Seja  $\gamma = \gamma(s)$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco,  $C^2$  e fechada. Definimos uma **frente** como sendo uma curva no espaço de fase, ou seja,

$$\begin{aligned} \eta : (-\epsilon, \epsilon) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \sigma &\mapsto (s(\sigma), \theta(\sigma)). \end{aligned}$$

Além disso, estabeleceremos o **ponto base da frente** como sendo o ponto  $\eta(0) = (s_0, \theta_0)$  e a **variação da frente** como sendo o vetor  $\zeta = \eta'(0)$ .

Para cada  $\sigma \in (-\epsilon, \epsilon)$  associaremos a reta  $r(\sigma)$ , que passa pelo ponto  $\gamma(\sigma) = (x(s(\sigma)), y(s(\sigma)))$  e faz ângulo de  $\theta(\sigma)$  com a tangente em  $\gamma(\sigma)$ .

A **alma** da frente será a reta  $r(0) = r_0$ . Seja  $P(\sigma) = r(\sigma) \cap r_0$ . Dizemos que uma frente **focaliza** em  $P_0 = \lim_{\sigma \rightarrow 0} P(\sigma)$  se este limite existir.

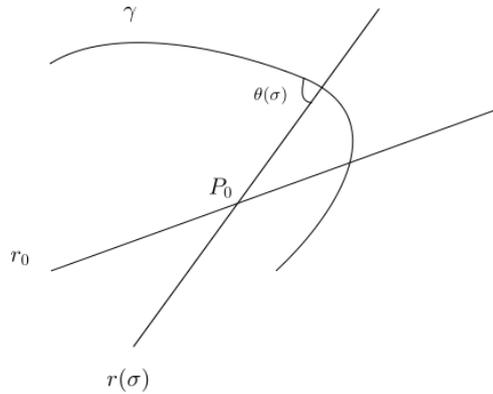


Figura 6.2: Frente e ponto de focalização.

**Lema 6.2.** *Frentes do mesmo ponto base e mesma variação determinam mesmo  $P_0$ .*

**Demonstração:** Seja  $\varphi(\sigma)$  o ângulo que a tangente orientada em  $s(\sigma)$  faz com o eixo dos  $x$ , para cada  $\sigma \in (-\epsilon, \epsilon)$ .

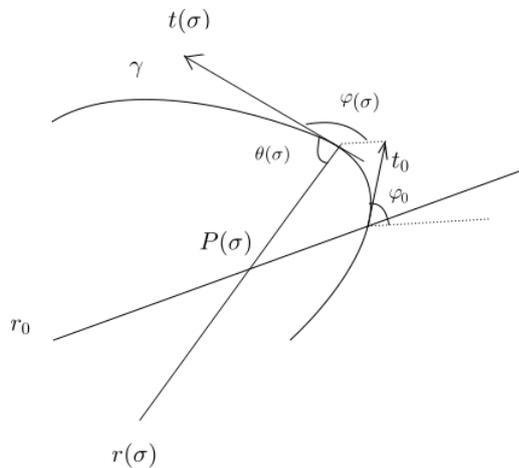


Figura 6.3: Frente.

Veamos que a equação da reta  $r(\sigma)$  é dada por

$$y - y(s(\sigma)) = \tan(\varphi(\sigma) + \theta(\sigma))(x - x(s(\sigma))).$$

Pelo desenvolvimento de Taylor, temos que

$$\eta(\sigma) = \eta(0) + \sigma\eta'(0) + O(\sigma^2)$$

então,

$$s(\sigma) = s_0 + \sigma a + O(\sigma^2) \tag{6.1}$$

$$\theta(\sigma) = \theta_0 + \sigma b + O(\sigma^2) \tag{6.2}$$

desde que  $\eta'(0) = (a, b)$ .

Além disso, também pelo desenvolvimento de Taylor

$$\gamma(s) = \gamma(0) + s\gamma'(0) + O(s^2).$$

Então,

$$\begin{cases} x(s(\sigma)) = x_0 + s(\sigma)x'(s_0) + O(s(\sigma)^2) \\ y(s(\sigma)) = y_0 + \theta(\sigma)y'(s_0) + O(s(\sigma)^2) \end{cases}$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} x(s(\sigma)) &= x_0 + (s_0 + a\sigma + O(\sigma^2))x'(s_0) + O(s(\sigma)^2) \\ &= x_0 + a\sigma x'(s_0) + (s_0 x'(s_0) + O(\sigma^2)x'(s_0) + O(s(\sigma)^2)) \\ &= x_0 + a\sigma x'(s_0) + O(\sigma^2) \end{aligned} \tag{6.3}$$

sabendo que  $\gamma'(0) = (x'(s_0), y'(s_0)) = (x'(s_0), y'(s_0))$ .

Analogamente, temos que

$$y(s(\sigma)) = y_0 + b\sigma y'(s_0) + O(\sigma^2). \tag{6.4}$$

Sabemos que a curva  $\gamma$  está parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , então  $\|(x'(s_0), y'(s_0))\| = 1$  e, conseqüentemente,  $x'(s_0) = \cos \varphi_0$ ,  $y'(s_0) = \sin \varphi_0$  onde  $\varphi_0 = \varphi(s_0)$ . Pelo desenvolvimento de Taylor e usando (6.1), temos

$$\varphi(s(\sigma)) = \varphi_0 + a\varphi'(s_0)\sigma + O(\sigma^2) = \varphi_0 + ak_0\sigma + O(\sigma^2) \tag{6.5}$$

onde  $k_0$  é a curvatura em  $s_0$ .

Por (6.2) e (6.5) segue que,

$$\begin{aligned}\tan(\varphi(s(\sigma)) + \theta(\sigma)) &= \tan(\varphi_0 + ak_0\sigma + O(\sigma^2) + \theta_0 + \sigma b + O(\sigma^2)) \\ &= \tan(\varphi(s(0)) + \theta(0)) + \sec^2(\varphi(s(0)) + \theta(0))[\varphi(s(\sigma)) + \theta(\sigma)] + O(\sigma^2) \\ &= \tan(\varphi_0 + \theta_0) + \sec^2(\varphi_0 + \theta_0)[(\varphi_0 + \theta_0) + (ak_0 + b)\sigma + O(\sigma^2)] + O(\sigma^2) \\ &= \tan(\varphi_0 + \theta_0) + \sec^2(\varphi_0 + \theta_0)[(ak_0 + b)\sigma] + O(\sigma^2).\end{aligned}$$

Então,

$$\frac{y - y(s(\sigma))}{x - x(s(\sigma))} = \tan(\varphi_0 + \theta_0) + \sec^2(\varphi_0 + \theta_0)(ak_0 + b)\sigma + O(\sigma^2).$$

Sabendo que  $x'(s_0) = \cos \varphi_0$  e  $y'(s_0) = \sin \varphi_0$  e usando (6.3) e (6.4) temos

$$\begin{cases} x(s(\sigma)) = x_0 + a\sigma \cos \varphi_0 + O(s(\sigma)^2) \\ y(s(\sigma)) = y_0 + b\sigma \sin \varphi_0 + O(s(\sigma)^2) \end{cases}.$$

Dessa forma,

$$y - (y_0 + b \sin \varphi_0 \sigma + O(\sigma^2)) = [\tan(\varphi_0 + \theta_0) + \sec^2(\varphi_0 + \theta_0)(ak_0 + b)\sigma + O(\sigma^2)][x - (x_0 - a \cos \varphi_0 \sigma + O(\sigma^2))]$$

é a equação da reta  $r(\sigma)$ .

A equação de  $r_0$  é dada por  $y - y_0 = \tan(\varphi_0 + \theta_0)(x - x_0)$ . Sabendo as equações das retas  $r(\sigma)$  e  $r_0$  podemos encontrar  $P(\sigma)$ .

Como  $P(\sigma) = r(\sigma) \cap r_0$  então

$$\begin{aligned}\tan(\varphi_0 + \theta_0)(x - x_0) - b \sin \varphi_0 \sigma - O(\sigma^2) &= [\tan(\varphi_0 + \theta_0) + \sec^2(\varphi_0 + \theta_0)(ak_0 + b)\sigma + O(\sigma^2)] \\ &\quad [(x - x_0) - a \cos \varphi_0 \sigma + O(\sigma^2)].\end{aligned}$$

Isto implica que,

$$\begin{aligned}-b \sin \varphi_0 \sigma - O(\sigma^2) &= -\tan(\varphi_0 + \theta_0)(x - x_0) + \tan(\varphi_0 + \theta_0)(x - x_0) - \tan(\varphi_0 + \theta_0)a \cos \varphi_0 \sigma \\ &\quad + \tan(\varphi_0 + \theta_0)O(\sigma^2) + \sec^2(\varphi_0 + \theta_0)(x - x_0)(ak_0 + b)\sigma - a \sec^2(\varphi_0 + \theta_0) \\ &\quad (ak_0 + b)\sigma^2 \cos \varphi_0 + \sec^2(\varphi_0 + \theta_0)(ak_0 + b)\sigma O(\sigma^2) + O(\sigma^2)(x - x_0) \\ &\quad - O(\sigma^2)a \cos \varphi_0 \sigma + O^2(\sigma^2) \\ &= -\tan(\varphi_0 + \theta_0)a \cos \varphi_0 \sigma + \sec^2(\varphi_0 + \theta_0)(x - x_0)(ak_0 + b)\sigma + O(\sigma^2).\end{aligned}$$

Logo,

$$\sec^2(\varphi_0 + \theta_0)(ak_0 + b)(x - x_0) = a \tan(\varphi_0 + \theta_0) \cos \varphi_0 - b \sin \varphi_0 + O(\sigma^2). \quad (6.6)$$

Com esta equação conseguimos determinar  $x(\sigma)$ . Substituindo o  $x(\sigma)$  encontramos  $y(\sigma)$  e, conseqüentemente,  $P(\sigma)$ .

Sabemos que  $P_0 = \lim_{\sigma \rightarrow 0} P(\sigma)$  então fazendo  $\sigma \rightarrow 0$  a equação (6.6) transforma-se em

$$\sec^2(\varphi_0 + \theta_0)(ak_0 + b)(x - x_0) = a \tan(\varphi_0 + \theta_0) \cos \varphi_0 - b \sin \varphi_0.$$

Por meio desta, encontramos  $x_0$  e, conseqüentemente,  $y_0$  e  $P_0$ . Observemos que esta determinação depende apenas de  $\varphi_0$ ,  $\theta_0$ ,  $(a, b) = \eta'(0)$ ,  $k_0$  e  $(x_0, y_0)$ . Desta forma, as frentes de mesmo ponto base e mesma variação determinam mesmo  $P_0$ . ■

**Observação 6.1.** Do ponto de vista de focalização, dar uma frente é equivalente a dar  $(s_0, \theta_0)$  e  $(a, b) \in T_{(s_0, \theta_0)} \mathbb{R}^2$ . Podemos, também, apresentar a frente linear dada por

$$\eta(\sigma) = (s_0 + a\sigma, \theta_0 + b\sigma).$$

**Proposição 6.2.** O ponto  $P_0$  pode ser obtido se colocarmos a frente linear  $\eta(\sigma)$  sobre o círculo osculador em  $\gamma(s_0)$ .

**Demonstração:** Consideremos a origem do sistema no centro do círculo osculador, conforme a figura à seguir.

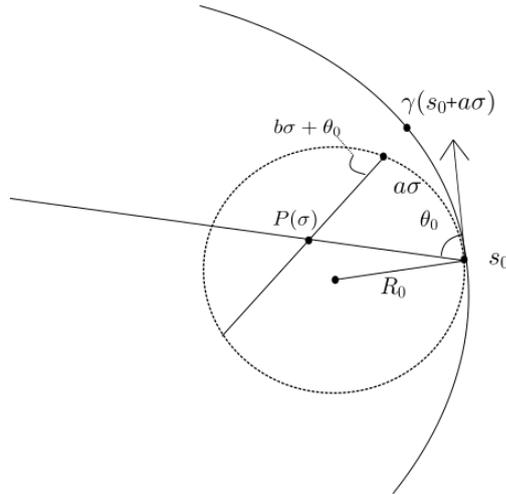


Figura 6.4: Frente e o círculo osculador.

Observemos que

$$\begin{aligned} x(\sigma) &= R_0 \cos \left( \frac{s_0}{R_0} + \frac{a\sigma}{R_0} \right) \\ &= R_0 \cos \left( \frac{s_0}{R_0} + \frac{a \cdot 0}{R_0} \right) - R_0 \sin \left( \frac{s_0}{R_0} + \frac{a \cdot 0}{R_0} \right) \frac{a\sigma}{R_0} + O(\sigma^2) \text{ (desenvolvimento de Taylor)} \\ &= R_0 \cos \left( \frac{s_0}{R_0} \right) - a \sin \left( \frac{s_0}{R_0} \right) \sigma + O(\sigma^2) \end{aligned}$$

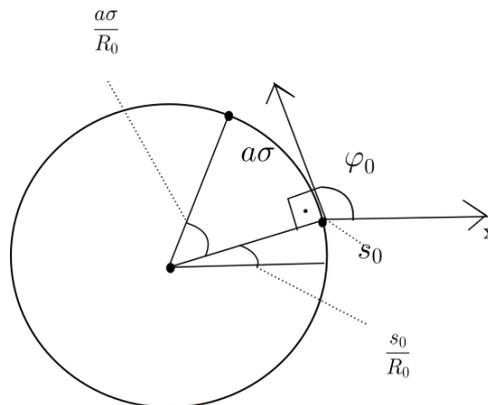


Figura 6.5: Círculo osculador.

Vejamos que  $\varphi_0 = \frac{s_0}{R_0} + \frac{\pi}{2}$  então

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(\frac{s_0}{R_0}\right) &= \operatorname{sen}\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \operatorname{sen}\varphi_0 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\varphi_0 \\ &= -\cos\varphi_0. \end{aligned}$$

Logo,

$$x(\sigma) = x_0 + a \cos\varphi_0 \sigma + O(\sigma^2).$$

Analogamente, temos que

$$\begin{aligned} y(\sigma) &= R_0 \operatorname{sen}\left(\frac{s_0}{R_0} + \frac{a\sigma}{R_0}\right) \\ &= R_0 \operatorname{sen}\left(\frac{s_0}{R_0}\right) + R_0 \cos\left(\frac{s_0}{R_0}\right) \frac{a\sigma}{R_0} + O(\sigma^2) \\ &= R_0 \operatorname{sen}\left(\frac{s_0}{R_0}\right) + a \cos\left(\frac{s_0}{R_0}\right) \sigma + O(\sigma^2) \\ &= y_0 + a \cos\left(\frac{s_0}{R_0}\right) \sigma + O(\sigma^2). \end{aligned}$$

Como  $\varphi_0 = \frac{s_0}{R_0} + \frac{\pi}{2}$  temos que

$$\cos\left(\frac{s_0}{R_0}\right) = \cos\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\varphi_0.$$

Dessa maneira,

$$y(\sigma) = y_0 + a \operatorname{sen}\varphi_0 \sigma + O(\sigma^2).$$

Observemos, utilizando o mesmo raciocínio, que

$$\begin{aligned}\varphi(\sigma) + \theta(\sigma) &= \frac{s_0}{R_0} + \frac{a\sigma}{R_0} + \frac{\pi}{2} + \theta_0 + b\sigma \\ &= \varphi_0 + \theta_0 + \left(\frac{a}{R_0} + b\right)\sigma \\ &= \varphi_0 + \theta_0 + (ak_0 + b)\sigma.\end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}\tan(\varphi(\sigma) + \theta(\sigma)) &= \tan(\varphi_0 + \theta_0) + \sec^2(\varphi_0 + \theta_0)[\varphi(s(\sigma)) + \theta(\sigma)] + O(\sigma^2) \\ &= \tan(\varphi_0 + \theta_0) + \sec^2(\varphi_0 + \theta_0)(\varphi_0 + \theta_0 + (ak_0 + b)\sigma) + O(\sigma^2) \\ &= \tan(\varphi_0 + \theta_0) + \sec^2(\varphi_0 + \theta_0)(ak_0 + b)\sigma + O(\sigma^2).\end{aligned}$$

Consequentemente, a equação da reta  $r(\sigma)$  será dada por

$$y - y_0 - a \sin \varphi_0 \sigma + O(\sigma^2) = [\tan(\varphi_0 + \theta_0) + \sec^2(\varphi_0 + \theta_0)(ak_0 + b)\sigma + O(\sigma^2)](x - x_0 - a \cos \varphi_0 \sigma + O(\sigma^2))$$

já que  $y - y(s(\sigma)) = \tan(\varphi(\sigma) + \theta(\sigma))(x - x(s(\sigma)))$ .

Como a alma da frente,  $r_0$ , é a mesma, segue que a primeira entrada de  $P_0$  é dada por

$$\sec^2(\varphi_0 + \theta_0)(ak_0 + b)(x - x_0) = a \cos \varphi_0 \tan(\varphi_0 + \theta_0) - a \sin \varphi_0.$$

Dessa maneira, para estudar a distância de focalização basta olhar a frente linear no círculo osculador. ■

**Proposição 6.3.** *Seja  $d_q = \text{dist}(P_0, \gamma(s_0))$ , isto é, a distância com sinal, sobre a alma, onde a frente focaliza. Nas coordenadas  $(\varphi, \theta)$ , se  $\eta'(0) = (a, b)$  então*

$$d_q = \frac{R_0 \sin \theta_0}{1 + \frac{b}{a}}.$$

**Demonstração:** Seja  $\theta$  o parâmetro de ângulo e  $s$  o comprimento de arco. Denotemos por  $\bar{\eta}(u) = (s(u), \theta(u))$  a curva no espaço de fase,  $\bar{\eta}(0) = (s_0, \theta_0)$  o ponto base e  $\bar{\eta}'(0) = (a, b)$  a variação.

Consideremos a trajetória  $(s_0, \alpha_0) \mapsto (s, \alpha)$ . Denotemos  $H$  a função comprimento da trajetória. Além disso, sejam  $\alpha$  o ângulo que a trajetória faz com a tangente em  $\gamma(s_0)$  e  $\beta$  o ângulo que a trajetória faz com a tangente em  $\gamma(s)$ .

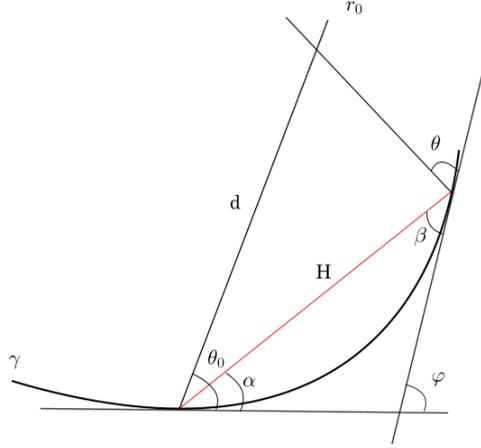


Figura 6.6: Distância de focalização.

Pela lei dos senos, temos que  $\frac{\text{sen}(\pi-\beta-\theta)}{d} = \frac{\text{sen}(\theta-\theta_0+\alpha+\beta)}{H}$ . Logo,

$$d = \frac{H \text{sen}(\theta + \beta)}{\text{sen}(\theta + \varphi - \theta_0)}.$$

Queremos encontrar o  $\lim_{u \rightarrow 0} d(u)$ . Mas,

$$d_q = \lim_{u \rightarrow 0} d(u) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{H(s_0, s) \text{sen}(\theta(u) + \beta(u))}{\text{sen}(\theta(u) + \varphi(s) - \theta_0)}.$$

Observemos, pela regra de L'Hospital, que

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{H(s_0, s)}{\text{sen}(\theta(u) + \varphi(s(u)) - \theta_0)} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial H(s_0, s)}{\partial s} s'(u)}{\cos(\theta(u) + \varphi(s(u)) - \theta_0)(\theta'(u) + \varphi'(s)s'(u))} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\cos(\beta(u))s'(u)}{\cos(\theta(u) + \varphi(s(u)) - \theta_0)(\theta'(u) + \varphi'(s)s'(u))} \\ &= \frac{a}{b + ka} \\ &= \frac{1}{k + \frac{b}{a}}. \end{aligned}$$

Logo,  $d_q(u) = \frac{\text{sen} \theta_0}{k + \frac{b}{a}}$ .

Agora, vejamos  $d_q$  nas coordenadas  $(\varphi, \theta)$  onde  $\varphi$  é o ângulo de inclinação da tangente. Consideremos  $\eta(u) = (\varphi(u), \theta(u))$ , o ponto base  $\eta(0) = (\varphi_0, \theta_0)$  e a variação  $\eta'(0) = (\varphi'(0), \theta'(0)) = (a, b)$ .

A diferença para o caso anterior é que teremos  $s$  em função de  $\varphi$  e  $\varphi$  função de  $u$ . Dessa forma,

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{H(s_0, s)}{\text{sen}(\theta(u) + \varphi(s(u)) - \theta_0)} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial H(s_0, s)}{\partial s} s'(\varphi)\varphi'(u)}{\cos(\theta(u) + \varphi(u) - \theta_0)(\theta'(u) + \varphi'(u))} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\cos(\beta(u))s'(\varphi)\varphi'(u)}{\cos(\theta(u) + \varphi(u) - \theta_0)(\theta'(u) + \varphi'(u))} \\ &= \frac{\|\gamma'(0)\|a}{a + b}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$d_q = \frac{\|\gamma'(0)\| \operatorname{sen} \theta_0}{1 + \frac{b}{a}} = \frac{R_0 \operatorname{sen} \theta_0}{1 + \frac{b}{a}},$$

pois  $|\gamma'(s)| = |\gamma'(\varphi)\varphi'(s)|$  o que implica que  $1 = |\gamma'(\varphi)|k(s)$  e, conseqüentemente,  $|\gamma'(\varphi)| = R(\varphi)$ . ■

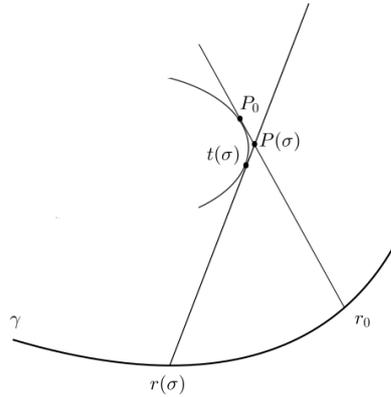
### 6.3.1 Frente Cáustica

Uma **frente cáustica** é dada pela curva  $\eta(\sigma) = (\varphi(\sigma), \theta(\sigma))$  tal que todas as retas  $r(\sigma)$  são tangentes à cáustica determinada por  $\eta(0) = (\varphi_0, \theta_0)$ . Consideremos a aplicação de bilhar  $T : [0, L] \times [0, \pi] \rightarrow [0, L] \times [0, \pi]$  associada a curva  $\gamma$ ,

**Proposição 6.4.** *Uma frente cáustica focaliza na elipse no ponto de tangência da alma da frente com a cáustica.*

**Demonstração:** Suponhamos que  $(\varphi_0, \theta_0)$  defina  $\eta(\sigma) = (\varphi(\sigma), \theta(\sigma))$  e que  $r_0$  não seja uma assíntota de uma cáustica hiperbólica.

As cáusticas são cônicas e, portanto, analíticas e convexas exceto no caso degenerado em que se reduz a retas ou aos focos, porém, neste caso, o resultado segue.



**Figura 6.7:** Frente cáustica.

Como as cáusticas são convexas e analíticas temos que  $r(\sigma)$  converge para  $r_0$  quando  $\sigma$  tende para zero. E, além disso, o ponto de tangência com a cáustica,  $t(\sigma)$ , converge para  $P_0$  quando  $\sigma$  tende para zero, onde  $P_0$  é o ponto de tangência de  $r_0$ .

Como as curvas são convexas, segue que

$$P(\sigma) \rightarrow P_0 \text{ quando } \sigma \rightarrow 0.$$

Observemos que, no caso em que a cáustica é hiperbólica e a alma da cáustica é uma assíntota, a "tangência ocorre no infinito" e a frente se comporta como uma frente "paralela". ■

No bilhar elíptico, vimos que o espaço de fase é folheado pelas curvas integrais, isto é, as curvas de nível da integral primeira  $F(\varphi, \alpha) = \text{cte}$ . Além disso, as soluções sobre uma mesma curva integral compartilham de uma mesma cáustica. Se considerarmos  $\eta(\sigma)$  uma frente cáustica teremos que  $T(\eta(\sigma))$  também será uma frente cáustica, onde  $T$  é a aplicação de bilhar na elipse.

### 6.3. FRENTE E FOCALIZAÇÃO

De fato, observemos que como o sistema é integrável e  $F(\eta(\sigma)) = F(T(\eta(\sigma)))$  então teremos que  $\eta(\sigma)$  e  $T(\eta(\sigma))$  serão trechos de uma mesma curva integral.

No bilhar, a frente cáustica focaliza, ao tangenciar a cáustica, em um ponto cuja distância ao ponto base é dado por

$$d_q = \frac{R_0 \operatorname{sen} \alpha_0}{1 + \frac{b}{a}}.$$

Para saber o que ocorre após tangenciar a cáustica consideraremos a trajetória do bilhar no sentido contrário, então precisamos utilizar a inversa  $T^{-1}$  da aplicação de bilhar. Neste caso, o ponto base será  $(s_1, \pi - \alpha_1)$  e a frente será

$$\bar{\eta}(\sigma) = (s(\sigma), \pi - \alpha(\sigma))$$

ou equivalentemente,

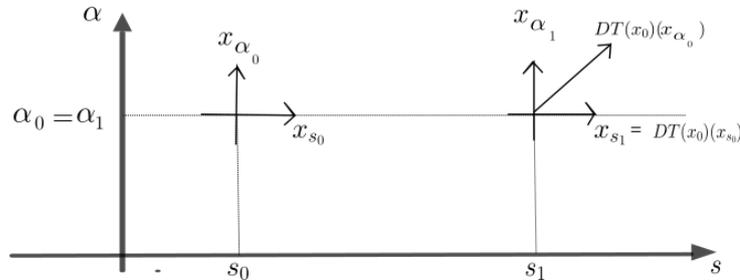
$$\begin{aligned} \bar{\eta}(\sigma) &= (s_1 + a\sigma, \pi - (\alpha_1 + b\sigma)) \\ &= (s_1 + a\sigma, (\pi - \alpha_1) - b\sigma). \end{aligned}$$

Então,  $\bar{\eta}'(0) = (a, -b)$  e, conseqüentemente, a inclinação é  $-\frac{b}{a}$ . Logo, a frente  $\bar{\eta}$  focaliza em um ponto cuja distância ao ponto base é

$$d_{q'} = \frac{R_1 \operatorname{sen}(\pi - \alpha_1)}{1 - \frac{b}{a}} = \frac{R_1 \operatorname{sen}(\alpha_1)}{1 - \frac{b}{a}}.$$

**Exemplo 6.1. (Distância onde a frente focaliza no círculo)** Consideremos a aplicação de bilhar no círculo de raio  $r$ ,  $T(s_0, \alpha_0) = (s_0 + 2r\alpha_0, \alpha_0)$ . Denotemos por  $x_{\alpha_i}$  e  $x_{s_i}$  as derivadas de  $x_i$  com relação a  $\alpha_i$  e a  $s_i$ , respectivamente, onde  $x_i = (s_i, \alpha_i)$ . Temos que

$$\begin{aligned} [DT(s_0, \alpha_0)](x_{s_0}) &= \begin{bmatrix} 1 & 2r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = x_{s_1} \\ [DT(s_0, \alpha_0)](x_{\alpha_0}) &= \begin{bmatrix} 1 & 2r \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2r \\ 1 \end{bmatrix} = 2r \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2rx_{s_1} + x_{\alpha_1}. \end{aligned}$$



**Figura 6.8:** Derivada da aplicação de bilhar no círculo.

O vetor  $x_{s_0}$  dá origem a frente  $\eta(\sigma) = (s_0 + \sigma, \alpha_0)$ , onde  $\sigma \in (-\epsilon, \epsilon)$ , com ponto base  $\eta(0) = (s_0, \alpha_0)$  e variação  $\eta'(0) = (1, 0) = x_{s_0}$  e inclinação 0.

Quando aplicamos  $T$ , obtemos

$$\begin{aligned} T(\eta(\sigma)) &= T(s_0 + \sigma, \alpha_0) \\ &= (s_0 + \sigma + 2r\alpha_0, \alpha_0) \\ &= (s_1 + \sigma, \alpha_1) \\ &= \zeta(\sigma) \end{aligned}$$

onde  $\zeta$  é a frente com ponto base  $\eta(0) = (s_1, \alpha_1)$ .

A distância, sobre a alma, onde a frente focaliza é

$$d_{q_\eta} = \frac{R_0 \operatorname{sen} \alpha_0}{1 + \frac{b}{a}} = \frac{r \operatorname{sen} \alpha_0}{1 + 0} = r \operatorname{sen} \alpha_0.$$

Analogamente, temos para a frente  $\zeta$  que

$$d_{q_\zeta} = r \operatorname{sen} \alpha_0.$$

## 6.4 Bilhar clássico em ovas

Seja  $\Gamma$  uma curva oval, isto é, curva plana, simples, fechada,  $C^k$  ( $k \geq 3$ ), com curvatura estritamente positiva e parametrizada no sentido anti-horário por  $\varphi$ , o ângulo entre o vetor tangente e um eixo horizontal. Seja  $R(\varphi)$  seu raio de curvatura em  $\varphi$ . Seja  $B : [0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow [0, 2\pi) \times (0, \pi)$  a aplicação do bilhar em  $\Gamma$ .

Como vimos anteriormente, se  $B(\varphi_0, \alpha_0) = (\varphi_1, \alpha_1)$ , a derivada de  $B$  em  $(\varphi_0, \alpha_0)$  é

$$DB(\varphi_0, \alpha_0) = \frac{1}{R_1 \operatorname{sen} \alpha_1} \begin{bmatrix} L_0 - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0 & L_0 \\ L_0 - R_1 \operatorname{sen} \alpha_1 - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0 & L_0 - R_1 \operatorname{sen} \alpha_1 \end{bmatrix}$$

onde  $R_i = R(\varphi_i)$  e  $L_0$  é a distancia entre  $\Gamma(\varphi_0)$  e  $\Gamma(\varphi_1)$ . Além disso, se  $\Gamma$  é  $C^k$ , então  $B$  é um difeomorfismo  $C^{k-1}$  que preserva medida.

Como  $\Gamma$  é uma oval

$$\frac{\partial \pi_1 B}{\partial \alpha_i} = \frac{L_0}{R_1 \operatorname{sen} \alpha_i} > 0$$

e  $B$  tem a propriedade de Twist monótono, onde  $\pi_1$  é a projeção na primeira coordenada e  $i = 1, 2$ .

Como consequência da propriedade Twist e da preservação de área, se considerarmos um levantamento  $F$  de  $B$  temos, por ([6], Teorema 8.1), que  $F$  tem órbitas para todos os números de rotação.

Consideremos, para cada número de rotação  $\rho \in (0, 1)$ , um conjunto minimal, fechado e invariante  $\mathcal{O}_\rho \subset [0, 2\pi) \times (0, \pi)$ , que pode ser projetado injetivamente em  $[0, 2\pi)$  e tal que a dinâmica induzida preserva a ordem de  $[0, 2\pi) \sim S^1$ .

O conjunto  $\mathcal{O}_\rho$  é diferente de vazio para todo  $\rho \in (0, 1)$ . Este fato pode ser verificado em ([8], Teorema 9.3.7) no caso em que  $\rho$  pertence aos racionais e em ([17], Teorema 4) para  $\rho$  pertencente aos irracionais.

A teoria de Aubry-Mather ([8], seção 13.2) garante a existência do conjunto  $\mathcal{O}_\rho$  e conclui que

este conjunto pode ser:

- Uma órbita periódica;
- Uma curva rotacional invariante, isto é, uma curva fechada, contínua, não homotópica a um ponto, invariante por  $B$ , com número de rotação  $\rho$  e que, pelo Teorema de Birkhoff, é gráfico de uma função Lipschitz. Se  $\rho$  pertence aos racionais então todos os pontos da curva são periódicos e se  $\rho$  pertence aos irracionais todos os pontos são densos na curva.
- Um conjunto de Aubry-Mather, isto é, um conjunto minimal fechado e invariante, se projeta injetivamente em um conjunto de Cantor de  $S^1$ . Ele está contido em um gráfico não invariante de uma função Lipschitz e contínua por partes.

Vamos nos concentrar em bilhares com uma curva rotacional invariante  $\gamma = \text{graf}(g)$  onde  $g : [0, 2\pi) \rightarrow (0, \pi)$  é uma função Lipschitz.

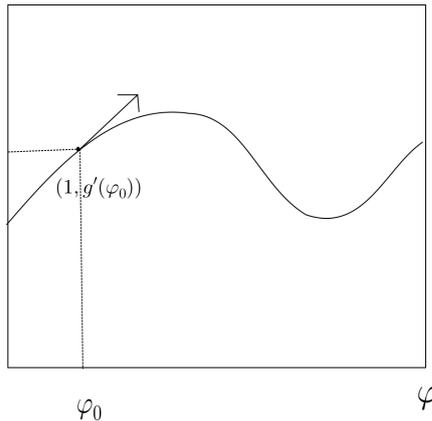
Em geral, para uma determinada fronteira  $\Gamma$ , o conjunto de números de rotação  $\rho$  tal que  $\mathcal{O}_\rho$  é uma curva rotacional invariante não é denso em  $(0, 1)$ , mas, no entanto, curvas rotacionais invariantes existem em uma grande classe de bilhares ovais.

Por exemplo, o bilhar circular e o elíptico são integráveis e tem rotacionais invariantes com qualquer número de rotação  $\rho$ , incluindo os racionais.

Vamos assumir que o conjunto invariante  $\mathcal{O}_\rho$  seja uma curva  $\gamma = \text{graf}(g)$ . Como  $B|_\gamma$  preserva ordem de  $[0, 2\pi) \approx S^1$  então ou  $g(\varphi) \equiv \frac{\pi}{2}$  ou existem constantes  $m$  e  $M$  tais que

$$0 < m \leq g(\varphi) \leq M < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < M \leq g(\varphi) \leq m < \pi.$$

$\gamma$  é uma curva de classe pelo menos  $C^2$  então o vetor tangente  $(1, g'(\varphi_0))$  é enviado por  $DB_{(\varphi_0, \alpha_0)}$  em um vetor tangente a  $\gamma$  em  $(\varphi_1, \alpha_1)$ .



**Figura 6.9:** Curva rotacional invariante.

A preservação da orientação implica que a primeira coordenada de  $DB_{(\varphi_0, \alpha_0)}(1, g'(\varphi_0))$  é estritamente positiva. Então, como

$$DB_{(\varphi_0, \alpha_0)} \begin{bmatrix} 1 \\ g'(\varphi_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_0 - R_0 \sin \alpha_0 + L_0 g'(\varphi_0) \\ L_0 - R_1 \sin \alpha_1 - R_0 \sin \alpha_0 + (L_0 - R_1 \sin \alpha_1) g'(\varphi_0) \end{bmatrix}$$

temos  $L_0 - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0 + L_0 g'(\varphi_0) = L_0[1 + g'(\varphi_0)] - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0 > 0$ . Com isso,  $(1 + g'(\varphi_0)) > \frac{R_0 \operatorname{sen} \alpha_0}{L}$  e, conseqüentemente,  $g'(\varphi_0) > \frac{R_0 \operatorname{sen} \alpha_0}{L} - 1$ . Portanto,

$$g'(\varphi) > -1.$$

Como a aplicação de bilhar é invertível, o gráfico de  $\tilde{g}(\varphi) = \pi - g(\varphi)$  é também uma curva rotacional invariante e, então,  $\tilde{g}'(\varphi) = -g'(\varphi) < 1$ , para todo  $\varphi$ .

Então, para qualquer  $\gamma = \operatorname{graf}(g)$   $C^2$  invariante, temos  $-1 < g'(\varphi) < 1$ .

A cada curva rotacional invariante  $\gamma$  está associada uma cáustica [20], curva que está na mesa de bilhar e é tangente a todos os segmentos da trajetória de bilhar entre dois impactos consecutivos.

Se  $(\varphi_0, \alpha_0)$  e  $(\varphi_1, \alpha_1)$  pertencem a  $\gamma$  então  $\alpha_0 = g(\varphi_0)$  e  $\alpha_1 = g(\varphi_1)$  e, portanto, é verdade que em uma curva invariante

$$\frac{R_0 \operatorname{sen} \alpha_0}{1 + g'(\varphi_0)} + \frac{R_1 \operatorname{sen} \alpha_1}{1 - g'(\varphi_1)} = L_0$$

onde o primeiro termo do lado esquerdo da expressão mede a distância do ponto de tangência na cáustica ao ponto inicial  $\Gamma(\varphi_0)$  e o segundo mede a distância do ponto de tangência ao ponto final  $\Gamma(\varphi_1)$ .

## 6.5 Bilhar não-elástico convexo

O bilhar não-elástico é uma composição de um bilhar clássico seguido por uma mudança do ângulo de reflexão, correspondendo a uma contração nas fibras verticais de uma curva rotacional invariante.

Seja  $B(\varphi_0, \alpha_0) = (\varphi_1, \alpha_1)$  uma aplicação clássica de bilhar  $C^2$  em uma oval, tendo  $\gamma_0$  como curva rotacional invariante  $C^2$ , dada pelo gráfico de  $\alpha = g(\varphi)$ .

Um subconjunto compacto do espaço de fase  $[0, 2\pi) \times (0, \pi)$  com interior não vazio e cuja fronteira consiste de duas curvas rotacionais distintas (não necessariamente invariantes e nem gráficos) será chamada de **faixa compacta**.

Sejam  $I \in \mathbb{R}$  um intervalo fechado, com interior não vazio e contendo 0 em seu interior e  $h : I \rightarrow I$  uma contração  $C^2$ , estritamente crescente e com  $h(0) = 0$ . Definamos uma aplicação de bilhar não elástica  $P$  em uma faixa compacta  $\Sigma$  contendo  $\gamma_0$  por

$$P(\varphi_0, \alpha_0) = (\varphi_1, \alpha_1 - h(\alpha_1 - g(\varphi_1)))$$

com  $\Sigma$  escolhida tal que se  $(\varphi, \alpha) \in \Sigma$  então  $\alpha - g(\varphi) \in I$ .

Observemos que  $P$  é a composição de um bilhar clássico seguido de uma mudança do ângulo de reflexão, correspondente a uma contração nas fibras verticais de uma curva rotacional invariante  $\gamma_0$ .

Além disso, notemos que

- se  $h(t) \equiv 0$  então  $P(\varphi_0, \alpha_0) = (\varphi_1, \alpha_1)$ ;
- se  $h(t) = t$  então  $P(\varphi_0, \alpha_0) = (\varphi_1, \alpha_1 - \alpha_1 + g(\varphi_1)) = (\varphi_1, g(\varphi_1))$ .

Portanto,  $h(t) \equiv 0$  corresponde ao bilhar clássico não perturbado e que  $h(t) = t$  corresponde à aplicação que envia todos os pontos de  $\Sigma$  sobrejetivamente na curva invariante.

Temos que

$$DP(\varphi_0, \alpha_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_0} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_0} \\ \frac{\partial \hat{p}}{\partial \varphi_0} & \frac{\partial \hat{p}}{\partial \alpha_0} \end{bmatrix}$$

onde  $\hat{p} = \alpha_1 - h(\alpha_1 - g(\varphi_1))$ .

Mas,

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \varphi_0} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \varphi_0} - \frac{\partial h}{\partial \alpha_1} \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial \varphi_0} - \frac{\partial g(\varphi_1)}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_0} \right) = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \varphi_0} - h'_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \varphi_0} + h'_1 g'_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_0}$$

e

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial \alpha_0} = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_0} - \frac{\partial h}{\partial \alpha_1} \left( \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_0} - \frac{\partial g(\varphi_1)}{\partial \varphi_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_0} \right) = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_0} - h'_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_0} + h'_1 g'_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_0}.$$

Logo, a matriz derivada de  $P$  é dada por

$$\begin{aligned} DP(\varphi_0, \alpha_0) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h'_1 g'_1 & 1 - h'_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_0} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_0} \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial \varphi_0} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_0} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{R_1 \sin \alpha_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ h'_1 g'_1 & 1 - h'_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_0 - R_0 \sin \alpha_0 & L_0 \\ L_0 - R_1 \sin \alpha_1 - R_0 \sin \alpha_0 & L_0 - R_1 \sin \alpha_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

onde  $g'_i = g'(\varphi_i)$  e  $h'_i = h'(\alpha_i - g(\varphi_i))$ .

Vejamos, agora, um de nossos principais resultados.

**Teorema 6.2.** *Dada uma aplicação de bilhar oval clássico  $B$ , com  $\gamma_0 = \{\varphi, g(\varphi)\}$  uma curva rotacional invariante  $C^2$ , consideremos a faixa compacta  $\Sigma$ , contendo  $\gamma_0$  em seu interior, e um intervalo fechado  $I \subset \mathbb{R}$ , tal que  $\alpha - g(\varphi) \in I$  se  $(\varphi, \alpha) \in \Sigma$ . Se  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função  $C^2$  satisfazendo  $h(0) = 0$  e  $0 \leq 1 - \underline{l} < h'(0) < 1$  (com  $\underline{l}$  dependendo somente de  $\gamma_0$ ), então existe uma faixa compacta  $S \subset \Sigma$  tal que a aplicação de bilhar não elástica  $P$  definida por  $B$ ,  $g$  e  $h$  é um difeomorfismo  $C^2$  de  $S$  em  $P(S)$ . Seu conjunto limite  $L(P)$  contém  $\gamma_0$  e tem decomposição dominada.*

**Demonstração:** Sabemos que a aplicação do bilhar não elástico  $P : \Sigma \rightarrow P(\Sigma) \subset [0, 2\pi) \times (0, \pi)$  é a composição da aplicação de bilhar clássico  $B$ , que é um difeomorfismo  $C^2$ , com a perturbação da identidade,  $C^2$ ,

$$(\varphi, \alpha) \mapsto (\varphi, \alpha) - (0, h(\alpha - g(\varphi)))$$

onde  $h$  é uma contração  $C^2$ . Dessa forma, temos que  $P$  será um difeomorfismo  $C^2$ .

Dado  $\delta > 0$ , consideremos  $u_{(\varphi, \alpha)} = (1, g'(\varphi) - \delta)$  e  $v_{(\varphi, \alpha)} = (1, g'(\varphi) + \delta)$ , dois campos de vetores linearmente independentes definindo o campo de cones

$$\mathcal{C}(\varphi, \alpha) = \{w \in T_{(\varphi, \alpha)}M; Q_{(\varphi, \alpha)}(w) > 0\} \cup \{0\}$$

e associado à forma quadrática  $Q_{(\varphi, \alpha)}(au_{(\varphi, \alpha)} + bv_{(\varphi, \alpha)}) = ab$ .

Consideremos

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ g'_0 - \delta & g'_0 + \delta \end{bmatrix} \text{ e } U_1 = \frac{1}{2\delta_1} \begin{bmatrix} g'_1 + \delta_1 & -1 \\ -g'_1 + \delta'_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Denotando  $\lambda = 1 - h'_1$  e  $\nu = (1 - \lambda)g'_1$ , reescrevemos

$$DP(\varphi_0, \alpha_0) = \frac{1}{R_1 \text{sen } \alpha_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \nu & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_0 - R_0 \text{sen } \alpha_0 & L_0 \\ L_0 - R_1 \text{sen } \alpha_1 - R_0 \text{sen } \alpha_0 & L_0 - R_1 \text{sen } \alpha_1 \end{bmatrix}.$$

Fazendo a mudança de base, da base canônica para a base  $V$  composta pelos vetores  $u_{(\varphi, \alpha)}$  e  $v_{(\varphi, \alpha)}$ , obtemos

$$\begin{aligned} [DP(\varphi_0, \alpha_0)]_V &= \frac{1}{N} \begin{bmatrix} g'_1 + \delta_1 & -1 \\ -g'_1 + \delta'_1 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \nu & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_0 - R_0 \text{sen } \alpha_0 & L_0 \\ L_0 - R_1 \text{sen } \alpha_1 - R_0 \text{sen } \alpha_0 & L_0 - R_1 \text{sen } \alpha_1 \end{bmatrix} \right\} \\ &\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ g'_0 - \delta_0 & g'_0 + \delta_0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{N} \begin{bmatrix} g'_1 + \delta_1 & -1 \\ -g'_1 + \delta'_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_0 - R_0 \text{sen } \alpha_0 & L_0 \\ (L_0 - R_0 \text{sen } \alpha_0)\nu + & L_0\nu + \\ (L_0 - R_1 \text{sen } \alpha_1 - R_0 \text{sen } \alpha_0)\lambda & (L_0 - R_1 \text{sen } \alpha_1)\lambda \end{bmatrix} \\ &\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ g'_0 - \delta_0 & g'_0 + \delta_0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{N} \begin{bmatrix} g'_1 + \delta_1 & -1 \\ -g'_1 + \delta'_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} \\ \bar{S}_{21} & \bar{S}_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

onde

- $N = 2\delta_1 R_1 \text{sen } \alpha_1$ ;
- $\bar{S}_{11} = L_0 - R_0 \text{sen } \alpha_0 + L_0(g'_0 - \delta_0)$ ;
- $\bar{S}_{12} = L_0 - R_0 \text{sen } \alpha_0 + L_0(g'_0 + \delta_0)$ ;
- $\bar{S}_{21} = (L_0 - R_0 \text{sen } \alpha_0)\nu + (L_0 - R_1 \text{sen } \alpha_1 - R_0 \text{sen } \alpha_0)\lambda + [L_0\nu + (L_0 - R_1 \text{sen } \alpha_1)\lambda](g'_0 - \delta_0)$ ;
- $\bar{S}_{22} = (L_0 - R_0 \text{sen } \alpha_0)\nu + (L_0 - R_1 \text{sen } \alpha_1 - R_0 \text{sen } \alpha_0)\lambda + [L_0\nu + (L_0 - R_1 \text{sen } \alpha_1)\lambda](g'_0 + \delta_0)$ .

Portanto,

$$[DP(\varphi_0, \alpha_0)]_U = \frac{1}{2\delta_1 R_1 \text{sen } \alpha_1} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

onde

- $S_{11} = [L_0 - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0 + (g'_0 - \delta_0)L_0](g'_1 + \delta_1) - [(L_0 - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0)\nu + (L_0 - R_1 \operatorname{sen} \alpha_1 - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0)\lambda + [L_0\nu + (L_0 - R_1 \operatorname{sen} \alpha_1)\lambda](g'_0 - \delta_0)]$   
 $= (g'_1 + \delta_1)[L_0 - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0 + L_0(g'_0 - \delta_0)] - \nu(L_0 - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0) - \lambda(L_0 - R_1 \operatorname{sen} \alpha_1 - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0) - [\nu L_0 + \lambda(L_0 - R_1 \operatorname{sen} \alpha_1)](g'_0 - \delta_0)$   
 $= (g'_1 + \delta_1)[L_0(1 + g'_0 - \delta_0) - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0] - \nu[L_0(1 + g'_0 - \delta_0) - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0] - \lambda$   
 $[L_0(1 + g'_0 - \delta_0) - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0 - (1 + g'_0 - \delta_0)R_1 \operatorname{sen} \alpha_1];$
- $S_{12} = (g'_1 + \delta_1)[L_0 - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0 + L_0(g'_0 + \delta_0)] - \nu(L_0 - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0) - \lambda(L_0 - R_1 \operatorname{sen} \alpha_1 - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0) - [\nu L_0 + \lambda(L_0 - R_1 \operatorname{sen} \alpha_1)](g'_0 + \delta_0)$   
 $= (g'_1 + \delta_1)[L_0(1 + g'_0 + \delta_0) - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0] - \nu[L_0(1 + g'_0 + \delta_0) - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0] - \lambda$   
 $[L_0(1 + g'_0 + \delta_0) - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0 - (1 + g'_0 + \delta_0)R_1 \operatorname{sen} \alpha_1];$
- $S_{21} = (-g'_1 + \delta_1)[L_0 - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0 + L_0(g'_0 - \delta_0)] + \nu(L_0 - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0) + \lambda(L_0 - R_1 \operatorname{sen} \alpha_1 - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0) + [\nu L_0 + \lambda(L_0 - R_1 \operatorname{sen} \alpha_1)](g'_0 - \delta_0)$   
 $= (-g'_1 + \delta_1)[L_0(1 + g'_0 - \delta_0) - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0] + \nu[L_0(1 + g'_0 - \delta_0) - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0] + \lambda$   
 $[L_0(1 + g'_0 - \delta_0) - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0 - (1 + g'_0 - \delta_0)R_1 \operatorname{sen} \alpha_1];$
- $S_{22} = (-g'_1 + \delta_1)[L_0 - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0 + L_0(g'_0 + \delta_0)] + \nu(L_0 - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0) + \lambda(L_0 - R_1 \operatorname{sen} \alpha_1 - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0) + [\nu L_0 + \lambda(L_0 - R_1 \operatorname{sen} \alpha_1)](g'_0 + \delta_0)$   
 $= (-g'_1 + \delta_1)[L_0(1 + g'_0 + \delta_0) - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0] + \nu[L_0(1 + g'_0 + \delta_0) - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0] + \lambda$   
 $[L_0(1 + g'_0 + \delta_0) - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0 - (1 + g'_0 + \delta_0)R_1 \operatorname{sen} \alpha_1].$

Substituindo  $\nu = (1 - \lambda)g'_1$  em  $S_{11}$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= (g'_1 + \delta_1)[L_0(1 + g'_0 - \delta_0) - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0] - (1 - \lambda)g'_1[L_0(1 + g'_0 - \delta_0) - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0] \\
 &\quad - \lambda[L_0(1 + g'_0 - \delta_0) - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0 - (1 + g'_0 - \delta_0)R_1 \operatorname{sen} \alpha_1] \\
 &= \delta_1[L_0(1 + g'_0 - \delta_0) - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0] - \lambda[L_0(1 + g'_0 - \delta_0) - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0 - (1 + g'_0 - \delta_0) \\
 &\quad R_1 \operatorname{sen} \alpha_1 - L_0(1 + g'_0 - \delta_0)g'_1 + R_0 \operatorname{sen} \alpha_0 g'_1] \\
 &= \delta_1[L_0(1 + g'_0 - \delta_0) - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0] - \lambda[L_0(1 + g'_0)(1 - g'_1) - (1 - g'_1)R_0 \operatorname{sen} \alpha_0 \\
 &\quad - R_1 \operatorname{sen} \alpha_1(1 + g'_0) - \delta_0(L_0(1 - g'_1) - R_1 \operatorname{sen} \alpha_1)]
 \end{aligned}$$

Analogamente, temos que

$$\begin{aligned} S_{21} &= \delta_1 [L_0(1 + g'_0 - \delta_0) - R_0 \text{sen } \alpha_0] + \lambda [L_0(1 + g'_0)(1 - g'_1) - (1 - g'_1)R_0 \text{sen } \alpha_0 \\ &\quad - R_1 \text{sen } \alpha_1(1 + g'_0) - \delta_0(L_0(1 - g'_1) - R_1 \text{sen } \alpha_1)] \\ S_{12} &= \delta_1 [L_0(1 + g'_0 + \delta_0) - R_0 \text{sen } \alpha_0] - \lambda [L_0(1 + g'_0)(1 - g'_1) - (1 - g'_1)R_0 \text{sen } \alpha_0 \\ &\quad - R_1 \text{sen } \alpha_1(1 + g'_0) + \delta_0(L_0(1 - g'_1) - R_1 \text{sen } \alpha_1)] \\ S_{22} &= \delta_1 [L_0(1 + g'_0 + \delta_0) - R_0 \text{sen } \alpha_0] + \lambda [L_0(1 + g'_0)(1 - g'_1) - (1 - g'_1)R_0 \text{sen } \alpha_0 \\ &\quad - R_1 \text{sen } \alpha_1(1 + g'_0) + \delta_0(L_0(1 - g'_1) - R_1 \text{sen } \alpha_1)]. \end{aligned}$$

Fazendo  $\delta = \delta_0 = \delta_1$  e chamando  $l_0 = L_0(1 + g'_0) - R_0 \text{sen } \alpha_0$ ,  $l_1 = L_0(1 - g'_1) - R_1 \text{sen } \alpha_1$  e  $l_{01} = L_0(1 + g'_0)(1 - g'_1) - (1 - g'_1)R_0 \text{sen } \alpha_0 - R_1 \text{sen } \alpha_1(1 + g'_0)$  obtemos,

$$\begin{aligned} S_{11} &= \delta(l_0 - \delta L_0) + \lambda(\delta l_1 - l_{01}) \\ S_{12} &= \delta(l_0 + \delta L_0) - \lambda(\delta l_1 + l_{01}) \\ S_{21} &= \delta(l_0 - \delta L_0) - \lambda(\delta l_1 - l_{01}) \\ S_{22} &= \delta(l_0 + \delta L_0) + \lambda(\delta l_1 + l_{01}). \end{aligned}$$

Logo,

$$[DP(\varphi_0, \alpha_0)]_U = \frac{1}{2\delta_1 R_1 \text{sen } \alpha_1} \begin{bmatrix} \delta(l_0 - \delta L_0) + \lambda(\delta l_1 - l_{01}) & \delta(l_0 + \delta L_0) - \lambda(\delta l_1 + l_{01}) \\ \delta(l_0 - \delta L_0) - \lambda(\delta l_1 - l_{01}) & \delta(l_0 + \delta L_0) + \lambda(\delta l_1 + l_{01}) \end{bmatrix}$$

e, conseqüentemente,

$$[DP(\varphi_0, \alpha_0)]_U = \frac{1}{2\delta_1 R_1 \text{sen } \alpha_1} \begin{bmatrix} \delta(l_0 - \delta L_0) + (1 - h'_1)(\delta l_1 - l_{01}) & \delta(l_0 + \delta L_0) - (1 - h'_1)(\delta l_1 + l_{01}) \\ \delta(l_0 - \delta L_0) - (1 - h'_1)(\delta l_1 - l_{01}) & \delta(l_0 + \delta L_0) + (1 - h'_1)(\delta l_1 + l_{01}) \end{bmatrix}.$$

Sabemos que

$$\frac{R_0 \text{sen } \alpha_0}{1 + g'(\varphi_0)} + \frac{R_1 \text{sen } \alpha_1}{1 + g'(\varphi_1)} = L_0$$

então

$$\frac{(R_0 \text{sen } \alpha_0)(1 - g'_1) + (R_1 \text{sen } \alpha_1)(1 + g'_0)}{(1 + g'_0)(1 - g'_1)} = L_0.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} l_{01} &= \frac{(R_0 \text{sen } \alpha_0)(1 - g'_1) + (R_1 \text{sen } \alpha_1)(1 + g'_0)}{(1 + g'_0)(1 - g'_1)} (1 + g'_0)(1 - g'_1) - R_0 \text{sen } \alpha_0(1 - g'_1) \\ &\quad + R_1 \text{sen } \alpha_1(1 + g'_0) = 0, \\ l_0 &= \frac{(R_0 \text{sen } \alpha_0)(1 - g'_1) + (R_1 \text{sen } \alpha_1)(1 + g'_0)}{(1 + g'_0)(1 - g'_1)} (1 + g'_0) - R_0 \text{sen } \alpha_0 = R_1 \text{sen } \alpha_1 \frac{(1 + g'_0)}{(1 - g'_1)} \text{ e} \\ l_1 &= \frac{(R_0 \text{sen } \alpha_0)(1 - g'_1) + (R_1 \text{sen } \alpha_1)(1 + g'_0)}{(1 + g'_0)(1 - g'_1)} (1 - g'_1) - R_1 \text{sen } \alpha_1 = R_0 \text{sen } \alpha_0 \frac{(1 - g'_1)}{(1 + g'_0)}. \end{aligned}$$

A fronteira do bilhar  $\Gamma$  é uma oval e como é compacta existem constantes  $a$  e  $A$  e uma largura  $D$  tal que

$$0 < a \leq R(\varphi) \leq A \text{ e } 0 < L_0 \leq D.$$

Como a curva invariante também é compacta (fechada e definida num compacto), para cada  $(\varphi_0, \alpha_0)$  e  $(\varphi_1, \alpha_1)$  em  $\gamma_0$ , existem constantes  $c$  e  $C$  tais que

$$C \geq l_0 \geq c > 0 \text{ e } C \geq l_1 \geq c > 0.$$

Assim, para pontos de  $\gamma_0$ , existem constantes  $0 < \underline{l} \leq 1$  e  $0 < \bar{L}$  tal que

$$\underline{l} \leq \frac{l_0}{l_1} \text{ e } 0 < \frac{L_0}{L_1} \leq \bar{L}.$$

Cada entrada da matriz  $[DP(\varphi_0, \alpha_0)]_U$ , para  $(\varphi_0, \alpha_0) \in \gamma_0$ , é da forma

$$\begin{aligned} \delta(l_0 \pm \delta L_0) \pm \lambda(\delta l_1 \pm l_{01}) &= \delta[l_0 \pm \delta L_0 \pm (1 - h'(0))l_1] \\ &\geq \delta l_1 \left[ \frac{l_0}{l_1} - \delta \frac{L}{l_1} - (1 - h'(0)) \right] \\ &\geq \delta c[\underline{l} - \delta \bar{L} - (1 - h'(0))]. \end{aligned}$$

Note que se  $0 \leq 1 - \underline{l} < h'(0) < 1$  temos que  $h'(0) - 1 + \underline{l} \geq 0$  e, então, podemos escolher  $\delta > 0$  tal que

$$\delta c[\underline{l} - \delta \bar{L} - (1 - h'(0))] = \delta c[h'(0) - 1 + \underline{l} - \delta \bar{L}] > 0.$$

Como  $P$  é um difeomorfismo  $C^2$  e  $\gamma_0$  é compacta podemos encontrar uma faixa  $S \subset \Sigma$  contendo  $\gamma_0$  em seu interior, onde  $P$  está bem definida e todas as entradas de  $[DP(\varphi_0, \alpha_0)]_U$  são estritamente positivas.

Então, pelo Lema 6.1, o conjunto dos pontos limites  $L(P) \subset S$  tem decomposição dominada e contém  $\gamma_0$ , desde que  $h(0) = 0$ . ■

Este resultado nos guiará a construir exemplos de bilhar não-elástico em ovals com conjunto limite tendo decomposição dominada e suportando uma rotação racional ou uma rotação irracional (peças do tipo  $\mathcal{I}$  ou  $\mathcal{R}$  do Teorema de Pujals-Sambarino).

### 6.5.1 Exemplos

**Exemplo 6.2. (Círculo)** O exemplo mais simples de bilhar clássico com curva rotacional invariante é o circular.

Sabemos que a aplicação de bilhar no círculo é linear e é dada por

$$B(\varphi_0, \alpha_0) = (\varphi_0 + 2\alpha_0, \alpha_0).$$

Seu espaço de fase  $[0, 2\pi) \times (0, \pi)$  é folheado por curvas rotacionais invariantes horizontais e a dinâmica de cada uma delas é simplesmente uma rotação de  $2\alpha_0$ .

Consideremos um curva invariante  $\gamma_0$ , definida por  $\alpha = g(\varphi) = \bar{\beta}_0$ . Em  $\gamma_0$ ,  $g' \equiv 0$ ,  $R_i = R$  (

o raio do círculo) e  $\text{sen } \alpha_i = \text{sen } \bar{\beta}_0$  o que implica

$$l_0 = R_1 \text{sen } \alpha_1 \frac{(1 + g'_0)}{(1 - g'_1)} = R \text{sen } \bar{\beta}_0 = R_0 \text{sen } \alpha_0 \frac{(1 - g'_1)}{(1 + g'_0)} = l_1 \text{ e } \underline{l} = 1.$$

Fixemos  $I$ , um intervalo fechado com  $0$  em seu interior e contido em  $(-\bar{\beta}_0, \pi - \bar{\beta}_0)$ , e  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  contração estritamente crescente e  $C^2$  tal que  $h(0) = 0$  e  $0 < h'(0) < 1$ .

A aplicação do bilhar não-elástico  $P$  é definida na faixa  $[0, 2\pi) \times \{I + \bar{\beta}_0\}$  por

$$P(\varphi_0, \alpha_0) = (\varphi_0 + 2\alpha_0, \alpha_0 - h(\alpha_0 - \bar{\beta}_0))$$

Pelo Teorema 6.2, existe uma faixa compacta  $S$ , contendo  $\gamma_0$  em seu interior, e tal que  $P|_S$  é um difeomorfismo  $C^2$ ,  $L(P|_S)$  contém  $\gamma_0$  e tem decomposição dominada. Então existem constantes  $\bar{\beta}_-$  e  $\bar{\beta}_+$ ,  $0 < \bar{\beta}_- < \bar{\beta}_0 < \bar{\beta}_+ < \pi$  tal que a faixa  $W = [0, 2\pi) \times [\bar{\beta}_-, \bar{\beta}_+]$  está contida em  $S$  e contém  $\gamma_0$  em seu interior.

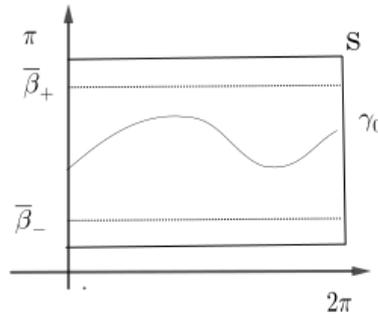


Figura 6.10: Curva rotacional invariante.

Denotemos  $(\varphi_n, \alpha_n) = P^n(\varphi_0, \alpha_0)$ . Temos que para  $\alpha_{n-1} < \alpha_n < \bar{\beta}_0$ ,  $d(\alpha_n, \bar{\beta}_0) \rightarrow 0$ . Logo  $\alpha_n \rightarrow \bar{\beta}_0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Além disso, observemos que  $P|_{\gamma_0} = (\varphi_0 + 2\bar{\beta}_0, \alpha_0 - h(\bar{\beta}_0 - \bar{\beta}_0)) = (\varphi_0 + 2\bar{\beta}_0, \alpha_0)$ . Logo, a aplicação restrita  $P|_{\gamma_0}$  é apenas uma rotação de ângulo  $2\bar{\beta}_0$ .

Se  $\frac{\bar{\beta}_0}{\pi}$  é racional então  $\gamma_0$  é uma curva simples, fechada, composta por pontos periódicos de mesmo período. Enquanto que, se  $\frac{\bar{\beta}_0}{\pi}$  é irracional então é uma curva simples, fechada, suportando uma rotação irracional.

Com isso, temos um exemplo de um difeomorfismo definido em uma faixa  $W$  cujo conjunto de pontos limites tem decomposição dominada e é composto por uma peça do tipo  $\mathcal{I}$  ou  $\mathcal{R}$  do Teorema de Pujals-Sambarino.

### Exemplo 6.3. (Elipse)

Um exemplo similar ao do círculo é dado pela elipse. Consideremos uma elipse  $\Gamma$  com excentricidade  $\epsilon$  e eixo menor com comprimento igual a 1. Sabemos que seu raio de curvatura é dado por

$$R = \frac{a(1 - \epsilon^2)}{(1 - \epsilon^2 \text{sen}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}$$

então

$$R \leq \frac{a(1-\epsilon^2)}{(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a}{(1-\epsilon^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(1-\epsilon^2)}$$

$$R \geq a(1-\epsilon^2) > (1-\epsilon^2) > \sqrt{1-\epsilon^2}$$

e, conseqüentemente,

$$\sqrt{1-\epsilon^2} \leq R \leq \frac{1}{(1-\epsilon^2)}.$$

A aplicação de bilhar clássico associada,  $B : [0, 2\pi) \times (0, \pi) \mapsto [0, 2\pi) \times (0, \pi)$ , é integrável e sua integral primeira é dada por

$$F(\varphi, \alpha) = \frac{\cos^2 \alpha - \epsilon^2 \cos^2 \varphi}{1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi}.$$

Sabemos que  $\cos^2 \alpha < 1$  então  $\cos^2 \alpha - \epsilon^2 \cos^2 \varphi < 1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi$  e, conseqüentemente,  $F_0 < 1$ . Além disso,

$$F_0 > \frac{-\epsilon^2 \cos^2 \varphi_0}{1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0} > \frac{-\epsilon^2}{1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi_0} > \frac{-\epsilon^2}{1 - \epsilon^2}.$$

Logo,

$$\frac{-\epsilon^2}{(1 - \epsilon^2)} < F_0 < 1.$$

Se  $0 < F_0 < 1$ , o conjunto de nível consiste de duas curvas rotacionais invariantes, analíticas e simétricas, a mais baixa contida em  $[0, 2\pi) \times (0, \frac{\pi}{2})$  e a superior em  $[0, 2\pi) \times (\frac{\pi}{2}, \pi)$ .

Para um  $F_0$  fixo, tal que  $0 < F_0 < 1$ , consideremos  $\gamma_0$  a curva rotacional invariante inferior em  $F(\varphi, \alpha) = F_0$  (o caso superior é análogo). Como  $F_0 = \frac{\cos^2 \alpha - \epsilon^2 \cos^2 \varphi}{1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi}$  temos que  $F_0(1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi) = \cos^2 \alpha - \epsilon^2 \cos^2 \varphi$  e, portanto,

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha &= F_0 - F_0 \epsilon^2 \cos^2 \varphi + \epsilon^2 \cos^2 \varphi \\ &= F_0 + (1 - F_0) \epsilon^2 \cos^2 \varphi. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Assim,

$$\cos \alpha = \sqrt{F_0 + (1 - F_0) \epsilon^2 \cos^2 \varphi} \text{ já que } \alpha \in (0, \pi).$$

Como  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$  temos que  $\sin^2 \alpha = 1 - F_0 - (1 - F_0) \epsilon^2 \cos^2 \varphi = (1 - F_0)(1 - \epsilon^2 \cos^2 \varphi)$ . Logo, para qualquer  $(\varphi, \alpha) \in \gamma_0$ ,

$$\sqrt{(1 - F_0)(1 - \epsilon^2)} \leq \sin \alpha \leq \sqrt{1 - F_0}.$$

Sabendo que  $\sqrt{(1 - F_0)(1 - \epsilon^2)} \leq \sin \alpha_i \leq \sqrt{1 - F_0}$  e  $\sqrt{1 - \epsilon^2} \leq R_i \leq \frac{1}{(1 - \epsilon^2)}$ , obtemos

$$(1 - \epsilon^2) \sqrt{1 - F_0} \leq R_i \sin \alpha_i \leq \frac{\sqrt{1 - F_0}}{1 - \epsilon^2}.$$

Logo,

$$\frac{l_0}{l_1} = \frac{(1 + \alpha'_0)^2 R_1 \sin \alpha_1}{(1 - \alpha'_1)^2 R_0 \sin \alpha_0} \geq \frac{(1 + \alpha'_0)^2 (1 - \epsilon^2) \sqrt{1 - F_0}}{(1 - \alpha'_1)^2 \frac{\sqrt{1 - F_0}}{(1 - \epsilon^2)}} = \frac{(1 + \alpha'_0)^2}{(1 - \alpha'_1)^2} (1 - \epsilon^2)^2.$$

Derivando (6.7), com respeito a  $\varphi$ , obtemos

$$\operatorname{sen}(2\alpha)\alpha' = (1 - F_0)\epsilon^2 \operatorname{sen}(2\varphi).$$

Dessa forma, teremos que  $\alpha' = 0$  se, e somente se,  $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \dots$ . Com isso, encontramos um máximo em  $\varphi = 0$  e um mínimo em  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Uma vez que, em  $\varphi = 0$ ,  $\cos^2 \alpha = F_0 + (1 - F_0)\epsilon^2$  e, em  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos^2 \alpha = F_0$ .

Portanto,

$$\sqrt{F_0} \leq \cos \alpha \leq \sqrt{F_0 + (1 - F_0)\epsilon^2}. \quad (6.8)$$

Como  $\operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$ , segue que  $(1 - F_0)(1 - \epsilon^2) \leq \operatorname{sen}^2 \alpha \leq 1 - F_0$  e, conseqüentemente,

$$\sqrt{(1 - F_0)(1 - \epsilon^2)} \leq \operatorname{sen} \alpha \leq \sqrt{1 - F_0}. \quad (6.9)$$

Por (6.8) e (6.9), temos

$$2\sqrt{F_0}\sqrt{(1 - F_0)(1 - \epsilon^2)} \leq 2\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \leq 2\sqrt{1 - F_0}\sqrt{F_0 + (1 - F_0)\epsilon^2}.$$

Como  $2\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = \operatorname{sen}(2\alpha)$  e  $\alpha' = \frac{(1 - F_0)\epsilon^2 \operatorname{sen}(2\varphi)}{\operatorname{sen}(2\alpha)}$ , encontramos

$$\frac{(1 - F_0)\epsilon^2 \operatorname{sen}(2\varphi)}{2\sqrt{(1 - F_0)(F_0 + (1 - F_0)\epsilon^2)}} \leq \alpha' \leq \frac{(1 - F_0)\epsilon^2 \operatorname{sen}(2\varphi)}{2\sqrt{F_0(1 - F_0)(1 - \epsilon^2)}}$$

e, então,

$$-\frac{(1 - F_0)\epsilon^2}{2\sqrt{(1 - F_0)(F_0 + (1 - F_0)\epsilon^2)}} \leq \alpha' \leq \frac{(1 - F_0)\epsilon^2}{2\sqrt{F_0(1 - F_0)(1 - \epsilon^2)}}.$$

Com isso,

$$1 - \frac{(1 - F_0)\epsilon^2}{2\sqrt{(1 - F_0)(F_0 + (1 - F_0)\epsilon^2)}} \leq 1 + \alpha' \leq 1 + \frac{(1 - F_0)\epsilon^2}{2\sqrt{F_0(1 - F_0)(1 - \epsilon^2)}}$$

e

$$1 - \frac{(1 - F_0)\epsilon^2}{2\sqrt{F_0(1 - F_0)(1 - \epsilon^2)}} \leq 1 - \alpha' \leq 1 + \frac{(1 - F_0)\epsilon^2}{2\sqrt{(1 - F_0)(F_0 + (1 - F_0)\epsilon^2)}}.$$

Por fim, temos

$$\begin{aligned} \frac{l_0}{l_1} &\geq \left( \frac{1 + \alpha'_0}{1 - \alpha'_1} \right)^2 (1 - \epsilon^2)^2 \\ &> \left( \frac{1 - \frac{(1 - F_0)\epsilon^2}{2\sqrt{(1 - F_0)(F_0 + (1 - F_0)\epsilon^2)}}}{1 + \frac{(1 - F_0)\epsilon^2}{2\sqrt{(1 - F_0)(F_0 + (1 - F_0)\epsilon^2)}}} \right)^2 (1 - \epsilon^2)^2 \\ &= \left( \frac{2\sqrt{(1 - F_0)(F_0 + (1 - F_0)\epsilon^2)} - (1 - F_0)\epsilon^2}{2\sqrt{(1 - F_0)(F_0 + (1 - F_0)\epsilon^2)} + (1 - F_0)\epsilon^2} \right)^2 (1 - \epsilon^2)^2. \end{aligned}$$

Então, podemos tomar

$$\underline{l} = \left( \frac{2\sqrt{(1-F_0)(F_0 + (1-F_0)\epsilon^2)} - (1-F_0)\epsilon^2}{2\sqrt{(1-F_0)(F_0 + (1-F_0)\epsilon^2)} + (1-F_0)\epsilon^2} \right)^2 (1-\epsilon^2)^2.$$

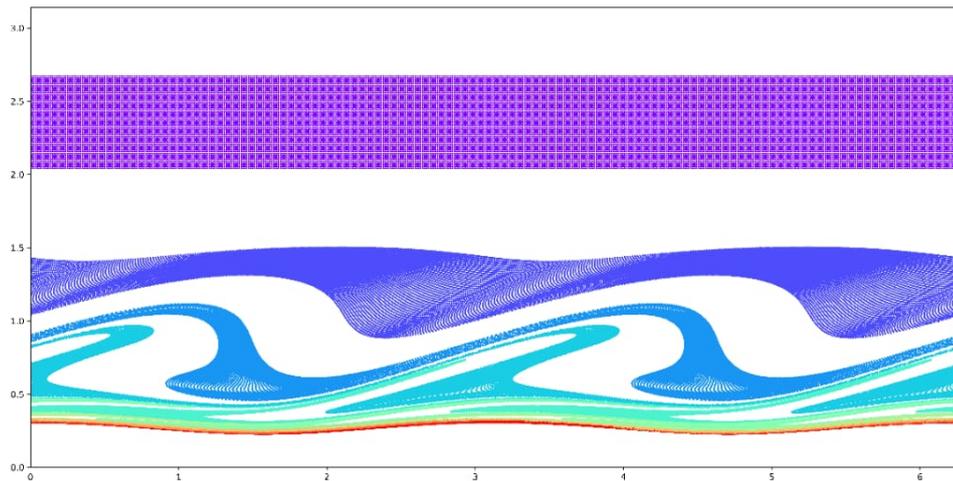
A aplicação de bilhar não-elástica associada é dada por

$$P(\varphi_0, \alpha_0) = (\varphi_1, \alpha_1 - h(\alpha_1 - g(\varphi_1)))$$

onde a contração  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função arbitrária  $C^2$ , satisfazendo  $h(0) = 0$  e  $0 < 1-\underline{l} \leq h'(0)$ , e  $I$  é um intervalo fechado contendo 0 em seu interior.

Então, pelo Teorema 6.2, deve existir uma faixa compacta  $S$ , contendo  $\gamma_0$ , tal que  $P|_S$  é um difeomorfismo  $C^2$  e  $L(P|_S)$  tem decomposição dominada.

Portanto,  $P$  é um difeomorfismo  $C^2$  cujo conjunto de pontos limites tem decomposição dominada e é composto por peças do tipo  $\mathcal{I}$  ou  $\mathcal{R}$  do Teorema de Pujals-Sambarino.



**Figura 6.11:** Espaço de fase de um bilhar não-elástico elíptico.

# Referências Bibliográficas

- [1] BERRY, M. V. *Regularity and chaos in classical mechanics illustrated by three deformations of a circular billiard*, Eur. J. Phys., Vol. 2 (1981), 91-102.
- [2] BIRKHOFF, G. D. *Dinamical systems*, AMS, Colloquium Vol. IX (Rev. Ed. 1966).
- [3] CARNEIRO, M. J. D. ; KAMPHORST, S.O.; PINTO DE CARVALHO, S.; *Elliptic Islands in Strictly Convex Billiards*, Erg.Th.Dyn.Sys., 2003, 3, 799-812.
- [4] DO CARMO, M. P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 6ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [5] DO CARMO, M. P. *Geometria Riemanniana*. 3ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [6] GOLÉ, C. *Symplectic Twist Maps: Global Variational Techniques*. Singapore, World Scientific, 2001.
- [7] KATOK, A.; HASSELBLAT, B. *A First Course in Dynamics: With a Panorama of Recent Developments*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [8] KATOK, A.; HASSELBLAT, B. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [9] LEVI M.; TABACHNIKOV, S. *The Poncelet grid and billiards in ellipses*. Amer. Math. Monthly , 114, 895–908, 2007.
- [10] LIMA, E. L. *Curso de análise vol. 2* . 11ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [11] MAÑÉ, R. *Persistent Manifolds are Normally Hyperbolic*, Thesis IMPA, 1973.
- [12] MAÑÉ, R. *Persistent Manifolds are Normally Hyperbolic*; Trans. of The AMS 246, 1978
- [13] MARKARIAN, R.; KAMPHORST, S.O.; PINTO DE CARVALHO, S. *Chaotic Properties of the Elliptical Stadium*. Commun. Math. Phys. 1996, **174**, P. 661–679.
- [14] MARKARIAN, R.; KAMPHORST, S.O.; PINTO DE CARVALHO, S. *Limit Sets of Convex non Elastic Billiards*, Dynamical Systems 27(2), 2010, DOI: 10.1080/14689367.2012.669468
- [15] MEYER, K. R.; HALL, G. R. *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*. Springer, 1992.
- [16] PUJALS, E. R.; SAMBARINO, M. *On the dynamics of dominated splitting*. Ann. Math. **169** (2009), 675-740.

- [17] RAGAZZO, C. G.; CARNEIRO, M. J. D.; ZANATA, S. A. *Introdução à Dinâmica de Aplicações do tipo Twist*. IMPA, 2006.
- [18] PIMENTEL, F. R. *Pontos heteróclinos de um bilhar elíptico perturbado*. 1993. 57 p. Dissertação (Mestrado em Matemática)- Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte. 1993.
- [19] SAMBARINO, M. *A (short) survey on dominated splitting*, arXiv:1403.6050.
- [20] TABACHNIKOV, S. *Billiards*. Societé Mathématique de France, 1995.
- [21] TABACHNIKOV S. *Geometry and Billiards*. Providence, RI: Amer. Math. Soc. 2005.
- [22] WOJTOWSKI, M. *Monotonicity, J-algebra of Potapov and Lyapunov exponents*. in *Smooth Ergodic Theory and Its Applications*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **69**, AMS, 499-521, 2001.