

Universidade Federal de Minas Gerais

Departamento de Matemática – ICEX

Programa de Pós-Graduação em Matemática

**Estudo da dinâmica local
das aplicações de Hénon
cúbicas conservativas**

Luís Felipe Sobreira Amaral

Belo Horizonte – MG

2019

Luís Felipe Sobreira Amaral

Estudo da dinâmica local das aplicações de Hénon cúbicas conservativas

Versão final

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática

Orientadora: Sylvie Marie Oliffson Kamphorst Leal da Silva

Universidade Federal de Minas Gerais

22 de fevereiro de 2019

© 2019, Luís Felipe Sobreira Amaral.
Todos os direitos reservados

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irénquer Vismeg
Lucas Cruz - CRB 6ª Região nº 819

Amaral, Luís Felipe Sobreira.

A485e Estudo da dinâmica local das aplicações de Hénon
cúbicas conservativas / Luís Felipe Sobreira Amaral —
Belo Horizonte, 2019.
99 f. il.; 29 cm.

(Dissertação) - Universidade Federal de Minas
Gerais – Departamento de Matemática.

Orientadora: Sylvie Marie Oliffson Kamphorst Leal da
Silva

1. Matemática - Teses. 2. Sistemas dinâmicos –
Teses. 3. Comportamento caótico nos sistemas –
Teses. I. Orientadora. II. Título.

CDU 51(043)



FOLHA DE APROVAÇÃO

*Estudo da dinâmica local das aplicações de Henon
cúbicas conservativas*

LUÍS FELIPE SOBREIRA AMARAL

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Profª. Sylvie Marie Oliffson Kamphorst Leal da Silva
UFMG

Prof. Gustavo Henrique de Oliveira Salgado
UNIFEI

Profª. Karina Daniela Marín
UFMG

Profª. Sônia Pinto de Carvalho
UFMG

Belo Horizonte, 22 de fevereiro de 2019.

Agradecimentos

Agradeço a DEUS por ter me dado o dom da Vida.

Aos meus pais, Armando e Maria de Fátima, por estarem ao meu lado durante toda a minha jornada acadêmica e por fazerem possíveis todas as minhas conquistas.

À minha irmã, Anna Cecília, e aos meus irmãos, Armando Júnior e Márcio Luís, por serem sempre a minha fonte de inspiração.

À minha Tia Andréa Carla por fazer parte da minha história.

Aos amigos que adquiri na faculdade ao longo de todos estes anos e que nunca deixaram de me apoiar. Entre eles, Vinícius, Tulio, Sávio, Luana, Alice, Cláudia, Cássio, Hyrra, Brian, Sheila, Maria Celeste, Maralice, Helen, Carlos Humberto, Isadora, Ana Carolina, Jéssica, Hellen e Rafael.

Aos meus professores e, em especial, à minha orientadora, Profa. Sylvie Marie, que me ensinaram a buscar sempre mais conhecimento. Também, gostaria de dedicar esta dissertação ao estimado Prof. Elon (*in memoriam*).

Aos meus sobrinhos, João Pedro e Bernardo, minhas sobrinhas, Maria Antônia, a pequena Olívia e a recém-nascida Helena; e aos meus amigos por estarem ao meu lado nas horas mais alegres.

Aos profissionais da saúde, Dra. Sônia, Luana F., Jane, Izabela, Gustavo Henrique, Dr. Bernard, Luana L., Dr. Leonardo com sua equipe, Dr. Antônio Carlos e Lilian, que tanto me ajudaram durante toda a minha trajetória.

Enfim, a todos os meus familiares, especialmente à minha avó, D. Elza.

Observação. O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001 (pelo acesso ao Portal de Periódicos) – e com o apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG).

“A fé e a razão (*fides et ratio*) constituem como que as duas asas pelas quais o espírito humano se eleva para a contemplação da verdade. Foi Deus quem colocou no coração do homem o desejo de conhecer a verdade e, em última análise, de O conhecer a Ele, para que, conhecendo-O e amando-O, possa chegar também à verdade plena sobre si próprio.”

Papa João Paulo II

“Faith is my sword. Truth is my shield. Knowledge my armour.”

Dr. Stephen Strange

Resumo

O objetivo do presente trabalho é apresentar um estudo dos aspectos locais da dinâmica da família de aplicações de Hénon cúbicas conservativas em torno dos seus pontos fixos, que podem ser hiperbólicos, hiperbólicos reversos, elípticos ou parabólicos. Serão utilizadas as definições de estabilidade e instabilidade segundo J. K. Moser. Nos casos hiperbólico e hiperbólico reverso, provaremos que todo difeomorfismo é instável em seu ponto fixo, usando o Teorema de Hartman–Grobman. Mostraremos, no primeiro caso, a existência de pontos homoclínicos topologicamente transversos para uma grande parcela da família em questão. Por conseguinte, as aplicações que satisfazem esta condição são caóticas perto do ponto fixo. Já no caso elíptico, provaremos que as aplicações são estáveis em todos os pontos fixos não-ressonantes até a sexta ordem, onde utilizaremos os Teoremas da Forma Normal de Birkhoff e do Twist de Moser. Para o caso parabólico, demonstraremos que as aplicações da família referida são instáveis no ponto fixo, de acordo com um critério estabelecido por T. Levi-Civita, com exceção de duas, que não se pode afirmar quanto à estabilidade delas.

Palavras-chave: Aplicação de Hénon generalizada; Ponto fixo; Bifurcação; Não-ressonância; Estabilidade; Instabilidade; Caoticidade

Abstract

The goal of the present work is to show a study of local aspects of the dynamics from the family of conservative cubic Hénon maps in a neighbourhood of its fixed points, that could be hyperbolic, reversed hyperbolic, elliptic or parabolic. The definitions of stability and instability used are given by J. K. Moser. On the hyperbolic and reversed hyperbolic cases, it will be proven that every diffeomorphism is unstable in its fixed point, using the Hartman–Grobman Theorem. It will be shown, on the first case, the existence of topologically transverse homoclinic points for a large parcel of the family in question. Therefore, the maps that satisfies this condition are chaotic near the fixed point. On the elliptic case, it will be proven that the maps are stable in all its fixed points non-resonants until sixth order, where the Birkhoff’s Normal Form and the Moser’s Twist Theorems are used. For the parabolic case, it will be shown that the maps of the referred family are unstable on the fixed point according to a criterion established by T. Levi-Civita, with the exception of two of them, in which case there is no statement about its stability.

Keywords: Generalized Hénon map; Fixed point; Bifurcation; Non-resonance; Stability; Instability; Chaoticity

Notações

$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$	Conjunto dos polinômios nas variáveis x_1, \dots, x_n cujos coeficientes pertencem ao corpo \mathbb{K}
$\deg f$	Grau de uma função polinomial f , como definido na Página 5
$\mathcal{O}(n)$	Série de potências convergente com termos de ordens totais maiores que ou iguais a n
$J(p)$	Matriz Jacobiana avaliada no ponto p
C_+ (ou C_-)	Aplicação de Hénon cúbica conservativa cujo coeficiente de 3º grau é 1 (ou -1), como definido na Expressão (2.2) (ou (2.3)) da Página 10
C	Aplicação de Hénon cúbica conservativa sem distinguir o coeficiente de 3º grau, como definido na Página 10
I_n	Matriz identidade $n \times n$
$\mathcal{T} \cdot \vec{v}$	Ação da transformação linear \mathcal{T} sobre o vetor \vec{v}
id	Aplicação identidade
$\{\mathcal{S}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$	Curvas de simetria da aplicação C , como definidas na Página 12
\mathbb{S}^1	Círculo unitário complexo
\prec	Relação de ordem entre os pontos fixos de C , como definida na Página 14
$\text{Res}_x(p, q)$	Resultante dos polinômios p e q com relação à variável x , como definido no Apêndice A
$\text{discr}_x p$	Discriminante do polinômio p com relação à variável x , como definido no Apêndice A
$[x]$	Parte inteira do número real x
$(\vec{v}_1 \mid \vec{v}_2)$	Matriz formada pelos vetores \vec{v}_1, \vec{v}_2 como suas colunas
$\ker M$	Núcleo da matriz M
$\text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$	Espaço vetorial gerado pelos vetores $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	4
1.1 Alguns resultados sobre automorfismos polinomiais do plano	5
1.2 Alguns resultados sobre estabilidade	7
2 A aplicação de Hénon cúbica conservativa	10
2.1 Simetrias	11
2.2 Pontos fixos	13
3 Estudo da dinâmica local nos pontos fixos hiperbólicos (H e Hr)	21
3.1 O Teorema de Hartman–Grobman	21
3.2 O Teorema da Variedade Estável	23
3.3 Existência de pontos homoclínicos	25
3.4 Caoticidade	30
4 Estudo da dinâmica local nos pontos fixos elípticos (E) não-ressonantes	34
4.1 A Forma Normal de Birkhoff	34
4.2 O Teorema do Twist de Moser	38
4.3 Estabilidade	39
5 Estudo da dinâmica local nos pontos fixos parabólicos (P)	42
5.1 Considerações prévias	42
5.2 O resultado de Levi-Civita	44
5.3 Instabilidade	49
Conclusão	52
A Resultantes	59
A.1 Definição de resultante	59
A.2 Raízes múltiplas e discriminantes	61

B Códigos computacionais	62
B.1 Complexificação	63
B.2 Forma Normal de Birkhoff	65
B.3 Estudo da Estabilidade	80
B.4 Figuras: Curvas de Simetria	88
B.5 Figuras: Espaço dos parâmetros	89
B.6 Figuras: Caso Hiperbólico	91
B.7 Figuras: Caso Elíptico	94
B.8 Figuras: Caso Parabólico	97
Referências Bibliográficas	99

Introdução

Em seu sentido mais amplo, um *sistema dinâmico* é uma tripla (T, E, L) , onde T é um conjunto de tempos, E é um conjunto não-vazio chamado de *espaço de estados* e L é uma aplicação que leva $T \times E$ em E chamada de *lei de evolução*.

Se T for o conjunto dos números reais \mathbb{R} , então (T, E, L) é chamado de *sistema dinâmico contínuo*. Mas, se T for o conjunto dos números inteiros \mathbb{Z} , dizemos que (T, E, L) é um *sistema dinâmico discreto*. Neste último caso, a lei de evolução é dada pela *iteração* de uma aplicação contínua $f : E \rightarrow E$, ou seja, pela regra $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0)$, onde x_0 é chamado de *estado inicial*.

Serão estudados, neste trabalho, alguns aspectos locais da dinâmica (discreta) de duas famílias a dois parâmetros de aplicações bidimensionais reais que preservam área e orientação, chamadas de *aplicações de Hénon cúbicas conservativas*, como descritas em [4]. A aplicação de Hénon cúbica é uma generalização da aplicação estudada por M. Hénon em seu artigo *A two-dimensional mapping with a strange attractor*, publicado na revista *Communications in Mathematical Physics* em 1976 e que é atualmente chamada de *aplicação de Hénon* em sua homenagem.

O Capítulo 1 expõe explicação breve sobre a motivação de se estudar as aplicações de Hénon generalizadas e as definições necessárias. Na Seção 1.1, são apresentados alguns resultados obtidos por H. W. E. Jung, S. Friedland e J. Milnor sobre as aplicações polinomiais com determinante jacobiano constante e não-nulo que admitem inversa também polinomial, que é o caso da aplicação de Hénon generalizada. As demonstrações destes resultados foram omitidas neste trabalho, mas se encontram em [5] e [8]. Essa seção foi baseada em [4]. Na Seção 1.2, são definidos os conceitos de *estabilidade* e *instabilidade* segundo J. K. Moser. Estas foram as ferramentas usadas para a análise local da aplicação de Hénon cúbica conservativa ao longo de todo o texto. Essa seção foi baseada em [16].

O Capítulo 2 apresenta a definição do nosso objeto de estudo, a aplicação de Hénon cúbica conservativa, que é denotada de C . Na Seção 2.1, são classificados os tipos de simetrias que existem para C e, na Seção 2.2, mostra-se como elas podem nos ajudar a encontrar os pontos fixos de C , ou seja, os pontos $(x_*, y_*) \in \mathbb{R}^2$ de forma que $C(x_*, y_*) = (x_*, y_*)$. Em seguida, são classificados os tipos de pontos fixos de acordo com

os autovalores da matriz Jacobiana. São eles: *hiperbólico* (H), *hiperbólico reverso* (Hr), *elíptico* (E) e *parabólico* (P). Todos são analisados nos capítulos subsequentes, porém, vale ressaltar que, no caso elíptico, apenas são considerados os *pontos não-ressonantes de baixa ordem*.

O Capítulo 3 mostra o estudo do comportamento dinâmico de C em uma vizinhança de um ponto fixo hiperbólico ou hiperbólico reverso. Na Seção 3.1, é generalizado o conceito de ponto fixo hiperbólico para uma aplicação n -dimensional e é enunciado o Teorema de Hartman–Grobman, que afirma que toda aplicação continuamente diferenciável se comporta localmente como a sua parte linear. Ao final dessa seção, demonstra-se que todo ponto fixo hiperbólico é instável. Na Seção 3.2, é apresentado o Teorema da Variedade Estável e são definidas as variedades invariantes estável e instável em termos topológicos. Na Seção 3.3, definem-se os *pontos homoclínicos*, assim como o conceito de *transversalidade topológica* e é provado que há pontos homoclínicos topologicamente transversos para uma das famílias de aplicações C . Na Seção 3.4, explica-se a importância de se encontrar um destes pontos. Resumidamente, a existência de um ponto homoclínico topologicamente transverso garante a *caoticidade* da aplicação em alguma vizinhança do ponto fixo. Esse capítulo foi baseado em [1], [9], [14] e [15].

O Capítulo 4 discursa o estudo sobre o comportamento dinâmico de C em uma vizinhança de um ponto fixo elíptico não-ressonante até a sexta ordem. Na Seção 4.1, é apresentado o Teorema da Forma Normal de Birkhoff que garante que um difeomorfismo conservativo definido em uma vizinhança da origem, sendo esta um ponto fixo elíptico não-ressonante até uma certa ordem, pode ser escrito em uma forma mais simples, chamada de *Forma Normal de Birkhoff*. Em seguida, coloca-se a aplicação C nesta forma. Na Seção 4.2, é apresentada a versão analítica do Teorema do Twist de Moser que nos diz quando uma aplicação que admite a Forma Normal de Birkhoff é estável no seu ponto fixo elíptico. Na Seção 4.3, mostra-se que todo ponto fixo elíptico não-ressonante de baixa ordem da aplicação C é estável. Os resultados das contas apresentadas nesse capítulo foram obtidos com o auxílio do software *Mathematica*[®] *. Os códigos produzidos encontram-se no Apêndice B.

O Capítulo 5 relata o estudo do comportamento dinâmico de C em uma vizinhança de um ponto fixo parabólico. Na Seção 5.1, é mostrado que toda aplicação $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com um ponto fixo parabólico na origem pode ser escrita em forma reduzida. Na Seção 5.2, demonstra-se um resultado de Levi-Civita (baseado em [10]) que estabelece um critério para a instabilidade do ponto fixo parabólico de F . Na Seção 5.3, é utilizado tal resultado para mostrar que, com a exceção de dois casos, todo ponto fixo parabólico da aplicação C é instável.

Na Conclusão, é apresentada uma síntese dos resultados obtidos no nosso estudo,

*Wolfram Research, Inc., Mathematica, Version 11.3, Champaign, IL (2018).

junto com algumas imagens do espaço de fase de representantes específicos da família das aplicações de Hénon cúbicas conservativas em torno de seus pontos fixos, ilustrando, assim, cada caso analisado.

No Apêndice [A](#), apresenta-se uma técnica da Teoria da Eliminação, chamada *resultante*, que visa eliminar uma variável em um sistema polinomial de equações. Um caso particular de resultante é o *discriminante*, que nos indica quando um polinômio admite raízes múltiplas. Essa técnica é utilizada algumas vezes durante o texto. Esse apêndice foi baseado em [\[18\]](#).

Finalmente, no Apêndice [B](#), estão disponibilizados todos os códigos computacionais que foram utilizados em nosso estudo.

Capítulo 1

Preliminares

Os sistemas dinâmicos mais simples algebricamente são os constituídos por aplicações polinomiais. Apesar de que, em dimensão um, toda função invertível possui dinâmica trivial (o que significa dizer que todo ponto não-fixo é errante), isto não é verdade em dimensões maiores. A aplicação não-trivial com forma algébrica mais simples do plano é a *aplicação de Hénon*:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (y + x^2 + a, -bx)\end{aligned}$$

em que $a, b \in \mathbb{R}$ são parâmetros. Esta aplicação possui determinante jacobiano constante e igual a b .

A aplicação de Hénon é um difeomorfismo sempre que $b \neq 0$. Com efeito, sua inversa é $(x, y) \mapsto \left(-\frac{y}{b}, x - \left(\frac{y}{b}\right)^2 - a\right)$. Na verdade, toda aplicação quadrática do plano com determinante jacobiano constante e não-nulo é conjugada à aplicação de Hénon ou é dinamicamente trivial (*cf.* [15]).

O conjunto das aplicações polinomiais que possuem inversa também polinomial é chamado de *grupo afim de Cremona*. A estrutura deste grupo é entendida apenas no caso planar. H. W. E. Jung, em [8], afirma que os difeomorfismos polinomiais planares podem ser escritos como um número finito de composições de aplicações “elementares” e afins. Mais recentemente, S. Friedland e J. Milnor mostraram em [5] que qualquer aplicação do grupo afim de Cremona é dinamicamente trivial ou é conjugada a uma composição de *aplicações de Hénon generalizadas*:

$$H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ onde } H(x, y) = (y + p(x), -bx)$$

em que p é um polinômio em $\mathbb{R}[x]$ e $b \neq 0$.

A inversa de uma aplicação de Hénon generalizada é da forma

$$H^{-1}(x, y) = \left(-\frac{y}{b}, x - p\left(-\frac{y}{b}\right) \right), \quad (1.1)$$

como pode ser verificada:

$$\begin{aligned} H^{-1} \circ H(x, y) &= H^{-1}(y + p(x), -bx) = \left(-\frac{-bx}{b}, (y + p(x)) - p\left(-\frac{-bx}{b}\right) \right) \\ &= (x, y + p(x) - p(x)) = (x, y). \end{aligned}$$

A outra igualdade a ser mostrada, $H \circ H^{-1}(x, y) = (x, y)$, é inteiramente análoga.

1.1 Alguns resultados sobre automorfismos polinomiais do plano

Uma aplicação polinomial do plano tem a forma:

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ onde } F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

em que P, Q são polinômios em $\mathbb{R}[x, y]$. Dizemos que o *grau* de F é o máximo entre os graus de P e Q ; e denotamos por $\deg F$. Essa aplicação possui determinante jacobiano constante se $\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial x}$ for constante; e preserva área e orientação se esta constante for igual a 1.

As aplicações polinomiais do plano com determinante jacobiano constante e não-nulo são chamadas de *aplicações de Keller*, e denotamos o seu conjunto por \mathcal{K} . Segundo H. R. Dullin e J. D. Meiss em [4], a estrutura de \mathcal{K} ainda não está inteiramente entendida.

As *aplicações afins* são da forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (\xi, \eta) + L(x, y) \end{aligned}$$

onde $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ e L é uma aplicação linear não-singular. O conjunto das aplicações afins, \mathcal{A} , forma um subconjunto simples de \mathcal{K} e é um grupo sob a composição.

Outro grupo de \mathcal{K} é \mathcal{E} , o conjunto das *aplicações elementares*, que são da forma:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (\alpha x + \xi, \beta y + p(x)) \end{aligned}$$

onde $\alpha\beta \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}$ e p é um polinômio em $\mathbb{R}[x]$.

As aplicações afins e elementares são dinamicamente triviais. Existem aplicações com dinâmica interessante em \mathcal{K} , incluindo as aplicações de Hénon generalizadas. Vale lembrar que estas aplicações possuem inversa polinomial, como vimos na Equação (1.1). Uma conjectura famosa afirma que isto é verdade para todos os elementos de \mathcal{K} (cf. [2]).

Conjectura (Keller). *Toda aplicação em \mathcal{K} possui uma inversa polinomial e é, portanto, um difeomorfismo.*

Uma aplicação de Keller com inversa polinomial é chamada de um *automorfismo polinomial* e o seu conjunto forma o grupo afim de Cremona, que denotamos por \mathcal{C} . Os elementos deste grupo também são chamados de *aplicações de Cremona*. A estrutura de \mathcal{C} está definida pelo seguinte resultado de Jung, que pode ser encontrado em [8].

Proposição 1. *O grupo \mathcal{C} é gerado pelos subgrupos afim, \mathcal{A} , e elementar, \mathcal{E} .*

Friedland e Milnor usaram o resultado acima para obterem uma decomposição de \mathcal{C} : toda aplicação de Cremona é conjugada a uma composição de aplicações de Hénon generalizadas ou, então, têm dinâmica trivial.

Podemos observar que, pela Proposição 1, uma aplicação de Cremona pode ser escrita como um número finito de composições de aplicações afins e elementares. Esta sequência pode ser reduzida, pois se duas aplicações consecutivas pertencem a um mesmo grupo, então a composição delas também pertence e elas podem se transformar em um único fator. Além disso, se uma aplicação pertencer à interseção $\mathcal{S} = \mathcal{A} \cap \mathcal{E}$, ela pode ser composta tanto por um fator à direita quanto à esquerda. Se isto acontecer e as três aplicações forem do mesmo tipo, então elas podem ser transformadas em um único fator do mesmo tipo.

Assim, qualquer aplicação de Cremona F pode ser escrita como uma aplicação reduzida na forma: $F = G_n \circ G_{n-1} \circ \cdots \circ G_1$ tal que cada G_i pertence a \mathcal{A} ou \mathcal{E} mas não a \mathcal{S} , e duas aplicações consecutivas não pertencem ao mesmo grupo. Se o comprimento n da aplicação reduzida de F for 1, então F é afim ou elementar e sua dinâmica é trivial. Se n for ímpar, a aplicação reduzida começa e termina com elementos do mesmo grupo e é possível permutar o primeiro elemento ao final e combinar os dois tal que o comprimento se torne par. Por fim, podemos permutar ciclicamente tal que F seja conjugada a uma aplicação que começa com uma aplicação afim. Dizemos que tais aplicações são *ciclicamente reduzidas*. Com isso, podemos enunciar o resultado de Friedland e Milnor ([5]).

Proposição 2. *Todo elemento ciclicamente reduzido $F \in \mathcal{C}$ de comprimento $2k$ é conjugado a uma composição de k aplicações de Hénon generalizadas $H_i(x, y) = (y + p_i(x), -b_i x)$ onde p_i tem grau $d_i \geq 2$ e $p_i(x) = \pm x^{d_i} + \mathcal{O}(d_i - 2)$. Se $\deg F$ for par, então os sinais dos coeficientes de maior grau em cada p_i serão todos positivos; caso contrário, ao menos um destes sinais será negativo.*

Neste texto, focaremos em estudar apenas uma aplicação de Hénon generalizada; em particular, o caso cúbico conservativo que introduziremos no próximo capítulo. Sob o ponto de vista da Proposição 2, trataremos apenas do caso $k = 1$.

Entretanto, a Proposição 2 nos indica a importância de entendermos a dinâmica de aplicações de Hénon generalizadas.

1.2 Alguns resultados sobre estabilidade

O conceito de estabilidade de uma aplicação conservativa em um ponto fixo que consideraremos ao longo deste texto será segundo J. K. Moser (*cf.* [16]).

Sejam \mathbb{E} um espaço métrico e $p \in \mathbb{E}$ um ponto qualquer. Uma *vizinhança*, no contexto desta seção, será sempre uma vizinhança do ponto p em \mathbb{E} . Dessa maneira, seja T um homeomorfismo conservativo (isto é, que preserva o volume) entre as vizinhanças \mathcal{U}_1 e \mathcal{V}_1 de tal forma que p seja um ponto fixo de T , isto é, $T(p) = p$.

A aplicação inversa, T^{-1} , leva \mathcal{V}_1 em \mathcal{U}_1 e, claramente, p também é um ponto fixo. Portanto, para cada ponto p_0 na interseção $\mathcal{W} = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{V}_1$, as imagens $p_1 = T(p_0)$ e $p_{-1} = T^{-1}(p_0)$ pertencem a \mathcal{W} .

Definição (Estabilidade). O homeomorfismo T é dito *estável* no ponto fixo p se, para cada vizinhança $\mathcal{U}' \subset \mathcal{W}$ de p , existir uma vizinhança $\mathcal{V}' \subset \mathcal{U}'$, também de p , cujas imagens $T^n(\mathcal{V}')$, onde $n \in \mathbb{Z}$, estejam todas contidas em \mathcal{U}' .

Por outro lado, não se define instabilidade como a negativa da estabilidade, mas sim em termos de uma condição mais forte.

Definição (Instabilidade). O homeomorfismo T é dito *instável* no ponto fixo p se existir uma vizinhança $\mathcal{U}_* \subset \mathcal{W}$ de p tal que, para cada ponto $p_0 \neq p$ em \mathcal{U}_* , ao menos um dos seus iterados, $p_n = T^n(p_0)$, não pertença a \mathcal{U}_* .

Iremos reformular essas definições introduzindo a noção de *conjunto invariante*.

Definição (Conjunto invariante). Um conjunto $M \subset \mathcal{W}$ é dito invariante pela aplicação T se $T(M) = M$.

Exemplo. O conjunto $\{p\}$ formado pelo ponto fixo p é o *conjunto invariante trivial*.

Teorema 1. *O homeomorfismo T é estável em p se, e somente se, cada vizinhança \mathcal{U} contiver uma subvizinhança invariante \mathcal{V} .*

Demonstração. Primeiramente, se para cada vizinhança \mathcal{U} existir uma vizinhança $\mathcal{V} = T(\mathcal{V}) \subset \mathcal{U}$, então certamente \mathcal{V} possui a propriedade necessária na definição de estabilidade e, portanto, T é estável em p .

Reciprocamente, se T for estável em p , então para cada vizinhança $\mathcal{U}' \subset \mathcal{W}$ existe uma subvizinhança $\mathcal{V}' \subset \mathcal{U}'$ tal que $T^n(\mathcal{V}') \subset \mathcal{U}'$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. A união $\mathcal{V} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(\mathcal{V}')$ é invariante por T e é uma subvizinhança. \square

Teorema 2. *O homeomorfismo T é instável em p se, e somente se, existir uma vizinhança \mathcal{U} de forma que o seu único subconjunto invariante seja o trivial.*

Demonstração. Suponha que exista tal vizinhança \mathcal{U} . Assim, a interseção $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ possui a mesma propriedade. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $\mathcal{U} \subset \mathcal{W}$. Se $p_0 \in \mathcal{U} \setminus \{p\}$, então os seus iterados $p_n = T^n(p_0)$ não podem pertencer todos a \mathcal{U} , pois, caso contrário, $M = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{p_n\}$ seria um subconjunto invariante não-trivial de \mathcal{U} . Portanto, T é instável em p .

Reciprocamente, se T for instável em p , então existe uma vizinhança $\mathcal{U}_* \subset \mathcal{W}$ tal que para cada $p_0 \neq p$ em \mathcal{U}_* ao menos um iterado p_n não pertence a \mathcal{U}_* . Suponha que p_0 pertença a algum subconjunto invariante $M \subset \mathcal{U}_*$. Dessa forma, todo iterado p_n deve pertencer a M e, conseqüentemente, a \mathcal{U}_* . Concluímos que $p_0 = p$ e M é o conjunto invariante trivial. \square

Observação. Uma aplicação que não é instável em um ponto fixo tem a propriedade de cada vizinhança deste ponto conter um subconjunto invariante não-trivial; enquanto que, em uma aplicação estável em um ponto fixo, toda vizinhança deste ponto contém uma subvizinhança invariante. Por conseguinte, uma aplicação estável é necessariamente não-instável em um ponto fixo, mas uma aplicação que não é estável pode não ser instável em um ponto fixo.

Definição (Aplicação mista). Um homeomorfismo conservativo T é dito ser *misto* em um ponto fixo p se ele não for estável nem instável em p .

De fato, existem exemplos de aplicações mistas, como veremos a seguir.

Exemplo. Seja a aplicação linear $(x, y) \mapsto (x + y, y)$. Cada ponto do eixo das abscissas ($y = 0$) é um ponto fixo. Um conjunto limitado do plano é invariante por essa aplicação se, e somente se, estiver contido no eixo das abscissas. Dado um $r > 0$ arbitrário, a bola aberta $x^2 + y^2 < r^2$ não contém vizinhança invariante do ponto $(x, y) = (0, 0)$ mas contém o intervalo invariante $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -r < x < r \text{ e } y = 0\}$. Portanto, essa aplicação não é estável nem instável na origem.

Podemos reinterpretar o conceito de estabilidade para o caso em que iremos estudar. O espaço métrico que utilizaremos será o plano euclidiano \mathbb{R}^2 munido da métrica usual. A definição revista de estabilidade precisa da noção de *curva rotacional invariante*.

Definição (Curva rotacional invariante). Dizemos que $\Gamma \in \mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$ é uma curva rotacional invariante por uma aplicação F em torno de p se ela for imagem de uma curva parametrizada contínua, fechada, simples, homotopicamente não-trivial e invariante por F .

A importância deste conceito para o nosso estudo é que o interior de uma curva Γ como na definição anterior é uma vizinhança invariante de p pela aplicação F dado que esta é um homeomorfismo conservativo e p é um dos seus pontos fixos. Portanto, chegamos à seguinte definição de estabilidade.

Definição (Estabilidade no caso planar). Um homeomorfismo conservativo F do plano é dito ser *estável* em um ponto fixo p se existir uma curva rotacional invariante em cada vizinhança de p .

No capítulo seguinte, apresentaremos a introdução da família de aplicações de Hénon cúbicas conservativas e, a partir dele, analisaremos como as aplicações desta família se comportam localmente em torno de seus pontos fixos.

Capítulo 2

A aplicação de Hénon cúbica conservativa

Iniciamos este capítulo definindo o nosso objeto de estudo no restante do texto. De acordo com a definição de aplicação de Hénon generalizada dada no capítulo anterior e, principalmente, com a Proposição 2, podemos dizer que a família de aplicações de Hénon cúbicas é da forma:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (y \pm x^3 + a_1x + a_0, -bx)\end{aligned}$$

onde $a_0, a_1, b \in \mathbb{R}$ são parâmetros com $b \neq 0$. A matriz Jacobiana de uma aplicação desta forma é escrita como:

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \pm 3x^2 + a_1 & 1 \\ -b & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

e, portanto, o seu determinante jacobiano é $\det J \equiv b$. Como estamos interessados em aplicações conservativas (no caso bidimensional, que preservam área e orientação), vamos fixar o parâmetro $b = 1$. Dessa forma, definimos as seguintes aplicações:

$$C_+(x, y) = (y + x^3 + a_1x + a_0, -x); \quad (2.2)$$

$$C_-(x, y) = (y - x^3 + a_1x + a_0, -x). \quad (2.3)$$

Sempre que formos falar da aplicação de Hénon cúbica conservativa, escreveremos apenas $C(x, y) = (y + a_3x^3 + a_1x + a_0, -x)$, sem distinguirmos entre o caso positivo e o negativo, onde $a_3 \in \{-1, 1\}$. A inversa desta aplicação é

$$C^{-1}(x, y) = (-y, x + a_3y^3 + a_1y - a_0)$$

de acordo com a Equação (1.1). Como pode ser visto ao longo do texto, as aplicações C_+ e C_- possuem dinâmicas bem distintas.

2.1 Simetrias

No estudo de aplicações conservativas, as *simetrias* possuem um papel importante, já que elas produzem um comportamento dinâmico especial, como pode ser visto mais adiante.

Classificação (Simetrias). Sejam \mathbb{E} um espaço topológico e $F : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ um homeomorfismo. Dizemos que um homeomorfismo $s : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ é uma:

Simetria reversora de tempo (ou reversor) para F quando $s^{-1} \circ F \circ s = F^{-1}$;

Simetria espacial para F quando $s^{-1} \circ F \circ s = F$.

Vamos mostrar que as aplicações de Hénon cúbicas conservativas C_+ e C_- , definidas nas Equações (2.2) e (2.3), respectivamente, são *reversíveis*, o que significa que existe um reversor de C_+ ou C_- .

Com efeito, seja a aplicação $R(x, y) = (-y, -x)$. Podemos observar que $R^2 = id$ e, conseqüentemente, a sua inversa é $R^{-1} = R$, ou seja, R é uma involução. Agora,

$$\begin{aligned} R^{-1} \circ C \circ R(x, y) &= R^{-1} \circ C(-y, -x) \\ &= R^{-1}(-x - a_3 y^3 - a_1 y + a_0, y) \\ &= (-y, x + a_3 y^3 + a_1 y - a_0) \\ &= C^{-1}(x, y), \end{aligned}$$

provando, assim, a nossa afirmação.

É possível vermos um fato interessante na igualdade $R^{-1} \circ C \circ R = C^{-1}$. Ao compormos ambos os lados por R^{-1} e utilizarmos o fato de R ser uma involução, obtemos:

$$R \circ C = C^{-1} \circ R^{-1} = (R \circ C)^{-1}.$$

Portanto, a composta $R \circ C$ também é uma involução. Dessa forma, a aplicação de Hénon cúbica conservativa pode ser fatorada em uma composta de involuções, já que $C = R \circ (R \circ C)$.

A involução $R \circ C$ também é um reversor de C . De fato,

$$\begin{aligned} (R \circ C)^{-1} \circ C \circ (R \circ C) &= (C^{-1} \circ R^{-1}) \circ C \circ (R \circ C) \\ &= C^{-1} \circ C^{-1} \circ C \\ &= C^{-1}. \end{aligned}$$

Em geral, seja a família de aplicações $\mathcal{I}_j = R \circ C^j$ onde $j \in \mathbb{Z}$. É possível mostrarmos, por indução em j , que cada \mathcal{I}_j é um reversor de C .

Os conjuntos unidimensionais $\mathcal{S}_j = \text{Fix } \mathcal{I}_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathcal{I}_j(x, y) = (x, y)\}$, formados pelos pontos fixos dos reversores \mathcal{I}_j , junto aos seus iterados, têm um papel importante no encontro de órbitas periódicas da aplicação de Hénon cúbica conservativa, como pode ser notado no próximo teorema.

As curvas \mathcal{S}_j definidas acima são chamadas de *curvas de simetria* de C . Em particular, para os valores $j = 0$ e $j = 1$, temos as seguintes curvas:

$$\mathcal{S}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x\}$$

e

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -\frac{1}{2}(a_3x^3 + a_1x + a_0) \right\}.$$

Estas duas curvas são amplamente utilizadas no decorrer do texto devido à sua importância, não somente em nos ajudar a encontrar os pontos fixos da aplicação de Hénon cúbica conservativa C , mas em classificá-los. Este será o tema da próxima seção.

Teorema 3. *Suponhamos que $(x_*, y_*) \in \mathcal{S}_j \cap \mathcal{S}_k$. Assim, $C^{j-k}(x_*, y_*) = (x_*, y_*)$.*

Demonstração. Por um lado, $(x_*, y_*) \in \mathcal{S}_j$, ou seja, $R \circ C^j(x_*, y_*) = (x_*, y_*)$. Por outro lado, $(x_*, y_*) \in \mathcal{S}_k$, e assim, $R \circ C^k(x_*, y_*) = (x_*, y_*)$. Ao juntarmos ambas as equações, obtemos que $R \circ C^j(x_*, y_*) = R \circ C^k(x_*, y_*)$. Logo, $C^j(x_*, y_*) = C^k(x_*, y_*)$ e, portanto, $C^{j-k}(x_*, y_*) = (x_*, y_*)$. \square

Adicionalmente, é possível mostrarmos que as curvas \mathcal{S}_j se relacionam umas com as outras das seguintes maneiras: $\mathcal{S}_{i-2j} = C^j(\mathcal{S}_i)$ e $\mathcal{S}_{2j-i} = \mathcal{I}_j(\mathcal{S}_i)$ para todo $i, j \in \mathbb{Z}$.

Vale ressaltarmos que, quando $a_0 = 0$, a aplicação C possui uma simetria espacial.

De fato, seja a aplicação $S(x, y) = (-x, -y)$. Assim, $S^2 = id$ e então S também é uma involução. Além disso,

$$\begin{aligned} S^{-1} \circ C \circ S(x, y) &= S^{-1} \circ C(-x, -y) \\ &= S^{-1}(-y - a_3x^3 - a_1x, x) \\ &= (y + a_3x^3 + a_1x, -x) \\ &= C(x, y) \end{aligned}$$

e é possível mostrarmos por um cálculo semelhante que $S \circ R$ é outro reversor de C no caso $a_0 = 0$.

De acordo com H. R. Dullin e J. D. Meiss em [4], não existe outra simetria linear real para a aplicação em questão.

2.2 Pontos fixos

Um ponto fixo da aplicação de Hénon cúbica conservativa é um ponto $(x_*, y_*) \in \mathbb{R}^2$ tal que $C(x_*, y_*) = (x_*, y_*)$, ou seja, tal que satisfaça ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_* = y_* + a_3 x_*^3 + a_1 x_* + a_0 \\ y_* = -x_* \end{cases}.$$

Ao eliminarmos y_* no sistema acima e operarmos um pouco com os termos resultantes em x_* , obtemos a seguinte equação:

$$x_* = \frac{1}{2}(a_3 x_*^3 + a_1 x_* + a_0). \quad (2.4)$$

Podemos observar desta última igualdade que uma condição necessária e suficiente para que um ponto (x_*, y_*) seja ponto fixo de C é pertencer à interseção $\mathcal{S}_0 \cap \mathcal{S}_1$. Isto apenas ilustra, em parte, o que havíamos demonstrado no Teorema 3.

Também é possível observarmos que a Equação (2.4) é equivalente a dizermos que x_* é raiz do polinômio

$$g_0(x) = a_3 x^3 + (a_1 - 2)x + a_0. \quad (2.5)$$

Como $\deg g_0 = 3$, podemos afirmar que sempre haverá pelo menos um ponto fixo para C (já que sempre existe uma raiz real de um polinômio em $\mathbb{R}[x]$ de grau ímpar) e que haverão, no máximo, 3 pontos fixos.

A estrutura dinâmica de um ponto fixo é determinada pela matriz Jacobiana J (como a calculada na Equação (2.1)). Mais precisamente, podemos caracterizar os pontos fixos de uma aplicação \mathfrak{F} de acordo com os autovalores de $J \equiv \mathbf{d}\mathfrak{F}$ calculada em cada ponto fixo como se segue.

Classificação (Pontos Fixos). Sejam \mathbb{M} uma variedade de dimensão 2, p um ponto fixo da aplicação diferenciável $\mathfrak{F} : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ os autovalores de $J(p) : \mathbf{T}_p\mathbb{M} \rightarrow \mathbf{T}_p\mathbb{M}$. Dizemos que o ponto p é:

Hiperbólico (H) sempre que $\lambda_i \notin \mathbb{S}^1$ para todo $i \in \{1, 2\}$;

Elíptico (E) sempre que $\lambda_i \in \mathbb{S}^1 \setminus \{-1, 1\}$ para todo $i \in \{1, 2\}$;

Parabólico (P) sempre que $\lambda_i \in \{-1, 1\}$ para algum $i \in \{1, 2\}$.

No caso de uma aplicação bidimensional que preserva área e orientação, sabemos que o polinômio característico da matriz Jacobiana J é

$$p_c(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr} J)\lambda + \det J = \lambda^2 - (\operatorname{tr} J)\lambda + 1.$$

Assim, suas raízes são expressas como:

$$\lambda_1 = \frac{\operatorname{tr} J + \sqrt{(\operatorname{tr} J)^2 - 4}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{\operatorname{tr} J - \sqrt{(\operatorname{tr} J)^2 - 4}}{2}.$$

Portanto, podemos reescrever a classificação dos pontos fixos para o caso de uma aplicação bidimensional real que preserva área e orientação.

Proposição 3. *Sejam $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação que preserva área e orientação, p um ponto fixo de F , λ_1, λ_2 os autovalores de $J(p) = \mathbf{d}F(p)$ e $t = \operatorname{tr} J(p)$. Assim,*

- (i) p é hiperbólico se, e somente se, $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1} \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Neste caso, $|t| > 2$;
- (ii) p é elíptico se, e somente se, $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 \in \mathbb{S}^1 \setminus \{-1, 1\}$. Neste caso, $|t| < 2$;
- (iii) p é parabólico se, e somente se, $\lambda_2 = \lambda_1 \in \{-1, 1\}$. Neste caso, $|t| = 2$.

Observação. Nas hipóteses da proposição anterior, podemos dividir o caso hiperbólico em dois: se $\lambda_2 < -1$, diremos que p é **hiperbólico reverso (Hr)** mas, se $\lambda_1 > 1$, manteremos a notação **hiperbólico (H)** para p .

Podemos estabelecer uma relação de ordem entre os pontos fixos da aplicação C . De fato, como todos os pontos fixos de C pertencem à curva \mathcal{S}_0 , ou seja, à reta $x + y = 0$, nenhum deles possui o mesmo valor na primeira coordenada. Dessa forma, dados dois pontos fixos $p_1 = (x_1, y_1)$ e $p_2 = (x_2, y_2)$ de C , dizemos que $p_1 \prec p_2$ sempre que $x_1 < x_2$. Esta relação de ordem nos ajuda a distinguir geometricamente os elementos da família das aplicações de Hénon cúbicas conservativas, como pode ser visto ainda nesta seção.

É preciso esclarecer como podemos classificar os pontos fixos da aplicação de Hénon cúbica conservativa por região em termos dos parâmetros (a_1, a_0) , como se pode notar nas Figuras 2.4 e 2.5, ao invés de simplesmente calcularmos o traço t da matriz Jacobiana em cada um dos pontos fixos. Com o auxílio da técnica que descreveremos, encontraremos todos os casos possíveis de classificação dos pontos fixos da aplicação C .

Conforme sabemos, os pontos fixos (x_*, y_*) de C são os pontos de interseção das curvas de simetria \mathcal{S}_0 e \mathcal{S}_1 . A primeira curva é simplesmente a reta $x + y = 0$ (que não depende dos parâmetros), enquanto que a última é o gráfico $y = f_p(x)$ da função polinomial $f_p(x) = -\frac{1}{2}(a_3x^3 + a_1x + a_0)$.

Se calcularmos a inclinação da curva \mathcal{S}_1 em um ponto fixo (x_*, y_*) , encontraremos o valor $f'_p(x_*) = -\frac{1}{2}(3a_3x_*^2 + a_1) = -\frac{1}{2}t$. Ou seja, para classificarmos os pontos fixos, é suficiente que calculemos f'_p avaliada na primeira coordenada de cada um destes pontos.

Geometricamente, isso significa que se a curva \mathcal{S}_1 cruza a curva \mathcal{S}_0 de cima para baixo, então este ponto de interseção é hiperbólico (H), pois $f'_p(x_*) < -1 \Rightarrow t > 2$. Se \mathcal{S}_1 cruzar \mathcal{S}_0 de baixo para cima, pode ocorrer do ponto ser:

- elíptico (E): $|f'_p(x_*)| < 1 \Rightarrow |t| < 2$;
- parabólico (P): $f'_p(x_*) = 1 \Rightarrow t = -2$; ou
- hiperbólico reverso (Hr): $f'_p(x_*) > 1 \Rightarrow t < -2$.

O último caso possível é quando as duas curvas têm um ponto de tangência. Se isto acontecer, o ponto fixo é parabólico (P), pois $f'_p(x_*) = -1 \Rightarrow t = 2$. Quando isso ocorre, o ponto fixo é chamado de *degenerado*.

Alguns exemplos dessa técnica podem ser encontrados nas Figuras 2.1 e 2.2, onde, para a aplicação C_+ , fixamos o valor de a_1 e variamos o valor de a_0 ; e, para a aplicação C_- , foi feito o contrário. É possível notarmos uma alteração na quantidade e, também, nos tipos de pontos fixos em ambos os casos, o que acarretará em uma mudança significativa na dinâmica das aplicações de Hénon cúbicas conservativas. Voltaremos a tratar deste assunto mais adiante, quando introduzirmos o conceito de *bifurcação*.

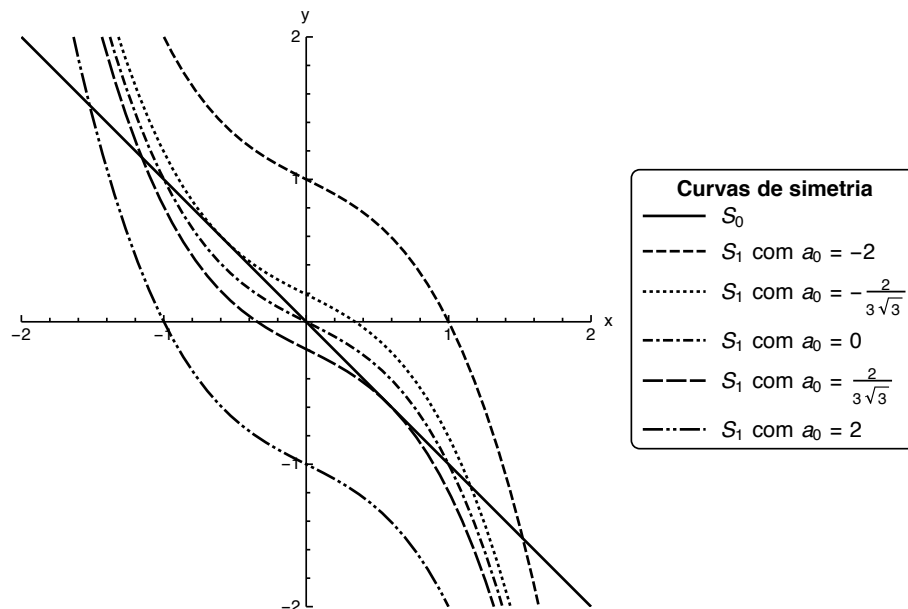


Figura 2.1: Curvas de simetria \mathcal{S}_0 e \mathcal{S}_1 da aplicação C_+ onde $a_1 = 1$ é fixo e a_0 varia entre -2 e 2 . É possível observarmos como a quantidade de pontos fixos é alterada de acordo com o valor de a_0 . Nos primeiro e último casos, há apenas um ponto fixo que é hiperbólico. Nos segundo e penúltimo casos, podemos notar dois pontos fixos sendo um hiperbólico e outro parabólico. Já no terceiro caso, existem três pontos fixos: dois hiperbólicos e um elíptico.

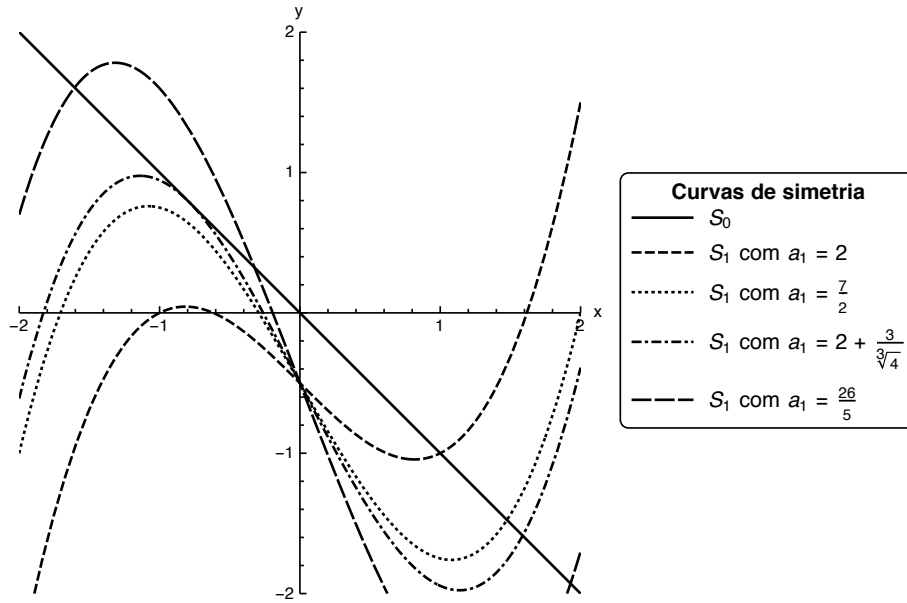


Figura 2.2: Curvas de simetria \mathcal{S}_0 e \mathcal{S}_1 de C_- onde $a_0 = 1$ é fixo e a_1 varia entre 2 e $\frac{26}{5}$. Aqui, a quantidade de pontos fixos é alterada de acordo com o valor de a_1 . No primeiro caso, há apenas um ponto fixo que é elíptico. No segundo caso, também há apenas um ponto fixo mas é hiperbólico reverso. Já no terceiro caso, há dois pontos fixos: um parabólico e outro hiperbólico reverso. No último caso, podemos perceber três pontos fixos hiperbólicos sendo dois hiperbólicos reversos.

Com as informações acerca dos pontos fixos da aplicação de Hénon cúbica conservativa obtidas até agora, podemos enunciar o seguinte resultado.

Teorema 4 (Classificação dos Pontos Fixos). *Para a aplicação C_+ , podem ocorrer os seguintes casos:*

H *Apenas um ponto fixo hiperbólico;*

P *Apenas um ponto fixo parabólico;*

H < P ou P < H *Um ponto fixo hiperbólico e outro parabólico;*

H < E < H *Dois pontos fixos hiperbólicos e outro elíptico;*

H < P < H *Dois pontos fixos hiperbólicos e outro parabólico;*

H < Hr < H *Três pontos fixos hiperbólicos sendo um hiperbólico reverso.*

Já para a aplicação C_- , os casos que podem ocorrer são:

Hr *Apenas um ponto fixo hiperbólico reverso;*

P *Apenas um ponto fixo parabólico;*

E *Apenas um ponto fixo elíptico;*

Hr < **P** ou **P** < **Hr** Um ponto fixo hiperbólico reverso e outro parabólico;

P < **P** Dois pontos fixos parabólicos;

E < **P** ou **P** < **E** Um ponto fixo elíptico e outro parabólico;

Hr < **H** < **Hr** Três pontos fixos hiperbólicos sendo dois hiperbólicos reversos;

Hr < **H** < **P** ou **P** < **H** < **Hr** Um ponto fixo parabólico e dois hiperbólicos sendo que um deles é hiperbólico reverso;

Hr < **H** < **E** ou **E** < **H** < **Hr** Um ponto fixo elíptico e dois hiperbólicos sendo que um deles é hiperbólico reverso;

E < **H** < **P** ou **P** < **H** < **E** Um ponto fixo elíptico, um hiperbólico e outro parabólico;

E < **H** < **E** Dois pontos fixos elípticos e um hiperbólico;

P < **H** < **P** Dois pontos fixos parabólicos e um hiperbólico.

Observação. Podemos ver que para a aplicação C_+ , com exceção de alguns casos degenerados, o ponto fixo com maior valor na sua primeira coordenada é necessariamente hiperbólico (H).

Uma questão natural é saber se cada item dessa classificação dos pontos fixos caracteriza uma região no espaço dos parâmetros (a_1, a_0) da aplicação de Hénon cúbica conservativa. Para responder esta questão, precisaremos encontrar uma forma de relacionarmos o valor do traço t da matriz Jacobiana com os parâmetros a_0 , a_1 e a_3 somente.

Com efeito, da expressão de t retirada da Equação (2.1), obtemos outro polinômio importante para o nosso estudo:

$$\hat{g}_0(x) = 3a_3x^2 + a_1 - t.$$

Com o polinômio acima, podemos eliminar a variável x do polinômio $g_0(x)$, definido na Equação (2.5), utilizando uma técnica da Teoria da Eliminação (descrita brevemente no Apêndice A) para chegarmos ao seguinte polinômio:

$$r_0(t) = \text{Res}_x(g_0, \hat{g}_0) = 27a_0^2a_3 + (a_1 - t)(t - 6 + 2a_1)^2. \quad (2.6)$$

O polinômio $r_0(t)$ encontrado é chamado de resultante de g_0 e \hat{g}_0 com respeito à variável x . Em particular, quando o traço t for igual a 2, obteremos a expressão $r_0(2) = 27a_0^2a_3 + 4(a_1 - 2)^3 = \text{discr}_x g_0$, o discriminante de g_0 em relação a x .

As propriedades mais importantes do resultante e do discriminante (vide Apêndice A) estão resumidas na proposição a seguir.

Proposição 4. *As seguintes afirmações são verdadeiras.*

- (i) *O polinômio r_0 é nulo se, e somente se, houver uma raiz em comum aos polinômios g_0 e \hat{g}_0 ;*
- (ii) *O polinômio g_0 admite raízes múltiplas se, e somente se, o seu discriminante for nulo.*

Apesar de r_0 ser um polinômio nas variáveis a_0, a_1, a_3 e t , estamos considerando-o apenas em função do traço t , pois estamos interessados na relação entre os coeficientes da aplicação de Hénon C e a classificação dos seus pontos fixos. Com efeito, de acordo com a Proposição 4, para cada $t_0 \in \mathbb{R}$ e $a_3 \in \{-1, 1\}$ dados, a expressão $r_0(t_0) = 0$ gera uma curva Λ (curva de nível 0 da função $r_0(t_0)$) no espaço dos parâmetros (a_1, a_0) tal que todo ponto $(\hat{a}_1, \hat{a}_0) \in \Lambda$ representa a aplicação de Hénon $C(x, y) = (y + a_3x^3 + \hat{a}_1x + \hat{a}_0, -x)$ que possui um ponto fixo (x_*, y_*) de forma que $\text{tr } J(x_*, y_*) = t_0$.

Agora sabemos que o polinômio resultante $r_0(t)$ é a ferramenta necessária para caracterizarmos as regiões dadas pelos itens do Teorema 4 no espaço dos parâmetros (a_1, a_0) da aplicação C . Contudo, introduziremos algumas definições antes de prosseguirmos com esta questão.

Inicialmente, precisaremos da noção de *pontos fixos ressonantes* que será apresentada na definição a seguir. Esta noção nos será muito importante quando estudarmos a dinâmica local da aplicação C em torno de um ponto fixo elíptico no Capítulo 4.

Definição (Ressonância). Um ponto fixo p de uma aplicação $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ possui *ressonância* $1 : n$ se $\lambda^n = 1$ mas $\lambda^j \neq 1$ para todo $j \in \{1, \dots, n-1\}$, onde λ é um dos autovalores da matriz Jacobiana $J(p) = \mathbf{d}F(p)$. Neste caso, também dizemos que p é um ponto fixo ressonante de ordem n .

Podemos observar que nenhum ponto fixo hiperbólico é ressonante e que os únicos pontos fixos que possuem ressonância $1 : 1$ ou $1 : 2$ são os parabólicos.

Pela Teoria das Bifurcações, uma mudança “qualitativa” ou topológica no comportamento dinâmico de uma aplicação que depende de parâmetros reais pode ocorrer quando variamos alguns destes parâmetros continuamente.

Classificação (Bifurcações). Os tipos de bifurcações presentes no estudo da aplicação de Hénon cúbica conservativa são:

Sela-nó (SN) quando o par de autovalores complexos conjugados se colidem em $\lambda = 1$ e passam a percorrer o eixo real. Isto ocorrerá quando $t \rightarrow 2^-$;

Duplicação de período (PD) quando o par de autovalores complexos conjugados se colidem em $\lambda = -1$ e passam a percorrer o eixo real. Isto ocorrerá quando $t \rightarrow -2^+$.

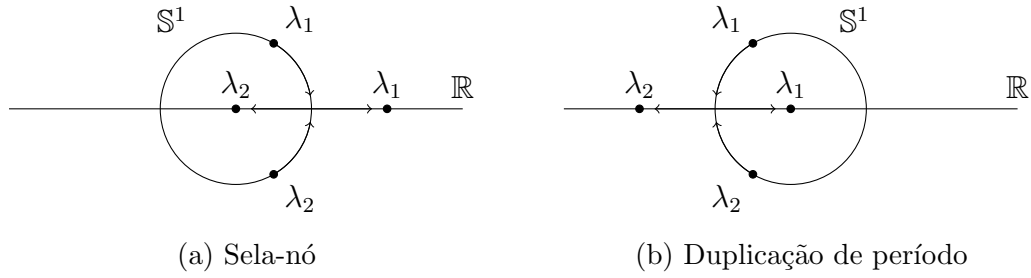


Figura 2.3: Tipos de bifurcações possíveis para o Hénon cúbico conservativo.

Finalmente, os mapas de bifurcação das aplicações C_+ e C_- estão ilustrados nas Figuras 2.4 e 2.5, respectivamente. Neles, representamos as *curvas SN* ($r_0(2) = 0$) e *PD* ($r_0(-2) = 0$) que indicam quando ocorrem as bifurcações SN e PD se variarmos a_0 e a_1 no espaço dos parâmetros. Além delas, representamos as *curvas quádrupla* ($r_0(0) = 0$) e *tripla* ($r_0(-1) = 0$) que indicam quando ocorrem as ressonâncias 1 : 4 e 1 : 3. Também está representada a *curva sem twist* que abordaremos no Capítulo 4.

Vale ressaltarmos que, devido à falta de termos de a_0 com grau ímpar na expressão de $r_0(t)$, os mapas de bifurcação são simétricos em relação ao eixo das abscissas. Assim, no caso de C_+ , podemos considerar que a curva SN possui dois ramos no espaço dos parâmetros. O ramo superior é a região $H \prec P$ e o inferior, a região $P \prec H$. Estes dois ramos se encontram em uma cúspide, que é o ponto $(a_1, a_0) = (2, 0)$, e é o único ponto que representa a região P . Em adição, a curva PD é a região $H \prec P \prec H$ e ela não intersecta a curva SN. As demais regiões citadas no Teorema 4 para a aplicação C_+ estão indicadas na Figura 2.4.

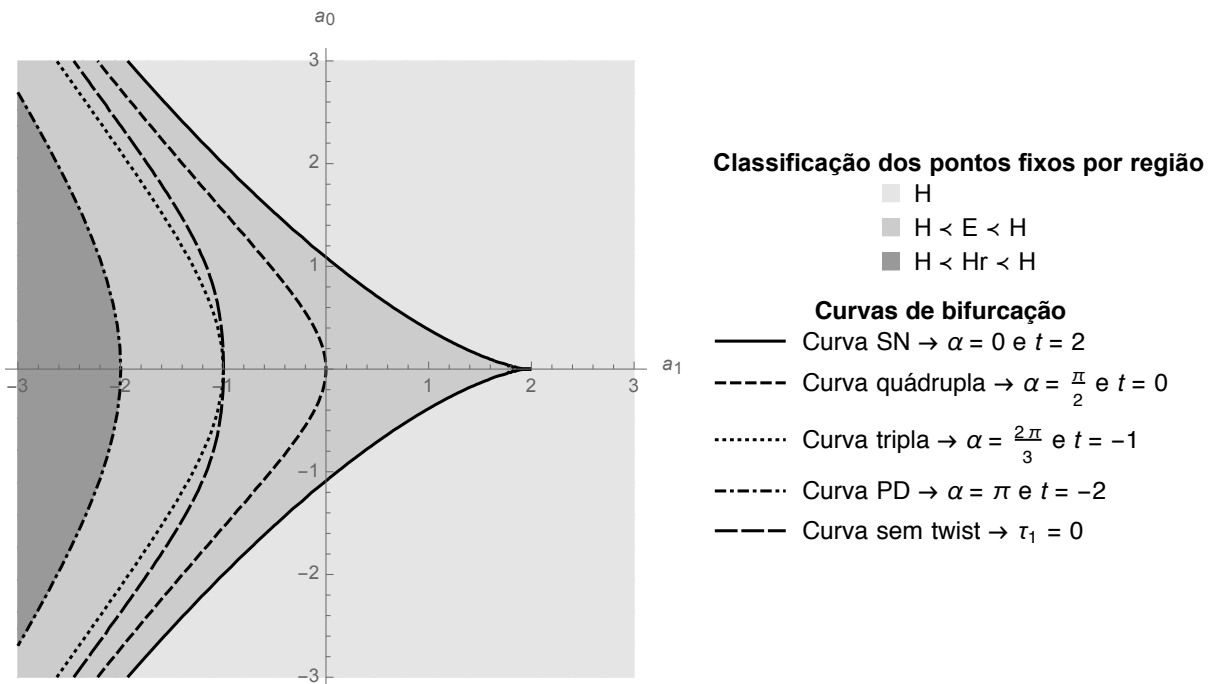


Figura 2.4: Mapa de bifurcação da aplicação C_+ no espaço dos parâmetros (a_1, a_0) .

Em contrapartida, no caso da aplicação C_- , a curva SN também possui dois ramos, porém, cada um deles se divide em duas partes. Esta divisão se dá pela interseção da curva SN com a curva PD. Dessa forma, a parte limitada do ramo superior é a região $P \prec E$, enquanto que a parte ilimitada é a região $P \prec Hr$. Já no ramo inferior, a parte limitada é a região $E \prec P$ e a ilimitada, a região $Hr \prec P$. Os dois pontos de interseção das duas curvas, SN e PD, representam a região $P \prec P$. Ademais, o encontro dos dois ramos da curva SN é a cúspide $(a_1, a_0) = (2, 0)$, o qual pertence à região P mas não é o seu único ponto.

Ainda no caso C_- , o restante da curva PD está dividido em seis partes: (i) o arco de curva que liga os dois pontos de interseção entre SN e PD completa a região P ; (ii) o arco que liga o ponto de interseção entre SN e PD (que está no semiplano superior) ao ponto de autointerseção de PD é a região $E \prec H \prec P$; (iii) o arco que liga o ponto de interseção entre SN e PD (que está no semiplano inferior) ao ponto de autointerseção de PD é a região $P \prec H \prec E$; (iv) a parte ilimitada superior é a região $P \prec H \prec Hr$; (v) a parte ilimitada inferior é a região $Hr \prec H \prec P$ e (vi) o ponto de autointerseção é a região $P \prec H \prec P$. O restante das regiões para a aplicação C_- se encontra na Figura 2.5.

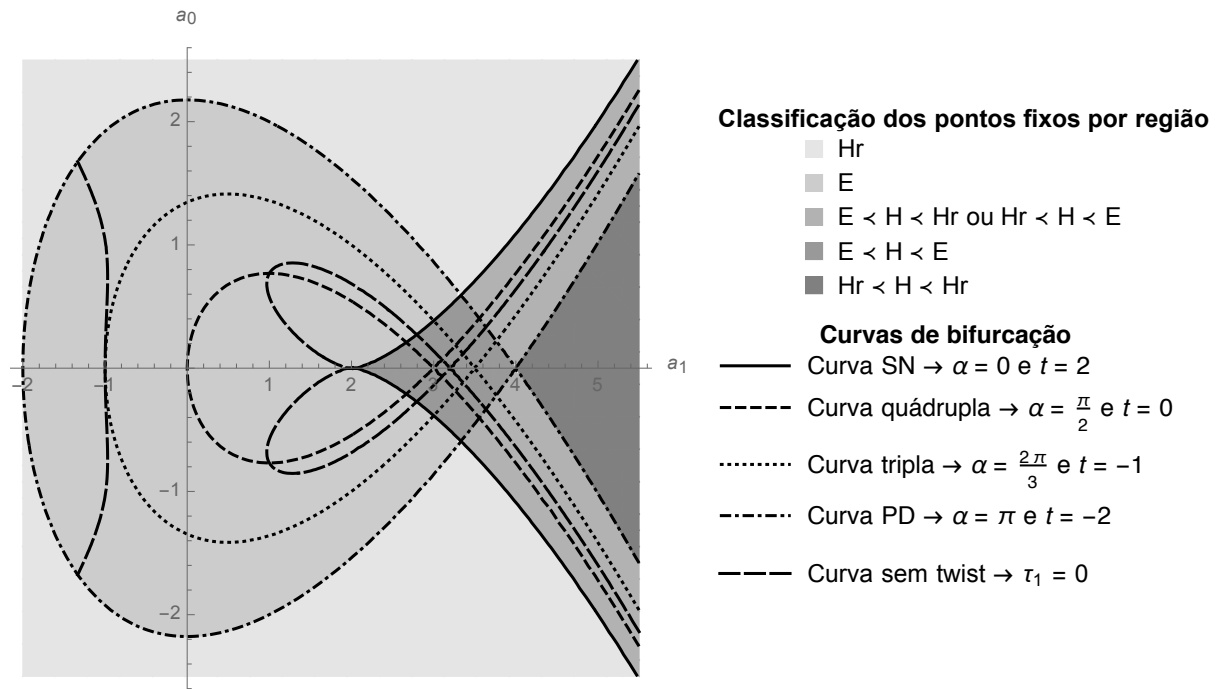


Figura 2.5: Mapa de bifurcação da aplicação C_- no espaço dos parâmetros (a_1, a_0) .

A partir do próximo capítulo, exporemos a análise da dinâmica das aplicações da família de Hénon cúbica conservativa C em torno dos seus pontos fixos, seguindo a classificação que acabamos de fazer.

Capítulo 3

Estudo da dinâmica local nos pontos fixos hiperbólicos (H e Hr)

Neste capítulo, estamos interessados em analisar o comportamento dinâmico da aplicação de Hénon cúbica conservativa C em torno dos pontos fixos hiperbólicos (H ou Hr).

Para tanto, serão usados alguns resultados importantes de Dinâmica Hiperbólica, como o Teorema de Hartman–Grobman e o Teorema da Variedade Estável, além de outros resultados acerca da existência de pontos homoclínicos e de caos em uma aplicação.

3.1 O Teorema de Hartman–Grobman

Para começarmos com a nossa análise, precisaremos estender a definição de ponto fixo hiperbólico de uma aplicação bidimensional para uma aplicação em uma variedade diferenciável n -dimensional \mathbb{M} .

Definição (Ponto fixo hiperbólico). Se $\mathfrak{F} : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ é uma aplicação diferenciável e $p \in \mathbb{M}$ é um ponto fixo de \mathfrak{F} , então p é dito ser um ponto fixo hiperbólico quando a matriz Jacobiana $\mathbf{d}\mathfrak{F}(p)$ não possuir autovalores em \mathbb{S}^1 .

Agora, enunciaremos um resultado que nos diz que, em torno de um ponto fixo hiperbólico, uma aplicação de classe \mathbf{C}^1 se comporta localmente como a sua parte linear.

Teorema 5 (Hartman–Grobman). *Sejam $U \subset \mathbb{M}$ um aberto, $\mathfrak{F} : U \rightarrow \mathbb{M}$ uma aplicação continuamente diferenciável e $p \in U$ um ponto fixo hiperbólico de \mathfrak{F} . Assim, existem vizinhanças $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ de p em U e $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ da origem em $\mathbf{T}_p\mathbb{M}$; e um homeomorfismo $\mathfrak{h} : \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \rightarrow \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ tal que $\mathfrak{F} = \mathfrak{h}^{-1} \circ \mathbf{d}\mathfrak{F}(p) \circ \mathfrak{h}$ em \mathcal{U}_1 . Em outras palavras, o seguinte*

diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_1 & \xrightarrow{\tilde{\mathfrak{F}}} & \mathcal{U}_2 \\ \mathfrak{h} \downarrow & & \downarrow \mathfrak{h} \\ \mathcal{V}_1 & \xrightarrow{d\tilde{\mathfrak{F}}(p)} & \mathcal{V}_2 \end{array}$$

Observação. Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada, por exemplo, em [9].

Suponhamos por agora que $p = (x_*, y_*)$ seja um ponto fixo hiperbólico (H ou Hr) da aplicação de Hénon cúbica conservativa C . Pelo Teorema de Hartman–Grobman, a dinâmica de C em torno de p pode ser estudada pela ação da sua matriz Jacobiana

$$J(p) = \begin{pmatrix} 3a_3x_*^2 + a_1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

em torno da origem do espaço tangente $\mathbf{T}_p\mathbb{R}^2$ e que, ao ser colocada na sua Forma Canônica de Jordan, pode ser escrita como

$$J(p) \simeq M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ é um autovalor de $J(p)$.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $|\lambda| > 1$, pois, caso contrário, trocaríamos λ por $\frac{1}{\lambda}$ e obteríamos o desejado. Se p for um ponto fixo hiperbólico (H), então $\lambda > 1$. Mas, se p for um ponto fixo hiperbólico reverso (Hr), então $\lambda < -1$.

A matriz M age em $\mathbf{T}_p\mathbb{R}^2$ que é homeomorfo ao próprio \mathbb{R}^2 . Se chamarmos as coordenadas do espaço tangente de (ξ, η) , então a origem deste espaço $(\xi, \eta) = (0, 0)$ estará relacionada com o ponto fixo $p = (x_*, y_*)$. A ação de M deixa as curvas $\xi\eta = c$ (ou seja, as hipérbolas, quando $c \neq 0$) invariantes para todo $c \in \mathbb{R}$. Esta é a razão para a nomenclatura “ponto fixo hiperbólico”.

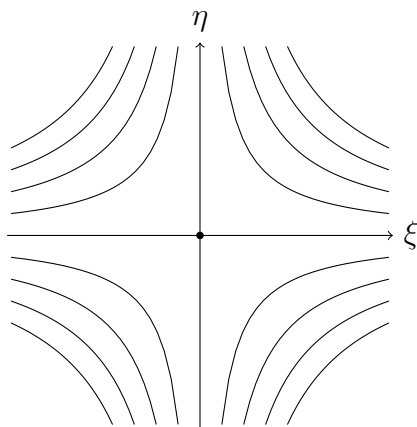


Figura 3.1: Ação de M em torno da origem no plano (ξ, η) .

Como consequência do Teorema de Hartman–Grobman, provaremos a instabilidade dos pontos fixos hiperbólicos.

Teorema 6. *Sejam \mathbb{M} uma variedade diferenciável n -dimensional e $p \in \mathbb{M}$ um ponto fixo hiperbólico de um difeomorfismo $\mathfrak{F} : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$. Assim, p é instável para \mathfrak{F} .*

Demonstração. Como p é um ponto fixo hiperbólico de \mathfrak{F} , sabemos que os autovalores de $\mathbf{d}\mathfrak{F}(p)$ não pertencem a \mathbb{S}^1 . Por conseguinte, o plano tangente $\mathbf{T}_p\mathbb{M}$ possui uma base vetorial onde cada direção caracterizada por um dos vetores desta base se expande ou se contrai em módulo.

Mas isso significa que não existem conjuntos invariantes não-triviais em qualquer vizinhança da origem de $\mathbf{T}_p\mathbb{M}$. Contudo, para toda vizinhança de p em \mathbb{M} , nenhum de seus subconjuntos não-triviais pode ser invariante, já que as dinâmicas de \mathfrak{F} e de $\mathbf{d}\mathfrak{F}(p)$ são conjugadas, de acordo com o Teorema de Hartman–Grobman.

Portanto, pelo Teorema 2, \mathfrak{F} é instável em p . □

Apesar de termos mostrado que todo ponto fixo hiperbólico é instável, gostaríamos de saber se a aplicação de Hénon cúbica conservativa é caótica em algum subconjunto do plano, no sentido que definiremos na Seção 3.4. Para isto, precisaremos do Teorema da Variedade Estável, que é o assunto da próxima seção.

3.2 O Teorema da Variedade Estável

Sejam $\mathcal{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear e μ um autovalor de \mathcal{T} . Suponhamos que μ seja um número real. Assim, denotaremos por E_μ o autoespaço correspondente a μ , isto é, o espaço de todos os vetores $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ tais que $(\mathcal{T} - \mu I_n)^k \vec{v} = \mathbf{0}$ para algum k .

Analogamente, suponhamos que μ seja um número complexo não-real. Sabemos que o seu conjugado $\bar{\mu}$ também é um autovalor de \mathcal{T} . Denotaremos por $E_{\mu, \bar{\mu}}$ a interseção de \mathbb{R}^n com a soma dos autoespaços E_μ e $E_{\bar{\mu}}$ da complexificação de \mathcal{T} (ou seja, a sua extensão ao espaço complexo \mathbb{C}^n).

Com essas informações, chegamos às definições a seguir.

Definição (Subespaços contrator e expansor). Os subespaços $E^-(\mathcal{T})$ e $E^+(\mathcal{T})$ de \mathbb{R}^n definidos por

$$E^-(\mathcal{T}) = \bigoplus_{|\mu| < 1} E_\mu \oplus \bigoplus_{|\mu| < 1} E_{\mu, \bar{\mu}},$$

$$E^+(\mathcal{T}) = \bigoplus_{|\mu| > 1} E_\mu \oplus \bigoplus_{|\mu| > 1} E_{\mu, \bar{\mu}},$$

são chamados de *subespaço contrator* e *subespaço expansor*, respectivamente.

A partir dessas definições, podemos ver que p é um ponto fixo hiperbólico de \mathfrak{F} se, e somente se, $\mathbf{T}_p\mathbb{M} = E^-(\mathbf{d}\mathfrak{F}(p)) \oplus E^+(\mathbf{d}\mathfrak{F}(p))$.

Apresentaremos agora mais um importante resultado de Dinâmica Hiperbólica.

Teorema 7 (Variedade Estável). *Sejam \mathbb{M} uma variedade diferenciável n -dimensional, $U \subset \mathbb{M}$ um aberto, $\mathfrak{F} : U \rightarrow \mathbb{M}$ um difeomorfismo local de classe \mathbf{C}^r , $r \geq 1$, e $p \in U$ um ponto fixo hiperbólico de \mathfrak{F} . Assim, existem variedades $\mathbb{W}_p^+, \mathbb{W}_p^- \subset U$ de classe \mathbf{C}^r tais que $\mathbf{T}_p\mathbb{W}_p^\pm = E^\pm(\mathbf{d}\mathfrak{F}(p))$, $\mathfrak{F}(\mathbb{W}_p^-) \subset \mathbb{W}_p^-$ e $\mathfrak{F}^{-1}(\mathbb{W}_p^+) \subset \mathbb{W}_p^+$ e existe também um $\delta > 0$ de forma que*

$$\begin{aligned} \text{se } \text{dist}(\mathfrak{F}^m(x), p) \leq \delta \text{ para } m \geq 0, & \text{ então } x \in \mathbb{W}_p^-; \\ \text{se } \text{dist}(\mathfrak{F}^m(y), p) \leq \delta \text{ para } m \leq 0, & \text{ então } y \in \mathbb{W}_p^+. \end{aligned}$$

De fato, existem uma vizinhança $\mathcal{U} \subset U$ de p e um sistema de coordenadas $\psi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathbf{C}^r tais que $\psi(\mathbb{W}_p^+ \cap \mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^k \times \{0\}$ e $\psi(\mathbb{W}_p^- \cap \mathcal{U}) \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}$, onde k é a dimensão de $E^+(\mathbf{d}\mathfrak{F}(p))$.

Observação. Este teorema é a versão local do Teorema de Hadamard–Perron cuja demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em [9].

Definição (Variedades estável e instável). Qualquer variedade \mathbb{W}_p^- (equivalentemente, \mathbb{W}_p^+) satisfazendo o teorema anterior é chamada de *variedade estável local* (equivalentemente, *variedade instável local*) de \mathfrak{F} no ponto p . As variedades

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_p^s &= \bigcup_{m \leq 0} \mathfrak{F}^m(\mathbb{W}_p^-), \\ \mathbb{W}_p^u &= \bigcup_{m \geq 0} \mathfrak{F}^m(\mathbb{W}_p^+), \end{aligned}$$

são chamadas de *variedade estável* e *variedade instável* de \mathfrak{F} no ponto p , respectivamente.

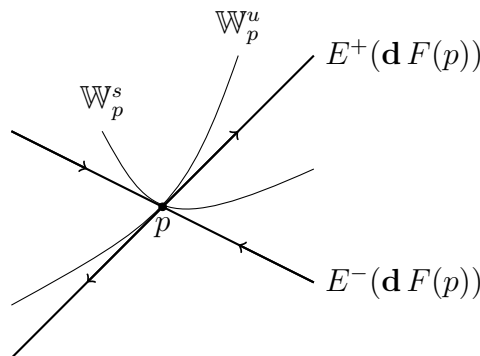


Figura 3.2: Os subespaços contrator e expensor e as variedades estável e instável de uma aplicação bidimensional F no ponto fixo hiperbólico p .

Claramente, as variedades estável e instável de um difeomorfismo \mathfrak{F} em um ponto fixo p são invariantes por \mathfrak{F} .

Corolário. *As variedades estável e instável de um difeomorfismo $\mathfrak{F} : U \rightarrow \mathbb{M}$ em um ponto fixo hiperbólico p podem ser caracterizadas em termos topológicos:*

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_p^s &= \{x \in U \mid \text{dist}(\mathfrak{F}^m(x), p) \rightarrow 0 \text{ quando } m \rightarrow \infty\}, \\ \mathbb{W}_p^u &= \{y \in U \mid \text{dist}(\mathfrak{F}^{-m}(y), p) \rightarrow 0 \text{ quando } m \rightarrow \infty\}. \end{aligned}$$

3.3 Existência de pontos homoclínicos

Pelo que vimos na seção anterior, ao menos localmente, existem as variedades estável e instável em torno de um ponto fixo hiperbólico. Mostraremos agora que estas variedades podem se intersectar em pontos diferentes de p e, na próxima seção, quais são as consequências deste fato.

Definição (Transversalidade). Sejam \mathbb{M} uma variedade diferenciável, $\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2 \subset \mathbb{M}$ duas subvariedades com dimensões complementares e $q \in \mathbb{N}_1 \cap \mathbb{N}_2$ um ponto de interseção. Dizemos que \mathbb{N}_1 e \mathbb{N}_2 são *diferenciavelmente transversas*, ou simplesmente *transversas*, no ponto q se $\mathbf{T}_q\mathbb{N}_1 \oplus \mathbf{T}_q\mathbb{N}_2 = \mathbf{T}_q\mathbb{M}$. Por outro lado, consideremos \mathcal{U} uma vizinhança de q tal que $\mathbb{N}_1 \cap \mathcal{U}$ e $\mathbb{N}_2 \cap \mathcal{U}$ sejam discos topológicos em \mathbb{M} ; e $S(\varepsilon, q, \mathbb{N}_2) \subset \mathcal{U}$ o conjunto dos pontos em \mathbb{N}_2 que distam de q exatamente ε , para algum $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Dizemos que \mathbb{N}_1 e \mathbb{N}_2 são *topologicamente transversas* no ponto q se o conjunto $S(\varepsilon, q, \mathbb{N}_2)$ for homotopicamente não-trivial em $\mathcal{U} \setminus \mathbb{N}_1$.

Observação. Na definição acima, se \mathbb{N}_1 e \mathbb{N}_2 forem unidimensionais, então o conjunto $\mathcal{U} \setminus \mathbb{N}_1$ possui duas componentes conexas e as subvariedades serão topologicamente transversas em q se os dois pontos de $S(\varepsilon, q, \mathbb{N}_2)$ pertencerem a componentes conexas diferentes, ou seja, se elas se cruzarem.

Com isso, podemos definir *ponto homoclínico*, como se segue.

Definição (Pontos homoclínicos). Sejam \mathbb{M} uma variedade diferenciável e $p \in \mathbb{M}$ um ponto fixo hiperbólico de um difeomorfismo $\mathfrak{F} : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$. Dizemos que $q \in \mathbb{M} \setminus \{p\}$ é um *ponto homoclínico* a p por \mathfrak{F} se q for um ponto de interseção das variedades estável e instável de \mathfrak{F} em p . Se estas variedades forem transversas em q , então q é chamado de *ponto homoclínico transverso* a p por \mathfrak{F} . Por outro lado, se as variedades forem topologicamente transversas em q , então o chamamos de *ponto homoclínico topologicamente transverso* a p por \mathfrak{F} .

No resultado abaixo, veremos que se existir um ponto homoclínico (transverso), então existe um número enumerável deles.

Proposição 5. *Seja q um ponto homoclínico (transverso) a um ponto fixo hiperbólico p de um difeomorfismo \mathfrak{F} de uma variedade diferenciável \mathbb{M} . Assim, todos os pontos da órbita (passada e futura) de q também são pontos homoclínicos (transversos) a p por \mathfrak{F} .*

Demonstração. Dado que as variedades estável e instável de \mathfrak{F} em p são invariantes por \mathfrak{F} , as imagens $\mathfrak{F}^m(q)$ claramente são pontos homoclínicos a p por \mathfrak{F} . Se essa interseção em q for transversal e como \mathfrak{F} é um difeomorfismo, o mesmo é verdade nos pontos $\mathfrak{F}^m(q)$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. \square

Até o final desta seção, provaremos a existência de pontos homoclínicos topologicamente transversais para uma das famílias das aplicações de Hénon cúbicas conservativas nos seus pontos fixos hiperbólicos (H).

Começaremos lembrando algumas definições. A aplicação de Hénon cúbica conservativa é dada por $C(x, y) = (y + a_3x^3 + a_1x + a_0, -x)$. Um ponto fixo de C é da forma $p = (x_*, -x_*)$. O traço da matriz Jacobiana de C calculada em p é $t = 3a_3x_*^2 + a_1$. A aplicação $R(x, y) = (-y, -x)$ é um reversor de C e o conjunto dos seus pontos fixos é a curva de simetria \mathcal{S}_0 , ou seja, a reta $y = -x$.

Antes de prosseguirmos, transladaremos o ponto fixo p para a origem com o intuito de facilitar as contas.

Seja a mudança de coordenadas $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ onde $\varphi(x, y) = (x + x_*, y - x_*)$ cuja inversa é $\varphi^{-1}(x, y) = (x - x_*, y + x_*)$. Com isto, definimos a aplicação \tilde{C} sendo a conjugação de C por φ :

$$\begin{aligned}\tilde{C}(x, y) &= \varphi^{-1} \circ C \circ \varphi(x, y) \\ &= (y + a_3x^3 + 3a_3x_*x^2 + tx, -x)\end{aligned}\tag{3.1}$$

De fato, a origem é um ponto fixo de \tilde{C} , já que não há termos não-nulos independentes de x ou y na Equação (3.1).

Observação. Se existir outro ponto fixo (\tilde{x}, \tilde{y}) de \tilde{C} , as suas coordenadas devem satisfazer às igualdades: $a_3\tilde{x}^2 + 3a_3x_*\tilde{x} + t - 2 = 0$ e $\tilde{y} = -\tilde{x}$.

Afirmamos que a inversa de \tilde{C} é dada por $\tilde{C}^{-1}(x, y) = (-y, x + a_3y^3 - 3a_3x_*y^2 + ty)$. Com efeito,

$$\begin{aligned}\tilde{C} \circ \tilde{C}^{-1}(x, y) &= \tilde{C}(-y, x + a_3y^3 - 3a_3x_*y^2 + ty) \\ &= (x + a_3y^3 - 3a_3x_*y^2 + ty - a_3y^3 + 3a_3x_*y^2 - ty, y) \\ &= (x, y).\end{aligned}$$

A outra igualdade, $\tilde{C}^{-1} \circ \tilde{C}(x, y) = (x, y)$, é análoga.

Lema 1. *A aplicação R , definida na Página 11, também é um reversor para \tilde{C} .*

Demonstração. Verificaremos diretamente:

$$\begin{aligned}
R \circ \tilde{C} \circ R(x, y) &= R \circ \tilde{C}(-y, -x) \\
&= R(-x - a_3 y^3 + 3a_3 x_* y^2 - ty, y) \\
&= (-y, x + a_3 y^3 - 3a_3 x_* y^2 + ty) \\
&= \tilde{C}^{-1}(x, y).
\end{aligned}$$

□

Suponhamos que p seja um ponto fixo hiperbólico (H) de C . Logo, o mesmo é verdade para a origem em relação a \tilde{C} , uma vez que as respectivas matrizes Jacobianas são iguais: $\mathbf{d}\tilde{C}(0, 0) = \mathbf{d}(\varphi^{-1} \circ C \circ \varphi)(0, 0) = \mathbf{d}\varphi^{-1}(C(p)) \cdot \mathbf{d}C(p) = \mathbf{d}C(p)$ e, consequentemente, possuem os mesmos autovalores. Por simplicidade, denotaremos as variedades estável e instável de \tilde{C} em $(0, 0)$ por \mathbb{W}^s e \mathbb{W}^u , respectivamente.

Lema 2. $R(\mathbb{W}^u) \subset \mathbb{W}^s$.

Demonstração. Seja $r \in \mathbb{W}^u$. Pelo Corolário do Teorema da Variedade Estável, tem-se

$$\lim_{m \in \mathbb{N}} \text{dist} \left(\tilde{C}^{-m}(r), (0, 0) \right) = \lim_{m \in \mathbb{N}} \|\tilde{C}^{-m}(r)\| = 0.$$

Além disso, pelo lema anterior e pelo fato de R ser uma involução, temos a igualdade $R \circ \tilde{C} = \tilde{C}^{-1} \circ R$. Logo, $R \circ \tilde{C}^m \circ R = \tilde{C}^{-m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, por um processo de indução. Como R é um homeomorfismo linear, existem constantes $0 < c_1 < c_2$ tais que (cf. [12])

$$c_1 \|(x, y)\| \leq \|R(x, y)\| \leq c_2 \|(x, y)\|$$

para todo ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Dessa forma,

$$0 \leq c_1 \|\tilde{C}^m \circ R(r)\| \leq \|R \circ \tilde{C}^m \circ R(r)\| = \|\tilde{C}^{-m}(r)\| \rightarrow 0$$

quando $m \rightarrow \infty$. Consequentemente, $R(r) \in \mathbb{W}^s$, ou seja, $R(\mathbb{W}^u) \subset \mathbb{W}^s$. □

Consideraremos, no próximo lema, apenas uma das famílias de aplicações \tilde{C} . De fato, analisaremos o caso em que $a_3 = -1$ e denotaremos as aplicações \tilde{C} com esta restrição por \tilde{C}_- .

Lema 3. *Seja $(x_0, y_0) \in \mathbb{W}^u$ tal que $x_0 < 0$, $y_0 > 0$ e $x_0 + y_0 < 0$. Existe um iterado $(x_m, y_m) = \tilde{C}_-^m(x_0, y_0)$, onde $m \in \mathbb{N}^*$, tal que $x_m + y_m \geq 0$.*

Demonstração. Pela definição de \tilde{C}_- , o primeiro iterado (x_1, y_1) satisfaz às condições:

$$\begin{cases} x_1 = tx_0 + y_0 - 3x_*x_0^2 - x_0^3 \\ y_1 = -x_0 \end{cases}$$

e, com isto, $x_1 + y_1 = (t-1)x_0 + y_0 - 3x_*x_0^2 - x_0^3 = y_0 + x_0(t-1-3x_*x_0-x_0^2)$. Definimos a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(\xi) = \xi(t-1-3x_*\xi-\xi^2)$.

Podemos observar que $f'(0) = t-1 > 1$, já que $t > 2$ pelo fato do ponto p ser hiperbólico para C . Além disso, f possui três zeros reais distintos (um negativo, o zero e um positivo) e três pontos fixos também distintos (novamente um negativo, o zero e um positivo). Chamaremos de \bar{x} o ponto fixo negativo de f . O esboço do gráfico da função f pode ser visto na Figura 3.3 abaixo.

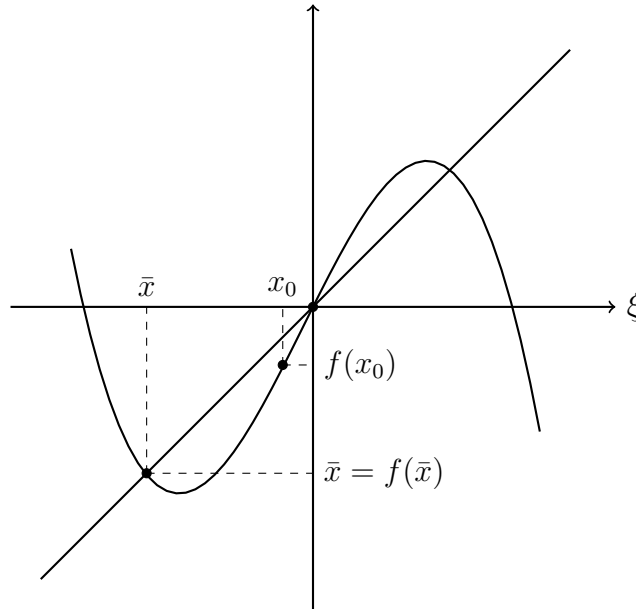


Figura 3.3: Gráficos das funções f e identidade.

Primeiramente, suponhamos que $f'(\bar{x}) \leq 0$. Vamos, agora, reescrever as equações do ponto (x_1, y_1) utilizando a função f :

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + y_0 + f(x_0) \\ y_1 = -x_0 \end{cases}$$

Caso $y_0 + f(x_0) \geq 0$, teríamos $x_1 + y_1 \geq 0$ e o resultado que queremos mostrar seria válido para $m = 1$. Caso contrário, $x_1 < x_0 < 0$, $y_1 > 0$ e $x_1 + y_1 < 0$. Dessa forma, precisamos do segundo iterado (x_2, y_2) :

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + y_1 + f(x_1) = x_1 - x_0 + f(x_1) \\ y_2 = -x_1 \end{cases}$$

Novamente, caso $f(x_1) - x_0 \geq 0$, teríamos $x_2 + y_2 \geq 0$ e o resultado seria válido para $m = 2$. Caso contrário, $x_2 < x_1 < x_0 < 0$, $y_2 > 0$, $x_2 + y_2 < 0$ e precisaríamos do próximo iterado. Em geral,

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - x_{n-1} + f(x_n) \\ y_{n+1} = -x_n \end{cases}$$

e, portanto, $x_{n+1} - x_n = f(x_n) - x_{n-1} = x_{n+1} + y_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Assim, basta encontrarmos um $m \geq 2$ tal que $x_m - x_{m-1} \geq 0$ ou que $f(x_{m-1}) - x_{m-2} \geq 0$ para que o resultado seja válido para m .

Podemos observar que $x_n < f^n(x_0)$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$ enquanto os elementos da sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forem maiores que \bar{x} . Contudo, como $f'(\bar{x}) \leq 0 < 1$, obtemos que \bar{x} é um ponto fixo atrator de f e, portanto, $\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n \leq \lim_{n \in \mathbb{N}} f^n(x_0) = \bar{x}$. Suponhamos, assim, que nenhum elemento da sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seja menor que \bar{x} . Dessa forma, $\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = \bar{x}$ e, com isto, $\lim_{n \in \mathbb{N}} y_n = -\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = -\bar{x}$. Logo, a órbita do ponto inicial (x_0, y_0) tenderia para o ponto $(\bar{x}, -\bar{x}) \in \mathcal{S}_0$, que é um ponto fixo da aplicação \tilde{C}_- (cf. a observação da Página 26). Mas, pela simetria que o reversor R gera entre as aplicações \tilde{C}_- e \tilde{C}_-^{-1} com relação à curva \mathcal{S}_0 , obtemos que $(\bar{x}, -\bar{x}) \in \mathbb{W}^s$ — o que é impossível, já que um ponto fixo não pode pertencer a uma variedade estável de outro ponto fixo, pois isto contradiria o Corolário do Teorema da Variedade Estável.

Concluimos que existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $x_k < \bar{x} < x_{k-1} < \dots < x_0 < 0$. Sabemos que $x_{k+1} = x_k - x_{k-1} + f(x_k)$. Caso $x_{k+1} \geq x_k$, o resultado seria válido para $m = k + 1$. Porém, se $x_{k+1} < x_k$, então $f(x_{k+1}) > x_k$ uma vez que o gráfico de f é decrescente e está acima da diagonal para todo $\xi < \bar{x}$ e, portanto, o resultado seria válido para $m = k + 2$.

O caso em que $f'(\bar{x}) > 0$ é resolvido de forma análoga; porém, como o gráfico da função f não será necessariamente decrescente nos primeiros pontos da sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ menores que \bar{x} , precisaremos de mais alguns passos até alcançarmos o mesmo resultado. Temos, então, o lema provado. \square

Corolário (da demonstração). *Se tomarmos um ponto (x_0, y_0) como nas hipóteses do lema anterior, então o iterado $(x_m, y_m) = \tilde{C}_-^m(x_0, y_0)$ satisfaz $x_m + y_m > 0$, para algum $m \in \mathbb{N}^*$ suficientemente grande.*

Enfim, podemos enunciar e demonstrar o resultado principal desta seção.

Teorema 8. *Seja p um ponto fixo hiperbólico (H) da aplicação de Hénon cúbica conservativa C_- . Existe um ponto homoclínico topologicamente transverso a p por C_- .*

Demonstração. A variedade \mathbb{W}^u está localmente caracterizada pelo autoespaço associado a λ : $E^+(\mathbf{d}\tilde{C}(0, 0)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x}{\lambda} + y = 0\}$. Como $\lambda > 1$, segue-se que existe um ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{W}^u$ tal que $x_0 < 0$, $y_0 > 0$ e $x_0 + y_0 < 0$.

Afirmamos que \mathbb{W}^u intersecta a curva de simetria \mathcal{S}_0 . Com efeito, pelo Corolário do Lema 3, existe um iterado (x_m, y_m) de modo que $x_m + y_m > 0$. Pela continuidade de \mathbb{W}^u e pelo fato de (x_0, y_0) tender para a origem no passado, existe um ponto $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{W}^u \cap \mathcal{S}_0$, como havíamos afirmado.

Lembramos que a curva \mathcal{S}_0 foi definida como sendo o conjunto dos pontos fixos do reversor R . Logo, $R(\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{x}, \hat{y})$ e, pelo Lema 2, $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{W}^s$, ou seja, (\hat{x}, \hat{y}) é um ponto homoclínico à origem por \tilde{C}_- . Além disso, pela simetria de \tilde{C}_- e \tilde{C}_-^{-1} em relação à curva \mathcal{S}_0 , podemos ver que as variedades \mathbb{W}^u e \mathbb{W}^s se cruzam no ponto (\hat{x}, \hat{y}) , o que implica em (\hat{x}, \hat{y}) ser, de fato, um ponto homoclínico topologicamente transverso à origem por \tilde{C}_- .

Concluimos a existência de um ponto homoclínico topologicamente transverso a p por C_- , já que as aplicações C_- e \tilde{C}_- são conjugadas por um isomorfismo linear. \square

Ainda não conseguimos mostrar analiticamente que os pontos homoclínicos encontrados são (diferenciavelmente) transversos. Porém, com simulações numéricas, os pontos homoclínicos parecem ser transversos, como se pode ver na Figura C.1, que se encontra na Página 53. Além disso, ainda que não tenhamos mostrado, a referida figura também indica a existência de pontos homoclínicos (transversos) pela aplicação C_+ .

3.4 Caoticidade

A importância de encontrar um ponto homoclínico (ao menos topologicamente) transverso a um ponto fixo hiperbólico de um difeomorfismo é que isto implica na existência de um conjunto tipo ferradura, o que é uma condição suficiente para o caos. Veremos isto com um pouco mais de detalhes. Vamos começar com algumas definições.

Definição (Espaço das sequências). Dado um $n \in \{2, 3, \dots\}$, definimos o espaço das sequências bilaterais com n símbolos por $\Sigma_n = \{0, 1, \dots, n-1\}^{\mathbb{Z}}$ onde todo $\mathbf{s} \in \Sigma_n$ é da forma $\mathbf{s} = (\dots, s_{-1}, s_0, s_1, \dots)$ e $s_j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$.

Podemos definir a aplicação deslocamento com n símbolos, também chamada de n -shift, no espaço Σ_n definido acima.

Definição (Shift). A aplicação n -shift $\sigma : \Sigma_n \rightarrow \Sigma_n$ é definida por $\sigma(\mathbf{s}) = \mathbf{t}$ onde $t_j = s_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$.

O n -shift é um deslocamento do tipo completo, pois são consideradas todas as sequências possíveis com n símbolos. Entretanto, é possível restringirmos tais sequências utilizando uma matriz de transição $A = (a_{ij})_{n \times n}$ onde cada entrada $a_{ij} \in \{0, 1\}$. De fato,

o conjunto Σ_A das sequências bilaterais $\mathbf{s} = (s_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ tais que $a_{s_j s_{j+1}} = 1$ para todo $j \in \mathbb{Z}$ é um subespaço de Σ_n .

Podemos definir o deslocamento em Σ_A , agora chamado de *subshift do tipo finito*.

Definição (Subshift). A aplicação subshift $\sigma_A : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ é definida como a restrição do n -shift ao subespaço Σ_A , ou seja, $\sigma_A = \sigma|_{\Sigma_A}$.

Ainda que não haja um consenso matemático para o significado da palavra caos, R. L. Devaney a definiu em [3] da seguinte maneira.

Definição (Caos). Seja \mathbb{E} um espaço métrico. Uma aplicação contínua $\mathfrak{F} : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ é dita ser caótica em \mathbb{E} se as seguintes condições forem satisfeitas.

1. \mathfrak{F} for transitiva;
2. Os pontos periódicos de \mathfrak{F} forem densos em \mathbb{E} ;
3. \mathfrak{F} possuir uma dependência sensível às condições iniciais.

A última condição da definição de caos significa que existe um $\delta > 0$ tal que, para todo ponto $x \in \mathbb{E}$ e todo $\varepsilon > 0$, podemos tomar um ponto $y \in \mathbb{E}$ com $\text{dist}(x, y) < \varepsilon$ e um $n_0 \in \mathbb{N}^*$ de forma que $\text{dist}(\mathfrak{F}^{n_0}(x), \mathfrak{F}^{n_0}(y)) \geq \delta$. Esta é considerada a principal característica das aplicações caóticas. Porém, J. Banks *et al.* provaram em [1] que toda aplicação contínua, transitiva e cujos pontos periódicos sejam densos no espaço possui dependência sensível às condições iniciais.

Observação. É um resultado básico de Dinâmica Simbólica que a aplicação shift é transitiva e possui pontos periódicos densos, logo, é caótica (*cf.*, por exemplo, [9] e [14]).

Os conjuntos tipo ferradura foram introduzidos por S. Smale em [17]. Apesar de existir uma definição precisa para dimensões maiores que 2 e para aplicações não-afins, apresentaremos no próximo exemplo apenas a descrição da *Ferradura de Smale*. O leitor interessado no caso geral pode conferi-lo em [9].

Exemplo (Ferradura de Smale). Sejam Δ um retângulo em \mathbb{R}^2 e $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ um difeomorfismo de Δ sobre a sua imagem tais que a interseção $\Delta \cap f(\Delta)$ consiste em dois retângulos “horizontais” Δ_0, Δ_1 e que a restrição de f às componentes $\Delta^i \subset f^{-1}(\Delta_i)$, $i \in \{0, 1\}$, de $f^{-1}(\Delta)$ é uma aplicação afim que contrai na direção vertical e expande na direção horizontal. Isto implica que Δ^0 e Δ^1 são retângulos “verticais”. Uma das maneiras mais simples de conseguirmos isso é esticando e dobrando Δ na forma de uma ferradura e, em seguida, sobrepondo-a ao retângulo original. A parte mais importante da dinâmica de f acontece no conjunto $\Lambda = \{z \in \Delta \mid f^n(z) \in \Delta^0 \cup \Delta^1 \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}\}$. É possível mostrarmos que Λ é o subconjunto invariante maximal de Δ por f . Sejam Σ_2

o espaço das sequências bilaterais com dois símbolos e $\sigma : \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ a aplicação 2-shift conforme definimos anteriormente. A aplicação definida por:

$$h : \Sigma_2 \rightarrow \Lambda$$

$$s \mapsto \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} f^{-k}(\Delta^{s_k})$$

é um homeomorfismo que conjuga σ a $f|_\Lambda$, ou seja, o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_2 & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_2 \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ \Lambda & \xrightarrow{f} & \Lambda \end{array}$$

Portanto, f possui as mesmas propriedades que σ ; em particular, a sua caoticidade.

Observação. Qualquer conjunto em \mathbb{R}^2 com as propriedades de Λ é chamado de um conjunto tipo ferradura.

Para estabelecermos uma conexão entre a existência de pontos homoclínicos transversos e a presença de um conjunto tipo ferradura, apresentaremos o seguinte resultado (*cf.*, por exemplo, [14]).

Proposição 6. *Sejam \mathbb{M} uma variedade diferenciável, $\mathfrak{F} : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ um difeomorfismo e $p \in \mathbb{M}$ um ponto fixo hiperbólico para \mathfrak{F} com um ponto homoclínico transverso $q \in \mathbb{M}$.*

- (a) *Para cada vizinhança \mathcal{U} de $\{p, q\}$, existem um $m \in \mathbb{N}^*$ suficientemente grande e um subconjunto $\Lambda \subset \mathcal{U}$ invariante por \mathfrak{F}^m que contem os pontos p e q e no qual \mathfrak{F}^m é conjugado ao 2-shift σ em Σ_2 .*
- (b) *Seja \mathcal{V} uma vizinhança de $\{p\} \cup \{\mathfrak{F}^j(q) \in \mathbb{M} \mid j \in \mathbb{Z}\}$. Assim, existe uma subvizinhança $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ formada pela união de $n \in \{2, 3, \dots\}$ blocos fechados disjuntos e tal que \mathfrak{F} restrito ao seu subconjunto maximal invariante $\Lambda_{\mathcal{B}} = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} \mathfrak{F}^j(\mathcal{B}) \subset \mathcal{V}$ é conjugado ao subshift do tipo finito σ_A em $\Sigma_A \subset \Sigma_n$. A matriz de transição $A = (a_{ij})_{n \times n}$ deste subshift é dada por:*

$$a_{1j} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = 1, 2 \\ 0 & \text{se } j \neq 1, 2 \end{cases}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = i + 1, 2 \leq i < n \\ 0 & \text{se } j \neq i + 1, 2 \leq i < n \end{cases}$$

$$a_{nj} = \begin{cases} 1 & \text{se } j = 1 \\ 0 & \text{se } j \neq 1 \end{cases}$$

O próximo resultado (vide, novamente, [14]) nos garante que se um ponto fixo hiperbólico para algum difeomorfismo possuir um ponto homoclínico topologicamente transverso, então existirá um conjunto invariante no qual o difeomorfismo será semiconjugado a um subshift do tipo finito. Isto significa que a dinâmica do difeomorfismo estudado será tão complexa quanto a do caso de um ponto homoclínico transverso, como visto na proposição anterior.

Proposição 7. *Sejam \mathbb{M} uma variedade diferenciável, $\mathfrak{F} : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$ um difeomorfismo, $p \in \mathbb{M}$ um ponto fixo hiperbólico para \mathfrak{F} com um ponto homoclínico topologicamente transverso $q \in \mathbb{M}$ e \mathcal{V} uma vizinhança de $\{p\} \cup \{\mathfrak{F}^j(q) \in \mathbb{M} \mid j \in \mathbb{Z}\}$. Assim, existe uma subvizinhança $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ formada pela união de $n \in \{2, 3, \dots\}$ blocos fechados disjuntos e tal que \mathfrak{F} restrito ao seu subconjunto invariante maximal $\Lambda_{\mathcal{B}}$ é semiconjugado ao subshift do tipo finito σ_A em $\Sigma_A \subset \Sigma_n$. A matriz de transição A deste subshift é a mesma do caso em que q é um ponto homoclínico transverso considerado na Proposição 6.*

Com isto, perto de um ponto fixo hiperbólico (H) da aplicação de Hénon cúbica conservativa C_- , há um conjunto invariante Λ de forma que a aplicação $C_-|_{\Lambda}$ possui uma dinâmica com complexidade similar à de uma aplicação caótica. Concluimos, assim, a nossa análise local da dinâmica em torno de um ponto fixo hiperbólico (H ou Hr) de C . Passaremos, no próximo capítulo, a analisar os pontos fixos elípticos (E) cujos autovalores satisfazem uma condição de não-ressonância.

Capítulo 4

Estudo da dinâmica local nos pontos fixos elípticos (E) não-ressonantes

A estabilidade de um ponto fixo elíptico de uma aplicação conservativa é uma questão mais delicada que a de um ponto fixo hiperbólico, pois não depende apenas da sua matriz Jacobiana, como descrito neste capítulo.

Para solucionar esse problema, utilizaremos o Teorema do Twist de Moser, onde é necessário que a aplicação esteja escrita na Forma Normal de Birkhoff.

4.1 A Forma Normal de Birkhoff

Primeiramente, vamos estabelecer uma relação de equivalência entre aplicações bidimensionais que nos ajudará em nossa análise local.

Definição (Germe). Dizemos que duas aplicações F e G são equivalentes se existe uma vizinhança \mathcal{V} de $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ tal que $F|_{\mathcal{V}} = G|_{\mathcal{V}}$. Um *germe* de uma aplicação em $\mathbf{0}$ é uma classe de equivalência de aplicações em $\mathbf{0}$. Portanto, um representante de um germe em $\mathbf{0}$ é uma aplicação definida em uma vizinhança de $\mathbf{0}$.

Usaremos a notação $F : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ para dizer que F é um representante de um germe em $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$.

Teorema 9 (Forma Normal de Birkhoff). *Seja $F : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ um representante de um germe de difeomorfismo tal que:*

- (a) F preserva área e orientação;
- (b) $dF(\mathbf{0})$ possui autovalores complexos $\lambda, \bar{\lambda}$ onde $\lambda = e^{i\alpha}$ de tal forma que $\lambda^n \neq 1$ para todo $n \in \{1, \dots, q\}$ e $q \geq 4$.

Assim, existe um representante de um germe de difeomorfismo H de classe \mathbf{C}^∞ , que preserva área e orientação, tal que se $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ são coordenadas complexas em uma vizinhança de $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$, então

$$H^{-1} \circ F \circ H(z, \bar{z}) = \lambda z e^{iP(|z|^2)} + \mathcal{O}(2s + 2) \quad (4.1)$$

onde $P(x) = \tau_1 x + \dots + \tau_s x^s$ é um polinômio em $\mathbb{R}[x]$ de grau $s = \lfloor \frac{q-2}{2} \rfloor$.

Observação. Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em [13].

A expressão do lado direito da Equação (4.1) é chamada de *Forma Normal de Birkhoff* para F . Já os coeficientes τ_1, \dots, τ_s do polinômio P são chamados de *coeficientes de Birkhoff* ou de *coeficientes de twist*.

O nosso objetivo agora é escrever a aplicação de Hénon cúbica conservativa C na Forma Normal de Birkhoff. Será necessário, primeiramente, que traslademos o ponto fixo elíptico $p = (x_*, -x_*)$ para a origem, como feito na Seção 3.3 do capítulo anterior.

De fato, na Equação (3.1), nós definimos a aplicação \tilde{C} . Em sua forma matricial, ela se expressa como:

$$\tilde{C}(x, y) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_3 x^3 + 3a_3 x_* x^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A próxima etapa é escrever a matriz $M = \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, da parte linear de \tilde{C} , na Forma Canônica de Jordan.

O polinômio característico da matriz M é dado por $\lambda^2 - t\lambda + 1$. Consequentemente, os seus autovalores são da forma $\lambda_{1,2} = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 4}}{2}$. Como o ponto fixo p é elíptico, temos $|t| < 2$. Dessa forma, $\lambda_1 = \lambda = \frac{t}{2} + i\sqrt{1 - \left(\frac{t}{2}\right)^2}$ e $\lambda_2 = \bar{\lambda}$. Com isto, chamando $\frac{t}{2} = \cos \alpha$, obtemos que $\lambda = \cos \alpha + i \sin \alpha = e^{i\alpha}$, onde $\alpha \in (0, \pi)$.

Ao substituírmos $t = 2 \cos \alpha$ na expressão de M e resolvermos a equação matricial $(M - \lambda I_2)\vec{w} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$, encontramos um autovetor complexo

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -\sec \alpha \\ 1 - i \tan \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sec \alpha \\ 1 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ \tan \alpha \end{pmatrix}$$

associado ao autovalor λ . Assim, obtemos os vetores \vec{u} e \vec{v} associados a λ , tais que $\vec{w} = \vec{u} - i\vec{v}$, e também a transformação linear cuja representação matricial é dada por $T = (\vec{u} \mid \vec{v})$ de forma que

$$T^{-1}MT = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Seja a mudança de coordenadas $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\psi(x, y) = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-x \sec \alpha, x + y \tan \alpha)$$

cuja inversa é $\psi^{-1}(x, y) = T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-x \cos \alpha, x \cot \alpha \csc \alpha + y \cot \alpha)$. Com isto, definimos a aplicação \hat{C} sendo a conjugação de \tilde{C} por ψ :

$$\begin{aligned} \hat{C}(x, y) &= \psi^{-1} \circ \tilde{C} \circ \psi(x, y) \\ &= \left(x \cos \alpha - y \sin \alpha + a_3 x^3 \sec^2 \alpha - a_3 3x_* x^2 \sec \alpha, \right. \\ &\quad \left. x \sin \alpha + y \cos \alpha - a_3 x^3 \csc \alpha \sec \alpha + a_3 3x_* x^2 \csc \alpha \right) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} x^3 \sec^2 \alpha - 3x_* x^2 \sec \alpha \\ -x^3 \csc \alpha \sec \alpha + 3x_* x^2 \csc \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De fato, a parte linear de \hat{C} está na Forma Canônica de Jordan. O nosso próximo passo é complexificar a aplicação \hat{C} . Para isto, sejam as variáveis complexas $z = x + iy$ e $\bar{z} = x - iy$ definidas em uma vizinhança \mathcal{U} da origem.

Definimos as funções $X, Y : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de forma que $\hat{C}|_{\mathcal{U}}(x, y) = (X(x, y), Y(x, y))$. Dado que $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ e $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, a complexificação de \hat{C} é

$$\begin{cases} Z(z, \bar{z}) = X\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + iY\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) \\ \bar{Z}(z, \bar{z}) = X\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) - iY\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right) \end{cases}.$$

Estamos interessados em encontrar a Forma Normal de Birkhoff para as aplicações C cujo autovalor λ do ponto fixo elíptico (x_*, y_*) satisfaz a *condição de não-ressonância de baixa ordem* dada por: $\lambda^n \neq 1$ para todo $n \in \{1, \dots, 6\}$. Isto significa que $\alpha \notin \{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{5}, \pi\}$, o que implica em $t \notin \{-2, -\frac{\sqrt{5}+1}{2}, -1, 0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1, 2\}$, lembrando que $\lambda = e^{i\alpha}$ e $t = 2 \cos \alpha$ onde $\alpha \in (0, \pi)$. O motivo da escolha do valor $q = 6$ é que iremos precisar dos dois primeiros coeficientes de twist, τ_1 e τ_2 , e este é o menor valor que garante a existência destes coeficientes. Portanto, a Forma Normal de Birkhoff da aplicação de Hénon cúbica conservativa C , se existir, é

$$B(z, \bar{z}) = \lambda z e^{i(\tau_1 |z|^2 + \tau_2 |z|^4)} + \mathcal{O}(6) \quad (4.2)$$

$$= \lambda \left[z + i\tau_1 z^2 \bar{z} + \left(i\tau_2 - \frac{\tau_1^2}{2} \right) z^3 \bar{z}^2 \right] + \mathcal{O}(6). \quad (4.3)$$

A expressão do lado direito da Equação (4.3) é a expansão em Série de Taylor da expressão equivalente na Equação (4.2) nas variáveis z e \bar{z} em torno do ponto $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$.

Usaremos também a forma $\bar{B}(z, \bar{z})$ definida como o complexo conjugado da Equação (4.3).

Agora estamos aptos a aplicar o Teorema da Forma Normal de Birkhoff: existe um representante de germe de difeomorfismo $H : (\mathbb{R}^2, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$ de modo que sua complexificação satisfaz à seguinte igualdade:

$$Z(H(z, \bar{z}), \bar{H}(z, \bar{z})) = H(B(z, \bar{z}), \bar{B}(z, \bar{z})). \quad (4.4)$$

Precisamos encontrar qual é a forma de H . Para isto, usamos o fato de que se conjugarmos Z com uma aplicação H_k da forma $(z, \bar{z}) \mapsto z + P_k(z, \bar{z})$, onde P_k é um polinômio em $\mathbb{C}[z, \bar{z}]$ homogêneo de ordem $k \geq 2$, ou seja, $P_k(z, \bar{z}) = \sum_{i+j=k} h_{i,j} z^i \bar{z}^j$, então podemos escolher os coeficientes $h_{i,j} \in \mathbb{C}$ de forma a eliminar os coeficientes de ordem k de Z , com exceção daqueles que nos serão necessários.

Uma vez que estamos interessados nos termos até ordem 5, escolheremos H como sendo a composta de H_2, H_3, H_4 e H_5 definidas de acordo com o parágrafo anterior.

Ambos os lados da Equação (4.4) são aplicações analíticas nas variáveis z e \bar{z} . Com isto, igualando os coeficientes de cada termo até a ordem 5, obtemos os seguintes valores para τ_1 e τ_2 (os detalhes desta conta podem ser conferidos no Apêndice B).

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 3b - \frac{2ia^2(\lambda + 1)(2\lambda^2 + \lambda + 2)}{\lambda^3 - 1}, \\ \tau_2 &= \frac{1}{2(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)(\lambda^3 - 1)^3} [-3ib^2(\lambda - 1)^2(\lambda^2 + \lambda + 1)^3(9\lambda^4 + 16\lambda^2 + 9) + \\ &\quad + 4ia^4(\lambda + 1)^2(16\lambda^{10} + 38\lambda^9 + 122\lambda^8 + 195\lambda^7 + 300\lambda^6 + 308\lambda^5 + 300\lambda^4 + \\ &\quad + 195\lambda^3 + 122\lambda^2 + 38\lambda + 16) - 6a^2b(24\lambda^{12} + 75\lambda^{11} + 177\lambda^{10} + 271\lambda^9 + \\ &\quad + 302\lambda^8 + 200\lambda^7 - 200\lambda^5 - 302\lambda^4 - 271\lambda^3 - 177\lambda^2 - 75\lambda - 24)] + \\ &\quad + \frac{3a^2\lambda(\lambda + 1)^2(\lambda^2 + 1)}{(\lambda^3 - 1)^2} \tau_1, \end{aligned}$$

onde $a = \frac{3}{4}a_3 \csc \alpha \sec \alpha$, $b = -\frac{1}{8}a_3 \csc \alpha \sec^2 \alpha$ e $\lambda = \cos \alpha + i \sin \alpha$. Finalmente, substituindo os valores de a , b e λ nas expressões de τ_1 e τ_2 dadas acima e manipulando um pouco os termos, obtemos:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= -\frac{9}{8}x_*^2 \frac{4 \cos \alpha + 1}{(2 \cos \alpha + 1) \cos^2 \alpha (\cos \alpha - 1) \sin \alpha} - \frac{3}{16}a_3 \frac{1}{\cos^2 \alpha \sin \alpha}; \quad (4.5) \\ \tau_2 &= \frac{27}{256}x_*^4 \frac{256 \cos^5 \alpha + 304 \cos^4 \alpha + 168 \cos^3 \alpha + 86 \cos^2 \alpha + 14 \cos \alpha - 3}{\sin \alpha (\cos \alpha + 1) (2 \cos \alpha + 1)^3 \cos^5 \alpha (\cos \alpha - 1)^3} + \\ &\quad + \frac{27}{128}a_3 x_*^2 \frac{96 \cos^4 \alpha + 102 \cos^3 \alpha + 30 \cos^2 \alpha + 8 \cos \alpha + 1}{\sin \alpha (\cos \alpha + 1) (2 \cos \alpha + 1)^2 \cos^5 \alpha (\cos \alpha - 1)^2} + \\ &\quad + \frac{3}{256} \frac{18 \cos^2 \alpha - 1}{\sin \alpha (\cos \alpha + 1) \cos^5 \alpha (\cos \alpha - 1)} - \frac{27}{8} \frac{x_*^2 \tau_1}{(2 \cos \alpha + 1)^2 \cos \alpha (\cos \alpha - 1)^2}. \quad (4.6) \end{aligned}$$

Com esses valores de τ_1 e τ_2 , obtemos a Forma Normal de Birkhoff da aplicação de Hénon cúbica conservativa transladada de forma que a origem seja um ponto fixo elíptico não-ressonante até a sexta ordem. Na próxima seção, apresentaremos o critério de estabilidade que toma por base os valores encontrados para os coeficientes de twist.

4.2 O Teorema do Twist de Moser

Iniciaremos esta seção enunciando a versão analítica do resultado de J. K. Moser que estabelece um critério de estabilidade de germes de aplicações bidimensionais conservativas em que a origem é um ponto fixo elíptico e que admitem a Forma Normal de Birkhoff.

Teorema 10 (Twist de Moser). *Suponha que $F : U \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$, U um aberto de $(\mathbb{R}^2, \mathbf{0})$, seja uma aplicação analítica real conservativa e com ponto fixo elíptico na origem. Se a Forma Normal de Birkhoff de F em uma vizinhança de $\mathbf{0}$ se escreve em coordenadas complexas (z, \bar{z}) como $B(z, \bar{z}) = ze^{iP(|z|^2)} + \mathcal{O}(2s+2)$, onde P é um polinômio em $\mathbb{R}[|z|^2]$ não-constante de grau s , então $\mathbf{0}$ é um ponto fixo estável para F .*

Observação. A demonstração desta versão se encontra, por exemplo, em [13].

Para utilizarmos o teorema acima no caso de aplicações de Hénon cúbicas conservativas, basta mostrarmos que algum coeficiente de twist τ_1 ou τ_2 calculados nas Equações (4.5) e (4.6), respectivamente, são não-nulos.

Para isso, colocaremos os numeradores das expressões de τ_1 e τ_2 em termos dos coeficientes a_1 e a_3 da aplicação de Hénon cúbica conservativa C e de x_* do ponto fixo elíptico $p = (x_*, -x_*)$. Porém, os denominadores ficarão em termos do traço t da matriz Jacobiana para facilitar a nossa análise. Vale lembrarmos que $2 \cos \alpha = t = 3a_3x_*^2 + a_1$. De fato,

$$\tau_1 = -3 \frac{3x_*^2(2a_1 + 3) + a_3(27x_*^4 - a_1^2 + a_1 + 2)}{(2-t)^{\frac{3}{2}}t^2(t+1)\sqrt{t+2}}; \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \tau_2 = & \frac{3}{2} \frac{1}{(2-t)^{\frac{7}{2}}t^5(t+1)^3(t+2)^{\frac{3}{2}}} [-124659a_3x_*^{14} - \\ & - (115911a_1 + 168399)x_*^{12} + a_3(12393a_1^2 - 185166a_1 - 172287)x_*^{10} + \\ & + (52245a_1^3 - 59049a_1^2 - 199665a_1 - 87399)x_*^8 + \\ & + a_3(23895a_1^4 + 2268a_1^3 - 83538a_1^2 - 75708a_1 - 16470)x_*^6 + \\ & + (4347a_1^5 + 4239a_1^4 - 14238a_1^3 - 21438a_1^2 - 10206a_1 - 1602)x_*^4 + \\ & + a_3(243a_1^6 + 594a_1^5 - 591a_1^4 - 2004a_1^3 - 1818a_1^2 - 852a_1 - 96)x_*^2 + \\ & + (-9a_1^7 + 9a_1^6 + 47a_1^5 - 11a_1^4 - 82a_1^3 - 34a_1^2 + 16a_1 + 8)]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Das Equações (4.7) e (4.8), podemos perceber que τ_1 e τ_2 estão bem-definidos, já que $t \notin \{-2, -1, 0, 2\}$ de acordo com a hipótese de não-ressonância de baixa ordem.

Agora já podemos aplicar o critério de estabilidade estabelecido pelo Teorema do Twist de Moser para as aplicações de Hénon cúbicas conservativas. Este é o propósito da próxima seção.

4.3 Estabilidade

O coeficiente de twist τ_1 (resp. τ_2) se anulará sempre que x_* for raiz do polinômio formado pelo numerador da Equação (4.7) (resp. (4.8)). Por exemplo, no caso do primeiro coeficiente de twist, o polinômio é dado por $g_1(x) = 27a_3x^4 + 3(2a_1 + 3)x^2 + a_3(2 - a_1^2 + a_1)$. Não apresentaremos a expressão de g_2 do caso do segundo coeficiente de twist para não ocupar muito espaço.

Calculamos o resultante de g_1 (resp. g_2) com o polinômio g_0 definido na Expressão (2.5) para eliminarmos a variável x e obtermos uma curva no plano dos parâmetros (a_1, a_0) , na qual todo ponto representa uma aplicação com ao menos um ponto fixo elíptico cujo primeiro (resp. segundo) coeficiente de twist se anula. Novamente, apresentaremos somente o resultante r_1 . O leitor pode conferir a expressão de r_2 no Apêndice B. Assim,

$$\begin{aligned} r_1 &= \text{Res}_x(g_1, g_0) \\ &= 19683a_3a_0^4 + 27(8a_1^3 - 108a_1^2 - 63a_1 + 837)a_0^2 - 16a_3(16 - 5a_1)^2(a_1 - 2)^3(a_1 + 1). \end{aligned}$$

A curva $r_1 \equiv 0$ é chamada de *curva sem twist* e está representada nas Figuras 2.4 e 2.5 para os casos C_+ e C_- , respectivamente. Toda aplicação de Hénon cúbica conservativa com ponto fixo elíptico não-ressonante de baixa ordem e que não pertença a essa curva é estável no ponto fixo de acordo com o Teorema do Twist de Moser.

Só nos resta analisar os pontos que pertencem à curva sem twist. Analogamente à anterior, a curva $r_2 \equiv 0$ no espaço dos parâmetros (a_1, a_0) representa todas as aplicações de Hénon cúbicas conservativas com ao menos um ponto fixo elíptico e com o segundo coeficiente de twist nulo.

Agora, basta calcularmos os pontos de interseção das curvas $r_1 \equiv 0$ e $r_2 \equiv 0$, pois o restante dos pontos destas curvas representa aplicações C estáveis em um ponto fixo elíptico não-ressonante de baixa ordem. No caso da aplicação C_+ , foram encontrados os seguintes pontos no espaço dos parâmetros (*cf.* Apêndice B):

$$\begin{aligned} P_1^+ &= (-1, 0); \\ P_2^+ &= (2, 0). \end{aligned}$$

Ao substituímos $a_1 = -1$ e $a_0 = 0$ em $r_0(-1)$, obtemos o valor 0 e, portanto, o ponto P_1^+ pertence à *curva tripla*, ou seja, o ponto fixo elíptico da aplicação C_+ com $a_1 = -1$ e $a_0 = 0$ é ressonante de ordem 3. Também pode-se mostrar que o ponto P_2^+ pertence à curva SN verificando que $r_0(2) = 0$ com os valores $a_1 = 2$ e $a_0 = 0$. Portanto, nenhum desses pontos será considerado, já que o Teorema do Twist de Moser só pode ser aplicado em pontos não-ressonantes de baixa ordem. Concluimos que a aplicação C_+ é estável em todo ponto fixo elíptico não-ressonante até a sexta ordem.

Já no caso da aplicação C_- , foram encontrados 10 pontos de interseção das curvas $r_1 \equiv 0$ e $r_2 \equiv 0$ no espaço dos parâmetros (a_1, a_0) , onde os 4 a seguir foram calculados explicitamente (*cf.* Apêndice B):

$$\begin{aligned} P_1^- &= \left(-\frac{4}{3}, -\frac{32\sqrt{2}}{27} \right) & P_2^- &= \left(-\frac{4}{3}, \frac{32\sqrt{2}}{27} \right) \\ P_3^- &= (-1, 0) & P_4^- &= (2, 0). \end{aligned}$$

Da mesma forma que no caso da aplicação C_+ , podemos mostrar que os pontos P_1^- e P_2^- pertencem à curva PD, o ponto P_3^- pertence à curva tripla e o ponto P_4^- pertence à curva SN. Portanto, eles também não serão considerados.

No entanto, os outros 6 pontos de interseção só foram obtidos numericamente. Aqui estão com precisão de 30 dígitos:

$$\begin{aligned} P_5^- &= (3.51360734882323302594828626769, 0.235530917512950131491350211505); \\ P_6^- &= (3.29169103929105230733241324738, 0.066756977496731228822860303018); \\ P_7^- &= (3.01457022960293785294910287753, 0.129456047270389582192274338763); \\ P_8^- &= (3.29169103929105230733241324738, -0.066756977496731228822860303019); \\ P_9^- &= (3.51360734882323302594828626770, -0.235530917512950131491350211508); \\ P_{10}^- &= (3.01457022960293785294910287753, -0.129456047270389582192274338773). \end{aligned}$$

Todos estes pontos pertencem à região $E \prec H \prec E$, como podemos ver na Figura 4.1, que se encontra na página seguinte. Além disso, verificamos numericamente que nenhum deles pertence a curva alguma de ressonância de baixa ordem (*cf.* Apêndice B). No entanto, toda aplicação de Hénon C_- representada por pontos nessa região possui dois pontos fixos elípticos distintos. Logo, entre as aplicações C_- caracterizadas pelos pontos acima, precisamos verificar se existe algum ponto fixo elíptico com os dois primeiros coeficientes de twist nulos, já que a Forma Normal de Birkhoff é um conceito local e, portanto, depende do ponto fixo.

Assim, por meio de cálculos numéricos, encontramos os seis pares de pontos fixos elípticos para as aplicações representadas pelos pontos acima e observamos que, para cada

aplicação, um dos pontos fixos está no semiplano esquerdo de \mathbb{R}^2 e o outro no direito. Logo, vamos denotá-los na Tabela 4.1 por p_e e p_d , respectivamente, para todas as referidas aplicações, sem risco de confusão.

Como podemos ver nas Equações (4.7) e (4.8), os coeficientes τ_1 e τ_2 só dependem da primeira coordenada do ponto fixo analisado e dos parâmetros a_0 , a_1 e a_3 da família de aplicações de Hénon C , uma vez que o traço t da matriz Jacobiana também depende. Por fim, substituindo esses valores (referentes às seis aplicações que nos restam analisar, juntamente com os seus pontos fixos elípticos) nas Equações (4.7) e (4.8), construímos a seguinte tabela (*cf.* Apêndice B).

Ponto que representa a aplicação	Ponto fixo	τ_1	τ_2
P_5^-	p_e	0	≈ -17364
	p_d	≈ -9	0
P_6^-	p_e	0	≈ -16340
	p_d	≈ 20	0
P_7^-	p_e	≈ -32	0
	p_d	0	≈ -15212
P_8^-	p_e	≈ 20	0
	p_d	0	≈ -16340
P_9^-	p_e	≈ -9	0
	p_d	0	≈ -17364
P_{10}^-	p_e	0	≈ -15212
	p_d	≈ -32	0

Tabela 4.1: Análise dos coeficientes de twist nos pontos de interseção das curvas $r_1 \equiv 0$ e $r_2 \equiv 0$.

De acordo com a tabela acima, nenhum dos pontos fixos analisados possui ambos coeficientes de twist τ_1 e τ_2 nulos e, portanto, são estáveis segundo o Teorema do Twist de Moser.

Concluimos que a aplicação C_- é estável em todos os seus pontos fixos elípticos não-ressonantes de baixa ordem e isto encerra a nossa análise local do caso elíptico. No próximo capítulo, estudaremos os pontos fixos parabólicos (P) da aplicação de Hénon C .

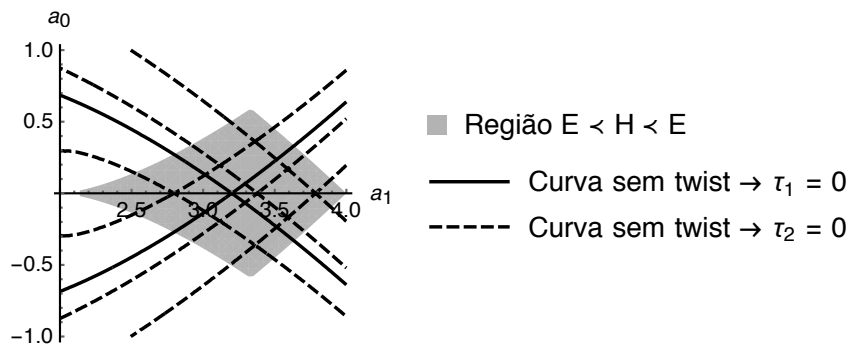


Figura 4.1: Pontos de interseção das curvas $r_1 \equiv 0$ e $r_2 \equiv 0$ na região $E \prec H \prec E$ da aplicação C_- .

Capítulo 5

Estudo da dinâmica local nos pontos fixos parabólicos (P)

Neste capítulo, será analisada a estabilidade da aplicação de Hénon cúbica conservativa C nos seus pontos fixos que são parabólicos, ou seja, cujos autovalores são ambos iguais a ± 1 . Para esse fim, usaremos um resultado de T. Levi-Civita que estabelece um critério de instabilidade de um germe de homeomorfismo em \mathbb{R}^2 tendo a origem como ponto fixo.

De fato, em [10], Levi-Civita aponta precisamente quais são as condições suficientes para que uma aplicação bidimensional analítica definida em torno da origem, onde esta é um ponto fixo cujos autovalores são reais e têm módulo igual à unidade, seja instável.

Contudo, apresentaremos apenas o caso que chamamos de parabólico, pois o outro (autovalores de módulo um e sinais opostos) não ocorre em aplicações que preservam a orientação, como a aplicação C .

5.1 Considerações prévias

A princípio, consideraremos uma aplicação real arbitrária F do plano:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_0, y_0) \\ y_1 = f_2(x_0, y_0) \end{cases}$$

onde as funções f_i são analíticas em uma vizinhança \mathcal{U} da origem. Podemos supor que estas funções se anulam na origem e que o determinante jacobiano de F seja não-nulo em \mathcal{U} . Além disso, os autovalores λ_1, λ_2 da matriz Jacobiana calculada na origem são tais que $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$.

Portanto, obtemos os seguintes 3 casos:

$$\lambda_1 = \pm 1, \quad \lambda_2 = \mp 1; \quad (\text{Caso 1})$$

$$\lambda_1 = \pm 1, \quad \lambda_2 = \pm 1; \quad (\text{Caso 2})$$

$$\lambda_1 = e^{i\alpha}, \quad \lambda_2 = e^{-i\alpha}, \quad (\text{Caso 3})$$

onde α é um número real.

Como estamos estudando aplicações que preservam área e orientação, sempre teremos $\lambda_1\lambda_2 = 1$. Logo, excluiremos o [Caso 1](#). Por sua vez, o [Caso 3](#) já foi abordado no capítulo anterior. Portanto, só nos resta estudar o [Caso 2](#).

Assim sendo, escreveremos a aplicação F na forma:

$$\begin{cases} x_1 = a_{10}x_0 + a_{01}y_0 + \hat{f}_1(x_0, y_0) \\ y_1 = b_{10}x_0 + b_{01}y_0 + \hat{f}_2(x_0, y_0) \end{cases},$$

em que a_{ij}, b_{ij} são constantes reais e as funções \hat{f}_i não possuem termos de grau um. Agora, por meio de uma mudança linear de variáveis, é sempre possível reescrevermos F de modo que a sua parte linear esteja na Forma Canônica de Jordan:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda x_0 + \tilde{f}_1(x_0, y_0) \\ y_1 = cx_0 + \lambda y_0 + \tilde{f}_2(x_0, y_0) \end{cases},$$

com $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, $c \in \{0, 1\}$ e, novamente, \tilde{f}_i não possuem termos de primeiro grau.

Não será considerado o caso em que c for nulo, pois, como veremos mais adiante, para a aplicação C , temos sempre $c = 1$. Dessa forma, se tomarmos a iterada de F , obtemos a aplicação:

$$\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 + \tilde{f}_1(x_1, y_1) = x_0 + \bar{f}_1(x_0, y_0) \\ y_2 = x_1 + \lambda y_1 + \tilde{f}_2(x_1, y_1) = 2\lambda x_0 + y_0 + \bar{f}_2(x_0, y_0) \end{cases}.$$

Não há problema algum em trabalharmos com a aplicação F^2 ao invés de F , pois uma é estável (resp. instável) se, e somente se, a outra também o for. Agora, conjugando F^2 com a aplicação $\sigma(x, y) = (\frac{x}{2\lambda}, y)$, obtemos a seguinte aplicação que também chamaremos de F , sem risco de confusão:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + f(x_0, y_0) \\ y_1 = x_0 + y_0 + g(x_0, y_0) \end{cases}, \quad (5.1)$$

onde as funções f, g possuem apenas termos de grau maior que um.

Feitas essas considerações, podemos, enfim, enunciar e demonstrar o critério de instabilidade de Levi-Civita. Este será o assunto da próxima seção.

5.2 O resultado de Levi-Civita

Seja a aplicação F como no Sistema (5.1). Como a função f não possui termos constantes ou lineares, podemos dizer que ela é da forma $f(x, y) = c_{20}x^2 + 2c_{11}xy + c_{02}y^2 + \mathcal{O}(3)$, onde c_{20}, c_{11}, c_{02} são constantes reais.

Teorema 11 (Levi-Civita). *Se a constante c_{02} da aplicação F for diferente de zero, então F é instável na origem.*

A demonstração do teorema acima será feita ao final desta seção. Antes, porém, apresentaremos alguns resultados auxiliares.

Lema 4. *A constante c_{02} de F é invariante por uma mudança de variáveis do tipo*

$$\begin{cases} \xi = x + P(x, y) \\ \eta = y + Q(x, y) \end{cases} \quad (5.2)$$

onde P, Q são funções analíticas em uma vizinhança \mathcal{V} da origem tais que não contenham termos de primeira ordem.

Demonstração. A mudança de variáveis inversa é da forma:

$$\begin{cases} x = \xi + \hat{P}(\xi, \eta) \\ y = \eta + \hat{Q}(\xi, \eta) \end{cases}. \quad (5.3)$$

Se substituirmos ξ, η do Sistema (5.2) na mudança de variáveis (5.3) acima, obtemos:

$$\begin{aligned} x &= x + P(x, y) + \hat{P}(x + P(x, y), y + Q(x, y)) \\ y &= y + Q(x, y) + \hat{Q}(x + P(x, y), y + Q(x, y)) \end{aligned}$$

e, ao compararmos os termos de ambos os lados destas equações, encontramos que os termos quadráticos de P , que chamaremos de P_2 , são simétricos aos termos quadráticos de \hat{P} , que chamaremos de \hat{P}_2 . O mesmo ocorre com as funções Q e \hat{Q} . Simbolicamente, isso equivale a dizer que:

$$\begin{cases} P_2(x, y) = -\hat{P}_2(x, y) \\ Q_2(x, y) = -\hat{Q}_2(x, y) \end{cases} \quad (5.4)$$

para todo $(x, y) \in \mathcal{V}$. Agora, se tomarmos como base o Sistema (5.2) e substituirmos os valores do Sistema (5.1), chegamos a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = x_1 + P(x_1, y_1) \\ \quad = x_0 + f(x_0, y_0) + P(x_0 + f(x_0, y_0), x_0 + y_0 + g(x_0, y_0)) \\ \eta_1 = y_1 + Q(x_1, y_1) \\ \quad = x_0 + y_0 + g(x_0, y_0) + Q(x_0 + f(x_0, y_0), x_0 + y_0 + g(x_0, y_0)) \end{array} \right. . \quad (5.5)$$

Por sua vez, usando os Sistemas (5.3) e (5.4), segue-se:

$$\begin{aligned} x_0 &= \xi_0 - P_2(\xi_0, \eta_0) + \mathcal{O}(3) \\ f(x_0, y_0) &= c_{20}\xi_0^2 + 2c_{11}\xi_0\eta_0 + c_{02}\eta_0^2 + \mathcal{O}(3) \\ P(x_0 + f(x_0, y_0), x_0 + y_0 + g(x_0, y_0)) &= P_2(\xi_0, \xi_0 + \eta_0) + \mathcal{O}(3). \end{aligned}$$

Finalmente, chegamos à expressão da primeira função-coordenada de F nas novas variáveis ξ, η :

$$\xi_1 = \xi_0 - P_2(\xi_0, \eta_0) + c_{20}\xi_0^2 + 2c_{11}\xi_0\eta_0 + c_{02}\eta_0^2 + P_2(\xi_0, \xi_0 + \eta_0) + \mathcal{O}(3)$$

e, portanto, como $P_2(\xi, \xi + \eta) - P_2(\xi, \eta)$ não contém termo em η^2 , o coeficiente de η_0^2 da primeira função-coordenada de F nas novas variáveis permanece sendo c_{02} . \square

Como aplicação do Lema 4, escreveremos a aplicação F em uma forma mais simples. Com efeito, seja a mudança de variáveis do Sistema (5.2) onde

$$\begin{aligned} P(x, y) &= g(x, y), \\ Q(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Com esta mudança, o Sistema (5.5) se torna:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = \xi_0 + \hat{g}(\xi_0, \eta_0) + f(\xi_0 + \hat{g}(\xi_0, \eta_0), \eta_0) + \\ \quad + g(\xi_0 + \hat{g}(\xi_0, \eta_0) + f(\xi_0 + \hat{g}(\xi_0, \eta_0), \eta_0), \xi_0 + \eta_0 + \hat{g}(\xi_0, \eta_0)) \\ \quad = \xi_0 + \tilde{f}(\xi_0, \eta_0) \\ \eta_1 = \xi_0 + \eta_0 + \hat{g}(\xi_0, \eta_0) + g(\xi_0 + \hat{g}(\xi_0, \eta_0), \eta_0) \\ \quad = \xi_0 + \eta_0 \end{array} \right. .$$

Portanto, podemos assumir, sem perda de generalidade, que a aplicação F é da forma:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + f(x_0, y_0) \\ y_1 = x_0 + y_0 \end{cases}, \quad (5.6)$$

onde o coeficiente do termo y^2 em $f(x, y)$ é c_{02} , o mesmo da expressão original, de acordo com o Lema 4.

Lema 5. *Seja F uma aplicação da forma do Sistema (5.6) com $c_{02} > 0$. Existe uma bola fechada \mathcal{B} centrada na origem e de raio ε suficientemente pequeno tal que, para todo ponto (x_0, y_0) na região $\mathcal{Q} = \{(x, y) \in \mathcal{B} \setminus (0, 0) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$, tem-se*

$$\begin{aligned} x_1 = x_0 + f(x_0, y_0) &> 0, \\ f(0, y_0) &> 0. \end{aligned}$$

Demonstração. Sabemos que a origem é um ponto fixo de F . Logo, $f(0, 0) = 0$ e, como f é analítica em uma vizinhança da origem e não possui termos de primeira ordem, $(0, 0)$ é um ponto crítico de f .

Portanto, seja H a forma quadrática Hessiana de f na origem, isto é,

$$\begin{aligned} H \cdot (x, y)^2 &= \mathbf{d}^2 f(0, 0) \cdot (x, y)^2 \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2c_{20} & 2c_{11} \\ 2c_{11} & 2c_{02} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= 2c_{20}x^2 + 4c_{11}xy + 2c_{02}y^2, \end{aligned}$$

para todo vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Logo, como $H \cdot (0, 1)^2 = 2c_{02} > 0$, tem-se $f(0, y) > f(0, 0) = 0$ para todo $y > 0$ suficientemente pequeno. Isto demonstra uma parte do resultado.

Seja, então, a curva Γ no plano (x, y) definida pela seguinte equação:

$$x + f(x, y) = x + c_{20}x^2 + 2c_{11}xy + c_{02}y^2 + \mathcal{O}(3) = 0. \quad (5.7)$$

Afirmamos que esta curva é tangente ao eixo das ordenadas na origem e permanece à esquerda deste eixo para todo $|y| > 0$ suficientemente pequeno.

De fato, derivando implicitamente a Equação (5.7) em relação a y , obtemos:

$$\frac{dx}{dy} + 2c_{20}x \frac{dx}{dy} + 2c_{11}y \frac{dx}{dy} + 2c_{11}x + 2c_{02}y + \mathcal{O}(2) = 0,$$

o que implica em $\frac{dx}{dy}$ se anular na origem. Ao derivarmos novamente, temos:

$$\frac{d^2 x}{dy^2} + 2c_{20} \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 + 2c_{20}x \frac{d^2 x}{dy^2} + 4c_{11} \frac{dx}{dy} + 2c_{11}y \frac{d^2 x}{dy^2} + 2c_{02} + \mathcal{O}(1) = 0.$$

Logo, $\frac{d^2 x}{dy^2} = -2c_{02} < 0$ na origem. Isto significa que existe um $\varepsilon > 0$ tal que x é negativo para todo $|y| \leq \varepsilon$ não-nulo, provando a afirmação feita anteriormente.

Portanto, $x_1 = x_0 + f(x_0, y_0)$ deve ser não-negativo para todo $0 < x_0 \leq \varepsilon$ e todo $0 < y_0 \leq \varepsilon$, pois a curva Γ divide a bola $\mathcal{B} = B[\mathbf{0}; \varepsilon]$ em duas componentes conexas tais que x_1 é positivo em uma delas e negativo na outra, e, como $f(0, y_0) > 0$ para todo $0 < y_0 \leq \varepsilon$, o conjunto \mathcal{Q} está contido na componente conexa onde x_1 é positivo. \square

Lema 6. *Nas hipóteses do lema anterior, se existir um subconjunto $S \subset \mathcal{B}$ invariante por F , então $S \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$.*

Demonstração. De acordo com a demonstração do Lema 5, a curva Γ definida pela Equação (5.7) é tangente ao eixo das ordenadas na origem e sua interseção com $\mathcal{B} \setminus (0, 0)$ está contida no semiplano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$. Assim, a curva Γ juntamente com a reta $x + y = 0$, os eixos do plano cartesiano e a circunferência dada pela equação $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ definem as fronteiras de uma partição de \mathcal{B} . Vide a figura a seguir.

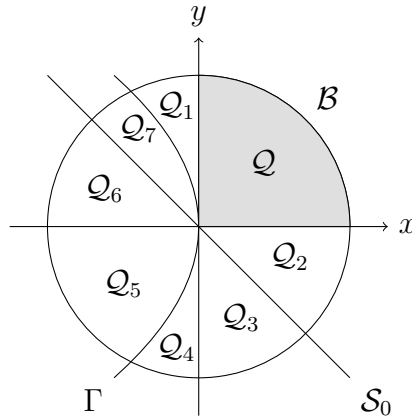


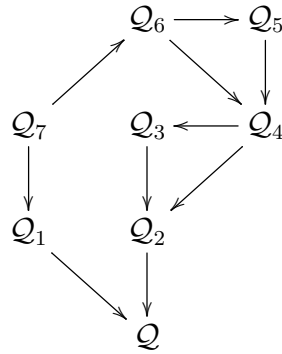
Figura 5.1: Partição de \mathcal{B}

Seja $(x_0, y_0) \in S$. Vale ressaltarmos que se $(x_0, y_0) \in \Gamma$, então $x_1 = 0$ e se $(x_0, y_0) \in \mathcal{S}_0$, então $y_1 = 0$. Basta supormos que (x_0, y_0) pertença a algum \mathcal{Q}_i e mostrarmos que algum iterado $(x_n, y_n) = F^n(x_0, y_0)$ está em \mathcal{Q} . Dessa forma, tem-se:

- $(x_0, y_0) \in \mathcal{Q}_1 \Rightarrow x_1 \geq 0$ e $y_1 > 0 \Rightarrow (x_1, y_1) \in \mathcal{Q}$;
- $(x_0, y_0) \in \mathcal{Q}_2 \Rightarrow x_1 > 0$ e $y_1 \geq 0 \Rightarrow (x_1, y_1) \in \mathcal{Q}$;
- $(x_0, y_0) \in \mathcal{Q}_3 \Rightarrow x_1 > 0$ e $y_1 < 0$ mas $y_1 > y_0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*$ tal que $(x_n, y_n) \in \mathcal{Q}_2$;

- $(x_0, y_0) \in \mathcal{Q}_4 \Rightarrow x_1 > 0$ e $y_1 < 0 \Rightarrow (x_1, y_1) \in \mathcal{Q}_2 \cup \mathcal{Q}_3$;
- $(x_0, y_0) \in \mathcal{Q}_5 \Rightarrow x_1 \leq 0$ e $y_1 < 0$ mas $y_1 < y_0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*$ tal que $(x_n, y_n) \in \mathcal{Q}_4$;
- $(x_0, y_0) \in \mathcal{Q}_6 \Rightarrow x_1 < 0$ e $y_1 < 0 \Rightarrow (x_1, y_1) \in \mathcal{Q}_4 \cup \mathcal{Q}_5$;
- $(x_0, y_0) \in \mathcal{Q}_7 \Rightarrow x_1 < 0$ e $y_1 \geq 0$ mas $x_1 + y_1 < x_0 + y_0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*$ tal que $(x_n, y_n) \in \mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_6$.

Para visualizarmos melhor, colocaremos os resultados obtidos no grafo abaixo, indicando as possíveis trajetórias de um ponto $(x_0, y_0) \in S$.



Portanto, a órbita de todo ponto $(x_0, y_0) \in S$ entra em \mathcal{Q} em algum iterado $n \in \mathbb{N}^*$ suficientemente grande e permanece em \mathcal{Q} a partir de então. \square

Podemos, enfim, demonstrar o resultado de Levi-Civita sobre o critério para a instabilidade de germes de aplicações analíticas bidimensionais com ponto fixo na origem enunciado no início desta seção.

Demonstração do Teorema 11. Como consequência do Lema 4, podemos sempre assumir que a função g seja identicamente nula, isto é, que F esteja na forma do Sistema (5.6). Além disso, vamos supor que c_{02} seja positiva, pois, caso contrário, bastaria fazer a mudança de variáveis $x \mapsto -x$ e $y \mapsto -y$ para obtermos o desejado. Podemos, então, usar o Lema 5.

Vamos supor, por contradição, que F não seja instável na origem. Isto implicaria na existência de um subconjunto $S \subset \mathcal{B}$ invariante por F e não-trivial. Porém, pelo Lema 6, existiria um ponto $(x_0, y_0) \in S \cap \mathcal{Q}$ tal que todos os seus iterados (x_n, y_n) também estivessem em \mathcal{Q} . Por definição, tem-se

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ y_n = x_{n-1} + y_{n-1} \end{cases} \quad (5.8)$$

para todo $n \geq 1$. Como todo x_n é positivo, temos sempre $y_n > y_{n-1}$. Por outro lado, como nenhum y_n pode ultrapassar ε , deve haver um valor supremo $0 < L \leq \varepsilon$. Se passarmos ao limite a segunda equação do Sistema (5.8), obteremos

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = 0.$$

Finalmente, como f é uma função contínua, passando ao limite a primeira equação do Sistema (5.8), temos:

$$f(0, L) = 0,$$

onde $0 < L \leq \varepsilon$, mas isto contradiz uma das propriedades da bola \mathcal{B} dadas pelo Lema 5. □

Segundo Levi-Civita, esse resultado é possível de ser estendido da seguinte maneira, usando o mesmo argumento.

Proposição 8. *Sejam F uma aplicação da forma do Sistema (5.1) e c_{0n} o coeficiente do termo y^n em $f(x, y)$ onde n é o menor número natural tal que $c_{0n} \neq 0$. Se n for par ou se, n sendo ímpar, c_{0n} for positivo, então F é instável na origem.*

Observação. O caso em que n é ímpar e c_{0n} é negativo não foi resolvido no trabalho supracitado de Levi-Civita. No entanto, o caso em que não existe tal n , ou seja, quando $f(x, y)$ possui um fator x em comum a todos os seus termos (isto é, $f(x, y) = x\tilde{f}(x, y)$), se reduz à proposição anterior substituindo, no enunciado, f por \tilde{f} .

5.3 Instabilidade

Iremos agora utilizar o critério estabelecido na seção anterior na aplicação de Hénon cúbica conservativa C , assumindo que um de seus pontos fixos $p = (x_*, y_*)$ seja parabólico.

Iniciaremos transladando o ponto p para a origem. A aplicação resultante é a \tilde{C} , definida na Equação (3.1). Precisamos colocá-la na forma do Sistema (5.1). O primeiro passo é introduzirmos uma mudança de variáveis que torne a parte linear de \tilde{C} na Forma Canônica de Jordan.

Como estamos trabalhando no caso parabólico, os autovalores da matriz Jacobiana de \tilde{C} calculada na origem são ambos iguais a $\lambda = \pm 1$. Dizemos, neste caso, que o autovalor tem multiplicidade algébrica 2.

Seja a matriz $M = \mathbf{d}\tilde{C}(0, 0) = \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ao resolvermos a equação matricial $(M - \lambda I_2)\vec{w} = \mathbf{0}$, encontramos apenas um autovetor $\vec{w} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ 1 \end{pmatrix}$ associado ao autovalor λ . Isto significa que λ tem multiplicidade geométrica 1.

Portanto, precisamos encontrar o núcleo da matriz $(M - \lambda I_2)^2$. Mas, como

$$(M - \lambda I_2)^2 = \begin{pmatrix} t - \lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t - \lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde utilizamos $t = 2\lambda$ e $\lambda^2 = 1$, temos: $\ker (M - \lambda I_2)^2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Logo, tomando $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\vec{v} = (M - \lambda I_2)\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda \\ -1 \end{pmatrix}$, obtemos a matriz

$T = (\vec{u} \mid \vec{v})$ que conjugua M à sua Forma Canônica de Jordan, isto é, $T^{-1}MT = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

Seja, então, a mudança de coordenadas $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\rho(x, y) = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x + \lambda y, -y)$$

que é uma involução, ou seja, $\rho^{-1} = \rho$. Com isto, definimos a aplicação \dot{C} sendo a conjugação de \tilde{C} com ρ :

$$\begin{aligned} \dot{C}(x, y) &= \rho^{-1} \circ \tilde{C} \circ \rho(x, y) \\ &= \rho^{-1} \circ \tilde{C}(x + \lambda y, -y) \\ &= \rho^{-1}(tx + y + 3a_3x_*(x + \lambda y)^2 + a_3(x + \lambda y)^3, -x - \lambda y) \\ &= (\lambda x + 3a_3x_*(x + \lambda y)^2 + a_3(x + \lambda y)^3, x + \lambda y). \end{aligned}$$

De fato, a parte linear de \dot{C} está na Forma Canônica de Jordan. O próximo passo é calcularmos a sua iterada \dot{C}^2 :

$$\begin{aligned} \dot{C}^2(x, y) &= (x + 3a_3x_*(x + \lambda y)^2 + a_3(x + \lambda y)^3 + \\ &\quad + 3a_3x_*[tx + y + 3a_3x_*(x + \lambda y)^2 + a_3(x + \lambda y)^3]^2 + \\ &\quad + a_3[tx + y + 3a_3x_*(x + \lambda y)^2 + a_3(x + \lambda y)^3]^3, \\ &\quad tx + y + 3a_3x_*(x + \lambda y)^2 + a_3(x + \lambda y)^3). \end{aligned}$$

Por fim, seja a mudança de variáveis $\sigma(x, y) = \left(\frac{x}{t}, y\right)$ cuja inversa é dada por $\sigma^{-1}(x, y) = (tx, y)$. Por sua vez, definimos \ddot{C} sendo a conjugação de \dot{C}^2 com σ :

$$\begin{aligned}
\ddot{C}(x, y) &= \sigma^{-1} \circ \dot{C}^2 \circ \sigma(x, y) \\
&= \sigma^{-1} \circ \dot{C}^2(t^{-1}x, y) \\
&= \sigma^{-1}(t^{-1}x + 3a_3x_*(t^{-1}x + \lambda y)^2 + a_3(t^{-1}x + \lambda y)^3 + \\
&\quad + 3a_3x_*[x + y + 3a_3x_*(t^{-1}x + \lambda y)^2 + a_3(t^{-1}x + \lambda y)^3]^2 + \\
&\quad + a_3[x + y + 3a_3x_*(t^{-1}x + \lambda y)^2 + a_3(t^{-1}x + \lambda y)^3]^3, \\
&\quad x + y + 3a_3x_*(t^{-1}x + \lambda y)^2 + a_3(t^{-1}x + \lambda y)^3) \\
&= (x + 3a_3x_*t(t^{-1}x + \lambda y)^2 + a_3t(t^{-1}x + \lambda y)^3 + \\
&\quad + 3a_3x_*t[x + y + 3a_3x_*(t^{-1}x + \lambda y)^2 + a_3(t^{-1}x + \lambda y)^3]^2 + \\
&\quad + a_3t[x + y + 3a_3x_*(t^{-1}x + \lambda y)^2 + a_3(t^{-1}x + \lambda y)^3]^3, \\
&\quad x + y + 3a_3x_*(t^{-1}x + \lambda y)^2 + a_3(t^{-1}x + \lambda y)^3).
\end{aligned}$$

Vemos que a aplicação \ddot{C} está na forma do Sistema (5.1). Portanto, podemos aplicar o Teorema 11. Como o coeficiente do termo y^2 na primeira função-coordenada de \ddot{C} é $c_{02} = 6a_3x_*t$, a aplicação de Hénon cúbica conservativa C será instável no ponto fixo parabólico p sempre que $x_* \neq 0$, ou seja, sempre que p não for a origem.

Podemos ver na Equação (2.4) que $p = (0, 0)$ se, e somente se, $a_0 = 0$ em C . De acordo com as Figuras 2.4 e 2.5, os casos possíveis são: $a_1 \in \{-2, 2\}$. Como $c_{03} = 2a_3t$ em \ddot{C} , pela Proposição 8, a aplicação C será instável em $p = (0, 0)$ quando $a_3t > 0$. Isto significa que C_+ é instável em p quando $(a_1, a_0) = (2, 0)$ e C_- é instável em p quando $(a_1, a_0) = (-2, 0)$. Não podemos aplicar o critério de instabilidade de Levi-Civita nos casos restantes. Porém, as simulações numéricas indicam estabilidade, como podemos ver na Figura C.3, que se encontra na Página 57.

Concluimos, portanto, a análise local da dinâmica das aplicações de Hénon C perto de um ponto fixo parabólico (P). Com isto, encerramos os casos possíveis de pontos fixos para a família estudada, ressalvadas algumas escolhas dos parâmetros.

Conclusão

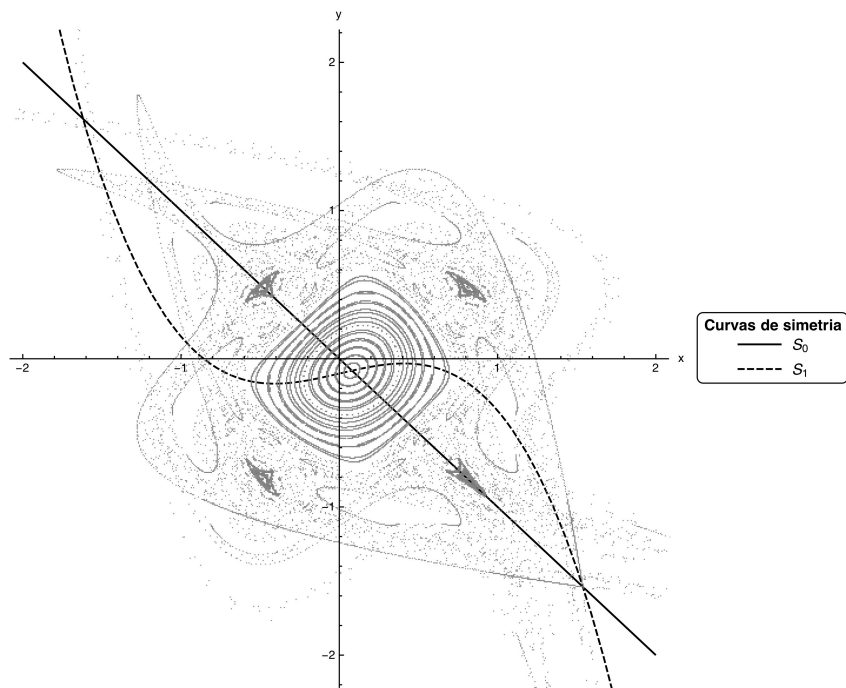
A motivação deste estudo foi o artigo de M. Gonchenko *et al.* [6], que se refere aos aspectos locais e globais da ressonância 1 : 4 da aplicação de Hénon cúbica conservativa. Porém, como este é um artigo mais avançado, optamos pelo nosso estudo ser baseado em [4], que introduz as aplicações de Hénon generalizadas e analisa a estabilidade do caso particular cúbico conservativo em um de seus pontos fixos com autovalor $\lambda = e^{i\alpha}$ onde $\alpha \notin \{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{5}\}$. Ou seja, tais autores estudaram os pontos fixos parabólicos, os elípticos com ressonância 1 : 3 e os não-ressonantes de baixa ordem.

No entanto, achamos interessante estudarmos também os pontos fixos hiperbólicos e hiperbólicos reversos, como foi feito no Capítulo 3. Os enunciados dos Teoremas de Hartman–Grobman e da Variedade Estável juntamente com o corolário deste último foram baseados em [9]. Com o primeiro, provamos a instabilidade dos pontos fixos hiperbólicos de um difeomorfismo arbitrário. Vale ressaltarmos que a referida demonstração não foi retirada de fonte alguma.

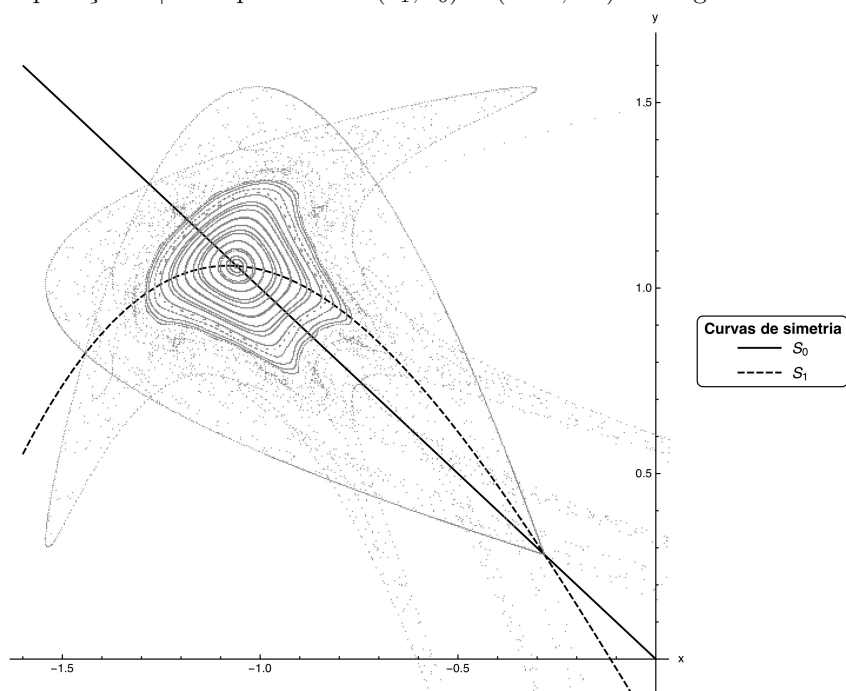
Em seguida, provamos um teorema que garante que se existe um ponto homoclínico, transverso ou não, então existe um número enumerável deles, cuja demonstração também foi baseada em [9]. A prova da existência de pontos homoclínicos para a aplicação de Hénon cúbica conservativa foi baseada em [15], onde foi provada a existência de tais pontos para a aplicação de Hénon tradicional; porém, algumas alterações ocorreram para adequá-la ao caso aqui estudado.

Na Figura C.1, que se encontra na página seguinte, foram representados os espaços de fase de duas aplicações de Hénon cúbicas conservativas perto de dois pontos fixos, um elíptico e outro hiperbólico. Representamos também um dos ramos das variedades estável e instável no ponto fixo hiperbólico. É possível perceber que, de fato, as imagens indicam a existência de vários pontos homoclínicos transversos e, inclusive, alguns deles parecem pertencerem à curva de simetria S_0 , como havíamos observado na demonstração do Teorema 8.

Isso implica na existência de conjuntos tipo ferradura em alguma vizinhança dos pontos fixos hiperbólicos, como vimos na Seção 3.4. Este resultado foi baseado em [14].



(a) Aplicação C_+ com parâmetros $(a_1, a_0) = (-0.5, 0.2)$ na Região $H \prec E \prec H$.



(b) Aplicação C_- com parâmetros $(a_1, a_0) = (3.5, 0.4)$ na Região $E \prec H \prec E$.

Figura C.1: Caso hiperbólico

Para estudarmos os pontos fixos elípticos da aplicação C , preferimos começar pelo caso não-ressonante de baixa ordem, pois assim, poderíamos utilizar o Teorema da Forma Normal de Birkhoff. Portanto, no Capítulo 4, enunciaremos este teorema tendo como base [13]. Para usarmos o referido teorema, tivemos que colocar a aplicação C em uma forma onde a origem fosse o ponto fixo elíptico e a parte linear estivesse na Forma Canônica de Jordan. Isto foi realizado por meio de mudanças sucessivas de variáveis. Em seguida, obtivemos a sua complexificação Z nas variáveis z e \bar{z} , da forma:

$$(z, \bar{z}) \mapsto \lambda(z + g_{2,0}z^2 + g_{1,1}z\bar{z} + g_{0,2}\bar{z}^2 + g_{3,0}z^3 + g_{2,1}z^2\bar{z} + g_{1,2}z\bar{z}^2 + g_{0,3}\bar{z}^3).$$

De acordo com o Teorema da Forma Normal de Birkhoff, existem os coeficientes de twist τ_1 e τ_2 . Mas, para encontrá-los, foi necessário obter um difeomorfismo conservativo H que conjugasse a complexificação da aplicação que estamos trabalhando com a sua Forma Normal de Birkhoff, que chamamos de B :

$$(z, \bar{z}) \mapsto \lambda \left[z + i\tau_1 z^2 \bar{z} + \left(i\tau_2 - \frac{\tau_1^2}{2} \right) z^3 \bar{z}^2 \right] + \mathcal{O}(6).$$

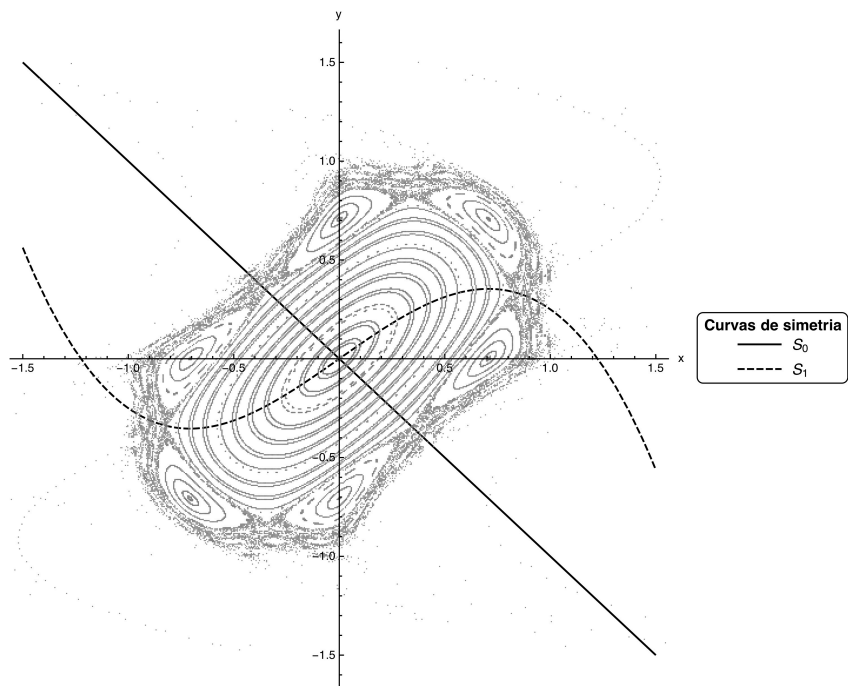
Para obtermos H , utilizamos a composição dos difeomorfismos H_2, H_3, H_4 e H_5 , onde:

$$H_k(z, \bar{z}) = z + \sum_{i+j=k} h_{i,j} z^i \bar{z}^j.$$

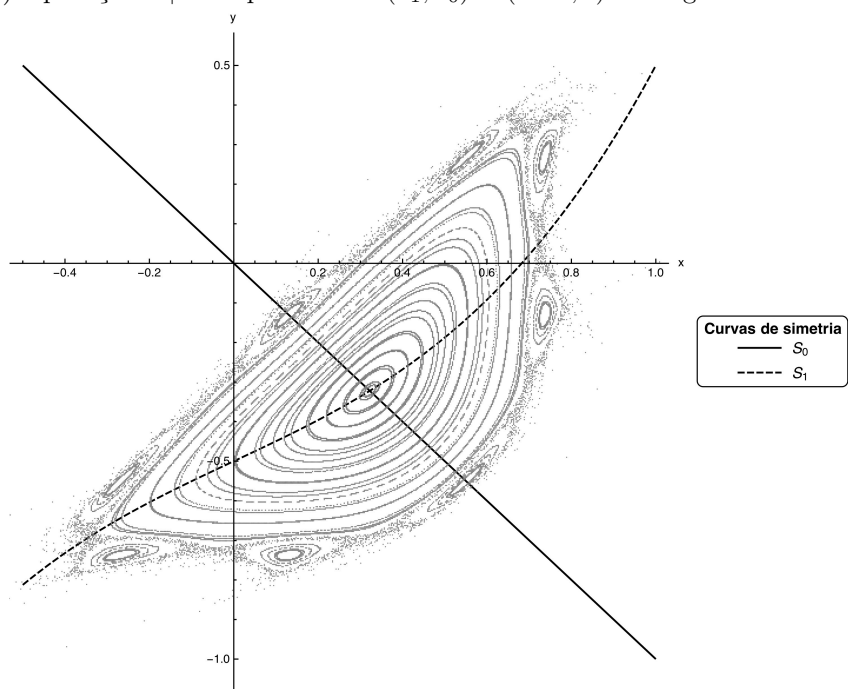
Cada um dos parâmetros $h_{i,j}$ acima foram obtidos de modo a eliminarmos os termos da complexificação Z que não aparecem na Forma Normal de Birkhoff. Com isto, calculamos a expressão $Z(H(z, \bar{z}), \bar{H}(z, \bar{z})) - H(B(z, \bar{z}), \bar{B}(z, \bar{z}))$ até a quinta ordem e igualamos cada termo a 0 para encontrarmos os parâmetros $h_{i,j}$ e os coeficientes de twist τ_1 e τ_2 .

Porém, os resultados obtidos para os coeficientes de twist foram diferentes dos que se encontram em [4] — o que não nos foi satisfatório. Refizemos e conferimos todos os nossos cálculos mas não conseguimos os resultados do artigo mencionado. Enfim, nos convencemos de que os nossos cálculos estavam certos e que, provavelmente, os autores do artigo transcreveram os seus resultados para o texto de forma equivocada, visto que eles não apresentam os passos intermediários de suas contas e nem os códigos computacionais utilizados em seus cálculos.

Apesar disso, chegamos à mesma conclusão: todos os pontos fixos elípticos não-ressonantes até a sexta ordem são estáveis. Foi utilizado, para esta afirmação, o Teorema do Twist de Moser, retirado de [13], pois os coeficientes de twist τ_1 e τ_2 não se anulam simultaneamente em ponto algum dos analisados. Na Figura C.2, apresentada na página seguinte, ilustramos dois casos da aplicação de Hénon cúbica conservativa em torno de um ponto fixo elíptico não-ressonante de baixa ordem. É possível vermos as *ilhas elípticas* e também a *zona estocástica* (ou *zona de instabilidade*) em volta do ponto fixo.



(a) Aplicação C_+ com parâmetros $(a_1, a_0) = (-1.5, 0)$ na Região $H \prec E \prec H$.



(b) Aplicação C_- com parâmetros $(a_1, a_0) = (-1, 1)$ na Região E.

Figura C.2: Caso elíptico não-ressonante de baixa ordem

Para estudarmos os casos ressonantes que não foram analisados no Capítulo 4, optamos por começar com os pontos fixos parabólicos, ou seja, com as ressonâncias $1 : 1$ e $1 : 2$. De fato, se p for um ponto fixo parabólico, então os autovalores da matriz Jacobiana calculada em p serão ambos iguais a $\lambda = \pm 1$. Ora, os números $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$ podem ser vistos como os números complexos $\lambda = e^{i\alpha}$ onde $\alpha = 0$ e $\alpha = \pi$, respectivamente.

Assim, no Capítulo 5, resolvemos utilizar [10], que estabelece um critério para a instabilidade de homeomorfismos analíticos em \mathbb{R}^2 com ponto fixo parabólico na origem:

$$(x, y) \mapsto (f_1(x, y), f_2(x, y)).$$

Com base no trabalho realizado em [10], mostramos que todas as aplicações que satisfazem essas condições e cujo autovalor tem multiplicidade geométrica 1 podem ser escritas na seguinte forma:

$$(x, y) \mapsto (x + f(x, y), x + y + g(x, y)),$$

onde as funções f e g são analíticas em uma vizinhança da origem e só possuem termos de ordem superior à primeira.

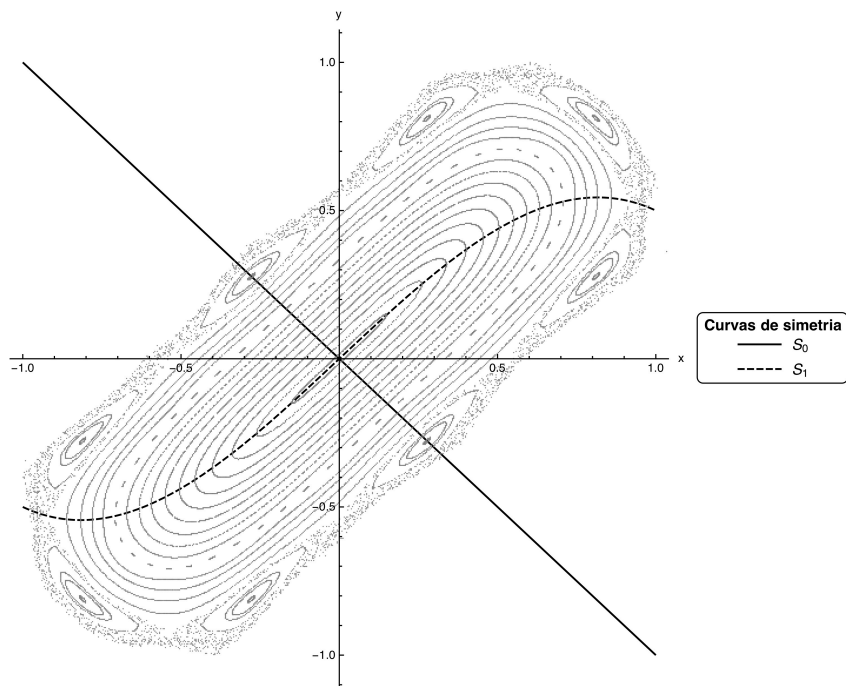
Em seguida, enunciaremos e provamos o Teorema de Levi-Civita que nos diz que se o coeficiente do termo y^2 na função f for não-nulo, então a aplicação será instável na origem. Esta demonstração foi feita com base no artigo original. Apresentamos, também, uma generalização desse resultado que se encontra no mesmo artigo e que garante que a aplicação será instável na origem sempre que o coeficiente do termo y^n na função f for não-nulo (para n par) ou positivo (para n ímpar), onde n é o menor número natural com esta propriedade.

Assim, colocamos a aplicação de Hénon cúbica conservativa na forma dada acima, já que a multiplicidade geométrica do seu autovalor é sempre igual a 1 quando o ponto fixo é parabólico. Com isto, mostramos que a aplicação de Hénon cúbica conservativa é instável em seu ponto fixo parabólico com exceção das aplicações

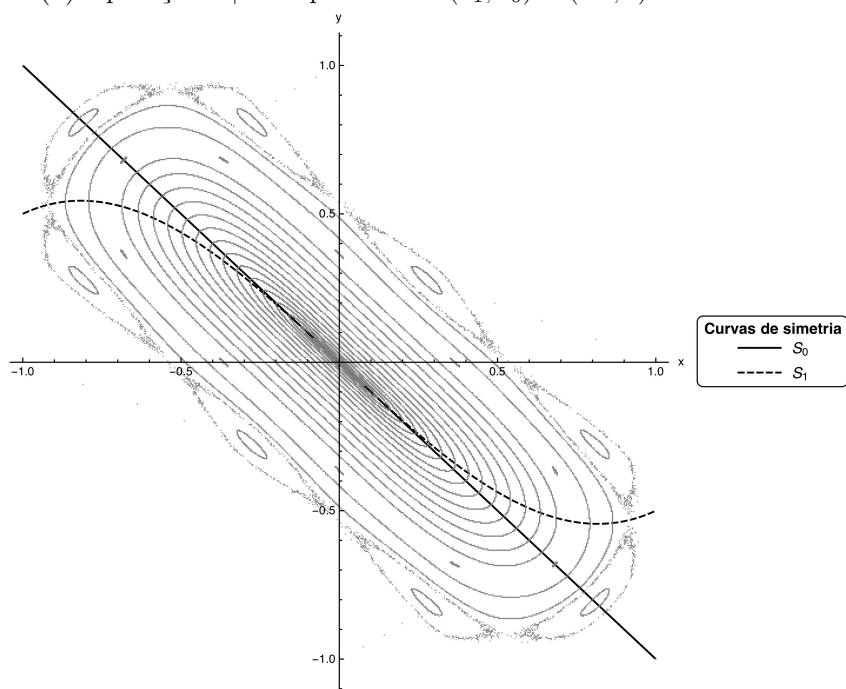
$$\begin{aligned} (x, y) &\mapsto (y + x^3 - 2x, -x); \\ (x, y) &\mapsto (y - x^3 + 2x, -x), \end{aligned}$$

que não são contempladas pelo resultado citado. Portanto, não sabemos se estas duas aplicações são estáveis, instáveis ou mistas.

Na Figura C.3, que se encontra na próxima página, apresentamos os espaços de fase das aplicações de Hénon cúbicas conservativas definidas acima em torno do ponto fixo parabólico $(0, 0)$. É possível notar uma semelhança com as imagens da Figura C.2, apresentada na página anterior, onde o ponto fixo elíptico é estável. Mas, ainda assim, não foi provado analiticamente a estabilidade desses casos.



(a) Aplicação C_+ com parâmetros $(a_1, a_0) = (-2, 0)$ na Curva PD.



(b) Aplicação C_- com parâmetros $(a_1, a_0) = (2, 0)$ na Curva SN.

Figura C.3: Caso parabólico

Entretanto, as ressonâncias $1 : 3$, $1 : 4$, $1 : 5$ e $1 : 6$ restantes não foram analisadas. Porém, explicaremos aqui, sucintamente, como o estudo da estabilidade destes casos pode ser resolvido.

Suponhamos que a aplicação de Hénon cúbica conservativa C tenha um ponto fixo elíptico p tal que os autovalores da matriz Jacobiana de C calculada em p sejam $\lambda = e^{i\alpha}$ e $\bar{\lambda}$, onde $\alpha \in \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{5} \right\}$.

Dessa forma, em todos estes casos, temos $\lambda^n = 1$ mas $\lambda \neq 1, \lambda^2 \neq 1, \dots, \lambda^{n-1} \neq 1$, para algum $n \in \{3, 4, 5, 6\}$. Vale lembrarmos que como p é um ponto fixo de C , vale sempre $C^n(p) = p$, ou seja, p também é um ponto fixo de C^n .

Portanto, p é um ponto fixo parabólico da aplicação C^n . Com efeito, os autovalores da matriz Jacobiana de C^n calculada em p são $\lambda^n = 1$ e $(\bar{\lambda})^n = 1$. Basta, então, aplicarmos o critério de instabilidade que utilizamos no Capítulo 5.

Porém, se alguma das ressonâncias $1 : 5$ e $1 : 6$ não satisfizer as condições do referido critério, poderemos recorrer ao Teorema do Twist de Moser novamente. De fato, nesses casos, existe a Forma Normal de Birkhoff para C com apenas um coeficiente de twist, τ_1 :

$$(z, \bar{z}) \mapsto \lambda(z + i\tau_1 z^2 \bar{z}) + \mathcal{O}(4).$$

Logo, os pontos fixos elípticos p de C com ressonância $1 : 5$ e $1 : 6$ serão estáveis se $\tau_1 \neq 0$. No entanto, assim como no caso em que as ressonâncias $1 : 3$ e $1 : 4$ não satisfazem o critério de instabilidade do Capítulo 5, não poderemos afirmar quanto à estabilidade dos pontos fixos elípticos com ressonância $1 : 5$ e $1 : 6$ se τ_1 for nulo.

Nesses casos, teríamos que utilizar outros métodos, como foi feito em [4] e [6], que estudam as ressonâncias $1 : 3$ e $1 : 4$, respectivamente.

Apêndice A

Resultantes

A Teoria da Eliminação lida com problemas em que precisamos eliminar uma ou mais variáveis em um sistema de equações polinomiais, tornando o problema dado reduzido em relação ao número de variáveis. Para ilustrar, se quisermos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \\ b_1x + b_0 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

onde $a_2 \neq 0 \neq b_1$, podemos eliminar a variável x para obtermos a seguinte expressão:

$$a_0b_1^2 - a_1b_0b_1 + a_2b_0^2 = 0. \quad (\text{A.2})$$

A.1 Definição de resultante

O polinômio do lado esquerdo da Expressão A.2 é chamado de *resultante*. Ele se anula se, e somente se, existir uma solução x do Sistema A.1.

O cálculo do resultante é bastante útil para resolver sistemas polinomiais. Nesta seção, vamos focar em resolver um sistema de dois polinômios $p, q \in \mathbb{R}[x]$, sendo que $\deg p = d$ e $\deg q = e$. Ou seja, consideremos os seguintes polinômios:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_dx^d + \cdots + a_1x + a_0, \\ q(x) &= b_ex^e + \cdots + b_1x + b_0. \end{aligned}$$

Proposição 9. *Existe um único (a menos de sinal) polinômio irredutível $\text{Res}_x(p, q)$ em $\mathbb{Z}[a_0, a_1, \dots, a_d, b_0, b_1, \dots, b_e]$ que se anula sempre que p e q possuírem uma raiz em comum.*

O resultante $\text{Res}_x(p, q)$ pode ser expresso como o determinante da matriz de Sylvester relativa aos polinômios p e q .

$$\text{Res}_x(p, q) = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \vdots & b_1 & b_0 & 0 & \vdots \\ \vdots & a_1 & \ddots & 0 & \vdots & b_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_0 & \vdots & \vdots & \ddots & b_0 \\ a_d & \vdots & \ddots & a_1 & b_e & \vdots & \ddots & b_1 \\ 0 & a_d & \ddots & \vdots & 0 & b_e & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_d & 0 & \cdots & 0 & b_e \end{vmatrix}.$$

Vale observarmos que a matriz de Sylvester tem dimensões $(d+e) \times (d+e)$. Uma forma de mostrarmos esse resultado é dado pela equação matricial a seguir.

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_d & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_d \\ b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_e & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_e & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ \vdots \\ x^d \\ x^{d+1} \\ \vdots \\ x^{d+e-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(x) \\ p(x)x \\ \vdots \\ p(x)x^{e-1} \\ q(x) \\ q(x)x \\ \vdots \\ q(x)x^{d-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Com efeito, o vetor do lado direito da Equação A.3 é nulo se, e somente se, x for uma raiz em comum de p e q . Mas, uma equação matricial $M \cdot \vec{v} = \mathbf{0}$ possui solução \vec{v} não-nula se, e somente se, $\det M = 0$. Com isto, x será uma raiz em comum de p e q sempre que

$$0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_d & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_d \\ b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_e & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_e & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \vdots & b_1 & b_0 & 0 & \vdots \\ \vdots & a_1 & \ddots & 0 & \vdots & b_1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_0 & \vdots & \vdots & \ddots & b_0 \\ a_d & \vdots & \ddots & a_1 & b_e & \vdots & \ddots & b_1 \\ 0 & a_d & \ddots & \vdots & 0 & b_e & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_d & 0 & \cdots & 0 & b_e \end{vmatrix} = \text{Res}_x(p, q).$$

Portanto, podemos utilizar o resultante para estabelecermos uma condição necessária e suficiente que determine quando dois polinômios p e q possuem uma raiz x em comum.

A.2 Raízes múltiplas e discriminantes

Dado um polinômio $p \in \mathbb{R}[x]$ de grau d , é possível utilizarmos a técnica de resultantes para descobrirmos quando p admite uma raiz múltipla.

Sabemos que x é uma raiz múltipla de p se, e somente se, $p(x) = p'(x) = 0$, ou seja, quando x for uma raiz em comum de p e p' . Portanto, basta calcularmos o resultante de p e p' e verificarmos quando ele se anula.

Outra ferramenta da Álgebra é o *discriminante* de um polinômio, cuja definição é a que se segue.

Definição (Discriminante). O discriminante de um polinômio p é o produto dos quadrados das diferenças dois-a-dois entre as raízes de p . O denotamos por $\text{discr}_x p$.

É possível obtermos uma relação entre o discriminante de p e o resultante de p e p' como se segue:

$$\text{discr}_x p = \frac{(-1)^{d-1}}{a_d} \text{Res}_x(p, p'). \quad (\text{A.4})$$

Um polinômio p de grau d possui d raízes distintas se, e somente se, o seu discriminante for não-nulo. Isto reafirma o que dissemos acima sobre a relação entre uma raiz múltipla e o resultante de p e p' .

Vamos verificar essa teoria em um caso bem conhecido: o de um polinômio de 2º grau. Por exemplo, se $p(x) = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$, então $p'(x) = 2ax + b$. Ao substituirmos estas informações na expressão do lado esquerdo da Equação A.2, obtemos o resultante $\text{Res}_x(p, p') = 4a^2c - ab^2$.

Logo, de acordo com a Fórmula A.4, o discriminante de p é dado por

$$\text{discr}_x p = b^2 - 4ac$$

e p admite uma raiz dupla se, e somente se, $b^2 - 4ac$ for nulo — o que já conhecíamos da Fórmula de Bhaskara.

Apêndice B

Códigos computacionais

Neste apêndice, apresentaremos todos os códigos utilizados ao longo do texto, tanto para os cálculos quanto para a geração de figuras.

Os códigos foram escritos na linguagem de programação chamada *Wolfram Language*, desenvolvida para o *software Mathematica*[®].

Todos os códigos estão auto-contidos, ou seja, todos têm a capacidade de exprimir os seus resultados sem a necessidade de outros códigos serem compilados previamente.

Além disso, todos estão comentados para facilitar a compreensão do leitor e fazem referência ao texto, caso seja necessário.

Os códigos serão exibidos a partir da próxima página.

B.1 Complexificação

O objetivo deste *notebook* é complexificar a aplicação de Hénon cúbica conservativa C , ou seja, expandi-la para o espaço \mathbb{C}^2 .

Primeiramente, vamos definir a nossa aplicação como no Capítulo 2 do texto.

```
In[1]:= Henon[a0_, a1_, a3_] [{x_, y_}] := {y + a3 x^3 + a1 x + a0, -x}
```

O primeiro passo é transladarmos a aplicação C para que o seu ponto fixo (x_*, y_*) , que aqui denotaremos por $(\xi, -\xi)$, seja levado para a origem.

Para tanto, sejam a mudança de variáveis ϕ e sua inversa ϕ^{-1} .

```
In[2]:= phi[{x_, y_}] := {x + xi, y - xi}
phiinv[{x_, y_}] := {x - xi, y + xi}
```

Faremos a conjugação de C por ϕ , ou seja, $\phi^{-1} \circ C \circ \phi$.

```
In[4]:= Collect[phiinv[Henon[a0, a1, a3][phi[{x, y}]]], x]
```

```
Out[4]:= {y - 2 xi + a0 + xi a1 + x^3 a3 + 3 x^2 xi a3 + xi^3 a3 + x (a1 + 3 xi^2 a3), -x}
```

Como ξ satisfaz à Equação 2.4 do texto, temos: $a_3 \xi^3 + a_1 \xi + a_0 = 2 \xi$. Além disso, o traço t da matriz Jacobiana de C calculada no ponto fixo é dado por $t = 3 a_3 \xi^2 + a_1$. No caso do ponto fixo ser elíptico, sabemos que $t = 2 \cos(\alpha)$, para algum α no intervalo $(0, \pi)$.

Com estas considerações, podemos redefinir a nossa aplicação. Chamaremos esta nova aplicação de \tilde{C} .

```
In[5]:= Henon1[a3_] [{x_, y_}] := {y + a3 x^3 + 3 a3 xi x^2 + 2 Cos[alpha] x, -x}
```

Para colocarmos a parte linear da aplicação acima, será necessário definirmos a mudança de variáveis ψ e sua inversa ψ^{-1} .

```
In[6]:= psi[{x_, y_}] := {-x Sec[alpha], x + y Tan[alpha]}
psiinv[{x_, y_}] := {-x Cos[alpha], x Cos[alpha] Cot[alpha] + y Cot[alpha]}
```

Fazendo a conjugação de \tilde{C} com ψ , obtemos a aplicação \hat{C} .

```
In[8]:= Collect[psiinv[Henon1[a3][psi[{x, y}]]], {x, y}, Simplify]
```

```
Out[8]:= {x Cos[alpha] - y Sin[alpha] - 3 x^2 xi Sec[alpha] a3 + x^3 Sec[alpha]^2 a3,
y Cos[alpha] + x Sin[alpha] + 3 x^2 xi Csc[alpha] a3 - x^3 Csc[alpha] Sec[alpha] a3}
```

Podemos, então, definirmos as funções X e Y como sendo as funções-coordenadas de \hat{C} .

```
In[9]:= X[x_, y_] := Cos[alpha] x - Sin[alpha] y - 3 xi a3 Sec[alpha] x^2 + a3 Sec[alpha]^2 x^3
Y[x_, y_] := Sin[alpha] x + Cos[alpha] y + 3 xi a3 Csc[alpha] x^2 - a3 Csc[alpha] Sec[alpha] x^3
```

Finalmente, obtemos a complexificação de C nas variáveis z e $w = \bar{z}$.

```
In[11]:= Z[z_, w_] := Collect[X[ $\frac{z+w}{2}$ ,  $\frac{z-w}{2i}$ ] + i Y[ $\frac{z+w}{2}$ ,  $\frac{z-w}{2i}$ ], {z, w}, Simplify]
W[z_, w_] := Collect[X[ $\frac{z+w}{2}$ ,  $\frac{z-w}{2i}$ ] - i Y[ $\frac{z+w}{2}$ ,  $\frac{z-w}{2i}$ ], {z, w}, Simplify]
```

Iremos exibir o resultado da divisão da complexificação Z pelo autovalor $\lambda = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$.

```
In[13]:= Expand[Simplify[ $\frac{Z[z, \bar{z}]}{\text{Cos}[\alpha] + i \text{Sin}[\alpha]}$ ]]
```

```
Out[13]= z +  $\frac{3}{4} i z^2 \xi \text{Csc}[\alpha] \text{Sec}[\alpha] a_3 + \frac{3}{2} i z \xi \text{Csc}[\alpha] \bar{z} \text{Sec}[\alpha] a_3 +$   

 $\frac{3}{4} i \xi \text{Csc}[\alpha] \bar{z}^2 \text{Sec}[\alpha] a_3 - \frac{1}{8} i z^3 \text{Csc}[\alpha] \text{Sec}[\alpha]^2 a_3 -$   

 $\frac{3}{8} i z^2 \text{Csc}[\alpha] \bar{z} \text{Sec}[\alpha]^2 a_3 - \frac{3}{8} i z \text{Csc}[\alpha] \bar{z}^2 \text{Sec}[\alpha]^2 a_3 - \frac{1}{8} i \text{Csc}[\alpha] \bar{z}^3 \text{Sec}[\alpha]^2 a_3$ 
```

B.2 Forma Normal de Birkhoff

O objetivo deste *notebook* é encontrar os coeficientes de twist (de Birkhoff) da aplicação de Hénon cúbica conservativa, C , considerando um ponto fixo elíptico, $(x_*, -x_*)$, não-ressonante até a 6ª ordem, ou seja, se λ é o autovalor com parte imaginária positiva do ponto fixo, então $\lambda^n \neq 1$ para todo $n \in \{1, \dots, 6\}$.

Começaremos definindo o operador `jacobian` que calcula o determinante jacobiano.

```
In[1]:= jacobian[f_, fc_, {var1_, var2_}] :=
  Det[{{D[f, var1], D[f, var2]}, {D[fc, var1], D[fc, var2]}}
```

Conforme vimos, a complexificação da aplicação C tem a seguinte forma:

$$(z, \bar{z}) \mapsto \lambda \left(z + g_{2,0} z^2 + g_{1,1} z \bar{z} + g_{0,2} \bar{z}^2 + g_{3,0} z^3 + g_{2,1} z^2 \bar{z} + g_{1,2} z \bar{z}^2 + g_{0,3} \bar{z}^3 \right) \quad (1)$$

Porém, temos algumas relações entre os coeficientes acima.

$$\begin{aligned} g_{1,1} &= 2 g_{2,0} \\ g_{0,2} &= g_{2,0} \\ g_{2,1} &= 3 g_{3,0} \\ g_{1,2} &= 3 g_{3,0} \\ g_{0,3} &= g_{3,0} \end{aligned} \quad (2)$$

Além disso, já sabemos que os coeficientes $g_{2,0}$ e $g_{3,0}$ são números imaginários puros.

Portanto, chamando $g_{2,0} = a i$ e $g_{3,0} = b i$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, e substituindo as relações (2) na expressão (1), podemos definir a complexificação G .

```
In[2]:= G[z_, w_] := lambda ( z + a i z^2 + 2 a i z w + a i w^2 + b i z^3 + 3 b i z^2 w + 3 b i z w^2 + b i w^3 )
```

De acordo com o Teorema da Forma Normal de Birkhoff, existe uma aplicação H em coordenadas complexas e definida em uma vizinhança do ponto $(z, \bar{z}) = (0, 0)$ tal que $G \circ H = H \circ B$ até a 5ª ordem, onde B é a aplicação Forma Normal de Birkhoff.

Escolheremos a aplicação H sendo a composta das aplicações H_2, H_3, H_4 e H_5 definidas a seguir, junto com as suas conjugadas complexas.

```
In[3]:= H2[z_, w_] := z + h2,0 z^2 + h1,1 z w + h0,2 w^2
H2c[z_, w_] := w + h2,0* w^2 + h1,1* z w + h0,2* z^2
```

```
In[5]:= H3[z_, w_] := z + h3,0 z^3 + h2,1 z^2 w + h1,2 z w^2 + h0,3 w^3
H3c[z_, w_] := w + h3,0* w^3 + h2,1* z w^2 + h1,2* z^2 w + h0,3* z^3
```

```
In[7]:= H4[z_, w_] := z + h4,0 z^4 + h3,1 z^3 w + h2,2 z^2 w^2 + h1,3 z w^3 + h0,4 w^4
H4c[z_, w_] := w + h4,0* w^4 + h3,1* z w^3 + h2,2* z^2 w^2 + h1,3* z^3 w + h0,4* z^4
```

```
In[9]:= H5[z_, w_] := z + h5,0 z^5 + h4,1 z^4 w + h3,2 z^3 w^2 + h2,3 z^2 w^3 + h1,4 z w^4 + h0,5 w^5
H5c[z_, w_] := w + h5,0* w^5 + h4,1* z w^4 + h3,2* z^2 w^3 + h2,3* z^3 w^2 + h1,4* z^4 w + h0,5* z^5
```

Por hipótese, H deve ser conservativa. Isso equivale a dizer que o determinante jacobiano de H

deve valer 1, pelo menos até 4ª ordem.

Calculemos o determinante jacobiano de H :

```
In[11]:= jach = jacobian[H2[H3[H4[H5[z, w], H5c[z, w]], H4c[H5[z, w], H5c[z, w]]],
      H3c[H4[H5[z, w], H5c[z, w]], H4c[H5[z, w], H5c[z, w]]],
      H2c[H3[H4[H5[z, w], H5c[z, w]], H4c[H5[z, w], H5c[z, w]]],
      H3c[H4[H5[z, w], H5c[z, w]], H4c[H5[z, w], H5c[z, w]]], {z, w}];
```

Vale ressaltarmos que o determinante jacobiano acima é um polinômio em $\mathbb{C}[z, \bar{z}]$ de ordem 238.

Vamos estabelecer agora as condições que os coeficientes $h_{i,j}$ devem satisfazer para que o determinante referido seja igual a 1 até 4ª ordem.

De fato, o termo independente do jacobiano é 1.

```
In[12]:= Coefficient[Coefficient[jach, z, 0], w, 0]
```

```
Out[12]:= 1
```

A seguir, obteremos as primeiras condições igualando a zero os coeficientes dos termos de 1ª ordem do jacobiano, ou seja, dos termos z e \bar{z} .

```
In[13]:= conditions1 = Map[Coefficient[Coefficient[jach, z, 1 - #], w, #] == 0 &, {0, 1}]
```

```
Out[13]:= {Conjugate[h1,1] + 2 h2,0 == 0, 2 Conjugate[h2,0] + h1,1 == 0}
```

As próximas condições serão obtidas igualando a zero os coeficientes dos termos z^2 , $z\bar{z}$ e \bar{z}^2 .

```
In[14]:= conditions2 = Map[Coefficient[Coefficient[jach, z, 2 - #], w, #] == 0 &, {0, 1, 2}]
```

```
Out[14]:= {Conjugate[h1,2] - 2 Conjugate[h0,2] h1,1 + 2 Conjugate[h1,1] h2,0 + 3 h3,0 == 0,
      2 Conjugate[h2,1] - 4 Conjugate[h0,2] h0,2 + 4 Conjugate[h2,0] h2,0 + 2 h2,1 == 0,
      3 Conjugate[h3,0] - 2 Conjugate[h1,1] h0,2 + 2 Conjugate[h2,0] h1,1 + h1,2 == 0}
```

Igualaremos a zero os coeficientes dos termos de 3ª ordem e depois simplificaremos as condições encontradas usando as primeiras já calculadas.

```
In[15]:= Map[Coefficient[Coefficient[jach, z, 3 - #], w, #] == 0 &, {0, 1, 2, 3}];
```

```
In[16]:= conditions3 = Simplify[%, Assumptions -> conditions1]
```

```
Out[16]:= {Conjugate[h1,3] + 4 h4,0 == 0, 2 Conjugate[h2,2] + 3 h3,1 == 0,
      3 Conjugate[h3,1] + 2 h2,2 == 0, 4 Conjugate[h4,0] + h1,3 == 0}
```

Por fim, faremos o mesmo procedimento com os termos de 4ª ordem.

```
In[17]:= Map[Coefficient[Coefficient[jach, z, 4 - #], w, #] == 0 &, {0, 1, 2, 3, 4}];
```

In[18]:= **conditions4 = Simplify[%, Assumptions → conditions1]**

Out[18]= {Conjugate[h_{1,4}] + 3 Conjugate[h_{1,2}] h_{3,0} + 5 h_{5,0} ==
 Conjugate[h_{0,3}] (2 h_{1,1} h_{2,0} + 3 h_{2,1}) + 4 h_{2,0}² (Conjugate[h_{1,2}] + 5 h_{3,0}) +
 2 Conjugate[h_{0,2}] (2 Conjugate[h_{0,3}] h_{0,2} + h_{1,1} (Conjugate[h_{1,2}] + 5 h_{3,0})),
 Conjugate[h_{2,3}] + 4 Conjugate[h_{0,3}] h_{0,2} h_{2,0} + 3 Conjugate[h_{2,1}] h_{3,0} + 2 h_{4,1} ==
 Conjugate[h_{0,3}] (h_{1,1}² + 3 h_{1,2}) + 2 Conjugate[h_{0,2}]
 (2 Conjugate[h_{1,2}] h_{0,2} + h_{1,1} (Conjugate[h_{2,1}] + 2 h_{2,1}) + 4 h_{0,2} h_{3,0}) +
 h_{2,0} (4 h_{2,0} (Conjugate[h_{2,1}] + 2 h_{2,1}) + 2 h_{1,1} (Conjugate[h_{1,2}] + 2 h_{3,0})),
 Conjugate[h_{3,2}] + Conjugate[h_{2,1}] h_{2,1} + 3 Conjugate[h_{3,0}] h_{3,0} +
 4 h_{0,2} h_{2,0} (Conjugate[h_{1,2}] + h_{3,0}) + h_{3,2} ==
 3 Conjugate[h_{0,3}] h_{0,3} + Conjugate[h_{1,2}] h_{1,2} + 4 (Conjugate[h_{3,0}] + h_{1,2}) h_{2,0}² +
 2 h_{1,1} h_{2,0} (Conjugate[h_{2,1}] + h_{2,1}) + 2 Conjugate[h_{0,2}]
 (2 Conjugate[h_{2,1}] h_{0,2} + h_{1,1} (Conjugate[h_{3,0}] + h_{1,2}) + 2 h_{0,2} h_{2,1}) +
 h_{1,1}² (Conjugate[h_{1,2}] + h_{3,0}), 2 Conjugate[h_{4,1}] + 3 Conjugate[h_{3,0}] h_{2,1} +
 4 h_{0,2} h_{2,0} (2 Conjugate[h_{2,1}] + h_{2,1}) + h_{2,3} == 3 Conjugate[h_{1,2}] h_{0,3} +
 2 Conjugate[h_{0,2}] (4 Conjugate[h_{3,0}] h_{0,2} + h_{0,3} h_{1,1} + 2 h_{0,2} h_{1,2}) +
 2 h_{1,1} (2 Conjugate[h_{3,0}] + h_{1,2}) h_{2,0} + 4 h_{0,3} h_{2,0}² + h_{1,1}² (2 Conjugate[h_{2,1}] + h_{2,1}),
 5 Conjugate[h_{5,0}] + 3 Conjugate[h_{3,0}] h_{1,2} + h_{1,4} +
 4 h_{0,2} (5 Conjugate[h_{3,0}] + h_{1,2}) h_{2,0} == 3 Conjugate[h_{2,1}] h_{0,3} +
 4 Conjugate[h_{0,2}] h_{0,2} h_{0,3} + h_{1,1}² (5 Conjugate[h_{3,0}] + h_{1,2}) + 2 h_{0,3} h_{1,1} h_{2,0}}

Definiremos agora a aplicação Forma Normal de Birkhoff e a sua complexa conjugada expandidas em Série de Potências em torno do 0 até a 5ª ordem em cada variável.

In[19]:= **B[z_, w_] := Series[λ z e^{i(τ₁ z w + τ₂ z² w²)}, {z, 0, 5}, {w, 0, 5}]**
Bc[z_, w_] := Series[λ* w e^{-i(τ₁ z w + τ₂ z² w²)}, {z, 0, 5}, {w, 0, 5}]

De fato, a aplicação *B* é conservativa:

In[21]:= **Simplify[jacobian[B[z, w], Bc[z, w], {z, w}], Assumptions → {λ* == λ⁻¹}**

Out[21]= (1 + 0 [w]⁵) + 0 [w]⁵ z + 0 [w]⁵ z² + 0 [w]⁵ z³ + 0 [w]⁵ z⁴ + 0 [z]⁵

Iremos utilizar um operador que retorna apenas os termos de um polinômio de duas variáveis até a *n*-ésima ordem.

In[22]:= **orderN[poly_, {var1_, var2_}, n_Integer?NonNegative] :=**
Sum[Coefficient[Coefficient[poly, var1, i - j], var2, j] var1^{i-j} var2^j,
{i, 0, n}, {j, 0, i}]

Conforme o Teorema da Forma Normal de Birkhoff, temos $G \circ H - H \circ B \equiv 0$ até ordem 5. Primeira-

mente, iremos calcular o termo $G \circ H$, passo a passo, computando apenas os termos até a 5ª ordem.

In[23]:= `orderN[G[H2[z, w], H2c[z, w]], {z, w}, 5];`

In[24]:= `orderN[ReplaceAll[%, {z → H3[z, w], w → H3c[z, w]}], {z, w}, 5];`

In[25]:= `orderN[ReplaceAll[%, {z → H4[z, w], w → H4c[z, w]}], {z, w}, 5];`

In[26]:= `Term1 = orderN[ReplaceAll[%, {z → H5[z, w], w → H5c[z, w]}], {z, w}, 5];`

Em seguida, iremos calcular o termo $H \circ B$, também passo a passo, computando apenas os termos até a 5ª ordem.

In[27]:= `orderN[H2[H3[z, w], H3c[z, w]], {z, w}, 5];`

In[28]:= `orderN[ReplaceAll[%, {z → H4[z, w], w → H4c[z, w]}], {z, w}, 5];`

In[29]:= `orderN[ReplaceAll[%, {z → H5[z, w], w → H5c[z, w]}], {z, w}, 5];`

In[30]:= `Term2 = orderN[ReplaceAll[%, {z → B[z, w], w → Bc[z, w]}], {z, w}, 5];`

Faremos agora a subtração dos termos obtidos acima. Queremos que o resultado seja o polinômio identicamente nulo.

In[31]:= `expression = Term1 - Term2;`

Primeiramente, vamos verificar que não há termo independente na nossa expressão.

In[32]:= `Coefficient[Coefficient[expression, z, 0], w, 0]`

Out[32]= 0

Em seguida, verificaremos que os coeficientes dos termos z e \bar{z} são nulos.

In[33]:= `Coefficient[Coefficient[expression, z], w, 0]`

Out[33]= 0

In[34]:= `Coefficient[Coefficient[expression, z, 0], w]`

Out[34]= 0

Os coeficientes dos termos de ordem 2 dependem das constantes $h_{2,0}$, $h_{1,1}$ e $h_{0,2}$.

Assim, acharemos os valores de tais constantes para que os coeficientes sejam nulos.

Primeiramente, o coeficiente do termo z^2 só depende da constante $h_{2,0}$. Portanto, podemos resolver em termo de $h_{2,0}$ a equação formada igualando o coeficiente a zero.

In[35]:= `h20 = Solve[Coefficient[Coefficient[expression, z^2], w, 0] == 0, h2,0][[1, 1]]`

Out[35]= $h_{2,0} \rightarrow \frac{i a}{-1 + \lambda}$

Da mesma forma, encontramos o valor de $h_{1,1}$ igualando o coeficiente de $z\bar{z}$ a zero, já que ele

depende apenas de $h_{1,1}$.

```
In[36]:= h11 = Solve[Simplify[Coefficient[Coefficient[expression, z], w],
Assumptions -> {λ* == λ^-1}] == 0, h1,1] [[1, 1]]
```

```
Out[36]= h1,1 -> - (2 i a λ) / (-1 + λ)
```

Agora, faremos o mesmo com o coeficiente de z^2 para encontramos $h_{0,2}$.

```
In[37]:= Solve[Coefficient[Coefficient[expression, z, 0], w^2] == 0, h0,2] [[1, 1]];
```

```
In[38]:= h02 = Simplify[ReplaceAll[%, {λ* -> λ^-1}]]
```

```
Out[38]= h0,2 -> - (i a λ^3) / (-1 + λ^3)
```

Vamos verificar que os valores encontrados para $h_{2,0}$, $h_{1,1}$ e $h_{0,2}$ satisfazem as condições **conditions1**.

```
In[39]:= Simplify[ReplaceAll[conditions1, {h20, h11}],
Assumptions -> {λ* == λ^-1, a ∈ Reals}]
```

```
Out[39]= {True, True}
```

Encontraremos as constantes $h_{3,0}$, $h_{1,2}$, $h_{0,3}$ e o primeiro coeficiente de twist τ_1 , utilizando as constantes já encontradas que serão substituídas nos cálculos.

Desta forma, o coeficiente do termo z^3 depende da constante $h_{3,0}$, mas também depende de $h_{2,0}$ e $h_{0,2}$.

```
In[40]:= Solve[Coefficient[Coefficient[expression, z^3], w, 0] == 0, h3,0] [[1, 1]];
```

```
In[41]:= Simplify[ReplaceAll[%, {h20, h02}], Assumptions -> {a ∈ Reals}];
```

```
In[42]:= h30 = Simplify[ReplaceAll[%, {λ* -> λ^-1}]]
```

```
Out[42]= h3,0 -> (-2 a^2 λ (1 + λ) + i b (-1 + λ^3)) / ((-1 + λ)^2 (1 + λ) (1 + λ + λ^2))
```

Nos será útil nos cálculos mais avançados termos a expressão do complexo conjugado de algumas constantes.

Aqui temos o valor de $\overline{h_{3,0}}$.

```
In[43]:= h30c = h3,0* -> (-2 a^2 λ* (1 + λ*) - i b ((λ*)^3 - 1)) / ((λ* - 1)^2 (1 + λ*) (1 + λ* + (λ*)^2));
```

Diferentemente, o coeficiente de $z^2 \bar{z}$ não depende de $h_{2,1}$, mas sim de τ_1 e das constantes $h_{2,0}$,

$h_{1,1}$ e $h_{0,2}$.

O valor de $h_{2,1}$ será escolhido convenientemente mais adiante.

```
In[44]:= Solve[Simplify[Coefficient[Coefficient[expression, z^2], w],
Assumptions -> conditions1] == 0, tau1][[1, 1]];
```

```
In[45]:= Simplify[ReplaceAll[%, {h20, h11, h02}], Assumptions -> {a ∈ Reals}];
```

```
In[46]:= tau1 = FullSimplify[ReplaceAll[%, {lambda* -> lambda^-1}]]
```

$$\text{Out[46]= } \tau_1 \rightarrow 3b - \frac{2i a^2 (1 + \lambda) (2 + \lambda + 2\lambda^2)}{-1 + \lambda^3}$$

Agora, o coeficiente do termo $z\bar{z}^2$ depende de $h_{1,2}$ e também de $h_{2,0}$, $h_{1,1}$ e $h_{0,2}$.

```
In[47]:= Solve[Simplify[Coefficient[Coefficient[expression, z], w^2],
Assumptions -> conditions1] == 0, h1,2][[1, 1]];
```

```
In[48]:= Simplify[ReplaceAll[%, {h20, h11, h02}]];
```

```
In[49]:= h12 = FullSimplify[ReplaceAll[%, {lambda* -> lambda^-1}]]
```

$$\text{Out[49]= } h_{1,2} \rightarrow \frac{2a^2(1+\lambda)(2+\lambda+2\lambda^2) + 3ib(-1+\lambda^3)}{1 - \frac{1}{\lambda^2} + \lambda - \lambda^3}$$

Segue o valor de $\overline{h_{1,2}}$.

$$\text{In[50]= } h_{12c} = h_{1,2}^* \rightarrow \frac{2a^2(1+\lambda^*)(2+\lambda^*+2(\lambda^*)^2) - 3ib((\lambda^*)^3-1)}{1-\lambda^2+\lambda^*-(\lambda^*)^3};$$

Concluindo os termos de ordem 3, o coeficiente de \bar{z}^3 depende da constante $h_{0,3}$ e das constantes $h_{2,0}$ e $h_{0,2}$.

```
In[51]:= Solve[Coefficient[Coefficient[expression, z, 0], w^3] == 0, h0,3][[1, 1]];
```

```
In[52]:= Simplify[ReplaceAll[%, {h20, h02}], Assumptions -> {a ∈ Reals}];
```

```
In[53]:= h03 = Simplify[ReplaceAll[%, {lambda* -> lambda^-1}]]
```

$$\text{Out[53]= } h_{0,3} \rightarrow \frac{\lambda^4(2a^2\lambda(1+\lambda) - ib(-1+\lambda^3))}{1-\lambda^3-\lambda^4+\lambda^7}$$

Temos o valor de $\overline{h_{0,3}}$.

$$\text{In[54]= } h_{03c} = h_{0,3}^* \rightarrow \frac{(\lambda^*)^4(2a^2\lambda^*(1+\lambda^*) + ib((\lambda^*)^3-1))}{1-(\lambda^*)^3-(\lambda^*)^4+(\lambda^*)^7};$$

Verificaremos as condições `conditions2` substituindo os valores já encontrados.

In[55]:= **Simplify**[**ReplaceAll**[conditions2, {h20, h11, h02, h30, h30c, h12, h12c}],
Assumptions → {a ∈ Reals}];

In[56]:= **Simplify**[**ReplaceAll**[% , {λ* → λ⁻¹}]]

Out[56]:= {True, 2 $\left(-\frac{2 a^2 \lambda (1 + \lambda)^2 (1 + \lambda^2)}{(-1 + \lambda^3)^2} + \text{Conjugate}[h_{2,1}] + h_{2,1} \right) = 0, \text{True}$ }

Como queremos que a segunda condição acima seja satisfeita, podemos encontrar o valor de $h_{2,1}$. Porém, uma vez que $h_{2,1} \in \mathbb{C}$, temos: $h_{2,1} + \overline{h_{2,1}} = 2 \text{Re}(h_{2,1})$. Assim, a nossa equação somente nos diz o valor da parte real de $h_{2,1}$.

In[57]:= **reh21 = Solve**[**FullSimplify**[%[[2, 1]]] == 0, **Re**[h_{2,1}]] [[1, 1]]

Out[57]:= **Re**[h_{2,1}] → $\frac{a^2 \lambda (1 + \lambda)^2 (1 + \lambda^2)}{(-1 + \lambda^3)^2}$

Analisaremos agora os termos de 4ª ordem de **expression**.

O coeficiente do termo z^4 depende da constante $h_{4,0}$ e das constantes $h_{2,0}$, $h_{1,1}$, $h_{0,2}$, $h_{3,0}$ e $h_{0,3}$ já calculadas e que serão substituídas.

In[58]:= **Solve**[**Simplify**[**Coefficient**[**Coefficient**[expression, z⁴], w, 0],
Assumptions → conditions1] == 0, h_{4,0}] [[1, 1]];

In[59]:= **Simplify**[**ReplaceAll**[% , {h20, h11, h02, h30, h03, h03c}],
Assumptions → {a ∈ Reals}];

In[60]:= **h40 = FullSimplify**[**ReplaceAll**[% , {λ* → λ⁻¹}]]

Out[60]:= **h**_{4,0} → $\frac{1}{(-1 + \lambda^3)^3}$
a (1 + λ) (b (-1 + λ) (1 + λ + λ²) (2 + λ (-1 + 2 λ)) + i a² λ (1 + λ) (4 + λ (3 + 4 λ)))

Segue o valor de $\overline{h_{4,0}}$.

In[61]:= **h40c = h**_{4,0}* → $\frac{1}{(\lambda^*)^3 - 1)^3}$ a (1 + λ*)
(b (λ* - 1) (1 + λ* + (λ*)²) (2 + λ* (2 λ* - 1)) - i a² λ* (1 + λ*) (4 + λ* (3 + 4 λ*)));

Já o coeficiente de $z^3 \bar{z}$ depende de $h_{3,1}$, além de $h_{2,0}$, $h_{1,1}$, $h_{0,2}$, $h_{3,0}$, $h_{1,2}$, $h_{0,3}$ e τ_1 . O valor de τ_1 não será substituído.

In[62]:= **Solve**[**Simplify**[**Coefficient**[**Coefficient**[expression, z³], w],
Assumptions → **Append**[conditions1, λ* == λ⁻¹]] == 0, h_{3,1}] [[1, 1]];

In[63]:= Simplify[ReplaceAll[%, {h20, h11, h02, h30, h12, h12c, h03, h03c}],
Assumptions -> {a ∈ Reals}];

In[64]:= h31 = Simplify[ReplaceAll[%, {λ* -> λ^-1}]]

Out[64]= $h_{3,1} \rightarrow \frac{(2 a (-2 i a^2 (2 + 4 \lambda + 6 \lambda^2 + 6 \lambda^3 + 3 \lambda^4 + \lambda^5) + b (-6 - 5 \lambda - 5 \lambda^2 + 3 \lambda^3 + 5 \lambda^4 + 5 \lambda^5 + 3 \lambda^6) + (-1 + \lambda) \lambda (1 + \lambda + \lambda^2)^2 \tau_1))}{((-1 + \lambda)^3 (1 + \lambda + \lambda^2)^2)}$

Aqui está o valor de $\overline{h_{3,1}}$.

In[65]:= h31c = h3,1* ->

$$\frac{1}{(\lambda^* - 1)^3 (1 + \lambda^* + (\lambda^*)^2)^2} 2 a (2 i a^2 (2 + 4 \lambda^* + 6 (\lambda^*)^2 + 6 (\lambda^*)^3 + 3 (\lambda^*)^4 + (\lambda^*)^5) + b (-6 - 5 \lambda^* - 5 (\lambda^*)^2 + 3 (\lambda^*)^3 + 5 (\lambda^*)^4 + 5 (\lambda^*)^5 + 3 (\lambda^*)^6) + (\lambda^* - 1) \lambda^* (1 + \lambda^* + (\lambda^*)^2)^2 \tau_1);$$

Agora, o coeficiente do termo $z^2 \bar{z}^2$ depende de $h_{2,2}$ e também de $h_{2,0}, h_{1,1}, h_{0,2}$ e $h_{1,2}$ encontradas anteriormente.

In[66]:= Solve[Simplify[Coefficient[Coefficient[expression, z^2], w^2],
Assumptions -> Append[conditions1, λ* == λ^-1]] == 0, h2,2] [[1, 1]]];

In[67]:= Simplify[ReplaceAll[%, {h20, h11, h02, h12, h12c}], Assumptions -> {a ∈ Reals}];

In[68]:= h22 = FullSimplify[ReplaceAll[%, {λ* -> λ^-1}]]

Out[68]= $h_{2,2} \rightarrow \frac{(6 a \lambda (1 + \lambda) (-b (-1 + \lambda) (1 + \lambda + \lambda^2) (3 + \lambda + 3 \lambda^2) + i a^2 (1 + \lambda) (2 + \lambda (2 + \lambda (5 + 2 \lambda (1 + \lambda))))))}{((-1 + \lambda)^3 (1 + \lambda + \lambda^2)^2)}$

Temos o valor de $\overline{h_{2,2}}$.

In[69]:= h22c =

$$h_{2,2}^* \rightarrow (6 a \lambda^* (1 + \lambda^*) (-b (\lambda^* - 1) (1 + \lambda^* + (\lambda^*)^2) (3 + \lambda^* + 3 (\lambda^*)^2) - i a^2 (1 + \lambda^*) (2 + \lambda^* (2 + \lambda^* (5 + 2 \lambda^* (1 + \lambda^*)))))) / ((\lambda^* - 1)^3 (1 + \lambda^* + (\lambda^*)^2)^2);$$

O coeficiente de $z \bar{z}^3$ depende da constante $h_{1,3}$ e das constantes $h_{2,0}, h_{1,1}, h_{0,2}, h_{3,0}, h_{1,2}, h_{0,3}$ e τ_1 . Novamente, o valor de τ_1 não será substituído.

In[70]:= Solve[Simplify[Coefficient[Coefficient[expression, z], w^3],
Assumptions -> Append[conditions1, λ* == λ^-1]] == 0, h1,3] [[1, 1]]];

In[71]:= Simplify[ReplaceAll[%, {h20, h11, h02, h30c, h12, h03}]]];

In[72]:= **h13 = FullSimplify[ReplaceAll[%, {λ* → λ⁻¹}]]**

$$\text{Out[72]= } h_{1,3} \rightarrow \frac{(2 a \lambda^3 (b (1 + \lambda + 2 \lambda^3 - 4 \lambda^4) - 2 i a^2 (1 + \lambda) (2 + \lambda (3 + 4 \lambda)) - (-1 + \lambda) \tau_1))}{((-1 + \lambda)^3 (1 + \lambda + \lambda^2)^2)}$$

Segue o valor de $\overline{h_{1,3}}$.

In[73]:= **h13c =**

$$h_{1,3}^* \rightarrow \frac{(2 a (\lambda^*)^3 (b (1 + \lambda^* + 2 (\lambda^*)^3 - 4 (\lambda^*)^4) + 2 i a^2 (1 + \lambda^*) (2 + \lambda^* (3 + 4 \lambda^*)) - (\lambda^* - 1) \tau_1))}{((\lambda^* - 1)^3 (1 + \lambda^* + (\lambda^*)^2)^2)}$$

Por fim, o coeficiente de z^4 depende de $h_{0,4}$, além de $h_{2,0}, h_{1,1}, h_{0,2}, h_{3,0}$ e $h_{0,3}$.

In[74]:= **Solve[Simplify[Coefficient[Coefficient[expression, z, 0], w⁴] == 0, h_{0,4}] [[1, 1]]];**

In[75]:= **Simplify[ReplaceAll[%, {h20, h11, h02, h30c, h03}], Assumptions → {a ∈ Reals}];**

In[76]:= **h04 = Simplify[ReplaceAll[%, {λ* → λ⁻¹}]]**

$$\text{Out[76]= } h_{0,4} \rightarrow \frac{5 a \lambda^6 (1 + \lambda) (i a^2 \lambda (1 + \lambda) + b (-1 + \lambda^3))}{(-1 + \lambda)^3 (1 + \lambda + \lambda^2)^2 (1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4)}$$

Temos o valor de $\overline{h_{0,4}}$.

$$\text{In[77]= } h_{04c} = h_{0,4}^* \rightarrow \frac{(5 a (\lambda^*)^6 (1 + \lambda^*) (-i a^2 \lambda^* (1 + \lambda^*) + b ((\lambda^*)^3 - 1)))}{((\lambda^* - 1)^3 (1 + \lambda^* + (\lambda^*)^2)^2 (1 + \lambda^* + (\lambda^*)^2 + (\lambda^*)^3 + (\lambda^*)^4))}$$

Podemos verificar as condições **conditions3** com as constantes de ordem 4.

In[78]:= **Simplify[ReplaceAll[conditions3, {h40, h40c, h31, h31c, h22, h22c, h13, h13c}]]];**

In[79]:= **Simplify[ReplaceAll[%, {tau1, λ* → λ⁻¹}]]**

Out[79]= {True, True, True, True}

Finalmente, faremos o mesmo com os termos de 5ª ordem.

O coeficiente de z^5 depende de $h_{5,0}$ e também de $h_{2,0}, h_{1,1}, h_{0,2}, h_{3,0}, h_{0,3}, h_{4,0}$ e $h_{0,4}$.

In[80]:= **Solve[Simplify[Coefficient[Coefficient[expression, z⁵], w, 0], Assumptions → conditions1] == 0, h_{5,0}] [[1, 1]]];**

In[81]:= **Simplify[ReplaceAll[%, {h20, h11, h02, h30, h03c, h40, h04c}], Assumptions → {a ∈ Reals}];**

In[82]:= **h50 = Simplify[ReplaceAll[%, {λ* → λ⁻¹}]]**

$$\text{Out[82]= } h_{5,0} \rightarrow \frac{\left(-3 b^2 \lambda^2 (-1 + \lambda^3)^2 + 2 a^4 \lambda (1 + \lambda)^2 (4 + 7 \lambda + 6 \lambda^2 + 12 \lambda^3 + 6 \lambda^4 + 7 \lambda^5 + 4 \lambda^6) - \right. \\ \left. i a^2 b (-4 - 6 \lambda - \lambda^2 - 6 \lambda^3 - \lambda^4 + \lambda^6 + 6 \lambda^7 + \lambda^8 + 6 \lambda^9 + 4 \lambda^{10}) \right)}{((-1 + \lambda)^4 (1 + \lambda)^2 (1 + \lambda^2)^2 (1 + \lambda + \lambda^2)^2)}$$

Aqui está o valor de $\overline{h_{5,0}}$.

In[83]:= **h50c = h_{5,0}* →**

$$\frac{1}{(\lambda^* - 1)^4 (1 + \lambda^*)^2 (1 + (\lambda^*)^2)^2 (1 + \lambda^* + (\lambda^*)^2)^2} \left(-3 b^2 (\lambda^*)^2 ((\lambda^*)^3 - 1)^2 + 2 a^4 \lambda^* \right. \\ \left. (1 + \lambda^*)^2 (4 + 7 \lambda^* + 6 (\lambda^*)^2 + 12 (\lambda^*)^3 + 6 (\lambda^*)^4 + 7 (\lambda^*)^5 + 4 (\lambda^*)^6) + i a^2 b (-4 - \right. \\ \left. 6 \lambda^* - (\lambda^*)^2 - 6 (\lambda^*)^3 - (\lambda^*)^4 + (\lambda^*)^6 + 6 (\lambda^*)^7 + (\lambda^*)^8 + 6 (\lambda^*)^9 + 4 (\lambda^*)^{10}) \right);$$

Já o coeficiente de $z^4 \bar{z}$ depende da constante $h_{4,1}$ e de todas as constantes até ordem 4 com exceção de $h_{2,2}$. O valor de τ_1 não será substituído. Não obtemos o valor final agora pois ainda não sabemos quanto vale $h_{2,1}$.

In[84]:= **Solve[Simplify[Coefficient[Coefficient[expression, z⁴], w], Assumptions → conditions] == 0, h_{4,1}] [[1, 1]];**

In[85]:= **Simplify[ReplaceAll[%, {h20, h11, h02, h30, h12c, h03c, h40, h31, h13c, h04c}], Assumptions → {a ∈ Reals}];**

In[86]:= **h41 = Simplify[ReplaceAll[%, {λ* → λ⁻¹}]]**

$$\text{Out[86]= } h_{4,1} \rightarrow \frac{\left(-16 a^4 + 36 i a^2 b + 9 b^2 - 56 a^4 \lambda + 92 i a^2 b \lambda + 9 b^2 \lambda - 124 a^4 \lambda^2 + 169 i a^2 b \lambda^2 + 12 b^2 \lambda^2 - \right. \\ \left. 202 a^4 \lambda^3 + 203 i a^2 b \lambda^3 - 15 b^2 \lambda^3 - 244 a^4 \lambda^4 + 160 i a^2 b \lambda^4 - 15 b^2 \lambda^4 - 234 a^4 \lambda^5 + \right. \\ \left. 47 i a^2 b \lambda^5 - 24 b^2 \lambda^5 - 164 a^4 \lambda^6 - 96 i a^2 b \lambda^6 + 3 b^2 \lambda^6 - 62 a^4 \lambda^7 - 179 i a^2 b \lambda^7 + \right. \\ \left. 3 b^2 \lambda^7 + 12 a^4 \lambda^8 - 184 i a^2 b \lambda^8 + 12 b^2 \lambda^8 + 34 a^4 \lambda^9 - 131 i a^2 b \lambda^9 + 3 b^2 \lambda^9 + \right. \\ \left. 24 a^4 \lambda^{10} - 73 i a^2 b \lambda^{10} + 3 b^2 \lambda^{10} + 8 a^4 \lambda^{11} - 32 i a^2 b \lambda^{11} - 12 i a^2 b \lambda^{12} + \right. \\ \left. \lambda^2 (1 + \lambda + \lambda^2)^2 (-1 + \lambda - \lambda^2 + \lambda^3) (3 b (-1 + \lambda^3) - 2 i a^2 (2 + 3 \lambda + 3 \lambda^2 + 2 \lambda^3)) \tau_1 + \right. \\ \left. 3 i (-1 + \lambda^3)^2 (1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3) (2 i a^2 \lambda (1 + \lambda) + b (-1 + \lambda^3)) h_{2,1} \right)}{((-1 + \lambda)^4 (1 + \lambda)^2 (1 + \lambda^2) (1 + \lambda + \lambda^2)^3)}$$

Analogamente ao caso do termo $z^2 \bar{z}$, o coeficiente de $z^3 \bar{z}^2$ não depende de $h_{3,2}$, mas sim do segundo coeficiente de twist τ_2 e de quase todas as constantes até 4ª ordem. As únicas que não serão utilizadas são $h_{4,0}$ e $h_{0,4}$. Novamente, o valor de τ_1 não será substituído.

In[87]:= **Solve**[**Simplify**[**Coefficient**[**Coefficient**[expression, z³], w²],
Assumptions → conditions1] == 0, τ₂][[1, 1]];

In[88]:= **Simplify**[
ReplaceAll[%, {h₂₀, h₁₁, h₀₂, h₃₀, h₁₂, h_{12c}, h_{03c}, h₃₁, h₂₂, h_{22c}, h_{13c}}],
Assumptions → {a ∈ Reals}];

In[89]:= **tau2** = **Simplify**[**ReplaceAll**[%, {λ* → λ⁻¹}]]

Out[89]=
$$\tau_2 \rightarrow \left(i \left(-6 b^2 (-1 + \lambda^3)^2 (6 + 8 \lambda^2 + 3 \lambda^4) + \right. \right. \\ 8 a^4 (1 + \lambda)^2 (10 + 16 \lambda + 51 \lambda^2 + 54 \lambda^3 + 74 \lambda^4 + 50 \lambda^5 + 42 \lambda^6 + 12 \lambda^7 + 6 \lambda^8) + 12 i a^2 \\ b (-14 - 30 \lambda - 57 \lambda^2 - 62 \lambda^3 - 39 \lambda^4 + 6 \lambda^5 + 49 \lambda^6 + 62 \lambda^7 + 51 \lambda^8 + 24 \lambda^9 + 10 \lambda^{10}) - \\ 2 (-1 + \lambda)^2 (1 + 2 \lambda + 3 \lambda^2 + 3 \lambda^3 + 2 \lambda^4 + \lambda^5) \\ \left. (3 i b (-1 + \lambda^3) + a^2 (4 + 6 \lambda + 6 \lambda^2 + 4 \lambda^3)) \text{Conjugate}[h_{2,1}] - \right. \\ \left. (-1 + \lambda)^3 (1 + \lambda + \lambda^2)^2 (1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3) \tau_1^2 - 4 (-1 + \lambda)^2 \right. \\ \left. (1 + 2 \lambda + 3 \lambda^2 + 3 \lambda^3 + 2 \lambda^4 + \lambda^5) (3 i b (-1 + \lambda^3) + a^2 (4 + 6 \lambda + 6 \lambda^2 + 4 \lambda^3)) h_{2,1} + \right. \\ \left. 2 i (-1 + \lambda^4) \tau_1 (-4 a^2 \lambda (1 + \lambda)^2 (1 + \lambda^2) + (-1 + \lambda^3)^2 h_{2,1}) \right) / \\ \left(2 (-1 + \lambda)^3 (1 + \lambda) (1 + \lambda^2) (1 + \lambda + \lambda^2)^2 \right)$$

Ainda não obtivemos o valor de τ₂ pois a expressão acima depende de h_{2,1}.

Sabemos que τ₂ ∈ ℝ, portanto, a sua parte imaginária deve ser nula.

In[90]:= **Simplify**[**ComplexExpand**[**Im**[**tau2**[[2]]], {λ, h_{2,1}}],
Assumptions → {Re[λ]² + Im[λ]² == 1}];

Vamos igualar a zero a parte imaginária de τ₂ e resolver a equação em termo de Im(h_{2,1}). Para isso, usaremos que Re(ζ) = $\frac{\zeta + \bar{\zeta}}{2}$ e Im(ζ) = $\frac{\zeta - \bar{\zeta}}{2i}$ para todo ζ ∈ ℂ, além de que $\bar{\bar{\lambda}} = \lambda$.

In[91]:= **Simplify**[**Solve**[% == 0, Im[h_{2,1}]][[1, 1]]];

In[92]:= **imh21** = **Simplify**[**ReplaceAll**[%, {Re[λ] → $\frac{\lambda^2 + 1}{2 \lambda}$, Im[λ] → $\frac{\lambda^2 - 1}{2 i \lambda}$ }]]]

Out[92]=
$$\text{Im}[h_{2,1}] \rightarrow -\frac{3 b}{2} + \frac{i a^2 (2 + 3 \lambda + 3 \lambda^2 + 2 \lambda^3)}{-1 + \lambda^3} - \frac{\tau_1}{2}$$

Portanto, obtemos o valor de h_{2,1} e de seu complexo conjugado $\overline{h_{2,1}}$.

In[93]:= **h21** = h_{2,1} → reh21[[2]] + i imh21[[2]];
h21c = h_{2,1}* → reh21[[2]] - i imh21[[2]];

Podemos, agora, obter o valor do segundo coeficiente de twist τ₂.

In[95]:= **ReplaceAll**[**tau2**, {h₂₁, h_{21c}}];

In[96]:= **tau2 = Collect[Simplify[%, Assumptions -> {Abs[λ] == 1}], τ₁]**

$$\text{Out[96]= } \tau_2 \rightarrow \frac{1}{2(1+\lambda)(1+\lambda^2)(-1+\lambda^3)^3} \left(-3i b^2 (-1+\lambda)^2 (1+\lambda+\lambda^2)^3 (9+16\lambda^2+9\lambda^4) + 4i a^4 (1+\lambda)^2 (16+38\lambda+122\lambda^2+195\lambda^3+300\lambda^4+308\lambda^5+300\lambda^6+195\lambda^7+122\lambda^8+38\lambda^9+16\lambda^{10}) - 6a^2 b (-24-75\lambda-177\lambda^2-271\lambda^3-302\lambda^4-200\lambda^5+200\lambda^7+302\lambda^8+271\lambda^9+177\lambda^{10}+75\lambda^{11}+24\lambda^{12}) \right) + \frac{3a^2\lambda(1+\lambda)^2(1+\lambda^2)\tau_1}{(-1+\lambda^3)^2}$$

Vamos verificar que, de fato, τ₂ é um número real calculando a sua parte imaginária.

In[97]:= **Simplify[ComplexExpand[Im[tau2[[2]]], λ], Assumptions -> {Re[λ]^2 + Im[λ]^2 == 1}]**

Out[97]= 0

Como encontramos um valor para h_{2,1}, podemos voltar um pouco e exibir quanto vale h_{4,1}.

In[98]:= **h41 = Simplify[ReplaceAll[h41, {h21}]]**

$$\text{Out[98]= } h_{4,1} \rightarrow \left(3b^2(-1+\lambda)^2(1+\lambda+\lambda^2)^3(3+2\lambda^2+3\lambda^4) + 8a^4(1+\lambda)^2(-4-9\lambda-21\lambda^2-25\lambda^3-26\lambda^4-16\lambda^5-4\lambda^6+7\lambda^7+5\lambda^8+5\lambda^9) - 2ia^2b(-30-83\lambda-154\lambda^2-188\lambda^3-148\lambda^4-41\lambda^5+84\lambda^6+161\lambda^7+160\lambda^8+116\lambda^9+70\lambda^{10}+35\lambda^{11}+18\lambda^{12}) + (1+\lambda+\lambda^2)^2(-1+\lambda-\lambda^2+\lambda^3) \right. \\ \left. (-2ia^2\lambda(3+7\lambda+3\lambda^2+3\lambda^3+4\lambda^4) + b(3-9\lambda^2-3\lambda^3+9\lambda^5))\tau_1 \right) / \left(2(-1+\lambda)^4(1+\lambda)^2(1+\lambda^2)(1+\lambda+\lambda^2)^3 \right)$$

Segue o valor de $\overline{h_{4,1}}$.

$$\text{In[99]= } h_{41c} = h_{4,1}^* \rightarrow \frac{1}{2(\lambda^*-1)^4(1+\lambda^*)^2(1+(\lambda^*)^2)(1+\lambda^*+(\lambda^*)^2)^3} \left(3b^2(\lambda^*-1)^2(1+\lambda^*+(\lambda^*)^2)^3(3+2(\lambda^*)^2+3(\lambda^*)^4) + 8a^4(1+\lambda^*)^2(-4-9\lambda^*-21(\lambda^*)^2-25(\lambda^*)^3-26(\lambda^*)^4-16(\lambda^*)^5-4(\lambda^*)^6+7(\lambda^*)^7+5(\lambda^*)^8+5(\lambda^*)^9) + 2ia^2b(-30-83\lambda^*-154(\lambda^*)^2-188(\lambda^*)^3-148(\lambda^*)^4-41(\lambda^*)^5+84(\lambda^*)^6+161(\lambda^*)^7+160(\lambda^*)^8+116(\lambda^*)^9+70(\lambda^*)^{10}+35(\lambda^*)^{11}+18(\lambda^*)^{12}) + (1+\lambda^*+(\lambda^*)^2)^2(-1+\lambda^*-(\lambda^*)^2+(\lambda^*)^3) \right. \\ \left. (2ia^2\lambda^*(3+7\lambda^*+3(\lambda^*)^2+3(\lambda^*)^3+4(\lambda^*)^4) + b(3-9(\lambda^*)^2-3(\lambda^*)^3+9(\lambda^*)^5))\tau_1 \right);$$

Continuando a nossa análise, o coeficiente do termo $z^2 \bar{z}^3$ depende de h_{2,3}, além de quase todas as constantes até a 4ª ordem. As únicas que não serão utilizadas são h_{4,0} e h_{0,4}. O valor de τ₁ não

será substituído.

```
In[100]:= Simplify[Solve[Coefficient[Coefficient[expression, z^2], w^3] == 0, h2,3],
Assumptions -> conditions1][[1, 1]];
```

```
In[101]:= Simplify[ReplaceAll[%, {h20, h11, h02, h30c, h21, h21c, h12,
h12c, h03, h31c, h22, h22c, h13}], Assumptions -> {a ∈ Reals}];
```

```
In[102]:= h23 = Simplify[ReplaceAll[%, {λ* -> λ^-1}]]
```

$$\text{Out[102]= } h_{2,3} \rightarrow \frac{\left(\lambda^2 \left(-3 b^2 (-1 + \lambda)^2 (1 + \lambda + \lambda^2)^3 (9 + 16 \lambda^2 + 9 \lambda^4) + 4 a^4 (1 + \lambda)^2 \right. \right. \\ \left. \left(4 - 26 \lambda - 52 \lambda^2 - 137 \lambda^3 - 166 \lambda^4 - 192 \lambda^5 - 122 \lambda^6 - 73 \lambda^7 + 2 \lambda^9 + 12 \lambda^{10} \right) + \right. \\ \left. 6 i a^2 b \left(-16 - 31 \lambda - 65 \lambda^2 - 91 \lambda^3 - 110 \lambda^4 - 88 \lambda^5 - 28 \lambda^6 + 48 \lambda^7 + 106 \lambda^8 + \right. \right. \\ \left. \left. 115 \lambda^9 + 93 \lambda^{10} + 47 \lambda^{11} + 20 \lambda^{12} \right) + (1 + \lambda + \lambda^2)^2 (-1 + \lambda - \lambda^2 + \lambda^3) \right. \\ \left. \left(3 b (3 - \lambda^2 - 3 \lambda^3 + \lambda^5) - 2 i a^2 (-10 - 21 \lambda - 19 \lambda^2 - 7 \lambda^3 + 3 \lambda^4 + 2 \lambda^5) \right) \tau_1 \right) \Big/ \\ \left(2 (-1 + \lambda)^4 (1 + \lambda)^2 (1 + \lambda^2) (1 + \lambda + \lambda^2)^3 \right)$$

Temos o valor de $\overline{h_{2,3}}$.

```
In[103]:= h23c = h2,3* -> 
$$\frac{1}{2 (\lambda^* - 1)^4 (1 + \lambda^*)^2 (1 + (\lambda^*)^2) (1 + \lambda^* + (\lambda^*)^2)^3} \\ \left( (\lambda^*)^2 \left( -3 b^2 (\lambda^* - 1)^2 (1 + \lambda^* + (\lambda^*)^2)^3 (9 + 16 (\lambda^*)^2 + 9 (\lambda^*)^4) + \right. \right. \\ \left. \left. 4 a^4 (1 + \lambda^*)^2 \left( 4 - 26 \lambda^* - 52 (\lambda^*)^2 - 137 (\lambda^*)^3 - 166 (\lambda^*)^4 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. 192 (\lambda^*)^5 - 122 (\lambda^*)^6 - 73 (\lambda^*)^7 + 2 (\lambda^*)^9 + 12 (\lambda^*)^{10} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. 6 i a^2 b \left( -16 - 31 \lambda^* - 65 (\lambda^*)^2 - 91 (\lambda^*)^3 - 110 (\lambda^*)^4 - 88 (\lambda^*)^5 - 28 (\lambda^*)^6 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. 48 (\lambda^*)^7 + 106 (\lambda^*)^8 + 115 (\lambda^*)^9 + 93 (\lambda^*)^{10} + 47 (\lambda^*)^{11} + 20 (\lambda^*)^{12} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. (1 + \lambda^* + (\lambda^*)^2)^2 (-1 + \lambda^* - (\lambda^*)^2 + (\lambda^*)^3) \left( 3 b (3 - (\lambda^*)^2 - 3 (\lambda^*)^3 + (\lambda^*)^5) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. 2 i a^2 (-10 - 21 \lambda^* - 19 (\lambda^*)^2 - 7 (\lambda^*)^3 + 3 (\lambda^*)^4 + 2 (\lambda^*)^5) \right) \tau_1 \right) \Big/;$$

```

Já o coeficiente de $z\bar{z}^4$ depende de $h_{1,4}$ e de todas as constantes até ordem 4 com exceção de $h_{2,2}$. O valor de τ_1 não será substituído.

```
In[104]:= Simplify[Solve[Coefficient[Coefficient[expression, z], w^4] == 0, h1,4],
Assumptions -> conditions1][[1, 1]];
```

```
In[105]:= Simplify[
ReplaceAll[%, {h20, h11, h02, h30c, h21c, h12, h03, h40c, h31c, h13, h04}],
Assumptions -> {a ∈ Reals}];
```


In[106]:= **h14 = Simplify[ReplaceAll[%, {λ* → λ⁻¹}]]**

Out[106]= **h_{1,4} →**

$$\left(\lambda^4 \left(-3 b^2 (-1 + \lambda)^2 (1 + \lambda + \lambda^2)^3 (3 + 2 \lambda^2 + 3 \lambda^4) + 4 a^4 (1 + \lambda)^2 (8 + 22 \lambda + 71 \lambda^2 + 130 \lambda^3 + 195 \lambda^4 + 220 \lambda^5 + 195 \lambda^6 + 130 \lambda^7 + 71 \lambda^8 + 22 \lambda^9 + 8 \lambda^{10}) + 2 i a^2 b (-18 - 17 \lambda + 8 \lambda^2 + 58 \lambda^3 + 92 \lambda^4 + 67 \lambda^5 - 67 \lambda^7 - 92 \lambda^8 - 58 \lambda^9 - 8 \lambda^{10} + 17 \lambda^{11} + 18 \lambda^{12}) + 3 (1 + \lambda + \lambda^2)^2 (3 - 3 \lambda - \lambda^4 + \lambda^5) (2 i a^2 \lambda (1 + \lambda) + b (-1 + \lambda^3)) \tau_1 \right) \right) / \left(2 (-1 + \lambda)^4 (1 + \lambda)^2 (1 + \lambda^2)^2 (1 + \lambda + \lambda^2)^3 \right)$$

Aqui está o valor de $\overline{h_{1,4}}$.

In[107]:= **h14c = h_{1,4}* →**
$$\frac{1}{2 (\lambda^* - 1)^4 (1 + \lambda^*)^2 (1 + (\lambda^*)^2)^2 (1 + \lambda^* + (\lambda^*)^2)^3}$$

$$\left((\lambda^*)^4 \left(-3 b^2 (\lambda^* - 1)^2 (1 + \lambda^* + (\lambda^*)^2)^3 (3 + 2 (\lambda^*)^2 + 3 (\lambda^*)^4) + 4 a^4 (1 + \lambda^*)^2 (8 + 22 \lambda^* + 71 (\lambda^*)^2 + 130 (\lambda^*)^3 + 195 (\lambda^*)^4 + 220 (\lambda^*)^5 + 195 (\lambda^*)^6 + 130 (\lambda^*)^7 + 71 (\lambda^*)^8 + 22 (\lambda^*)^9 + 8 (\lambda^*)^{10}) - 2 i a^2 b (-18 - 17 \lambda^* + 8 (\lambda^*)^2 + 58 (\lambda^*)^3 + 92 (\lambda^*)^4 + 67 (\lambda^*)^5 - 67 (\lambda^*)^7 - 92 (\lambda^*)^8 - 58 (\lambda^*)^9 - 8 (\lambda^*)^{10} + 17 (\lambda^*)^{11} + 18 (\lambda^*)^{12}) + 3 (1 + \lambda^* + (\lambda^*)^2)^2 (3 - 3 \lambda^* - (\lambda^*)^4 + (\lambda^*)^5) (-2 i a^2 \lambda^* (1 + \lambda^*) + b ((\lambda^*)^3 - 1)) \tau_1 \right) \right);$$

Finalmente, o coeficiente de z^5 depende de $h_{0,5}$ e também de $h_{2,0}, h_{1,1}, h_{0,2}, h_{3,0}, h_{0,3}, h_{4,0}$ e $h_{0,4}$.

In[108]:= **Simplify[Solve[Coefficient[Coefficient[expression, z, 0], w⁵] == 0, h_{0,5}], Assumptions → conditions1][[1, 1]];**

In[109]:= **Simplify[ReplaceAll[%, {h20, h11, h02, h30c, h03, h40c, h04}]];**

In[110]:= **h05 = Simplify[ReplaceAll[%, {λ* → λ⁻¹}]]**

Out[110]= **h_{0,5} →**

$$\left(\lambda^6 \left(3 b^2 (-1 + \lambda)^2 \lambda^2 (1 + \lambda + \lambda^2)^3 - 2 a^4 \lambda (1 + \lambda)^2 (4 + 12 \lambda + 21 \lambda^2 + 32 \lambda^3 + 32 \lambda^4 + 32 \lambda^5 + 21 \lambda^6 + 12 \lambda^7 + 4 \lambda^8) + i a^2 b (-4 - 16 \lambda - 41 \lambda^2 - 79 \lambda^3 - 92 \lambda^4 - 67 \lambda^5 + 67 \lambda^7 + 92 \lambda^8 + 79 \lambda^9 + 41 \lambda^{10} + 16 \lambda^{11} + 4 \lambda^{12}) \right) \right) / \left((1 + \lambda)^2 (1 + \lambda^2) (1 - \lambda + \lambda^2) (-1 + \lambda^3)^4 \right)$$

Segue o valor de $\overline{h_{0,5}}$.

$$\text{In[111]:= } h_{05c} = h_{0,5^*} \rightarrow \frac{1}{(1 + \lambda^*)^2 (1 + (\lambda^*)^2) (1 - \lambda^* + (\lambda^*)^2) ((\lambda^*)^3 - 1)^4} \\ \left((\lambda^*)^6 \left(3 b^2 (\lambda^* - 1)^2 (\lambda^*)^2 (1 + \lambda^* + (\lambda^*)^2)^3 - 2 a^4 \lambda^* (1 + \lambda^*)^2 (4 + 12 \lambda^* + 21 (\lambda^*)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. 32 (\lambda^*)^3 + 32 (\lambda^*)^4 + 32 (\lambda^*)^5 + 21 (\lambda^*)^6 + 12 (\lambda^*)^7 + 4 (\lambda^*)^8) - \right. \right. \\ \left. \left. i a^2 b (-4 - 16 \lambda^* - 41 (\lambda^*)^2 - 79 (\lambda^*)^3 - 92 (\lambda^*)^4 - 67 (\lambda^*)^5 + 67 (\lambda^*)^7 + \right. \right. \\ \left. \left. 92 (\lambda^*)^8 + 79 (\lambda^*)^9 + 41 (\lambda^*)^{10} + 16 (\lambda^*)^{11} + 4 (\lambda^*)^{12}) \right) \right);$$

Para confirmarmos que a aplicação H tomada é realmente conservativa, nos falta verificarmos as condições `conditions4`.

$$\text{In[112]:= } \text{ReplaceAll}[\text{conditions4}, \{h_{20}, h_{11}, h_{02}, h_{30}, h_{30c}, h_{21}, h_{21c}, h_{12}, h_{12c}, \\ h_{03}, h_{03c}, h_{50}, h_{50c}, h_{41}, h_{41c}, h_{23}, h_{23c}, h_{14}, h_{14c}, h_{05}, h_{05c}\}];$$

$$\text{In[113]:= } \text{Simplify}[\text{ReplaceAll}[\%, \{\text{tau1}, \lambda^* \rightarrow \lambda^{-1}\}], \text{Assumptions} \rightarrow \{a \in \text{Reals}\}]$$

$$\text{Out[113]= } \left\{ \text{True}, \text{True}, \text{Conjugate}[h_{3,2}] + h_{3,2} = \frac{1}{(1 + \lambda)^2 (1 + \lambda^2)^2 (-1 + \lambda^3)^4} \right. \\ \left(-3 b^2 (-1 + \lambda)^2 (1 + \lambda + \lambda^2)^4 (3 + 2 \lambda^2 - \lambda^4 + 2 \lambda^6 + 3 \lambda^8) + 4 i a^2 b (1 + \lambda + \lambda^2)^3 \right. \\ \left(-6 - 3 \lambda - 10 \lambda^2 - 11 \lambda^3 - 2 \lambda^4 - 5 \lambda^5 + 5 \lambda^7 + 2 \lambda^8 + 11 \lambda^9 + 10 \lambda^{10} + 3 \lambda^{11} + 6 \lambda^{12} \right) + \\ a^4 (1 + \lambda)^2 (16 + 48 \lambda + 171 \lambda^2 + 404 \lambda^3 + 858 \lambda^4 + 1476 \lambda^5 + 2201 \lambda^6 + \\ 2768 \lambda^7 + 3008 \lambda^8 + 2768 \lambda^9 + 2201 \lambda^{10} + 1476 \lambda^{11} + 858 \lambda^{12} + \\ \left. 404 \lambda^{13} + 171 \lambda^{14} + 48 \lambda^{15} + 16 \lambda^{16}) \right), \text{True}, \text{True} \left. \right\}$$

Como podemos ver acima, todas as condições são satisfeitas a menos de uma que depende da constante $h_{3,2}$ que não foi estabelecida ainda. Porém, é possível escolhermos o seu valor de tal forma que a referida condição também seja satisfeita.

Portanto, concluímos que H é conservativa e $H^{-1} \circ G \circ H = B$ onde os valores dos coeficientes de twist τ_1 e τ_2 foram exibidos acima.

B.3 Estudo da Estabilidade

Neste *notebook*, faremos o estudo da estabilidade da aplicação de Hénon cúbica conservativa C nos seus pontos fixos elípticos não-ressonantes de baixa ordem, como no *notebook* anterior.

Vamos começar retomando os valores dos coeficientes de twist τ_1 e τ_2 da Forma Normal de Birkhoff de C calculados no *notebook* anterior.

$$\text{In[1]:= } \tau_1 \rightarrow 3b - \frac{2i a^2 (\lambda + 1) (2\lambda^2 + \lambda + 2)}{\lambda^3 - 1};$$

$\tau_2 =$

$$\tau_2 \rightarrow \frac{1}{2(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)(\lambda^3 - 1)^3} \left(-3i b^2 (\lambda - 1)^2 (\lambda^2 + \lambda + 1)^3 (9\lambda^4 + 16\lambda^2 + 9) + 4i a^4 (\lambda + 1)^2 (16\lambda^{10} + 38\lambda^9 + 122\lambda^8 + 195\lambda^7 + 300\lambda^6 + 308\lambda^5 + 300\lambda^4 + 195\lambda^3 + 122\lambda^2 + 38\lambda + 16) - 6a^2 b (24\lambda^{12} + 75\lambda^{11} + 177\lambda^{10} + 271\lambda^9 + 302\lambda^8 + 200\lambda^7 - 200\lambda^5 - 302\lambda^4 - 271\lambda^3 - 177\lambda^2 - 75\lambda - 24) \right) + \frac{3a^2 \lambda (\lambda + 1)^2 (\lambda^2 + 1) \tau_1}{(\lambda^3 - 1)^2};$$

Agora, substituiremos os valores de a e b (como podemos ver no *notebook* “Complexificação”) na expressão de τ_1 .

$$\text{In[3]:= } \text{FullSimplify}\left[\text{ReplaceAll}\left[\tau_1, \left\{a \rightarrow \frac{3}{4} \xi \text{Csc}[\alpha] \text{Sec}[\alpha] a_3, b \rightarrow -\frac{1}{8} \text{Csc}[\alpha] \text{Sec}[\alpha]^2 a_3, \lambda \rightarrow \text{Cos}[\alpha] + i \text{Sin}[\alpha]\right\}\right]\right]$$

$$\text{Out[3]:= } \tau_1 \rightarrow -\frac{3 \text{Csc}\left[\frac{\alpha}{2}\right]^3 \text{Sec}\left[\frac{\alpha}{2}\right] \text{Sec}[\alpha] a_3 (1 - 2 \text{Cos}[\alpha] + \text{Sec}[\alpha] + 3 \xi^2 (4 + \text{Sec}[\alpha]) a_3)}{32 + 64 \text{Cos}[\alpha]}$$

Por fim, temos o valor de τ_1 com relação aos coeficientes a_1 e a_3 da aplicação C e o valor da primeira coordenada do ponto fixo elíptico de C . Aqui, utilizamos que $t = 3a_3 \xi^2 + a_1$ e que $t = 2 \cos(\alpha)$.

$$\text{In[4]:= } \text{newtau1} = \text{FullSimplify}\left[\text{ReplaceAll}\left[\%, \left\{\alpha \rightarrow \text{ArcCos}\left[\frac{3a_3 \xi^2 + a_1}{2}\right]\right\}\right], \text{Assumptions} \rightarrow \{\xi \in \text{Reals}, a_1 \in \text{Reals}, a_3 \in \text{Reals}, a_3^2 == 1\}\right]$$

$$\text{Out[4]:= } \tau_1 \rightarrow -\frac{3(3\xi^2(3 + 2a_1) + (2 + 27\xi^4 + a_1 - a_1^2)a_3)}{(2 - a_1 - 3\xi^2 a_3)^{3/2} (a_1 + 3\xi^2 a_3)^2 (1 + a_1 + 3\xi^2 a_3) \sqrt{2 + a_1 + 3\xi^2 a_3}}$$

Para a nossa análise, precisaremos definir os polinômios g_0 e r_0 , conforme o Capítulo 2 do texto.

$$\text{In[5]:= } \text{PolyG0}[a3_][x_]:= a_0 + x(a_1 - 2) + a_3 x^3$$

$$\text{PolyR0}[a3_][t_]:= \text{Simplify}\left[\text{Resultant}\left[\text{PolyG0}[a3][x], 3a_3 x^2 + a_1 - t, x\right]\right]$$

Vamos definir o polinômio g_1 como o numerador da expressão de τ_1 . Definiremos, também, o

polinômio r_1 sendo o resultante de g_1 e g_0 .

```
In[7]:= PolyG1[a3_][x_] := 3 x^2 (3 + 2 a1) + a3 (2 + 27 x^4 + a1 - a1^2)
PolyR1[a3_] :=
Simplify[Resultant[PolyG1[a3][x], PolyG0[a3][x], x], Assumptions -> {a3^2 == 1}]
```

Vamos exibir o resultante r_1 .

```
In[9]:= PolyR1[a3]
Out[9]:= 27 a0^2 (837 - 63 a1 - 108 a1^2 + 8 a1^3) + 19 683 a0^4 a3 - 16 (16 - 5 a1)^2 (-2 + a1)^3 (1 + a1) a3
```

Faremos o mesmo procedimento com o coeficiente de twist τ_2 .

Primeiramente, substituiremos os valores de a e b .

```
In[10]:= Collect[
Simplify[ReplaceAll[tau2, {a -> 3/4 xi Csc[alpha] Sec[alpha] a3, b -> -1/8 Csc[alpha] Sec[alpha]^2 a3,
lambda -> Cos[alpha] + i Sin[alpha]}], Assumptions -> {a3^2 == 1}], tau1]
```

```
Out[10]:= tau2 -> - 1 / (32 768 (1 + 2 Cos[alpha])^3)
3 Csc[alpha/2]^7 Sec[alpha/2]^3 Sec[alpha]^5 (-27 + 16 632 xi^4 + 75 Cos[alpha] + 32 400 xi^4 Cos[alpha] -
57 Cos[2 alpha] + 21 060 xi^4 Cos[2 alpha] + 36 Cos[3 alpha] + 13 176 xi^4 Cos[3 alpha] - 43 Cos[4 alpha] +
4104 xi^4 Cos[4 alpha] + 16 Cos[5 alpha] + 1728 xi^4 Cos[5 alpha] - 9 Cos[6 alpha] + 9 Cos[7 alpha] + 72 xi^2
(273 + 503 Cos[alpha] + 346 Cos[2 alpha] + 201 Cos[3 alpha] + 75 Cos[4 alpha] + 24 Cos[5 alpha])
Sin[alpha/2]^2 a3) - (27 xi^2 Csc[alpha/2]^7 Sec[alpha/2]^3 Sin[alpha]^2 tau1 Tan[alpha]) / (256 (1 + 2 Cos[alpha])^2)
```

Agora, faremos a substituição de α por $\arccos\left(\frac{3a_3\xi^2+a_1}{2}\right)$ por partes. Primeiro, o termo que não depende de τ_1 .

```
In[11]:= part1 =
FullSimplify[ReplaceAll[Coefficient[%, {2}], tau1, 0], {alpha -> ArcCos[3 a3 xi^2 + a1 / 2]}],
Assumptions -> {xi in Reals, a1 in Reals, a3 in Reals, a3^2 == 1}];
```

Depois, o termo que depende de τ_1 .

```
In[12]:= part2 =
FullSimplify[ReplaceAll[Coefficient[%, {2}], tau1], {alpha -> ArcCos[3 a3 xi^2 + a1 / 2]}],
Assumptions -> {xi in Reals, a1 in Reals, a3 in Reals, a3^2 == 1}];
```

Podemos, então, juntar as partes.

In[13]:= $\tau_2 \rightarrow \text{part1} + \text{part2} \tau_1$

Out[13]:= $\tau_2 \rightarrow$

$$\begin{aligned} & - \left(\left(3 \left(-8 + 9 \xi^4 \left(178 + 11\,007 \xi^4 + 23\,085 \xi^8 \right) + a_1 \left(-16 + 81 \xi^4 \left(2 + \xi^4 \right) \left(71 + 1431 \xi^4 \right) + a_1 \right. \right. \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. \left. \left(34 + 24\,030 \xi^4 + 79\,461 \xi^8 + a_1 \left(82 + 15\,210 \xi^4 - 52\,245 \xi^8 + \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\ & \quad \quad \left. \left. \left. \left. \left. a_1 \left(11 - 4401 \xi^4 + a_1 \left(-47 - 4347 \xi^4 + 9 \left(-1 + a_1 \right) a_1 \right) \right) \right) \right) \right) \right) + \right. \\ & \quad \left. 3 \xi^2 \left(32 + 9 \xi^4 \left(682 + 7839 \xi^4 + 4617 \xi^8 \right) + a_1 \left(4 \left(71 + 7119 \xi^4 + \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\ & \quad \quad \left. \left. \left. \left. \left. 19\,440 \xi^8 \right) + a_1 \left(678 + 31\,734 \xi^4 - 4131 \xi^8 + \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\ & \quad \quad \left. \left. \left. \left. \left. a_1 \left(740 + 216 \xi^4 - a_1 \left(-179 + 7965 \xi^4 + 27 a_1 \left(8 + 3 a_1 \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) a_3 \right) \right) / \\ & \quad \left(2 \left(2 - a_1 - 3 \xi^2 a_3 \right)^{7/2} \left(a_1 + 3 \xi^2 a_3 \right)^5 \left(1 + a_1 + 3 \xi^2 a_3 \right)^3 \left(2 + a_1 + 3 \xi^2 a_3 \right)^{3/2} \right) - \\ & \quad \frac{27 \xi^2 \tau_1}{\left(-2 + a_1 + 3 \xi^2 a_3 \right)^2 \left(a_1 + 3 \xi^2 a_3 \right) \left(1 + a_1 + 3 \xi^2 a_3 \right)^2} \end{aligned}$$

Enfim, obtemos o valor de τ_2 substituindo o valor de τ_1 .

In[14]:= `newtau2 = Simplify[ReplaceAll[%, {newtau1}]]`

Out[14]:= $\tau_2 \rightarrow$

$$\begin{aligned} & \left(3 \left(8 - 9 \xi^4 \left(178 + 11\,007 \xi^4 + 23\,085 \xi^8 \right) + a_1 \left(16 - 81 \xi^4 \left(2 + \xi^4 \right) \left(71 + 1431 \xi^4 \right) - a_1 \left(34 + \right. \right. \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. \left. \left. 24\,030 \xi^4 + 79\,461 \xi^8 + a_1 \left(82 + 15\,210 \xi^4 - 52\,245 \xi^8 + a_1 \left(11 - 4401 \xi^4 + a_1 \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\ & \quad \quad \left. \left. \left. \left. \left. \left(-47 - 4347 \xi^4 + 9 \left(-1 + a_1 \right) a_1 \right) \right) \right) \right) \right) \right) - \right. \\ & \quad \left. 3 \xi^2 \left(32 + 9 \xi^4 \left(682 + 7839 \xi^4 + 4617 \xi^8 \right) + a_1 \left(4 \left(71 + 7119 \xi^4 + 19\,440 \xi^8 \right) + \right. \right. \right. \right. \right. \\ & \quad \quad \left. \left. \left. \left. \left. a_1 \left(678 + 31\,734 \xi^4 - 4131 \xi^8 + a_1 \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\ & \quad \quad \left. \left. \left. \left. \left. \left(740 + 216 \xi^4 - a_1 \left(-179 + 7965 \xi^4 + 27 a_1 \left(8 + 3 a_1 \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) a_3 + \right. \\ & \quad \left. 54 \xi^2 \left(a_1 + 3 \xi^2 a_3 \right)^2 \left(2 + a_1 + 3 \xi^2 a_3 \right) \left(3 \xi^2 \left(3 + 2 a_1 \right) + \left(2 + 27 \xi^4 + a_1 - a_1^2 \right) a_3 \right) \right) \right) / \\ & \quad \left(2 \left(2 - a_1 - 3 \xi^2 a_3 \right)^{7/2} \left(a_1 + 3 \xi^2 a_3 \right)^5 \right. \\ & \quad \left. \left(1 + a_1 + 3 \xi^2 a_3 \right)^3 \right. \\ & \quad \left. \left(2 + a_1 + 3 \xi^2 a_3 \right)^{3/2} \right) \end{aligned}$$

Agora, definiremos o polinômio g_2 como o numerador da expressão de τ_2 e o polinômio r_2 como o resultante de g_2 e g_0 .

```
In[15]:= PolyG2[a3_][x_] := 8 - 9 x^4 (23 085 x^8 + 11 007 x^4 + 178) +
  a1 (16 - 81 x^4 (x^4 + 2) (1431 x^4 + 71) - a1 (79 461 x^8 + 24 030 x^4 + 34 + a1 (-52 245 x^8 +
    15 210 x^4 + 82 + a1 (-4401 x^4 + 11 + a1 (-4347 x^4 - 47 + 9 (a1 - 1) a1)))) -
  3 x^2 (32 + 9 x^4 (4617 x^8 + 7839 x^4 + 682) + a1 (4 (19 440 x^8 + 7119 x^4 + 71) + a1 (-4131 x^8 +
    31 734 x^4 + 678 + a1 (216 x^4 + 740 - a1 (7965 x^4 - 179 + 27 a1 (3 a1 + 8))))))
  a3 + 54 x^2 (3 a3 x^2 + a1)^2 (3 a3 x^2 + a1 + 2) (3 x^2 (2 a1 + 3) + (27 x^4 - a1^2 + a1 + 2) a3)
PolyR2[a3_] := Simplify[Resultant[PolyG2[a3][x], PolyG0[a3][x], x],
  Assumptions -> {a3^2 == 1}]
```

Vamos exibir o polinômio r_2 .

```
In[17]:= PolyR2[a3]
```

```
Out[17]= 10 460 353 203 a0^12 (-113 697 + 299 927 a1 - 738 312 a1^2 + 254 284 a1^3) - 1024 (-2 + a1)^6
  (1 + a1)^3 (-2 + 9 a1^2) (263 936 - 421 824 a1 + 270 519 a1^2 - 86 938 a1^3 + 13 986 a1^4 - 900 a1^5)^2 +
  531 441 a0^8 (-382 264 210 397 + 339 566 728 161 a1 + 853 509 860 373 a1^2 -
  1 209 078 942 005 a1^3 + 143 801 693 496 a1^4 + 579 128 468 580 a1^5 -
  438 323 470 416 a1^6 + 142 398 844 560 a1^7 - 22 560 819 840 a1^8 + 1 426 800 960 a1^9) +
  2916 a0^4 (-25 901 313 349 390 - 59 228 730 745 218 a1 + 40 198 115 308 653 a1^2 +
  303 962 209 142 739 a1^3 - 361 076 584 917 375 a1^4 - 161 768 976 790 293 a1^5 +
  561 424 013 069 424 a1^6 - 419 695 011 292 644 a1^7 + 96 778 767 074 868 a1^8 +
  56 024 321 563 676 a1^9 - 54 744 533 868 960 a1^10 + 21 897 952 123 248 a1^11 -
  5 149 947 726 144 a1^12 + 739 904 379 840 a1^13 - 60 489 607 680 a1^14 + 2 168 439 552 a1^15) -
  1 937 184 190 723 179 a0^14 a3 + 14 348 907 a0^10
  (-2 130 818 167 + 7 393 860 414 a1 - 2 161 803 951 a1^2 - 6 392 256 696 a1^3 +
  5 603 909 616 a1^4 - 1 682 441 280 a1^5 + 174 469 680 a1^6) a3 +
  78 732 a0^6 (-2 486 593 775 218 - 3 887 285 028 585 a1 + 13 267 202 177 316 a1^2 -
  880 773 558 263 a1^3 - 18 586 085 439 858 a1^4 + 16 646 090 195 010 a1^5 -
  2 112 644 296 786 a1^6 - 5 076 947 205 360 a1^7 + 3 875 650 995 204 a1^8 -
  1 372 114 603 584 a1^9 + 272 385 434 880 a1^10 - 29 324 643 840 a1^11 + 1 340 262 720 a1^12) a3 +
  3456 a0^2 (-2 + a1)^3 (1 471 021 933 760 + 5 914 680 224 832 a1 - 4 842 630 352 710 a1^2 -
  1 794 131 571 594 a1^3 - 3 093 135 303 987 a1^4 + 5 835 992 882 067 a1^5 +
  1 688 387 023 419 a1^6 - 7 089 827 097 375 a1^7 + 5 367 156 847 758 a1^8 -
  1 974 065 966 434 a1^9 + 334 682 333 244 a1^10 + 11 683 700 820 a1^11 -
  17 331 176 880 a1^12 + 3 487 898 016 a1^13 - 319 578 048 a1^14 + 11 656 224 a1^15) a3
```

Queremos saber se existe alguma solução em comum para as equações $r_1(a_3) = 0$ e $r_2(a_3) = 0$.

Vamos começar com o caso $a_3 = 1$, ou seja, com a aplicação C_+ .

```
In[18]:= Solve[{PolyR1[1] == 0, PolyR2[1] == 0}, {a1, a0}, Reals]
```

```
Out[18]= {{a1 -> -1, a0 -> 0}, {a1 -> 2, a0 -> 0}}
```

Foram encontradas duas soluções. Porém, elas correspondem às ressonâncias 1 : 3 e 1 : 1, respectivamente.

De fato, o ponto $(a_1, a_0) = (-1, 0)$ pertence à Curva tripla.

```
In[19]:= ReplaceAll[PolyR0[1][-1] == 0, %[[1]]]
```

```
Out[19]= True
```

E o ponto $(a_1, a_0) = (2, 0)$ pertence à Curva SN.

```
In[20]:= ReplaceAll[PolyR0[1][2] == 0, %%[[2]]]
```

```
Out[20]= True
```

Portanto, estes pontos não podem ser considerados.

No caso da aplicação C_- , $a_3 = -1$, existem 10 soluções em comum.

```
In[21]:= Dimensions[Solve[{PolyR1[-1] == 0, PolyR2[-1] == 0}, {a1, a0}, Reals]][[1]]
```

```
Out[21]= 10
```

As quatro primeiras podem ser obtidas explicitamente.

```
In[22]:= Solve[{PolyR1[-1] == 0, PolyR2[-1] == 0}, {a1, a0}, Reals][[1 ;; 4]]
```

```
Out[22]= {{a1 -> -4/3, a0 -> -32*sqrt(2)/27},
          {a1 -> -4/3, a0 -> 32*sqrt(2)/27}, {a1 -> -1, a0 -> 0}, {a1 -> 2, a0 -> 0}}
```

Porém, elas também correspondem a pontos ressonantes.

De fato, os pontos $(a_1, a_0) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{32\sqrt{2}}{27}\right)$ e $(a_1, a_0) = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{32\sqrt{2}}{27}\right)$ pertencem à Curva PD.

```
In[23]:= ReplaceAll[PolyR0[-1][-2] == 0, %[[1 ;; 2]]]
```

```
Out[23]= {True, True}
```

Já o ponto $(a_1, a_0) = (-1, 0)$ pertence à Curva tripla.

```
In[24]:= ReplaceAll[PolyR0[-1][-1] == 0, %%[[3]]]
```

```
Out[24]= True
```

E o ponto $(a_1, a_0) = (2, 0)$ pertence à Curva SN.

```
In[25]:= ReplaceAll[PolyR0[-1][2] == 0, %%%[[4]]]
```

```
Out[25]= True
```

Portanto, eles também não podem ser considerados.

As 6 soluções restantes pertencem à Região $E < H < E$, definida a seguir.

```
In[26]:= regionEHE =
    ImplicitRegion[PolyR0[-1][2] > 0 && PolyR0[-1][-2] > 0 && a1 < 4, {a1, a0}];
```

Iremos calcular numericamente estas soluções nesta região.

```
In[27]:= Points = NSolve[{PolyR1[-1] == 0, PolyR2[-1] == 0},
    {a1, a0} ∈ regionEHE, Reals, WorkingPrecision → 30]
```

```
Out[27]= {{a1 → 3.51360734882323302594828626769,
    a0 → 0.235530917512950131491350211505},
    {a1 → 3.29169103929105230733241324738,
    a0 → 0.066756977496731228822860303018},
    {a1 → 3.01457022960293785294910287753,
    a0 → 0.129456047270389582192274338763},
    {a1 → 3.29169103929105230733241324738,
    a0 → -0.066756977496731228822860303019},
    {a1 → 3.51360734882323302594828626770,
    a0 → -0.235530917512950131491350211508},
    {a1 → 3.01457022960293785294910287753,
    a0 → -0.129456047270389582192274338773}}
```

De fato, os dados encontrados são soluções do nosso sistema $r_1(-1) = 0$ e $r_2(-1) = 0$.

```
In[28]:= ReplaceAll[{PolyR1[-1] == 0, PolyR2[-1] == 0}, Points]
```

```
Out[28]= {{True, True}, {True, True}, {True, True},
    {True, True}, {True, True}, {True, True}}
```

Porém, nenhum deles é ressonante.

```
In[29]:= Map[ReplaceAll[PolyR0[-1][#] == 0, Points] &,
    {2, -2, -1, 0,  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ,  $-\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ , 1}]
```

```
Out[29]= {{False, False, False, False, False, False},
    {False, False, False, False, False, False},
    {False, False, False, False, False, False},
    {False, False, False, False, False, False},
    {False, False, False, False, False, False},
    {False, False, False, False, False, False},
    {False, False, False, False, False, False}}
```

Vamos calcular o valor da primeira coordenada dos pontos fixos para as 6 soluções encontradas.


```
In[30]= FixedPoints = Map[
  Drop[Solve[-ξ == - $\frac{1}{2}(-ξ^3 + \text{Points}[[\#, 1, 2]] ξ + \text{Points}[[\#, 2, 2]])$ , ξ], {2}] &,
  {1, 2, 3, 4, 5, 6}]
```

```
Out[30]= {{{ξ → -1.14351965269292802679834092532},
  {ξ → 1.30174575206833501931537929033}},
  {{ξ → -1.10974584684051285819275974285},
  {ξ → 1.16153523134471207573213279809}},
  {{ξ → -0.93609655062593767208050803233},
  {ξ → 1.06584645658538106805125576879}},
  {{ξ → -1.16153523134471207573213279809},
  {ξ → 1.10974584684051285819275974285}},
  {{ξ → -1.30174575206833501931537929033},
  {ξ → 1.1435196526929280267983409253}},
  {{ξ → -1.06584645658538106805125576879},
  {ξ → 0.9360965506259376720805080323}}}
```

Obtemos 12 valores para ξ pois nessa região existem 2 pontos fixos elípticos.

Vamos substituir esses valores nas expressões de τ_1 e τ_2 .

```
In[31]= Map[ReplaceAll[newtau1, {Points[[\#, 1]], Points[[\#, 2]],
  FixedPoints[[\#, 1, 1]], a3 → -1}] &, {1, 2, 3, 4, 5, 6}]
```

```
Out[31]= {τ1 → 0. × 10-26, τ1 → 0. × 10-27,
  τ1 → -32.5028324311570142252317514, τ1 → 20.2901855248978537537520006,
  τ1 → -9.52077000682173903331766711, τ1 → 0. × 10-27}
```

```
In[32]= Map[ReplaceAll[newtau1, {Points[[\#, 1]], Points[[\#, 2]],
  FixedPoints[[\#, 2, 1]], a3 → -1}] &, {1, 2, 3, 4, 5, 6}]
```

```
Out[32]= {τ1 → -9.52077000682173903331766711, τ1 → 20.2901855248978537537520006,
  τ1 → 0. × 10-27, τ1 → 0. × 10-27, τ1 → 0. × 10-26, τ1 → -32.5028324311570142252317514}
```

```
In[33]= Map[ReplaceRepeated[newtau2, {newtau1, Points[[\#, 1]],
  Points[[\#, 2]], FixedPoints[[\#, 1, 1]], a3 → -1}] &, {1, 2, 3, 4, 5, 6}]
```

```
Out[33]= {τ2 → -17364.8485918903740590649, τ2 → -16340.4976368466731645547,
  τ2 → 0. × 10-21, τ2 → 0. × 10-20, τ2 → 0. × 10-22, τ2 → -15212.1821880620779401196}
```

```
In[34]:= Map[ReplaceRepeated[newtau2, {newtau1, Points[[#, 1]],  
      Points[[#, 2]], FixedPoints[[#, 2, 1]], a3 -> -1}] &, {1, 2, 3, 4, 5, 6}]
```

```
Out[34]= {tau2 -> 0. * 10^-22, tau2 -> 0. * 10^-20,  
      tau2 -> -15 212.1821880620779401196, tau2 -> -16 340.4976368466731645547,  
      tau2 -> -17 364.8485918903740590649, tau2 -> 0. * 10^-21}
```

Como podemos ver, eles nunca anulam simultaneamente os coeficientes de twist τ_1 e τ_2 .

B.4 Figuras: Curvas de Simetria

Apresentaremos aqui os códigos para a confecção das figuras com as curvas de simetria S_0 e S_1 variando os valores dos parâmetros a_0 e a_1 , tanto para a aplicação C_+ quanto para a C_- .

Segue o comando para produzir a Figura 2.1 do texto.

```
In[1]:= Plot[{-x, -1/2 (x^3 + x - 2), -1/2 (x^3 + x - 2/(3*sqrt(3))), -1/2 (x^3 + x),  
-1/2 (x^3 + x + 2/(3*sqrt(3))), -1/2 (x^3 + x + 2)}, {x, -2, 2}, PlotTheme -> "Monochrome",  
PlotRange -> {{-2, 2}, {-2, 2}}, AxesLabel -> {x, y}, AspectRatio -> 1,  
PlotLegends -> LineLegend[{"S0", "S1 com a0 = -2", "S1 com a0 = -2/(3*sqrt(3))",  
"S1 com a0 = 0", "S1 com a0 = 2/(3*sqrt(3))", "S1 com a0 = 2"},  
LegendLabel -> "Curvas de simetria", LegendFunction -> "Frame"]]
```

Agora, o comando para produzir a Figura 2.2 do texto.

```
In[2]:= Plot[{-x, -1/2 (-x^3 + 2x + 1), -1/2 (-x^3 + 7/2 x + 1), -1/2 (-x^3 + (2 + 3/cubeRoot[4]) x + 1),  
-1/2 (-x^3 + 26/5 x + 1)}, {x, -2, 2}, PlotTheme -> "Monochrome",  
PlotRange -> {{-2, 2}, {-2, 2}}, AxesLabel -> {x, y}, AspectRatio -> 1,  
PlotLegends -> LineLegend[{"S0", "S1 com a1 = 2",  
"S1 com a1 = 7/2", "S1 com a1 = 2 + 3/cubeRoot[4]", "S1 com a1 = 26/5"},  
LegendLabel -> "Curvas de simetria", LegendFunction -> "Frame"]]
```

B.5 Figuras: Espaço dos parâmetros

Neste *notebook*, apresentaremos os códigos utilizados para a confecção das figuras com relação ao espaço dos parâmetros (a_1, a_0) .

Para tanto, usaremos os polinômios resultantes r_0, r_1 e r_2 que dependem dos polinômios g_0, \hat{g}_0, g_1 e g_2 .

```
In[1]:= PolyG0[a3_][x_] := a0 + x (a1 - 2) + a3 x^3
PolyR0[a3_][t_] := Simplify[Resultant[PolyG0[a3][x], 3 a3 x^2 + a1 - t, x]]

In[3]:= PolyG1[a3_][x_] := 3 x^2 (3 + 2 a1) + a3 (2 + 27 x^4 + a1 - a1^2)
PolyR1[a3_] :=
  Simplify[Resultant[PolyG1[a3][x], PolyG0[a3][x], x], Assumptions -> {a3^2 == 1}]

In[5]:= PolyG2[a3_][x_] :=
  8 - 9 x^4 (178 + 11 007 x^4 + 23 085 x^8) + a1 (16 - 81 x^4 (2 + x^4) (71 + 1431 x^4) -
    a1 (34 + 24 030 x^4 + 79 461 x^8 + a1 (82 + 15 210 x^4 - 52 245 x^8 +
      a1 (11 - 4401 x^4 + a1 (-47 - 4347 x^4 + 9 (a1 - 1) a1)))))) - 3 x^2 (32 +
    9 x^4 (682 + 7839 x^4 + 4617 x^8) + a1 (4 (71 + 7119 x^4 + 19 440 x^8) + a1 (678 + 31 734 x^4 -
      4131 x^8 + a1 (740 + 216 x^4 - a1 (-179 + 7965 x^4 + 27 a1 (8 + 3 a1)))))) a3 +
    54 x^2 (a1 + 3 x^2 a3)^2 (2 + a1 + 3 x^2 a3) (3 x^2 (3 + 2 a1) + (2 + 27 x^4 + a1 - a1^2) a3)
PolyR2[a3_] := Simplify[Resultant[PolyG2[a3][x], PolyG0[a3][x], x],
  Assumptions -> {a3^2 == 1}]
```

Segue o comando para produzir a Figura 2.4 do texto.

```
In[7]:= Show[RegionPlot[{PolyR0[1][2] > 0, PolyR0[1][2] < 0, PolyR0[1][-2] < 0},
  {a1, -3, 3}, {a0, -3, 3}, BoundaryStyle -> None,
  PlotStyle -> {GrayLevel[0.9], GrayLevel[0.8], GrayLevel[0.6]},
  PlotLegends -> SwatchLegend[{"H", "H < E < H", "H < Hr < H"}],
  LegendLabel -> "Classificação dos pontos fixos por região"],
  ContourPlot[{PolyR0[1][2] == 0, PolyR0[1][0] == 0, PolyR0[1][-1] == 0,
    PolyR0[1][-2] == 0, PolyR1[1] == 0}, {a1, -3, 2},
  {a0, -3, 3}, PlotTheme -> "Monochrome", PlotLegends -> LineLegend[
    {"Curva SN -> alpha = 0 e t = 2", "Curva quádrupla -> alpha = pi/2 e t = 0",
    "Curva tripla -> alpha = 2pi/3 e t = -1", "Curva PD -> alpha = pi e t = -2",
    "Curva sem twist -> tau1 = 0"}, LegendLabel -> "Curvas de bifurcação"]],
  Axes -> True, AxesLabel -> {a1, a0}, ImageSize -> Medium, Frame -> False]
```

A seguir, está o comando para produzir a Figura 2.5 do texto.

```
In[8]:= Show[RegionPlot[{PolyR0[-1][2] < 0 && PolyR0[-1][-2] < 0,
    PolyR0[-1][2] < 0 && PolyR0[-1][-2] > 0, PolyR0[-1][2] > 0 &&
    PolyR0[-1][-2] < 0, PolyR0[-1][2] > 0 && PolyR0[-1][-2] > 0 && a1 < 4,
    PolyR0[-1][2] > 0 && PolyR0[-1][-2] > 0 && a1 > 4},
    {a1, -2, 5.5}, {a0, -2.5, 2.5}, BoundaryStyle -> None,
    PlotStyle -> {GrayLevel[0.9], GrayLevel[0.8], GrayLevel[0.7],
    GrayLevel[0.6], GrayLevel[0.5]}, PlotLegends -> SwatchLegend[
    {"Hr", "E", "E < H < Hr ou Hr < H < E", "E < H < E", "Hr < H < Hr"}],
    LegendLabel -> "Classificação dos pontos fixos por região"],
    ContourPlot[{PolyR0[-1][2] == 0, PolyR0[-1][0] == 0, PolyR0[-1][-1] == 0,
    PolyR0[-1][-2] == 0}, {a1, -2, 5.5}, {a0, -2.5, 2.5}, PlotTheme -> "Monochrome",
    PlotLegends -> LineLegend[{"Curva SN -> alpha = 0 e t = 2",
    "Curva quádrupla -> alpha = pi/2 e t = 0", "Curva tripla -> alpha = 2pi/3 e t = -1",
    "Curva PD -> alpha = pi e t = -2"}], LegendLabel -> "Curvas de bifurcação"],
    ContourPlot[PolyR1[-1] == 0, {a1, -4/3, 5.5}, {a0, -2.5, 2.5},
    ContourStyle -> {{Black, Dashing[{0.03, 0.01}]}}],
    PlotLegends -> LineLegend[{"Curva sem twist -> tau1 = 0"}]],
    Axes -> True, AxesLabel -> {a1, a0}, ImageSize -> Medium, Frame -> False]
```

Por último, apresentamos o comando para produzir a Figura 4.1 do texto.

```
In[9]:= Show[RegionPlot[PolyR0[-1][2] > 0 && PolyR0[-1][-2] > 0 && a1 < 4,
    {a1, 2, 4}, {a0, -1, 1}, BoundaryStyle -> None, PlotTheme -> "Monochrome",
    PlotLegends -> SwatchLegend[{"Região E < H < E"}]],
    ContourPlot[{PolyR1[-1] == 0, PolyR2[-1] == 0}, {a1, 2, 4},
    {a0, -1, 1}, PlotTheme -> "Monochrome", PlotLegends ->
    LineLegend[{"Curva sem twist -> tau1 = 0", "Curva sem twist -> tau2 = 0"}]],
    Axes -> True, AxesLabel -> {a1, a0}, ImageSize -> Small, Frame -> False]
```

B.6 Figuras: Caso Hiperbólico

Apresentaremos, neste *notebook*, os comandos para a geração da Figura C.1.

Vamos precisar da aplicação de Hénon cúbica conservativa.

```
In[1]:= Henon[a0_, a1_, a3_] [{x_, y_}] := {y + a3 x^3 + a1 x + a0, -x}
```

Como estamos interessados no caso de um ponto fixo hiperbólico, vamos precisar também da aplicação inversa.

```
In[2]:= Henoninv[a0_, a1_, a3_] [{x_, y_}] := {-y, x + a3 y^3 + a1 y - a0}
```

Escolheremos os coeficientes a_0 e a_1 de forma que tenhamos um ponto fixo elíptico e um hiperbólico.

Começaremos com a Parte (a) da Figura C.1.

```
In[3]:= coeff0 = 0.2;  
coeff1 = -0.5;  
coeff3 = 1;
```

Será necessário calcularmos os pontos fixos para a aplicação de Hénon definida com estes parâmetros.

```
In[6]:= fixedpoints = NSolve[{x == y + coeff3 x^3 + coeff1 x + coeff0, y == -x}, {x, y}, Reals]
```

```
Out[6]= {{x -> -1.61972, y -> 1.61972},  
{x -> 1.53951, y -> -1.53951}, {x -> 0.0802064, y -> -0.0802064}}
```

Pela Figura 2.4, esta aplicação se encontra na Região $H < E < H$. Portanto, os pontos fixos hiperbólicos são aqueles cujo valor da primeira coordenada seja o maior ou o menor dentre os 3 pontos da lista acima. Vamos tomar o maior, ou seja, o segundo da lista.

```
In[7]:= j = 2;
```

Vamos calcular, agora, a matriz Jacobiana calculada no ponto fixo hiperbólico escolhido.

```
In[8]:= Jac = ReplaceAll[  
D[Henon[coeff0, coeff1, coeff3] [{x, y}], {{x, y}}, fixedpoints[[j]]];
```

Exibiremos o resultado obtido em forma matricial.

```
In[9]:= MatrixForm[Jac]
```

```
Out[9]/MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 6.61027 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Em seguida, calcularemos os autovalores da matriz acima.

```
In[10]:= Eigenvalues[Jac]
```

```
Out[10]= {6.45536, 0.15491}
```

De fato, estamos no caso hiperbólico. O autovalor λ é o primeiro da lista acima. O segundo é o

autovalor $\frac{1}{\lambda}$.

```
In[11]:= λ = %[[1]];
```

Precisaremos dos autovetores da matriz Jacobiana associados ao autovalor λ .

```
In[12]:= Eigenvectors[Jac - λ IdentityMatrix[2]]
```

```
Out[12]:= {{-0.153084, 0.988213}, {0.988213, -0.153084}}
```

O primeiro vetor será chamado de \vec{u} e o segundo de \vec{v} .

```
In[13]:= vecU = %[[1]];
```

```
vecV = %%[[2]];
```

Será necessário definirmos algumas constantes que serão utilizadas para produzirmos a figura.

Primeiramente, os valores mínimo e máximo da variável x .

```
In[15]:= xmin = -2;
```

```
xmax = 2;
```

Agora, o centro da imagem.

```
In[17]:= center = { (xmin + xmax)/2, -(xmin + xmax)/2 };
```

Em seguida, a distância máxima até o centro e o tamanho do intervalo de variação na variável x .

```
In[18]:= distmax = (xmax - xmin)/2;
```

```
Δ = 0.032;
```

Por fim, o número de iterações.

```
In[20]:= iterations = 2000;
```

Estamos prontos para a produção da figura.

No primeiro passo, criaremos uma imagem com os eixos e as curvas de simetria.

```
In[21]:= graphics = Plot[{-x, -1/2 (coeff3 x^3 + coeff1 x + coeff0)}, {x, xmin, xmax},
    PlotTheme -> "Monochrome", AxesLabel -> {x, y}, AspectRatio -> 1,
    ImageSize -> Large, PlotLegends -> LineLegend[{"S0", "S1"},
    LegendLabel -> "Curvas de simetria", LegendFunction -> "Frame"]];
```

No segundo passo, adicionaremos à imagem anterior os pontos da aplicação de Hénon que serão calculados pela iteração da curva de simetria S_0 .

```
In[22]:= Do[data = {};
  v = N[{i, -i}];
  Do[If[ChessboardDistance[v, center] > distmax,
    Break[], v = Nest[Henon[coeff0, coeff1, coeff3], v, 1];
    data = Append[data, v]], iterations];
  graphics = Show[graphics, ListPlot[data, PlotStyle -> {Gray, PointSize[Tiny]}],
    PlotRange -> {{xmin, xmax}, {-xmax, -xmin}}, {i, xmin, xmax, Δ}];
```

No terceiro passo, adicionaremos também os pontos da variedade estável que serão calculados pela iteração inversa de um pequeno segmento da reta gerada pelo vetor \vec{u} .

```
In[23]:= Do[data = {};
  v = N[i vecU + {fixedpoints[[j, 1, 2]], fixedpoints[[j, 2, 2]]}];
  Do[If[ChessboardDistance[v, center] > distmax,
    Break[], v = Nest[Henoninv[coeff0, coeff1, coeff3], v, 1];
    data = Append[data, v]], iterations];
  graphics = Show[graphics, ListPlot[data, PlotStyle -> {Gray, PointSize[Tiny]}],
    PlotRange -> {{xmin, xmax}, {-xmax, -xmin}}, {i, 0, 0.1, 0.0004}];
```

No quarto passo, adicionaremos os pontos da variedade estável que serão calculados pela iteração de um pequeno segmento da reta gerada pelo vetor \vec{v} .

```
In[24]:= Do[data = {};
  v = N[i (-vecV) + {fixedpoints[[j, 1, 2]], fixedpoints[[j, 2, 2]]}];
  Do[If[ChessboardDistance[v, center] > distmax,
    Break[], v = Nest[Henon[coeff0, coeff1, coeff3], v, 1];
    data = Append[data, v]], iterations];
  graphics = Show[graphics, ListPlot[data, PlotStyle -> {Gray, PointSize[Tiny]}],
    PlotRange -> {{xmin, xmax}, {-xmax, -xmin}}, {i, 0, 0.1, 0.0004}];
```

Finalmente, temos a imagem completa.

```
In[25]:= graphics
```

A Parte (b) da Figura C.1 foi feita da mesma forma, alterando apenas os seguintes parâmetros.

```
coeff0 = 0.4;
coeff1 = 3.5;
coeff3 = -1;
j = 3;
xmin = -1.6;
xmax = 0;
Δ = 0.016;
```


B.7 Figuras: Caso Elíptico

Apresentaremos, neste *notebook*, os comando para a geração da Figura C.2.

Assim como no caso hiperbólico, vamos precisar da aplicação de Hénon cúbica conservativa.

```
In[1]:= Henon[a0_, a1_, a3_] [{x_, y_}] := {y + a3 x^3 + a1 x + a0, -x}
```

Vamos escolher os coeficientes a_0 e a_1 de forma que tenhamos um ponto fixo elíptico.

Começaremos com a Parte (a) da Figura C.2. Definiremos os coeficientes da aplicação de Hénon.

```
In[2]:= coeff0 = 0;  
coeff1 = -1.5;  
coeff3 = 1;
```

Calcularemos, agora, os pontos fixos da aplicação de Hénon cúbica conservativa com os parâmetros acima.

```
In[5]:= fixedpoints = NSolve[{x == y + coeff3 x^3 + coeff1 x + coeff0, y == -x}, {x, y}, Reals]
```

```
Out[5]= {{x -> 1.87083, y -> -1.87083}, {x -> -1.87083, y -> 1.87083}, {x -> 0., y -> 0.}}
```

Pela Figura 2.4, esta aplicação se encontra na Região $H < E < H$. Logo, o ponto fixo elíptico é aquele cujo valor da primeira coordenada não seja o maior nem o menor dentre os 3 pontos da lista acima. Desta forma, tomaremos o terceiro da lista.

```
In[6]:= j = 3;
```

Vamos calcular a matriz Jacobiana calculada no ponto fixo elíptico.

```
In[7]:= Jac = ReplaceAll[  
D[Henon[coeff0, coeff1, coeff3] [{x, y}], {{x, y}}, fixedpoints[[j]]];
```

Exibiremos o resultado obtido na forma matricial.

```
In[8]:= MatrixForm[Jac]
```

```
Out[8]/MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -1.5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Em seguida, calcularemos os autovalores da matriz acima.

```
In[9]:= Eigenvalues[Jac]
```

```
Out[9]= {-0.75 + 0.661438 i, -0.75 - 0.661438 i}
```

De fato, estamos no caso elíptico.

Será necessário definirmos algumas constantes que serão utilizadas na produção da figura.

Primeiramente, os valores mínimo e máximo da variável x .

```
In[10]:= xmin = -1.5;  
xmax = 1.5;
```

Agora, o centro da imagem.

```
In[12]:= center = {  $\frac{x_{\min} + x_{\max}}{2}$ ,  $-\frac{x_{\min} + x_{\max}}{2}$  };
```

Em seguida, a distância máxima até o centro e o tamanho do intervalo de variação de x .

```
In[13]:= distmax =  $\frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}$ ;
```

```
 $\Delta = 0.032$ ;
```

Por fim, o número de iterações.

```
In[15]:= iterations = 2000;
```

Estamos prontos para a produção da figura.

No primeiro passo, criaremos uma imagem com os eixos e as curvas de simetria.

```
In[16]:= graphics = Plot[ {  $-x$ ,  $-\frac{1}{2}(\text{coeff3 } x^3 + \text{coeff1 } x + \text{coeff0})$  }, {x, xmin, xmax},
  PlotTheme → "Monochrome", AxesLabel → {x, y}, AspectRatio → 1,
  ImageSize → Large, PlotLegends → LineLegend[{"S0", "S1"},
  LegendLabel → "Curvas de simetria", LegendFunction → "Frame" ];
```

No segundo passo, adicionaremos à imagem anterior os pontos da aplicação de Hénon que serão calculados pela iteração da curva de simetria S_0 .

```
In[17]:= Do[data = {};
  v = N[{i, -i}];
  Do[If[ChessboardDistance[v, center] > distmax,
    Break[], v = Nest[Henon[coeff0, coeff1, coeff3], v, 1];
    data = Append[data, v]], iterations];
graphics = Show[graphics, ListPlot[data, PlotStyle → {Gray, PointSize[Tiny]}],
  PlotRange → {{xmin, xmax}, {-xmax, -xmin}}, {i, xmin, xmax,  $\Delta$ };
```

No terceiro passo, adicionaremos também os pontos obtidos pela iteração de um segmento do eixo das abscissas.

```
In[18]:= Do[data = {};
  v = N[{i, 0}];
  Do[If[ChessboardDistance[v, center] > distmax,
    Break[], v = Nest[Henon[coeff0, coeff1, coeff3], v, 1];
    data = Append[data, v]], iterations];
graphics = Show[graphics, ListPlot[data, PlotStyle → {Gray, PointSize[Tiny]}],
  PlotRange → {{xmin, xmax}, {-xmax, -xmin}}, {i, -1, -0.7,  $\Delta$ };
```

No quarto passo, adicionaremos os pontos obtidos pela iteração de outro segmento do eixo das abscissas.

```
In[19]:= Do[data = {};  
  v = N[{i, 0}];  
  Do[If[ChessboardDistance[v, center] > distmax,  
    Break[], v = Nest[Henon[coeff0, coeff1, coeff3], v, 1];  
    data = Append[data, v]], iterations];  
  graphics = Show[graphics, ListPlot[data, PlotStyle -> {Gray, PointSize[Tiny]}],  
    PlotRange -> {{xmin, xmax}, {-xmax, -xmin}}, {i, 0.7, 1, Δ}];
```

Finalmente, temos a imagem completa.

```
In[20]:= graphics
```

A Parte (b) da Figura C.2 foi feita da mesma maneira, alterando apenas os parâmetros seguintes.

```
coeff0 = 1;  
coeff1 = -1;  
coeff3 = -1;  
j = 1;  
xmin = -0.5;  
xmax = 1;  
Δ = 0.016;
```

B.8 Figuras: Caso Parabólico

Apresentaremos, neste *notebook*, os comandos para a produção da Figura C.3.

Novamente, vamos precisar da aplicação de Hénon cúbica conservativa.

```
In[1]:= Henon[a0_, a1_, a3_] [{x_, y_}] := {y + a3 x^3 + a1 x + a0, -x}
```

Escolheremos os coeficientes a_0 e a_1 de forma a termos um ponto fixo parabólico.

Começaremos com a Parte (a) da Figura C.3. Temos os seguintes coeficientes da aplicação.

```
In[2]:= coeff0 = 0;  
coeff1 = -2;  
coeff3 = 1;
```

Calcularemos os pontos fixos desta aplicação.

```
In[5]:= fixedpoints = Solve[{x == y + coeff3 x^3 + coeff1 x + coeff0, y == -x}, {x, y}, Reals]
```

```
Out[5]= {{x -> -2, y -> 2}, {x -> 0, y -> 0}, {x -> 2, y -> -2}}
```

Pela Figura 2.4, esta aplicação se encontra na Curva PD. Neste caso, o primeiro ponto e o último da lista acima são hiperbólicos e o segundo é parabólico.

```
In[6]:= j = 2;
```

Vamos calcular, então, a matriz Jacobiana calculada no ponto fixo parabólico.

```
In[7]:= Jac = ReplaceAll[  
  D[Henon[coeff0, coeff1, coeff3] [{x, y}], {{x, y}}, fixedpoints[[j]]];
```

Exibiremos o resultado obtido em sua forma matricial.

```
In[8]:= MatrixForm[Jac]
```

```
Out[8]/MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Em seguida, vamos calcular os autovalores desta matriz.

```
In[9]:= Eigenvalues[Jac]
```

```
Out[9]= {-1, -1}
```

De fato, estamos no caso parabólico.

Será necessário definirmos algumas constantes que serão utilizadas na geração da figura.

Primeiramente, os valores mínimo e máximo da variável x .

```
In[10]:= xmin = -1;  
xmax = 1;
```

Agora, o centro da imagem.

```
In[12]:= center = {  $\frac{x_{\min} + x_{\max}}{2}$ , -  $\frac{x_{\min} + x_{\max}}{2}$  };
```

Em seguida, a distância máxima até o centro e o tamanho do intervalo de variação de x .

```
In[13]:= distmax =  $\frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}$ ;
```

```
 $\Delta = 0.032$ ;
```

Por fim, o número de iterações.

```
In[15]:= iterations = 2000;
```

Estamos aptos para a produção da figura.

No primeiro passo, criaremos uma imagem com os eixos e as curvas de simetria.

```
In[16]:= graphics = Plot [ { -x, -  $\frac{1}{2}$  (coeff3 x3 + coeff1 x + coeff0) }, {x, xmin, xmax},
    PlotTheme → "Monochrome", AxesLabel → {x, y}, AspectRatio → 1,
    ImageSize → Large, PlotLegends → LineLegend[{"S0", "S1"},
    LegendLabel → "Curvas de simetria", LegendFunction → "Frame" ];
```

No segundo passo, adicionaremos à imagem anterior os pontos da aplicação de Hénon que serão calculados pela iteração da curva de simetria S_0 .

```
In[17]:= Do[data = {};
    v = N[{i, -i}];
    Do[If[ChessboardDistance[v, center] > distmax,
        Break[], v = Nest[Henon[coeff0, coeff1, coeff3], v, 1];
        data = Append[data, v]], iterations];
graphics = Show[graphics, ListPlot[data, PlotStyle → {Gray, PointSize[Tiny]}],
    PlotRange → {{xmin, xmax}, {-xmax, -xmin}}, {i, xmin, xmax,  $\Delta$ };
```

Finalmente, temos a imagem completa.

```
In[18]:= graphics
```

A Parte (b) da Figura C.3 foi feita da mesma forma, apenas alterando os seguintes parâmetros.

```
coeff1 = 2;
coeff3 = -1;
j = 1;
 $\Delta = 0.04$ ;
```

Referências Bibliográficas

- [1] J. Banks et al., *On Devaney's Definition of Chaos*, The American Mathematical Monthly **99** (1992), no. 4, pp. 332–334.
- [2] H. Bass, E. H. Connell e D. Wright, *The Jacobian conjecture: reduction of degree and formal expansion of inverse*, Bulletin of the American Mathematical Society **7** (1982), pp. 287–330.
- [3] R. L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley, Redwood City, 1989.
- [4] H. R. Dullin e J. D. Meiss, *Generalized Hénon maps: the cubic diffeomorphisms of the plane*, Physica D **143** (2000), pp. 262–289.
- [5] S. Friedland e J. Milnor, *Dynamical properties of plane polynomial automorphisms*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **9** (1989), pp. 67–99.
- [6] M. Gonchenko et al., *On local and global aspects of the 1 : 4 resonance in the conservative cubic Hénon maps*, Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science **28** (2018).
- [7] J. E. Howard e R. S. MacKay, *Linear stability of symplectic maps*, Journal of Mathematical Physics **28** (1987), pp. 1036–1051.
- [8] H. W. E. Jung, *Über ganze birationale Transformationen der Ebene*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **184** (1942), pp. 161–174.
- [9] A. Katok e B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 54, Cambridge University Press, New York, 1999.
- [10] T. Levi-Civita, *Sopra alcuni criteri di instabilità*, Annali di Matematica **5** (1901), pp. 221–305.
- [11] E. L. Lima, *Álgebra Linear*, 8.ed., Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2009.
- [12] ———, *Curso de Análise: Volume 2*, 11.ed., Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2011.
- [13] C. G. Ragazzo, M. J. D. Carneiro e S. A. Zanata, *Introdução à Dinâmica de Aplicações do Tipo Twist*, Publicações Matemáticas, IMPA, Rio de Janeiro, 2006.
- [14] C. Robinson, *Dynamical Systems: Stability, symbolic dynamics, and chaos*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, 1999.
- [15] G. H. O. Salgado, *Dinâmica de aplicações quadráticas conservativas do plano*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 09/05/2006.
- [16] C. L. Siegel e J. K. Moser, *Lectures on Celestial Mechanics*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 187, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1971.
- [17] S. Smale, *Differentiable dynamical systems*, Bulletin of the American Mathematical Society **73** (1967), pp. 747–817.
- [18] B. Sturmfels, *Solving Systems of Polynomial Equations*, Regional Conference Series in Mathematics, vol. 97, American Mathematical Society, Providence, 2002.