

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**Álgebras seriais truncadas, álgebras de incidência
de posets e equivalências derivadas**

Claudiano Henrique da Cunha Melo

Orientador: Prof. Dr. Viktor Bekkert

O autor está recebendo auxílio financeiro da CAPES durante o desenvolvimento deste trabalho.

Belo Horizonte - MG

2021

Álgebras seriais truncadas, álgebras de incidência de posets e equivalências derivadas

Claudio Henrique da Cunha Melo

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Viktor Bekkert

O autor está recebendo auxílio financeiro da CAPES durante o desenvolvimento deste trabalho.

Belo Horizonte - MG

2021

Melo, Claudiano Henrique da Cunha.

M528a Álgebras seriais truncadas, álgebras de incidência de posets e equivalências derivadas / Claudiano Henrique da Cunha Melo– 2020.
vi, 127f. il.

Orientador: Viktor Bekkert.

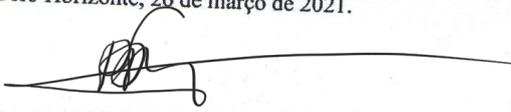
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f.120-125.

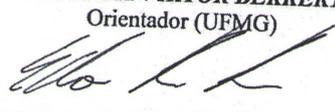
1. Matemática – Teses. 2. Álgebra comutativa– Teses. 3. Álgebras de incidência– Teses. 4. Categorias (Matemática) – Teses. I. Bekkert, Viktor. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

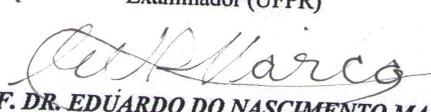
CDU 51 (043)

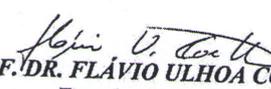
ATA DA CENTÉSIMA SEXAGÉSIMA PRIMEIRA DEFESA DE TESE DE DOUTORADO DO ALUNO CLAUDIANO HENRIQUE DA CUNHA MELO, REGULARMENTE MATRICULADO NO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, REALIZADA DIA 26 DE MARÇO DE 2021.

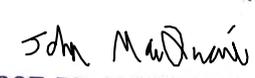
Aos vinte e seis dias do mês de março de 2021, às 14h00, em reunião pública virtual na Plataforma Google Meet pelo link meet.google.com/syt-exiq-rcr (conforme mensagem eletrônica da Pró-Reitoria de Pós-Graduação de 26/03/2020, com orientações para a atividade de defesa de tese durante a vigência da Portaria nº 1819), reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para julgar a defesa de tese do aluno **Claudio Henrique da Cunha Melo**, intitulada: "*Álgebras seriais truncadas, álgebras de incidência de posets e equivalências derivadas*", requisito final para obtenção do Grau de Doutor em Matemática. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Viktor Bekkert, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares do trabalho final, passou a palavra ao aluno para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa do aluno. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se reservadamente, sem a presença do aluno, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: o aluno foi considerado aprovado sem ressalvas e por unanimidade. O resultado final foi comunicado publicamente ao aluno pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 26 de março de 2021.


PROF. DR. VIKTOR BEKKERT
Orientador (UFMG)


PROF. DR. EDSON RIBEIRO ALVARES
Examinador (UFPR)


PROF. DR. EDUARDO DO NASCIMENTO MARCOS
Examinador (USP)


PROF. DR. FLÁVIO ULHOA COELHO
Examinador (USP)


PROF. DR. JOHN WILLIAM MACQUARRIE
Examinador (UFMG)

Resumo

Neste trabalho mostramos que qualquer álgebra serial truncada é derivadamente equivalente a uma álgebra de incidência de posets. Usamos este resultado para generalizar o resultado de Happel e Seidel sobre a classificação de álgebras de Nakayama truncadas hereditárias por partes para a classe de álgebras seriais à direita que são colagens, em seus respectivos poços, de álgebras hereditárias e álgebras truncadas com carcasses $\vec{\mathbb{A}}_n$ e $\vec{\mathbb{D}}_n$.

Palavras Chave: Categorias derivadas. Álgebras seriais truncadas. Álgebras de incidência de posets.

Abstract

In this work we show that any truncated serial algebra is derived equivalent to an incidence algebra on a poset. We have used this result to generalize the result of Happel and Seidel about the classification of piecewise hereditary truncated Nakayama algebras to the class of right serial algebras that are collages, in their respective sinks, of hereditary algebras and truncated algebras with quivers \vec{A}_n and \vec{D}_n .

Keywords: Derived categories. Truncated serial algebras. Incidence algebras on posets.

Sumário

Resumo	ii
Abstract	iii
Introdução	1
1 Preliminares	7
1.1 Categorias derivadas	7
1.1.1 Localização de categorias	7
1.1.2 Categorias trianguladas	8
1.1.3 Categoria de complexos e categoria homotópica	11
1.1.4 Teoria de Morita para categorias derivadas	13
1.2 Algumas classes de álgebras	14
1.2.1 Álgebras canônicas	16
1.2.2 Retas projetivas com pesos	17
1.2.3 Extensões por um ponto	17
1.2.4 Álgebras de incidência de posets	18
1.2.5 Álgebras seriais e álgebras de Nakayama	21
1.2.6 Álgebras gentis torcidas	22
1.3 Categorias hereditárias	25
1.3.1 Categorias hereditárias	25
1.3.2 Álgebras hereditárias	27
1.4 Álgebras hereditárias por partes	27
1.4.1 Algumas definições	27

1.4.2	Dimensão global forte	29
1.4.3	Álgebras de Nakayama hereditárias por partes	31
1.5	Mutações	32
1.5.1	Mutações de álgebras	32
1.5.2	Mutações de posets	34
1.5.3	Generalizações de mutações de posets	37
2	Equivalências Derivadas	43
2.1	Complexos $T_{\omega,r}^+$ e $T_{\omega,r}^-$	43
2.2	Álgebras de Nakayama truncadas	44
2.3	Álgebras seriais truncadas	53
2.3.1	Álgebras seriais à direita truncadas	53
2.3.2	Álgebras seriais à esquerda truncadas	55
2.4	Álgebras $\Lambda(\Lambda_1, \dots, \Lambda_t)$	56
3	Álgebras de incidência de posets hereditárias por partes	61
3.1	Colagem de posets	64
3.2	Equivalências derivadas de álgebras de incidência de posets	65
4	Álgebras seriais hereditárias por partes	101
4.1	Álgebras de Nakayama hereditárias por partes	101
4.2	Álgebras seriais hereditárias por partes	105
4.2.1	Álgebras seriais com carcás do tipo \mathbb{D}_n	105
4.2.2	Colagens	109
	Referências Bibliográficas	120
	Índice Remissivo	126

Introdução

Neste trabalho consideraremos que \mathbb{k} é um corpo algebricamente fechado e Λ é uma \mathbb{k} -álgebra associativa, básica, conexa e de dimensão finita. Denotaremos a categoria dos Λ -módulos à direita por $Mod \Lambda$ e a categoria dos Λ -módulos à direita finitamente gerados por $mod \Lambda$.

O Teorema de Morita nos diz que dada uma álgebra Λ , ao identificarmos um Λ -módulo P que seja projetivo, gerador e finitamente gerado teremos uma equivalência entre as categorias de módulos sobre Λ e $End_{\Lambda}(P)$. Neste caso, dizemos que Λ e $End_{\Lambda}(P)$ são Morita-equivalentes. Um Λ -módulo P que satisfaz as condições de ser projetivo, gerador e finitamente gerado é chamado de progerador.

A Teoria da Inclinação (veja, por exemplo, [35]) pode ser vista como uma generalização da Teoria de Morita. Um Λ -módulo T é dito um Λ -módulo inclinante se satisfaz as seguintes condições: (1) T tem dimensão projetiva ≤ 1 ; (2) $Ext_{\Lambda}^1(T, T) = 0$; e (3) existe uma sequência exata curta $0 \rightarrow \Lambda_{\Lambda} \rightarrow T'_{\Lambda} \rightarrow T''_{\Lambda} \rightarrow 0$ com T', T'' na subcategoria $add(T)$. Se T é um Λ -módulo inclinante que não é progerador então as categorias de módulos sobre Λ e $End_{\Lambda}(T)$ não são equivalentes, mas existem equivalências entre certas subcategorias de $mod \Lambda$ e $mod End_{\Lambda}(T)$. Para mais detalhes veja a Seção VI.2 do livro [5].

Happel mostrou que categorias derivadas são invariantes na teoria da inclinação, ou seja, se Λ é uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado e T é um Λ -módulo inclinante então as categorias derivadas $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ e $\mathcal{D}^b(End_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T))$ são equivalentes como categorias trianguladas. Rickard em [55] estendeu a noção de módulo inclinante para complexo inclinante e assim generalizou o Teorema de Happel. De acordo com seu principal resultado, dadas duas \mathbb{k} -álgebras Γ e Λ , suas categorias derivadas $\mathcal{D}^b(\Gamma)$ e $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ são equivalentes como categorias trianguladas se, e somente

se, Γ é isomorfo a $End_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T)$, onde T é um objeto de $\mathcal{K}^b(proj \Lambda)$ que satisfaz duas condições: (1) $Hom_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T, T[i]) = 0$ para todo $i \neq 0$; e (2) $add(T)$ gera $\mathcal{K}^b(proj \Lambda)$ como categoria triangulada. Essa se tornou a definição de complexo inclinante, e este teorema muitas vezes é descrito como Teorema de Morita para categorias derivadas.

O Teorema de Rickard é uma das principais ferramentas para se tentar resolver o problema de classificar as álgebras a menos de equivalência derivada. Uma classe importante de álgebras de dimensão finita para as quais a descrição de suas respectivas categorias derivadas é bem conhecida é a classe das álgebras hereditárias (veja [30]).

Happel mostrou em seu artigo [31] que se \mathcal{H} é uma \mathbb{k} -categoria hereditária, abeliana, conexa, com espaços de morfismos e extensões de dimensão finita, e com algum objeto inclinante então ela é derivadamente equivalente a $mod H$ para alguma \mathbb{k} -álgebra hereditária de dimensão finita H (neste caso dizemos que \mathcal{H} é do *tipo módulos*) ou derivadamente equivalente à categoria de feixes coerentes $coh \mathbb{X}$ para alguma reta projetiva com pesos \mathbb{X} (neste caso dizemos que \mathcal{H} é do *tipo feixes*). Veja mais detalhes sobre a categoria dos feixes coerentes na Subseção 1.2.2.

De acordo com Geigle e Lenzing em [27] e [28], temos uma equivalência derivada entre a categoria dos módulos sobre uma álgebra canônica e a categoria de feixes coerentes sobre uma reta projetiva, ou seja, temos a seguinte equivalência triangulada: $\mathcal{D}^b(coh \mathbb{X}(p, \lambda)) \cong \mathcal{D}^b(mod C(p, \lambda))$.

Dizemos que a álgebra Λ é hereditária por partes (veja [30] e [34]) se existe uma categoria hereditária, abeliana, com espaços de morfismos e extensões de dimensão finita, e com objetos inclinantes \mathcal{H} tal que as categorias derivadas limitadas $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ e $\mathcal{D}^b(\mathcal{H})$ são equivalentes como categorias derivadas.

Uma classe de álgebras hereditárias por partes que podemos citar é a classe das álgebras inclinadas iteradas. Assem e Happel, no ano de 1981 (veja [4]), classificaram as álgebras inclinadas iteradas do tipo \mathbb{A}_n . A classificação das álgebras inclinadas iteradas do tipo $\tilde{\mathbb{A}}_n$ foi dada por Assem e Skowronski no ano de 1987 (veja [6]). Keller em 1991 (veja [42]) classificou as álgebras hereditárias por partes do tipo \mathbb{D}_n . Zacharia juntamente com Happel, em [39], deram uma caracterização homológica das álgebras hereditárias por partes em 2008. A classificação de álgebras inclinadas iteradas do tipo \mathbb{E}_6 foi feita por Happel em seu trabalho sobre conjuntos de inclinação em cilindros [29], e Roggon completou os casos \mathbb{E}_p para $p = 6, 7, 8$, por meio de de invariantes atribuídos às

álgebras [58]. Marcos e Moreira, em [53] apresentaram um estudo sobre as álgebras de incidência que são hereditárias por partes, descrevem o carcás com relações das álgebras de incidência hereditárias por partes (PHIA) do tipo Dynkin e introduzem uma nova família de álgebras de incidência hereditárias por partes do tipo Dynkin estendido.

Como \mathbb{k} é um corpo algebricamente fechado, uma \mathbb{k} -álgebra hereditária básica de dimensão finita H é dada como a álgebra de caminhos $\mathbb{k}\vec{\Delta}$ sobre o corpo \mathbb{k} de um carcás finito $\vec{\Delta}$ sem ciclos orientados. Chamaremos então $\vec{\Delta}$ de *tipo hereditário* desta álgebra, ou simplesmente Δ (o grafo subjacente de $\vec{\Delta}$) caso Δ seja uma árvore e também chamaremos de $\mathbb{X}_{p_1, \dots, p_t}$ o tipo hereditário desta álgebra, caso ela seja hereditária por partes do tipo feixes.

Para $n \geq 1$ e $m \geq 4$ definimos os seguintes carcases orientados linearmente do tipo \mathbb{A}_n e \mathbb{D}_m .

$$\begin{array}{l} \vec{\mathbb{A}}_n : \quad 0 \longleftarrow 1 \longleftarrow \dots \longleftarrow n-1 \\ \\ \vec{\mathbb{D}}_m : \quad 0 \longleftarrow 1 \longleftarrow \dots \longleftarrow m-3 \longleftarrow m-2 \\ \hspace{15em} \swarrow \\ \hspace{16em} m-1 \end{array}$$

Vamos denotar por $\Lambda(n, r)$ (respectivamente, $\Delta(m, r)$) a álgebra r -truncada (ou seja, quocientada pelo ideal gerado por todos os caminhos de comprimento r) com carcás $\vec{\mathbb{A}}_n$ (respectivamente, $\vec{\mathbb{D}}_m$). Denotaremos por \mathbb{A}_n (respectivamente, \mathbb{D}_m) o grafo subjacente ao carcás $\vec{\mathbb{A}}_n$ (respectivamente, $\vec{\mathbb{D}}_m$).

Sejam $\Gamma^1, \dots, \Gamma^t$ grafos sem ciclos. Fixando em cada um destes grafos um vértice, que chamaremos de *vértice especial de Γ^i* , denotaremos por $[\Gamma^1, \dots, \Gamma^t]$ o grafo que possui subgrafos $\Upsilon^1, \dots, \Upsilon^t$ que satisfazem as seguintes propriedades: (1) Υ^i é isomorfo a Γ^i para todo i ; (2) $\bigcup_{1 \leq i \leq t} \Upsilon^i = [\Gamma^1, \dots, \Gamma^t]$; (3) Para todo $i \neq j$ temos $\Upsilon^i \cap \Upsilon^j = \{\text{elemento especial de } \Upsilon^i\}$. Chamamos o grafo $[\Gamma^1, \dots, \Gamma^t]$ de *colagem dos grafos $\Gamma^1, \dots, \Gamma^t$ por seus vértices especiais*. No caso de uma colagem dos grafos $\Gamma^i \in \{\mathbb{A}_n, \mathbb{D}_n\}$, o vértice especial fixado será o vértice 0.

Usaremos $\mathbb{T}_{p_1, p_2, p_3}$ para denotar o grafo $[\mathbb{A}_{p_1}, \mathbb{A}_{p_2}, \mathbb{A}_{p_3}]$. Quando não houver risco de confusão, denotaremos $\mathbb{T}_{p_1, p_2, p_3}$ simplesmente por $\mathbb{T}_{p_1 p_2 p_3}$ (veja página 28 para mais detalhes). Exemplos bem conhecidos destes grafos são os Diagramas de Dynkin: $\mathbb{E}_6 = \mathbb{T}_{233}$, $\mathbb{E}_7 = \mathbb{T}_{234}$ e $\mathbb{E}_8 = \mathbb{T}_{235}$; e os Diagramas de Dynkin estendidos: $\tilde{\mathbb{E}}_6 = \mathbb{T}_{333}$,

$\tilde{\mathbb{E}}_7 = \mathbb{T}_{244}$ e $\tilde{\mathbb{E}}_8 = \mathbb{T}_{236}$.

Happel e Seidel, em seu artigo [36], classificaram as álgebras hereditárias por partes para uma classe especial de álgebras de Nakayama, aquelas de carcás sem ciclos e truncadas, ou seja, álgebras de caminhos sobre o carcás linear $\overrightarrow{\mathbb{A}}_n$ quocientadas pelo ideal gerado por todos os caminhos de um determinado comprimento r . Os resultados foram agrupados na Tabela 1.1, que informa se determinada álgebra de Nakayama é ou não hereditária por partes. Quando tal álgebra é hereditária por partes, a tabela também apresenta o tipo hereditário desta álgebra.

Para a realização deste trabalho nos inspiramos neste último artigo [36] e generalizaremos seus resultados para a classe de álgebras seriais à direita que são colagens, em seus respectivos poços, de álgebras hereditárias e álgebras truncadas com carcases $\overrightarrow{\mathbb{A}}_n$ e $\overrightarrow{\mathbb{D}}_n$. Para isso, usaremos uma equivalência derivada entre álgebras seriais truncadas e álgebras de incidência de posets.

O seguinte teorema pode ser visto como uma primeira generalização para os resultados de [36]. Para detalhes, veja Seção 4.2.1.

Teorema 1. $\Delta(n, r)$ é hereditária por partes se, e somente se, $\Lambda(n-1, r)$ é hereditária por partes do tipo módulos.

Apresentaremos também uma classificação de álgebras obtidas pela colagem de álgebras seriais, podendo cada uma delas ser truncada por um comprimento diferente das demais.

Defina os seguintes conjuntos de álgebras:

$$\begin{aligned} \Omega &:= \{ \Lambda(n, r) \mid \Lambda(n, r) \text{ é hereditária por partes do tipo módulos} \} \cup \\ &\quad \cup \{ \Delta(7, 3), \Delta(9, 4), \Delta(n, r) \mid n - r = 1 \text{ ou } r = 2 \} \cup \\ &\quad \cup \{ \Lambda \mid \Lambda \text{ é hereditária serial à direita} \}; \\ \Omega^1 &:= \{ \Lambda(r+4, r) \mid r \geq 7 \} \cup \{ \Delta(r+4, r) \mid r \geq 5 \}; \\ \Omega^2 &:= \{ \Lambda \mid \Lambda = \Lambda(n, r) \text{ ou } \Lambda = \Delta(n, r) \text{ e } \Lambda \text{ é hereditária por partes} \} \setminus \Omega \cup \Omega^1. \end{aligned}$$

Teorema 2. Seja $\Lambda = \Lambda(\Lambda_1, \dots, \Lambda_t)$ uma colagem, em seus respectivos poços, dos seguintes tipos de álgebras: álgebras seriais truncadas com carcases $\overrightarrow{\mathbb{A}}_n$ ou $\overrightarrow{\mathbb{D}}_n$ ou

álgebras seriais à direita hereditárias. Então Λ é hereditária por partes se, e somente se, uma das seguintes condições é satisfeita.

- (1) t é qualquer e $\Lambda_i \in \Omega$ para todo $i \in \{1, \dots, t\}$;
- (2) $t = 1$ e $\Lambda_1 \in \Omega^1 \cup \Omega^2$;
- (3) $t = 2$, $\Lambda_1 \in \Omega^2$ e $\Lambda_2 = \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_k$ para algum $k \geq 2$.

No primeiro capítulo apresentamos alguns resultados preliminares que ajudarão na compreensão de todo o restante do trabalho, como por exemplo as mutações de posets, que são generalizadas na subseção 1.5.3.

No segundo capítulo introduzimos os complexos inclinantes e demonstramos o seguinte teorema.

Teorema 3. Toda álgebra serial sem ciclos truncada é derivadamente equivalente a uma álgebra de incidência de posets.

Lenzing e de la Peña, em [51], introduziram as famílias dos posets B_n e C_n , cujos grafos subjacentes têm um importante papel na teoria das singularidades. Veja [26] para a primeira aparição destes grafos e [24] para um livro-texto mais recente. No Capítulo 3, introduzimos os posets $B(n, m)$ e $C(n, m)$, que são generalizações dos diagramas $B_n = B(n, 0)$ e $C_n = C(n, 0)$, e introduzimos também os posets $C_1(n)$, $D(n, m)$ e $D_1(n)$. Neste mesmo capítulo mostramos que as álgebras de incidência dos posets $B(n, m)$, $C(n, m)$ e $C_1(n)$ (respectivamente, $D(n, m)$ e $D_1(n)$) são derivadamente equivalentes às álgebras truncadas com carcás $\vec{\mathbb{A}}_k$ (respectivamente, $\vec{\mathbb{D}}_l$). Veja Teoremas 3.8 e 3.10. Ainda no Capítulo 3, introduzimos as colagens de posets por um vértice maximal fixado. Classificamos as álgebras de incidência de colagens que são hereditárias por partes, identificando seus tipos hereditários, no caso de posets do tipo $C(n, m)$, $C_1(n)$, $D(n, m)$, $D_1(n)$ e posets cujo diagrama de Hasse é uma árvore.

No Capítulo 4, classificamos os tipos hereditários de álgebras seriais à direita que são colagens, em seus respectivos poços, de álgebras hereditárias e álgebras truncadas com carcases $\vec{\mathbb{A}}_n$ e $\vec{\mathbb{D}}_n$. As tabelas a seguir reúnem os resultados do Capítulo 4. Cada

entrada das tabelas foi preenchida com o tipo hereditário da álgebra $\Lambda(n, r)$ ou $\Delta(n, r)$ ou com um traço no caso em que elas não são hereditárias por partes. As células preenchidas com a cor verde representam as álgebras pertencentes ao conjunto Ω . As células preenchidas com a cor amarela representam as álgebras que, quando coladas com $\mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_k$ para algum $k \geq 2$ ainda são hereditárias por partes, mas quando coladas com qualquer álgebra diferente de $\mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_k$ deixam de ser hereditárias por partes. As células preenchidas com a cor vermelha representam as álgebras Λ_i tais que a colagem $\Lambda(\Lambda_i, \Lambda_j)$ é hereditária por partes se, e somente se, $\Lambda_j = \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_1$ e, neste caso, $\Lambda(\Lambda_i, \Lambda_j) \simeq \Lambda_i$.

Tabela 1: Os possíveis tipos hereditários de $\Lambda(n, r)$

$r \backslash n-r$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
2	\mathbb{A}_3	\mathbb{A}_4	\mathbb{A}_5	\mathbb{A}_6	\mathbb{A}_7	\mathbb{A}_8	\mathbb{A}_9	\mathbb{A}_{10}	\mathbb{A}_{11}	...
3	\mathbb{D}_4	\mathbb{D}_5	\mathbb{E}_6	\mathbb{E}_7	\mathbb{E}_8	$\tilde{\mathbb{E}}_8$	\mathbb{X}_{236}	\mathbb{X}_{237}	-	...
4	\mathbb{D}_5	\mathbb{E}_6	\mathbb{E}_7	$\tilde{\mathbb{E}}_7$	\mathbb{X}_{244}	\mathbb{X}_{245}	-	-	-	...
5	\mathbb{D}_6	\mathbb{E}_7	\mathbb{E}_8	$\tilde{\mathbb{E}}_8$	\mathbb{T}_{237}	-	-	-	-	...
6	\mathbb{D}_7	\mathbb{E}_8	$\tilde{\mathbb{E}}_8$	\mathbb{X}_{236}	\mathbb{X}_{237}	-	-	-	-	...
7	\mathbb{D}_8	$\tilde{\mathbb{E}}_8$	\mathbb{T}_{237}	\mathbb{X}_{237}	-	-	-	-	-	...
8	\mathbb{D}_9	\mathbb{T}_{237}	\mathbb{T}_{238}	\mathbb{X}_{238}	-	-	-	-	-	...
...

Tabela 2: Os possíveis tipos hereditários de $\Delta(n, r)$

$r \backslash n-r$	2	3	4	5	6	7	8	...
2	\mathbb{D}_4	\mathbb{D}_5	\mathbb{D}_6	\mathbb{D}_7	\mathbb{D}_8	\mathbb{D}_9	\mathbb{D}_{10}	...
3	$\tilde{\mathbb{D}}_4$	$\tilde{\mathbb{D}}_5$	$[\mathbb{D}_4, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$	$[\mathbb{D}_5, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$	$[\mathbb{D}_6, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$	$[\mathbb{D}_7, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$	-	...
4	\mathbb{T}_{2223}	$[\mathbb{D}_4, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$	$[\mathbb{D}_5, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$	$[\mathbb{D}_5, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_4]$	-	-	-	...
5	\mathbb{T}_{2224}	$[\mathbb{D}_4, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_4]$	$[\mathbb{D}_6, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$	$[\mathbb{D}_7, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$	$[\mathbb{D}_8, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$	-	-	...
6	\mathbb{T}_{2225}	$[\mathbb{D}_4, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_5]$	$[\mathbb{D}_7, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$	-	-	-	-	...
7	\mathbb{T}_{2226}	$[\mathbb{D}_4, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_6]$	$[\mathbb{D}_8, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$	-	-	-	-	...
...

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Categorias derivadas

Nesta seção apresentamos a definição de categorias derivadas e alguns resultados que auxiliarão na compreensão do nosso estudo.

1.1.1 Localização de categorias

Seja \mathcal{A} uma categoria e S uma classe arbitrária de morfismos em \mathcal{A} . Indicamos o livro de Milicic [54] para conhecer a construção da categoria $\mathcal{A}[S^{-1}]$, que é chamada de *localização de \mathcal{A} com respeito a S* , e também para a demonstração do seguinte teorema.

Teorema 1.1. Dadas uma categoria \mathcal{A} e uma classe arbitrária de morfismos S em \mathcal{A} , existe uma categoria $\mathcal{A}[S^{-1}]$ e um funtor $Q : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}[S^{-1}]$ tal que:

- (i) $Q(s)$ é um isomorfismo para todo $s \in S$;
- (ii) Dados uma categoria \mathcal{B} e um funtor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ tais que $F(s)$ é um isomorfismo para todo $s \in S$, então o funtor F se fatora unicamente por Q , isto é, existe um único funtor $G : \mathcal{A}[S^{-1}] \rightarrow \mathcal{B}$ tal que $F = G \circ Q$.

Além disso, a categoria $\mathcal{A}[S^{-1}]$ é única a menos de equivalência.

Sendo S uma classe arbitrária de morfismos, é difícil dizer algo sobre a localização de \mathcal{A} com respeito a S . Para lidar com este problema, trabalhamos com uma classe especial de morfismos.

Uma classe de morfismos S em \mathcal{A} é dita uma *classe de localização* quando satisfaz as seguintes propriedades:

- (LC1) Para cada objeto $M \in \mathcal{A}$, o morfismo identidade id_M de M está em S .
- (LC2) Se s e t são morfismos em S e existe a composição $s \circ t$, então $s \circ t \in S$.
- (LC3a) Para todo par de morfismos $f : M \rightarrow N$ e $s : L \rightarrow N$, com $s \in S$, existe outro par de morfismos $g : K \rightarrow L$ e $t : K \rightarrow M$, com $t \in S$, de forma que $f \circ t = s \circ g$, ou seja, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{g} & L \\ \downarrow t & & \downarrow s \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array} .$$

- (LC3b) Para todo par de morfismos $f : K \rightarrow L$ e $s : K \rightarrow M$, com $s \in S$, existe outro par de morfismos $g : M \rightarrow N$ e $t : L \rightarrow N$, com $t \in S$, de forma que $t \circ f = g \circ s$, ou seja, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f} & L \\ \downarrow s & & \downarrow t \\ M & \xrightarrow{g} & N \end{array} .$$

- (LC4) Considere dois morfismos $f, g : M \rightarrow N$ em \mathcal{A} . Então existe um morfismo $s \in S$ tal que $s \circ f = s \circ g$ se, e somente se, existe $t \in S$ tal que $f \circ t = g \circ t$.

1.1.2 Categorias trianguladas

As definições desta subseção foram retiradas do livro [54], cuja leitura é indicada para mais detalhes.

Seja \mathcal{C} uma categoria aditiva. Seja $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ um funtor aditivo que é um automorfismo da categoria \mathcal{C} . Chamaremos T de *functor translação* na categoria \mathcal{C} . Se X é um objeto de \mathcal{C} , usaremos a notação $T^n(X) = X[n]$ para qualquer $n \in \mathbb{Z}$.

Um *triângulo* em \mathcal{C} é um diagrama

$$X \longrightarrow Y \longrightarrow Z \longrightarrow T(X).$$

Um *morfismo de triângulos* é um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & T(X) \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \downarrow T(u) \\ X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & T(X') \end{array}$$

Um morfismo de triângulos é um *isomorfismo* de triângulos se u, v e w são isomorfismos.

A categoria \mathcal{C} é uma *categoria triangulada* se é equipada com uma família de triângulos chamados *triângulos distinguidos* que satisfazem as seguintes propriedades:

(TR1.a) Qualquer triângulo isomorfo a um triângulo distinguido é um triângulo distinguido.

(TR1.b) Para qualquer objeto $X \in \mathcal{C}$, o triângulo $X \xrightarrow{id_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow T(X)$ é um triângulo distinguido.

(TR1.c) Para qualquer morfismo $X \rightarrow Y$ em \mathcal{C} , existe um triângulo distinguido

$$X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Z \longrightarrow T(X).$$

(TR2) O triângulo $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T(X)$ é um triângulo distinguido se, e somente se, o triângulo $Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} T(X) \xrightarrow{-T(f)} T(Y)$ é um triângulo distinguido.

(TR3) Seja

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & T(X) \\ \downarrow u & & \downarrow v & & & & \downarrow T(u) \\ X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & T(X') \end{array}$$

um diagrama cujas linhas são compostas por triângulos distinguidos e tal que o primeiro quadrado é comutativo. Então existe um morfismo $w : Z \rightarrow Z'$ tal que

o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & T(X) \\
 \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \downarrow T(u) \\
 X' & \longrightarrow & Y' & \longrightarrow & Z' & \longrightarrow & T(X')
 \end{array}$$

é um morfismo de triângulos distinguidos.

(TR4) Sejam f , g e $h = g \circ f$ morfismos em \mathcal{C} . Então o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{a} & Z' & \longrightarrow & T(X) \\
 \downarrow id_X & & \downarrow g & & & & \downarrow T(id_X) \\
 X & \xrightarrow{h} & Z & \xrightarrow{b} & Y' & \longrightarrow & T(X) \\
 \downarrow f & & \downarrow id_Z & & & & \downarrow T(f) \\
 Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{c} & X' & \longrightarrow & T(Y)
 \end{array}$$

cujas linhas são compostas por triângulos distinguidos pode ser completado para o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{a} & Z' & \longrightarrow & T(X) \\
 \downarrow id_X & & \downarrow g & & \downarrow u & & \downarrow T(id_X) \\
 X & \xrightarrow{h} & Z & \xrightarrow{b} & Y' & \longrightarrow & T(X) \\
 \downarrow f & & \downarrow id_Z & & \downarrow v & & \downarrow T(f) \\
 Y & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{c} & X' & \longrightarrow & T(Y) \\
 \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow id_{X'} & & \downarrow T(a) \\
 Z' & \xrightarrow{g} & Y' & \xrightarrow{c} & X' & \longrightarrow & T(Z')
 \end{array}$$

onde todas as quatro linhas são compostas por triângulos distinguidos e as flechas verticais são morfismos de triângulos.

Sejam \mathcal{C} e \mathcal{D} duas categorias trianguladas. Um funtor aditivo $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é dito *graduado* se

(FT1) $T \circ F$ é isomorfo a $F \circ T$.

Um funtor graduado $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é dito *exato* se

(FT2) F manda triângulos distinguidos em triângulos distinguidos.

Duas categorias trianguladas \mathcal{C} e \mathcal{D} são ditas *equivalentes como categorias trianguladas* se existem funtores exatos $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ que realizam uma equivalência entre \mathcal{C} e \mathcal{D} .

1.1.3 Categoria de complexos e categoria homotópica

Seja \mathcal{A} uma categoria aditiva. Um *objeto graduado* de \mathcal{A} é uma família de objetos $X = (X^n; n \in \mathbb{Z})$, onde cada X^n é um objeto de \mathcal{A} . O objeto X^i é chamado de *componente homogênea* de X de grau i .

Um *complexo* (ou, equivalentemente, *complexo de cadeia*) sobre \mathcal{A} é um par (X, d_X) formado por um objeto graduado de \mathcal{A} e uma família de morfismos $d_X = (d_X^n; n \in \mathbb{Z})$ onde $d_X^n : X^n \rightarrow X^{n-1}$ são tais que $d_X^n \circ d_X^{n+1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Podemos visualizar o complexo (X, d_X) pelo diagrama

$$\dots \longrightarrow X^{n+1} \xrightarrow{d_X^{n+1}} X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n-1} \longrightarrow \dots$$

Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) dois complexos sobre \mathcal{A} . Um *morfismo de complexos* $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ é uma família de morfismos $f = (f^n; n \in \mathbb{Z})$ que satisfaz a igualdade $f^{n+1} \circ d_X^n = d_Y^n \circ f^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, ou seja, faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & X^{n+1} & \xrightarrow{d_X^{n+1}} & X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n-1} & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow f^{n+1} & & \downarrow f^n & & \downarrow f^{n-1} & & \\ \dots & \longrightarrow & Y^{n+1} & \xrightarrow{d_Y^{n+1}} & Y^n & \xrightarrow{d_Y^n} & Y^{n-1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

A *categoria de complexos sobre \mathcal{A}* é a categoria que tem como objetos os complexos sobre \mathcal{A} e que tem os morfismos de complexos como morfismos. Denotamos tal categoria por $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.

Uma subcategoria plena de \mathcal{A} é uma subcategoria \mathcal{B} tal que

$$\text{Hom}_{\mathcal{B}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$$

para quaisquer objetos $X, Y \in \mathcal{B}$.

Dizemos que um complexo X é *limitado abaixo* (respectivamente *limitado acima*)

se existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $X^n = 0$ para todo $n < n_0$ (respectivamente $X^n = 0$ para todo $n > n_0$). O complexo X é dito *limitado* se for limitado acima e abaixo. Denotamos por $\mathcal{C}^-(\mathcal{A})$ (respectivamente $\mathcal{C}^+(\mathcal{A})$ e $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$) a subcategoria plena de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ formada pelos complexos limitados abaixo (respectivamente limitados acima e limitados).

De agora em diante usaremos apenas a notação $\mathcal{C}^*(\mathcal{A})$ para representar qualquer uma das categorias acima.

Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ dois morfismos em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Dizemos que f é *homotópico* a g se existe uma família de morfismos $(h^n; n \in \mathbb{Z})$, com cada $h^n : X^n \rightarrow Y^{n-1}$, tal que $f^n - g^n = d_Y^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ d_X^n$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \swarrow h^n & \Downarrow f^n & \searrow g^n & & \\
 & & & & & \swarrow h^{n+1} & \\
 \dots & \longrightarrow & Y^{n-1} & \xrightarrow{d_Y^{n-1}} & Y^n & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

A família de morfismos $(h^n; n \in \mathbb{Z})$ é chamada de *homotopia*. Em particular, se o morfismo g é o morfismo zero, podemos dizer que f é *homotópico a zero*. É fácil verificar que a relação de homotopia é uma relação de equivalência.

A partir das observações acima, podemos definir a *categoria homotópica* $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ como sendo a categoria que tem como objetos os mesmos objetos da categoria $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ e cujos morfismos são as classes de equivalência dos morfismos em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ módulo homotopia. De maneira análoga, definimos as categorias *homotópica limitada abaixo*, *homotópica limitada acima* e *homotópica limitada*, que são denotadas respectivamente por $\mathcal{K}^-(\mathcal{A})$, $\mathcal{K}^+(\mathcal{A})$, e $\mathcal{K}^b(\mathcal{A})$. Também usaremos a notação $\mathcal{K}^*(\mathcal{A})$ para nos referir a qualquer uma das categorias acima.

Assuma agora que \mathcal{A} é uma categoria abeliana. Para $p \in \mathbb{Z}$ e X em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ definimos $H^p(X) = \ker(d_X^p) / \text{im}(d_X^{p-1})$ em \mathcal{A} . Se $f : X \rightarrow Y$ é um morfismo de complexos então $f^p(\ker(d_X^p)) \subset \ker(d_Y^p)$ e $f^p(\ker(d_X^{p-1})) \subset \ker(d_Y^{p-1})$, e portanto f induz um morfismo $H^p(f) : H^p(X) \rightarrow H^p(Y)$. Assim, $H^p : \mathcal{C}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ é um funtor chamado de *funtor de cohomologia*. Claramente os funtores H^p para $p \in \mathbb{Z}$ são aditivos.

Um morfismo $f : X \rightarrow Y$ em $\mathcal{C}^*(\mathcal{A})$ é dito um *quase-isomorfismo* se tivermos que $H^p(f) : H^p(X) \rightarrow H^p(Y)$ é um isomorfismo para todo $p \in \mathbb{Z}$.

Seja S^* a classe de todos os quase-isomorfismos de $\mathcal{K}^*(\mathcal{A})$. Afirmamos que a classe

S^* é uma classe de localização compatível com a triangulação. Para a demonstração de tal fato sugerimos consultar Milicic [54].

A localização da categoria $\mathcal{K}^*(\mathcal{A})$ com relação à classe S^* é chamada de *categoria derivada* de \mathcal{A} e denotada por $\mathcal{D}^*(\mathcal{A})$. Em particular, quando $\mathcal{A} = \text{mod } \Lambda$ para alguma \mathbb{k} -álgebra Λ , denotaremos $\mathcal{D}^*(\text{mod } \Lambda)$ simplesmente por $\mathcal{D}^*(\Lambda)$.

1.1.4 Teoria de Morita para categorias derivadas

O Teorema de Rickard (veja [55]) é muitas vezes descrito como Teorema de Morita para categorias derivadas e será apresentado nesta seção. O Teorema de Morita, descrito a seguir, estabelece uma condição necessária e suficiente para a equivalência entre duas categorias de módulos.

Teorema 1.2. Duas categorias de módulos $\text{mod } \Lambda$ e $\text{mod } \Gamma$ são equivalentes se, e somente se, existe um Λ -módulo finitamente gerado, projetivo e gerador P_Λ (também chamado de progerador) tal que $\Gamma \cong \text{End}(P_\Lambda)$.

Happel mostrou que categorias derivadas são invariantes na teoria da inclinação, ou seja, se Λ é uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado e T é um Λ -módulo inclinante então as categorias derivadas $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ e $\mathcal{D}^b(\text{End}(T))$ são equivalentes como categorias derivadas.

Rickard estendeu a noção de módulo inclinante para complexo inclinante e assim generalizou o Teorema de Happel. Mas antes de apresentar este resultado precisamos de mais uma definição.

Definição 1.3. Seja C uma categoria triangulada. Dizemos que uma subcategoria B gera C como categoria triangulada se não existe uma subcategoria triangulada própria e plena de C , fechada sobre isomorfismos, que contém B .

Dado um objeto X em uma categoria aditiva qualquer, a subcategoria $\text{add}(X)$ consiste de todos os somandos diretos de somas finitas de cópias de X . Dada uma \mathbb{k} -álgebra Λ , denotamos por $\text{proj } \Lambda$ a categoria dos Λ -módulos projetivos finitamente gerados.

O seguinte teorema é uma consequência imediata do Teorema 6.4 apresentado em [55].

Teorema 1.4. Sejam Γ e Λ duas \mathbb{k} -álgebras. As seguintes condições são equivalentes:

- (a) $\mathcal{D}^b(\Gamma)$ e $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ são equivalentes como categorias trianguladas;
- (b) Γ é isomorfa a $End(T)$, onde T é um objeto de $\mathcal{K}^b(proj \Lambda)$ que satisfaz:
 - (1) $Hom_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T, T[i]) = 0$ para todo $i \neq 0$;
 - (2) $add(T)$ gera $\mathcal{K}^b(proj \Lambda)$ como categoria triangulada.

Definição 1.5. Se T é um objeto de $\mathcal{K}^b(proj \Lambda)$ que satisfaz as condições (1) e (2) no item (b), dizemos que ele é um *complexo inclinante* de Λ .

1.2 Algumas classes de álgebras

As seguintes definições seguem o livro [5] e este deve ser consultado para mais detalhes.

Definição 1.6. Um *carcás* é uma quádrupla $Q = Q(Q_0, Q_1, s, t)$ tal que Q_0 é um conjunto de vértices, Q_1 é um conjunto de flechas entre os vértices de Q_0 e s, t são duas aplicações $Q_1 \rightarrow Q_0$ que indicam, respectivamente, a origem e o fim de cada flecha.

Se esquecermos a orientação das flechas de um quiver Q , teremos um grafo associado \bar{Q} , o qual chamaremos de *grafo subjacente a Q* .

Definição 1.7. Dados um carcás Q e um vértice $a \in Q_0$ dizemos que a é um *poço* (respectivamente, *fonte*) de Q se não existe flecha $\alpha \in Q_1$ tal que $s(\alpha) = a$ (respectivamente, $t(\alpha) = a$).

Definição 1.8. Um *caminho* no carcás Q é uma composição de flechas $w = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$, onde $\alpha_i \in Q_1$ para todo $i = 1, \dots, n$ e $s(\alpha_{i+1}) = t(\alpha_i)$ para $i = 1, \dots, n - 1$. Fixamos que $s(w) = s(\alpha_1)$ e $t(w) = t(\alpha_n)$. Se $s(w) = a$ e $t(w) = b$, então denotaremos $w = (a \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \mid b)$.

Definição 1.9. O *comprimento de um caminho* $\ell(w)$ é dado pela quantidade de flechas que aparecem na sua composição.

Definição 1.10. Definimos também o conjunto Q_n , para $n \geq 2$, como sendo o conjunto de todos os caminhos de comprimento n .

Definição 1.11. A *álgebra de caminhos* $\mathbb{k}Q$ de um carcás Q é definida como sendo a \mathbb{k} -álgebra cujo \mathbb{k} -espaço vetorial subjacente tem como base o conjunto de todos os caminhos $(a \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \mid b)$ de comprimento $n \geq 0$ em Q e tal que o produto de dois caminhos da base $(a \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \mid b)$ e $(c \mid \beta_1, \dots, \beta_m \mid d)$ de $\mathbb{k}Q$ é definido por

$$(a \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \mid b)(c \mid \beta_1, \dots, \beta_m \mid d) = \begin{cases} (a \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m \mid d), & \text{se } b = c \\ 0, & \text{se } b \neq c \end{cases}$$

O produto de elementos da base é então estendido a elementos arbitrários de $\mathbb{k}Q$ por distributividade.

Em outras palavras, existe uma decomposição de $\mathbb{k}Q$ em soma direta de \mathbb{k} -espaços vetoriais

$$\mathbb{k}Q = \mathbb{k}Q_0 \oplus \mathbb{k}Q_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{k}Q_n \oplus \dots$$

Definição 1.12. Dada uma álgebra de caminhos quocientada por um ideal $\Lambda = \frac{\mathbb{k}Q}{I}$, dizemos que Λ é *r-truncada* se I é o ideal gerado por todos os caminhos de comprimento $r \geq 2$ em $\mathbb{k}Q$, ou seja, se $I = \langle Q_r \rangle$.

Dizemos que um caminho w de Q é um *caminho da álgebra* $\Lambda = \frac{\mathbb{k}Q}{I}$ se $w \notin I$.

Definição 1.13. Um ideal I de $\mathbb{k}Q$ é dito um *ideal admissível* se existe $m \geq 2$ tal que $\mathbb{k}Q_m \subseteq I \subseteq \mathbb{k}Q_2$.

Seja Q um carcás finito e conexo, I um ideal admissível de $\mathbb{k}Q$ e $\Lambda = \frac{\mathbb{k}Q}{I}$. Vamos denotar por P_a o módulo projetivo indecomponível $e_a\Lambda$ que corresponde ao vértice $a \in Q_0$. Para cada caminho w do vértice b para o vértice a em Q tal que $w \notin I$ denotaremos por w o morfismo entre P_a e P_b que corresponde à multiplicação à esquerda por $\bar{w} = w + I$.

Definição 1.14. Sejam Λ uma \mathbb{k} -álgebra básica, conexa e de dimensão finita e $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos de Λ . O *carcás (ordinário)* de Λ , denotado por Q_Λ é definido da seguinte maneira:

- (a) Os vértices de Q_Λ são os números $1, 2, \dots, n$ que estão em bijeção com os idempotentes e_1, e_2, \dots, e_n .

(b) Dados dois vértices $a, b \in (Q_\Lambda)_0$, as flechas $\alpha : a \rightarrow b$ estão em bijeção com os vetores de uma base do \mathbb{k} -espaço vetorial $e_a(\text{rad } \Lambda / \text{rad}^2 \Lambda)e_b$.

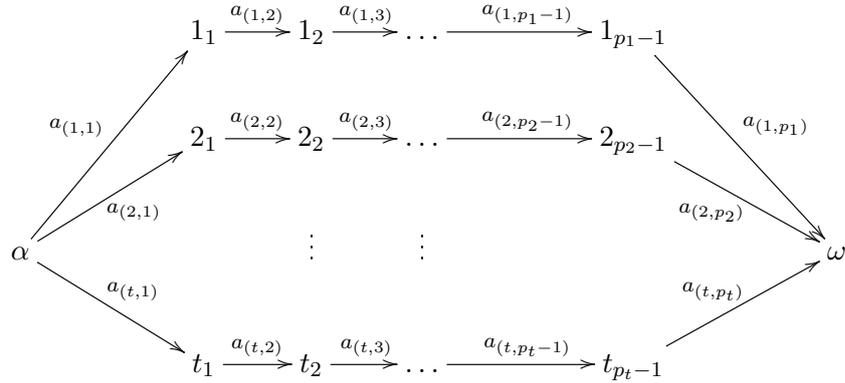
Para mais detalhes, veja a Seção II.3 do livro [5]. Nesta mesma seção pode ser encontrada a demonstração do Teorema de Gabriel, que enunciamos a seguir.

Teorema 1.15. Seja Λ uma \mathbb{k} -álgebra básica, conexa e de dimensão finita. Existe um ideal admissível I de $\mathbb{k}Q_\Lambda$ tal que $\Lambda \cong \frac{\mathbb{k}Q_\Lambda}{I}$.

1.2.1 Álgebras canônicas

Aqui apresentaremos apenas a definição de álgebras canônicas. Para mais detalhes sugerimos [56] e [57].

Sejam $t \geq 2$ e $p = (p_1, p_2, \dots, p_t)$, com $p_i \in \mathbb{Z}$, $p_i \geq 2$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, t\}$. Considere o carcás $Q = Q(p_1, p_2, \dots, p_t)$ representado abaixo:



Agora, para $t \geq 3$, seja $\lambda = (\lambda_3, \dots, \lambda_t) \in \mathbb{k}^{t-2}$ de forma que todos λ_i são não nulos e distintos dois a dois. Sem perda de generalidade podemos assumir também $\lambda_3 = 1$. Para $t = 2$, fixamos $\lambda = 0$. Defina $C(p, \lambda)$ como sendo o quociente da álgebra de caminhos $\mathbb{k}Q$ pelo ideal I gerado pelas relações $\rho_i = a_{(1,1)}a_{(1,2)} \dots a_{(1,p_1-1)}a_{(1,p_1)} + \lambda_i a_{(2,1)}a_{(2,2)} \dots a_{(2,p_2-1)}a_{(2,p_2)} - a_{(i,1)}a_{(i,2)} \dots a_{(i,p_i-1)}a_{(i,p_i)}$ para cada i tal que $3 \leq i \leq t$.

Caso $t = 2$ consideramos $C(p, \lambda) = \mathbb{k}Q$. A álgebra $C(p, \lambda)$ é chamada de *álgebra canônica*. Caso $t = 3$, como podemos assumir $\lambda_3 = 1$, denotaremos $C(p, \lambda)$ simplesmente por $C(p_1, p_2, p_3)$.

1.2.2 Retas projetivas com pesos

Apresentamos nesta seção uma breve descrição das retas projetivas com pesos e suas relações com as álgebras canônicas. Para maiores detalhes sobre retas projetivas com pesos sugerimos [12] e [22].

Seja $t \geq 3$. Uma *reta projetiva com pesos* $\mathbb{X} = \mathbb{X}(p, \lambda)$ é dada por uma *sequência de pesos* $p = (p_1, p_2, \dots, p_t)$ de inteiros $p_i \in \mathbb{Z}$, $p_i \geq 2$ e uma *sequência de parâmetros* $\lambda = (\lambda_3, \dots, \lambda_t)$ com cada $\lambda_i \in \mathbb{k}$ não nulo e distintos dois a dois. Sem perda de generalidade podemos tomar $\lambda_3 = 1$.

Seja $\mathbb{L} = \mathbb{L}(p, \lambda)$ o grupo abeliano gerado pelos elementos x_1, x_2, \dots, x_t módulo relações $p_i x_i = p_j x_j$ para todos $1 \leq i, j \leq t$. Chamamos $c = p_i x_i$ de *elemento canônico* de \mathbb{L} . O morfismo grau $\delta : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{Z}$ é dado por $x_i \mapsto \frac{m}{p_i}$, onde m é o menor múltiplo comum entre p_1, p_2, \dots, p_t .

Seja $S = \mathbb{k}[X_1, X_2, \dots, X_t]/I$, onde I é o ideal gerado pelas relações $\rho_i = X_1^{p_1} + \lambda_i X_2^{p_2} - X_i^{p_i} = 0$ para $3 \leq i \leq t$. Definido dessa maneira, S é \mathbb{L} -graduado com X_i de grau x_i .

Seja $\text{mod}^{\mathbb{L}}(S)$ a categoria dos S -módulos \mathbb{L} -graduados finitamente gerados, e seja $\text{mod}_0^{\mathbb{L}}(S)$ a subcategoria de $\text{mod}^{\mathbb{L}}(S)$ consistindo dos S -módulos de dimensão finita.

Defina $\text{coh}(\mathbb{X})$ como sendo o quociente $\text{mod}^{\mathbb{L}}(S)/\text{mod}_0^{\mathbb{L}}(S)$. Essa categoria é chamada de categoria de feixes coerentes na reta projetiva com pesos \mathbb{X} .

De acordo com Geigle e Lenzing em [27] e [28], temos uma equivalência derivada entre a categoria canônica (a categoria dos módulos sobre uma álgebra canônica) e a categoria de feixes coerentes sobre uma reta projetiva.

Teorema 1.16. Temos a seguinte equivalência entre categorias derivadas:

$$\mathcal{D}^b(\text{coh } \mathbb{X}(p, \lambda)) \cong \mathcal{D}^b(\text{mod } C(p, \lambda)).$$

1.2.3 Extensões por um ponto

Seja Λ uma álgebra associativa, com unidade, de dimensão finita sobre um corpo \mathbb{k} . A partir de Λ , criaremos uma nova álgebra pelo processo descrito a seguir, chamado de extensão por um ponto. O "ponto", neste caso, faz referência a um Λ -módulo que fixamos para construir a extensão. Esse processo é muito útil principalmente em

argumentos de indução. Os detalhes omitidos nesta subseção podem ser obtidos em [13] e também em [60].

Cada Λ -módulo pode ser visto como um (\mathbb{k}, Λ) -bimódulo ${}_{\mathbb{k}}M_{\Lambda}$. Assim podemos construir uma álgebra de matrizes

$$\begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ M & \mathbb{k} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ m & \lambda \end{bmatrix} ; a \in \Lambda, m \in M, \lambda \in \mathbb{k} \right\}$$

que é chamada de extensão por um ponto de Λ por M e denotada por $\Lambda[M]$.

Analogamente, podemos também definir a coextensão por um ponto

$$[M]\Lambda = \begin{bmatrix} \mathbb{k} & 0 \\ DM & \Lambda \end{bmatrix}$$

com a multiplicação induzida pela estrutura de Λ - \mathbb{k} -bimódulo de

$$DM = \text{Hom}_{\mathbb{k}}({}_{\mathbb{k}}M_{\Lambda}, \mathbb{k})$$

induzida pela estrutura de \mathbb{k} - Λ -bimódulo de ${}_{\mathbb{k}}M_{\Lambda}$.

1.2.4 Álgebras de incidência de posets

Definição 1.17. Um conjunto parcialmente ordenado, ou *poset*, é um conjunto P com uma relação binária $R \subseteq P \times P$ satisfazendo as seguintes condições:

- Reflexividade: $(x, x) \in R$ para todo $x \in P$;
- Antissimetria: Se $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$ então $x = y$;
- Transitividade: Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$ então $(x, z) \in R$.

Por simplicidade vamos escrever apenas $x \leq y$ nos casos em que $(x, y) \in R$ e denotaremos o poset por (P, \leq) ou, mais geralmente, apenas por P .

Dizemos que um poset (P, \leq) é *finito* se o conjunto P for finito.

Observação 1.18. Dado um poset finito P , digamos que $|P| = n$, então podemos ordenar os elementos de P em uma sequência x_1, \dots, x_n de forma que se $x_i < x_j$ então $i < j$ para quaisquer $1 \leq i, j \leq n$.

Cada poset (X, \leq) pode ser associado a um grafo orientado, que é chamado de *diagrama de Hasse* de X . Cada elemento de X está associado a um único vértice de seu diagrama de Hasse e, dados dois elementos $x < y \in X$ tais que não existe um outro elemento $z \in X$ tal que $x < z < y$ então temos uma flecha $x \rightarrow y$ no diagrama.

Por simplicidade, chamaremos de *grafo de um poset* ao grafo subjacente ao diagrama de Hasse deste poset.

Definição 1.19. A *álgebra de incidência* de um poset finito (X, \leq) sobre um corpo \mathbb{k} , denotada por $\mathbb{k}X$, é definida como a álgebra associativa que tem como base o conjunto $\{e_{xy} : x \leq y \text{ em } X\}$. Para quaisquer $x \leq y$ e $z \leq w$ em X , definimos a multiplicação por

$$e_{xy}e_{zw} = \begin{cases} e_{xw}, & \text{se } y = z; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

É imediato o fato de que dois posets são isomorfos se, e somente se, suas respectivas álgebras de incidência são isomorfas.

Ladkani estudou as categorias derivadas de álgebras de incidência de posets e introduziu alguns complexos inclinantes partindo de uma topologia natural relacionada a estes posets (veja [46] e [47]). Para um texto mais detalhado e em português sugiro a leitura de [1].

Podemos, naturalmente, associar um poset X a um espaço topológico cujos abertos são os conjuntos $U \subseteq X$ tais que se $u \in U$ e $u' \geq u$ então $u' \in U$. Os subconjuntos fechados de $F \subseteq X$ são tais que se $x \in F$ e $x' \leq x$ então $x' \in F$. Dado $x \in X$, definimos U_x como sendo o subconjunto aberto minimal de X que contém x , ou seja, $U_x = \{u \in X \mid u \geq x\}$; definimos também $\overline{\{x\}}$ como sendo o fecho de $\{x\}$, ou seja, $\overline{\{x\}} = \{v \in X \mid v \leq x\}$.

Fixando um poset X e tomando um subconjunto fechado $Y \subseteq X$ que tem o aberto U como complementar em X , podemos definir a álgebra \mathcal{A}_Y , que possui como \mathbb{k} -base os elementos

$$\{e_{yy'} \mid y \leq y'\} \cup \{e_{u'u} \mid u' \leq u\} \cup \{e_{uy} \mid y < u\}$$

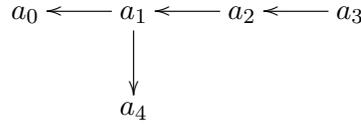
onde $y, y' \in Y, u', u \in U$. A multiplicação é definida por

$$e_{yy'}e_{y'y''} = e_{yy''} \qquad e_{u''u'}e_{u'u} = e_{u''u}$$

$$e_{uy}e_{yy'} = \begin{cases} e_{uy'}, & \text{se } y' < u \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \qquad e_{u'u}e_{uy} = \begin{cases} e_{u'y}, & \text{se } y < u' \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

para $y \leq y' \leq y'' \in Y, u'' \leq u' \leq u \in U$ e todos os outros produtos são nulos.

Exemplo 1.20. Considerando o poset X cujo diagrama de Hasse é dado por



Tome o subconjunto fechado $Y = \overline{\{a_0\}} = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$, cujo complementar aberto é $U = U_{a_4} = \{a_4\}$, então temos que o conjunto

$$\{e_{a_3a_3}, e_{a_3a_2}, e_{a_3a_1}, e_{a_3a_0}, e_{a_2a_2}, e_{a_2a_1}, e_{a_2a_0}, e_{a_1a_1}, e_{a_1a_0}, e_{a_0a_0}\} \cup \{e_{a_4a_4}\} \cup \{e_{a_4a_3}, e_{a_4a_2}, e_{a_4a_1}\}$$

é uma \mathbb{k} -base da álgebra \mathcal{A}_Y . Logo, a álgebra \mathcal{A}_Y é a álgebra quociente da álgebra de caminhos sobre o carcás

$$a_0 \longleftarrow a_1 \longleftarrow a_2 \longleftarrow a_3 \longleftarrow a_4$$

pelo ideal gerado pelo caminho $e_{a_4a_3}e_{a_3a_2}e_{a_2a_1}e_{a_1a_0}$.

De acordo com [46], Proposição 4.5, vale a seguinte equivalência.

Teorema 1.21. $\mathcal{D}^b(\mathbb{k}X) \simeq_{\text{der}} \mathcal{D}^b(\mathcal{A}_Y)$.

O seguinte lema nos dá condições suficientes para que a álgebra \mathcal{A}_Y seja isomorfa à álgebra de incidência de um poset. Veja Lema 4.9 em [46].

Lema 1.22. Seja X um poset, Y um subconjunto fechado em X e U o aberto complementar de Y em X . Defina o conjunto $X' := U \cup Y = X$ e a seguinte relação binária

(\leq') em X' :

$$u' \leq' u \iff u' \leq u; y \leq' y' \iff y \leq y'; u <' y \iff y < u$$

para $u, u' \in U$ e $y, y' \in Y$. Então \leq' é uma relação de ordem parcial se, e somente se, a seguinte condição for válida:

Sempre que $y \leq y' \in Y$, $u' \leq u \in U$ e $y < u$, temos que $y' < u'$.

Se esta condição for válida, então a álgebra \mathcal{A}_Y é isomorfa à álgebra de incidência de (X', \leq') .

1.2.5 Álgebras seriais e álgebras de Nakayama

Nesta seção apresentaremos as álgebras de Nakayama, que alguns autores também chamam de álgebras unisseriais generalizadas (veja [25]). Para detalhes omitidos, sugerimos a consulta de [5], Capítulo 5. As álgebras de Nakayama têm uma particularidade interessante, são sempre de representação finita.

Seja Λ uma \mathbb{k} -álgebra. Dado um Λ -módulo à direita de dimensão finita M existe uma cadeia $0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_m = M$ de submódulos de M tais que $\frac{M_{i+1}}{M_i}$ é um módulo simples para todo $i = 0, 1, \dots, m - 1$. Chamamos esta cadeia de *série de composição* de M .

Definição 1.23. Um Λ -módulo à direita M é dito *uniserial* se possui uma única série de composição. Uma álgebra Λ é dita *serial à direita* se todo Λ -módulo à direita indecomponível projetivo for uniserial. Uma álgebra Λ é dita *serial à esquerda* se todo Λ -módulo à esquerda indecomponível projetivo for uniserial.

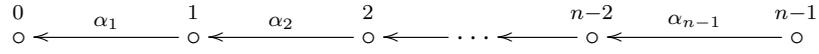
Definição 1.24. Uma álgebra Λ é chamada de *álgebra de Nakayama* se for serial à direita e à esquerda.

Lema 1.25. Uma álgebra Λ é serial à direita se, e somente se, para todo módulo à direita projetivo indecomponível P o módulo $radP/rad^2P$ é simples ou zero.

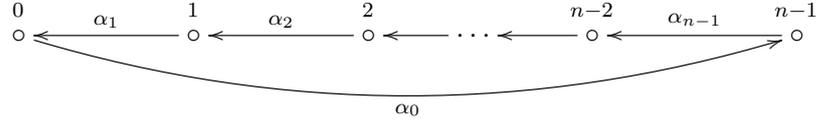
Teorema 1.26. Uma \mathbb{k} -álgebra básica Λ é serial à direita se, e somente se, para todo vértice a de seu carcás Q_Λ , existe no máximo uma flecha que começa em a .

Teorema 1.27. Uma álgebra básica e conexa Λ é uma álgebra de Nakayama se, e somente se, seu carcás Q_Λ é um dos dois a seguir:

(a)



(b)



1.2.6 Álgebras gentis torcidas

Seja \mathcal{I} um conjunto de relações em um carcás Q .

Definição 1.28. O par (Q, \mathcal{I}) é dito *especial bisserial* se as seguintes condições são satisfeitas:

- Em todo vértice de Q no máximo duas flechas terminam e no máximo duas flechas começam.
- Para cada flecha b existe no máximo uma flecha a com $t(a) = s(b)$ e $ab \notin \mathcal{I}$ e no máximo uma flecha c com $t(b) = s(c)$ e $bc \notin \mathcal{I}$.

O par (Q, \mathcal{I}) é dito ser *gentil* se ele é especial bisserial e, além disso, as seguintes condições são satisfeitas:

- O conjunto \mathcal{I} consiste de caminhos de comprimento 2.
- Para cada flecha b existe no máximo uma flecha a com $t(a) = s(b)$ e $ab \in \mathcal{I}$ e no máximo uma flecha c com $t(b) = s(c)$ e $bc \in \mathcal{I}$.

Uma \mathbb{k} -álgebra Λ é *especial bisserial* (respectivamente, *gentil*) se é Morita-equivalente a uma álgebra $\frac{\mathbb{k}Q}{(\mathcal{I})}$, onde o par (Q, \mathcal{I}) é especial bisserial (respectivamente, gentil).

Seja Q um carcás com um conjunto fixado de vértices que denotaremos por Sp , e \mathcal{I} um conjunto de relações para Q . Chamaremos os elementos de Sp de *vértices especiais*, os demais vértices serão chamados de *ordinários*.

Para uma tripla (Q, Sp, \mathcal{I}) , consideremos o par $(Q^{sp}, \mathcal{I}^{sp})$, onde $Q_0^{sp} := Q_0$, $Q_1^{sp} := Q_1 \cup \{a_i \mid i \in Sp\}$, $s(a_i) := t(a_i) := i$ e $\mathcal{I}^{sp} := \mathcal{I} \cup \{a_i^2 \mid i \in Sp\}$.

Definição 1.29. Uma tripla (Q, Sp, \mathcal{I}) como acima é chamada de *gentil torcida* se o par correspondente $(Q^{sp}, \mathcal{I}^{sp})$ for gentil.

Seja (Q, Sp, \mathcal{I}) uma tripla gentil torcida. Associaremos a cada vértice $i \in Q_0$ um conjunto, o qual denotaremos por $Q_0(i)$, da seguinte maneira: se i é um vértice ordinário então $Q_0(i) = \{i\}$, se i é especial então $Q_0(i) = \{(i, -), (i, +)\}$.

$(Q^{sg}, \mathcal{I}^{sg})$ denotará o par definido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} Q_0^{sg} &:= \bigcup_{i \in Q_0} Q_0(i), \\ Q_1^{sg} &:= \bigcup_{\alpha \in Q_1} \{(a, \alpha, b) \mid a \in Q_0(s(\alpha)), b \in Q_0(t(\alpha))\}, \\ \mathcal{I}^{sg} &:= \left\{ \sum_{b \in Q_0(s(\beta))} \lambda_b(a, \alpha, b)(b, \beta, c) \mid \alpha\beta \in \mathcal{I}, a \in Q_0(s(\alpha)), c \in Q_0(t(\beta)) \right\}, \text{ onde } \lambda_b = \\ &-1 \text{ se } b = (i, -) \text{ para algum } i \in Q_0, \text{ e } \lambda_b = 1 \text{ caso contrário.} \end{aligned}$$

Exemplo 1.30. Seja Q o carcás

$$Q : \quad 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} 2$$

com $\mathcal{I} = \{\alpha\beta, \beta\alpha\}$, $Sp = \{2\}$.

Então

$$Q^{sg} : \quad a \begin{array}{c} \xrightarrow{\beta_1} \\ \xleftarrow{\alpha_1} \end{array} b \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha_2} \\ \xleftarrow{\beta_2} \end{array} c$$

com $\mathcal{I}^{sg} = \{\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2, \beta_i\alpha_j \mid i, j = 1, 2\}$, onde $a = (2, -)$, $b = 1$, $c = (2, +)$, $\alpha_1 = (b, \alpha, a)$, $\alpha_2 = (b, \alpha, c)$, $\beta_1 = (a, \beta, b)$ e $\beta_2 = (c, \beta, b)$.

Definição 1.31. Uma \mathbb{k} -álgebra Λ é chamada de *gentil torcida*, se ela é Morita-equivalente a uma álgebra $\mathbb{k}Q^{sg}/\langle \mathcal{I}^{sg} \rangle$, onde a tripla (Q, Sp, \mathcal{I}) é gentil torcida.

Seja (Q, Sp, \mathcal{I}) uma tripla gentil torcida. Denotaremos por Λ_+ a álgebra gerada pelos elementos da forma (a_1, α, a_2) e 1_{a_3} , onde $a_i \neq (j, -)$, $j \in Sp$. Notamos que em geral as unidades em Λ e Λ_+ são diferentes.

A partir de agora, identificaremos a álgebra Λ_+ com a álgebra $\frac{\mathbb{k}Q}{\langle \mathcal{J} \rangle}$, onde $\mathcal{J} = \mathcal{I} \setminus \{\alpha\beta \mid \alpha\beta \in \mathcal{I}, t(\alpha) \in Sp\}$.

Dada uma flecha α de Q , denotaremos por α^{-1} um *inverso formal* de α , de forma que $s(\alpha^{-1}) = t(\alpha)$ e $t(\alpha^{-1}) = s(\alpha)$; assim temos também $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$. Para cada

caminho $w = \alpha_1 \dots \alpha_n$ definimos $w^{-1} = (\alpha_1 \dots \alpha_n)^{-1} = \alpha_n^{-1} \dots \alpha_1^{-1}$, $s(w^{-1}) = t(w)$ e $t(w^{-1}) = s(w)$.

Chamamos de *passeio* p (respectivamente, *passeio generalizado*) de comprimento $n > 0$ uma sequência $p_1 \dots p_n$ onde cada p_i é da forma w ou w^{-1} , onde w é um caminho de comprimento 1 (respectivamente, um caminho de comprimento > 0 em $\frac{\mathbb{k}Q}{\langle \mathcal{J} \rangle}$) onde $s(p_{i+1}) = t(p_i)$ para $1 \leq i < n$. Novamente fixamos $s(p) = s(p_1)$ e $t(p) = t(p_n)$. Definimos o *inverso de um passeio* (respectivamente, *inverso de um passeio generalizado*) da maneira usual.

A *composição* de dois passeios (respectivamente, passeios generalizados) $p = p_1 \dots p_n$ e $p' = p'_1 \dots p'_{n'}$ é definida como sendo o passeio (respectivamente, passeio generalizado) $pp' = p_1 \dots p_n p'_1 \dots p'_{n'}$ se $t(p_n) = t(p) = s(p') = s(p'_1)$.

Consideraremos duas relações de equivalência no conjunto de passeios generalizados, que serão denotadas por \cong_s e \cong_r . Por definição, \cong_s é a relação de equivalência definida no conjunto de todos os passeios generalizados dada por $p \cong_s q$ se, e somente se, $p = q^{-1}$ ou $p = q$; e \cong_r é a relação de equivalência definida no conjunto de todos os passeios generalizados fechados (isto é, passeios p tais que $s(p) = t(p)$) que identifica cada passeio generalizado $p = p_1 \dots p_n$ com suas rotações $p_j \dots p_n p_1 \dots p_{j-1}$ e seus inversos.

Por definição, uma *corda* é um passeio $p = p_1 \dots p_n$ tal que $p_{i+1} \neq p_i^{-1}$, para $1 \leq i < n$ e tal que nenhum sub-passeio de p ou de p^{-1} está em \mathcal{J} . O conjunto de todos as cordas será denotado por St .

Por \overline{GSt} denotaremos o conjunto de todos os passeios generalizados $p = p_1 \dots p_n$ que satisfazem

- Se p_i e p_{i+1} são caminhos e $t(p_i) \notin Sp$, então $p_i p_{i+1} \in \langle \mathcal{J} \rangle$.
- Se p_i^{-1} e p_{i+1}^{-1} são caminhos e $t(p_i) \notin Sp$, então $p_i^{-1} p_{i+1}^{-1} \in \langle \mathcal{J} \rangle$.
- Se p_i e p_{i+1}^{-1} são caminhos ou p_i^{-1} e p_{i+1} são caminhos e $t(p_i) \notin Sp$, então $p_i p_{i+1} \in St$.

Denotamos por GSt um conjunto fixado de representantes w de \overline{GSt} sobre a relação de equivalência \cong_s e todos os caminhos triviais; seus elementos serão chamados de *cordas generalizadas*.

Chamamos uma corda generalizada não trivial de *simétrica* se $w = w^{-1}$ e de *asimétrica* caso contrário. Denotaremos por GSt_s o subconjunto de todas as cordas generalizadas simétricas e $GSt_a := GSt \setminus GSt_s$.

Para cada corda generalizada w em (Q, \mathcal{J}) , é possível definir um complexo projetivo P_w em $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ (Veja Definição 9 em [16]). De acordo com a Seção 5.2, também em [16], vale o seguinte lema.

Lema 1.32. Seja (Q, \mathcal{I}, Sp) uma tripla gentil torcida e $\Lambda = \frac{\mathbb{k}Q^{sg}}{\mathcal{I}^{sg}}$ a álgebra gentil torcida correspondente. Se w é uma corda generalizada simétrica em (Q, \mathcal{J}) então o complexo projetivo P_w é indecomponível em $\mathcal{D}^b(\Lambda)$.

1.3 Categorias hereditárias

1.3.1 Categorias hereditárias

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados gerais sobre categorias hereditárias. Para mais informações e consulta das demonstrações omitidas aqui sugerimos [49].

Dizemos que uma categoria abeliana \mathcal{H} é *hereditária* se $Ext_{\mathcal{H}}^n(X, Y) = 0$ para todo $n \geq 2$ e quaisquer objetos X e Y em \mathcal{H} . Isso equivale a assumir que os funtores $Ext_{\mathcal{H}}^1(_, Y)$ e $Ext_{\mathcal{H}}^1(X, _)$ são exatos à direita, isto é, mandam seqüências exatas curtas em seqüências exatas à direita.

Definição 1.33. Dada uma álgebra Λ , o *grupo de Grothendieck* de Λ ou, mais precisamente, de $mod \Lambda$ é o grupo abeliano $K_0(\Lambda) = \mathcal{F}/\mathcal{F}'$, onde \mathcal{F} é o grupo abeliano livre que tem como base o conjunto de todas as classes de isomorfismo \tilde{M} dos Λ -módulos M e \mathcal{F}' é o subgrupo de \mathcal{F} gerado pelos elementos $\tilde{L} - \tilde{M} - \tilde{N}$ que correspondem a todas as seqüências exatas

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

em $mod \Lambda$. Denotamos por $[M]$ a imagem da classe de isomorfismo \tilde{M} do Λ -módulo M pelo epimorfismo de grupos canônico $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}/\mathcal{F}'$.

A seguinte definição está presente no livro [3].

Definição 1.34. Seja $A \cong \mathbb{k}Q/I$ uma \mathbb{k} -álgebra e seja M um módulo em $\text{mod}A$. O vetor *dimensão* de M é definido como o vetor

$$\mathbf{dim}M = \begin{bmatrix} \dim_{\mathbb{k}}(Me_1) \\ \vdots \\ \dim_{\mathbb{k}}(Me_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dim_{\mathbb{k}}(\text{Hom}_A(P(1), M)) \\ \vdots \\ \dim_{\mathbb{k}}(\text{Hom}_A(P(n), M)) \end{bmatrix}.$$

O seguinte resultado nos diz que o grupo $K_0(\Lambda)$ é livre e isomorfo ao grupo livre \mathbb{Z}^n . Sua demonstração pode ser consultada em [5].

Teorema 1.35. Seja Λ uma \mathbb{k} -álgebra básica de dimensão finita e seja $\{S(1), S(2), \dots, S(n)\}$ um conjunto completo de classes de isomorfismo de Λ -módulos à direita simples. Então o grupo de Grothendieck $K_0(\Lambda)$ de Λ é um grupo abeliano livre que tem como base o conjunto $\{[S(1)], [S(2)], \dots, [S(n)]\}$ e existe um único isomorfismo de grupos $\mathbf{dim} : K_0(\Lambda) \rightarrow \mathbb{Z}^n$ tal que $\mathbf{dim}[M] = \mathbf{dim}M$ para cada Λ -módulo M .

Definição 1.36. Seja \mathcal{H} uma \mathbb{k} -categoria abeliana, hereditária, e Ext -finita. Dizemos que $T \in \mathcal{H}$ é um *objeto inclinante* de \mathcal{H} se

- i) $\text{Ext}_{\mathcal{H}}^1(T, T) = 0$, e
- ii) para todo $X \in \mathcal{H}$, vale a seguinte condição:

$$\text{Ext}_{\mathcal{H}}^1(T, X) = 0 = \text{Ext}_{\mathcal{H}}^1(X, T) \implies X = 0$$

Se uma categoria hereditária for Ext^i -finita para todo $i \in \mathbb{Z}$ e que tem objeto inclinante, então temos dois tipos principais dessas categorias: aquelas derivadamente equivalentes a $\text{mod}H$ para alguma \mathbb{k} -álgebra hereditária de dimensão finita H e aquelas derivadamente equivalentes a $\text{coh}\mathbb{X}$ dos feixes coerentes em uma reta projetiva com pesos \mathbb{X} . Note que estes casos não são disjuntos. De fato, os casos do tipo feixes com as sequências de pesos $(2, 2, n-2)$, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$ e $(2, 3, 5)$ são também do tipo módulos. Em 2001, Happel mostrou (veja [31]) que estes dois tipos são as únicas categorias hereditárias contendo um objeto inclinante possíveis.

Teorema 1.37. Seja \mathcal{H} uma \mathbb{k} -categoria abeliana hereditária conexa Ext^i -finita e com objeto inclinante. Então \mathcal{H} é derivadamente equivalente a $\text{mod}H$ para alguma \mathbb{k} -álgebra

hereditária de dimensão finita ou derivadamente equivalente a $\text{coh } \mathbb{X}$ para alguma reta projetiva com pesos \mathbb{X} .

1.3.2 Álgebras hereditárias

Definição 1.38. Uma álgebra Λ é dita *hereditária à direita* se todo ideal à direita de Λ é projetivo como um Λ -módulo.

Álgebras hereditárias à esquerda são definidas de maneira dual.

Ainda em [31], Teorema 1.4 do Capítulo VII, podemos ver que Λ é hereditária à direita se, e somente se, a dimensão global de Λ é no máximo 1. Portanto, como essa condição é simétrica (veja A.4.9 do Apêndice de [31]), segue que a uma álgebra de dimensão finita é hereditária à direita se, e somente se, ela é hereditária à esquerda. Assim sendo, a partir de agora nos referiremos apenas a *álgebras hereditárias*.

A seguinte caracterização de álgebras hereditárias pode ser encontrada em [31], Teorema 1.7 do Capítulo VII.

Teorema 1.39. Uma álgebra básica, conexa, de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado é hereditária se, e somente se, é isomorfa à álgebra de caminhos de um carcás finito, conexo e sem ciclos.

1.4 Álgebras hereditárias por partes

Nesta seção apresentamos algumas propriedades das álgebras hereditárias por partes. Para mais detalhes sugerimos [5], Capítulo VII.

1.4.1 Algumas definições

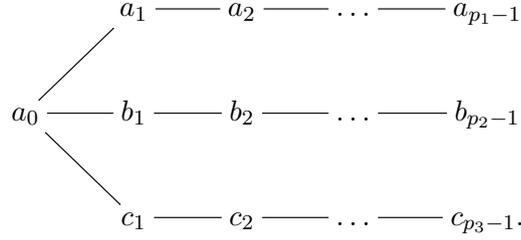
As seguintes definições estão presentes no livro [3].

Seja Λ uma \mathbb{k} -álgebra básica de dimensão finita com um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. A *matriz de Cartan* de Λ é a matriz $n \times n$ dada por:

$$\mathbf{C}_\Lambda = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix},$$

onde $c_{ij} = \dim_{\mathbb{k}}(e_j \Lambda e_i)$ para $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Usaremos $\mathbb{T}_{p_1, p_2, p_3}$ para denotar o seguinte grafo para alguns $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{N}_{>0}$.



Quando não houver risco de confusão, denotaremos $\mathbb{T}_{p_1, p_2, p_3}$ simplesmente por $\mathbb{T}_{p_1 p_2 p_3}$.

De maneira análoga podemos definir $\mathbb{T}_{p_1, p_2, \dots, p_r}$ para qualquer $r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 3$.

Observação 1.40. Note que $\mathbb{T}_{m, n, 1} = \mathbb{A}_{m+n-1}$; $\mathbb{T}_{p_1, \dots, p_r, 1} = \mathbb{T}_{p_1, \dots, p_r}$ para $r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 3$; $\mathbb{T}_{2, 2, n-2} = \mathbb{D}_n$, para $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 4$; $\mathbb{T}_{2, 3, p-3} = \mathbb{E}_p$, para $p = 6, 7, 8$; $\mathbb{T}_{2, 3, q-2} = \tilde{\mathbb{E}}_q$, para $q = 7, 8$; e $\mathbb{T}_{3, 3, 3} = \tilde{\mathbb{E}}_6$.

Definição 1.41. Seja Λ uma \mathbb{k} -álgebra básica de dimensão global finita, e seja \mathbf{C}_Λ a matriz de Cartan de Λ com respeito a um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos $\{e_1, \dots, e_n\}$ de Λ . A *matriz de Coxeter* de Λ é a matriz

$$\Phi_\Lambda = -\mathbf{C}_\Lambda^t \cdot \mathbf{C}_\Lambda^{-1}.$$

O *polinômio de Coxeter* χ_Λ é definido por

$$\chi_\Lambda(T) = \det(T \cdot I_n - \Phi_\Lambda) = \sum_{i=0}^n a_i T^{n-i},$$

onde I_n denota a matriz identidade de tamanho $n \times n$.

O seguinte lema nos dá o polinômio de Coxeter de uma álgebra canônica $C(p_1, p_2, p_3)$ e de uma álgebra hereditária cujo grafo associado é do tipo árvore $\mathbb{T}_{p_1, p_2, p_3}$. Sua demonstração pode ser encontrada em [50], Proposições 4.2 e 9.1 (Veja também [51]).

Lema 1.42. O polinômio de Coxeter de uma álgebra canônica $C(p_1, p_2, p_3)$ e de uma álgebra hereditária cujo grafo associado é do tipo árvore $\mathbb{T}_{p_1, p_2, p_3}$ são dados por:

$$\chi_{C(p_1, p_2, p_3)} = (T-1)^2 \prod_{i=1}^3 \frac{T^{p_i} - 1}{T - 1}$$

$$\chi_{T_{p_1, p_2, p_3}} = \left(T + 1 - T \sum_{i=1}^3 \frac{1 - T^{p_i-1}}{1 - T^{p_i}} \right) \prod_{i=1}^3 \frac{1 - T^{p_i}}{1 - T}$$

O seguinte lema é bem conhecido (veja por exemplo [30]) e nos será útil no decorrer do trabalho.

Lema 1.43. Seja Λ uma álgebra de dimensão finita e dimensão global finita. Se Γ é derivadamente equivalente a Λ , então seus polinômios de Coxeter são iguais, $\chi_\Lambda = \chi_\Gamma$.

De acordo com [36], uma \mathbb{k} -álgebra Λ é dita *hereditária por partes* se existir uma categoria abeliana, hereditária \mathcal{H} tal que as categoria derivadas limitadas $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ e $\mathcal{D}^b(\mathcal{H})$ são equivalentes como categorias trianguladas. Veja [30] e [33] para propriedades dessa classe de álgebras. Chamaremos \mathcal{H} de *tipo* de Λ . Note que o tipo de Λ é definido a menos de equivalência derivada.

1.4.2 Dimensão global forte

Em [39], Happel e Zacharia definiram dimensão global forte em termos do comprimento de complexos. Ainda neste artigo, os autores explicam a leve mudança da definição que foi dada em [61].

Seja X um objeto indecomponível na categoria homotópica de complexos limitados de Λ -módulos projetivos finitamente gerados $\mathcal{K}^b(\text{proj } \Lambda)$. Seja

$$P : \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow P^r \longrightarrow P^{r+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P^{s-1} \longrightarrow P^s \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

uma resolução projetiva minimal de X , em que $P^r \neq 0$ e $P^s \neq 0$. Então definimos o *comprimento de X* por

$$\ell(X) = s - r.$$

Se X não possui resolução projetiva minimal finita, dizemos que $\ell(X) = \infty$.

A *dimensão global forte* de Λ é definida como sendo o *sup* desses comprimentos,

com X percorrendo todos os objetos indecomponíveis de $\mathcal{K}^b(\text{proj } \Lambda)$:

$$s.gl.dim.(\Lambda) = \sup_X(\ell(X)).$$

Segue diretamente da definição que $s.gl.dim.(\Lambda) = 1$ se, e somente se, Λ é uma álgebra hereditária que não é semissimples. Em [39], Happel e Zacharia provaram o seguinte resultado.

Teorema 1.44. $s.gl.dim.(\Lambda) < \infty$ se, e somente se, a álgebra Λ é hereditária por partes.

Se Λ é uma \mathbb{k} -álgebra básica, associativa, com unidade e de dimensão finita, então podemos definir uma categoria limitada \mathcal{C}_Λ . Os objetos de \mathcal{C}_Λ formam um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos de Λ . Para dois idempotentes $x, y \in \mathcal{C}_\Lambda$, definimos os morfismos de x para y como o \mathbb{k} -espaço $\mathcal{C}_\Lambda(x, y) := y\Lambda x$ e assim a composição de morfismos em \mathcal{C}_Λ será induzida pela multiplicação em Λ . A categoria $\text{mod } \mathcal{C}_\Lambda$ tem como objetos os funtores $\mathcal{C}_\Lambda \rightarrow \mathbb{k} - \text{vec}$ que saem da categoria \mathcal{C}_Λ para a categoria $\mathbb{k} - \text{vec}$ dos \mathbb{k} -espaços vetoriais de dimensão finita, os morfismos da categoria $\text{mod } \mathcal{C}_\Lambda$ são as transformações naturais entre os funtores. É fácil ver que as categorias $\text{mod } \Lambda$ e $\text{mod } \mathcal{C}_\Lambda$ são isomorfas. Deste modo, por abuso de notação, por várias vezes identificaremos a álgebra Λ com a categoria \mathcal{C}_Λ .

Lema 1.45. Seja Λ uma álgebra e $B = e\Lambda e$ uma subcategoria plena de Λ . Se B não é hereditária por partes, então Λ também não é hereditária por partes.

Demonstração. Como B não é hereditária por partes, sua dimensão global forte é infinita e portanto para todo $n \in \mathbb{N}$ existe um complexo indecomponível $X \in \mathcal{K}^b(\text{proj } B)$ tal que $\ell(X) \geq n$. Como B é subcategoria plena de Λ , o funtor

$$T_e = _ \otimes_B e\Lambda : \text{mod } B \longrightarrow \text{mod } \Lambda$$

é pleno, fiel e preserva indecomponibilidade (veja o teorema 6.8 em [5], página 35).

Seja \overline{T}_e o levantamento do funtor T_e para a categoria homotópica (veja [54]), ou seja, $\overline{T}_e : \mathcal{K}^b(\text{proj } B) \longrightarrow \mathcal{K}^b(\text{proj } \Lambda)$. Como T_e é pleno e fiel, o seu levantamento \overline{T}_e também é pleno e fiel. Seja \overline{X} a imagem de X via este funtor. Como X é um objeto

indecomponível em $\mathcal{K}^b(\text{proj } B)$, temos que $\text{End}_{\mathcal{K}^b(\text{proj } B)} X$ é um anel local. Como o funtor \overline{T}_e é pleno e fiel, temos que

$$\text{End}_{\mathcal{K}^b(\text{proj } \Lambda)} \overline{X} \simeq \text{End}_{\mathcal{K}^b(\text{proj } B)} X$$

logo $\text{End}_{\mathcal{K}^b(\text{proj } \Lambda)} \overline{X}$ é um anel local. Portanto \overline{X} é um objeto indecomponível em $\mathcal{K}^b(\text{proj } \Lambda)$ e satisfaz $\ell(\overline{X}) = \ell(X) \geq n$. Segue deste fato que $s.gl.dim(\Lambda) = \infty$. \square

1.4.3 Álgebras de Nakayama hereditárias por partes

Em [36] Happel e Seidel determinaram para quais pares (n, r) a álgebra $\Lambda(n, r)$ é hereditária por partes. Nestes casos, a categoria derivada limitada de $\Lambda(n, r)$ é equivalente à categoria derivada limitada de uma categoria hereditária abeliana \mathcal{H} . Os resultados são ilustrados na tabela 1.1. Se $\Lambda(n, r)$ é do tipo módulos, a célula associada contém o grafo subjacente da álgebra cuja categoria de módulos é equivalente a $\mathcal{D}^b(\Lambda(n, r))$. Se $\Lambda(n, r)$ é do tipo feixes, a célula associada contém a reta projetiva com pesos cuja categoria de feixes coerentes é equivalente a $\mathcal{D}^b(\Lambda(n, r))$. Se $\Lambda(n, r)$ não é hereditária por partes, a célula associada contém apenas um traço $-$.

Tabela 1.1: Os possíveis tipos de $\Lambda(n, r)$

r \ n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
2	\mathbb{A}_3	\mathbb{A}_4	\mathbb{A}_5	\mathbb{A}_6	\mathbb{A}_7	\mathbb{A}_8	\mathbb{A}_9	\mathbb{A}_{10}	\mathbb{A}_{11}	\mathbb{A}_{12}	\mathbb{A}_{13}	...
3		\mathbb{D}_4	\mathbb{D}_5	\mathbb{E}_6	\mathbb{E}_7	\mathbb{E}_8	$\tilde{\mathbb{E}}_8$	\mathbb{X}_{236}	\mathbb{X}_{237}	-	-	...
4			\mathbb{D}_5	\mathbb{E}_6	\mathbb{E}_7	$\tilde{\mathbb{E}}_7$	\mathbb{X}_{244}	\mathbb{X}_{245}	-	-	-	...
5				\mathbb{D}_6	\mathbb{E}_7	\mathbb{E}_8	$\tilde{\mathbb{E}}_8$	\mathbb{T}_{237}	-	-	-	...
6					\mathbb{D}_7	\mathbb{E}_8	$\tilde{\mathbb{E}}_8$	\mathbb{X}_{236}	\mathbb{X}_{237}	-	-	...
7						\mathbb{D}_8	$\tilde{\mathbb{E}}_8$	\mathbb{T}_{237}	\mathbb{X}_{237}	-	-	...
8							\mathbb{D}_9	\mathbb{T}_{237}	\mathbb{T}_{238}	\mathbb{X}_{238}	-	...
⋮								⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

O artigo [36] nos motivou a buscar a classificação de álgebras hereditárias por partes para álgebras seriais truncadas.

1.5 Mutações

1.5.1 Mutações de álgebras

Vamos definir as mutações de álgebras seguindo o artigo [48] de Ladkani (veja também [62]). Estas, são generalizações dos funtores de reflexão introduzidos por Bernstein, Gel'fand e Ponomarev em [18] e também de suas generalizações descritas em [7] e [20].

Seja $\Lambda = \frac{\mathbb{k}Q}{I}$ uma álgebra, e $k \in Q_0$ um vértice sem laços. Lembrando que P_i denota o Λ -módulo projetivo indecomponível $e_i\Lambda$ para cada $i \in Q_0$, denotaremos por f e g os seguintes morfismos:

$$f : P_k \longrightarrow \bigoplus_{\alpha:t(\alpha)=k} P_{s(\alpha)} \quad , \quad g : \bigoplus_{\beta:s(\beta)=k} P_{t(\beta)} \longrightarrow P_k$$

onde $f = \bigoplus \alpha$ é induzido pelas flechas α que terminam em k e $g = \bigoplus \beta$ é induzido pelas flechas β que começam em k .

Consideremos os seguintes complexos de Λ -módulos

$$\begin{aligned} L_k : \quad & P_k \xrightarrow{f} \bigoplus_{j \rightarrow k} P_j, \\ R_k : \quad & \bigoplus_{k \rightarrow j} P_j \xrightarrow{g} P_k, \\ M_k : \quad & \bigoplus_{i \in Q_0, i \neq k} P_i \end{aligned}$$

onde P_k está no grau -1 em L_k e no grau 1 em R_k , e M_k é um complexo concentrado no grau 0. Sejam

$$T_k^- = L_k \oplus M_k \quad , \quad T_k^+ = R_k \oplus M_k$$

outros dois complexos de Λ -módulos.

Em geral, T_k^- e T_k^+ não são complexos inclinantes. O resultado abaixo (veja [48], proposição 2.3) nos dá condições necessárias e suficientes para que T_k^- e T_k^+ sejam complexos inclinantes.

Teorema 1.46. (a) T_k^- é um complexo inclinante se, e somente se, para qualquer combinação linear não nula $\sum \lambda_r \omega_r$ de caminhos que começam em k e terminam

em algum vértice $i \neq k$, existe pelo menos uma flecha α que termina em k e tal que a combinação $\sum \lambda_r \alpha \omega_r$ não é nula.

- (b) T_k^+ é um complexo inclinante se, e somente se, para qualquer combinação linear não nula $\sum \lambda_r \omega_r$ de caminhos que começam em algum vértice $i \neq k$ e terminam em k , existe pelo menos uma flecha β que começa em k e tal que a combinação $\sum \lambda_r \omega_r \beta$ não é nula.

O corolário que se segue resulta imediatamente do teorema acima (veja observação 2.4, também em [48]).

Corolário 1.47. Se $k \in Q_0$ é um poço (respectivamente, uma fonte) então T_k^- (respectivamente, T_k^+) é um complexo inclinante.

Em [48] Definição 3.1, itens (a) e (b), Ladkani apresenta a seguinte definição:

Definição 1.48. Seja $k \in Q_0$ um vértice sem laços.

- (a) Dizemos que uma *mutação negativa* está definida em k se $T_k^- = T_k^-(\Lambda)$ é um complexo inclinante. Neste caso, denominaremos $\mu_k^-(\Lambda) = \text{End}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)} T_k^-(\Lambda)$ de mutação negativa de Λ no vértice k .
- (b) Dizemos que uma *mutação positiva* está definida em k se $T_k^+ = T_k^+(\Lambda)$ é um complexo inclinante. Neste caso, denominaremos $\mu_k^+(\Lambda) = \text{End}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)} T_k^+(\Lambda)$ de mutação positiva de Λ no vértice k .

Segue da definição acima e do Teorema 1.4 (de Rickard, veja [55]) o seguinte resultado:

Teorema 1.49. Seja $k \in Q_0$ um vértice sem laços.

- (a) Se uma mutação negativa está definida em k então as álgebras Λ e $\mu_k^-(\Lambda)$ são derivadamente equivalentes.
- (b) Se uma mutação positiva está definida em k então as álgebras Λ e $\mu_k^+(\Lambda)$ são derivadamente equivalentes.

1.5.2 Mutações de posets

Na maioria dos casos, aplicaremos as mutações de posets, que na verdade são mutações definidas nas álgebras de incidência destes posets. Nesta subsecção mostraremos que, em alguns casos, a nova álgebra é também uma álgebra de incidência poset e, nestes casos, descreveremos o novo poset.

Seja $S = (S, \leq)$ um poset e $a \in S$. Chamamos de *conjunto dos predecessores imediatos de a* o conjunto

$$a^- = \{b \in S \mid b < a \text{ e não existe } c \in S \text{ tal que } b < c < a\}.$$

Analogamente, chamamos de *conjunto dos sucessores imediatos de a* o conjunto

$$a^+ = \{b \in S \mid b > a \text{ e não existe } c \in S \text{ tal que } b > c > a\}.$$

Definição 1.50. Seja $S = (S, \leq)$ um poset.

(1) Dizemos que uma *mutação negativa* está definida em um elemento a de S , se as seguintes propriedades são satisfeitas:

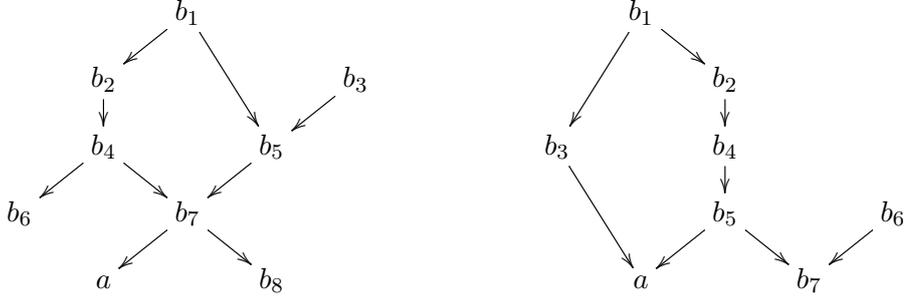
- (a) a é um elemento maximal em S ;
- (b) $|a^-| \leq 2$;
- (c) $\bigcap_{x \in a^-} U_x = \{a\}$ no caso $|a^-| = 2$.

(2) Dizemos que uma *mutação positiva* está definida em um elemento a de S , se as seguintes propriedades são satisfeitas:

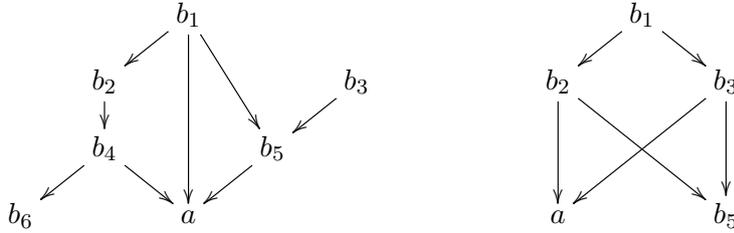
- (a) a é um elemento minimal em S ;
- (b) $|a^+| \leq 2$;
- (c) $\bigcap_{x \in a^+} \overline{\{x\}} = \{a\}$ no caso $|a^+| = 2$.

Exemplo 1.51. Abaixo apresentamos diagramas de Hasse de dois posets nos quais

uma mutação negativa está definida no elemento a .



Já os posets cujos diagramas de Hasse estão representados a seguir não possuem mutação negativa definida no elemento a .



Para $a \in S$ tal que existe uma mutação negativa definida em a vamos definir um novo poset $\mu_a^-(S)$ da seguinte maneira:

$$\mu_a^-(S) = (S, \leq'),$$

onde a ordem parcial \leq' satisfaz as seguintes condições:

1. Para todos $x, y \in S \setminus \{a\}$, $x \leq' y$ se, e somente se, $x \leq y$.
2. Para todo $x \in S \setminus \{a\}$ teremos $a \leq' x$ se, e somente se, $b \leq x$ para algum $b \in a^-$.
3. Se $|a^-| = 1$, então não existirá $x \in S \setminus \{a\}$ tal que $x \leq' a$. Se $|a^-| = 2$, então para todo $x \in S \setminus \{a\}$ teremos $x \leq' a$ se, e somente se, $x \leq b$ para todo $b \in a^-$.

Para $a \in S$ tal que existe uma mutação positiva em a vamos definir um novo poset $\mu_a^+(S)$ da seguinte maneira:

$$\mu_a^+(S) = (S, \leq''),$$

onde a ordem parcial \leq'' satisfaz as seguintes condições:

1. Para todos $x, y \in S \setminus \{a\}$, $x \leq'' y$ se, e somente se, $x \leq y$.
2. Para todo $x \in S \setminus \{a\}$ teremos $x \leq'' a$ se, e somente se, $x \leq b$ para algum $b \in a^+$.
3. Se $|a^+| = 1$, então não existirá $x \in S \setminus \{a\}$ tal que $a \leq'' x$. Se $|a^+| = 2$, então para todo $x \in S \setminus \{a\}$ teremos $a \leq'' x$ se, e somente se, $b \leq x$ para todo $b \in a^+$.

Teorema 1.52. Seja S um poset.

1. Seja $a \in S$ um elemento tal que existe uma mutação negativa em a . Então, $\mu_a^-(\mathbb{k}S)$ é uma álgebra de incidência de poset e

$$\mu_a^-(\mathbb{k}S) \simeq \mathbb{k}\mu_a^-(S).$$

2. Seja $a \in S$ um elemento tal que existe uma mutação positiva em a . Então, $\mu_a^+(\mathbb{k}S)$ é uma álgebra de incidência de poset e

$$\mu_a^+(\mathbb{k}S) \simeq \mathbb{k}\mu_a^+(S).$$

Demonstração. Mostraremos apenas o item 1, já que o item 2 é dual. Além disso, ao mostrarmos a equivalência enunciada, segue imediatamente que $\mu_a^-(\mathbb{k}S)$ é uma álgebra de incidência de poset.

Para cada $b \in S$, $b \neq a$ denotaremos por T_b o complexo concentrado no grau zero $T_b = P_b$ e $T_a = L_a$ definido no início desta subseção. Note que $T_a^- = \bigoplus_{b \in S} T_b$. Sejam $\varphi_{ij} : T_i \rightarrow T_j$ morfismos de $\text{End}_{\mathcal{D}^b(\mathbb{k}S)}(T_a^-)$ e $e_{ij} \in \mathbb{k}\mu_a^- S$ (relembre a definição 1.19). A bijeção $\varphi_{ij} \leftrightarrow e_{ji}$ realiza a equivalência enunciada.

Para todos $x, y \in S \setminus \{a\}$, temos um morfismo não nulo $\varphi_{ij} : T_i \rightarrow T_j$ se, e somente se, $j \leq i$ em S se, e somente se, $j \leq' i$ em $\mu_a^- S$.

Dado $x \in S \setminus \{a\}$, como a é poço, então não existem homotopias para os morfismos $\varphi_{ax} : T_a \rightarrow T_x$ em $\text{End}_{\mathcal{C}^b(\text{proj } \mathbb{k}S)}(T_a^-)$. Note que, como $\bigcap_{j \in a^-} U_j = \{a\}$, os morfismos $\varphi_{ax} : T_a \rightarrow T_x$ podem ser fatorados como a composição $T_a \rightarrow T_j \rightarrow T_x$ para algum $j \in a^-$. Portanto, teremos um morfismo não nulo $\varphi_{ax} : T_a \rightarrow T_x$ se, e somente se,

existir um morfismo não nulo $T_j \rightarrow T_x$ para algum $j \in a^-$ se, e somente se, $x \leq j$ para algum $j \in a^-$ se, e somente se, $x \leq' a$ para algum $j \in a^-$ em $\mu_a^- S$.

Se $|a^-| = 1$, digamos $a^- = \{b\}$, então para qualquer $y \in S \setminus \{a\}$ não existe morfismo não nulo $\varphi_{ya} : T_y \rightarrow T_a$ em $\text{End}_{\mathcal{D}^b(\mathbb{k}S)}(T_a^-)$, assim como não existe $y \in S \setminus \{a\}$ tal que $a \leq' y$ em $\mu_a^- S$. Agora, se $|a^-| = 2$, digamos $a^- = \{b, c\}$, então para qualquer $y \in S \setminus \{a\}$ existe morfismo não nulo $\varphi_{ya} : T_y \rightarrow T_a$ em $\text{End}_{\mathcal{D}^b(\mathbb{k}S)}(T_a^-)$, se, e somente se, existem morfismos não nulos $\beta_1 : P_b \rightarrow P_y$ e $\beta_2 : P_c \rightarrow P_y$ em $\text{proj } \mathbb{k}S$ tais que a composição de $(\alpha_1, \alpha_2) : P_a \rightarrow P_b \oplus P_c$ com $(\beta_1, \beta_2) : P_b \oplus P_c \rightarrow P_y$ seja nula, ou seja, se, e somente se, $b \leq y$ e $c \leq y$ em S se, e somente se, $a \leq' y$ em $\mu_a^- S$.

Com estes fatos, podemos concluir o isomorfismo $\mu_a^-(\mathbb{k}S) \simeq \mathbb{k}\mu_a^-(S)$. □

1.5.3 Generalizações de mutações de posets

Mutação $\mu_{\{a_1, \dots, a_n\}}^-$

Definição 1.53. Seja $S = (S, \leq)$ um poset. Vamos dizer que uma *mutação negativa está definida no subconjunto* $\{a_1, \dots, a_n\}$ de S se os elementos a_1, \dots, a_n possuem as seguintes propriedades:

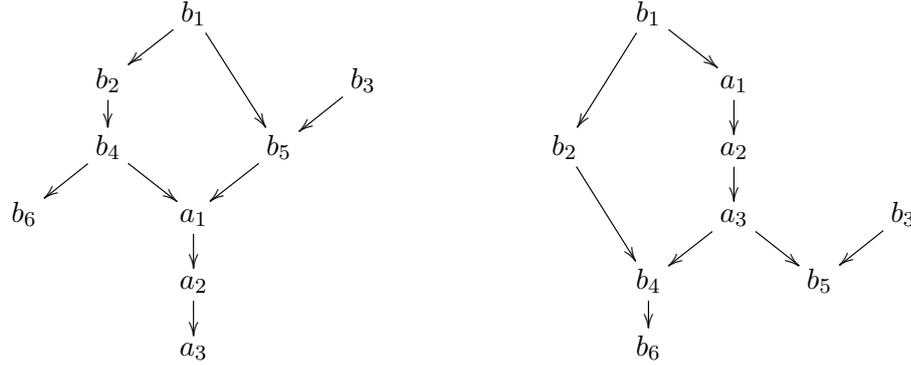
- (1) a_n é um elemento maximal em S .
- (2) $a_i^- = \{a_{i-1}\}$ para $1 < i \leq n$.
- (3) $a_i^+ = \{a_{i+1}\}$ para $1 \leq i < n$.
- (4) $|a_1^-| = 2$ e $\bigcap_{x \in a_1^-} U_x = U_{a_1}$.

Neste caso, vamos definir um novo poset $\mu_{\{a_1, \dots, a_n\}}^-(S) = (S, \leq')$, onde a ordem parcial \leq' está definida pelas seguintes regras:

1. Para todos $x, y \in S \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, $x \leq' y$ se, e somente se, $x \leq y$.
2. Para todo $x \in S \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ e qualquer $1 \leq i \leq n$, teremos $x \leq' a_i$ se, e somente se, $x \leq b$ para todo $b \in a_1^-$.
3. Para todo $x \in S \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ e qualquer $1 \leq i \leq n$, teremos $a_i \leq' x$ se, e somente se, $b \leq x$ para algum $b \in a_1^-$.

4. $a_i \leq' a_j$ se, e somente se, $a_i \leq a_j$.

Exemplo 1.54. Seja S o poset definido pelo diagrama de Hasse da esquerda na figura abaixo. Então uma mutação negativa está definida no subconjunto $\{a_1, a_2, a_3\}$ e o novo poset $\mu_{\{a_1, a_2, a_3\}}^-(S)$ possui o diagrama de Hasse da direita na figura abaixo:



Seja $S = (S, \leq)$ um poset tal que uma mutação negativa $\mu_{\{a_1, \dots, a_n\}}^-$ está definida. Seja $\mathbb{k}S = \frac{\mathbb{k}Q}{I}$, onde Q é o diagrama de Hasse de S (igual ao carcás de $\mathbb{k}S$). Vamos construir um complexo de $\mathbb{k}S$ -módulos que corresponde à mutação $\mu_{\{a_1, \dots, a_n\}}^-$. Seja $a_i^- = \{b, c\}$, vamos denotar por ω_{b, a_i} (respectivamente, ω_{c, a_i}) o único caminho de b (respectivamente, c) para a_i em Q . Seja, para $1 \leq i \leq n$,

$$L_{a_i} = P_{a_i} \xrightarrow{(\omega_{b, a_i}, \omega_{c, a_i})} P_b \oplus P_c$$

um complexo de $\mathbb{k}S$ -módulos, onde P_{a_i} está no grau -1. Seja

$$T_{a_1, \dots, a_n}^- = \left(\bigoplus_{i=1}^n L_{a_i} \right) \oplus \left(\bigoplus_{x \in Q_0 \setminus \{a_1, \dots, a_n\}} P_x \right),$$

onde P_x é o complexo concentrado no grau 0.

Teorema 1.55. (1) T_{a_1, \dots, a_n}^- é um complexo inclinante.

(2) $\text{End}_{\mathcal{D}^b(\mathbb{k}S)}(T_{a_1, \dots, a_n}^-)$ é uma álgebra de incidência de poset isomorfa a $\mathbb{k}\mu_{a_1, \dots, a_n}^-(S)$.

(3) $\mathbb{k}S \simeq_{\text{der}} \mathbb{k}\mu_{a_1, \dots, a_n}^-(S)$.

Demonstração. (1) Note que os somandos do complexo T_{a_1, \dots, a_n}^- geram $\mathcal{K}^b(\text{proj } \mathbb{k}S)$. Isto segue das seqüências exatas curtas de complexos

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{x \rightarrow a_i} P_x \longrightarrow L_{a_i} \longrightarrow P_{a_i}[1] \longrightarrow 0$$

para todo $i = 1, \dots, n$.

Como T_{a_1, \dots, a_n}^- é concentrado apenas nos graus 0 e -1, para concluir que

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathbb{k}S)}(T_{a_1, \dots, a_n}^-, T_{a_1, \dots, a_n}^-[i]) = 0$$

para todo $i \neq 0$, precisamos apenas mostrar que $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathbb{k}S)}(T_{a_1, \dots, a_n}^-, T_{a_1, \dots, a_n}^-[-1]) = 0$ e $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathbb{k}S)}(T_{a_1, \dots, a_n}^-, T_{a_1, \dots, a_n}^-[1]) = 0$.

Como estamos trabalhando com complexos cujos termos são projetivos, os morfismos na categoria derivada podem ser analisados como morfismos na categoria homotópica de complexos.

Segue imediatamente dos graus onde o complexo está concentrado que $\text{Hom}(P_x, P_{x'}[1])$, $\text{Hom}(P_x, P_{x'}[-1])$, $\text{Hom}(P_x, L_{a_i}[1])$, $\text{Hom}(L_{a_i}, P_x[-1])$ são zero para todos $x, x' \neq 1, \dots, n$ e $i = 1, \dots, n$.

Pela definição do conjunto $\{a_1, \dots, a_n\}$, temos $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathbb{k}S)}(P_x, L_{a_i}[-1]) = 0$ para todo $x \notin \{a_1, \dots, a_n\}$ e todo $i = 1, \dots, n$. Segue que $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathbb{k}S)}(L_{a_i}, L_{a_k}[-1]) = 0$ também, considerando o quadrado da direita do seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} P_{a_i} & \xrightarrow{f_i} \bigoplus P_j & \longrightarrow 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow P_{a_k} & \xrightarrow{f_k} \bigoplus P_j \end{array}$$

e observando que não existe morfismo $P_j \longrightarrow P_{a_k}$ para nenhum $k = 1, \dots, n$ e nenhum $j \in a_1^-$.

Além disso, $\text{Hom}(L_{a_i}, P_x[1]) = 0$ para todo $x \notin \{a_1, \dots, a_n\}$ e todo $i = 1, \dots, n$ pois todo morfismo do diagrama abaixo é homotópico a zero por uma homotopia trivial.

$$\begin{array}{ccc} P_{a_i} & \xrightarrow{f_i} \bigoplus P_j & \\ \downarrow & \swarrow \text{dotted} & \downarrow \\ P_x & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Isto também mostra que $\text{Hom}(L_{a_i}, L_{a_k}[1]) = 0$.

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & P_{a_i} & \xrightarrow{f_i} & \bigoplus P_j \\ \downarrow & & \downarrow & \swarrow \text{dotted} & \downarrow \\ P_{a_k} & \xrightarrow{f_k} & \bigoplus P_j & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(2) Note que para todo $x, y \in S \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, os somandos de T_{a_1, \dots, a_n}^- associados aos vértices x, y são os projetivos P_x, P_y , portanto, $\text{Hom}(P_y, P_x) \neq 0$ se, e somente se, $x \leq y$ em S .

Para todo $x \in S \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, temos $\text{Hom}(L_{a_i}, P_x) \neq 0$ se, e somente se, existir um morfismo $P_b \rightarrow P_x$ para cada um dos dois vértices $b \in a_1^-$, pois dessa forma a relação de comutatividade fará com que o diagrama abaixo comute

$$\begin{array}{ccc} P_{a_i} & \xrightarrow{f_i} & \bigoplus P_j \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & P_x. \end{array}$$

Para todo $x \in S \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, temos $\text{Hom}(P_x, L_{a_i}) \neq 0$ se, e somente se, existir um morfismo $P_x \rightarrow P_b$ para algum $b \in a_1^-$.

Por fim, teremos $\text{Hom}(L_{a_i}, L_{a_k}) \neq 0$ se, e somente se, existir um morfismo $P_{a_i} \rightarrow P_{a_k}$, já que o morfismo entre os projetivos do grau zero são o morfismo identidade.

$$\begin{array}{ccc} P_{a_i} & \xrightarrow{f_i} & \bigoplus P_j \\ \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ P_{a_k} & \xrightarrow{f_k} & \bigoplus P_j \end{array}$$

Como todas essas afirmações coincidem com a definição de $\mu_{a_1, \dots, a_n}^-(S)$, o resultado segue.

(3) Segue imediatamente dos itens anteriores e do Teorema 1.4. □

Mutação $\mu_{\{a_1, \dots, a_n\}}^+$

Esta subseção é dual à anterior.

Definição 1.56. Seja $S = (S, \leq)$ um poset. Vamos dizer que uma *mutação positiva está definida no subconjunto* $\{a_1, \dots, a_n\}$ de S se os elementos a_1, \dots, a_n possuem as

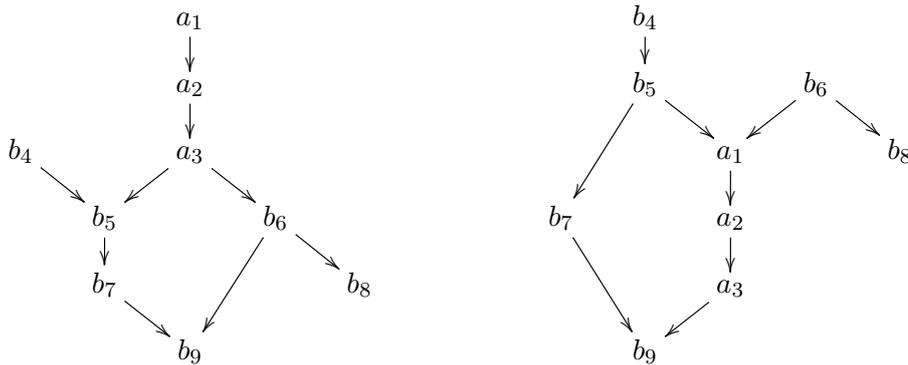
seguintes propriedades:

- (1) a_1 é um elemento minimal em S .
- (2) $a_i^- = \{a_{i-1}\}$ para $1 < i \leq n$.
- (3) $a_i^+ = \{a_{i+1}\}$ para $1 \leq i < n$.
- (4) $|a_n^+| = 2$ e $\bigcap_{x \in a_n^+} \overline{\{x\}} = \overline{\{a_n\}}$.

Neste caso, vamos definir um novo poset $\mu_{\{a_1, \dots, a_n\}}^+(S) = (S, \leq'')$, onde a ordem parcial \leq'' está definida pelas seguintes regras:

1. Para todos $x, y \in S \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$, $x \leq'' y$ se, e somente se, $x \leq y$.
2. Para todo $x \in S \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ e qualquer $1 \leq i \leq n$, teremos $x \leq'' a_i$ se, e somente se, $x \leq b$ para algum $b \in a_n^+$.
3. Para todo $x \in S \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ e qualquer $1 \leq i \leq n$, teremos $a_i \leq'' x$ se, e somente se, $b \leq x$ para todo $b \in a_n^+$.
4. $a_i \leq'' a_j$ se, e somente se, $a_i \leq a_j$.

Exemplo 1.57. Seja S o poset definido pelo diagrama de Hasse da esquerda na figura abaixo. Então uma mutação positiva está definida no subconjunto $\{a_1, a_2, a_3\}$ e o novo poset $\mu_{\{a_1, a_2, a_3\}}^+(S)$ possui o diagrama de Hasse da direita na figura abaixo:



Seja $S = (S, \leq)$ um poset tal que uma mutação negativa $\mu_{\{a_1, \dots, a_3\}}^+$ está definida. Seja $\mathbb{k}S = \frac{\mathbb{k}Q}{I}$, onde Q é o diagrama de Hasse de S (igual ao carcás de $\mathbb{k}S$). Vamos

construir um complexo de $\mathbb{k}S$ -módulos que corresponde à mutação $\mu_{\{a_1, \dots, a_n\}}^+$. Seja $a_n^+ = \{b, c\}$, vamos denotar por $\omega_{a_i, b}$ (respectivamente, $\omega_{a_i, c}$) o único caminho de a_i para b (respectivamente, c) em Q . Seja, para $1 \leq i \leq n$,

$$R_{a_i} = P_b \oplus P_c \xrightarrow{(\omega_{a_i, b}, \omega_{a_i, c})} P_{a_i}$$

um complexo de $\mathbb{k}S$ -módulos, onde P_{a_i} está no grau 1. Seja

$$T_{a_1, \dots, a_n}^+ = \left(\bigoplus_{i=1}^n R_{a_i} \right) \oplus \left(\bigoplus_{x \in Q_0 \setminus \{a_1, \dots, a_n\}} P_x \right),$$

onde P_x é o complexo concentrado no grau 0.

Teorema 1.58. (1) T_{a_1, \dots, a_n}^+ é um complexo inclinante.

(2) $\text{End}_{\mathcal{D}^b(\mathbb{k}S)}(T_{a_1, \dots, a_n}^+)$ é uma álgebra de incidência de poset isomorfa a $\mathbb{k}\mu_{a_1, \dots, a_n}^+(S)$.

(3) $\mathbb{k}S \simeq_{\text{der}} \mathbb{k}\mu_{a_1, \dots, a_n}^+(S)$.

Demonstração. Análoga à demonstração do Teorema 1.55. □

Capítulo 2

Equivalências Derivadas

2.1 Complexos $T_{\omega,r}^+$ e $T_{\omega,r}^-$

Sejam $r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 2$ e $\Lambda = \frac{\mathbb{k}Q}{I}$ uma álgebra de dimensão finita.

Definição 2.1. Seja $r \leq n$. Dizemos que um caminho ω em Q é um *caminho r -truncado* (em relação a I) se $\ell(\omega) = 0$ ou se $\omega = \omega_1 \dots \omega_n$, para algum $n \geq 1$ com $\omega_i \in Q_1$ para cada $1 \leq i \leq n$, de forma que $\omega_i \omega_{i+1} \dots \omega_{i+r-1} \in I$ para cada $1 \leq i \leq n - r + 1$ e $\omega_i \omega_{i+1} \dots \omega_{i+r-2} \notin I$ para cada $1 \leq i \leq n - r + 2$, ou seja, de forma que cada subcaminho de ω de comprimento r está em I e nenhum subcaminho de comprimento $r - 1$ está em I .

Para qualquer caminho r -truncado ω de comprimento $\ell(\omega) > 0$ definiremos complexos $T_{\omega,r}^+$ e $T_{\omega,r}^-$ de Λ -módulos. Para isso, fixaremos antes algumas notações. Sejam $r^* = r - 1$, $q = q(\omega)$, e $s = s(\omega)$ os números inteiros não-negativos tais que

$$n = \ell(\omega) = qr^* + s$$

onde $0 < s \leq r^*$.

Observação 2.2. Por motivos técnicos trocamos a condição sobre o resto no algoritmo da divisão, de $0 \leq s < r^*$ por $0 < s \leq r^*$.

No caso em que $\ell(\omega) > 0$, por razões técnicas, reescreveremos ω de uma outra

maneira:

$$\omega = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{n-1} \omega_n = \omega_n^+ \omega_{n-1}^+ \dots \omega_2^+ \omega_1^+$$

onde $\omega_i^+ = \omega_{n-i+1}$ para $1 \leq i \leq n$.

Agora, caso $\ell(\omega) > 0$, faremos duas decomposições de ω por subcaminhos:

1. $\omega = u_n^+ u_q^+ \dots u_1^+$, onde $u_i^+ = \omega_{ir^*}^+ \dots \omega_{(i-1)r^*+1}^+$ para cada $1 \leq i \leq q$ e $u_n^+ = \omega_{qr^*+s}^+ \dots \omega_{qr^*+1}^+$.
2. $\omega = u_1^- u_2^- \dots u_q^- u_n^-$, onde $u_i^- = \omega_{(i-1)r^*+1} \dots \omega_{ir^*}$ para cada $1 \leq i \leq q$ e $u_n^- = \omega_{qr^*+1} \dots \omega_{qr^*+s}$.

No caso em $\ell(\omega) = 0$, fixaremos

$$T_{\omega,r}^+ = T_{\omega,r}^- = P_{s(\omega)}$$

onde $P_{s(\omega)}$ está no grau 0.

Agora, seja $\ell(\omega) > 0$. Definiremos abaixo dois complexos de Λ -módulos.

$$\begin{aligned} T_{\omega,r}^+ : \quad & P_{t(u_1^+)} \xrightarrow{u_1^+} P_{t(u_2^+)} \xrightarrow{u_2^+} \dots \longrightarrow P_{t(u_q^+)} \xrightarrow{u_q^+} P_{s(u_q^+)} \xrightarrow{u_n^+} P_{s(u_n^+)}, \\ T_{\omega,r}^- : \quad & P_{t(u_n^-)} \xrightarrow{u_n^-} P_{t(u_q^-)} \xrightarrow{u_q^-} P_{s(u_q^-)} \longrightarrow \dots \xrightarrow{u_2^-} P_{s(u_2^-)} \xrightarrow{u_1^-} P_{s(u_1^-)}, \end{aligned}$$

onde $P_{t(u_1^+)}$ e $P_{s(u_1^-)}$ estão no grau 0.

Nas próximas seções usaremos os complexos $T_{\omega,r}^+$ e $T_{\omega,r}^-$ para construir complexos inclinantes para álgebras de Nakayama, álgebras seriais e álgebras $\Lambda(\Lambda_1, \dots, \Lambda_t)$, estas últimas serão definidas na seção 2.4.

2.2 Álgebras de Nakayama truncadas

Sejam $r, n \in \mathbb{N}$ com $2 \leq r < n$. Seja $\Lambda = \Lambda(n, r) = \frac{\mathbb{k}Q}{\langle Q_r \rangle}$ uma álgebra de Nakayama truncada com carcás $Q = \vec{\mathbb{A}}_n$:

$$0 \xleftarrow{\alpha} 1 \xleftarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\alpha} \dots \xleftarrow{\alpha} n-1$$

Seja $r^* = r - 1$ e, para cada $0 < i \leq n - 1$, sejam $q_i, s_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tais que

$$i = q_i r^* + s_i, \text{ onde } 0 < s_i \leq r^*.$$

Veja a Observação 2.2.

Vamos definir para cada $0 < i \leq n - 1$ um complexo T_i de Λ -módulos, como na seção anterior (Note que $T_i = T_{\omega_i}^+$).

$$T_i : \quad P_0 \xrightarrow{\alpha^{r^*}} P_{r^*} \xrightarrow{\alpha^{r^*}} P_{2r^*} \xrightarrow{\alpha^{r^*}} \dots \xrightarrow{\alpha^{r^*}} P_{q_i r^*} \xrightarrow{\alpha^{s_i}} P_i$$

onde P_0 está no grau 0. Vamos definir também $T_0 = P_0$.

Mostraremos mais à frente que $T_\Lambda = \bigoplus_{i \in Q_0} T_i$ é um complexo inclinante.

Observação 2.3. Para $i > 0$ temos $\ell(T_i) = q_i + 1$.

Note que cada complexo T_i tem o Λ -módulo projetivo P_0 no grau 0. Portanto, se existe um morfismo qualquer $T_i \rightarrow T_j$ então o morfismo $1_{P_0} : P_0 \rightarrow P_0$ estende-se para um morfismo $\varphi_{ij} : T_i \rightarrow T_j$. Por outro lado, se o morfismo $1_{P_0} : P_0 \rightarrow P_0$ não se estende para um morfismo $\varphi_{ij} : T_i \rightarrow T_j$ então não existe nenhum outro morfismo $T_i \rightarrow T_j$.

Vamos definir a relação binária $R_\Lambda \subseteq Q_0 \times Q_0$ da seguinte maneira:

$$R_\Lambda = \{(i, j) \in Q_0 \times Q_0 \mid \text{o morfismo } 1_{P_0} \text{ estende-se para um morfismo de } \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T_i, T_j)\}.$$

Vamos definir os seguintes conjuntos:

$$R_{\Lambda,0} = \{(i, i) \mid i \in Q_0\};$$

$$R_{\Lambda,1} = \{(i, j) \in Q_0 \times Q_0 \mid i < j, q_j = q_i\};$$

$$R_{\Lambda,2} = \{(i, j) \in Q_0 \times Q_0 \mid i < j, q_j = q_i + 1, s_i < s_j\};$$

$$R_{\Lambda,3} = \{(i, j) \in Q_0 \times Q_0 \mid i < j, q_j > q_i + 1, r^* \text{ não divide } i\};$$

$$R_{\Lambda,4} = \{(i, j) \in Q_0 \times Q_0 \mid j < i, r^* \text{ divide } j\}.$$

Observação 2.4. Note que se $(i, j) \in R_{\Lambda,1}$ então $s_i < s_j$ e r^* não divide i . Também se $(i, j) \in R_{\Lambda,2}$ então r^* não divide i .

Para cada $(i, j) \in \bigsqcup_{k=0}^4 R_{\Lambda,k}$ vamos definir um morfismo $\varphi_{i,j} \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T_i, T_j)$ que estende o morfismo 1_{P_0} .

- *Caso* $(i, j) \in R_{\Lambda,0}$: Neste caso $j = i$ e $\varphi_{i,j} := 1_{T_i}$.
- *Caso* $(i, j) \in R_{\Lambda,1}$: Neste caso $i < j$ e $q_j = q_i$, então o morfismo $\varphi_{i,j} : T_i \longrightarrow T_j$ é representado abaixo. Note que $j - i = s_j - s_i$.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
P_0 & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{r^*} & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{2r^*} & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & \dots & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{q_i r^*} & \xrightarrow{\alpha^{s_i}} & P_i \\
\downarrow 1_{P_0} & & \downarrow 1_{P_{r^*}} & & \downarrow 1_{P_{2r^*}} & & & & \downarrow 1_{P_{q_i r^*}} & & \downarrow \alpha^{j-i} \\
P_0 & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{r^*} & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{2r^*} & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & \dots & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{q_i r^*} & \xrightarrow{\alpha^{s_j}} & P_j
\end{array} \quad (2.1)$$

- *Caso* $(i, j) \in R_{\Lambda,2}$: Neste caso $i < j$, $q_j = q_i + 1$ e $s_i < s_j$, então o morfismo $\varphi_{i,j} : T_i \longrightarrow T_j$ é representado abaixo. Note que $j - i = r^* + s_j - s_i > r^*$.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
P_0 & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{r^*} & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{2r^*} & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & \dots & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{q_i r^*} & \xrightarrow{\alpha^{s_i}} & P_i & \xrightarrow{0} & 0 \\
\downarrow 1_{P_0} & & \downarrow 1_{P_{r^*}} & & \downarrow 1_{P_{2r^*}} & & & & \downarrow 1_{P_{q_i r^*}} & & \downarrow \alpha^{r^* - s_i} & & \downarrow 0 \\
P_0 & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{r^*} & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{2r^*} & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & \dots & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{q_i r^*} & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{q_j r^*} & \xrightarrow{\alpha^{s_j}} & P_j
\end{array} \quad (2.2)$$

- *Caso* $(i, j) \in R_{\Lambda,3}$: Neste caso $i < j$, $q_j > q_i + 1$ e r^* não divide i , então o morfismo $\varphi_{i,j} : T_i \longrightarrow T_j$ é representado abaixo. Note que, como r^* não divide i , temos $r^* - s_i > 0$.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
P_0 & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{r^*} & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & \dots & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{q_i r^*} & \xrightarrow{\alpha^{s_i}} & P_i & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & \dots & \xrightarrow{0} & 0 \\
\downarrow 1_{P_0} & & \downarrow 1_{P_{r^*}} & & & & \downarrow 1_{P_{q_i r^*}} & & \downarrow \alpha^{r^* - s_i} & & \downarrow 0 & & & & \downarrow 0 \\
P_0 & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{r^*} & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & \dots & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{q_i r^*} & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{(q_i+1)r^*} & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{(q_i+2)r^*} & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & \dots & \xrightarrow{\alpha^{s_j}} & P_j
\end{array} \quad (2.3)$$

- *Caso* $(i, j) \in R_{\Lambda,4}$: Neste caso $j < i$ e r^* divide j , então o morfismo $\varphi_{i,j} : T_i \longrightarrow T_j$ é, em particular, o morfismo projeção representado abaixo.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
P_0 & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{r^*} & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & \dots & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{q_j r^*} & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{(q_j+1)r^*} & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & \dots & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{q_i r^*} & \xrightarrow{\alpha^{s_i}} & P_i \\
\downarrow 1_{P_0} & & \downarrow 1_{P_{r^*}} & & & & \downarrow 1_{P_{q_j r^*}} & & \downarrow 0 & & & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 \\
P_0 & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{r^*} & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & \dots & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{q_j r^*} & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & \dots & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & 0
\end{array} \quad (2.4)$$

Lema 2.5. Vale a seguinte igualdade: $R_\Lambda = \bigsqcup_{i=0}^4 R_{\Lambda,i}$.

Demonstração. Note que, pela construção dos morfismos $\varphi_{i,j}$, temos $\bigsqcup_{i=0}^4 R_{\Lambda,i} \subseteq R_\Lambda$.

Agora, mostraremos que $R_\Lambda \setminus \bigsqcup_{i=0}^4 R_{\Lambda,i} = \emptyset$. Temos 3 casos a analisar.

Primeiro caso: $i < j$, $q_j = q_i + 1$ e $s_i \geq s_j$. Note, pelo diagrama 2.2 acima, que se $s_i \geq s_j$ teremos a composição $\alpha^{r^* - s_i} \alpha^{s_j} \neq 0$, o que torna o diagrama não-comutativo. Portanto, neste caso, não existe morfismo $T_i \rightarrow T_j$ que estende o morfismo $1_{P_0} : P_0 \rightarrow P_0$.

Segundo caso: $i < j$, $q_j > q_i + 1$ e r^* divide i . Neste caso, $i = q_i r^*$ e o último quadrado do diagrama abaixo não é comutativo.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
P_0 & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{r^*} & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & \dots & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{q_i r^*} & \xrightarrow{0} & 0 & \xrightarrow{0} & \dots & \xrightarrow{0} & 0 \\
\downarrow 1_{P_0} & & \downarrow 1_{P_{r^*}} & & & & \downarrow 1_{P_{q_i r^*}} & & \downarrow 0 & & & & \downarrow 0 \\
P_0 & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{r^*} & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & \dots & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{q_i r^*} & \xrightarrow{\alpha^{r^*}} & P_{(q_i+1)r^*} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & P_j
\end{array}$$

Portanto, neste caso, também não existe morfismo $T_i \rightarrow T_j$ que estende o morfismo $1_{P_0} : P_0 \rightarrow P_0$.

Terceiro e último caso: $j < i$ e r^* não divide j . Note que se $q_j = q_i$ então não existe morfismo $P_i \rightarrow P_j$ e portanto não existe morfismo $T_i \rightarrow T_j$ que estende o morfismo $1_{P_0} : P_0 \rightarrow P_0$ e se $q_j < q_i$ então não existe morfismo $P_{(q_j+1)r^*} \rightarrow P_j$ e portanto também não existe morfismo $T_i \rightarrow T_j$ que estende o morfismo $1_{P_0} : P_0 \rightarrow P_0$. \square

Lema 2.6. O conjunto Q_0 com a relação binária R_Λ é um poset.

Demonstração. Para concluir a afirmação acima, basta verificarmos que a relação binária R_Λ é reflexiva, antissimétrica e transitiva.

Como $R_{\Lambda,0} \subseteq R_\Lambda$ então temos a reflexividade.

Se (x, y) e $(y, x) \in R_\Lambda$ o morfismo $1_{P_0} : P_0 \rightarrow P_0$ se estende para $\varphi_{x,y} : T_x \rightarrow T_y$ e $\varphi_{y,x} : T_y \rightarrow T_x$ e, portanto, para $\varphi_{y,x} \varphi_{x,y} : T_x \rightarrow T_x$. Como o morfismo identidade $id_{T_x} : T_x \rightarrow T_x$ também estende o morfismo $1_{P_0} : P_0 \rightarrow P_0$ e esta extensão é única, podemos concluir que $\varphi_{y,x} \varphi_{x,y} = id_{T_x}$. Analogamente mostramos que $\varphi_{x,y} \varphi_{y,x} = id_{T_y}$ e portanto temos $x = y$, ou seja, R_Λ é antissimétrica.

Por fim, suponha que (x, y) e $(y, z) \in R_\Lambda$. Como os morfismos $\varphi_{x,y}$ e $\varphi_{y,z}$ são induzidos pela identidade 1_{P_0} do grau 0, então a composição $\varphi_{y,z} \varphi_{x,y} : T_x \rightarrow T_z$ também é induzida pela identidade 1_{P_0} e portanto $(x, z) \in R_\Lambda$. \square

Notação 2.7. (1) $i \leq_\omega j \Leftrightarrow (i, j) \in R_\Lambda$ para $i, j \in Q_0$.

(2) $S_\Lambda := (Q_0, \leq_\omega)$.

Enunciaremos agora um lema que será importante para a demonstração do teorema abaixo.

Lema 2.8. Seja $\Lambda = \frac{\mathbb{k}Q}{I}$ uma álgebra de dimensão finita tal que $\dim_{\mathbb{k}} e_i \Lambda e_j \leq 1$ para quaisquer $i, j \in Q_0$. Seja

$$\begin{array}{ccc} P(a) & \xrightarrow{\alpha} & P(b) \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \psi \\ P(c) & \xrightarrow{\beta} & P(d) \end{array}$$

um diagrama de homomorfismos entre Λ -módulos projetivos indecomponíveis, onde $a, b, c, d \in Q_0$.

- (1) Sejam α, β e ψ morfismos para os quais existe φ tal que o diagrama acima comuta e as composições são não-nulas ($\beta\varphi = \psi\alpha \neq 0$). Então tal φ é unicamente definido por α, β e ψ .
- (2) Sejam α, β e φ morfismos para os quais existe ψ tal que o diagrama acima comuta e as composições são não-nulas ($\beta\varphi = \psi\alpha \neq 0$). Então tal ψ é unicamente definido por α, β e φ .

Demonstração. Provaremos apenas o item (1), já que o raciocínio para a demonstração do item (2) é análogo.

Suponha que existem φ_1 e φ_2 tais que $\beta\varphi_i = \psi\alpha \neq 0$ para $i = 1, 2$. Segue do Lema 2.11, página 84, em [5] que $\text{Hom}_\Lambda(P(a), P(c)) \simeq e_c \Lambda e_a$. Como $\dim_{\mathbb{k}} e_c \Lambda e_a \leq 1$ temos que $\varphi_2 = \lambda\varphi_1$ para algum $\lambda \in \mathbb{k}$. Logo, $0 = \beta(\varphi_2 - \varphi_1) = \beta(\lambda - 1)\varphi_1 = (\lambda - 1)\beta\varphi_1 = (\lambda - 1)\psi\alpha$. Como $\psi\alpha \neq 0$, obtemos $\lambda = 1$.

□

Teorema 2.9. A álgebra de endomorfismos $\text{End}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T_\Lambda)$ é isomorfa à álgebra de incidência de poset $\mathbb{k}S_\Lambda^{\text{op}}$. Além disso, Λ é derivadamente equivalente a $\mathbb{k}S_\Lambda^{\text{op}}$.

Demonstração. Seja $\psi = (\psi^k)_{k \in \mathbb{Z}}$ um morfismo entre T_i e T_j . Como $\psi^0 \in \text{End}_\Lambda(P_0)$, temos que $\psi^0 = \lambda \cdot 1_{P_0}$ para algum $\lambda \in \mathbb{k}$. Além disso, segue do item (2) do Lema 2.8 que ψ é unicamente definido por ψ^0 . Por isso qualquer morfismo entre T_i e T_j é induzido

por ψ^0 , logo é um múltiplo do morfismo $\varphi_{i,j}$. Portanto, o conjunto $\{\varphi_{i,j}\}_{(i,j) \in R}$ é uma \mathbb{k} -base de $End_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T)$. Logo, $End_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T)$ é isomorfa à álgebra de incidência de poset $\mathbb{k}S_{\Lambda}^{op}$.

Por outro lado, note que os somandos do complexo T geram $\mathcal{K}^b(proj \Lambda)$. Isto segue das seqüências exatas curtas de complexos

$$0 \longrightarrow P_i[-(q_i + 1)] \longrightarrow T_i \longrightarrow T_{q_i r^*} \longrightarrow 0$$

para todo i .

Agora precisamos apenas mostrar que $Hom(T_{\Lambda}, T_{\Lambda}[i]) = 0$ se $i \neq 0$.

Note que, como o vértice 0 é um poço, não existe morfismo $P_x \longrightarrow P_0$ para nenhum $x \in Q_0 \setminus \{0\}$. Portanto, $Hom(T_{\Lambda}, T_{\Lambda}[i]) = 0$ para todo $i < 0$.

Por outro lado, como Λ é r -truncada, não existe morfismo $P_0 \longrightarrow P_j$ para nenhum $j \geq r$. Portanto, segue que $Hom(T_{\Lambda}, T_{\Lambda}[i]) = 0$ para todo $i \geq 2$.

Por fim, analisaremos o caso $i = 1$. Seja $\varphi = (\varphi^k)_{k \in \mathbb{Z}} : T_i \rightarrow T_j[1]$ um morfismo de complexos. Seja m um número inteiro tal que $\varphi^m \neq 0$ e $\varphi^t = 0$ para todo $t > m$. Então φ^m é um morfismo entre módulos projetivos, $\varphi^m : P_a \rightarrow P_b$, onde $a, b \in Q_0$ são tais que $a < b$, logo $\varphi^m = \lambda_m \cdot \alpha^{b-a}$ para algum $\lambda_m \in \mathbb{k}$. Como $\varphi^m \neq 0$, temos que $m \geq 0$, $m \leq q_i + 1$ e $m \leq q_j$, logo $T_i^l = P_{lr^*}$ e $T_j[1]^l = P_{(l+1)r^*}$ para $0 \leq l \leq m - 1$. Por isso, $\varphi^l = \lambda_l \cdot \alpha^{r^*}$ para alguns $\lambda_l \in \mathbb{k}$ para $0 \leq l \leq m - 1$. Definiremos a homotopia $h = (h^k)_{k \in \mathbb{Z}} : T_i \rightarrow T_j = T_j[1][-1]$ pela seguinte regra:

$$h^t = \begin{cases} 0, & \text{se } t \notin [0, \dots, m]; \\ \lambda_m \cdot \alpha^{mr^* - a}, & \text{se } t = m; \\ \mu_t \cdot \alpha^{r^*}, & \text{se } t \in [0, \dots, m - 1]; \end{cases}$$

onde $\mu_m = \lambda_m$ e $\mu_t = \lambda_t - \mu_{t+1}$ para $t \in [0, \dots, m - 1]$. Dessa forma definida, a homotopia h satisfaz $\varphi^k = d_{T_j}^k \circ h^k + h^{k+1} \circ d_{T_i}^k$ e, portanto, φ é homotópico a zero e $Hom_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T_i, T_j[1]) = 0$.

Dessa forma, segue do Teorema 1.4 que $\Lambda \sim End_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T) \simeq \mathbb{k}S_{\Lambda}^{op}$. \square

Definição 2.10. Para $l, m, n, s \in \mathbb{N}$ tais que $m \leq l$ e $s < l$, vamos denotar por

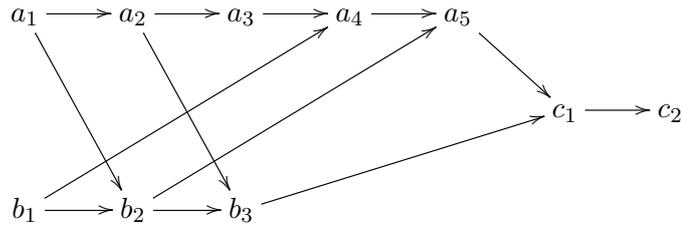
$V(l, m, n, s)$ o poset definido no conjunto de elementos

$$\{a_i, b_j, c_k \mid 1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n\}$$

e com ordem parcial definida pelas seguintes regras:

- (1) $x_i \leq x_j$ se, e somente se, $i \leq j$ para $x \in \{a, b, c\}$;
- (2) $a_i < c_j$ e $b_k < c_j$ para todos i, j, k ;
- (3) $a_i < b_{i+k}$ para todos i e todos $k \geq 1$;
- (4) $b_i < a_{i+t}$ para todos i e todos $t \geq s$.

Exemplo 2.11. O poset $V(5, 3, 2, 3)$ tem o seguinte diagrama de Hasse:



Vamos definir os seguintes subconjuntos de $\{0, 1, \dots, n-1\}$, o conjunto dos vértices de $\vec{\mathbb{A}}_n$.

$$\mathcal{C} := \{i \in \{0, 1, \dots, n-1\} \mid r^* \text{ divide } i\},$$

$$\mathcal{A} := \{i \in \{0, 1, \dots, n-1\} \mid q_i \text{ é par e } i \notin \mathcal{C}\},$$

$$\mathcal{B} := \{i \in \{0, 1, \dots, n-1\} \mid q_i \text{ é ímpar e } i \notin \mathcal{C}\}.$$

Sejam $l_\Lambda(\mathcal{A}) := |\mathcal{A}|$, $l_\Lambda(\mathcal{B}) := |\mathcal{B}|$ e $l_\Lambda(\mathcal{C}) := |\mathcal{C}|$. Se considerarmos a ordem natural existente em $\{0, 1, \dots, n-1\}$, temos as seguintes bijeções que respeitam a ordem natural em \mathbb{Z} para \mathcal{A} , \mathcal{B} e \mathcal{C} :

$$\mathcal{A} \longleftrightarrow \{a_1, a_2, \dots, a_{l_\Lambda(\mathcal{A})}\},$$

$$\mathcal{B} \longleftrightarrow \{b_1, b_2, \dots, b_{l_\Lambda(\mathcal{B})}\},$$

$$\mathcal{C}^{op} \longleftrightarrow \{c_1, c_2, \dots, c_{l_\Lambda(\mathcal{C})}\}.$$

Teorema 2.12. Seja $\Lambda = \Lambda(n, r)$ uma álgebra de Nakayama truncada e T_Λ o complexo inclinante definido acima. Então $\mathbb{k}S_\Lambda \simeq \mathbb{k}V(l_\Lambda(\mathcal{A}), l_\Lambda(\mathcal{B}), l_\Lambda(\mathcal{C}), r^*)$.

Demonstração. Seja $\psi : V = V(l_\Lambda(\mathcal{A}), l_\Lambda(\mathcal{B}), l_\Lambda(\mathcal{C}), r^*) \rightarrow S_\Lambda = Q_0 = \{0, 1, \dots, n-1\}$ a bijeção definida acima. Sejam \leq_ω a ordem parcial em S_Λ e \leq a ordem parcial em V (veja a Definição 2.10). Vamos mostrar que $x < y$ se, e somente se, $\psi(x) <_\omega \psi(y)$ para todos $x, y \in V$.

Sejam $x, y \in V$ tais que $\psi(x) <_\omega \psi(y)$. Então, $(\psi(x), \psi(y)) \in \bigsqcup_{i=1}^4 R_{\Lambda, i}$. Vamos analisar cada caso separadamente.

(1) $(\psi(x), \psi(y)) \in R_{\Lambda, 1}$. Neste caso, $\psi(x) <_\omega \psi(y)$ e podemos supor sem perda de generalidade que $q_{\psi(x)} = q_{\psi(y)}$ é um número par. Se $\psi(y) \notin \mathcal{C}$, temos que $\psi(x), \psi(y) \in \mathcal{A}$ e segue do item (1) da Definição 2.10 que $x < y$. Se $\psi(y) \in \mathcal{C}$, segue do item (2) da Definição 2.10 que $x < y$.

(2) $(\psi(x), \psi(y)) \in R_{\Lambda, 2}$. Vamos supor que $q_{\psi(x)}$ é um número par. Se $\psi(y) \notin \mathcal{C}$, temos que $\psi(x) \in \mathcal{A}$, $\psi(y) \in \mathcal{B}$ e como $s_{\psi(x)} < s_{\psi(y)}$, segue do item (3) da Definição 2.10 que $x < y$. Se $\psi(y) \in \mathcal{C}$, segue do item (2) da Definição 2.10 que $x < y$. O caso em que $q_{\psi(x)}$ é um número ímpar é análogo.

(3) $(\psi(x), \psi(y)) \in R_{\Lambda, 3}$. Então, temos que $\psi(x) <_\omega \psi(y)$ e $\psi(x) \notin \mathcal{C}$. Se $\psi(y) \in \mathcal{C}$, segue do item (2) da Definição 2.10 que $x < y$. Se $\psi(x), \psi(y) \in \mathcal{A}$ ou $\psi(x), \psi(y) \in \mathcal{B}$, segue do item (1) da Definição 2.10 que $x < y$. Se $\psi(x) \in \mathcal{A}$ e $\psi(y) \in \mathcal{B}$ (respectivamente, $\psi(y) \in \mathcal{A}$ e $\psi(x) \in \mathcal{B}$) segue dos itens (1) e (2) (respectivamente, itens (1) e (3)) da Definição 2.10 que $x < y$.

(4) $(\psi(x), \psi(y)) \in R_{\Lambda, 4}$. Neste caso $\psi(y) \in \mathcal{C}$. Se $\psi(x) \in \mathcal{C}$, segue do item (1) da Definição 2.10 que $x < y$. Se $\psi(x) \notin \mathcal{C}$, segue do item (2) da Definição 2.10 que $x < y$.

Portanto, $x < y$ se $\psi(x) <_\omega \psi(y)$ para todos $x, y \in V$.

Suponha agora que $x < y$. Basta considerar os casos em que existe uma flecha no diagrama de Hasse de V de x para y . Vamos analisar cada possibilidade.

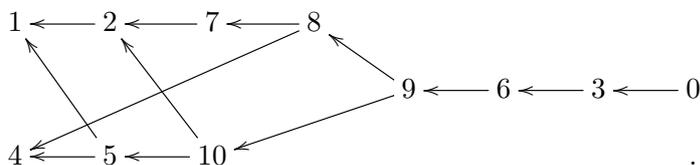
(1) $x = a_i$, $y = a_{i+1}$ para algum i . Então $\psi(x) < \psi(y)$. Se $q_{\psi(x)} = q_{\psi(y)}$, então $(\psi(x), \psi(y)) \in R_{\Lambda, 1}$, logo $\psi(x) <_\omega \psi(y)$. Se $q_{\psi(x)} < q_{\psi(y)}$, temos que $q_{\psi(y)} = q_{\psi(x)} + 2$, logo $(\psi(x), \psi(y)) \in R_{\Lambda, 2}$ (como $\psi(y) \in \mathcal{A}$, temos que r^* não divide $\psi(y)$). Por isso, $\psi(x) <_\omega \psi(y)$.

(2) $x = b_i$, $y = b_{i+1}$ para algum i . Este caso é análogo ao anterior.

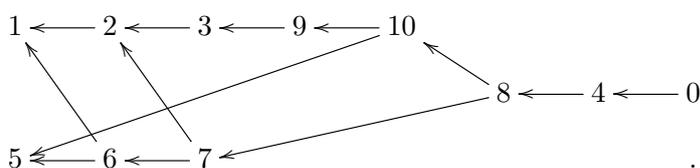
(3) $x = c_i$, $y = c_{i+1}$ para algum i . Neste caso, $\psi(x), \psi(y) \in \mathcal{C}$ e $\psi(x) < \psi(y)$, logo $(\psi(x), \psi(y)) \in R_{\Lambda, 4}$ e concluímos que $\psi(x) <_\omega \psi(y)$.

(4) $x = a_{l_\Lambda(\mathcal{A})}$ e $y = c_1$. Se $q_{\psi(x)} = q_{\psi(y)}$ temos que $\psi(x) < \psi(y)$. Por isso

diagrama de Hasse:



Exemplo 2.17. Seja $\Lambda = \Lambda(11, 5)$. Então $S_{\Lambda}^{op} \simeq V(5, 3, 3, 4)^{op}$, que tem o seguinte diagrama de Hasse:



2.3 Álgebras seriais truncadas

Nesta seção consideraremos uma classe mais geral, a classe das álgebras seriais truncadas. No intuito de demonstrar o teorema abaixo, analisaremos primeiro as álgebras seriais à direita e, a seguir, as álgebras seriais à esquerda.

Teorema 3. Toda álgebra serial sem ciclos truncada é derivadamente equivalente a uma álgebra de incidência de posets.

2.3.1 Álgebras seriais à direita truncadas

Relembrando a Definição 1.23, temos que uma álgebra Λ é dita serial à direita se todo Λ -módulo à direita projetivo indecomponível é unisserial. Em [5], podemos encontrar o seguinte teorema, que dá uma importante caracterização destas álgebras, em relação ao seu carcás.

Teorema 2.18. Uma \mathbb{k} -álgebra básica Λ é serial à direita se, e somente se, para todo vértice a de seu carcás Q_{Λ} , existir no máximo uma flecha que começa em a .

Sejam $r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 2$ e $\Lambda = \frac{\mathbb{k}Q}{\langle Q_r \rangle}$ uma álgebra serial à direita, r -truncada e tal que o carcás Q é uma árvore.

Observação 2.19. Se r é maior que o comprimento de qualquer caminho em Q , então Λ é hereditária.

Como Λ é serial à direita sem ciclos, então Q possui um único poço $a_0 \in Q_0$ e para cada vértice $a \in Q_0$, $a \neq a_0$, existe um único caminho ω_a de comprimento $l(\omega_a) = n = n(a) > 0$ que vai do vértice a para o vértice a_0 em Q . E, nestes casos, podemos considerar as mesmas decomposições de ω feitas anteriormente para definir os complexos inclinantes. Dessa forma, temos

$$T_a^+ : P_{a_0} \xrightarrow{u_1^+} P_{t(u_2^+)} \xrightarrow{u_2^+} P_{t(u_3^+)} \xrightarrow{u_3^+} \dots \longrightarrow P_{t(u_q^+)} \xrightarrow{u_q^+} P_{s(u_q^+)} \xrightarrow{u_n^+} P_a ,$$

onde P_{a_0} está no grau 0; e $T_{a_0}^+ = P_{a_0}$. Defina $T_\Lambda^+ = \bigoplus_{a \in Q_0} T_a^+$.

Seja $\{b_1, \dots, b_m\}$ o conjunto de todas as fontes de Q . Vamos denotar por S_Q o poset cujo diagrama de Hasse é Q . Então $S_Q = Q_0$ como conjunto, b_1, \dots, b_m são elementos minimais de S_Q e a_0 é o único elemento maximal de S_Q . Seja U_{b_i} o aberto em S_Q que corresponde ao elemento b_i , ou seja, $U_{b_i} = \{a \in Q_0 \mid a \geq b_i\}$.

Vamos denotar por Λ_{b_i} a álgebra r -truncada com carcás $Q(b_i)$ que corresponde ao poset U_{b_i} , ou seja, $\Lambda_{b_i} = \frac{\mathbb{k}Q(b_i)}{\mathbb{k}Q(b_i)_r}$. Como Λ é serial à direita, Λ_{b_i} é uma álgebra de Nakayama r -truncada e, como na seção anterior, construímos para cada i a relação $R_{\Lambda_i} \subseteq Q(b_i) \times Q(b_i) \subseteq Q_0 \times Q_0$. Segue do Lema 2.6 que cada $Q(b_i)$ com a respectiva relação binária R_{Λ_i} é um poset, que será denotado por $S_{\Lambda_{b_i}} := (Q(b_i), \leq_{\omega_i})$. Segue do Teorema 2.9 que $S_{\Lambda_{b_i}}$ é um poset cuja álgebra de incidência é derivadamente equivalente a Λ_{b_i} .

Vamos agora definir a relação binária $R_\Lambda \subseteq Q_0 \times Q_0$ como sendo a união das relações R_{Λ_i} :

$$R_\Lambda := \bigcup_{i=1}^m R_{\Lambda_i}.$$

Lema 2.20. O conjunto Q_0 com a relação binária R_Λ é um poset.

Demonstração. Dados $x, y \in Q_0$, se não existe um b_i tal que $x, y \in Q(b_i)$ então os vértices x e y não são comparáveis. Se existe (pelo menos) um b_i tal que $x, y \in Q(b_i)$ então, pela reflexividade e antissimetria de Λ_{b_i} garantida pelo Lema 2.6, podemos concluir que R_Λ é reflexiva e antissimétrica.

Suponha agora que (x, y) e $(y, z) \in R_\Lambda$. Então existem morfismos $T_x \rightarrow T_y$ e $T_y \rightarrow T_z$ induzidos por $1_{P_0} : P_0 \rightarrow P_0$ e, portanto, a composição dos morfismos $T_x \rightarrow T_y \rightarrow T_z$ também é induzida por $1_{P_0} : P_0 \rightarrow P_0$. Logo, $(x, z) \in R_\Lambda$, ou seja, R_Λ é transitiva. O resultado segue. \square

Teorema 2.21. A álgebra de endomorfismos $End_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T_\Lambda^+)$ é isomorfa à álgebra de incidência de poset $\mathbb{k}S_\Lambda^{op}$. Além disso, Λ é derivadamente equivalente a $\mathbb{k}S_\Lambda^{op}$.

Demonstração. Sejam $c, d \in Q_0$. Se $c, d \in Q(b_i)_0$ para alguma fonte b_i de Q , segue da Seção 2.2 que $Hom_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T_c, T_d) \neq 0$ se, e somente se, $(c, d) \in R_{b_i}$ e, neste caso, todos os morfismos são múltiplos de $\varphi_{c,d}$, o morfismo induzido por 1_{P_0} . Caso não exista uma fonte b_i de Q tal que $c, d \in Q(b_i)_0$, segue que não existe caminho entre c e d em Q . Logo, não existe morfismo não-nulo entre os complexos T_c e T_d . Por isso o conjunto de morfismos $\{\varphi_{c,d} \mid (c, d) \in R_\Lambda\}$ é uma \mathbb{k} -base de $End_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T_\Lambda^+)$. Além disso, se $(c, d) \in R_\Lambda$ e $(d, f) \in R_\Lambda$, então $(c, f) \in R_\Lambda$ e também temos a seguinte propriedade:

$$\varphi_{c,d}\varphi_{f,g} = \begin{cases} \varphi_{c,g}, & \text{se } d = f, \\ 0, & \text{se } d \neq f. \end{cases}$$

Então, podemos concluir que a álgebra $End_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T_\Lambda^+)$ é isomorfa à álgebra de incidência de poset $\mathbb{k}S_\Lambda^{op}$.

A demonstração do fato de que T_Λ^+ gera $\mathcal{K}^b(proj \Lambda)$ é análoga à demonstração feita para T_Λ no Teorema 2.9.

Sejam $c, d \in Q_0$. Se $c, d \in Q(b_i)_0$ para alguma fonte b_i de Q , então segue da demonstração do Teorema 2.9 que $Hom_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T_c, T_d[n]) \simeq Hom_{\mathcal{D}^b(\Lambda_{b_i})}(T_c, T_d[n]) = 0$ se $n \neq 0$. Se não existe fonte b_i de Q tal que $c, d \in Q(b_i)_0$, a demonstração de que $Hom_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T_c, T_d[n]) = 0$ para $n \neq 0$ é análoga à demonstração do Teorema 2.9.

Podemos concluir que T_Λ^+ é um complexo inclinante. Logo, segue do Teorema 1.4 que Λ é derivadamente equivalente à álgebra de incidência de poset $\mathbb{k}S_\Lambda^{op}$. \square

2.3.2 Álgebras seriais à esquerda truncadas

Sejam $r \in \mathbb{Z}$, $r \geq 2$ e $\Lambda = \frac{\mathbb{k}Q}{\langle Q_r \rangle}$ uma álgebra seria à esquerda, r -truncada e tal que o carcás Q é uma árvore. Então Q possui uma única fonte $a_0 \in Q_0$ e para cada vértice

$a \in Q_0$ existe um único caminho ω_a do vértice a_0 para o vértice a .

Sejam $T_a^- = T_{\omega_a, r}^-$ e $T_\Lambda^- = \bigoplus_{a \in Q_0} T_a^-$.

De maneira análoga à seção anterior, definimos o poset S_Λ com o conjunto de vértices Q_0 e a relação de equivalência $R_\Lambda \subseteq Q_0 \times Q_0$ é tomada fazendo-se os ajustes necessários.

Teorema 2.22. A álgebra de endomorfismos $End_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T_\Lambda^-)$ é isomorfa à álgebra de incidência de poset $\mathbb{k}S_\Lambda^{op}$. Além disso, Λ é derivadamente equivalente a $\mathbb{k}S_\Lambda^{op}$.

Demonstração. Análoga à demonstração do Teorema 2.21. □

Observação 2.23. Note que, se considerarmos a álgebra oposta à álgebra serial à esquerda Λ , denotada por Λ^{op} , obteremos uma álgebra serial à direita e, ao construirmos o poset $S_{\Lambda^{op}}$ este será equivalente ao poset $(S_\Lambda)^{op}$.

2.4 Álgebras $\Lambda(\Lambda_1, \dots, \Lambda_t)$

Sejam $\Lambda_i = \frac{\mathbb{k}Q^i}{I_i}$ para $1 \leq i \leq t$, tais que $Q_0^i \cap Q_0^j = \{a\}$ para $1 \leq i \neq j \leq t$ e tais que cada Q^i não possui laços no vértice a . Nestas condições, chamaremos o vértice a de *vértice especial de Q^i* .

Definição 2.24. $\Lambda_a(\Lambda_1, \dots, \Lambda_t) := \frac{\mathbb{k}Q}{I}$, onde

$$(1) \quad Q_0 = \bigcup_{i=1}^t Q_0^i;$$

$$(2) \quad Q_1 = \bigcup_{i=1}^t Q_1^i;$$

$$(3) \quad I \text{ é o ideal em } \mathbb{k}Q \text{ gerado pelo conjunto } \bigcup_{i=1}^t I_i.$$

Chamaremos a álgebra $\Lambda_a(\Lambda_1, \dots, \Lambda_t)$ de *colagem das álgebras $\Lambda_1, \dots, \Lambda_t$ no vértice especial a* . Quando o vértice especial estiver claro no contexto denotaremos esta álgebra apenas por $\Lambda(\Lambda_1, \dots, \Lambda_t)$.

Suponha, a partir de agora, que cada Λ_i é uma álgebra serial à direita, truncada ou hereditária. Já vimos que, neste caso, cada Λ_i possui um único poço $a_0 \in Q_0^i$ que fixaremos como sendo seu vértice especial. Note que, neste caso, a álgebra $\Lambda_{a_0}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_t)$ é também uma álgebra serial à direita.

Seja \mathbb{T} um subconjunto de $\{1, \dots, t\}$. Vamos definir o seguinte complexo para a álgebra $\Lambda_{a_0}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_t)$

$$T_{\Lambda, \mathbb{T}} = \bigoplus_{a \in Q_0} T_a, \text{ onde } T_a = \begin{cases} T_a^+, & \text{se } a \in Q_0^i \text{ para algum } i \in \mathbb{T}; \\ P_a, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O próximo resultado generaliza o Teorema 2.21 no sentido de que cada álgebra Λ_i pode ser r_i -truncada, não sendo necessariamente $r_i = r_j$ para $i \neq j$. Nos casos em que $r_i = r$ para todo i , se considerarmos $\mathbb{T} = \{1, \dots, t\}$ obtemos o resultado do Teorema 2.21.

Teorema 2.25. Seja $\Lambda = \Lambda_{a_0}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_t)$, onde cada Λ_i é uma álgebra serial à direita truncada ou uma álgebra serial à direita hereditária com único poço a_0 e \mathbb{T} um subconjunto de $\{1, \dots, t\}$.

1. $T_{\Lambda, \mathbb{T}}$ é um complexo inclinante.
2. Λ é derivadamente equivalente a $End_{\mathcal{D}^b(\Lambda)} T_{\Lambda, \mathbb{T}}$.
3. A álgebra $End_{\mathcal{D}^b(\Lambda)} T_{\Lambda, \mathbb{T}}$ é isomorfa à álgebra $\tilde{\Lambda} = \Lambda_{a_0}(\tilde{\Lambda}_1, \dots, \tilde{\Lambda}_t)$, onde

$$\tilde{\Lambda}_i = \begin{cases} \mathbb{k}S_{\Lambda_i}^{op}, & \text{se } i \in \mathbb{T} \\ \Lambda_i, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. Seja $T_{\Lambda, \mathbb{T}}^i = \bigoplus_{a \in Q_0^i} T_a$ para $i \in \{1, \dots, t\}$. Seja $\tilde{\mathbb{T}} = \{1, \dots, t\} \setminus \mathbb{T}$.

1. Vamos mostrar que $T_{\Lambda, \mathbb{T}}$ é um complexo inclinante. A demonstração do fato de que $T_{\Lambda, \mathbb{T}}$ gera $\mathcal{K}^b(proj \Lambda)$ é análoga à demonstração feita para T_{Λ} no Teorema 2.9. Sejam $c, d \in Q_0$ tais que $c \in Q_0^i$ e $d \in Q_0^j$ para alguns i, j . Suponha $i = j$. Se $i \in \mathbb{T}$, segue do Teorema 2.21 que $T_{\Lambda, \mathbb{T}}^i$ é um complexo inclinante. Se $i \in \tilde{\mathbb{T}}$, $T_{\Lambda, \mathbb{T}}^i$ é isomorfo a Λ_i concentrado no grau zero, logo também é um complexo inclinante. Por isso, para $i = j$ temos que $Hom_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T_c, T_d[n]) = 0$ se $n \neq 0$.

Suponha agora que $i \neq j$, $c \neq a_0$ e $d \neq a_0$. Se $i, j \in \tilde{\mathbb{T}}$, então T_c e T_d são complexos concentrados no grau zero, logo $Hom_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T_c, T_d[n]) = 0$ se $n \neq 0$. Como não existem caminhos não triviais entre vértices de Q^i e Q^j , temos $Hom_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T_c, T_d[n]) = 0$ se $n \neq 0$ no caso de $i \in \tilde{\mathbb{T}}$ ou $j \in \tilde{\mathbb{T}}$. Sejam agora $i, j \in \mathbb{T}$. De forma análoga

à demonstração do Teorema 2.9, basta mostrar que $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T_c, T_d[1]) = 0$. Seja $\varphi = (\varphi^k)_{k \in \mathbb{Z}} : T_c \rightarrow T_d[1]$ um morfismo de complexos. Como não existem caminhos não triviais entre vértices de Q^i e vértices de Q^j temos que $\varphi^k = 0$ para $k \neq 0$. Mas neste caso φ é também um morfismo entre complexos T_{a_0} e $T_d[1]$. Como $a_0, d \in Q^j$ e o complexo $T_{\Lambda, \mathbb{T}}^j$ é inclinante pelo Teorema 2.21, segue que φ é homotópico a zero, logo $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T_c, T_d[1]) = 0$.

2. A afirmação do item 2 segue do item 1 e do Teorema 1.4.

3. Como $T_{\Lambda, \mathbb{T}}^i \simeq \Lambda_i$ para $i \in \tilde{\mathbb{T}}$, então $\text{End}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)} T_{\Lambda, \mathbb{T}}^i \simeq \Lambda_i = \frac{\mathbb{k}\tilde{Q}^i}{\tilde{I}_i}$. Por outro lado, segue do Teorema 2.22 que $\text{End}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)} T_{\Lambda, \mathbb{T}}^i \simeq \mathbb{k}S_{\Lambda_i}^{op} = \frac{\mathbb{k}\tilde{Q}^i}{\tilde{I}_i}$ no caso em que $i \in \mathbb{T}$. Seja $\tilde{\Lambda}_i = \frac{\mathbb{k}\tilde{Q}^i}{\tilde{I}_i}$ para $i \in \{1, \dots, t\}$, onde \tilde{Q}^i e \tilde{I}_i são os definidos acima. Podemos assumir que $\tilde{Q}_0^i = Q_0^i$ para $i \in \{1, \dots, t\}$. Sejam $c, d \in Q_0$. Como as álgebras Λ_i são seriais à direita e não existem caminhos não triviais entre vértices de diferentes Q^i , temos que somente pode existir morfismo não nulo em $\mathcal{D}^b(\Lambda)$ de T_c para T_d se $c, d \in Q_0^i$ para algum $i \in \{1, \dots, t\}$ ou se $c \in Q_0^i$ para algum $i \in \mathbb{T}$ e $d \in Q_0^j$ para algum $j \in \tilde{\mathbb{T}}$. Seja $\varphi = (\varphi^k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T_c, T_d)$. Como $j \in \tilde{\mathbb{T}}$, $T_d = P_d$, logo $\varphi^k = 0$ se $k \neq 0$. Por isso, φ sempre se fatora pelo morfismo φ_{c, a_0} (veja definição na seção 2.2). Por isso o carcás \tilde{Q} da álgebra $\text{End}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)} T_{\Lambda, \mathbb{T}}$ pode ser obtido dos carcasses \tilde{Q}^i pela colagem no vértice a_0 , ou seja:

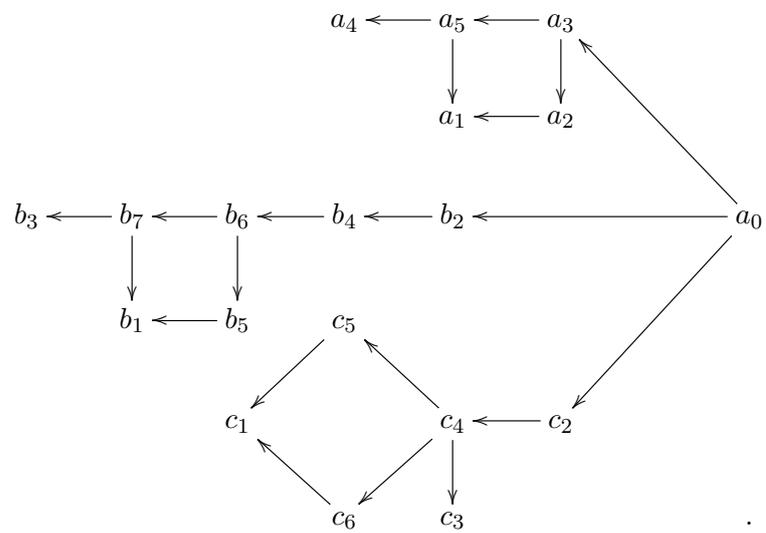
$$\tilde{Q}_0 = \bigcup_{i=1}^t \tilde{Q}_0^i, \quad \tilde{Q}_1 = \bigcup_{i=1}^t \tilde{Q}_1^i.$$

Além disso, se $\varphi = (\varphi^k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T_c, T_d)$ como acima, ou seja, $c \in Q_0^i$ com $i \in \mathbb{T}$ e $d \in Q_0^j$ com $j \in \tilde{\mathbb{T}}$ então $\varphi = \tilde{\varphi}\varphi_{c, a_0}$, onde $\varphi_{c, a_0} \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T_c, T_{a_0})$ e $\tilde{\varphi} \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(T_{a_0}, T_d)$, e como $\varphi_{c, a_0}^0 = 1_{P_0}$, temos que $\varphi = 0$ se, e somente se, $\tilde{\varphi} = 0$. Por isso, $\text{End}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)} T_{\Lambda, \mathbb{T}} \simeq \frac{\mathbb{k}\tilde{Q}}{\tilde{I}}$, onde \tilde{I} é o ideal gerado por conjuntos $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \dots, \tilde{I}_t$. Logo $\text{End}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)} T_{\Lambda, \mathbb{T}}$ é isomorfa à álgebra de colagem das álgebras $\text{End}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)} T_{\Lambda, \mathbb{T}}^i$ no vértice a_0 . \square

Observação 2.26. Quando as álgebras Λ_i são seriais à direita com seus únicos poços sendo os vértices especiais então a álgebra $\Lambda(\Lambda_1, \dots, \Lambda_t)$ coincide com o *pullback iterado* $\Lambda_1 \sqcup_{\Lambda_0} \dots \sqcup_{\Lambda_0} \Lambda_t$ das álgebras $\Lambda_1, \dots, \Lambda_t$, onde $\Lambda_0 = \mathbb{k}Q^0$ com $Q_0^0 = \{a\}$ e $Q_1^0 = \emptyset$ e com epimorfismos naturais

$$\begin{aligned} \Lambda_i &\rightarrow \Lambda_0 \\ b &\mapsto e_a b e_a. \end{aligned}$$

equivalente a $\mathbb{k}S_\Lambda^{op}$, e o poset S_Λ^{op} é representado abaixo.



Capítulo 3

Álgebras de incidência de posets hereditárias por partes

Fixaremos aqui algumas notações para equivalências derivadas de forma a deixar o texto que se segue menos técnico.

Dadas A, B álgebras; S, T posets e $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ grafos, denotaremos:

- $A \sim B \Leftrightarrow \mathcal{D}^b(A) \simeq_{tr} \mathcal{D}^b(B)$.
- $S \sim T \Leftrightarrow \mathbb{k}S \sim \mathbb{k}T$.
- $S \sim A \Leftrightarrow \mathbb{k}S \sim A$.
- $A \sim \mathbb{X}_{n,m,l} \Leftrightarrow \mathcal{D}^b(A) \simeq_{tr} \mathcal{D}^b(\mathbb{X}_{n,m,l}) \Leftrightarrow A \sim C_{n,m,l}$.
- $S \sim \mathbb{X}_{n,m,l} \Leftrightarrow \mathbb{k}S \sim \mathbb{X}_{n,m,l}$.
- $A \sim \Gamma \Leftrightarrow A \sim \mathbb{k}\vec{\Gamma}$ para alguma orientação $\vec{\Gamma}$ de Γ .
- $S \sim \Gamma \Leftrightarrow \mathbb{k}S \sim \Gamma$.
- $\Gamma_1 \sim \Gamma_2 \Leftrightarrow \mathbb{k}\vec{\Gamma}_1 \sim \mathbb{k}\vec{\Gamma}_2$ para algumas orientações de Γ_1 e de Γ_2 .
- $\Gamma \sim \mathbb{X}_{n,m,l} \Leftrightarrow \mathbb{k}\vec{\Gamma} \sim C_{n,m,l}$ para alguma orientação $\vec{\Gamma}$ de Γ .

Em [46] podemos encontrar o seguinte resultado.

Lema 3.1. Sejam S e T posets. Se $S \sim T$ então $S^{op} \sim T^{op}$.

O resultado a seguir está descrito em [30].

Lema 3.2. Sejam Q e Δ carcasses que são árvores e cujos grafos adjacentes Γ_Q e Γ_Δ são isomorfos. Então $\mathbb{k}Q \sim \mathbb{k}\Delta$.

Definiremos agora alguns posets que desempenharão um papel interessante em nosso trabalho. Em todos os casos temos $m, n \in \mathbb{N}$. Note que denotaremos da mesma forma os carcasses e os posets cujo diagrama de Hasse são $\vec{\mathbb{A}}_n$ e $\vec{\mathbb{D}}_n$.

(1) Dado $n \geq 1$, $\vec{\mathbb{A}}_n$ denotará o poset abaixo.

$$a_0 \longleftarrow a_1 \longleftarrow \dots \longleftarrow a_{n-2} \longleftarrow a_{n-1}$$

(2) Dado $n \geq 4$, $\vec{\mathbb{D}}_n$ denotará o poset abaixo.

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_0 & \longleftarrow & a_1 & \longleftarrow & a_2 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & a_{n-3} & \longleftarrow & a_{n-2} \\ & & & & & & & & & & \swarrow \\ & & & & & & & & & & a_{n-1} \end{array}$$

(3) Dados $n \geq 2$ e $m \geq 0$, $B(n, m)$ denotará o poset abaixo.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} a_1 & \longleftarrow & a_2 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & a_{n-1} & \longleftarrow & a_n & \longleftarrow & c_1 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & c_m \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & \\ b_1 & \longleftarrow & b_2 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & b_{n-1} & \longleftarrow & b_n & & & & & & \end{array}$$

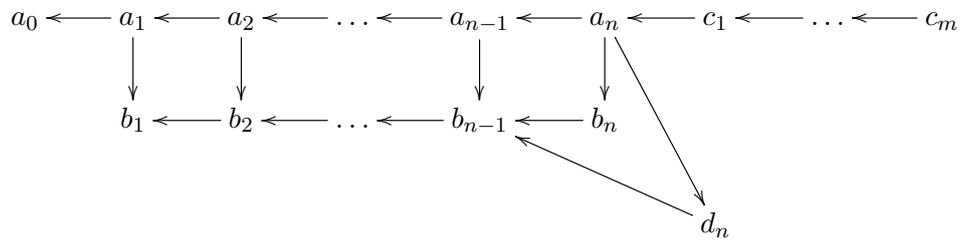
(4) Dados $n \geq 1$ e $m \geq 0$, $C(n, m)$ denotará o poset abaixo.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} a_0 & \longleftarrow & a_1 & \longleftarrow & a_2 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & a_{n-1} & \longleftarrow & a_n & \longleftarrow & c_1 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & c_m \\ \downarrow & & & & & & & & \\ b_1 & \longleftarrow & b_2 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & b_{n-1} & \longleftarrow & b_n & & & & & & & & \end{array}$$

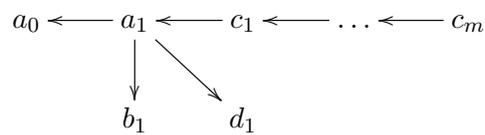
(5) Dado $n \geq 1$, $C_1(n)$ denotará o poset abaixo.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} a_0 & \longleftarrow & a_1 & \longleftarrow & a_2 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & a_{n-1} & \longleftarrow & a_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ b_1 & \longleftarrow & b_2 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & b_{n-1} & \longleftarrow & b_n & \longleftarrow & b_{n+1} \end{array}$$

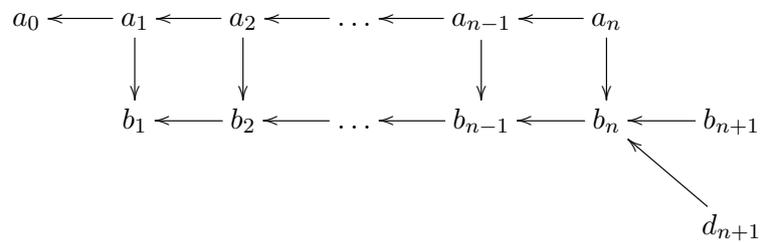
(6) Dados $n \geq 2$ e $m \geq 0$, $D(n, m)$ denotará o poset abaixo.



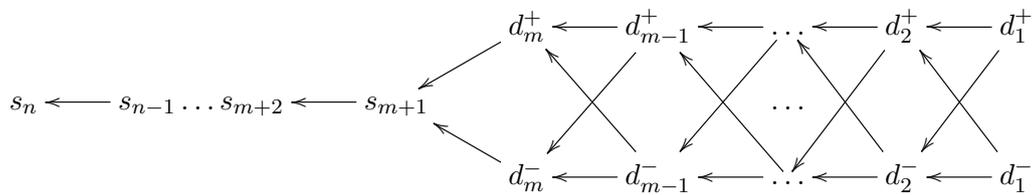
(7) Dado $m \geq 0$, $D(1, m)$ denotará o poset abaixo.



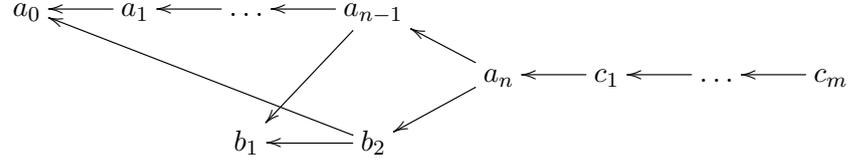
(8) Dado $n \geq 1$, $D_1(n)$ denotará o poset abaixo.



(9) Dados $n \geq m > 0$, defina $S(n, m)$ como sendo o poset:



(10) Dados $n > 2$ e $m > 0$, defina $\mathcal{X}(n, m)$ como sendo o poset:



Lenzing e de la Peña, em [51], fixaram uma orientação para as arestas dos grafos B_n , C_n e D_n , cujos diagramas têm um importante papel na teoria das singularidades. Veja [26] para sua primeira aparição e [24] para um livro-texto mais recente. Os posets $B(n, m)$ e $C(n, m)$ são generalizações dos diagramas $B_n = B(n, 0)$ e $C_n = C(n, 0)$, já o poset $D(n, m)$ foi obtido de $C(n, m)$ apenas duplicando-se o vértice b_n e as flechas que chegam ou saem dele. Não foi encontrada uma relação entre $D(n, m)$ e D_n .

3.1 Colagem de posets

Definição 3.3. Seja S um poset tal que seu grafo é uma árvore. Chamaremos de *elemento especial de S* um elemento maximal fixado.

Nos posets $C(n_i, m_i)$, $C_1(n_i)$, $D(n_i, m_i)$, $D_1(n_i)$ fixaremos o vértice a_0 como elemento especial.

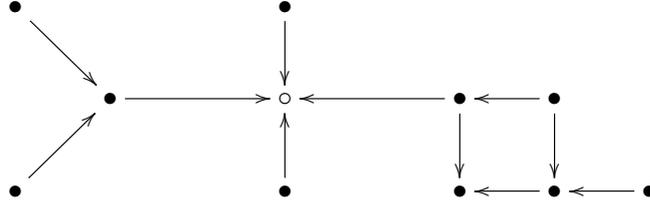
Para qualquer $i \in \{1, \dots, t\}$ seja S_i um poset tal que seu grafo é uma árvore, com um vértice especial fixado ou $S_i \in \{C(n_i, m_i), C_1(n_i), D(n_i, m_i), D_1(n_i)\}$ para alguns n_i, m_i .

Definição 3.4. $S(S_1, \dots, S_t)$ é um poset que possui subposets T_1, \dots, T_t com as seguintes propriedades:

- (1) T_i é isomorfo a S_i para todo i .
- (2) $\bigcup_{1 \leq i \leq t} T_i = S(S_1, \dots, S_t)$.
- (3) Para todo $i \neq j$ temos $T_i \cap T_j = \{\text{elemento especial em } T_i\}$.

Em outras palavras, $S(S_1, \dots, S_t)$ é o poset obtido de S_1, \dots, S_t colando-se todos os elementos especiais de cada S_i .

Exemplo 3.5. $S(\vec{\mathbb{A}}_2, \vec{\mathbb{A}}_2, \vec{\mathbb{D}}_4, C_1(2))$:



Note que o vértice não preenchido (o) representa o elemento especial de cada poset que foi colado.

Observação 3.6. É imediato o fato que a ordem dos posets a serem colados, não altera o resultado da colagem, ou seja, $S(S_1, \dots, S_{i-1}, S_i, S_{i+1}, \dots, S_{j-1}, S_j, S_{j+1}, \dots, S_t)$ é isomorfo a $S(S_1, \dots, S_{i-1}, S_j, S_{i+1}, \dots, S_{j-1}, S_i, S_{j+1}, \dots, S_t)$ para todo $1 \leq i, j \leq t$.

Observação 3.7. Segue da definição que a álgebra de incidência de poset $\mathbb{k}S(S_1, \dots, S_t)$ é isomorfa à colagem das álgebras de incidência de posets $\Lambda(\mathbb{k}S_1, \dots, \mathbb{k}S_t)$.

3.2 Equivalências derivadas de álgebras de incidência de posets

O lema a seguir apresenta uma equivalência derivadas entre as álgebras de incidência de alguns dos posets definidos acima e algumas das álgebras $\Lambda(n, r)$ e $\Delta(n, r)$.

Lema 3.8. Valem as seguintes equivalências derivadas:

- (a) $C(n, m) \sim \Lambda(2n + m + 1, n + m + 1)$;
- (b) $C_1(n) \sim \Lambda(2n + 2, n + 1)$;
- (c) $D(n, m) \sim \Delta(2n + m + 2, n + m + 1)$;
- (d) $D_1(n) \sim \Delta(2n + 3, n + 1)$;
- (e) $L(t, r - t - 1) \sim \Lambda(r + t, r)$ para $2 \leq t \leq r - 2$.

Demonstração. (a) Em $C(n, m)$ considere o subconjunto fechado

$$Y = \{a_0, \dots, a_n, c_1, \dots, c_m\}.$$

Segue do Teorema 1.21 que $C(n, m) \sim \mathcal{A}_Y$, onde a álgebra \mathcal{A}_Y é dada pelo seguinte carcás com relações (veja em 1.2.4 a definição de \mathcal{A}_Y).

$$a_0 \xleftarrow{\alpha_1} a_1 \xleftarrow{\alpha_2} \dots \xleftarrow{\alpha_n} a_n \xleftarrow{\gamma_1} c_1 \xleftarrow{\gamma_2} \dots \xleftarrow{\gamma_m} c_m \xleftarrow{\beta_1} b_1 \xleftarrow{\beta_2} \dots \xleftarrow{\beta_n} b_n$$

onde $\beta_1 \gamma_m \dots \gamma_1 \alpha_n \dots \alpha_1 = \beta_2 \beta_1 \gamma_m \dots \gamma_1 \alpha_n \dots \alpha_2 = \dots = \beta_n \dots \beta_1 \gamma_m \dots \gamma_1 \alpha_n = 0$.

Como \mathcal{A}_Y é isomorfa à álgebra $\Lambda(2n + m + 1, n + m + 1)$, a afirmação segue.

(b) Em $C_1(n)$ considere o subconjunto fechado $Y = \{a_0, \dots, a_n\}$. Segue do Teorema 1.21 que $C_1(n) \sim \mathcal{A}_Y$, onde a álgebra \mathcal{A}_Y é dada pelo seguinte carcás com relações.

$$a_0 \xleftarrow{\alpha_1} a_1 \xleftarrow{\alpha_2} \dots \xleftarrow{\alpha_n} a_n \xleftarrow{\beta_1} b_1 \xleftarrow{\beta_2} \dots \xleftarrow{\beta_n} b_n \xleftarrow{\beta_{n+1}} b_{n+1}$$

onde $\beta_1 \alpha_n \dots \alpha_1 = \beta_2 \beta_1 \alpha_n \dots \alpha_2 = \dots = \beta_n \dots \beta_1 \alpha_n \beta_{n+1} \beta_n \dots \beta_1 = 0$.

Como \mathcal{A}_Y é isomorfa à álgebra $\Lambda(2n + 2, n + 1)$, a afirmação segue.

(c) Em $D(n, m)$ considere o subconjunto fechado $Y = \{a_0, \dots, a_n, c_1, \dots, c_m\}$. Segue do Teorema 1.21 que $D(n, m) \sim \mathcal{A}_Y$, onde a álgebra \mathcal{A}_Y é dada pelo seguinte carcás com relações.

$$a_0 \xleftarrow{\alpha_1} a_1 \xleftarrow{\alpha_2} \dots \xleftarrow{\alpha_n} a_n \xleftarrow{\gamma_1} c_1 \xleftarrow{\gamma_2} \dots \xleftarrow{\gamma_m} c_m \xleftarrow{\beta_1} b_1 \xleftarrow{\beta_2} \dots \xleftarrow{\beta_{n-1}} b_{n-1} \begin{array}{l} \xleftarrow{\beta_n} b_n \\ \xleftarrow{\delta_n} d_n \end{array}$$

onde $\beta_1 \gamma_m \dots \gamma_1 \alpha_n \dots \alpha_1 = \beta_2 \beta_1 \gamma_m \dots \gamma_1 \alpha_n \dots \alpha_2 = \dots = \beta_n \dots \beta_1 \gamma_m \dots \gamma_1 \alpha_n = \delta_n \beta_{n-1} \dots \beta_1 \gamma_m \dots \gamma_1 \alpha_n = 0$.

Como \mathcal{A}_Y é isomorfa à álgebra $\Delta(2n + m + 2, n + m + 1)$, a afirmação segue.

(d) Em $D_1(n)$ considere o subconjunto fechado $Y = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$. Segue do Teorema 1.21 que $D_1(n) \sim \mathcal{A}_Y$, onde a álgebra \mathcal{A}_Y é dada pelo seguinte carcás com

relações.

$$a_0 \xleftarrow{\alpha_1} a_1 \xleftarrow{\alpha_2} \dots \xleftarrow{\alpha_n} a_n \xleftarrow{\beta_1} b_1 \xleftarrow{\beta_2} \dots \xleftarrow{\beta_n} b_n \begin{array}{l} \xleftarrow{\beta_{n+1}} b_{n+1} \\ \xleftarrow{\delta_{n+1}} d_{n+1} \end{array}$$

onde $\beta_1 \alpha_n \dots \alpha_1 = \beta_2 \beta_1 \alpha_n \dots \alpha_2 = \dots = \beta_n \dots \beta_1 \alpha_n = \beta_{n+1} \beta_n \dots \beta_1 = \delta_{n+1} \beta_n \dots \beta_1 = 0$.

Como \mathcal{A}_Y é isomorfa à álgebra $\Delta(2n+3, n+1)$, a afirmação segue.

(e) Segue do Corolário 2.14. □

Lema 3.9. Seja $n \geq 2$, então $\Lambda = \Lambda(2n+1, n+1) \sim C(n-1, 2)$.

Demonstração. Segue do Teorema 2.9 que $\Lambda \sim S_\Lambda^{op}$ e segue do Teorema 2.12 que $S_\Lambda^{op} \sim V(n-1, n-1, 3, n)^{op}$. De maneira análoga ao Corolário 2.14, temos $V(n-1, n-1, 3, n)^{op} \simeq C(n-1, 2)$ e o resultado segue. □

Lema 3.10. Valem as equivalências:

- (a) $B(n, m) \sim C(n-1, m+1)$, para todos $n \geq 2$ e $m \geq 0$;
- (b) $L(n, m) \sim C(n, m)$, para todos $n \geq 2$ e $m \geq 1$.

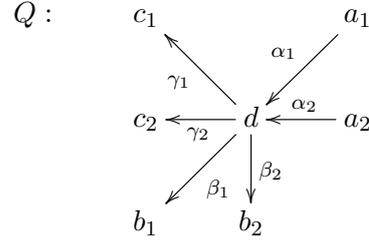
Demonstração. (a) Em $B(n, m)$, se considerarmos o subconjunto $Y = \{a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_m, b_2, \dots, b_n\}$, segue do Teorema 1.21, que $B(n, m) \sim \mathcal{A}_Y$ (veja 1.2.4 para a descrição da álgebra \mathcal{A}_Y). Como \mathcal{A}_Y é isomorfa à álgebra $\mathbb{k}C(n-1, m+1)$, a afirmação segue.

(b) Segue dos itens (a) e (e) do Lema 3.8 que $C(n, m) \sim \Lambda(2n+m+1, n+m+1) \sim L(n, m)$. □

Lema 3.11. $C(n, 0) \sim C(n-1, 2)$ para todo $n > 1$.

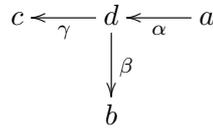
Demonstração. Segue dos Lemas 3.8 e 3.9 que $C(n, 0) \sim \Lambda(2n+1, n+1) \sim C(n-1, 2)$ para todo $n > 1$. □

Lema 3.12. Seja $\Lambda = \frac{\mathbb{k}Q}{I}$ a álgebra definida pelo seguinte carcás com relações:



e $I = \langle \alpha_1\beta_1, \alpha_1\beta_2, \alpha_2\beta_1, \alpha_2\beta_2 \rangle$. Então Λ não é hereditária por partes.

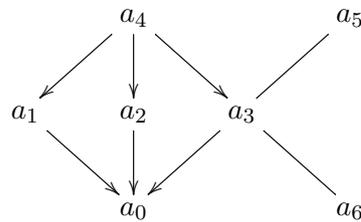
Demonstração. Considere a tripla gentil torcida (Δ, Sp, J) , onde $\Delta :$



$Sp = \{a, b, c\}$ e $J = \langle \alpha\beta \rangle$. Como Λ é isomorfa à álgebra $\frac{\mathbb{k}\Delta^{sg}}{\langle J^{sg} \rangle}$ então Λ é uma álgebra gentil torcida. (Veja subseção 1.2.6 para definições e notações de álgebras gentis torcidas).

Vamos considerar a corda generalizada (Veja a Seção 1.2.6 para mais detalhes) $w = (\alpha\gamma)(\gamma^{-1})(\beta)(\beta^{-1})(\alpha^{-1})$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, a corda generalizada $w^n = w \dots w$ (n vezes). Seja P_{w^n} o complexo correspondente a w^n . Segue do Teorema 3 de [16] que P_{w^n} é um objeto indecomponível de $\mathcal{D}^b(\Lambda)$. Como $\ell(P_{w^n}) = n + 1$, obtemos que $s.gl.dim(\Lambda) = \infty$. Por isso, segue de [40] que a álgebra Λ não é hereditária por partes. \square

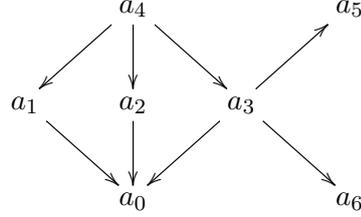
Lema 3.13. Seja S o poset com o seguinte diagrama de Hasse:



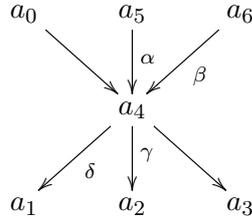
onde as arestas sem flechas podem ser orientadas arbitrariamente. Então, as álgebras

de incidência do poset S não é hereditária por partes.

Demonstração. Sem perda de generalidade, usando mutações em a_5 e a_6 , podemos supor que o diagrama de Hasse de S é o seguinte:



Considerando-se o conjunto fechado $Y = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, temos $\mathcal{A}_Y \simeq A = \frac{\mathbb{k}Q}{I}$, onde Q :



e $I = \langle \alpha\gamma, \alpha\delta, \beta\gamma, \beta\delta \rangle$.

Como a álgebra $\mu_{a_0}^+(A)$ é isomorfa à álgebra do Lema 3.12, a afirmação segue. \square

Happel e Seidel, em seu artigo [36], na Proposição 2.6, mostraram o seguinte resultado.

Lema 3.14. Para $n \geq 3$ e $n > r \geq 2$ temos que as seguintes álgebras não são hereditárias por partes.

- (a) $\Lambda(n+i, n-5)$ não é hereditária por partes para $n \geq 12$ e $i \geq 0$;
- (b) $\Lambda(n, 3)$ não é hereditária por partes para $n \geq 12$;
- (c) $\Lambda(n, 4)$ não é hereditária por partes para $n \geq 11$;
- (d) $\Lambda(n, 5)$ não é hereditária por partes para $n \geq 11$;
- (e) $\Lambda(n, 6)$ não é hereditária por partes para $n \geq 12$.

Para a demonstração do lema acima, foi usada fortemente a seguinte proposição, disponível em [38]:

Proposição 3.15. Seja Λ uma \mathbb{k} -álgebra de dimensão finita, hereditária por partes do tipo feixes e não do tipo módulos e seja $M \in \text{mod } \Lambda$. Se a álgebra extensão por um ponto $\Lambda[M]$ for hereditária por partes, então ela é do tipo feixes.

Lema 3.16. As álgebras de incidência dos seguintes posets não são hereditárias por partes:

- | | | |
|-----------------|---|---|
| (a) $B(6, 0)$; | (e) $D_1(5)$; | (i) $S\left(C(4, 1), \vec{\mathbb{A}}_2, \vec{\mathbb{A}}_2\right)$; |
| (b) $C(5, 1)$; | (f) $S(3, 3)$; | (j) $S\left(C(5, 0), \vec{\mathbb{A}}_2, \vec{\mathbb{A}}_2\right)$; |
| (c) $C_1(5)$; | (g) $S\left(C(4, 2), \vec{\mathbb{A}}_2\right)$; | (k) $S\left(D(2, 0), \vec{\mathbb{A}}_2, \vec{\mathbb{A}}_2\right)$; |
| (d) $D(4, 1)$; | (h) $S\left(D(3, 1), \vec{\mathbb{A}}_2\right)$; | (l) $S\left(D_1(4), \vec{\mathbb{A}}_2, \vec{\mathbb{A}}_2\right)$. |

Demonstração. (a) e (b) Segue dos Lemas 3.10 e 3.8 que $B(6, 0) \sim C(5, 1) \sim \Lambda(12, 7)$, que não é hereditária por partes pelo Lema 3.14. O resultado segue.

(c) Segue do Lema 3.8 que $C_1(5) \sim \Lambda(12, 6)$, que não é hereditária por partes pelo Lema 3.14. O resultado segue.

(d) Seguiremos o raciocínio de Happel e Seidel usado para a demonstração do Lema 3.14. Segue do Lema 3.8 que $D(4, 1) \sim \Delta(11, 6)$, que é extensão por um ponto de $\Lambda(10, 6)$ Por outro lado, segue dos Lemas 3.8 e 3.19 que $\Lambda(10, 6) \sim C(4, 1) \sim \mathbb{X}_{2,3,6}$, que não é do tipo módulos. Calculando o polinômio de Coxeter de $D(4, 1)$ obtemos

$$\begin{aligned} & -\lambda^{11} - \lambda^{10} + \lambda^9 + 2\lambda^8 + \lambda^7 - 2\lambda^6 - 2\lambda^5 + \lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 \\ & = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^3(\lambda^2 + \lambda + 1)(\lambda^4 - \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1) \end{aligned}$$

que não coincide com os polinômios de Coxeter de nenhuma álgebra do tipo feixes.

(e) Note que $D_1(5)$ possui $C_1(5)$ como subcategoria plena e esta última não é hereditária por partes pelo item (c), logo $D_1(5)$ também não é hereditária por partes.

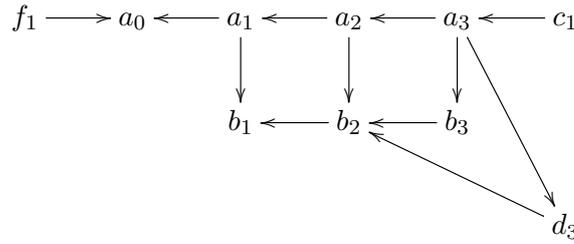
(f) Segue do Exemplo 3.5 em [45], que $S(3, 3)$ não é hereditária por partes.

(g) Seguiremos novamente o raciocínio de Happel e Seidel usado para a demonstração do Lema 3.14. Note que $C(4, 2)$ é subposet de $S(C(4, 2), \vec{\mathbb{A}}_2)$ e $C(4, 2) \sim \mathbb{X}_{2,3,7}$ pelo Lema 3.19. Como esta última é do tipo feixes e não é do tipo módulos, é suficiente mostrar que $S(C(4, 2), \vec{\mathbb{A}}_2)$ não é do tipo feixes. Para isso, calculamos seu polinômio de Coxeter e obtemos

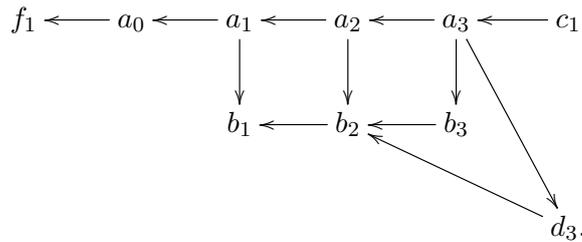
$$\lambda^{12} + \lambda^{11} - \lambda^9 - \lambda^8 + \lambda^6 - \lambda^4 - \lambda^3 + \lambda + 1$$

que é indecomponível. Portanto, temos que $S(C(4, 2), \vec{\mathbb{A}}_2)$ não é do tipo feixes e podemos concluir que não é hereditária por partes.

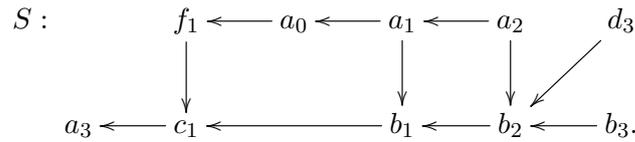
(h) Em $S(D(3, 1), \vec{\mathbb{A}}_2)$:



aplicamos a mutação $\mu_{f_1}^+$ e obtemos



Agora, considerando o conjunto fechado $Y = \{a_3, c_1\}$, temos que a álgebra $\mathcal{A}_Y \simeq \mathbb{k}S$, onde



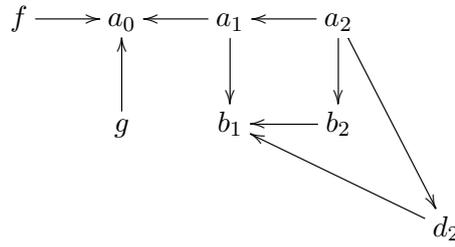
(i) Seguiremos novamente o raciocínio de Happel e Seidel usado para a demonstração do Lema 3.14. Note que $S\left(C(4, 1), \vec{\mathbb{A}}_2\right)$ é subcategoria plena de $S\left(C(4, 1), \vec{\mathbb{A}}_2, \vec{\mathbb{A}}_2\right)$ e que, pelo Lema 3.26, $S\left(C(4, 1), \vec{\mathbb{A}}_2\right) \sim \mathbb{X}_{2,3,7}$. Como esta última é do tipo feixes e não é do tipo módulos, é suficiente mostrar que $S\left(C(4, 1), \vec{\mathbb{A}}_2, \vec{\mathbb{A}}_2\right)$ não é do tipo feixes. Para isso, calculamos seu polinômio de Coxeter e obtemos

$$\begin{aligned} & \lambda^{12} + \lambda^{11} - \lambda^{10} - 2\lambda^9 - \lambda^8 + \lambda^7 + 2\lambda^6 + \lambda^5 - \lambda^4 - 2\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 \\ & = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2(\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)(\lambda^4 - \lambda^2 + 1) \end{aligned}$$

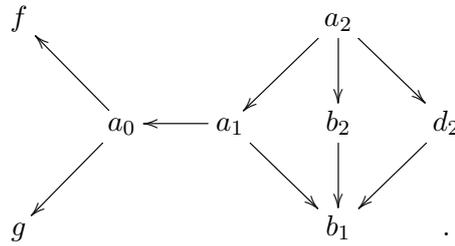
que não coincide com os polinômios de Coxeter de nenhuma álgebra do tipo feixes.

(j) Note que $S\left(C(4, 1), \vec{\mathbb{A}}_2, \vec{\mathbb{A}}_2\right)$ é subcategoria plena de $S\left(C(5, 0), \vec{\mathbb{A}}_2, \vec{\mathbb{A}}_2\right)$, portanto a afirmação segue do item anterior.

(k) Em $S\left(D(2, 0), \vec{\mathbb{A}}_2, \vec{\mathbb{A}}_2\right)$:

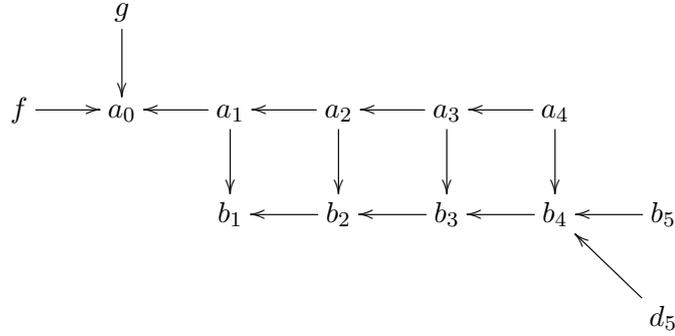


aplicamos as mutações μ_f^+ e μ_g^+ para obtermos $\tilde{S} =$

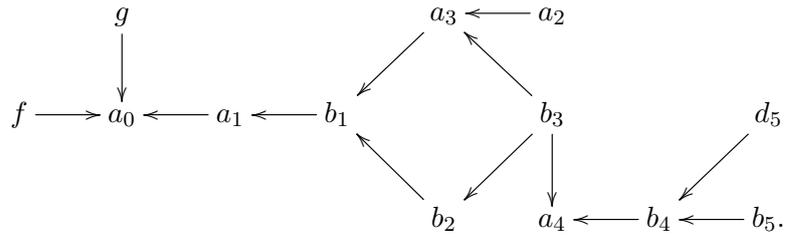


Como a subcategoria plena da álgebra $\mathbb{k}\tilde{S}$ com os vértices f, g, a_1, b_1, b_2, d_2 e a_2 é isomorfa à álgebra do Lema 3.13, o resultado segue.

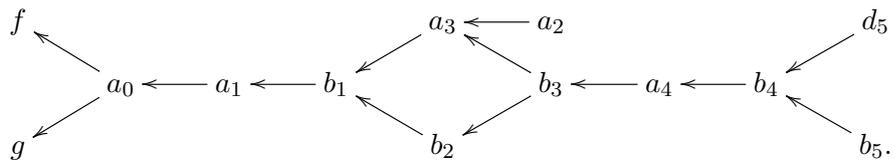
(1) Em $S(D_1(4), \vec{\mathbb{A}}_2, \vec{\mathbb{A}}_2)$:



aplicamos a sequência de mutações $\mu_{a_3}^+ \circ \mu_{b_3}^- \circ \mu_{b_2}^- \circ \mu_{a_4}^+ \circ \mu_{b_1}^-$ (Para detalhes, veja a demonstração do item (d) do Lema 3.23.) e obtemos



Em seguida, aplicamos a sequência de mutações $\mu_g^+ \circ \mu_f^+ \circ \mu_{d_5}^- \circ \mu_{b_5}^- \circ \mu_{b_4}^- \circ \mu_{a_4}^-$ e obtemos $\tilde{S} =$

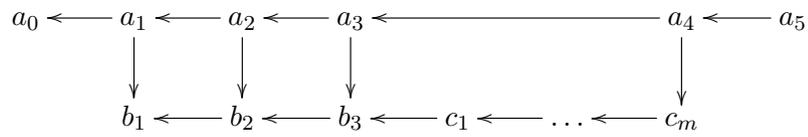


Como a subcategoria plena de $\mathbb{k}\tilde{S}$ cujos vértices são f, g, a_3, b_2, d_5 e b_5 é isomorfa à álgebra de incidência do poset $S(3, 3)$, o resultado segue do item (f) do Lema 3.16. \square

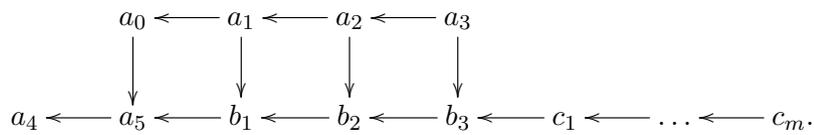
Os próximos lemas classificarão as álgebras de incidência de alguns dos posets definidos acima que são hereditárias por partes.

Lema 3.17. $L(4, m) \sim \mathbb{X}_{2,3,m+5}$ para $m \geq 1$.

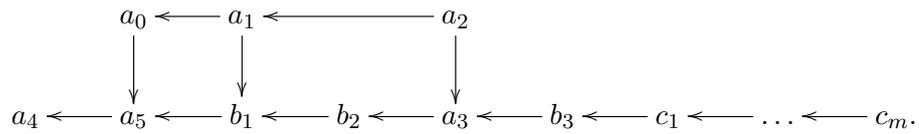
Demonstração. Em $L(4, m)$:



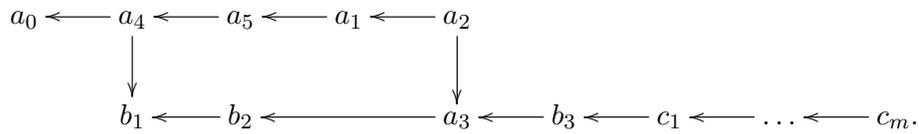
considere o subconjunto fechado $Y = \{a_4, a_5\}$, então \mathcal{A}_Y é isomorfa à álgebra de incidência do seguinte poset.



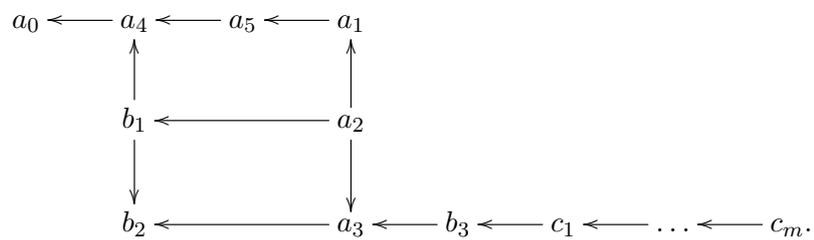
Aplicando $\mu_{a_3}^+$ obtemos



Aplicando $\mu_{\{a_4, a_5\}}^-$ obtemos



Aplicando $\mu_{b_1}^-$ obtemos



cujo grafo é isomorfo a $\mathbb{T}_{2,3,m+2}$. Logo, a afirmação segue do Teorema 1.49 e do Lema 3.2.

(c)

$$C(3, m) : \begin{array}{ccccccccccc} a_0 & \longleftarrow & a_1 & \longleftarrow & a_2 & \longleftarrow & a_3 & \longleftarrow & c_1 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & c_m \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & \\ & & b_1 & \longleftarrow & b_2 & \longleftarrow & b_3 & & & & & & \end{array} .$$

Aplicando $\mu_{b_1}^-$ obtemos o poset

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_0 & \longleftarrow & a_1 & \longleftarrow & b_1 & \longleftarrow & a_2 & \longleftarrow & a_3 & \longleftarrow & c_1 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & c_m \\ & & & & \downarrow & & & & \downarrow & & & & & & \\ & & & & b_2 & \longleftarrow & & & b_3 & & & & & & \end{array} .$$

Aplicando $\mu_{b_2}^-$ obtemos o poset

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & a_2 & \longleftarrow & a_3 & \longleftarrow & c_1 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & c_m \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & \\ a_0 & \longleftarrow & a_1 & \longleftarrow & b_1 & \longleftarrow & b_2 & & & & & & \\ & & & & & & \downarrow & & & & & & \\ & & & & & & b_3 & & & & & & \end{array} .$$

Aplicando $\mu_{\{a_3, c_1, \dots, c_m\}}^+$ obtemos o poset

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_0 & \longleftarrow & a_1 & \longleftarrow & b_1 & \longleftarrow & a_3 & \longleftarrow & c_1 & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & c_m & \longleftarrow & a_2 \\ & & & & & & & & & & & & & \swarrow & \\ & & & & & & & & & & & & & b_3 & \longleftarrow & b_2 \end{array}$$

cujo grafo é isomorfo a $\mathbb{T}_{2,3,m+4}$. Logo, a afirmação segue do Teorema 1.49 e do Lema 3.2.

(d) A afirmação segue do item (c) e do Lema 3.11.

(e) Segue do Lema 3.10 que $C(4, m) \sim L(4, m)$ para $m > 0$. Segue do Lema 3.17 que $L(4, m) \sim \mathbb{X}_{2,3,m+5}$. Portanto, $C(4, m) \sim \mathbb{X}_{2,3,m+5}$ para $m > 0$.

(f) A afirmação segue do item (e) e do Lema 3.11.

(g) Segue do Lema 3.11 que $C(6, 0) \sim C(5, 2)$. Portanto, como $\mathbb{k}C(n, m)$ é uma subcategoria plena de $\mathbb{k}C(n, m + 1)$ e de $\mathbb{k}C(n + 1, m)$, basta mostrar que a álgebra de incidência do poset $C(5, 1)$ não é hereditária por partes. Então, a afirmação segue pelo Lema 3.16.

□

Teorema 3.20. Sejam $n, m \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$ e $m \geq 0$. Então:

(1) $B(n, m)$ é hereditária por partes se, e somente se, $n \leq 5$.

(2) (a) $B(2, m) \sim \mathbb{T}_{2,2,m+2}$;

(b) $B(3, m) \sim \mathbb{T}_{2,3,m+3}$;

(c) $B(4, m) \sim \mathbb{T}_{2,3,m+5}$;

(d) $B(5, m) \sim \mathbb{X}_{2,3,m+6}$.

(3) $B(n, m)$ é hereditária por partes do tipo módulos se, e somente se, $n \leq 4$.

Demonstração. Note, primeiramente que o item (2) segue diretamente dos Lemas 3.10 e 3.19.

O item (3) segue imediatamente do item (2).

Falta mostrarmos que $B(n, m)$ não é hereditária por partes se $n \geq 6$, mas isso também segue dos Lemas 3.10 e 3.19. □

Lema 3.21. Valem as seguintes equivalências:

(a) $C_1(1) \sim \mathbb{A}_4$;

(b) $C_1(2) \sim \mathbb{T}_{2,3,3} = \mathbb{E}_6$;

(c) $C_1(3) \sim \mathbb{T}_{2,4,4} = \tilde{\mathbb{E}}_7$;

(d) $C_1(4) \sim \mathbb{T}_{2,3,7}$;

(e) A álgebra de incidência de $C_1(n)$ não é hereditária por partes se $n > 4$.

Demonstração. (a) Como grafo do poset $C_1(1)$ é isomorfo a \mathbb{A}_4 , a afirmação segue do Lema 3.2.

(b) De maneira análoga ao item (b) do Lema 3.19, ao aplicarmos $\mu_{b_1}^-$ no poset

$$C_1(2) : \begin{array}{ccccc} a_0 & \longleftarrow & a_1 & \longleftarrow & a_2 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & b_1 & \longleftarrow & b_2 & \longleftarrow & b_3 \end{array}$$

obtemos o poset

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 & \longleftarrow & a_1 & \longleftarrow & b_1 & \longleftarrow & a_2 \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & b_2 & \longleftarrow & b_3 \end{array}$$

cujo grafo é isomorfo a $\mathbb{T}_{2,3,3} = \mathbb{E}_6$. Logo, a afirmação segue do Teorema 1.49 e do Lema 3.2.

(c) De maneira análoga ao item (c) do Lema 3.19, ao aplicarmos as mutações $\mu_{a_3}^+, \mu_{b_2}^-, \mu_{b_1}^-$ no poset

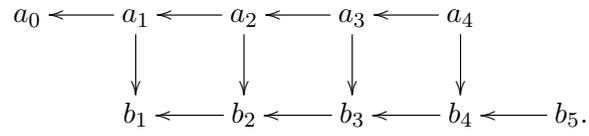
$$C_1(3) : \begin{array}{ccccccc} a_0 & \longleftarrow & a_1 & \longleftarrow & a_2 & \longleftarrow & a_3 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & b_1 & \longleftarrow & b_2 & \longleftarrow & b_3 & \longleftarrow & b_4 \end{array}$$

obtemos o poset

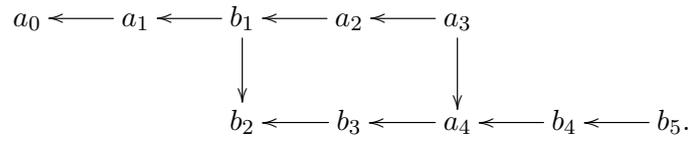
$$\begin{array}{ccccccc} & & & & a_2 & & \\ & & & & \downarrow & & \\ a_0 & \longleftarrow & a_1 & \longleftarrow & b_1 & \longleftarrow & a_3 & \longleftarrow & b_2 \\ & & & & & & \downarrow & & \\ & & & & & & b_3 & \longleftarrow & b_4 \end{array}$$

cujo grafo é isomorfo a $\mathbb{T}_{2,4,4} = \tilde{\mathbb{E}}_7$. Logo, a afirmação segue do Teorema 1.49 e do Lema 3.2.

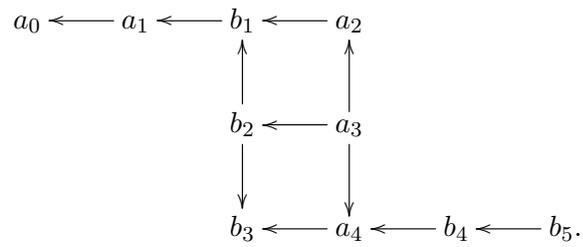
(d) $C_1(4) =$



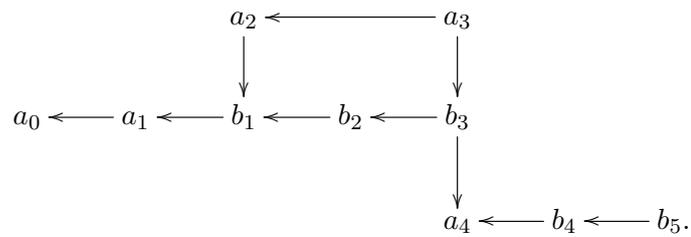
Ao aplicarmos as mutações $\mu_{a_4}^+$ $\mu_{b_1}^-$ obtemos o poset



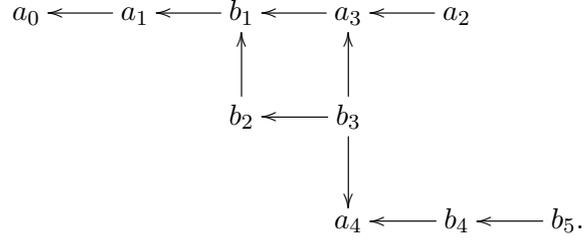
Aplicando $\mu_{b_2}^-$ obtemos o poset



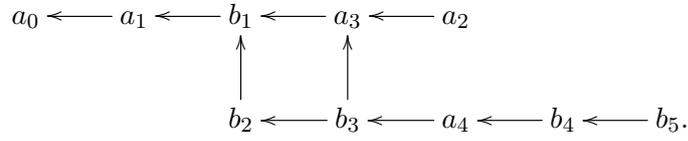
Aplicando $\mu_{b_3}^-$ obtemos o poset



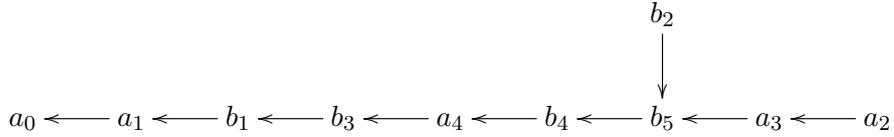
Aplicando $\mu_{a_3}^+$ obtemos o poset



Aplicando $\mu_{a_4}^-$, em seguida $\mu_{b_4}^-$ e, por fim, $\mu_{b_5}^-$ obtemos o poset



Por fim, aplicando $\mu_{\{b_3, a_4, b_4, b_5\}}^+$ obtemos o poset



cujos grafos são isomorfos a $\mathbb{T}_{2,3,7}$. Logo, a afirmação segue do Teorema 1.49 e do Lema 3.2.

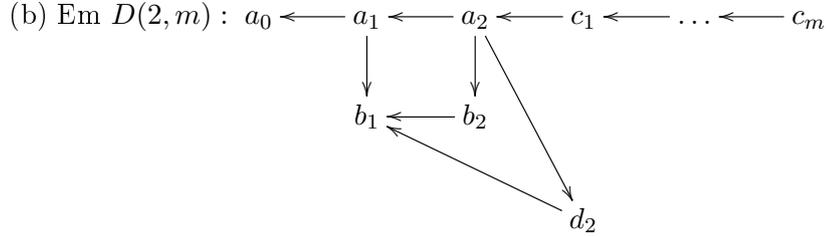
(e) Como $\mathbb{k}C_1(5)$ é uma subcategoria plena de $\mathbb{k}C_1(n)$ para $n > 5$, basta mostrar que a álgebra de incidência de $C_1(5)$ não é hereditária por partes. A afirmação segue do Lema 3.16. \square

Lema 3.22. Valem as seguintes equivalências:

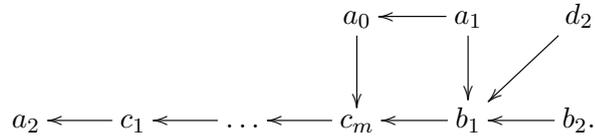
- (a) $D(1, m) \sim \mathbb{T}_{2,2,2,m+1}$;
- (b) $D(2, m) \sim [\mathbb{D}_4, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_{m+2}]$;
- (c) $D(3, m) \sim [\mathbb{D}_{m+5}, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$;
- (d) $D(4, 0) \sim [\mathbb{D}_7, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$;
- (e) A álgebra de incidência de $D(n, m)$ não é hereditária por partes se $n \geq 4$ e $n+m > 4$.

Demonstração. (a) Como o grafo de $D(1, m)$ é isomorfo a $\mathbb{T}_{2,2,2,m+1}$, a afirmação segue

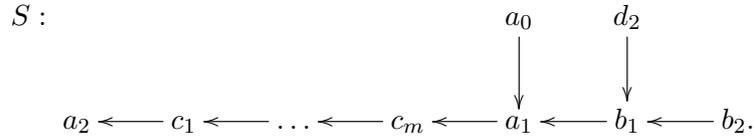
do Lema 3.2.



considere o subconjunto fechado $Y = \{a_2, c_1, \dots, c_m\}$, então \mathcal{A}_Y é a álgebra de incidência do seguinte poset:

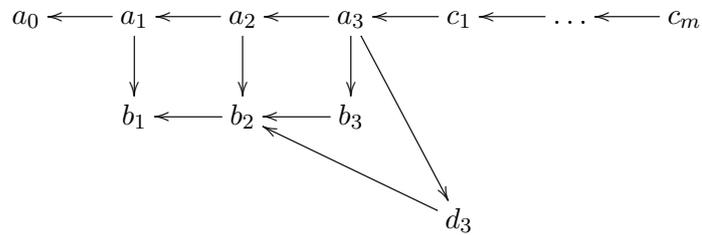


De maneira dual à demonstração do item (b) do Lema 3.19, aplicando $\mu_{a_1}^+$, obtemos o poset



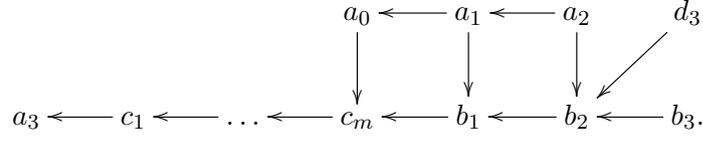
Como o grafo de S é isomorfo a $[\mathbb{D}_4, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_{m+2}]$, a afirmação segue dos Teoremas 1.49 e 1.21 e do Lema 3.2.

(c) Em $D(3, m)$:

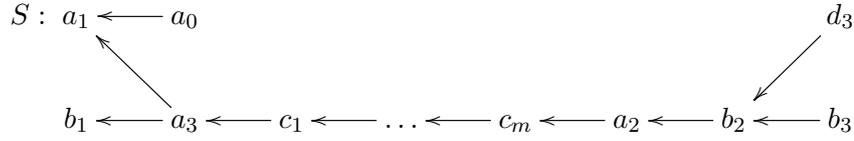


considere o subconjunto fechado $Y = \{a_3, c_1, \dots, c_m\}$, então \mathcal{A}_Y é a álgebra de incidência

cia do poset

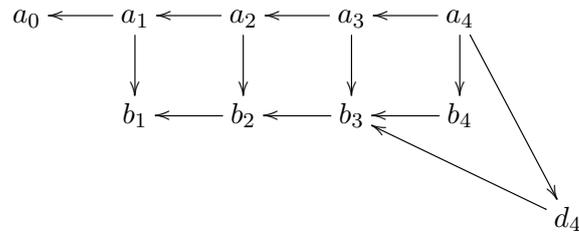


De maneira dual à demonstração do item (c) do Lema 3.19, aplicando as mutações $\mu_{\{a_3, c_1, \dots, c_m\}}^- \mu_{a_1}^+ \mu_{a_2}^+$ obtemos o poset

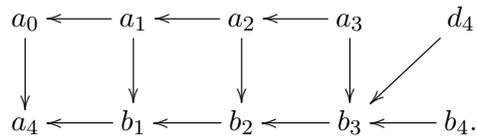


Como o grafo de S é isomorfo a $[\mathbb{D}_{m+5}, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$, a afirmação segue dos Teoremas 1.49 e 1.21 e do Lema 3.2.

(d) Em $D(4, 0)$:

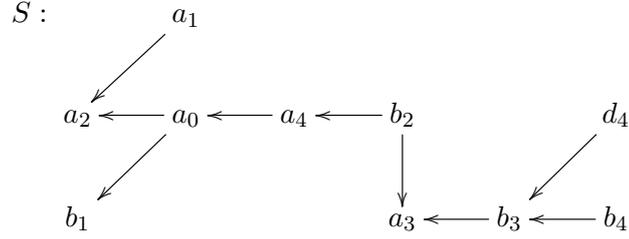


considere o subconjunto fechado $Y = \{a_4\}$, então \mathcal{A}_Y é a álgebra de incidência do poset



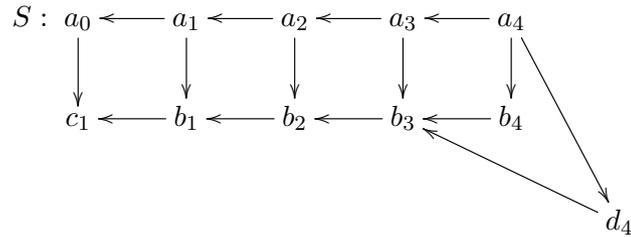
De maneira análoga à demonstração do item (d) do Lema 3.21, aplicando as mutações

$\mu_{\{a_0, a_4\}}^- \mu_{a_2}^+ \mu_{b_2}^- \mu_{b_1}^- \mu_{a_3}^+ \mu_{a_4}^-$ obtemos o poset



Como o grafo de S é isomorfo a $[\mathbb{D}_7, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$, a afirmação segue dos Teoremas 1.49 e 1.21 e do Lema 3.2.

(e) Como $\mathbb{k}D(n, m)$ é uma subcategoria plena de $\mathbb{k}D(n, m + 1)$ e de $\mathbb{k}D(n + 1, m)$, basta mostrar que $D(4, 1)$ e $D(5, 0)$ não são hereditárias por partes. Segue do Lema 3.16, $D(4, 1)$ não é hereditária por partes. Em $D(4, 1)$, se considerarmos o subconjunto fechado $\{c_1\}$, então a álgebra \mathcal{A}_Y é a álgebra de incidência do seguinte poset



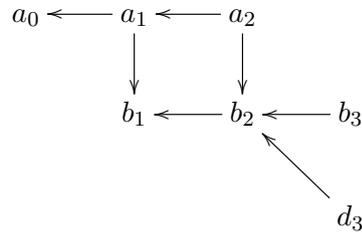
e $\mathbb{k}S$ é subcategoria plena de $\mathbb{k}D(5, 0)$. Portanto, segue do Lema 1.45 que $\mathbb{k}D(5, 0)$ não é hereditária por partes. \square

Lema 3.23. Valem as seguintes equivalências:

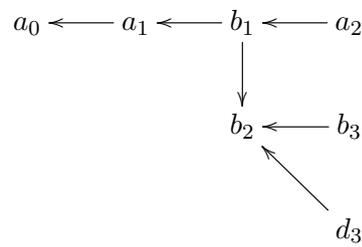
- (a) $D_1(1) \sim \mathbb{D}_5$;
- (b) $D_1(2) \sim [\mathbb{D}_4, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$;
- (c) $D_1(3) \sim [\mathbb{D}_5, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_4]$;
- (d) $D_1(4) \sim [\mathbb{D}_8, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$;
- (e) $D_1(n)$ não é hereditária por partes se $n > 4$.

Demonstração. (a) Como o grafo de $D_1(1)$ é isomorfo a \mathbb{D}_5 , a afirmação segue do Lema 3.2.

(b) Em $D_1(2)$:

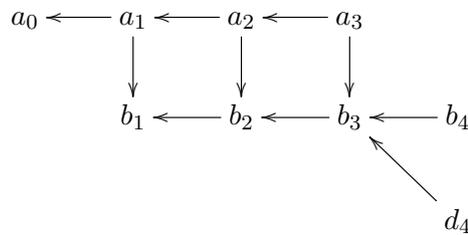


de maneira análoga à demonstração do item (b) do Lema 3.19, aplicando $\mu_{b_1}^-$ obtemos o poset

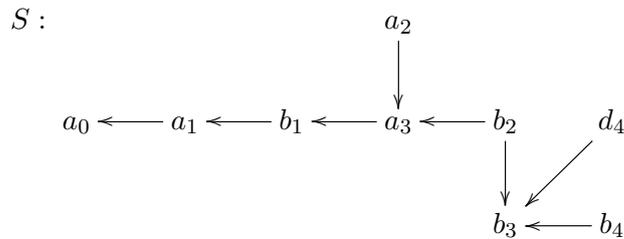


cujo grafo é isomorfo a $[\mathbb{D}_4, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$. Logo, a afirmação segue do Teorema 1.49 e do Lema 3.2.

(c) Em $D_1(3)$:

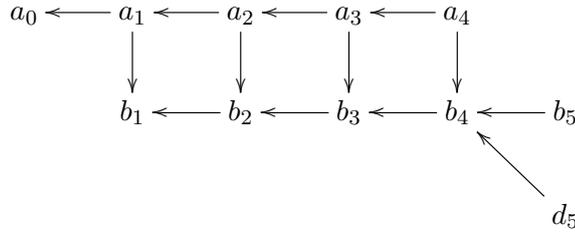


de maneira análoga à demonstração do item (c) do Lema 3.19, aplicando as mutações $\mu_{a_3}^+$, $\mu_{b_2}^-$, $\mu_{b_1}^-$ obtemos o poset

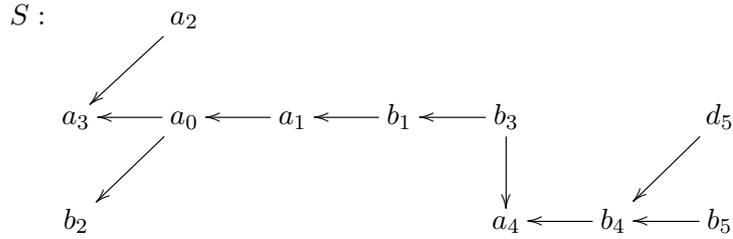


cujos grafos são isomorfos a $[\mathbb{D}_5, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_4]$. Logo, a afirmação segue do Teorema 1.49 e do Lema 3.2.

(d) Em $D_1(4)$:



de maneira análoga à demonstração do item (d) do Lema 3.21, aplicando as mutações $\mu_{\{a_0, a_1, b_1\}}^-, \mu_{a_3}^+, \mu_{b_3}^-, \mu_{b_2}^-, \mu_{a_4}^+, \mu_{b_1}^-$ obtemos o poset



cujos grafos são isomorfos a $[\mathbb{D}_8, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$. Logo, a afirmação segue do Teorema 1.49 e do Lema 3.2.

(e) Como $\mathbb{k}D_1(5)$ é uma subcategoria plena de $\mathbb{k}D_1(n)$ para $n > 5$, basta mostrar que $\mathbb{k}D_1(5)$ não é hereditária por partes. Como $\mathbb{k}C_1(5)$ é uma subcategoria plena de $\mathbb{k}D_1(5)$, a afirmação segue do item (e) do Lema 3.21 e do Lema 1.45. \square

Notação 3.24. Dados $l, m, n \in \mathbb{Z}$, \mathbb{S} denotará o conjunto:

$$\mathbb{S} = \{C(n, m), C(4, 0), C_1(l), D(1, m), D_1(n) \mid 1 \leq n \leq 3, m \geq 0, 1 \leq l \leq 4\} \\ \cup \{S \mid S \text{ é poset tal que seu grafo é uma árvore}\}.$$

Definiremos agora, na Tabela 3.1 uma aplicação τ que leva determinados posets de \mathbb{S} em posets cujos grafos são árvores e tais que $\tau(S) \sim S$. Estas equivalências derivadas

foram demonstradas nos Lemas 3.19, 3.21, 3.22 e 3.23.

Tabela 3.1: Imagens de posets de \mathbb{S} via τ

poset S	poset $\tau(S)$
$C(1, m), m \geq 0$	$C(1, m)$
$C(2, m), m \geq 0$	$a_0 \leftarrow a_1 \leftarrow b_1 \leftarrow a_2 \leftarrow c_1 \leftarrow \dots \leftarrow c_m$ \downarrow b_2
$C(3, m), m \geq 0$	$a_0 \leftarrow a_1 \leftarrow b_1 \leftarrow a_3 \leftarrow c_1 \leftarrow \dots \leftarrow c_m \leftarrow b_1 \rightarrow b_3$ \uparrow a_2
$C(4, 0)$	$a_0 \leftarrow a_1 \leftarrow b_1 \leftarrow b_3 \leftarrow a_4 \leftarrow b_4 \leftarrow a_3 \leftarrow a_2$ \uparrow b_2
$C_1(1)$	$C_1(1)$
$C_1(2)$	$a_0 \leftarrow a_1 \leftarrow b_1 \rightarrow b_2 \leftarrow b_3$ \uparrow a_2
$C_1(3)$	$a_0 \leftarrow a_1 \leftarrow b_1 \leftarrow a_3 \leftarrow b_2 \rightarrow b_3 \leftarrow b_4$ \uparrow a_2
$D(1, m), m \geq 0$	$D(1, m)$
$D_1(1)$	$D_1(1)$
$D_1(2)$	$a_0 \leftarrow a_1 \leftarrow b_1 \rightarrow b_2 \leftarrow b_3$ $\uparrow \quad \swarrow$ $a_2 \quad d_3$
$D_1(3)$	$a_0 \leftarrow a_1 \leftarrow b_1 \leftarrow a_3 \leftarrow b_2 \rightarrow b_3 \leftarrow b_4$ $\uparrow \quad \swarrow$ $a_2 \quad d_4$

Se S é um poset tal que seu grafo é uma árvore então vamos definir que $\tau(S) = S$.

Lema 3.25. Sejam S_1, S_2, \dots, S_t posets com elementos maximais fixos e $S_1 \in \mathbb{S}$. Então $S(S_1, S_2, \dots, S_t) \sim S(\tau(S_1), S_2, \dots, S_t)$.

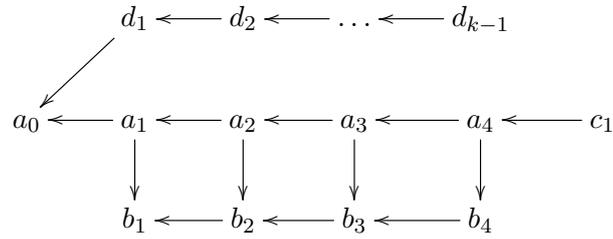
Demonstração. Sabemos, das demonstrações dos Lemas 3.19, 3.21, 3.22 e 3.23, que o poset $\tau(S_1)$ pode ser obtido do poset S_1 aplicando reflexões μ^\pm em elementos diferentes do elemento especial a_0 . Portanto, a afirmação segue do Teorema 1.49. \square

Lema 3.26. Seja $k > 1$, então:

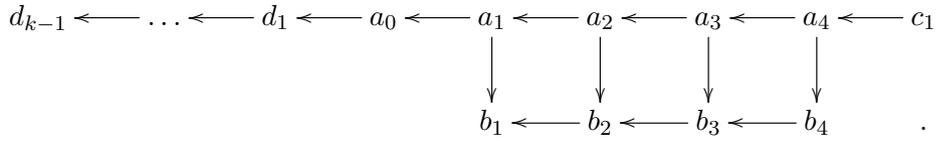
(a) $S\left(C(4, 1), \vec{\mathbb{A}}_k\right) \sim \mathbb{X}_{2,3,k+5}$;

- (b) $S\left(C(4, m), \vec{\mathbb{A}}_k\right)$ não é hereditária por partes se $m > 1$;
(c) $S\left(C(5, 0), \vec{\mathbb{A}}_k\right) \sim \mathbb{X}_{2,3,k+6}$;
(d) $S\left(C(n, m), \vec{\mathbb{A}}_k\right)$ não é hereditária por partes se $n \geq 5$ e $n + m > 5$.

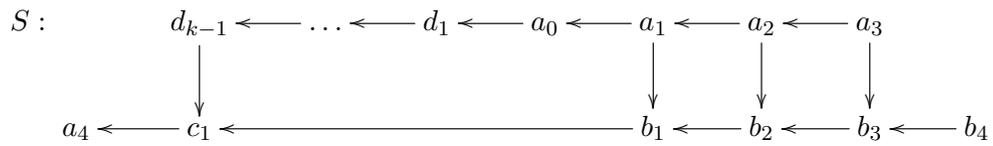
Demonstração. (a) $S\left(C(4, 1), \vec{\mathbb{A}}_k\right) =$



Aplicando as mutações $(\mu_{d_{k-1}}^+)(\mu_{d_{k-2}}^+ \mu_{d_{k-1}}^+) \dots (\mu_{d_1}^+ \mu_{d_2}^+ \dots \mu_{d_{k-1}}^+)$ obtemos o poset



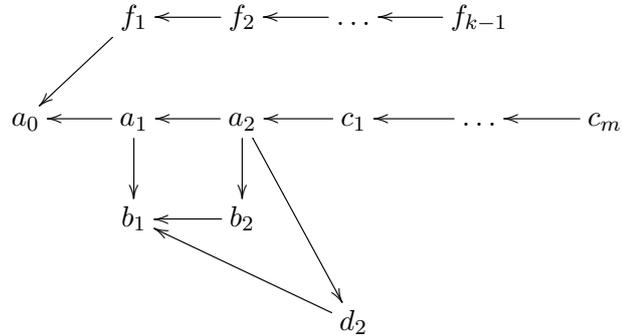
Agora, considerando o subconjunto fechado $Y = \{a_4, c_1\}$, temos que \mathcal{A}_Y é a álgebra de incidência do poset



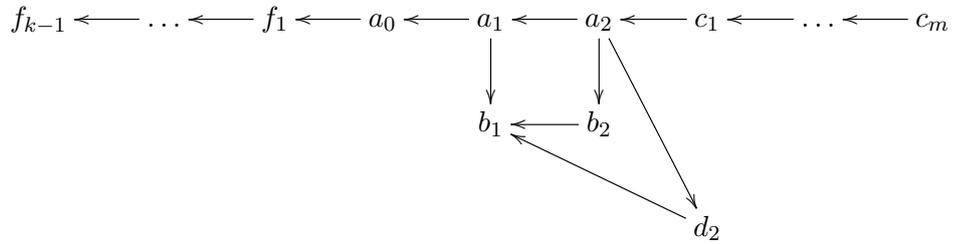
Como S^{op} é isomorfo ao poset $L(4, k)$, a afirmação segue dos Lemas 3.17 e 3.1 e dos Teoremas 1.49 e 1.21.

(b) Como $\mathbb{k}S\left(C(4, m), \vec{\mathbb{A}}_k\right)$ é uma subcategoria plena das categorias $\mathbb{k}S\left(C(4, m+1), \vec{\mathbb{A}}_k\right)$ e $\mathbb{k}S\left(C(4, m), \vec{\mathbb{A}}_{k+1}\right)$, basta mostrar que $\mathbb{k}S\left(C(4, 2), \vec{\mathbb{A}}_2\right)$ não é hereditária por partes. Então a afirmação segue dos Lemas 3.16 e 1.45.

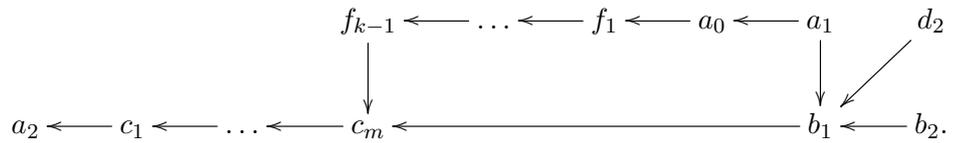
Demonstração. (a) $S(D(2, m), \vec{\mathbb{A}}_k) =$



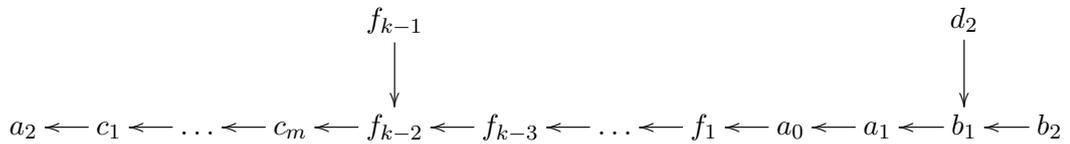
Aplicando os funtores $(\mu_{f_{k-1}}^+), (\mu_{f_{k-2}}^+ \mu_{f_{k-1}}^+) \dots (\mu_{f_1}^+ \mu_{f_2}^+ \dots \mu_{f_{k-1}}^+)$ obtemos



Agora, considerando o subconjunto fechado $Y = \{a_2, c_1, \dots, c_m\}$, temos \mathcal{A}_Y que é a álgebra de incidência do poset

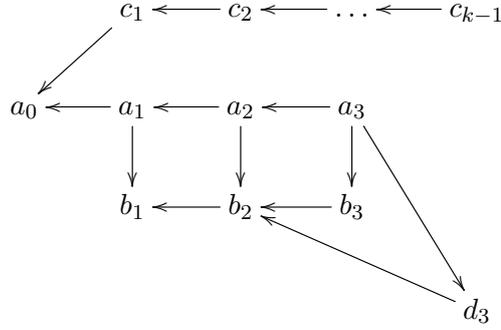


Aplicando os funtores $\mu_{f_{k-1}}^+ \dots \mu_{f_1}^+ \mu_{a_0}^+ \mu_{a_1}^+$ obtemos o seguinte poset

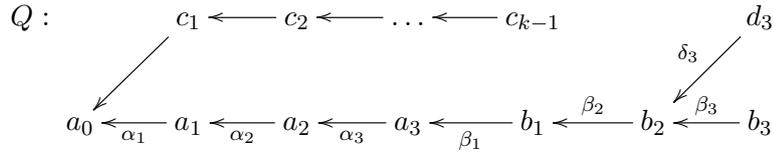


cujos grafo é isomorfo ao grafo $[\mathbb{D}_{k+3}, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_{m+2}]$, a afirmação segue dos Teoremas 1.49 , 1.21 e do Lema 3.2.

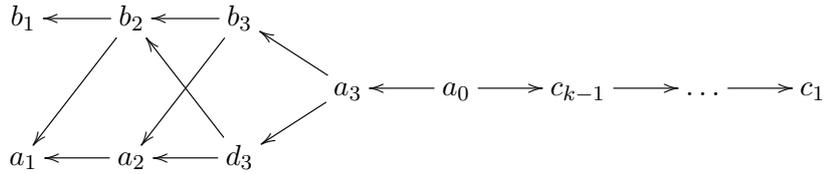
(b) $S(D(3,0), \vec{\mathbb{A}}_k) =$



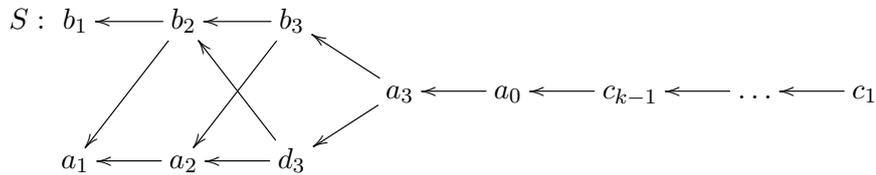
Considerando o subconjunto fechado $Y = \{c_{k-1}, \dots, c_1, a_0, a_1, a_2, a_3\}$, temos que $\mathcal{A}_Y = \frac{\mathbb{k}Q}{I}$, onde



e $I = \langle \beta_1 \alpha_3 \alpha_2 \alpha_1, \beta_2 \beta_1 \alpha_3 \alpha_2, \beta_2 \beta_1 \alpha_3 \alpha_2, \beta_3 \beta_2 \beta_1 \alpha_3, \delta_3 \beta_2 \beta_1 \alpha_3 \rangle$. Temos então $S_{\mathcal{A}_Y}^{op} =$

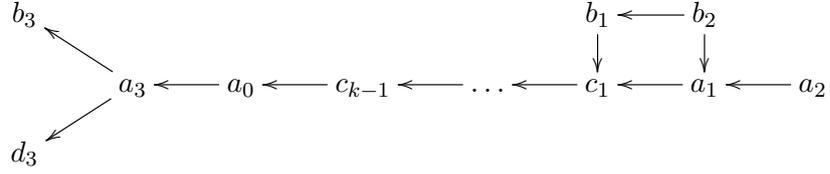


Aplicando os funtores $(\mu_{c_1}^-) \cdot (\mu_{c_2}^- \mu_{c_1}^-) \dots (\mu_{c_{k-1}}^- \mu_{c_{k-2}}^- \dots \mu_{c_1}^-)$ obtemos o poset

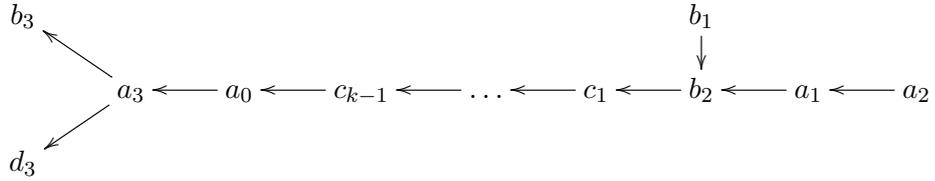


Considerando o subconjunto fechado $Z = \{b_3, d_3, a_3, a_0, c_{k-1}, \dots, c_1\}$ de S , temos que

\mathcal{A}_Z é a álgebra de incidência do poset



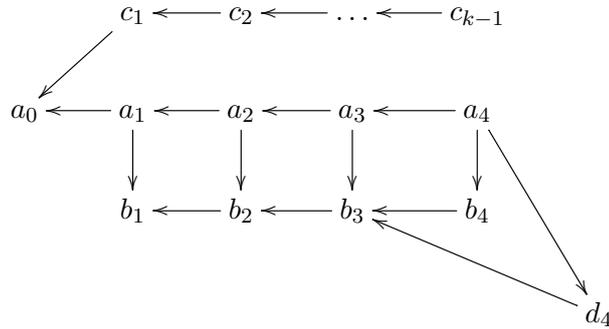
Aplicando $\mu_{b_2}^+$ obtemos o poset



cujo grafo é isomorfo ao grafo $[\mathbb{D}_{k+4}, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_{m+2}]$. Logo, a afirmação segue dos Teoremas 1.49 , 1.21 e 2.21 e do Lema 3.2.

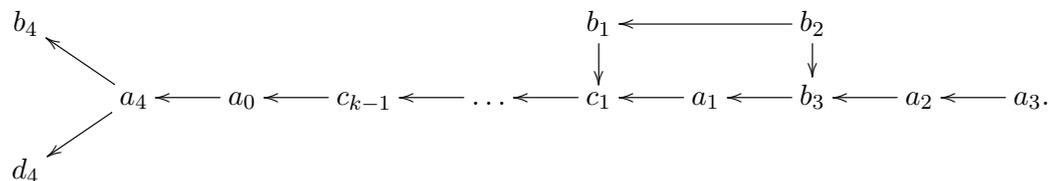
(c) Como $\mathbb{k}S(D(3, 1), \vec{\mathbb{A}}_k)$ é uma subcategoria plena de $\mathbb{k}S(D(3, 1), \vec{\mathbb{A}}_{k+1})$, basta mostrar que $\mathbb{k}S(D(3, 1), \vec{\mathbb{A}}_2)$ não é hereditária por partes. Então a afirmação segue do Lema 3.16.

(d) $S(D(4, 0), \vec{\mathbb{A}}_k) =$

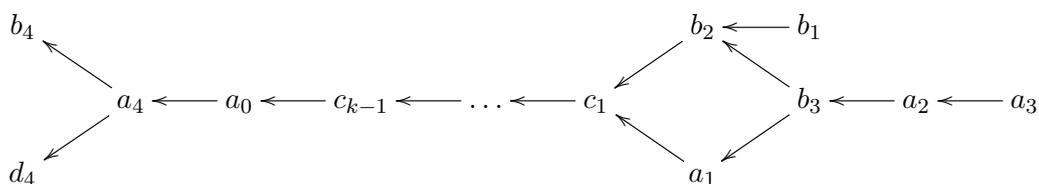


Considerando o subconjunto fechado $Y = \{c_{k-1}, \dots, c_1, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4\}$, temos $\mathcal{A}_Y =$

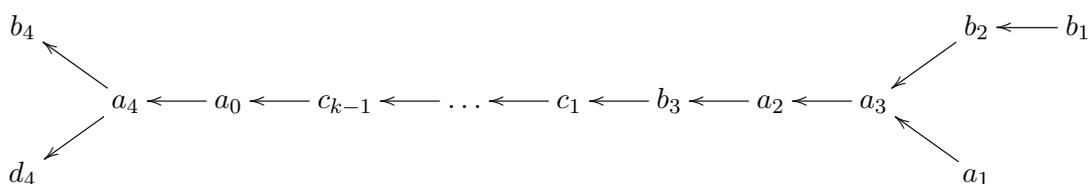
Aplicando $\mu_{b_3}^+$ obtemos o poset



Aplicando $\mu_{b_2}^+$ obtemos o poset

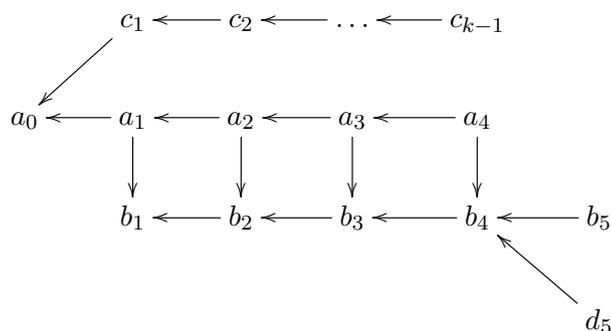


Aplicando $\mu_{\{b_3, a_2, a_3\}}^+$ obtemos o poset



cujo grafo é isomorfo ao grafo $[\mathbb{D}_{k+6}, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$. Logo, a afirmação segue dos Teoremas 1.49 , 1.21 e 2.21 e do Lema 3.2.

$$(e) S(D_1(4), \vec{\mathbb{A}}_k) =$$



Considerando o subconjunto fechado $Y = \{c_{k-1}, \dots, c_1, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4\}$, temos $\mathcal{A}_Y =$

$$\begin{aligned}
S\left(D(2, m), \vec{\mathbb{A}}_k\right) &\sim [\mathbb{D}_{k+3}, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_{m+2}]; \\
S\left(D(3, 0), \vec{\mathbb{A}}_k\right) &\sim [\mathbb{D}_{k+4}, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]; \\
S\left(D(4, 0), \vec{\mathbb{A}}_k\right) &\sim [\mathbb{D}_{k+6}, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]; \\
S\left(D_1(4), \vec{\mathbb{A}}_k\right) &\sim [\mathbb{D}_{k+7}, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3].
\end{aligned}$$

Demonstração. (a) Segue do Lema 3.25 e da observação 3.6.

(b) Segue dos Lemas 3.19, 3.22 e 3.23.

(c) Segue dos Lemas 3.26 e 3.27. □

Teorema 3.29. Sejam S_i , para $1 \leq i \leq t$, posets tais que seu grafo é uma árvore com um vértice especial fixado ou $S_i \in \{C(n_i, m_i), C_1(n_i), D(n_i, m_i), D_1(n_i)\}$ para alguns n_i, m_i . A álgebra de incidência de poset $\mathbb{k}S = \mathbb{k}S(S_1, \dots, S_t)$ é hereditária por partes se, e somente se, uma das seguintes condições é satisfeita:

(a) $S_i \in \mathbb{S}$ para todo i .

(b) $t = 1$ e $S \in \{C(4, m), C(5, 0), D(2, t), D(3, t), D(4, 0), D_1(4) \mid m > 0, t \geq 0\}$.

(c) $t = 2$ e $S \in \left\{ S\left(C(4, 1), \vec{\mathbb{A}}_k\right), S\left(C(5, 0), \vec{\mathbb{A}}_k\right), S\left(D(2, m), \vec{\mathbb{A}}_k\right), S\left(D(3, 0), \vec{\mathbb{A}}_k\right), S\left(D(4, 0), \vec{\mathbb{A}}_k\right), S\left(D_1(4), \vec{\mathbb{A}}_k\right) \mid k \geq 2, m \geq 0 \right\}$.

Demonstração. O fato de que as condições dos itens (a), (b) e (c) são suficientes para que $\mathbb{k}S = \mathbb{k}S(S_1, \dots, S_t)$ seja hereditária por partes segue do Teorema 3.28. Agora mostraremos que pelo menos uma dessas condições é necessária.

Segue do Lema 3.16 que $S\left(C(4, 1), \vec{\mathbb{A}}_2, \vec{\mathbb{A}}_2\right)$ não é hereditária por partes, portanto o poset $C(4, 1)$ só pode ser colado com mais um poset para que sua colagem seja hereditária por partes, ou seja $t = 2$. Além disso, para qualquer poset $T \neq \vec{\mathbb{A}}_k$ temos que $S(C(4, 1), T)$ possui $S\left(C(4, 1), \vec{\mathbb{A}}_2, \vec{\mathbb{A}}_2\right)$ como subposet e, portanto $\mathbb{k}S(C(4, 1), T)$ não é hereditária por partes.

De maneira análoga, verificamos que $C(5, 0)$, $D(2, 0)$ e $D_1(4)$ só podem ser colados com mais um poset para que sua colagem seja hereditária por partes, ou seja $t = 2$, e que esse poset a ser colado só pode ser $\vec{\mathbb{A}}_k$ para algum $k \geq 0$. Para os casos $D(2, m)$

em que $m > 0$, $D(3,0)$ e $D(4,0)$ basta observarmos que $D(2,0)$ é um subposet e o resultado segue analogamente.

Segue também do Lema 3.16 que $S\left(C(4,2), \vec{\mathbb{A}}_2\right)$ não é hereditária por partes, portanto nenhuma colagem de $C(4,2)$ é hereditária por partes. O mesmo vale para $D(3,1)$. Além disso, como $C(4,m)$ para $m > 2$ (respectivamente $D(3,t)$ para $t > 1$) possui $C(4,2)$ (respectivamente $D(3,1)$) como subposet o resultado segue. \square

Capítulo 4

Álgebras seriais hereditárias por partes

4.1 Álgebras de Nakayama hereditárias por partes

Nesta seção apresentaremos uma demonstração (diferente da apresentada em [36]) de quais álgebras de Nakayama truncadas são hereditárias por partes, indicando um representante da classe de equivalência nos casos em que elas forem hereditárias por partes.

Reorganizamos a tabela 1.1 de forma a representar as suas diagonais como colunas na tabela a seguir.

Tabela 4.1: Os possíveis tipos de $\Lambda(n, r)$

$r \backslash n-r$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	...
3	D_4	D_5	E_6	E_7	E_8	\tilde{E}_8	X_{236}	X_{237}	-	...
4	D_5	E_6	E_7	\tilde{E}_7	X_{244}	X_{245}	-	-	-	...
5	D_6	E_7	E_8	\tilde{E}_8	T_{237}	-	-	-	-	...
6	D_7	E_8	\tilde{E}_8	X_{236}	X_{237}	-	-	-	-	...
7	D_8	\tilde{E}_8	T_{237}	X_{237}	-	-	-	-	-	...
8	D_9	T_{237}	T_{238}	X_{238}	-	-	-	-	-	...
...

O item (2) do seguinte teorema classifica as quatro primeiras diagonais da tabela 1.1 a partir de um determinado valor de n .

Teorema 4.1. Sejam $k = n - r + 1$, $s = 2r - n - 2$. Para os valores de n e r tais que $k \geq 2$ e $s \geq 0$ temos que:

- (1) $\Lambda(n, r)$ é hereditária por partes se, e somente se, $k \leq 5$.
- (2) Valem as seguintes implicações:
 - (a) Se $k = 2$ então $\Lambda(n, r) \sim \mathbb{T}_{2,2,s+2}$;
 - (b) Se $k = 3$ então $\Lambda(n, r) \sim \mathbb{T}_{2,3,s+3}$;
 - (c) Se $k = 4$ então $\Lambda(n, r) \sim \mathbb{T}_{2,3,s+5}$;
 - (d) Se $k = 5$ então $\Lambda(n, r) \sim \mathbb{X}_{2,3,s+6}$.
- (3) $\Lambda(n, r)$ é hereditária por partes do tipo módulos se, e somente se, ocorre um dos casos abaixo:
 - (a) $k \leq 4$;
 - (b) $k = 5$ e $s = 0$.

Demonstração. Segue do Lema 3.8 que $\Lambda(n, r) \sim C(n - r, 2r - n - 1)$ e do Lema 3.10 que $C(n - r, 2r - n - 1) \sim B(n - r + 1, 2r - n - 2) = B(k, s)$. Logo, o resultado segue diretamente do Teorema 3.20. \square

Segue da classificação de álgebras de radical quadrado zero (veja [14]) que $\Lambda(n, 2) \sim \mathbb{A}_2$ para todo $n \geq 3$.

O lema a seguir trata dos casos em que $\Lambda(n, r)$ é hereditária por partes e usa equivalências já apresentadas no capítulo anterior.

Lema 4.2. Valem as seguintes equivalências:

- (a) $\Lambda(5, 3) \sim \mathbb{D}_5$; (b) $\Lambda(6, 3) \sim \mathbb{E}_6$; (c) $\Lambda(7, 4) \sim \mathbb{E}_7$; (d) $\Lambda(8, 4) \sim \tilde{\mathbb{E}}_7$;
- (e) $\Lambda(9, 5) \sim \tilde{\mathbb{E}}_8$; (f) $\Lambda(10, 5) \sim \mathbb{T}_{2,3,7}$; (g) $\Lambda(11, 6) \sim \mathbb{X}_{2,3,7}$.

Demonstração. Os Lemas 3.8 e 3.19 nos dão as seguintes equivalências:

- (a) $\Lambda(5, 3) \sim C(2, 0) \sim \mathbb{T}_{2,3,2} = \mathbb{D}_5$.
- (c) $\Lambda(7, 4) \sim C(3, 0) \sim \mathbb{T}_{2,3,4} = \mathbb{E}_7$.
- (e) $\Lambda(9, 5) \sim C(4, 0) \sim \mathbb{T}_{2,3,6} = \tilde{\mathbb{E}}_8$.
- (g) $\Lambda(11, 6) \sim C(5, 0) \sim \mathbb{X}_{2,3,7}$.

Segue de uma combinação dos Lemas 3.8 e 3.21 as seguintes equivalências:

- (b) $\Lambda(6, 3) \sim C_1(2) \sim \mathbb{T}_{2,3,3} = \mathbb{E}_6$.

$$(d) \Lambda(8, 4) \sim C_1(3) \sim \mathbb{T}_{2,4,4} = \tilde{\mathbb{E}}_7.$$

$$(f) \Lambda(10, 5) \sim C_1(4) \sim \mathbb{T}_{2,3,7}.$$

□

Para os casos descritos no lema abaixo, usamos o funtor definido no Capítulo 2.

Lema 4.3. Valem as seguintes equivalências:

- (a) $\Lambda(7, 3) \sim \mathbb{E}_7$; (b) $\Lambda(8, 3) \sim \mathbb{E}_8$; (c) $\Lambda(9, 3) \sim \tilde{\mathbb{E}}_8$;
 (d) $\Lambda(10, 3) \sim \mathbb{X}_{2,3,6}$; (e) $\Lambda(11, 3) \sim \mathbb{X}_{2,3,7}$; (f) $\Lambda(9, 4) \sim \mathbb{X}_{2,4,4}$;
 (g) $\Lambda(10, 4) \sim \mathbb{X}_{2,4,5}$.

Demonstração. (a) Como $S_{\Lambda(7,3)}^{op} =$

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longleftarrow & 5 & \longleftarrow & 6 & \longleftarrow & 4 & \longleftarrow & 2 & \longleftarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & & & & & \\ & & & & 3 & & & & & & \end{array}$$

a afirmação segue do Teorema 2.9 e do Lema 3.2. Defina $\tilde{\tau}(\Lambda(7, 3)) = S_{\Lambda(7,3)}^{op}$.

(b) Como $S_{\Lambda(8,3)}^{op} =$

$$\begin{array}{ccccccccc} 3 & \longleftarrow & 7 & \longleftarrow & 6 & \longleftarrow & 4 & \longleftarrow & 2 & \longleftarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & \\ & & 1 & \longleftarrow & 5 & & & & & & \end{array}$$

aplicando a mutação μ_1^- obtemos o poset

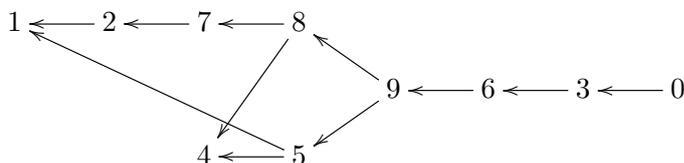
$$\tilde{\tau}(\Lambda(8, 3)) := \begin{array}{ccccccccc} 3 & \longleftarrow & 7 & \longleftarrow & 1 & \longleftarrow & 6 & \longleftarrow & 4 & \longleftarrow & 2 & \longleftarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & & & & & & & \\ & & & & 5 & & & & & & & & \end{array}$$

Então a afirmação segue dos Teoremas 1.49 e 2.9.

(c) Como $S_{\Lambda(9,3)}^{op} =$

$$\begin{array}{ccccccccc} 3 & \longleftarrow & 7 & \longleftarrow & 8 & \longleftarrow & 6 & \longleftarrow & 4 & \longleftarrow & 2 & \longleftarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & & & \\ & & 1 & \longleftarrow & 5 & & & & & & & & \end{array}$$

(g) Como $S_{\Lambda(10,4)}^{op} =$



temos que $S_{\Lambda(10,4)}^{op}$ é isomorfo a $\mathcal{X}(4,3)$. Então a afirmação segue do Lema 3.19 e do Teorema 2.9. \square

4.2 Álgebras seriais hereditárias por partes

4.2.1 Álgebras seriais com carcás do tipo \mathbb{D}_n

A tabela abaixo mostra os possíveis tipos para as álgebras $\Delta(n, r)$ que são hereditárias por partes e, nas entradas assinaladas com $-$, as que não são hereditárias por partes.

Tabela 4.2: Os possíveis tipos de $\Delta(n, r)$

$r \backslash n-r$	2	3	4	5	6	7	8	...
2	\mathbb{D}_4	\mathbb{D}_5	\mathbb{D}_6	\mathbb{D}_7	\mathbb{D}_8	\mathbb{D}_9	\mathbb{D}_{10}	...
3	$\widetilde{\mathbb{D}}_4$	$\widetilde{\mathbb{D}}_5$	$[\mathbb{D}_4, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$	$[\mathbb{D}_5, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$	$[\mathbb{D}_6, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$	$[\mathbb{D}_7, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$	-	...
4	\mathbb{T}_{2223}	$[\mathbb{D}_4, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$	$[\mathbb{D}_5, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$	$[\mathbb{D}_5, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_4]$	-	-	-	...
5	\mathbb{T}_{2224}	$[\mathbb{D}_4, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_4]$	$[\mathbb{D}_6, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$	$[\mathbb{D}_7, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$	$[\mathbb{D}_8, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$	-	-	...
6	\mathbb{T}_{2225}	$[\mathbb{D}_4, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_5]$	$[\mathbb{D}_7, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$	-	-	-	-	...
7	\mathbb{T}_{2226}	$[\mathbb{D}_4, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_6]$	$[\mathbb{D}_8, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$	-	-	-	-	...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

Nesta subseção apresentamos os resultados que foram organizados na tabela acima.

Lema 4.4. Valem as seguintes equivalências:

- (a) $\Delta(m, 2) \sim \mathbb{D}_m$, para todo $m \geq 4$;
- (b) $\Delta(m + 2, m) \sim \mathbb{T}_{2,2,2,m-1}$, para todo $m \geq 3$;
- (c) $\Delta(m + 3, m) \sim [\mathbb{D}_4, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_{m-1}]$, para todo $m \geq 3$;
- (d) $\Delta(m + 4, m) \sim [\mathbb{D}_{m+1}, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$, para todo $m \geq 3$;
- (e) $\Delta(m, 5) \sim [\mathbb{D}_{m-3}, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$, para $m = 10, 11$;
- (f) $\Delta(9, 4) \sim [\mathbb{D}_5, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_4]$;

(g) $\Delta(m, 3) \sim [\mathbb{D}_{m-3}, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$, para $8 \leq m \leq 10$.

Demonstração. O item (a) segue do Teorema 2.21 (veja também em [14]). As seguintes equivalências seguem dos Lemas 3.22 e 3.23 e do item (c) do Lema 3.8:

(b) $\Delta(m + 2, m) \sim D(1, m - 2) \sim \mathbb{T}_{2,2,2,m-1}$, para todo $m \geq 3$;

(c) $\Delta(m + 3, m) \sim D(2, m - 3) \sim [\mathbb{D}_4, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_{m-1}]$, para todo $m \geq 3$;

(d) $\Delta(m + 4, m) \sim D(3, m - 4) \sim [\mathbb{D}_{m+1}, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$, para todo $m \geq 4$

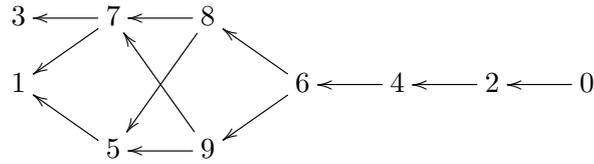
e $\Delta(7, 3) \sim D_1(2) \sim [\mathbb{D}_4, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$;

(e) $\Delta(10, 5) \sim D(4, 0) \sim [\mathbb{D}_7, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$ e $\Delta(11, 5) \sim D_1(4) \sim [\mathbb{D}_8, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$;

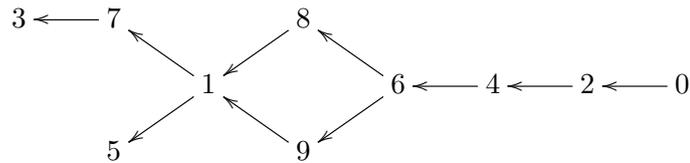
(f) $\Delta(9, 4) \sim D_1(3) \sim [\mathbb{D}_5, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_4]$.

Para a demonstração do item (g) usaremos o complexo inclinante definido no Capítulo 2.

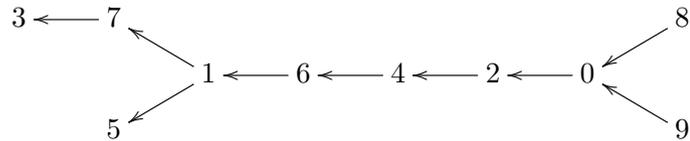
(g) Calculando $S_{\Delta(10,3)}^{op}$ obtemos



Aplicando a mutação μ_1^- obtemos

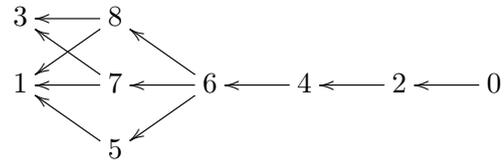


Por fim, aplicando a mutação $\mu_{\{6,4,2,0\}}^+$ obtemos o poset

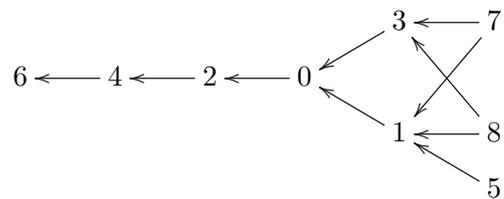


cujos grafo é isomorfo a $[\mathbb{D}_7, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$.

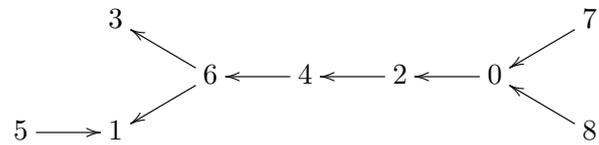
Calculando $S_{\Delta(9,3)}^{op}$ obtemos



Considerando o subconjunto fechado $Y = \{6, 4, 2, 0\}$ temos que \mathcal{A}_Y é a álgebra de incidência do poset

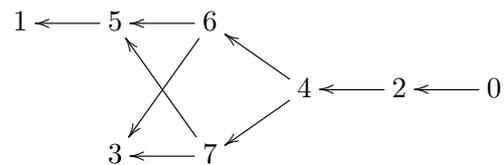


Por fim, aplicando a mutação $\mu_{\{6,4,2,0\}}^-$ obtemos o poset

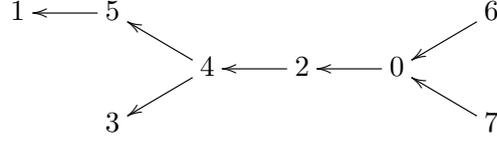


cujo grafo é isomorfo a $[\mathbb{D}_6, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$.

Calculando $S_{\Delta(8,3)}^{op}$ obtemos



Aplicando a mutação $\mu_{\{4,2,0\}}^+$ obtemos o poset



cujos grafo é isomorfo a $[\mathbb{D}_5, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$. □

Lema 4.5. As seguintes álgebras não são hereditárias por partes:

- (a) $\Delta(11 + i, 3)$ para todo $i \geq 0$;
- (b) $\Delta(10 + i, 4)$ para todo $i \geq 0$;
- (c) $\Delta(12 + i, 5)$ para todo $i \geq 0$;
- (d) $\Delta(11 + i + j, 6 + j)$ para todos $i, j \geq 0$.

Demonstração. (a) É suficiente mostrar que $\Delta(11, 3)$ não é hereditária por partes. Note que $\Lambda(11, 3)$ é uma álgebra do tipo feixes, que não é do tipo módulos, e é uma subcategoria plena de $\Delta(11, 3)$. Portanto, para mostrar que $\Delta(11, 3)$ não é hereditária por partes, é suficiente mostrar que ela não é do tipo feixes. Calculando seu polinômio de Coxeter obtemos

$$\begin{aligned} \chi_{\Delta(11,3)} &= -\lambda^{11} - \lambda^{10} + \lambda^9 + 2\lambda^8 + \lambda^7 - 2\lambda^6 - 2\lambda^5 + \lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 \\ &= -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^3(\lambda^2 + \lambda + 1)(\lambda^4 - \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1) \end{aligned}$$

que não coincide com o polinômio de Coxeter de nenhuma álgebra do tipo feixes.

(b) É suficiente mostrar que $\Delta(9, 4)$ não é hereditária por partes. Note que $\Lambda(9, 4)$ é uma álgebra do tipo feixes, que não é do tipo módulos, e é uma subcategoria plena de $\Delta(9, 4)$. Portanto, para mostrar que $\Delta(9, 4)$ não é hereditária por partes, é suficiente mostrar que ela não é do tipo feixes. Calculando seu polinômio de Coxeter obtemos

$$\begin{aligned} \chi_{\Delta(9,4)} &= \lambda^{10} + \lambda^9 - \lambda^8 - 2\lambda^5 - \lambda^2 + \lambda + 1 \\ &= (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^4(\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1) \end{aligned}$$

que não coincide com o polinômio de Coxeter de nenhuma álgebra do tipo feixes.

(c) É suficiente mostrar que $\Delta(11, 5)$ não é hereditária por partes. Note que $\Lambda(11, 5)$ não é hereditária por partes e é uma subcategoria plena de $\Delta(11, 5)$, logo a afirmação segue.

(d) É suficiente mostrar que $\Delta(10 + j, 6 + j)$ não é hereditária por partes para todo $j \geq 0$ e isto segue do item (e) do Lema 3.22 e do item (c) do Lema 3.8. \square

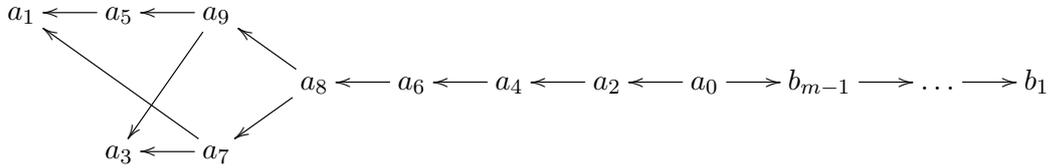
4.2.2 Colagens

Nesta subseção apresentamos resultados sobre a colagem de álgebras $\Delta(n, r)$ e $\Lambda(n, r)$ e álgebras hereditárias.

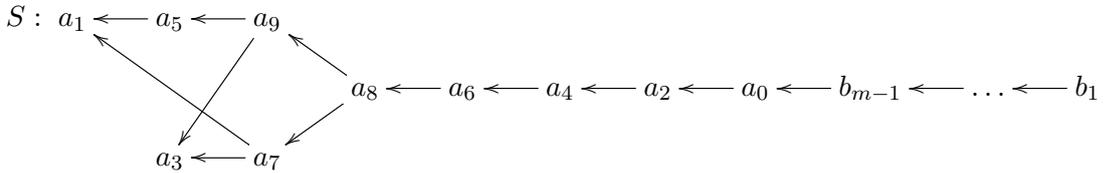
Lema 4.6. Valem as seguintes equivalências:

- (a) $\Lambda \left(\Lambda(10, 3), \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_m \right) \sim \mathbb{X}_{2,3,m+5}$; (b) $\Lambda \left(\Lambda(11, 3), \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_m \right) \sim \mathbb{X}_{2,3,m+6}$;
(c) $\Lambda \left(\Lambda(9, 4), \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_m \right) \sim \mathbb{X}_{2,4,m+3}$; (d) $\Lambda \left(\Lambda(10, 4), \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_m \right) \sim \mathbb{X}_{2,4,m+4}$.

Demonstração. (a) Fixando $\Lambda = \Lambda \left(\Lambda(10, 3), \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_m \right)$ temos $S_\Lambda^{op} =$



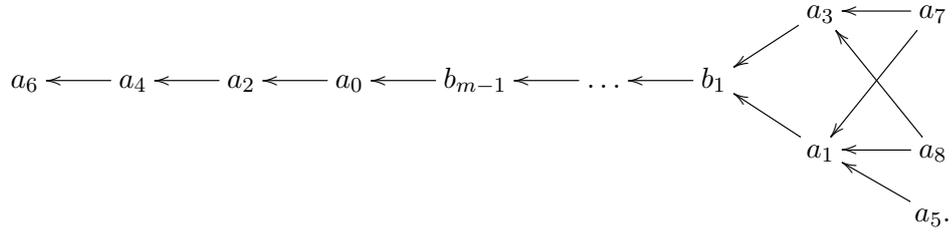
Aplicando os funtores $(\mu_{b_1}^-)(\mu_{b_2}^- \mu_{b_1}^-) \dots (\mu_{b_{m-2}}^- \dots \mu_{b_1}^-)(\mu_{b_{m-1}}^- \dots \mu_{b_1}^-)$ obtemos o poset



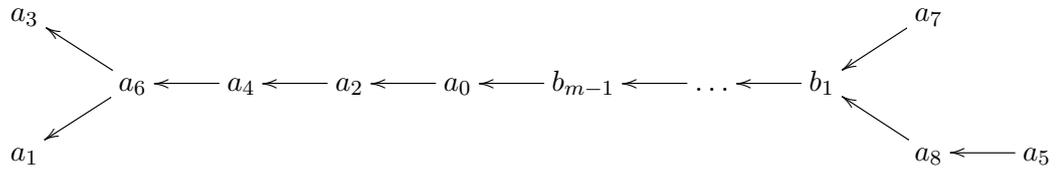
Como S é isomorfo ao poset $\mathcal{X}(3, m+3)$, a afirmação segue do Lema 3.18 e dos Teoremas 1.49 e 2.25.

(b) Fixando $\Lambda = \Lambda \left(\Lambda(11, 3), \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_m \right)$, de maneira análoga ao item anterior temos

a álgebra de incidência do poset

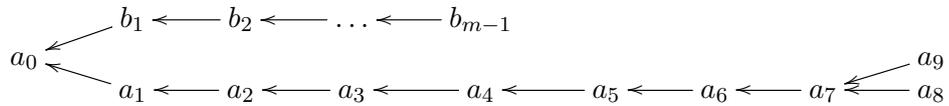


Aplicando o funtor $\mu_{\{a_6, a_4, a_2, a_0, b_{m-1}, \dots, b_1\}}^-$ obtemos o poset

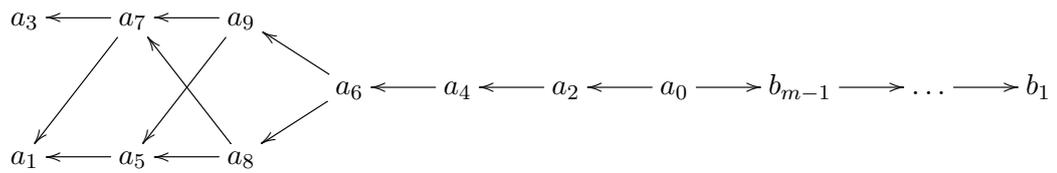


cujos grafo é isomorfo a $[\mathbb{D}_{m+5}, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$, então a afirmação segue do Lema 3.2 e dos Teoremas 2.21, 1.49 e 1.21.

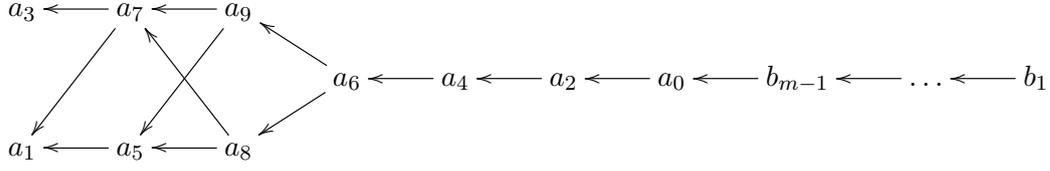
(c) Seja $\Lambda = \Lambda(\Delta(9, 3), \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_m)$ e $Q_\Lambda =$



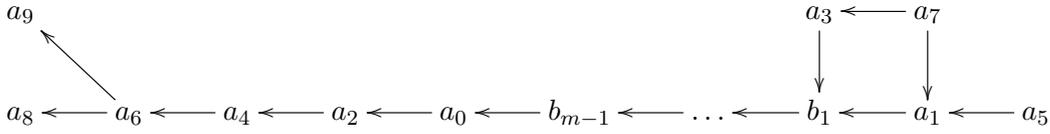
Então $S_\Lambda^{op} =$



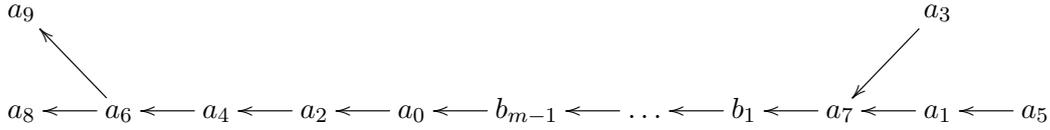
Aplicando as mutações $(\mu_{b_1}^-)(\mu_{b_2}^-\mu_{b_1}^-) \dots (\mu_{b_{m-2}}^- \dots \mu_{b_1}^-)(\mu_{b_{m-1}}^- \dots \mu_{b_1}^-)$ obtemos o poset



Considerando o subconjunto fechado $Y = \{a_9, a_8, a_6, a_4, a_2, a_0, b_{m-1}, \dots, b_1\}$ temos que \mathcal{A}_Y  a lgebra de incidência do poset



Aplicando o funtor $\mu_{a_7}^+$ obtemos o poset



cujo grafo é isomorfo a $[\mathbb{D}_{m+6}, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$, então a afirmação segue do Lema 3.2 e dos Teoremas 2.21, 1.49 e 1.21. \square

Lema 4.8. As seguintes álgebras não são hereditárias por partes:

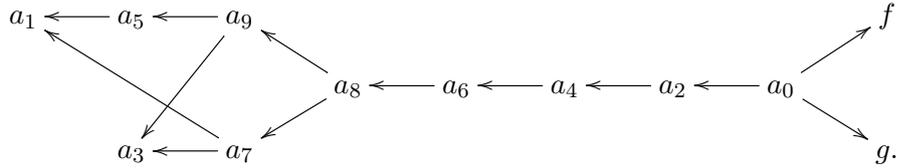
- | | |
|---|---|
| (a) $\Lambda \left(\Lambda(n, n-4), \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_2 \right)$, para $n \geq 11$; | (i) $\Lambda \left(\Lambda(11, 6), \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_2, \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_2 \right)$; |
| (b) $\Lambda \left(\Delta(n, n-4), \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_2 \right)$, para $n \geq 9$; | (j) $\Lambda \left(\Delta(8, 3), \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_2, \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_2 \right)$; |
| (c) $\Lambda \left(\Delta(n, n-3), \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_2, \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_2 \right)$, para $n \geq 6$; | (k) $\Lambda \left(\Delta(9, 3), \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_2, \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_2 \right)$; |
| (d) $\Lambda \left(\Lambda(10, 3), \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_2, \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_2 \right)$; | (l) $\Lambda \left(\Delta(10, 3), \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_2, \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_2 \right)$; |
| (e) $\Lambda \left(\Lambda(11, 3), \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_2, \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_2 \right)$; | (m) $\Lambda \left(\Delta(8, 4), \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_2, \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_2 \right)$; |
| (f) $\Lambda \left(\Lambda(9, 4), \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_2, \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_2 \right)$; | (n) $\Lambda \left(\Delta(10, 5), \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_2, \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_2 \right)$; |
| (g) $\Lambda \left(\Lambda(10, 4), \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_2, \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_2 \right)$; | (o) $\Lambda \left(\Delta(11, 5), \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_2, \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_2 \right)$. |
| (h) $\Lambda \left(\Lambda(10, 6), \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_2, \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_2 \right)$; | |

Demonstrao. De maneira análoga  demonstrao do Lema 3.8, mostramos que

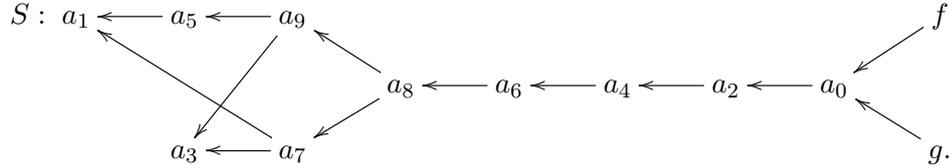
$$\begin{aligned}
\Lambda\left(\Lambda(n, n-4), \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2\right) &\sim S\left(C(4, n-9), \vec{\mathbb{A}}_2\right), \\
\Lambda\left(\Delta(n, n-4), \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2\right) &\sim S\left(D(3, n-8), \vec{\mathbb{A}}_2\right), \\
\Lambda\left(\Delta(n, n-3), \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2, \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2\right) &\sim S\left(D(2, n-6), \vec{\mathbb{A}}_2\right), \\
\Lambda\left(\Lambda(10, 6), \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2, \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2\right) &\sim S\left(C(4, 1), \vec{\mathbb{A}}_2, \vec{\mathbb{A}}_2\right), \\
\Lambda\left(\Lambda(11, 6), \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2, \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2\right) &\sim S\left(C(5, 0), \vec{\mathbb{A}}_2, \vec{\mathbb{A}}_2\right), \\
\Lambda\left(\Delta(8, 4), \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2, \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2\right) &\sim S\left(D(3, 0), \vec{\mathbb{A}}_2, \vec{\mathbb{A}}_2\right), \\
\Lambda\left(\Delta(10, 5), \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2, \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2\right) &\sim S\left(D(4, 0), \vec{\mathbb{A}}_2, \vec{\mathbb{A}}_2\right), \\
\Lambda\left(\Delta(11, 5), \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2, \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2\right) &\sim S\left(D_1(4), \vec{\mathbb{A}}_2, \vec{\mathbb{A}}_2\right).
\end{aligned}$$

Portanto, segue do Lema 3.16 que estas não são hereditárias por partes.

Note que o poset $S_{\Lambda(\Lambda(10,3), \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2, \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2)}^{op}$ é dado por

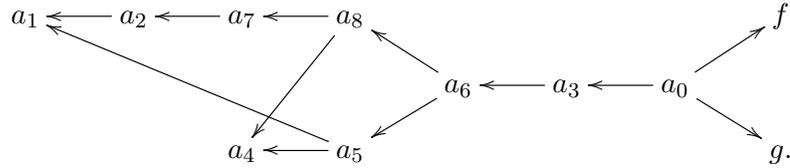


Aplicando as mutações μ_f^- e μ_g^- obtemos o seguinte poset



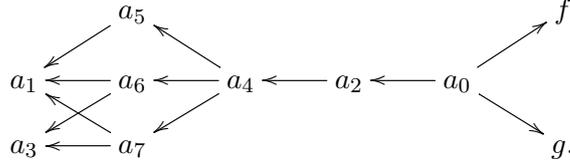
Então a subcategoria plena de $\mathbb{k}S$ que consiste dos vértices a_1, a_3, a_7, a_9, f e g é isomorfa a $S(3, 3)$ e segue do Lema 3.16 que $\Lambda\left(\Lambda(10, 3), \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2, \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2\right)$ não é hereditária por partes.

Note que o poset $S_{\Lambda(\Lambda(9,4), \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2, \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2)}^{op}$ é dado por



De maneira análoga ao item anterior, aplicando as mutações μ_f^- e μ_g^- obtemos o poset S e temos que a subcategoria plena de $\mathbb{k}S$ que consiste dos vértices a_1, a_4, a_5, a_8, f e g é isomorfa a $S(3, 3)$ e segue do Lema 3.16 que $\Lambda(\Lambda(9, 4), \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2, \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2)$ não é hereditária por partes.

Note que o poset $S_{\Lambda(\Delta(8,3), \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2, \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2)}^{op}$ é dado por



De maneira análoga ao item anterior, aplicando as mutações μ_f^- e μ_g^- obtemos o poset S e temos que a subcategoria plena de $\mathbb{k}S$ que consiste dos vértices a_1, a_3, a_6, a_7, f e g é isomorfa a $S(3, 3)$ e segue do Lema 3.16 que $\Lambda(\Delta(8, 3), \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2, \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2)$ não é hereditária por partes.

Por fim, note que as álgebras $\Lambda(\Lambda(11, 3), \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2, \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2)$, $\Lambda(\Delta(10, 3), \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2, \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2)$ e $\Lambda(\Delta(9, 3), \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2, \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2)$ possuem $\Lambda(\Lambda(8, 3), \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2, \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2)$ como subcategoria plena. Também $\Lambda(\Lambda(10, 4), \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2, \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2)$ possui $\Lambda(\Lambda(9, 4), \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2, \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_2)$, como subcategoria plena. Portanto estas também não são hereditárias por partes pelo Lema 1.45. \square

Teorema 4.9. Valem as seguintes equivalências:

- (1) $\Lambda(r + 4, r) \sim \mathbb{X}_{2,3,r}$ para $r \geq 6$;
- (2) $\Lambda(10, 3) \sim \mathbb{X}_{2,3,6}$;
- (3) $\Lambda(11, 3) \sim \mathbb{X}_{2,3,7}$;
- (4) $\Lambda(9, 4) \sim \mathbb{X}_{2,4,4}$;
- (5) $\Lambda(10, 4) \sim \mathbb{X}_{2,4,5}$;
- (6) $\Lambda(11, 6) \sim \mathbb{X}_{2,3,7}$;
- (7) $\Delta(r + 3, r) \sim [\mathbb{D}_4, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_{r-1}]$;
- (8) $\Delta(r + 4, r) \sim [\mathbb{D}_{r+1}, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$;
- (9) $\Delta(8, 3) \sim [\mathbb{D}_5, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$;
- (10) $\Delta(9, 3) \sim [\mathbb{D}_6, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$;
- (11) $\Delta(10, 3) \sim [\mathbb{D}_7, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$;
- (12) $\Delta(10, 5) \sim [\mathbb{D}_7, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3]$;

$$(13) \Delta(11, 5) \sim [\mathbb{D}_8, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3].$$

Demonstração. Os itens (1), (2), (3), (4), (5) e (6) seguem do Teorema 4.1 e dos Lemas 4.2 e 4.3. Os itens (7), (8), (9), (10), (11), (12) e (13) seguem do Lema 4.4. \square

Teorema 4.10. Seja $m \geq 2$. Valem as seguintes equivalências:

- (1) $\Lambda \left(\Lambda(10, 3), \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_m \right) \sim \mathbb{X}_{2,3,m+5};$
- (2) $\Lambda \left(\Lambda(11, 3), \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_m \right) \sim \mathbb{X}_{2,3,m+6};$
- (3) $\Lambda \left(\Lambda(9, 4), \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_m \right) \sim \mathbb{X}_{2,4,m+3};$
- (4) $\Lambda \left(\Lambda(10, 4), \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_m \right) \sim \mathbb{X}_{2,4,m+4};$
- (5) $\Lambda \left(\Lambda(10, 6), \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_m \right) \sim \mathbb{X}_{2,3,m+5};$
- (6) $\Lambda \left(\Lambda(11, 6), \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_m \right) \sim \mathbb{X}_{2,3,m+6};$
- (7) $\Lambda \left(\Delta(7, 3), \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_m \right) \sim [\mathbb{D}_{m+4}, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3];$
- (8) $\Lambda \left(\Delta(8, 3), \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_m \right) \sim [\mathbb{D}_{m+5}, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3];$
- (9) $\Lambda \left(\Delta(9, 3), \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_m \right) \sim [\mathbb{D}_{m+6}, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3];$
- (10) $\Lambda \left(\Delta(7, 4), \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_m \right) \sim [\mathbb{D}_{m+4}, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3];$
- (11) $\Lambda \left(\Delta(10, 5), \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_m \right) \sim [\mathbb{D}_{m+7}, \mathbb{A}_2, \mathbb{A}_3].$

Demonstração. Os itens (1), (2), (3) e (4) seguem do Lema 4.6. De maneira análoga ao que foi feito na demonstração do Lema 3.8 podemos mostrar que $\Lambda \left(\Lambda(10, 6), \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_m \right) \sim \mathbb{k}S \left(C(4, 1), \vec{\mathbb{A}}_m \right)$ e $\Lambda \left(\Lambda(11, 6), \mathbb{k} \vec{\mathbb{A}}_m \right) \sim \mathbb{k}S \left(C(5, 0), \vec{\mathbb{A}}_m \right)$, portanto as afirmações dos itens (5) e (6) seguem do Lema 3.26. Os itens (7), (8) e (9) seguem do Lema 4.7. Os itens (10) e (11) seguem dos Lemas 3.8 e 3.27. \square

Repetiremos a seguir as notações fixadas na Introdução e acrescentaremos mais

algumas:

$$\begin{aligned}
\Omega_a &:= \{\Lambda(n, r) \mid \Lambda(n, r) \text{ é hereditária por partes do tipo módulos}\}; \\
\Omega_b &:= \{\Delta(7, 3), \Delta(9, 4), \Delta(n, r) \mid r = 2 \text{ ou } n - r = 2\}; \\
\Omega &:= \Omega_a \cup \Omega_b \cup \{\Lambda \mid \Lambda \text{ é hereditária serial à direita}\}; \\
\Omega_2 &:= \{\Lambda(n, 2), \Delta(m, 2), \Lambda(7, 3), \Lambda(8, 3), \Lambda(9, 3) \mid n \geq 4, m \geq 5\}; \\
\Omega_1 &:= (\Omega_a \cup \Omega_b) \setminus \Omega_2; \\
\Omega^1 &:= \{\Lambda(r + 4, r) \mid r \geq 7\} \cup \{\Delta(r + 4, r) \mid r \geq 5\}; \\
\Omega^2 &:= \{\Lambda \mid \Lambda = \Lambda(n, r) \text{ ou } \Lambda = \Delta(n, r) \text{ e } \Lambda \text{ é hereditária por partes}\} \setminus (\Omega \cup \Omega^1).
\end{aligned}$$

Para qualquer $\Lambda \in \{\Lambda(n, r), \Delta(n, r)\}$ tal que Λ é isomorfa a $\mathcal{A}_Y(S)$ para algum poset $S \in \{C(n, m), C_1(n), D(n, m), D_1(n)\}$ e algum Y subconjunto fechado de S , vamos definir $S_\Lambda^Y := S$.

Definição 4.11. Definimos a aplicação τ da seguinte maneira:

Se $\Lambda \in \Omega_1$ então $\tau(\Lambda) = \tau(S_\Lambda^Y)$ e $\Gamma_\Lambda = \Gamma_{\tau(\Lambda)}$.

Seja $\Lambda \in \Omega_2$. Se $\Lambda = \Lambda(n, 2)$ então $S_\Lambda = \overrightarrow{\mathbb{A}}_n$. Se $\Lambda = \Delta(n, 2)$ então $S_\Lambda = \overrightarrow{\mathbb{D}}_n$. Se $r = 2$ definimos $\tau(\Lambda) = S_\Lambda$. Para $\Lambda \in \{\Lambda(7, 3), \Lambda(8, 3), \Lambda(9, 3)\}$ definimos $\tau(\Lambda) = \tilde{\tau}(\Lambda)^{op}$ onde $\tilde{\tau}(\Lambda)$ foi definido na demonstração do Lema 4.3.

Teorema 4.12. Seja $\Lambda = \Lambda(\Lambda_1, \dots, \Lambda_t)$, onde $\Lambda_i \in \Omega$. Então Λ é hereditária por partes e $\Lambda \sim S(\tau(\Lambda_1), \dots, \tau(\Lambda_t)) \sim [\Gamma_{\tau(\Lambda_1)}, \dots, \Gamma_{\tau(\Lambda_t)}]_a$, onde a é o vértice de colagem.

Demonstração. Seja $\mathbb{T} = \{i \in \{1, \dots, t\} \mid \Lambda_i \in \Omega_2\}$. Segue do Teorema 2.25 que $\Lambda \sim$

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda_a(\tilde{\Lambda}_1, \dots, \tilde{\Lambda}_t), \text{ onde } \tilde{\Lambda}_i = \begin{cases} \mathbb{k}S_{\Lambda_i}^{op}, & \text{se } i \in \mathbb{T} \\ \Lambda_i, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\text{Seja } \tilde{\tilde{\Lambda}} = \Lambda_a(\tilde{\tilde{\Lambda}}_1, \dots, \tilde{\tilde{\Lambda}}_t), \text{ onde } \tilde{\tilde{\Lambda}}_i = \begin{cases} \mathbb{k}\tau(\Lambda_i), & \text{se } i \in \mathbb{T} \\ \Lambda_i, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Segue da demonstração do Lema 4.3 e do fato de que o grafo subjacente a $\tau(\Lambda_i)$ é árvore, que $\tilde{\tilde{\Lambda}}$ pode ser obtida de $\tilde{\Lambda}$ por uma sequência de mutações em vértices diferentes de a . Por isso, segue do Teorema 1.46 que $\tilde{\Lambda} \sim \tilde{\tilde{\Lambda}}$.

Seja $S = S(S_1, \dots, S_t)$ o poset obtido pela colagem dos posets S_1, \dots, S_t onde cada S_i é definido da seguinte maneira:

- Se $i \in \mathbb{T}$, então $S_i = \tau(\Lambda_i)$. Neste caso, definimos o subconjunto fechado Y_i como sendo o próprio S_i .

- Para cada $i \notin \mathbb{T}$, seja $S_i = S_{\Lambda_i}^{Y_i}$ o poset do tipo $C(n, m)$, $C_1(n)$, $D(1, m)$ ou $D_1(n)$ tal que $\mathcal{A}_{Y_i} \sim \Lambda_i$ (veja detalhes em 1.2.4).

Seja $Y = \bigcup_{i=1}^t Y_i$. É fácil ver que Y é um subconjunto fechado de S (de fato, $Y = \overline{\{a\}}$). Segue do Teorema 1.21 que $\mathcal{A}_Y \sim \tilde{\Lambda}$.

Por fim, como cada $S_i \in \mathbb{S}$, segue do Teorema 3.28 que $\mathbb{k}S$ é hereditária por partes do tipo $[\Gamma^1, \dots, \Gamma^t]_a$, onde $\Gamma^i = \Gamma_{\tau(S_i)}$ para todo i . O resultado segue. \square

Seja $\Lambda = \Lambda(\Lambda_1, \dots, \Lambda_t)$, onde $\Lambda_i \in \{\Lambda(n_i, r_i), \Delta(n_i, r_i)\}$ ou Λ_i é uma álgebra de incidência de um poset tal que seu grafo é uma árvore com um elemento maximal fixo.

Teorema 4.13. Λ é hereditária por partes se, e somente se, uma das seguintes condições é satisfeita:

- (a) t é qualquer e $\Lambda_i \in \Omega$ para qualquer i .
- (b) $t = 1$ e $\Lambda \in \Omega^1 \cup \Omega^2$.
- (c) $t = 2$ e $\Lambda = \Lambda(\Lambda_1, \mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_k)$, onde $\Lambda_1 \in \Omega^2$, $k \in \mathbb{N}$ e $k \geq 2$.

Demonstração. Se a condição (a) é satisfeita, então segue do Teorema 4.12 que Λ é hereditária por partes. Se Λ satisfaz o item (b) ou o item (c) então segue dos Teoremas 4.9 e 4.10 que ela é hereditária por partes.

Mostramos então que as condições (a), (b) e (c) são suficientes para que Λ seja hereditária por partes. Agora, mostraremos que pelo menos uma destas condições é necessária.

Segue imediatamente do Lema 4.8 que se $\Lambda \in \Omega^2$ então Λ só pode ser colada a mais uma álgebra de forma que a colagem seja hereditária por partes; além disso a álgebra a ser colada só pode ser do tipo $\mathbb{k}\vec{\mathbb{A}}_k$ para algum $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Por fim, se $\Lambda \in \Omega^1$ então segue também do Lema 4.8 que se Λ for colada a alguma outra álgebra então a colagem não será hereditária por partes. \square

Com os resultados mostrados nesta subseção, podemos acrescentar algumas informações às tabelas 4.1 e 4.2. As células que representam álgebras hereditárias por partes que podem ser coladas entre si arbitrariamente serão identificadas com a cor verde, as células que representam álgebras hereditárias por partes que podem ser coladas apenas

com uma álgebra do tipo $\mathbb{k}\overrightarrow{A}_k$ para algum $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ serão identificadas com a cor amarela e, por fim, as células que representam álgebras hereditárias por partes que caso sejam coladas com qualquer outra álgebra deixarão de ser hereditárias por partes serão identificadas com a cor vermelha. O resultado pode ser visto nas Tabelas 1 e 2, que repetiremos abaixo.

Tabela 4.3: Os possíveis tipos hereditários de $\Lambda(n, r)$

$r \backslash n-r$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	...
3	D_4	D_5	E_6	E_7	E_8	\tilde{E}_8	X_{236}	X_{237}	-	...
4	D_5	E_6	E_7	\tilde{E}_7	X_{244}	X_{245}	-	-	-	...
5	D_6	E_7	E_8	\tilde{E}_8	T_{237}	-	-	-	-	...
6	D_7	E_8	\tilde{E}_8	X_{236}	X_{237}	-	-	-	-	...
7	D_8	\tilde{E}_8	T_{237}	X_{237}	-	-	-	-	-	...
8	D_9	T_{237}	T_{238}	X_{238}	-	-	-	-	-	...
...

Tabela 4.4: Os possíveis tipos hereditários de $\Delta(n, r)$

$r \backslash n-r$	2	3	4	5	6	7	8	...
2	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}	...
3	\tilde{D}_4	\tilde{D}_5	$[D_4, A_2, A_3]$	$[D_5, A_2, A_3]$	$[D_6, A_2, A_3]$	$[D_7, A_2, A_3]$	-	...
4	T_{2223}	$[D_4, A_2, A_3]$	$[D_5, A_2, A_3]$	$[D_5, A_2, A_4]$	-	-	-	...
5	T_{2224}	$[D_4, A_2, A_4]$	$[D_6, A_2, A_3]$	$[D_7, A_2, A_3]$	$[D_8, A_2, A_3]$	-	-	...
6	T_{2225}	$[D_4, A_2, A_5]$	$[D_7, A_2, A_3]$	-	-	-	-	...
7	T_{2226}	$[D_4, A_2, A_6]$	$[D_8, A_2, A_3]$	-	-	-	-	...
...

Referências Bibliográficas

- [1] K. L. M. Acosta. Categorias de feixes, álgebras de incidência e equivalências derivadas. Master's thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil, 2019. <http://hdl.handle.net/1843/EABA-BBTFSP>.
- [2] E. R. Alvares, P. Le Meur, and E. N. Marcos. The strong global dimension of piecewise hereditary algebras. *J. Algebra*, 481:36–67, 2017.
- [3] I. Assem. *Algèbres et modules: cours et exercices*. Masson Paris, 1997.
- [4] I. Assem and D. Happel. Erratum: “Generalized tilted algebras of type A_n ” [Comm. Algebra **9** (1981), no. 20, 2101–2125; MR 83a:16023]. *Comm. Algebra*, 10(13):1475, 1982.
- [5] I. Assem, D. Simson, and A. Skowroński. *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1*, volume 65 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006. Techniques of representation theory.
- [6] I. Assem and A. Skowroński. Iterated tilted algebras of type \tilde{A}_n . *Math. Z.*, 195(2):269–290, 1987.
- [7] M. Auslander, M. I. Platzeck, and I. Reiten. Coxeter functors without diagrams. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 250:1–46, 1979.
- [8] M. Auslander, I. Reiten, and S. O. Smalø. *Representation theory of Artin algebras*, volume 36 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. Corrected reprint of the 1995 original.

- [9] M. Barot. Representation-finite derived tubular algebras. *Arch. Math.*, 74(2):89–94, 2000.
- [10] M. Barot, T. Brüstle, and J. A. de la Peña. Derived-tame tree algebras of type E . *Forum Math.*, 12(6):713–721, 2000.
- [11] M. Barot and J. A. de la Peña. Derived tubular strongly simply connected algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 127(3):647–655, 1999.
- [12] M. Barot, D. Kussin, and H. Lenzing. Extremal properties for concealed-canonical algebras. *Colloq. Math.*, 130(2):183–219, 2013.
- [13] M. Barot and H. Lenzing. One-point extensions and derived equivalence. *J. Algebra*, 264(1):1–5, 2003.
- [14] R. Bautista and S. Liu. The bounded derived categories of an algebra with radical squared zero. *J. Algebra*, 482:303–345, 2017.
- [15] V. Bekkert, F. U. Coelho, and H. Wagner. Tree oriented pullback. *Comm. Algebra*, 43(10):4247–4257, 2015.
- [16] V. Bekkert, E. N. Marcos, and H. A. Merklen. Indecomposables in derived categories of skewed-gentle algebras. *Comm. Algebra*, 31(6):2615–2654, 2003.
- [17] V. Bekkert and H. A. Merklen. Indecomposables in derived categories of gentle algebras. *Algebr. Represent. Theory*, 6(3):285–302, 2003.
- [18] I. N. Bernšteĭn, I. M. Gel’fand, and V. A. Ponomarev. Coxeter functors, and Gabriel’s theorem. *Uspehi Mat. Nauk*, 28(2(170)):19–33, 1973.
- [19] N. Bordino, E. Fernández, and S. Trepode. On the quiver with relations of a quasitilted algebra and applications. *Comm. Algebra*, 45(9):4050–4061, 2017.
- [20] S. Brenner and M. C. R. Butler. Generalizations of the Bernstein-Gel’fand-Ponomarev reflection functors. In *Representation theory, II (Proc. Second Internat. Conf., Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1979)*, volume 832 of *Lecture Notes in Math.*, pages 103–169. Springer, Berlin-New York, 1980.

- [21] T. Brüstle. Derived-tame tree algebras. *Compositio Math.*, 129(3):301–323, 2001.
- [22] X.-W. Chen and H. Krause. Introduction to coherent sheaves on weighted projective lines. *arXiv:0911.4473*, 2009.
- [23] J. A. Drozd. Tame and wild matrix problems. In *Representation theory, II (Proc. Second Internat. Conf., Carleton Univ., Ottawa, Ont., 1979)*, volume 832 of *Lecture Notes in Math.*, pages 242–258. Springer, Berlin-New York, 1980.
- [24] W. Ebeling. *Functions of several complex variables and their singularities*, volume 83 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- [25] K. R. Fuller. Generalized uniserial rings and their Kupisch series. *Math. Z.*, 106:248–260, 1968.
- [26] A. M. Gabrièlov. Intersection matrices for certain singularities. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 7(3):18–32, 1973.
- [27] W. Geigle and H. Lenzing. A class of weighted projective curves arising in representation theory of finite-dimensional algebras. In *Singularities, representation of algebras, and vector bundles (Lambrecht, 1985)*, volume 1273 of *Lecture Notes in Math.*, pages 265–297. Springer, Berlin, 1987.
- [28] W. Geigle and H. Lenzing. Perpendicular categories with applications to representations and sheaves. *J. Algebra*, 144(2):273–343, 1991.
- [29] D. Happel. Corrigendum: “Tilting sets on cylinders” [Proc. London Math. Soc. (3) 51 (1985), no. 1, 21–55;(87a:16037)]. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 56(2):260, 1988.
- [30] D. Happel. *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, volume 119 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [31] D. Happel. A characterization of hereditary categories with tilting object. *Invent. Math.*, 144(2):381–398, 2001.

- [32] D. Happel. The Coxeter polynomial for a one point extension algebra. *J. Algebra*, 321(7):2028–2041, 2009.
- [33] D. Happel, I. Reiten, and S. Smalø. Piecewise hereditary algebras. *Arch. Math.*, 66(3):182–186, 1996.
- [34] D. Happel, I. Reiten, and S. O. Smalø. Tilting in abelian categories and quasitilted algebras. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 120(575):viii+ 88, 1996.
- [35] D. Happel and C. M. Ringel. Tilted algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 274(2):399–443, 1982.
- [36] D. Happel and U. Seidel. Piecewise hereditary Nakayama algebras. *Algebr. Represent. Theory*, 13(6):693–704, 2010.
- [37] D. Happel and I. H. Slungård. One-point extensions of hereditary algebras. In *Algebras and modules, II (Geiranger, 1996)*, volume 24 of *CMS Conf. Proc.*, pages 285–291. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [38] D. Happel and I. H. Slungård. On quasitilted algebras which are one-point extensions of hereditary algebras. *Colloq. Math.*, 81(1):141–152, 1999.
- [39] D. Happel and D. Zacharia. A homological characterization of piecewise hereditary algebras. *Math. Z.*, 260(1):177–185, 2008.
- [40] D. Happel and D. Zacharia. Homological properties of piecewise hereditary algebras. *J. Algebra*, 323(4):1139–1154, 2010.
- [41] T. Holm and P. Jørgensen. Triangulated categories: definitions, properties, and examples. In *Triangulated categories*, volume 375 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 1–51. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.
- [42] B. Keller. Algèbres héréditaires par morceaux de type \mathbf{D}_n . *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 312(7):483–486, 1991.
- [43] O. Kerner. Preprojective components of wild tilted algebras. *Manuscripta Math.*, 61(4):429–445, 1988.

- [44] D. Kussin, H. Lenzing, and H. Meltzer. Triangle singularities, ADE-chains, and weighted projective lines. *Adv. Math.*, 237:194–251, 2013.
- [45] S. Ladkani. Bounds on the global dimension of certain piecewise hereditary categories. *J. Pure Appl. Algebra*, 212(9):2140–2145, 2008.
- [46] S. Ladkani. On derived equivalences of categories of sheaves over finite posets. *J. Pure Appl. Algebra*, 212(2):435–451, 2008.
- [47] S. Ladkani. Which canonical algebras are derived equivalent to incidence algebras of posets? *Comm. Algebra*, 36(12):4599–4606, 2008.
- [48] S. Ladkani. Perverse equivalences, BB-tilting, mutations and applications. *arXiv:1001.4765*, 2010.
- [49] H. Lenzing. Hereditary categories. In *Handbook of tilting theory*, volume 332 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 105–146. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.
- [50] H. Lenzing and J. A. de la Peña. Wild canonical algebras. *Math. Z.*, 224(3):403–425, 1997.
- [51] H. Lenzing and J. A. de la Peña. Spectral analysis of finite dimensional algebras and singularities. In *Trends in representation theory of algebras and related topics*, EMS Ser. Congr. Rep., pages 541–588. Eur. Math. Soc., Zürich, 2008.
- [52] E. d. N. Marcos and M. d. N. Moreira. Piecewise hereditary incidence algebras. In *Advances in representation theory of algebras*, volume 761 of *Contemp. Math.*, pages 213–225. Amer. Math. Soc., Providence, RI, [2021] ©2021.
- [53] E. N. Marcos and M. Moreira. Piecewise hereditary algebras of dynkin and extended dynkin type. *arXiv:1704.03359*, 2019.
- [54] D. Milicic. Lectures on derived categories. <http://www.math.utah.edu/~milicic/Eprints/dercat.pdf>.
- [55] J. Rickard. Morita theory for derived categories. *J. London Math. Soc. (2)*, 39(3):436–456, 1989.

- [56] C. M. Ringel. *Tame algebras and integral quadratic forms*, volume 1099 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [57] C. M. Ringel. The canonical algebras. In *Topics in algebra, Part 1 (Warsaw, 1988)*, volume 26 of *Banach Center Publ.*, pages 407–432. PWN, Warsaw, 1990. With an appendix by William Crawley-Boevey.
- [58] B. Roggon. *Selfinjective and iterated tilted algebras of type E_6, E_7, E_8* . Ergänzungsreihe. Sonderforschungsbereich 343, 1995.
- [59] C. Schmidt. *Complexos tilting e dimensão global forte em álgebras hereditárias por partes*. PhD thesis, Universidade Federal do Paraná, Brasil, 2017. <http://hdl.handle.net/1884/52885>.
- [60] D. Simson and A. Skowroński. *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 3*, volume 72 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007. Representation-infinite tilted algebras.
- [61] A. Skowroński. On algebras with finite strong global dimension. *Bull. Polish Acad. Sci. Math.*, 35(9-10):539–547, 1987.
- [62] J. Vitória. Mutations vs. Seiberg duality. *J. Algebra*, 321(3):816–828, 2009.

Índice Remissivo

Álgebra

$\Delta(n, r)$, 3

$\Lambda(\Lambda_1, \dots, \Lambda_t)$, 56

$\Lambda(n, r)$, 3

\mathcal{A}_Y , 19

r -truncada, 15

de caminhos de um carcás $\mathbb{k}Q$, 15

de incidência de um poset, 19

de Nakayama, 21

gentil torcida, 23

hereditária à direita, 27

serial, 53

à direita, 21

à esquerda, 21

Aplicação

τ , 88, 117

Caminho, 14

r -truncado, 43

Carcás, 14

$\vec{\mathbb{A}}_n$, 3

$\vec{\mathbb{D}}_n$, 3

Categoria

$proj \Lambda$, 13

de complexos, 11

de feixes coerentes $coh(\mathbb{X})$, 17

derivada, 13

hereditária, 25

homotópica, 12

Colagem de posets, 64

Complexo, 11

inclinante, 14

Comprimento de um caminho, 14

Conjunto

a^+ , 34

a^- , 34

Q_0 , 14

Q_1 , 14

Q_n , 14

álgebras

Ω , 4

Ω^1 , 4

Ω^2 , 4

de cordas

St , 24

assimétricas - GSt_a , 25

generalizadas GSt , 24

simétricas - GSt_s , 25

de passeios generalizados \overline{GSt} , 24

de posets \mathbb{S} , 88
 Corda, 24
 generalizada, 24
 assimétrica, 24
 simétrica, 24
 Diagrama de Hasse, 19
 Dimensão global forte, 29
 Elemento especial, 64
 Fonte, 14
 Grafo
 $\mathbb{T}_{p_1, p_2, p_3}$, 3, 28
 de um poset, 19
 Grupo de Grothendieck, 25
 Ideal admissível, 15
 Matriz
 de Cartan, 27
 de Coxeter, 28
 Mutaçãõ
 negativa, 37
 negativa $\mu_k^-(\Lambda)$, 33
 positiva, 40
 positiva $\mu_k^+(\Lambda)$, 33
 Mutações
 de posets, 34
 de álgebras, 32
 Passeio, 24
 generalizado, 24
 Polinômio de Coxeter, 28
 Poset, 18
 $\mathcal{X}(n, m)$, 63
 $\vec{\mathbb{A}}_n$, 62
 $\vec{\mathbb{D}}_n$, 62
 $B(n, m)$, 62
 $C(n, m)$, 62
 $C_1(n)$, 62
 $D(1, m)$, 63
 $D(n, m)$, 63
 $D_1(n)$, 63
 $L(n, m)$, 52
 $S(n, m)$, 63
 S_Λ , 47
 $V(l, m, n, s)$, 49
 Poço, 14
 Relação binária R_Λ , 45
 Subcategoria
 $add(X)$, 13
 Subcategoria plena, 11
 Tipo hereditário de uma álgebra, 3
 Vetor dimensão, 25