Universidade Federal de Minas Gerais

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

Módulos de peso para $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

IGOR MARTINS SILVA

Belo Horizonte, Minas Gerais
2021

Igor Martins Silva

Módulos de peso para $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

Dissertação de Mestrado realizada no Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Lucas Henrique Calixto

Belo Horizonte, Minas Gerais
2021

Silva, Igor Martins.

S586m Módulos de peso para sl_2,(C) [manuscrito] / Igor Martins Silva. – 2021.
ix, 110 f. il.

Orientador: Lucas Henrique Calixto.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f.107-108.
.
1. Matemática – Teses. 2. Lie, Algebra de – Teses. 3. Algebra universal – Teses. 4. Modulos (Algebra) – Teses. I. Calixto, Lucas Henrique. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III.Título.

CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende Costa
CRB 6ª Região nº 1510

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

Módulos de peso para sl(2,C)

IGOR MARTINS SILVA

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Prof. Lucas Henrique Calixto
UFMG

Prof. Csaba Schneider
UFMG

Prof. Tiago Macedo
UNIFESP

Belo Horizonte, 16 de abril de 2021.

Av. Antônio Carlos, 6627 – Campus Pampulha - Caixa Postal: 702
CEP-31270-901 - Belo Horizonte – Minas Gerais - Fone (31) 3409-5963
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br - home page: http://www.mat.ufmg.br/pgmat

Agradecimento

Escrever esta dissertação estando sozinho, seria impossível para mim. Portanto, dedico este espaço para agradecer àqueles, sem os quais eu não passaria sequer da primeira linha.

Em primeiro lugar, agradeço aos meus pais, Eleonora e João, fundamentais para toda e qualquer empreitada em que eu me disponha a enfrentar. Com eles, tenho a garantia de um apoio incondicional e a certeza de um regresso seguro, sempre que for preciso. Agradeço a minha companheira Raquel cujo apoio, ajuda e lealdade foram cruciais para que eu superasse todas as batalhas e finalizasse o mestrado, incluindo a conclusão deste texto. Ela é minha amiga e meu bem e vai comigo aonde eu for. Agradeço a toda minha família que entende as necessidades e as dificuldades da vida estudantil, em especial, aos meus irmãos, Ingrid e Italo.

Evidentemente, por se tratar de um texto técnico, foi preciso a ajuda de muitos fora do meu ciclo familiar. Contei, nesse tempo, com companheiros de caminhada que sempre se dispuseram a ajudar e com professores dos mais diversos tipos que contribuíram com meu aprendizado e me fizeram chegar até onde cheguei. Agradeço a todos os meus colegas da matemática e aos meus professores por isso. Em especial, agradeço ao professor Lucas Calixto, meu orientador, que com seu notável saber matemático e sua enorme paciência, me fez entender, passo a passo, tudo o que segue escrito neste texto, mesmo que para isso fosse preciso explicar um número enorme de vezes.

Vale lembrar e agradecer, especialmente nesta época em que há uma desvalorização das entidades de fomento às pesquisas no Brasil, a ajuda financeira que tive, nesses dois anos, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPQ), essenciais para que eu pudesse ter o mínimo de condições para concluir o mestrado e, em particular, esta dissertação.

Finalmente, há ainda um fator sorte envolvido, um acaso incomensurável, que nos dá uma certa luz e parece nos guiar quando estamos perdidos. Sendo assim, abstratamente, agradeço também a essa sorte.

Obrigado!

Epígrafe

"Todos os seres humanos nascem livres e iguais em dignidade e direitos. São dotados de razão e consciência e devem agir em relação uns aos outros com espírito de fraternidade."

Artigo 1.º *da Declaração Universal dos Direitos Humanos*

Resumo

Neste trabalho, estudaremos a álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ e certas classes de módulos sobre essa álgebra. Em particular, classificaremos todos os $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulos de peso simples e descreveremos várias subcategorias plenas da categoria de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulos de peso.

Palavras-chave: álgebra de Lie, álgebra universal envelopante, módulos de peso.

Abstract

In this manuscript, we will study the Lie algebra $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ and certain classes of modules over this Lie algebra. In particular, we classify all simple weight $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-modules and describe several full subcategories of the category of weight $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-modules.

Key words: Lie algebra, universal enveloping algebra, weight modules.

Lista de símbolos

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números inteiros positivos, $\{1, 2, \dots\}$.
$\mathbb{N}_0$	Conjunto dos números inteiros não negativos, $\{0, 1, 2, \dots\}$.
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros.
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\mathbb{R}^+$	Conjunto dos números reais positivos.
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos.
$\langle v_1, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{C}}$	$\mathbb{C}$-espaço vetorial gerado por $v_1, \dots, v_n$.
$(v_1, \dots, v_n)_R$	ideal (bilateral) de R gerado por $v_1, \dots, v_n$, onde R é um anel associativo com identidade.
$Rv_1 + \cdots + Rv_n$	R-módulo à esquerda gerado por $v_1, \dots, v_n$, onde R é um anel associativo com identidade.
$v_1R + \cdots + v_nR$	R-módulo à direita gerado por $v_1, \dots, v_n$, onde R é um anel associativo com identidade.
$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$	Conjunto de todos os operadores lineares no espaço vetorial V.
$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{a}}(V, W)$	Conjunto de todos os homomorfismo de $\mathfrak{a}$-módulos de V para W, onde $\mathfrak{a}$ é uma álgebra de Lie.
$\mathrm{Hom}_R(V, W)$	Conjunto de todos os homomorfismo de R-módulos de V para W, onde R é um anel associativo com identidade.
$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, Y)$	Conjunto de todos os morfismo de X para Y na categoria $\mathscr{C}$.
$\mathbb{C}[[x]]$	Álgebra associativa das séries de potência formal.
$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, $\mathfrak{g}$	Álgebra de Lie das matrizes 2×2 com coeficientes complexos e multiplicação dada pelo comutador de matrizes.
$\mathfrak{h}$	Subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, $\{\lambda \mathbf{h} \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$.

$\underset{K}{\cong}$	Isomorfismo entre K-espaços vetoriais, onde K é um corpo.
$\underset{\mathfrak{a}}{\cong}$	Isomorfismo entre $\mathfrak{a}$-módulos, onde $\mathfrak{a}$ é uma álgebra de Lie.
$U(\mathfrak{g})$	Álgebra universal envelopante de $\mathfrak{g}$.
c	Elemento de Casimir de $U(\mathfrak{g})$, $(\mathbf{h}+1)^2+4\mathbf{fe}$.
$\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$	Centro da álgebra $U(\mathfrak{g})$.
R-Mod	Categoria cujos objetos são R-módulos à esquerda, os morfismos são homomorfismos de R-módulos e a composição é a composição de funções usual, onde R é um anel associativo com identidade.
Mod-R	Categoria cujos objetos são R-módulos à direita, os morfismos são homomorfismos de R-módulos e a composição é a composição de funções usual, onde R é um anel associativo com identidade.
$\mathfrak{g}$-Mod	Categoria cujos objetos são $\mathfrak{g}$-módulos, os morfismos são homomorfismos de $\mathfrak{g}$-módulos e a composição é a composição de funções usual.
$U(\mathfrak{g})$-Mod	Categoria cujos objetos são $U(\mathfrak{g})$-módulos, os morfismos são homomorfismos de $U(\mathfrak{g})$-módulos e a composição é a composição de funções usual.
$\mathbb{C}[[x]]$-Mod	Categoria de todos os $\mathbb{C}[[x]]$-módulos de dimensão finita.
$\mathfrak{W}$	Subcategoria plena de $\mathfrak{g}$-Mod cujos objetos são módulos de peso.
$\mathfrak{W}^\xi$	Subcategoria plena de $\mathfrak{W}$ de todos os $\mathfrak{g}$-módulos V tais que $\mathrm{supp}(V)\subseteq\xi$.
$\overline{\mathfrak{W}}$	Subcategoria plena de $\mathfrak{W}$ cujos objetos têm espaços de peso de dimensão finita.
$\overline{\mathfrak{W}}^\xi$	Subcategoria plena de $\mathfrak{W}$ de todos os $\mathfrak{g}$-módulos V tais que $\mathrm{supp}(V)\subseteq\xi$ e que $\dim(V_\lambda)<\infty$, para todo $\lambda\in\mathrm{supp}(V)$, isto é, $\mathfrak{W}^\xi\cap\overline{\mathfrak{W}}$.
$\overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$	Subcategoria plena de $\overline{\mathfrak{W}}^\xi$ de todos os $\mathfrak{g}$-módulos, onde τ é o único autovalor de c.
$U(\mathfrak{g})^{(k)}$	$\mathbb{C}$-espaço vetorial gerado por monômios $x_1\dots x_n$ de $U(\mathfrak{g})$, onde $x_i\in\{\mathbf{e},\mathbf{f},\mathbf{h}\}$, tal que $n\leq k\in\mathbb{N}_0$.
$U(\mathfrak{g})_{2s}$	Subespaço de $U(\mathfrak{g})$ com base $\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^{s+i}$, onde $s,i,j\in\mathbb{Z}$.
$G(\mathfrak{g})_i$	$\mathbb{C}$-espaço vetorial quociente ${U(\mathfrak{g})^{(i)}}/{U(\mathfrak{g})^{(i-1)}}$, com $i\in\mathbb{N}_0$.
$G(\mathfrak{g})$	Álgebra associativa com identidade $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}_0}G(\mathfrak{g})_i$.
κ	Homomorfismo de Harish-Chandra.

$\mathrm{supp}(V)$	Suporte do módulo de peso V, isto é, o conjunto $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid V_\lambda \neq \{0\}\}$.
$M(\lambda)$	Módulo de Verma com peso máximo $\lambda \in \mathbb{C}$.
$\mathbf{V}(\xi, \tau)$	Módulo denso associado a $\tau \in \mathbb{C}$ e $\xi \in \mathbb{C}/2\mathbb{Z}$.
$\mathbf{V}(\tau)$	Família coerente correspondente a τ, $\bigoplus_{\xi \in \mathbb{C}/2\mathbb{Z}} \mathbf{V}(\xi, \tau)$.
$U^{(f)}$	Localização de Ore de $U(\mathfrak{g})$ com relação ao conjunto multiplicativo $\{f^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$.
B_z	Funtor de torção de Mathieu.
χ_V	Caracter central do $\mathfrak{g}$-módulo V.
$g_\tau(x)$	Polinômio $\tau - (x+1)^2 \in \mathbb{C}[x]$.

Conteúdo

Introdução

Grupo é uma estrutura matemática construída para capturar a ideia de simetria. Não à toa, pode-se provar que todo grupo é um grupo de simetria de algum objeto. Um grupo que possui uma estrutura de variedade diferenciável, cuja multiplicação e inversa são funções diferenciáveis, é dito um *grupo de Lie* (para mais detalhes, consulte (SM16)).

A origem do estudo de grupos de Lie remonta aos anos 1870, com os matemáticos Sophus Lie, norueguês, e Felix Klein, alemão, que buscaram desenvolver uma teoria de simetrias das equações diferenciais, da mesma forma que Évariste Galois, matemático francês, fizera com equações algébricas, a saber, classificá-las em termos da teoria de grupos (ver (Bor01)). Rapidamente, a teoria de grupos de Lie se ramificou pela matemática, sendo, por exemplo, uma importante ferramenta para o desenvolvimento do estudo das geometrias não euclidianas. Um fato ilustrativo é o Programa Erlangen de Felix Klein, projeto que buscava estudar as geometrias via grupos de simetria. O objetivo desse programa era, dado uma variedade e um grupo de transformação agindo sobre essa variedade, investigar as propriedades daquelas figuras pertencentes à variedade que eram invariantes pela ação do grupo (ver (Kle93)).

Um exemplo de grupo de Lie é $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, grupo das matrizes $n \times n$ com entradas complexas cujo determinante é igual a 1, onde a operação do grupo é a multiplicação usual de matrizes. Pode-se provar que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ é uma subvariedade do espaço afim $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ das matrizes quadradas $n \times n$ com entradas complexas. Além disso, observe que se $X = (x_{ij}), Y = (y_{ij}) \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$, então $(XY)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}y_{kj}$ é uma aplicação polinomial de grau dois nas variáveis x_{ij} e y_{ij}. Logo, a operação do grupo $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ é uma função diferenciável. Esse grupo pode ser identificado com o conjunto dos operadores lineares em $\mathbb{C}^n$ que preservam o volume dos objetos em $\mathbb{C}^n$.

Como um grupo de Lie é uma variedade diferenciável, podemos aproximar a vizinhança de qualquer elemento do grupo por um espaço euclidiano, através do espaço tangente a esse dado elemento. Esse procedimento é um tipo de linearização local do grupo de Lie e disso surge o conceito de *álgebra de Lie* (para mais informações, ver (SM10)).

Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial munido de uma multiplicação que satisfaz a antissimetria e a identidade de Jacobi, como veremos mais adiante. Para fins de simplificação, neste texto, sempre que nos referirmos a espaço vetorial, queremos dizer $\mathbb{C}$-espaço vetorial. Pode-se provar a existência de uma correspondência que permite estudar a estrutura e classificação dos grupos de Lie em termos de álgebras de Lie. Esse processo é muito efetivo, pois através dele podemos estudar grupos de Lie, que são objetos de natureza geométrica, tipicamente não linear, via as álgebras de Lie correspondentes, utilizando conceitos de álgebra linear.

O conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas complexas e traço igual a zero, $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, munido da soma usual de matrizes, da multiplicação usual por complexo e da multiplicação entre seus elementos definida como $[x,y] = xy - yx$, para todo $x, y \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, é a álgebra de Lie correspondente ao grupo de Lie $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$.

Note, do parágrafo anterior, que podemos pensar em $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ como operadores lineares em $\mathbb{C}^n$, via a multiplicação natural de matriz por vetor. Mais geralmente, essa ideia de representar uma álgebra de Lie como operadores lineares de um espaço vetorial V nos leva ao estudo de representações de álgebras de Lie. Isso nos ajuda a compreender propriedades tanto da álgebra de Lie, quanto do espaço vetorial V. Neste trabalho, estudaremos representações de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ ou, equivalentemente, $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulos.

Uma vez que a álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ é uma álgebra gerada por 2 elementos, ela nos fornece exemplos computáveis que ajudam a entender ideais fundamentais da teoria. Assim, estudar representações sobre $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ é crucial para conseguirmos visualizar diversos fenômenos que, muitas vezes, são generalizados para outras álgebras de Lie. Além disso, é sabido que as representações de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ têm um papel extremamente importante no estudo de representações de álgebras de Lie semissimples de dimensão finita, já que essas são, de certa forma, os blocos construtores de tais representações (ver (Hum78) e (Hum08)). Dentre as representações de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ existem aquelas ditas irredutíveis (ou equivalentemente, os $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulos ditos simples), que naturalmente devem ser as primeiras a serem entendidas se queremos estudar categorias mais gerais de representações de álgebras de Lie. O objetivo principal dessa dissertação é, precisamente, entender diversas classes de representações irredutíveis de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ e estudar algumas categorias de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulos. Vale ressaltar que essa é a única álgebra de Lie em que uma classificação de todos os $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulos simples é conhecida (para uma descrição completa de tal classificação, ver (Maz10)).

Este trabalho foi divido em três capítulos. No Capítulo 1, definiremos a álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ e também definiremos um $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulo; classificaremos os $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulos simples de dimensão finita; demonstraremos o Lema de Schur, que trata sobre os homomorfismos de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulos simples de dimensão finita; e demonstraremos o Teorema de Weyl, que afirma que todo $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulo indecomponível de dimensão finita é simples. Nesse capítulo também estudaremos o produto tensorial de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulos, além de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulos unitarizáveis e $\diamond$-módulos.

No Capítulo 2, construiremos a álgebra universal envelopante de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, que será denotada por $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$, com o objetivo de superar o problema de que as representações de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ não são fechadas por composição. A álgebra $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ será, por construção, uma álgebra associativa com identidade, porém não comutativa. Mostraremos diversos resultados sobre a estrutura dessa álgebra, em particular, o Teorema de PBW (Poincaré-Birkhoff-Witt), o qual fornece uma base monomial para $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$. Demonstraremos também a equivalência entre as categorias $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-Mod $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$-Mod, a qual nos permitirá usar técnicas de módulos sobre álgebras associativas para estudar representações de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

No Capítulo 3, estudaremos $\mathfrak{W}$, a categoria cujos objetos são os módulos de peso, isto é, os $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulos diagonalizáveis pela ação da álgebra de Cartan de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, e cujos morfismos são os homomorfismos de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulos. Veremos alguns exemplos de módulos de peso, tais como os módulos universais conhecidos como módulos de Verma $M(\lambda)$ associados a $\lambda \in \mathbb{C}$, e os módulos densos $\mathbf{V}(\xi, \tau)$ associados a $\tau \in \mathbb{C}$ e $\xi \in {}^{\mathbb{C}}\!/_{2\mathbb{Z}}$. Além disso, classificaremos os módulos de peso simples e trataremos de algumas subcategorias plenas de $\mathfrak{W}$, como, por exemplo, $\overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$, cuja estrutura será descrita ao final desse trabalho.

Além desses três capítulos, este texto possui ainda três apêndices. No Apêndice A, será apresentado um breve resumo sobre Decomposição de Jordan para operadores lineares em espaços vetoriais de dimensão finita. No Apêndice B, será construído o produto tensorial entre K-espaços vetoriais, com K sendo um corpo, e também será apresentado algumas de suas propriedades, como, por exemplo, a Propriedade Universal. Definiremos também álgebra tensorial de um K-espaço vetorial e produto tensorial entre módulos sobre um anel, apresentando algumas de suas propriedades. Por fim, no Apêndice C, definiremos categoria e funtores covariante e contravariante, exibindo alguns exemplos e demonstrando algumas afirmações, que serão utilizados ao longo do texto.

Capítulo 1

Módulos de dimensão finita

1.1 Álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ e $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulos

Uma **álgebra** é um espaço vetorial (lembre-se de que um espaço vetorial, nesse trabalho, significa $\mathbb{C}$-espaço vetorial) junto de uma multiplicação bilinear, quer dizer, é um espaço vetorial A junto de uma função $m : A \times A \to A$ tal que, dados $x, y, z \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos que $m(\lambda x + y, z) = \lambda m(x, z) + m(y, z)$ e $m(z, \lambda x + y) = \lambda m(z, x) + m(z, y)$.

- Se a multiplicação é associativa, isto é, se $m(x, m(y, z)) = m(m(x, y), z)$, para todo $x, y, z \in A$, então a álgebra é dita **álgebra associativa** e denotamos $m(x, y)$ por xy.

- Se existe $1 \in A$ tal que $m(x, 1) = m(1, x) = x$, para todo $x \in A$, isto é, se existe uma identidade em A, então a álgebra é dita **álgebra com identidade**.

- Se a multiplicação satisfizer as condições:

  i) *antissimetria*, isto é, dado $x \in A$, temos que $m(x, x) = 0$, e

  ii) *identidade de Jacobi*, isto é, dados $x, y, z \in A$, temos que $m(x, m(y, z)) + m(y, m(z, x)) + m(z, m(x, y)) = 0$,

  então dizemos que a álgebra é uma **álgebra de Lie** e denotamos $m(x, y)$ por $[x, y]$. Nesse caso, a multiplicação é chamada de *colchete de Lie*.

Proposição 1.1.1. Seja $\mathfrak{a}$ uma álgebra. Então:

$m(x, x) = 0$, para todo $x \in \mathfrak{a}$, se, e somente se, $m(x, y) = -m(y, x)$, para todo $x, y \in \mathfrak{a}$.

Demonstração. Suponha que $m(x, x) = 0$, para todo $x \in \mathfrak{a}$. Então, dados $x, y \in \mathfrak{a}$, temos que

$$0 = m(x + y, x + y) = m(x, x) + m(x, y) + m(y, x) + m(y, y) = m(x, y) + m(y, x).$$

Daí, $m(x, y) = -m(y, x)$. Reciprocamente, suponha $m(x, y) = -m(y, x)$, para todo $x, y \in \mathfrak{a}$. Então, dado $x \in \mathfrak{a}$, temos que $m(x, x) = -m(x, x)$. Logo $2m(x, x) = 0$, o que implica que $m(x, x) = 0$. ⊠

Considere o conjunto de todas as matrizes de tamanho 2×2 com coeficientes complexos e traço igual a zero, o qual denotamos por $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, isto é,

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C} \right\}.$$

Tal conjunto, junto da soma usual de matrizes e da multiplicação usual por um complexo, é um espaço vetorial. Sejam $x, y \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Note que xy, a multiplicação usual da matriz x pela matriz y, não necessariamente pertence a $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Contudo, das propriedades do traço de uma matriz, temos que $\operatorname{tr}(x+y) = \operatorname{tr}(x) + \operatorname{tr}(y)$ e que $\operatorname{tr}(xy) = \operatorname{tr}(yx)$, logo $\operatorname{tr}(xy - yx) = 0$, ou seja, $xy - yx \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Assim, definimos em $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ a multiplicação $xy - yx$, denotada por $[x, y]$ e chamada de **comutador de matrizes**. Observe que, dados $w, x, y, z \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, temos que

$$\begin{aligned}
[\alpha x + y, \beta z + w] &= (\alpha x + y)(\beta z + w) - (\beta z + w)(\alpha x + y) \\
&= \alpha\beta xz + \alpha xw + \beta yz + yw - \alpha\beta zx - \beta zy - \alpha wx - wy \\
&= \alpha\beta[x, z] + \alpha[x, w] + \beta[y, z] + [y, w],
\end{aligned}$$

logo o comutador de matrizes é uma multiplicação bilinear. Além disso, o comutador de matrizes satisfaz a antissimetria e a identidade de Jacobi, conforme visto abaixo.

- Antissimetria: para todo $x \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, temos que $[x, x] = xx - xx = 0$.
- Identidade de Jacobi: para todo $x, y, z \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, temos que

$$\begin{aligned}
[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] &= [x, yz - zy] + [y, [zx - xz]] + [z, xy - yx] \\
&= xyz - xzy - yzx + zyx + yzx - yxz - zxy + xzy + zxy \\
&\qquad - zyx - xyz + yxz \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ junto do comutador de matrizes é uma álgebra de Lie. Para simplificar a notação, vamos denotar $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ por $\mathfrak{g}$.

Defina

$$\mathbf{e} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{h} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observe que $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ e $\mathbf{h}$ têm traço igual a zero, logo pertencem a $\mathfrak{g}$. Observe também que eles são linearmente independente e que geram $\mathfrak{g}$, portanto $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{h}\}$ é uma base para esse espaço vetorial, chamada de *base natural*. Para os elementos dessa base, temos que

$$[\mathbf{e}, \mathbf{f}] = \mathbf{ef} - \mathbf{fe} = \mathbf{h}, \qquad [\mathbf{h}, \mathbf{e}] = \mathbf{he} - \mathbf{eh} = 2\mathbf{e} \quad \text{e} \quad [\mathbf{h}, \mathbf{f}] = \mathbf{hf} - \mathbf{fh} = -2\mathbf{f}.$$

Disso segue a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ não é associativa, pois $[\mathbf{e}, [\mathbf{f}, \mathbf{h}]] = 2[\mathbf{e}, \mathbf{f}] = 2\mathbf{h}$ e $[[\mathbf{e}, \mathbf{f}], \mathbf{h}] = [\mathbf{h}, \mathbf{h}] = 0$.

Baseando nas relações entre o comutador de matrizes e os elementos da base natural de $\mathfrak{g}$, definimos um **$\mathfrak{g}$-módulo** como sendo um espaço vetorial, V, junto de três operadores lineares nesse espaço, E, F e H, isto é, transformações lineares desse espaço nele mesmo, tais que

$$EF - FE = H, \qquad HE - EH = 2E \quad \text{e} \qquad HF - FH = -2F. \tag{1.1}$$

Aqui, a justaposição dos operadores lineares simplifica a notação de composição de funções, logo, por exemplo, EF significa $E \circ F$. Quando houver mais de um $\mathfrak{g}$-módulo no contexto, vamos acrescentar um subescrito nas operadores lineares representando o espaço vetorial a que estamos referindo, isto é, escreveremos E_V, F_V e H_V para enfatizar que estamos nos referindo ao espaço vetorial V. Dado um $\mathfrak{g}$-módulo V, observe que

$$H^2E = H(HE) = HEH + 2HE = HE(H + 2\,\mathrm{id}_V) = (EH + 2E)(H + 2\,\mathrm{id}_V) = E(H + 2\,\mathrm{id}_V)^2,$$

onde id_V é o operador linear identidade sobre V. Igualmente, podemos mostrar que $H^2F = F(H - 2\,\mathrm{id}_V)^2$. Assim, por indução, temos que vale

$$H^nE = E(H + 2\,\mathrm{id}_V)^n \quad \text{e} \quad H^nF = F(H - 2\,\mathrm{id}_V)^n, \tag{1.2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Da mesma forma, podemos mostrar que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} EH^n &= (H - 2\,\mathrm{id}_V)^n E, & FH^n &= (H + 2\,\mathrm{id}_V)^n F, \\ F^nH &= (H + 2n\,\mathrm{id}_V)F^n, & HF^n &= F^n(H - 2n\,\mathrm{id}_V), \\ E^nH &= (H - 2n\,\mathrm{id}_V)E^n, & HE^n &= E^n(H + 2n\,\mathrm{id}_V). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo. Dizemos que um subespaço $W \subseteq V$ é um **$\mathfrak{g}$-submódulo** de V, se ele for invariante pelas transformações lineares E_V, F_V e H_V, isto é, se

$$E_V(W) \subseteq W, \qquad F_V(W) \subseteq W \quad \text{e} \qquad H_V(W) \subseteq W.$$

Note que todo $\mathfrak{g}$-módulo tem pelo menos dois $\mathfrak{g}$-submódulos: o subespaço zero, dito $\mathfrak{g}$-*submódulo trivial*, e o espaço todo. Dizemos que um $\mathfrak{g}$-submódulo diferente do espaço todo é um $\mathfrak{g}$-*submódulo próprio* e um $\mathfrak{g}$-módulo que não possui $\mathfrak{g}$-submódulos próprio diferentes do $\mathfrak{g}$-submódulo trivial é chamado de $\mathfrak{g}$-*módulo simples*, ou seja, um $\mathfrak{g}$-módulo simples só possui como $\mathfrak{g}$-submódulos ele mesmo e o $\mathfrak{g}$-submódulo trivial.

Exemplo 1.1.2.

(a) Considere o espaço vetorial $\{0\}$ e sejam $E = F = H$ o único operador linear possível nesse espaço, que leva o vetor zero nele mesmo. Note que E, F e H satisfazem as equações em (1.1), logo $\{0\}$ mais esses operadores lineares é um $\mathfrak{g}$-módulo. Além disso, como $\{0\}$ não possui subespaços diferente dele, então ele é um $\mathfrak{g}$-módulo simples.

(b) Sejam o espaço vetorial $\mathbb{C}$ e $E = F = H$ o operador linear zero, que associa cada elemento de $\mathbb{C}$ o vetor zero. Logo as equações em (1.1) são satisfeitas, portanto $\mathbb{C}$ junto desses operadores lineares é um $\mathfrak{g}$-módulo, dito $\mathfrak{g}$-*módulo trivial*. Note que por $\mathbb{C}$ ser um espaço vetorial de dimensão igual a um, ele não possui subespaços diferentes dele e do subespaço zero, portanto $\mathbb{C}$ é um $\mathfrak{g}$-módulo simples.

(c) Considere o espaço vetorial $\mathbb{C}^2$ e sejam $E = F = H$ o operador linear zero. Então, pelo mesmo motivo do item (b), esse espaço mais esses operadores lineares é um $\mathfrak{g}$-módulo. Observe que qualquer subespaço de $\mathbb{C}^2$ é invariante por E, F e H, já que todo subespaço contém o vetor zero. Dessa forma, $\mathbb{C}^2$ junto dos três operadores lineares zero é um $\mathfrak{g}$-módulo que não é simples.

(d) Considere o espaço vetorial $\mathbb{C}^2$. Fixada uma base para $\mathbb{C}^2$, cada operador linear nesse espaço é representada por uma matriz 2×2, com coeficientes complexos. Dessa forma, sejam E, F e H os operador lineares representados pelas matrizes $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ e $\mathbf{h}$, respectivamente. Uma vez que a matriz correspondente a composição de dois operadores lineares é o produto das matrizes que representam os operadores, temos que as equações em (1.1) são satisfeitas, o que implica que $\mathbb{C}^2$ junto de E, F e H é um $\mathfrak{g}$-módulo, dito $\mathfrak{g}$-*módulo natural*. Seja W um $\mathfrak{g}$-submódulo de $\mathbb{C}^2$ diferente do $\mathfrak{g}$-submódulo trivial e seja $w = (\alpha, \beta) \in W$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, onde $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$. Então $E(w) = (\beta, 0) \in W$ e $F(w) = (0, \alpha) \in W$. Assim, se $\alpha \neq 0$, então $w, F(w) \in W$ são linearmente independentes, logo $W = \mathbb{C}^2$. Se $\beta \neq 0$, então $w, E(w) \in W$ são linearmente independentes. Portanto, $\mathbb{C}^2$ junto desses operadores é um $\mathfrak{g}$-módulo simples.

(e) Considere o espaço vetorial $\mathfrak{g}$. Pela bilinearidade do comutador de matrizes, temos que $[x, -]$ é um operador linear, para todo $x \in \mathfrak{g}$. Assim, defina os operadores lineares $E := [\mathbf{e}, -]$, $F := [\mathbf{f}, -]$ e $H := [\mathbf{h}, -]$. Seja $x \in \mathfrak{g}$. Então, pela identidade de Jacobi e pela antissimetria do comutador de matriz, temos que

$$0 = [\mathbf{e}, [\mathbf{f}, x]] + [\mathbf{f}, [x, \mathbf{e}]] + [x, [\mathbf{e}, \mathbf{f}]] = [\mathbf{e}, [\mathbf{f}, x]] - [\mathbf{f}, [\mathbf{e}, x]] - [\mathbf{h}, x]$$

ou seja, $EF - FE = H$. Analogamente, mostra-se que as outras equações em (1.1) são satisfeitas. Logo, $\mathfrak{g}$ junto de E, F e H é um $\mathfrak{g}$-módulo, dito $\mathfrak{g}$-*módulo adjunto*. Seja W um $\mathfrak{g}$-submódulo de $\mathfrak{g}$ diferente do $\mathfrak{g}$-submódulo trivial e seja $x \in W$. Como $\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{h}$ é a base natural de $\mathfrak{g}$, temos que existem $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$, com ao menos um deles diferente de zero, tais que $x = \lambda_1 \mathbf{e} + \lambda_2 \mathbf{f} + \lambda_3 \mathbf{h}$. Suponha, sem perda de generalidade, que $\lambda_1 \neq 0$. Então $F(F(x)) = -2\lambda_1 \mathbf{f}$, logo $\mathbf{f} \in W$. Assim, $E(\mathbf{f}) = \mathbf{h} \in W$ e, consequentemente, $E(\mathbf{h}) = -2\mathbf{e}$, ou seja, $\mathbf{e} \in W$. Dessa forma, $W = \mathfrak{g}$, portanto $\mathfrak{g}$ é um $\mathfrak{g}$-módulo simples.

(f) Sejam V um $\mathfrak{g}$-módulo e W um $\mathfrak{g}$-submódulo de V. Considerando a estrutura de espaço vetorial, temos que V/W é um espaço vetorial. Sejam $v_1 + W = v_2 + W$ elementos de V/W. Então, $v_1 - v_2 \in W$. Por W ser um $\mathfrak{g}$-submódulo de V, temos que $E(v_1 - v_2) \in W$, ou seja, $E_V(v_1) + W = E_V(v_2) + W$. Desse fato e da linearidade de E_V, temos que $E_{V/W} : V/W \to V/W$, $v + W \mapsto E(v) + W$ é um operador linear bem definido. Utilizando o mesmo raciocínio, podemos definir $F_{V/W}$ e $H_{V/W}$. Dessa forma, como as equações em (1.1) são satisfeitas por E_V, F_V e H_V, então elas também serão satisfeitas por $E_{V/W}$, $F_{V/W}$ e $H_{V/W}$. Portanto, V/W junto desse operadores é um $\mathfrak{g}$-módulo, dito $\mathfrak{g}$-*módulo quociente* de V por W.

(g) Se V é um espaço vetorial, então denotamos por $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ o conjunto de todos os operadores lineares nesse espaço. Tal conjunto, munido da soma usual de operadores lineares e da multiplicação usual por um complexo, é um espaço vetorial. Além disso, a composição de operadores lineares é um operador linear, isto é, se $f, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$, então $fg \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Uma vez que a composição é associativa, então $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ junto da composição é uma álgebra associativa. Podemos definir nesse conjunto uma estrutura de álgebra de Lie, fazendo a multiplicação ser $[f, g] := fg - gf$. Tal multiplicação é chamada de *comutador com respeito a composição*. Observe que a antissimetria segue diretamente da definição do comutador com respeito a composição e a prova de que satisfaz a identidade de Jacobi é exatamente igual a prova feita para o comutador de matrizes. Dizemos que $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ junto do comutador com respeito a composição é a **álgebra de Lie subjacente** a álgebra associativa $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ junto da composição e a denotamos por $\mathrm{gl}(V)$. Essa construção, na verdade, vale para qualquer álgebra associativa, isto é, se A é uma álgebra associativa, onde, dados $x, y \in A$, xy é a multiplicação em A, então denotamos por $A^{(-)}$ a álgebra de Lie subjacente a A, cuja multiplicação é $[x, y] = xy - yx$, para todo $x, y \in A$. □

Um **homomorfismo de álgebras de Lie** é uma transformação linear que preserva o colchete de Lie, isto é, se $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ são álgebras de Lie, então $\varphi : \mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ é um homomorfismo de álgebras Lie, se $\varphi(\lambda x + y) = \lambda\varphi(x) + \varphi(y)$ e se $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$, para todo $x, y \in \mathfrak{a}$ e para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Proposição 1.1.3.

(a) Se V é um $\mathfrak{g}$-módulo com operadores E, F e H, então a transformação linear $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(V)$ determinada por $\mathbf{e} \mapsto E$, $\mathbf{f} \mapsto F$ e $\mathbf{h} \mapsto H$ é um homomorfismo de álgebras de Lie.

(b) Se $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(V)$ é um homomorfismo de álgebras de Lie, então os operadores $E := \rho(\mathbf{e})$, $F := \rho(\mathbf{f})$ e $H := \rho(\mathbf{h})$ definem uma estrutura de $\mathfrak{g}$-módulo em V.

Demonstração.

(a) Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo. Como ρ é uma transformação linear e $[\cdot, \cdot]$ é multiplicação bilinear, então, para mostrarmos que $\rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)]$, para todo $x, y \in \mathfrak{g}$, basta mostrarmos que essa igualdade vale para os elementos da base $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{h}\}$. Além disso, pela antissimetria, é suficiente provar a igualdade apenas para os seguintes comutadores de matrizes: $[\mathbf{e}, \mathbf{f}]$, $[\mathbf{h}, \mathbf{e}]$ $[\mathbf{h}, \mathbf{f}]$. Assim, para o primeiro caso, temos que

$$\rho([\mathbf{e}, \mathbf{f}]) = \rho(\mathbf{h}) = H = EF - FE = \rho(\mathbf{e})\rho(\mathbf{f}) - \rho(\mathbf{f})\rho(\mathbf{e}) = [\rho(\mathbf{e}), \rho(\mathbf{f})].$$

Os outros dois são análogos. Logo, ρ é um homomorfismo de álgebras de Lie.

(b) Note que,

$$EF - FE = \rho(\mathbf{e})\rho(\mathbf{f}) - \rho(\mathbf{f})\rho(\mathbf{e}) = [\rho(\mathbf{e}), \rho(\mathbf{f})] = \rho([\mathbf{e}, \mathbf{f}]) = \rho(\mathbf{h}) = H.$$

De modo similar, prova-se que vale as outras equações em (1.1). Portanto, V é um $\mathfrak{g}$-módulo. ⊠

Um homomorfismo de álgebras de Lie $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(V)$ é dito **representação de $\mathfrak{g}$ em V**. Se V é um espaço vetorial e $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(V)$ é uma representação de $\mathfrak{g}$ em V, então, dado $x \in \mathfrak{g}$ e $v \in V$, dizemos que $\rho(x)(v)$ é a **ação** de x sobre v, fato também denotado por $x \cdot v$

Sejam V e W $\mathfrak{g}$-módulos. Dizemos que $\varphi : V \to W$ é um **homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos**, se φ é uma transformação linear tal que troca a ação de **e**, **f** e **h** sobre V e W no seguinte sentido:

$$\varphi E_V = E_W \varphi, \qquad \varphi F_V = F_W \varphi \quad \text{e} \qquad \varphi H_V = H_W \varphi, \tag{1.4}$$

isto é, tal que comuta o seguinte diagrama, para todo $X \in \{E, F, H\}$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "X_V"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & V \arrow[d, "\varphi"] \\ W \arrow[r, "X_W"'] & W \end{tikzcd}$$

Observe que usando a equivalência entre $\mathfrak{g}$-módulos e representações (Proposição 1.1.3), temos que $\varphi : V \to W$ é um homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos, se φ é uma transformação linear e se $\varphi\rho_V(x) = \rho_W(x)\varphi$, para todo $x \in \mathfrak{g}$, onde ρ_V é a representação de $\mathfrak{g}$ em V e ρ_W é a representação de $\mathfrak{g}$ em W. Denotamos por $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$ o conjunto de todos os homomorfismos de $\mathfrak{g}$-módulos de V para W.

Sejam V e W $\mathfrak{g}$-módulos. Observe que a transformação linear zero de V para W satisfaz as equações em (1.4). Portanto, essa transformação linear é um homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos, chamado de *homomorfismo nulo* (ou *homomorfismo zero*). Assim, temos que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W) \neq \emptyset$, para todo V e W $\mathfrak{g}$-módulos. Note também que, para qualquer $\mathfrak{g}$-módulo V, o operador linear identidade sobre V, id_V, satisfaz as equações em (1.4), já que, para todo $X \in \{E, F, H\}$, temos que, dado $v \in V$, $\mathrm{id}_V(X_V(v)) = X_V(v) = X_V(\mathrm{id}_V(v))$. Portanto, $\mathrm{id}_V \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V)$. Tal homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos é chamado de *homomorfismo identidade*. Por fim, veja também que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$ é um espaço vetorial, para qualquer V e W $\mathfrak{g}$-módulos, pois se $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então $\varphi + \psi$ e $\lambda\varphi$ satisfazem as equações em (1.4).

Um homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos injetivo é chamado de *monomorfismo*, um homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos sobrejetivo é chamado de *epimorfismo* e homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos bijetivo é chamado de *isomorfismo*. Se $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$ é um isomorfismo, então dizemos que V é isomorfo a W, fato denotado por $V \underset{\mathfrak{g}}{\cong} W$. Esse símbolo com o subescrito $\mathbb{C}$ denota isomorfismo entre espaços vetoriais, ou seja, escreveremos $V \underset{\mathbb{C}}{\cong} W$ para dizer que V e W são isomorfismos como espaços vetoriais.

Proposição 1.1.4. Sejam V e W $\mathfrak{g}$-módulos e $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$. Então

(a) o núcleo da φ, $\ker(\varphi)$, é um $\mathfrak{g}$-submódulo de V;

(b) a imagem da φ, $\mathrm{im}(\varphi)$, é um $\mathfrak{g}$-submódulo de W.

Demonstração.

(a) Para mostrarmos que $\ker(\varphi)$ é um $\mathfrak{g}$-submódulo de V, temos que mostrar que, para todo $X \in \{E, F, H\}$, vale a inclusão $X_V(\ker(\varphi)) \subseteq \ker(\varphi)$. Assim, seja $v \in X_V(\ker(\varphi))$. Então, $v =$

$X_V(v')$, para algum $v' \in \ker(\varphi)$. Uma vez que φ é um homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulo, então $\varphi(v) = \varphi(X_V(v')) = X_W(\varphi(v')) = 0$, já que $\varphi(v') = 0$. Portanto, $v \in \ker(\varphi)$.

(b) Seguindo o raciocínio do item (a), seja $w \in X_W(\mathrm{im}(\varphi))$. Então $w = X_W(w')$, para algum $w' \in \mathrm{im}(\varphi)$. Por $w' \in \mathrm{im}(\varphi)$, temos que $w' = \varphi(v)$, par algum $v \in V$. Daí, $w = X_W(\varphi(v)) = \varphi(X_V(v))$, ou seja, $w \in \mathrm{im}(\varphi)$. ⊠

Observação 1.1.5. Sejam V um espaço vetorial, $\mathfrak{a}$ uma álgebra de Lie e $\rho_V : \mathfrak{a} \to \mathrm{gl}(V)$ um homomorfismo de álgebras de Lie. Dizemos que V junto de ρ_V é um **$\mathfrak{a}$-módulo**. Se W é um subespaço de V tal que $\rho_V(W) \subseteq W$, então W é chamado de **$\mathfrak{a}$-submódulo** de V. Dizemos também que uma transformação linear $\varphi : V \to W$, onde V e W são $\mathfrak{a}$-módulos, é um **homomorfismo de $\mathfrak{a}$-módulos**, se $\varphi(\rho_V(x)) = \rho_W(\varphi(x))$, para todo $x \in \mathfrak{a}$. As definições de *monomorfismo*, *epimorfismo* e *isomorfismos* para homomorfismos de $\mathfrak{a}$-módulos são as mesmas definições feitas para para homomorfismos de $\mathfrak{g}$-módulos. Denotamos por $V \underset{\mathfrak{a}}{\cong} W$, quando existir $\varphi : V \to W$ um isomorfismo de $\mathfrak{a}$-módulos. Observe que a Proposição 1.1.4 é verdadeira para qualquer álgebra de Lie $\mathfrak{a}$, onde $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{a}}(V, W)$ denota o conjunto de todos os homomorfismos de $\mathfrak{a}$-módulos de V para W. □

1.2 Classificação de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulos simples de dimensão finita

Seja $V \neq \{0\}$ um $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita. Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, defina

$$V(\lambda) := \{v \in V \mid \exists\, k \in \mathbb{N} \text{ tal que } (H - \lambda\,\mathrm{id}_V)^k(v) = 0\} \quad \text{e} \quad V_\lambda := \{v \in V \mid H(v) = \lambda v\}.$$

Pela Decomposição de Jordan (ver apêndice A), temos que $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} V(\lambda)$. Observe que $\bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} V_\lambda \subseteq V$ é um subespaço de V diferente de zero, pois, por exemplo, o último vetor da base de Jordan de H é um autovetor de H.

Os conjuntos $V(\lambda)$ e V_λ não são $\mathfrak{g}$-submódulos de V, porém as ações de E, F e H, quando restritas a eles, se comportam segundo o Lema 1.2.1.

Lema 1.2.1. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$. Então:

(a) $E(V(\lambda)) \subseteq V(\lambda + 2)$ e $E(V_\lambda) \subseteq V_{\lambda+2}$;

(b) $F(V(\lambda)) \subseteq V(\lambda - 2)$ e $F(V_\lambda) \subseteq V_{\lambda-2}$;

(c) $H(V(\lambda)) \subseteq V(\lambda)$ e $H(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$.

Demonstração.

(a) Seja $v \in V(\lambda)$. Então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(H - \lambda\,\mathrm{id}_V)^k(v) = 0$. Vamos mostrar que $\big(H - (\lambda + 2)\,\mathrm{id}_V\big)^k\big(E(v)\big) = 0$. Observe que

$$(H - (\lambda + 2)\,\mathrm{id}_V)^k E = \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} H^i \big(-(\lambda+2)\,\mathrm{id}_V\big)^{k-i}\right) E = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (H^i E)\big(-(\lambda+2)\,\mathrm{id}_V\big)^{k-i}.$$

Das equações em (1.2), temos que

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(H^iE)\big(-(\lambda+2)\,\mathrm{id}_V\big)^{k-i}=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\big(E(H+2\,\mathrm{id}_V)^i\big)\big(-(\lambda+2)\,\mathrm{id}_V\big)^{k-i}=$$
$$=E(H+2\,\mathrm{id}_V-(\lambda+2)\,\mathrm{id}_V)^k=E(H-\lambda\,\mathrm{id}_V)^k.$$

Portanto, $\big(H-(\lambda+2)\,\mathrm{id}_V\big)^k\big(E(v)\big)=E\big((H-\lambda\,\mathrm{id}_V)^k(v)\big)=0$, logo $E(V(\lambda))\subseteq V(\lambda+2)$. Agora, seja $v\in V_\lambda$. Uma vez que $HE=E(H+2)$, então $H(E(v))=(E(H+2))(v)=(\lambda+2)E(v)$, ou seja, $E(V_\lambda)\subseteq V_{\lambda+2}$.

(b) A demonstração é análoga à demonstração do item (a).

(c) Por $\big(H-\lambda\,\mathrm{id}_V\big)^k\big(H(v)\big)=H(H-\lambda\,\mathrm{id}_V)^k(v)$, então $H(V(\lambda))\subseteq V(\lambda)$ e pela definição de V_λ, temos que $H(V_\lambda)\subseteq V_\lambda$. ⊠

O Lema 1.2.1 nos diz que $\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} V_\lambda$ é um $\mathfrak{g}$-submódulo de V e, uma vez que ele é diferente de zero, então, se V é um $\mathfrak{g}$-módulo simples, temos que $V=\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} V_\lambda$.

Denote por W o $\mathfrak{g}$-submódulo $\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} V_\lambda\subseteq V$. Como V tem dimensão finita, então existem somente finitos $\lambda\in\mathbb{C}$ tais que $V_\lambda\neq\{0\}$. Logo, podemos fixar $\mu\in\mathbb{C}$ tal que: $V_\mu\neq\{0\}$ e $V_{\mu+2k}=\{0\}$, para todo $k\in\mathbb{N}$. Seja $w\in V_\mu$. Então, pelo Lema 1.2.1, $F^i(w)\in V_{\mu-2i}$, para todo $i\in\mathbb{N}$. Novamente, por V ter dimensão finita, então existe algum $k\in\mathbb{N}$ tal que $F^k(w)=0$. Defina n como sendo o menor inteiro positivo tal que $F^n(w)=0$ e defina também $w_0:=w$ e $w_i:=F^i(w)$, para todo $i\in\{1,2,\dots,n-1\}$. Uma vez que $W=\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} V_\lambda$ e $w_i\in V_{\mu-2i}$, com $i=0,1,\dots,n-1$, então $w_0,w_1,\dots,w_{n-1}$ são linearmente independentes.

Lema 1.2.2.

(a) $E(w_0)=0$ e $E(w_i)=i(\mu-i+1)w_{i-1}$, para cada $i\in\{1,2,\dots,n-1\}$.

(b) $\mu=n-1$.

Demonstração.

(a) Como $E(V_\lambda)\subseteq V_{\lambda+2}$, para todo $\lambda\in\mathbb{C}$, e $w_0\in V_\mu$ que, por definição, é tal que $V_{\mu+2k}=\{0\}$, para todo $k\in\mathbb{N}$, então $E(w_0)=0$. Para mostrar a outra igualdade, usaremos indução sobre i. Para $i=1$, temos que $E(w_1)=E(F(w_0))$. Lembre-se de que $EF-FE=H$. Assim, $E(w_1)=F(E(w_0))+H(w_0)=0+\mu w_0=1(\mu-1+1)w_{1-1}$. Agora, suponha $i>1$. Então $E(w_i)=E(F(w_{i-1}))=F(E(w_{i-1}))+H(w_{i-1})$. Por hipótese de indução, $E(w_{i-1})=(i-1)(\mu-i+2)w_{i-2}$. Além disso, como $w_{i-1}\in V_{\mu-2(i-1)}$, então $H(w_{i-1})=(\mu-2(i-1))w_{i-1}$. Portanto, $E(w_i)=(i-1)(\mu-i+2)F(w_{i-2})+(\mu-2(i-1))w_{i-1}=i(\mu-i+1)w_{i-1}$.

(b) Pelo argumento indutivo do item (a) temos que $E(F(w_{n-1}))=n(\mu-n+1)w_{n-1}$. Porém, $F(w_{n-1})=F^n(w_0)=0$. Logo, $n(\mu-n+1)=0$ e, consequentemente, $\mu=n-1$. ⊠

Seja $N := \langle w_0, \dots, w_{n-1} \rangle_{\mathbb{C}}$ o subespaço de V gerado pelos vetores $w_0, \dots, w_{n-1}$. Pela definição de cada w_i, temos que tal subespaço é invariante pela ação de F e H. Pelo Lema 1.2.2, temos que esse subespaço também é invariante pela ação de E, portanto ele é um $\mathfrak{g}$-submódulo de V. Em particular, se V é simples, então $V = N$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $\mathbf{V}^{(n)}$ como sendo o espaço vetorial de base $\{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ e sejam E, F, H operadores linear nesse espaço tais que

- $H(v_i) = (n-1-2i)v_i$, para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$;

- $F(v_{n-1}) = 0$ e $F(v_i) = v_{i+1}$, para todo $i \in \{0, \dots, n-2\}$;

- $E(v_0) = 0$ e $E(v_i) = a_i v_{i-1}$, para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$, onde $a_i = i(n-i)$.

O seguinte diagrama apresenta de maneira visual como os operadores E, F e H agem na base $\{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ de $\mathbf{V}^{(n)}$.

$$\begin{tikzcd}
{} & v_{n-1} \arrow[l, Rightarrow, "0"] \arrow[loop above, dotted, "-n+1"] \arrow[r, bend left, "a_{n-1}"] & v_{n-2} \arrow[l, Rightarrow, "1"] \arrow[loop above, dotted, "-n+3"] \arrow[r, bend left, "a_{n-2}"] & v_{n-3} \arrow[l, Rightarrow, "1"] \arrow[loop above, dotted, "-n+5"] \arrow[r, bend left, "a_{n-3}"] & \cdots \arrow[l, Rightarrow, "1"] \arrow[r, bend left, "a_3"] & v_2 \arrow[l, Rightarrow, "1"] \arrow[loop above, dotted, "n-5"] \arrow[r, bend left, "a_2"] & v_1 \arrow[l, Rightarrow, "1"] \arrow[loop above, dotted, "n-3"] \arrow[r, bend left, "a_1"] & v_0 \arrow[l, Rightarrow, "1"] \arrow[loop above, dotted, "n-1"] \arrow[r, bend left, "0"] & {}
\end{tikzcd} \tag{1.5}$$

onde as setas duplas representam a ação de F, as setas usuais representam a ação de E e as setas pontilhadas representam a ação de H. Observe que para $i \in \{1, \dots, n-2\}$, temos que

$$\begin{aligned}
&E(F(v_i)) - F(E(v_i)) = a_{i+1}v_i - a_i v_i = \big((i+1)(n-i-1) - i(n-i)\big)v_i = (n-1-2i)v_i = H(v_i),\\
&H(E(v_i)) - E(H(v_i)) = a_i(n+1-2i)v_{i-1} - a_i(n-1-2i)v_{i-1} = 2a_i v_{i-1} = 2E(v_i),\\
&H(F(v_i)) - F(H(v_i)) = (n-3-2i)v_{i+1} - (n-1-2i)v_{i+1} = -2v_{i+1} = -2F(v_i).
\end{aligned}$$

Procedendo da mesma forma, temos que essas relações também se verificam para v_0 e v_{n-1}. Portanto, com esses operadores lineares, $\mathbf{V}^{(n)}$ é um $\mathfrak{g}$-módulo.

Teorema 1.2.3 (Classificação de $\mathfrak{g}$-módulos simples de dimensão finita)**.**

(a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{V}^{(n)}$ é um $\mathfrak{g}$-módulo simples de dimensão igual a n.

(b) Dados $n, m \in \mathbb{N}$, temos que $\mathbf{V}^{(n)} \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathbf{V}^{(m)}$, se, e somente se, $n = m$.

(c) Se V é um $\mathfrak{g}$-módulo simples de dimensão igual a n, então $V \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathbf{V}^{(n)}$.

Demonstração.

(a) Sejam $M \neq \{0\}$ um $\mathfrak{g}$-submódulo de $\mathbf{V}^{(n)}$ e $v \in M \setminus \{0\}$. Como $\{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ é base de $\mathbf{V}^{(n)}$, então existem $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{C}$, com pelo menos um não nulo, tal que $v = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i v_i$. Sem perda de generalidade, suponha que $\lambda_{n-1} \neq 0$. Então $E^{n-1}(v) = \lambda_{n-1} a_{n-1} \dots a_1 v_0 \neq 0$. Logo, $v_0 \in M$. Aplicando F em v_0, concluímos que $v_1, \dots, v_{n-1} \in M$, ou seja, $M = \mathbf{V}^{(n)}$.

(b) Sabemos que $\dim(\mathbf{V}^{(n)}) = n$ e $\dim(\mathbf{V}^{(m)}) = m$ e sabemos também que dois espaços vetoriais isomorfos têm a mesma dimensão, logo, se $\mathbf{V}^{(n)} \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathbf{V}^{(m)}$, então $\mathbf{V}^{(n)} \underset{\mathbb{C}}{\cong} \mathbf{V}^{(m)}$, portanto, $n = m$. A recíproca é direta, já que $\mathbf{V}^{(n)} \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathbf{V}^{(n)}$.

(c) Vimos que se V é um $\mathfrak{g}$-módulo simples de dimensão igual a n, então $V = \langle w_0, \ldots, w_{n-1} \rangle_{\mathbb{C}}$. Observe que E_V, F_V e H_V agem em w_i da mesma forma que $E_{\mathbf{V}^{(n)}}$, $F_{\mathbf{V}^{(n)}}$ e $H_{\mathbf{V}^{(n)}}$ agem em v_i, portanto a transformação linear que leva w_i em v_i é bijetora e satisfaz as equações (1.4), logo $V \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathbf{V}^{(n)}$. ⊠

Do Teorema 1.2.3 e da discussão feita antes dele, podemos concluir que todo $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita admite um $\mathfrak{g}$-submódulo simples, pois se V é um $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita, podemos a partir de $\bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} V_\lambda \subseteq V$, determinar $N = \langle w_0, \ldots, w_{n-1} \rangle_{\mathbb{C}}$, que pela construção é isomorfo, como $\mathfrak{g}$-módulo, a $\mathbf{V}^{(n)}$. Uma outra maneira de se determinar um $\mathfrak{g}$-submódulo em um $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita é encontrar um $v \in V \setminus \{0\}$ tal que $E(v) = 0$ e $H(v) = (n-1)v$, conforme a Proposição 1.2.4.

Proposição 1.2.4. Sejam V um $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita e $v \in V \setminus \{0\}$ tal que $E(v) = 0$ e $H(v) = (n-1)v$. Então $\langle v, F(v), \ldots, F^{n-1}(v) \rangle_{\mathbb{C}} \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathbf{V}^{(n)}$.

Demonstração. Como $v \neq 0$ e $H(v) = (n-1)v$, temos que v é um autovetor de H com autovalor $n-1$. Logo, $v \in V_{n-1}$. Aplicando F sucessivamente, por V ter dimensão finita, encontramos um $k \in \mathbb{N}$ tal que $F^{k-1}(v) \neq 0$, onde $F^i(v) \in V_{n-1-2i}$, e $F^j(v) = 0$, para todo $j \geq k$. Pelo argumento apresentado no Lema 1.2.2, temos que $n-1 = k-1$. Logo, $n = k$. Assim, $v, F(v), \ldots, F^{n-1}(v)$ são linearmente independentes e as ações de H_V e F_V neles coincide com a ação de $H_{\mathbf{V}^{(n)}}$ e $F_{\mathbf{V}^{(n)}}$ nos elementos da base de $\mathbf{V}^{(n)}$. Da mesma maneira como se provou o Lema 1.2.2, pode-se mostrar que a ação de E_V sobre $v, F(v), \ldots, F^{n-1}(v)$ coincide com a ação de $E_{\mathbf{V}^{(n)}}$ nos elementos da base de $\mathbf{V}^{(n)}$. Portanto, $\langle v, F(v), \ldots, F^{n-1}(v) \rangle_{\mathbb{C}} \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathbf{V}^{(n)}$. ⊠

Vamos, agora, descrever os homomorfismos de $\mathfrak{g}$-módulos simples.

Teorema 1.2.5 (Lema de Schur)**.** Sejam V e W $\mathfrak{g}$-módulos simples.

(a) Se $\varphi : V \to W$ é um homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos diferente do homomorfismo nulo, então φ é um isomorfismo.

(b) Se V e W têm dimensão finita, então $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W) \underset{\mathbb{C}}{\cong} \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{se } V \underset{\mathfrak{g}}{\cong} W; \\ \{0\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Demonstração.

(a) Seja $\varphi \neq 0$ um homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos de V para W. Pela Proposição 1.1.4, temos que $\ker(\varphi)$ é um $\mathfrak{g}$-submódulo de V e $\operatorname{im}(\varphi)$ é um $\mathfrak{g}$-submódulo de W. Supondo que $\ker(\varphi) \neq \{0\}$, então, por V ser simples, temos que $V = \ker(\varphi)$, o que contradiz o fato de $\varphi \neq 0$. Logo $\ker(\varphi) = \{0\}$. Agora, note que $\operatorname{im}(\varphi) \neq \{0\}$, pois $\varphi \neq 0$. Como W é simples, então $W = \operatorname{im}(\varphi)$. Daí, φ é injetiva e sobrejetiva, ou seja, φ é um isomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos.

(b) Note que a contrapositiva do item (a) nos diz que se $V \underset{\mathfrak{g}}{\ncong} W$, então $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W) = \{0\}$. Suponha, agora, que $V \underset{\mathfrak{g}}{\cong} W$ e seja $\psi \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$ um isomorfismo. Então $\phi : \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V) \to \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$, $f \mapsto \psi f$ é um isomorfismo entre espaços vetoriais. Assim, basta mostrarmos que $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V) = \langle \mathrm{id}_V \rangle_{\mathbb{C}}$ para concluirmos o teorema, já que $\langle \mathrm{id}_V \rangle_{\mathbb{C}} \underset{\mathbb{C}}{\cong} \mathbb{C}$. Se $\varphi \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V)$ é igual a zero, então $\varphi = 0\,\mathrm{id}_V$. Suponha que $\varphi \neq 0$. Então, como V é um espaço vetorial e $\mathbb{C}$ é algebricamente fechado, φ possui pelo menos um autovalor. Pelo item (a), φ é bijetiva, logo não possui autovalor igual a zero. Dessa forma, seja $\lambda \in \mathbb{C}$ um autovalor de φ diferente de zero. Uma vez que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V,V)$ é um espaço vetorial e $\varphi, \mathrm{id}_V \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V,V)$, então $\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V,V)$. Contudo, se $v \in V$ é um autovetor de φ associado a λ, então $v \neq 0$ e $v \in \ker(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V)$, logo $\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V$ não é um isomorfismo e, de novo, pela contrapositiva do item (a), $\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V = 0$. Portanto, $\varphi = \lambda\,\mathrm{id}_V$. ⊠

1.3 Semisimplicidade de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulos de dimensão finita

Sejam V e W $\mathfrak{g}$-módulos. Lembre-se de que $V \oplus W = \{(v,w) \mid v \in V, w \in W\}$ é um espaço vetorial – quando for mais conveniente, escrevemos $V \oplus W = \{v + w \mid v \in V, w \in W\}$. Assim, dado $(v,w) \in V \oplus W$, defina as funções

$$\begin{aligned} E(v,w) &= (E_V(v), E_W(w)) \\ F(v,w) &= (F_V(v), F_W(w)) \\ H(v,w) &= (H_V(v), H_W(w)) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Como E_V, F_V, H_V são operadores lineares em V, bem como E_W, F_W, H_W são operadores lineares em W, temos que E, F e H são operadores lineares em $V \oplus W$. Veja que, para todo $(v,w) \in V \oplus W$,

$$\begin{aligned} (EF - FE)(v,w) &= E(F(v,w)) - F(E(v,w)) = E(F_V(v), F_W(w)) - F(E_V(v), E_W(w)) = \\ &= \big(E_V(F_V(v)) - F_V(E_V(v)), E_W(F_W(w)) - F_W(E_W(w))\big) = (H_V(v), H_W(w)) = \\ &= H(v,w). \end{aligned}$$

Logo, $EF - FE = H$. Analogamente, prova-se que valem as outras equações em (1.1). Portanto, $V \oplus W$ junto desses operadores é um $\mathfrak{g}$-módulo. Podemos estender essa definição para somas diretas com uma quantidade qualquer de $\mathfrak{g}$-módulos, o qual chamamos de *soma direta de* $\mathfrak{g}$*-módulos*. Denotaremos a soma direta de V com ele mesmo n vezes, $V \oplus \cdots \oplus V$, por nV.

Lema 1.3.1. Se $V \underset{\mathfrak{g}}{\cong} V'$ e $W \underset{\mathfrak{g}}{\cong} W'$, então $V \oplus W \underset{\mathfrak{g}}{\cong} V' \oplus W'$.

Demonstração. Sejam $f : V \to V'$ e $g : W \to W'$ isomorfismos de $\mathfrak{g}$-módulos. Então, para $X \in \{E, F, H\}$, temos que $X'_V f = f X_V$ e $X'_W g = g X_W$. Defina $h : V \oplus W \to V' \oplus W'$, $(v,w) \mapsto (f(v), g(w))$. Por f e g serem transformações lineares, então h é transformação linear. Além disso, $X_{V' \oplus W'}(h(v,w)) = (X'_V(f(v)), X'_W(g(w))) = h(X_{V \oplus W}(v,w))$, ou seja, $X_{V' \oplus W'} h = h X_{V \oplus W}$. ⊠

Um $\mathfrak{g}$-módulo V é chamado de **decomponível**, se existem $\mathfrak{g}$-módulos não nulos V_1 e V_2 tais que $V \underset{\mathfrak{g}}{\cong} V_1 \oplus V_2$. Se um $\mathfrak{g}$-módulo não é decomponível, então ele dito **indecomponível**. Se um $\mathfrak{g}$-módulo é isomorfo a soma direta de $\mathfrak{g}$-módulos simples, então ele é dito **semissimples**.

Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo simples. Suponha, por absurdo, que V é decomponível. Então podemos escrever $V \underset{\mathfrak{g}}{\cong} V_1 \oplus V_2$, com V_1 e V_2 $\mathfrak{g}$-módulos não nulos. Assim, existe um $\mathfrak{g}$-submódulo próprio de V isomorfo a V_1. Isso contradiz o fato de V ser simples. Portanto, se V é simples, então ele é indecomponível. A recíproca desse fato não é verdadeira (conforme veremos em exemplos mais adiante), porém ela passa a valer se acrescentarmos a hipótese de dimensão finita, conforme será provado no Teorema 1.3.4, conhecido como Teorema de Weyl. Antes de provar esse teorema, vamos a algumas observações.

Para qualquer $\mathfrak{g}$-módulo V, defina o operador linear em V, dito **operador Casimir**, como sendo $C := (H + \mathrm{id}_V)^2 + 4FE$. Quando houver a necessidade de enfatizar em qual espaço vetorial estamos, acrescentaremos essa informação como subescrito, isto é, escreveremos C_V. Sabendo que $EF - FE = H$, então podemos escrever C também das seguintes maneiras:

$$C = (H - \mathrm{id}_V)^2 + 4EF \quad \text{e} \quad C = H^2 + \mathrm{id}_V + 2EF + 2FE \tag{1.7}$$

Observe que C comuta com os operadores lineares E, F e H, conforme o Lema 1.3.2.

Lema 1.3.2. $HC = CH$, $EC = CE$ e $FC = CF$.

Demonstração. Vamos mostrar que $HC = CH$.

$$\begin{aligned} HC &= H((H + \mathrm{id}_V)^2 + 4FE) = H(H + \mathrm{id}_V)^2 + 4HFE \overset{(1.2)}{=} (H + \mathrm{id}_V)^2 H + 4F(H - 2\,\mathrm{id}_V)E = \\ &= (H + \mathrm{id}_V)^2 H + 4FHE - 8FE \overset{(1.2)}{=} (H + \mathrm{id}_V)^2 H + 4FE(H + 2\,\mathrm{id}_V) - 8FE = \\ &= (H + \mathrm{id}_V)^2 H + 4FEH = ((H + \mathrm{id}_V)^2 + 4FE)H = CH. \end{aligned}$$

Agora, vamos mostrar que $EC = CE$.

$$\begin{aligned} EC &= E((H + \mathrm{id}_V)^2 + 4FE) = E(H + \mathrm{id}_V)^2 + 4EFE = EH^2 + 2EH + E + 4EFE \overset{(1.3)}{=} \\ &= (H - 2\,\mathrm{id}_V)^2 E + 2(H - 2\,\mathrm{id}_V)E + E + 4EFE = (H - \mathrm{id}_V)^2 E + 4EFE = \\ &= ((H - \mathrm{id}_V)^2 + 4EF)E \overset{(1.7)}{=} CE. \end{aligned}$$

A verificação de que $FC = CF$ é análoga. ⊠

Fixado um $\mathfrak{g}$-módulo V, defina, para cada $\tau \in \mathbb{C}$,

$$V(C, \tau) := \{v \in V \mid \exists\, k \in \mathbb{N} \text{ tal que } (C - \tau\,\mathrm{id}_V)^k(v) = 0\}.$$

Note que, se V tem dimensão finita, então, pela decomposição de Jordan (ver Apêndice A), temos que $V = \bigoplus_{\tau \in \mathbb{C}} V(C, \tau)$. Seja $X \in \{E, F, H\}$. Como X comuta com C, então para qualquer $k \in \mathbb{N}$, $(C - \tau\,\mathrm{id}_V)^k X = X(C - \tau\,\mathrm{id}_V)^k$. Logo, $V(C, \tau)$ é um $\mathfrak{g}$-submódulo de V, para todo $\tau \in \mathbb{C}$. Em particular, se V tem dimensão finita e é indecomponível, então $V = V(C, \tau)$, para algum $\tau \in \mathbb{C}$.

O operador de Casimir de $\mathbf{V}^{(n)}$ é igual a $n^2\,\mathrm{id}_{\mathbf{V}^{(n)}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, conforme o Lema 1.3.3.

Lema 1.3.3. $C_{\mathbf{V}^{(n)}} = n^2\,\mathrm{id}_{\mathbf{V}^{(n)}}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Uma vez que $\mathbf{V}^{(n)} = \langle v_0, \ldots, v_{n-1} \rangle_{\mathbb{C}}$, basta mostrarmos que a igualdade vale para v_0, pois $v_i = F^i(v_0)$ (veja o diagrama (1.5)) e também porque, pelo Lema 1.3.2, $C_{\mathbf{V}^{(n)}} F = F C_{\mathbf{V}^{(n)}}$. Assim, temos que

$$C_{\mathbf{V}^{(n)}}(v_0) = ((H + \mathrm{id}_{\mathbf{V}^{(n)}})^2 + 4FE)(v_0) = ((n-1)+1)^2 v_0 = n^2 v_0.$$

Portanto, $C_{\mathbf{V}^{(n)}} = n^2 \,\mathrm{id}_{\mathbf{V}^{(n)}}$. ⊠

Vamos, agora, mostrar o Teorema de Weyl.

Teorema 1.3.4 (Teorema de Weyl)**.** Se V é um $\mathfrak{g}$-módulo indecomponível de dimensão finita, então V é simples.

Demonstração. O objetivo desta demonstração é mostrar que $V \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathbf{V}^{(n)}$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Para isso, vamos mostrar que a decomposição $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} V(\lambda)$ possui uma quantidade finita de λ para os quais $V(\lambda) \neq \{0\}$, digamos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Além disso, mostraremos que $V(\lambda_i) = V_{\lambda_i}$, que $\dim(V_{\lambda_i}) = 1$ e que as ações de E, F e H em V são iguais as ações de E, F e H em $\mathbf{V}^{(n)}$. Disso, concluiremos que a transformação linear de V para $\mathbf{V}^{(n)}$ que leva w_i para v_i, onde w_i é base de V_{λ_i}, é um homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulo, portanto, um isomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulo, finalizando a demonstração.

Assim, considere a decomposição $V = \bigoplus_{\tau \in \mathbb{C}} V(C, \tau)$. Como V é indecomponível e $V(C,\tau)$ é $\mathfrak{g}$-submódulo de V, para todo $\tau \in \mathbb{C}$, então $V = V(C,\tau)$, para algum $\tau \in \mathbb{C}$. Daí, temos que para cada $v \in V$, existe algum $k_v \in \mathbb{N}$ tal que $(C - \tau \,\mathrm{id}_V)^{k_v}(v) = 0$. Por V ter dimensão finita, $\ell = \max\{k_v \mid v \in V\}$ está bem definido. Assim, temos que $V = \ker(C - \tau \,\mathrm{id}_V)^{\ell}$. Logo, o operador de Casimir possui apenas o autovalor τ. Contudo, na Seção 1.2, mostramos que todo $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita admite um $\mathfrak{g}$-submódulo simples, digamos $\mathbf{V}^{(n)}$. Dessa forma, pelo Lema 1.3.3, C restrito a $\mathbf{V}^{(n)}$ é igual a $n^2 \,\mathrm{id}_{\mathbf{V}^{(n)}}$, logo, para qualquer $v \in \mathbf{V}^{(n)}$, temos que $C(v) = n^2 v$, ou seja, n^2 é um autovalor de C, o que implica que $\tau = n^2$.

Considere a decomposição $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} V(\lambda)$. Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, tome $v \in V(\lambda) \cap \ker(E)$. Então $E(H(v)) = H(E(v)) - 2E(v) = 0$, ou seja, $E(H(v)) \in \ker(E)$. Como, pelo Lema 1.2.1, $H(v) \in V(\lambda)$, temos que $V(\lambda) \cap \ker(E)$ é invariante pela ação de H, ou seja, podemos considerar o operador linear $H : V(\lambda) \cap \ker(E) \to V(\lambda) \cap \ker(E)$. Se $V(\lambda) \cap \ker(E) \neq \{0\}$, então podemos considerar uma base desse espaço, cujo último vetor é um autovetor de H (ver Apêndice A), isto é, $v \in V(\lambda) \cap \ker(E)$ tal que $H(v) = \lambda v$. Daí $v \in V_\lambda \cap \ker(E)$ e para tal vetor temos que, por um lado,

$$C(v) = ((H + \mathrm{id}_V)^2 + 4FE)(v) = (H + \mathrm{id}_V)^2(v) + 4F(E(v)) = (\lambda+1)^2 v,$$

(ou seja, v é um autovetor de C) e, por outro, $C(v) = n^2 v$. Daí, $\lambda = n-1$ ou $\lambda = -n-1$. Isso quer dizer que a restrição de E a $V(\lambda)$ é injetiva, para todo λ diferente de $n-1, -n-1$. De maneira semelhante, podemos mostrar que F age injetivamente em qualquer $V(\lambda)$, com λ diferente de $-n+1, n+1$.

Dado $\lambda \geq n+1$, se supusermos que $V(\lambda) \neq \{0\}$, então, como $E(V(\lambda)) \subseteq V(\lambda+2)$, teríamos uma quantidade infinita de vetores em V linearmente independente, o que contradiz o fato da dimensão de V ser finita. Analogamente, se $V(\lambda) \neq \{0\}$, para qualquer $\lambda \leq -n-1$, então também teríamos uma quantidade infinita de vetores em V linearmente independente, o que é um absurdo. Além disso, pela injetividade de E em $V(-n+1), \ldots, V(n-3)$ e a injetividade de

F em $V(n-1),\ldots,V(-n+3)$, temos que $V(\lambda)\neq\{0\}$, para todo $\lambda\in\{-n+1,-n+3,\ldots,n-1\}$. Portanto, $V=\bigoplus_{i=0}^{n-1}V(n-1-2i)$. Observe que escrevendo v como soma de elementos linearmente independentes em $V(\lambda)$, com $\lambda\in\{-n+1,-n+3,\ldots,n-1\}$, usando a injetividade de E e F, temos que $\ker(E)=V(n-1)$ e $\ker(F)=V(-n+1)$.

$$\xleftarrow[0]{} V(-n+1) \underset{F}{\overset{E}{\rightleftarrows}} V(-n+3) \underset{F}{\overset{E}{\rightleftarrows}} \cdots \underset{F}{\overset{E}{\rightleftarrows}} V(n-3) \underset{F}{\overset{E}{\rightleftarrows}} V(n-1) \xrightarrow{0}$$

Se restringirmos E para $V(n-3)$, $E|_{V(n-3)}$, teremos uma transformação linear injetiva de $V(n-3)$ para $V(n-1)$. Logo, pelo teorema do núcleo e da imagem, $\dim(V(n-3))=\dim(\operatorname{im}(E|_{V(n-3)}))\leq\dim(V(n-1))$. Agora, restringindo F a $V(n-1)$, temos que $\dim(V(n-1))=\dim(\operatorname{im}(F|_{V(n-1)}))\leq\dim(V(n-3))$. Assim, $\dim(V(n-1))=\dim(V(n-3))$. O mesmo pode ser feito para todos os $V(n-1-2i)$, de modo a concluirmos que $\dim(V(\lambda))=\dim(V(\mu))$, para todo $\lambda,\mu\in\{-n+1,-n+3,\ldots,n-1\}$.

Como C comuta com H, então todos $V(\lambda)$ são invariantes pela ação de C. Denote por C_1 e H_1 as restrições de C e H a $V(n-1)$, respectivamente. Denote por C_2 e H_2 as restrições de C e H a $V(-n+1)$, respectivamente. Sejam $A_i:=F^i:V(n-1)\to V(n-1-2i)$, com $i=1,\ldots,n-2$, e faça $A:=A_{n-1}$. Observe que por F^i ser injetiva com domínio e o contradomínio tendo a mesma dimensão, então podemos identificar $V(n-1)$ com $V(n-1-2i)$, para cada i.

Como C comuta com F, temos que $CA=AC$. Restringindo para $V(n-1)$, concluímos que

$$C_2A=AC_1. \tag{1.8}$$

Similarmente, usando que $F^{n-1}H=(H+2(n-1)\operatorname{id}_V)F^{n-1}$, temos que, restringindo também para $V(n-1)$,

$$AH_1=(H_2+2(n-1)\operatorname{id}_V)A. \tag{1.9}$$

Como $\ker(E)=V(n-1)$ e $C=(H+\operatorname{id}_V)^2+4FE$, então

$$C_1=(H_1+\operatorname{id}_V)^2. \tag{1.10}$$

Como $\ker(F)=V(-n+1)$ e $C=(H-\operatorname{id}_V)^2+4EF$, então

$$C_2=(H_1-\operatorname{id}_V)^2. \tag{1.11}$$

Assim, dessas informações, temos que

$$\begin{aligned}(H_1+\operatorname{id}_V)^2 &\overset{(1.10)}{=} C_1=A^{-1}AC_1 \overset{(1.8)}{=} A^{-1}C_2A \overset{(1.11)}{=} A^{-1}(H_2-\operatorname{id}_V)^2A=\\ &\overset{(1.9)}{=} A^{-1}A(H_1-\operatorname{id}_V-2(n-1)\operatorname{id}_V)^2=(H_1-\operatorname{id}_V-2(n-1)\operatorname{id}_V)^2\end{aligned}$$

Isolando H_1, concluímos que $H_1=(n-1)\operatorname{id}_V$, ou seja, como H_1 é a restrição de H para $V(n-1)$, dado $v\in V(n-1)$, temos que $H(v)=(n-1)v$. Logo $V(n-1)=V_{n-1}$. Uma vez que $A_iH=(H+2i\operatorname{id}_V)A_i$ e identificamos $V(n-1)$ com $V(n-1-2i)$, obtemos que $V(\lambda)=V_\lambda$, para todo

$\lambda \in \{-n+1, -n+3, \ldots, n-1\}$.

Veja que do objetivo apresentado no início da demonstração já mostramos que $V = \bigoplus_{i=0}^{n-1} V_{n-1-2i}$. Vamos mostrar, agora, que cada um desses V_λ tem dimensão igual a um e que as ações de E, F e H em V são iguais as ações de E, F e H em $\mathbf{V}^{(n)}$. Seja $\{w_0, \ldots, w_{k-1}\}$ uma base para V_{n-1}. Para cada $i \in \{0, \ldots, k-1\}$ denote por W_i o espaço vetorial gerado por $\{w_i, F(w_i), \ldots, F^{n-1}(w_i)\}$. Note que $F^j(w_i) \in V_{n-1-2j}$, F^j é injetiva (com $j = 1, \ldots, n-1$) e $V_{n-1} \underset{\mathbb{C}}{\cong} V_{n-1-2j}$, logo $\{F^j(w_0), \ldots, F^j(w_{k-1})\}$ é base de V_{n-1-2j}. Daí, $V \underset{\mathbb{C}}{\cong} W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$. Pela discussão feita na Seção 1.2, temos que cada W_i é um $\mathfrak{g}$-submódulo de V, logo, como V é indecomponível, então $k = 1$, ou seja, $\dim(V_\lambda) = 1$, para cada λ. Daí, $V = \langle w_0, F(w_0), \ldots, F^{n-1}(w_0) \rangle_{\mathbb{C}}$, com $F^i(w_0)$ sendo base de V_{n-1-2i}, para $i = 0, \ldots, n-1$. Com isso, temos determinado a ação de F e de H. Para determinar a ação de E, note que, por $w_0 \in \ker(E)$, então w_0 é autovetor de C. Além disso, como C comuta com F, então $F^i(w_0)$, com $i = 1, \ldots, n-1$, também é autovetor de C. Logo, $C = n^2 \, \mathrm{id}_V$. Por outro, por definição, $C = (H - \mathrm{id}_V)^2 + 4EF$. Assim, temos que $n^2 \, \mathrm{id}_V(w_i) = n^2 w_i$ e que $((H - \mathrm{id}_V)^2 + 4EF)(w_i) = ((n-1-2i)-1)^2 w_i + 4E(w_{i+1})$, para todo $i = 0, \ldots, n-2$, logo

$$E(w_{i+1}) = \frac{1}{4}(n^2 - (n-2-2i)^2)w_i = (1+i)(n-i-1)w_i$$

Além disso, $E(w_0) = 0$, pois $E(w_0) \in V_{n-3} = \{0\}$. Portanto, $V \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathbf{V}^{(n)}$. ⊠

Observação 1.3.5. O Teorema de Weyl continua sendo verdade em um contexto mais geral, a saber, todo módulo indecomponível de dimensão finita de uma álgebra de Lie de dimensão finita semissimples sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero é simples (ver (Hum78), Seção 6.3). A demonstração é muito mais complicada do que a do caso de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. □

Do Teorema de Weyl, temos que se V é um $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita indecomponível, então ele simples. Caso V não seja indecomponível, então $V \underset{\mathfrak{g}}{\cong} V_1 \oplus V_2$, com $V_1, V_2 \neq \{0\}$. Daí, se V_1 e V_2 são indecomponíveis, temos que V é semissimples. Caso contrário, podemos seguir decompondo as componentes, já que V tem dimensão finita, até chegar a indecomponíveis. Portanto, todo $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita é semissimples.

Proposição 1.3.6. Sejam $V, W_1, \ldots, W_n$ $\mathfrak{g}$-módulos. Então $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, \bigoplus_{i=1}^{n} W_i) \underset{\mathbb{C}}{\cong} \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W_i)$.

Demonstração. Defina

$$\begin{aligned} \psi : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, \bigoplus_{i=1}^{n} W_i) &\to \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W_i) \\ f &\mapsto \psi(f) = (\pi_j f)_{j=1}^n \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} \varphi : \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W_i) &\to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, \bigoplus_{i=1}^{n} W_i) \\ (f_i)_{i=1}^n &\mapsto \varphi((f_i)_{i=1}^n)(v) = (f_i(v))_{i=1}^n \end{aligned}$$

onde $\pi_j : \bigoplus_{i=1}^{n} W_i \to W_j$ é a projeção canônica. Dados $X \in \{E, F, H\}$ e $j = 1, \ldots, n$, temos que $\pi_j\big(f(X_V(v))\big) = \pi_j\big(X_{\oplus_{i=1}^n W_i}(f(v))\big)$, já que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, \bigoplus_{i=1}^{n} W_i)$. Usando a definição de $X_{\oplus_{i=1}^n W_i}$ e escrevendo $f(v) = \big(\pi_1(f(v)), \ldots, \pi_n(f(v))\big)$ temos que:

$$\pi_j\big(f(X_V(v))\big) = \pi_j\big(X_{\oplus_{i=1}^n W_i}(f(v))\big) = \pi_j\Big(X_{W_1}\big(\pi_1(f(v))\big), \ldots, X_{W_n}\big(\pi_n(f(v))\big)\Big) = X_{W_j}\big(\pi_j(f(v))\big).$$

Portanto, $\pi_j f X_V = X_{W_j}\pi_j f$, ou seja, $\pi_j f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W_j)$, para cada $j = 1, \ldots, n$. Daí, ψ está bem definida. Além disso, se $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, \bigoplus_{i=1}^{n} W_i)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, então $\psi(f + \lambda g)(v) = \big(\pi_j(f + \lambda g)\big)_{j=1}^{n}(v) = \big(\pi_j(f(v) + \lambda g(v))\big)_{j=1}^{n} = \big(\pi_j(f(v))\big)_{j=1}^{n} + \lambda\big(\pi_j(g(v))\big)_{j=1}^{n} = \psi(f)(v) + \lambda\psi(g)(v)$, portanto, ψ é uma transformação linear. De maneira similar, podemos mostrar que φ está bem definida e é uma transformação linear.

Seja $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, \bigoplus_{i=1}^{n} W_i)$. Então dado $v \in V$, temos que $f(v) = \big(\pi_1(f(v)), \ldots, \pi_n(f(v))\big)$. Além disso,

$$\varphi(\psi(f))(v) = \varphi((\pi_j f)_{j=1}^{n})(v) = \big(\pi_1(f(v)), \ldots, \pi_n(f(v))\big) = f(v) = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, \bigoplus_{i=1}^{n} W_i)}(f)(v).$$

Logo, $\varphi\psi = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, \bigoplus_{i=1}^{n} W_i)}$. Por outro lado, seja $(f_i)_{i=1}^{n} \in \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W_i)$ e defina $f = \varphi((f_i)_{i=1}^{n})$. Daí, $f(v) = \varphi((f_i)_{i=1}^{n})(v) = (f_1(v), \ldots, f_n(v))$. Além disso,

$$\psi(\varphi((f_i)_{i=1}^{n}))(v) = (\psi(f))(v) = ((\pi_j f)_{j=1}^{n})(v) = (f_1(v), \ldots, f_n(v)) = ((f_i)_{i=1}^{n})(v).$$

Logo, $\psi\varphi = \mathrm{id}_{\bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W_i)}$. Portanto, concluímos que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, \bigoplus_{i=1}^{n} W_i) \underset{\mathbb{C}}{\cong} \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W_i)$. ⊠

Corolário 1.3.7. Se V é um $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita. Então $V \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} m_n \mathbf{V}^{(n)}$, onde $m_n = \dim(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{V}^{(n)}, V))$ é a quantidade de somandos diretos de V que são isomorfos a $\mathbf{V}^{(n)}$.

Demonstração. Do comentário posterior ao Teorema de Weyl, temos que V é semissimples, logo $V \underset{\mathfrak{g}}{\cong} V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$, com V_i simples. Pelo teorema de classificação de $\mathfrak{g}$-módulos simples de dimensão finita (Teorema 1.2.3), temos que $V_i \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathbf{V}^{(n_i)}$, para algum $n_i \in \mathbb{N}$. Pela Proposição 1.3.6, temos que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{V}^{(n)}, \bigoplus_{i=1}^{k} V_i) \underset{\mathbb{C}}{\cong} \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{V}^{(n)}, V_i)$ e, pelo lema de Schur, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{V}^{(n)}, V_i) = \{0\}$, se $\mathbf{V}^{(n)} \underset{\mathfrak{g}}{\ncong} V_i$ e $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{V}^{(n)}, V_i) \underset{\mathbb{C}}{\cong} \mathbb{C}$, se $\mathbf{V}^{(n)} \underset{\mathfrak{g}}{\cong} V_i$. Portanto, $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{V}^{(n)}, V))$ é igual a quantidade de V_i que são isomorfos a $\mathbf{V}^{(n)}$. Dessa forma, denotando $m_n = \dim(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathbf{V}^{(n)}, V))$, temos que $V \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \bigoplus_{i=1}^{\ell} m_{n_i} \mathbf{V}^{(n_i)}$, onde $m_{n_1} + \cdots + m_{n_\ell} = k$. Simplificando a notação, como V tem dimensão finita, então podemos escrever $V \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} m_n \mathbf{V}^{(n)}$, onde $m_n \neq 0$, somente quando $n = n_i$, com $i = 1, \ldots, \ell$. ⊠

1.4 Produto tensorial de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulos de dimensão finita

Para V e W $\mathfrak{g}$-módulos, considere o espaço vetorial $V \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W$, conforme visto no Apêndice B. Defina as seguintes funções:

$$\begin{aligned} E' : V \times W &\to V \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W \\ (v, w) &\mapsto E_V(v) \otimes w + \\ &\quad + v \otimes E_W(w) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} F' : V \times W &\to V \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W \\ (v, w) &\mapsto F_V(v) \otimes w + \\ &\quad + v \otimes F_W(w) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} H' : V \times W &\to V \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W \\ (v, w) &\mapsto H_V(v) \otimes w + \\ &\quad + v \otimes H_W(w) \end{aligned}$$

Como $E_V, F_V, H_V, E_W, F_W, H_W$ são operadores lineares em seus respectivos espaços e $\otimes$ é função bilinear, então E', F' e H' são funções bilineares, logo, pelo Teorema B.1.1, existem únicos operadores lineares E, F e H em $V \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W$ tais que

$$\begin{aligned} E(v \otimes w) &= E_V(v) \otimes w + v \otimes E_W(w) \\ F(v \otimes w) &= F_V(v) \otimes w + v \otimes F_W(w) \\ H(v \otimes w) &= H_V(v) \otimes w + v \otimes H_W(w) \end{aligned} \tag{1.12}$$

Uma vez que os elementos de $V \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W$ são gerados por tensores simples, então, para mostrarmos que as equações em (1.1) são satisfeitas, basta mostrarmos que elas valem para os tensores simples. Assim, seja $v \otimes w \in V \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W$. Então

$$\begin{aligned} (EF - FE)(v \otimes w) &= E(F(v \otimes w)) - F(E(v \otimes w)) = \\ &= E(F_V(v) \otimes w + v \otimes F_W(w)) - F(E_V(v) \otimes w + v \otimes E_W(w)) = \\ &= E_V(F_V(v)) \otimes w + \cancel{F_V(v) \otimes E_W(w)} + \cancel{E_V(v) \otimes F_W(w)} + v \otimes E_W(F_W(w)) - \\ &\quad - F_V(E_V(v)) \otimes w - \cancel{E_V(v) \otimes F_W(w)} - \cancel{F_V(v) \otimes E_W(w)} - v \otimes F_W(E_W(w)) = \\ &= (E_V F_V - F_V E_V)(v) \otimes w + v \otimes (E_W F_W - F_W E_W)(w) = \\ &= H(v \otimes w) \end{aligned}$$

De maneira análoga mostra-se que $HE - EH = 2E$ e que $HF - FH = -2F$. Portanto, $V \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W$ junto desses operadores lineares é um $\mathfrak{g}$-módulo. Podemos estender essa definição para produto tensorial com uma quantidade qualquer de $\mathfrak{g}$-módulos, o qual chamamos de *produto tensorial de $\mathfrak{g}$-módulos*. Da Proposição B.1.3, temos que

$$\begin{aligned} g : U \underset{\mathbb{C}}{\otimes} (V \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W) &\to (U \underset{\mathbb{C}}{\otimes} V) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W \\ u \otimes (v \otimes w) &\mapsto (u \otimes v) \otimes w \end{aligned} \qquad \begin{aligned} h : U \underset{\mathbb{C}}{\otimes} (V \oplus W) &\to (U \underset{\mathbb{C}}{\otimes} V) \oplus (U \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W) \\ u \otimes (v, w) &\mapsto (u \otimes v, u \otimes w) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p : \mathbb{C} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} V &\to V \\ \lambda \otimes v &\mapsto \lambda v \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f : V \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W &\to W \underset{\mathbb{C}}{\otimes} V \\ v \otimes w &\mapsto w \otimes v \end{aligned}$$

são transformações lineares bijetivas bem definidas, ou seja, são isomorfismos de espaços vetoriais. Seja $X \in \{E, F, H\}$. Então

$$\begin{aligned} g\big(X_{U \underset{\mathbb{C}}{\otimes} (V \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W)}(u \otimes (v \otimes w))\big) &= g\big(X_U(u) \otimes (v \otimes w) + u \otimes (X_V(v) \otimes w) + u \otimes (v \otimes X_W(w))\big) = \\ &= (X_U(u) \otimes v) \otimes w + (u \otimes X_V(v)) \otimes w + (u \otimes v) \otimes X_W(w) = \\ &= X_{(U \underset{\mathbb{C}}{\otimes} V) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W}\big(g(u \otimes (v \otimes w))\big), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h\big(X_{U \underset{\mathbb{C}}{\otimes} (V \oplus W)}(u \otimes (v, w))\big) &= h\big(X_U(u) \otimes (v, w) + u \otimes (X_V(v), X_W(w))\big) = \\ &= \big(X_U(u) \otimes v + u \otimes X_V(v), X_U(u) \otimes w + u \otimes X_W(w)\big) = \\ &= X_{(U \underset{\mathbb{C}}{\otimes} V) \oplus (U \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W)}\big(h(u \otimes (v, w))\big) \end{aligned}$$

$$p(X_{\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{C}}V}(\lambda\otimes v)) = p\big(X_{\mathbb{C}}(\lambda)\otimes v + \lambda\otimes X_V(v)\big) = X_{\mathbb{C}}(\lambda)v + \lambda X_V(v) =$$
$$= 0 + \lambda X_V(v) = X_V(p(\lambda\otimes v)),$$
$$f(X_{V\otimes_{\mathbb{C}}W}(v\otimes w)) = f(X_V(v)\otimes w + v\otimes X_W(w)) = w\otimes X_V(v) + X_W(w)\otimes v =$$
$$= X_{W\otimes_{\mathbb{C}}V}(f(v\otimes w)),$$

Portanto,

$$\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{C}} V \cong_{\mathfrak{g}} V,\quad V\otimes_{\mathbb{C}} W \cong_{\mathfrak{g}} W\otimes_{\mathbb{C}} V,\quad U\otimes_{\mathbb{C}}(V\otimes_{\mathbb{C}} W) \cong_{\mathfrak{g}} (U\otimes_{\mathbb{C}} V)\otimes_{\mathbb{C}} W \quad \text{e} \quad U\otimes_{\mathbb{C}}(V\oplus W) \cong_{\mathfrak{g}} (U\otimes_{\mathbb{C}} V)\oplus(U\otimes_{\mathbb{C}} W).$$

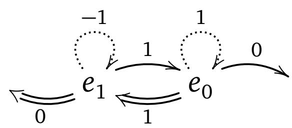
Do Teorema B.1.4, temos que se V e W têm dimensão finita, então $V\otimes_{\mathbb{C}} W$ também tem dimensão finita e do Corolário 1.3.7 temos que todo $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita se decompõem em soma direta de $\mathfrak{g}$-módulos simples, portanto a questão que se coloca é como $V\otimes_{\mathbb{C}} W$ se decompõe. Suponha que V e W são $\mathfrak{g}$-módulos de dimensão finita, então $V \cong_{\mathfrak{g}} \mathbf{V}^{(\ell_1)}\oplus\cdots\oplus\mathbf{V}^{(\ell_n)}$ e $W\cong_{\mathfrak{g}}\mathbf{V}^{(t_1)}\oplus\cdots\oplus\mathbf{V}^{(t_m)}$. Como o produto tensorial se distribui com relação a soma direta, então $V\otimes_{\mathbb{C}} W \cong_{\mathfrak{g}} \bigoplus_{i=1}^{n}\bigoplus_{j=1}^{m}\mathbf{V}^{(\ell_i)}\otimes_{\mathbb{C}}\mathbf{V}^{(t_j)}$. Além disso, como o produto tensorial é comutativo, para sabermos a decomposição de $V\otimes_{\mathbb{C}} W$ em soma direta, basta saber a decomposição de $\mathbf{V}^{(n)}\otimes_{\mathbb{C}}\mathbf{V}^{(m)}$, com $m\le n$.

Teorema 1.4.1. Sejam $m, n\in\mathbb{N}$ tais que $m\le n$. Então

$$\mathbf{V}^{(n)}\otimes_{\mathbb{C}}\mathbf{V}^{(m)} \cong_{\mathfrak{g}} \mathbf{V}^{(n-m+1)}\oplus\mathbf{V}^{(n-m+3)}\oplus\cdots\oplus\mathbf{V}^{(n+m-3)}\oplus\mathbf{V}^{(n+m-1)}.$$

Demonstração. Vamos usar indução sobre m. Se $m=1$, então $\mathbf{V}^{(1)} = \langle v_0\rangle_{\mathbb{C}}$ e $E_{\mathbf{V}^{(1)}} = F_{\mathbf{V}^{(1)}} = H_{\mathbf{V}^{(1)}} = 0$, ou seja, $\mathbf{V}^{(1)}\cong_{\mathfrak{g}}\mathbb{C}$ é o $\mathfrak{g}$-módulo trivial. Logo, $\mathbf{V}^{(n)}\otimes_{\mathbb{C}}\mathbf{V}^{(1)}\cong_{\mathfrak{g}}\mathbf{V}^{(n)}\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\cong_{\mathfrak{g}}\mathbf{V}^{(n)}$. Se $m=2$, então $\mathbf{V}^{(2)} = \langle e_0, e_1\rangle_{\mathbb{C}}$ onde

	$E_{\mathbf{V}^{(2)}}$	$F_{\mathbf{V}^{(2)}}$	$H_{\mathbf{V}^{(2)}}$
e_0	0	e_1	e_0
e_1	e_0	0	$-e_1$



as matrizes que representam E, F e H segundo a base $\{e_0, e_1\}$ são, respectivamente, $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ e $\mathbf{h}$, daí $\mathbf{V}^{(2)}\cong_{\mathfrak{g}}\mathbb{C}^2$ é o $\mathfrak{g}$-módulo natural. Seja $v_0\otimes e_0\in\mathbf{V}^{(n)}\otimes_{\mathbb{C}}\mathbf{V}^{(2)}$. Então $E(v_0\otimes e_0) = E_{\mathbf{V}^{(n)}}(v_0)\otimes e_0 + v_0\otimes E_{\mathbf{V}^{(2)}}(e_0) = 0$ e $H(v_0\otimes e_0) = H_{\mathbf{V}^{(n)}}(v_0)\otimes e_0 + v_0\otimes H_{\mathbf{V}^{(2)}}(e_0) = n(v_0\otimes e_0)$. Assim, pela Proposição 1.2.4, $\mathbf{V}^{(n)}\otimes_{\mathbb{C}}\mathbf{V}^{(2)}$ tem um $\mathfrak{g}$-submódulo U isomorfo a $\mathbf{V}^{(n+1)}$. Considere, agora, $w = v_1\otimes e_0 - (n-1)(v_0\otimes e_1)$ um elemento não nulo em $\mathbf{V}^{(n)}\otimes_{\mathbb{C}}\mathbf{V}^{(2)}$.

Da mesma forma como fizemos acima, temos que $E(w) = 0$ e $H(w) = (n-2)w$. Portanto, pela Proposição 1.2.4, $\mathbf{V}^{(n)}\otimes_{\mathbb{C}}\mathbf{V}^{(2)}$ tem um $\mathfrak{g}$-submódulo W isomorfo a $\mathbf{V}^{(n-1)}$. Note que $U\cap W = \{0\}$, pois, caso contrário, $U\cap W$ seria um $\mathfrak{g}$-submódulo próprio de U diferente do $\mathfrak{g}$-submódulo trivial, o que contradiz o fato de $U\cong_{\mathfrak{g}}\mathbf{V}^{(n+1)}$ ser simples. Além disso, observe que, do Teorema B.1.4, $\dim(\mathbf{V}^{(n)}\otimes_{\mathbb{C}}\mathbf{V}^{(2)}) = \dim(\mathbf{V}^{(n)})\times\dim(\mathbf{V}^{(2)})$ e que $\dim(\mathbf{V}^{(n)})\times\dim(\mathbf{V}^{(2)}) = 2n = (n-1)+(n+1) = \dim(\mathbf{V}^{(n-1)}) + \dim(\mathbf{V}^{(n+1)}) = \dim(U\oplus W)$. Portanto, $\dim(\mathbf{V}^{(n)}\otimes_{\mathbb{C}}\mathbf{V}^{(2)}) = \dim(U\oplus W)$. Como

$U \cap W = \{0\}$, temos que $\mathbf{V}^{(n)} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbf{V}^{(2)} = U \oplus W$. Uma vez que, $U \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathbf{V}^{(n+1)}$ e $W \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathbf{V}^{(n-1)}$, então, pelo Lema 1.3.1, temos que

$$\mathbf{V}^{(n)} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbf{V}^{(2)} \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathbf{V}^{(n-1)} \oplus \mathbf{V}^{(n+1)} \tag{1.13}$$

o que satisfaz o isomorfismo do enunciado.

Assuma $k > 2$ e que vale a afirmação do enunciado para todo $m = 1, \dots, k-1$. Vamos calcular $\mathbf{V}^{(n)} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbf{V}^{(k-1)} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbf{V}^{(2)}$ de duas maneiras diferentes. De um lado,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}^{(n)} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbf{V}^{(k-1)} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbf{V}^{(2)} &\overset{(1.13)}{\underset{\mathfrak{g}}{\cong}} \mathbf{V}^{(n)} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} (\mathbf{V}^{(k)} \oplus \mathbf{V}^{(k-2)}) \underset{\mathfrak{g}}{\cong} (\mathbf{V}^{(n)} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbf{V}^{(k)}) \oplus (\mathbf{V}^{(n)} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbf{V}^{(k-2)}) \overset{\text{indução}}{\underset{\mathfrak{g}}{\cong}} \\ &\underset{\mathfrak{g}}{\cong} (\mathbf{V}^{(n)} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbf{V}^{(k)}) \oplus (\mathbf{V}^{(n-k+3)} \oplus \mathbf{V}^{(n-k+5)} \oplus \cdots \oplus \mathbf{V}^{(n+k-5)} \oplus \mathbf{V}^{(n+k-3)}).\end{aligned}$$

De outro lado,

$$\begin{aligned}\mathbf{V}^{(n)} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbf{V}^{(k-1)} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbf{V}^{(2)} &\overset{\text{indução}}{\underset{\mathfrak{g}}{\cong}} \Big(\bigoplus_{i=0}^{k-2} \mathbf{V}^{(n-k+2+2i)}\Big) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbf{V}^{(2)} \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \bigoplus_{i=0}^{k-2} \Big(\mathbf{V}^{(n-k+2+2i)} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbf{V}^{(2)}\Big) \overset{(1.13)}{\underset{\mathfrak{g}}{\cong}} \\ &\underset{\mathfrak{g}}{\cong} \bigoplus_{i=0}^{k-2} \Big(\mathbf{V}^{(n-k+3+2i)} \oplus \mathbf{V}^{(n-k+1+2i)}\Big) = \\ &= \mathbf{V}^{(n-k+3)} \oplus \mathbf{V}^{(n-k+1)} \oplus \mathbf{V}^{(n-k+5)} \oplus \mathbf{V}^{(n-k+3)} \oplus \mathbf{V}^{(n-k+7)} \oplus \mathbf{V}^{(n-k+5)} \oplus \cdots \oplus \\ &\qquad \mathbf{V}^{(n+k+1)} \oplus \mathbf{V}^{(n+k-1)} \oplus \mathbf{V}^{(n+k-1)} \oplus \mathbf{V}^{(n+k-3)} = \\ &= \mathbf{V}^{(n-k+1)} \oplus \mathbf{V}^{(n-k+3)} \oplus \cdots \oplus \mathbf{V}^{(n+k-3)} \oplus \mathbf{V}^{(n+k-1)} \oplus \\ &\qquad \oplus \mathbf{V}^{(n-k+3)} \oplus \mathbf{V}^{(n-k+5)} \oplus \cdots \oplus \mathbf{V}^{(n+k-5)} \oplus \mathbf{V}^{(n+k-3)}\end{aligned}$$

Portanto, $\mathbf{V}^{(n)} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbf{V}^{(k)} \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathbf{V}^{(n-k+1)} \oplus \mathbf{V}^{(n-k+3)} \oplus \cdots \oplus \mathbf{V}^{(n+k-3)} \oplus \mathbf{V}^{(n+k-1)}$. ⊠

1.5 $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulos unitarizáveis

Seja V um espaço vetorial. Um *operador antilinear* em V é uma função $\varphi : V \to V$ tal que $\varphi(\lambda v + w) = \overline{\lambda}\varphi(v) + \varphi(w)$, para todo $v, w \in V$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, onde $\overline{\lambda}$ é o conjugado de λ. Definimos $\star : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ como sendo o operador antilinear estendido a partir dos valores de $\star$ nos elementos da base natural de $\mathfrak{g}$:

$$\mathbf{e}^\star = \mathbf{f}, \quad \mathbf{f}^\star = \mathbf{e}, \quad \mathbf{h}^\star = \mathbf{h}.$$

Assim, se $\lambda_1\mathbf{e} + \lambda_2\mathbf{f} + \lambda_3\mathbf{h} \in \mathfrak{g}$, então $(\lambda_1\mathbf{e} + \lambda_2\mathbf{f} + \lambda_3\mathbf{h})^\star = \overline{\lambda_1}\mathbf{f} + \overline{\lambda_2}\mathbf{e} + \overline{\lambda_3}\mathbf{h}$. Note que

$$\lambda_1\mathbf{e} + \lambda_2\mathbf{f} + \lambda_3\mathbf{h} \quad \overset{\star}{\longrightarrow} \quad \overline{\lambda_1}\mathbf{f} + \overline{\lambda_2}\mathbf{e} + \overline{\lambda_3}\mathbf{h} \quad \overset{\star}{\longrightarrow} \quad \lambda_1\mathbf{e} + \lambda_2\mathbf{f} + \lambda_3\mathbf{h},$$

ou seja, $(x^\star)^\star = x$, para todo $x \in \mathfrak{g}$. Portanto, $\star$ é uma *função involutiva*. Além disso, dados $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{C}$, temos que, por um lado,

$$\begin{aligned}[\lambda_1\mathbf{e} + \lambda_2\mathbf{f} + \lambda_3\mathbf{h}, \gamma_1\mathbf{e} + \gamma_2\mathbf{f} + \gamma_3\mathbf{h}]^* &= (\lambda_1\gamma_2\mathbf{h} - 2\lambda_1\gamma_3\mathbf{e} - \lambda_2\gamma_1\mathbf{h} + 2\lambda_2\gamma_3\mathbf{f} + 2\lambda_3\gamma_1\mathbf{e} - 2\lambda_3\gamma_2\mathbf{f})^\star = \\ &= \overline{\lambda_1}\overline{\gamma_2}\mathbf{h} - 2\overline{\lambda_1}\overline{\gamma_3}\mathbf{f} - \overline{\lambda_2}\overline{\gamma_1}\mathbf{h} + 2\overline{\lambda_2}\overline{\gamma_3}\mathbf{e} + 2\overline{\lambda_3}\overline{\gamma_1}\mathbf{f} - 2\overline{\lambda_3}\overline{\gamma_2}\mathbf{e}\end{aligned}$$

e, por outro,

$$[(\gamma_1\mathbf{e}+\gamma_2\mathbf{f}+\gamma_3\mathbf{h})^\star,(\lambda_1\mathbf{e}+\lambda_2\mathbf{f}+\lambda_3\mathbf{h})^\star]=[\overline{\gamma_1}\mathbf{f}+\overline{\gamma_2}\mathbf{e}+\overline{\gamma_3}\mathbf{h},\overline{\lambda_1}\mathbf{f}+\overline{\lambda_2}\mathbf{e}+\overline{\lambda_3}\mathbf{h}]=$$
$$=-\overline{\gamma_1}\,\overline{\lambda_2}\mathbf{h}+2\overline{\gamma_1}\,\overline{\lambda_3}\mathbf{f}+\overline{\gamma_2}\,\overline{\lambda_1}\mathbf{h}-2\overline{\gamma_2}\,\overline{\lambda_3}\mathbf{e}-2\overline{\gamma_3}\,\overline{\lambda_1}\mathbf{f}+2\overline{\gamma_3}\,\overline{\lambda_2}\mathbf{e}$$

Logo, $[x,y]^\star=[y^\star,x^\star]$, para todo $x,y\in\mathfrak{g}$, ou seja, o operador $\star$ é um *anti-homomorfismo de álgebras de Lie*. Assim, por $\star:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ ser uma função involutiva e também ser um anti-homomorfismo de álgebras de Lie, $\star$ é dita uma *anti-involução de* $\mathfrak{g}$.

Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo e considere $\rho:\mathfrak{g}\to\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ a representação de $\mathfrak{g}$ em V, em que $\rho(\mathbf{e})=E$, $\rho(\mathbf{f})=F$ e $\rho(\mathbf{h})=H$. Denote por $E^\star$, $F^\star$ e $H^\star$ a composição $\rho(\mathbf{e}^\star)$, $\rho(\mathbf{f}^\star)$, $\rho(\mathbf{h}^\star)$, respectivamente. Assim, $E^\star=F$, $F^\star=E$ e $H^\star=H$. Dizemos que um $\mathfrak{g}$-módulo V é **unitarizável com respeito a** $\star$, se existe um produto escalar hermitiano em V, $\langle\cdot,\cdot\rangle$, tal que $\langle X(v),w\rangle=\langle v,X^\star(w)\rangle$, para todo $v,w\in V$ e para todo $X\in\{E,F,H\}$, ou seja, se $X^\star$ é o operador adjunto de X com respeito a $\langle\cdot,\cdot\rangle$, para todo $X\in\{E,F,H\}$. Entendemos produto escalar hermitiano em um espaço vetorial V como sendo uma função $\langle\cdot,\cdot\rangle:V\times V\to\mathbb{C}$ tal que, para todo $v,w,u\in V$ e para todo $\lambda\in\mathbb{C}$:

$$\langle\lambda v+w,u\rangle=\lambda\langle v,u\rangle+\langle w,u\rangle,\quad \langle v,w\rangle=\overline{\langle w,v\rangle},\quad \text{e}\quad \langle v,v\rangle\in\mathbb{R}^+,\ \text{se } v\neq 0,$$

onde $\mathbb{R}^+$ é o conjunto do números reais positivos.

Seja $\langle\cdot,\cdot\rangle$ um produto escalar hermitiano em um espaço vetorial de dimensão finita, com uma base fixada $\mathcal{V}:=\{e_1,\dots,e_n\}$. Dado $v\in V$, denote por $[v]_{\mathcal{V}}$ a matriz coluna que representa as coordenadas de v segundo a base $\mathcal{V}$. Então, para todo $v,v'\in V$, sabemos que

$$\langle v,v'\rangle=[v]_{\mathcal{V}}^t\begin{pmatrix}\langle e_1,e_1\rangle & \dots & \langle e_1,e_n\rangle\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \langle e_n,e_1\rangle & \dots & \langle e_n,e_n\rangle\end{pmatrix}[v']_{\mathcal{V}},$$

onde o sobrescrito t significa a transposta da matriz. Além disso, se V é um espaço vetorial de dimensão $n\in\mathbb{N}$, como uma base fixada $\mathcal{V}$, então sabemos também que toda matriz $A=(a_{ij})_{n\times n}$, com entradas complexas, onde $a_{ii}\in\mathbb{R}^+$ e $a_{ij}=\overline{a_{ji}}$, define um produto escalar hermitiano $\langle\cdot,\cdot\rangle$, fazendo $\langle v,v'\rangle:=[v]_{\mathcal{V}}^tA[v']_{\mathcal{V}}$, para todo $v,v'\in V$.

Lema 1.5.1. Se V e W são $\mathfrak{g}$-módulos unitarizáveis de dimensão finita, então $V\oplus W$ também é um $\mathfrak{g}$-módulo unitarizável.

Demonstração. Sejam $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ produtos escalares hermitianos que tornam V e W, respectivamente, $\mathfrak{g}$-módulos unitarizáveis. Sejam $\mathcal{V}:=\{v_1,\dots,v_n\}$ uma base de V e $\mathcal{W}:=\{w_1,\dots,w_m\}$ uma base de W. Denote por $A=(a_{ij})_{n\times n}$ e $B=(b_{ij})_{m\times m}$ as matrizes com $a_{ij}:=\langle v_i,v_j\rangle_V$ e $b_{ij}:=\langle w_i,w_j\rangle_W$. Daí, dados $v,v'\in V$, $w,w'\in W$, temos que $\langle v,v'\rangle_V=[v]_{\mathcal{V}}^tA[v']_{\mathcal{V}}$ e $\langle w,w'\rangle_W=[w]_{\mathcal{W}}^tB[w']_{\mathcal{W}}$. Das bases $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$, temos que $\mathcal{B}:=\{(v_1,0),\dots,(v_n,0),(0,w_1),\dots,(0,w_m)\}$ é uma base de $V\oplus W$. Observe que, para todo $v=\sum_{i=1}^n\lambda_iv_i\in V$ e para todo $w=\sum_{j=1}^m\gamma_jw_j\in W$, temos que $(v,w)=\sum_{i=1}^n\lambda_i(v_i,0)+\sum_{j=1}^m\gamma_j(0,w_j)$, logo $[(v,w)]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}[v]_{\mathcal{V}}\\ [w]_{\mathcal{W}}\end{pmatrix}$. Defina $\langle\cdot,\cdot\rangle_{V\oplus W}$ como sendo o produto escalar hermitiano cuja matriz correspondente é

$$C = (c_{ij})_{(n+m)\times(n+m)} := \begin{pmatrix} A & 0_{n\times m} \\ 0_{m\times n} & B \end{pmatrix}.$$

Note que $c_{ij} = \overline{c_{ji}}$, já que esta propriedade vale para A e para B. Dessa forma, dados $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ e $X \in \{E, F, H\}$, temos que:

$$\begin{aligned}
\langle X_{V\oplus W}(v,w),(v',w')\rangle_{V\oplus W} &= \langle (X_V(v), X_W(w)),(v',w')\rangle_{V\oplus W} = [(X_V(v), X_W(w))]^t_{\mathcal{B}} C[(v',w')]_{\mathcal{B}} = \\
&= \begin{pmatrix} [X_V(v)]^t_{\mathcal{V}} A[v']^t_{\mathcal{V}} \\ [X_W(w)]^t_{\mathcal{W}} B[w']_{\mathcal{W}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [v]^t_{\mathcal{V}} A[X^\star_V(v')]^t_{\mathcal{V}} \\ [w]^t_{\mathcal{W}} B[X^\star_W(w')]_{\mathcal{W}} \end{pmatrix} = [(v,w)]^t_{\mathcal{B}} C[(X^\star_V(v'), X^\star_W(w'))]_{\mathcal{B}} = \\
&= \langle (v,w),(X^\star_V(v'), X^\star_W(w'))\rangle_{V\oplus W} = \langle (v,w), X^\star_{V\oplus W}(v',w')\rangle_{V\oplus W}
\end{aligned}$$

Portanto, $V \oplus W$ é um $\mathfrak{g}$-módulo unitarizável. ⊠

Teorema 1.5.2. Todo $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita é unitarizável.

Demonstração. Pelo Corolário 1.3.7, todo $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita se decompõe em soma direta de $\mathbf{V}^{(n)}$, com $n \in \mathbb{N}$. Portanto, pelo Lema 1.5.1, basta mostrarmos que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{V}^{(n)}$ é unitarizável. Assim, considere o $\mathfrak{g}$-módulo $\mathbf{V}^{(n)}$, com $n \in \mathbb{N}$, conforme visto no diagrama (1.5). Lembre-se de que $\{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$ é base de $\mathbf{V}^{(n)}$ e que $E(v_i) = a_i v_{i-1}$, onde $i = 1, \ldots, n-1$ e $a_i = i(n-i)$. Note que $a_i > 0$, para todo $i = 1, \ldots, n-1$. Assim, defina $u_i := c_i v_i$, para $i = 0, \ldots, n-1$, onde $c_0 = 1$ e $c_i = \dfrac{c_{i-1}}{\sqrt{a_i}}$. Dessa forma, temos que $\{u_0, \ldots, u_{n-1}\}$ é também base de $\mathbf{V}^{(n)}$. Para essa nova base, temos que:

- $H(u_i) = H(c_i v_i) = c_i(n-1-2i)v_i = (n-1-2i)u_i$, para todo $i \in \{0, \ldots, n-1\}$;

- $F(u_{n-1}) = c_{n-1}F(v_{n-1}) = 0$ e $F(u_i) = c_i F(v_i) = c_i v_{i+1} = \dfrac{c_i}{c_{i+1}} u_{i+1} = \sqrt{a_{i+1}}\, u_{i+1}$, para todo $i \in \{0, \ldots, n-2\}$;

- $E(u_0) = c_0 E(v_0) = 0$ e $E(u_i) = c_i E(v_i) = c_i a_i v_{i-1} = \dfrac{c_i}{c_{i-1}} a_i u_{i-1} = \sqrt{a_i}\, u_{i-1}$, para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, onde $a_i = i(n-i)$.

$$\begin{tikzcd}
{} & u_{n-1} \arrow[l, "0"'] \arrow[loop above, dotted, "-n+1"] \arrow[r, bend left, "\sqrt{a_{n-1}}"] & u_{n-2} \arrow[l, bend left, "\sqrt{a_{n-1}}"] \arrow[loop above, dotted, "-n+3"] \arrow[r, bend left, "\sqrt{a_{n-2}}"] & u_{n-3} \arrow[l, bend left, "\sqrt{a_{n-2}}"] \arrow[loop above, dotted, "-n+5"] \arrow[r, bend left, "\sqrt{a_{n-3}}"] & \cdots \arrow[l, bend left, "\sqrt{a_{n-3}}"] \arrow[r, bend left, "\sqrt{a_3}"] & u_2 \arrow[l, bend left, "\sqrt{a_3}"] \arrow[loop above, dotted, "n-5"] \arrow[r, bend left, "\sqrt{a_2}"] & u_1 \arrow[l, bend left, "\sqrt{a_2}"] \arrow[loop above, dotted, "n-3"] \arrow[r, bend left, "\sqrt{a_1}"] & u_0 \arrow[l, bend left, "\sqrt{a_1}"] \arrow[loop above, dotted, "n-1"] \arrow[r, "0"] & {}
\end{tikzcd} \tag{1.14}$$

Assim, fixada a base $\{u_0, \ldots, u_{n-1}\}$ de $\mathbf{V}^{(n)}$, defina o produto escalar hermitiano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ cuja matriz que a representa é a matriz identidade $I_{n\times n}$. Sejam $v = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i u_i, w = \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_j u_j \in \mathbf{V}^{(n)}$ e $X \in \{E, F, H\}$. Se mostrarmos que $\langle X(u_i), u_j\rangle = \langle u_i, X^\star(u_j)\rangle$, para todo $i, j = 0, \ldots, n-1$, temos que $\mathbf{V}^{(n)}$ é unitarizável, pois

$$\langle X(v), w\rangle = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_i \overline{\gamma_j} \langle X(u_i), u_j\rangle = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_i \overline{\gamma_j} \langle u_i, X^\star(u_j)\rangle = \langle v, X^\star(w)\rangle$$

Dessa forma, veja que:

(i) $\langle E(u_0), u_{n-1}\rangle = 0 = \langle u_0, F(u_{n-1})\rangle$;

(ii) se $j = 0, \ldots, n-2$, então $\langle E(u_0), u_j\rangle = 0 = \sqrt{a_{j+1}}\langle u_0, u_{j+1}\rangle = \langle u_0, F(u_j)\rangle$;

(iii) se $i = 1, \ldots, n-1$ e $j = 0, \ldots, n-1$, então

$$\langle E(u_i), u_j\rangle = \sqrt{a_i}\langle u_{i-1}, u_j\rangle = \begin{cases} \sqrt{a_i}, & \text{se } j = i-1 \\ 0, & \text{se } j \neq i-1 \end{cases} \qquad \langle u_i, F(u_j)\rangle = \sqrt{a_{j+1}}\langle u_i, u_{j+1}\rangle = \begin{cases} \sqrt{a_{j+1}}, & \text{se } i = j+1 \\ 0, & \text{se } i \neq j+1 \end{cases}$$

logo, $\langle E(u_i), u_j\rangle = \langle u_i, F(u_j)\rangle$.

Assim, $\langle E(u_i), u_j\rangle = \langle u_i, E^\star(u_j)\rangle$, para todo $i, j = 0, \ldots, n-1$. Analogamente, podemos mostrar que $\langle F(u_i), u_j\rangle = \langle u_i, F^\star(u_j)\rangle$ e $\langle H(u_i), u_j\rangle = \langle u_i, H^\star(u_j)\rangle$, para todo $i, j = 0, \ldots, n-1$. Portanto, $\mathbf{V}^{(n)}$ é unitarizável. ⊠

A anti-involução $\star$ não é a única anti-involução de $\mathfrak{g}$. Analogamente à maneira como definimos $\star$, definimos $\diamond : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ como sendo o operador antilinear estendido a partir dos valores de $\diamond$ nos elementos da base natural de $\mathfrak{g}$:

$$\mathbf{e}^\diamond = \mathbf{e}, \quad \mathbf{f}^\diamond = \mathbf{f}, \quad \mathbf{h}^\diamond = -\mathbf{h}.$$

Da mesma forma como fizemos para $\star$, podemos mostrar que $\diamond$ é uma função involutiva e um anti-homomorfismo de álgebras de Lie, ou seja, que $\diamond$ é uma anti-involução de $\mathfrak{g}$.

Um $\mathfrak{g}$-módulo V é chamado de **$\diamond$-módulo**, se existe uma forma bilinear simétrica não degenerada em V, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, tal que $\langle X(v), w\rangle = \langle v, X^\diamond(w)\rangle$, para todo $v, w \in V$ e para todo $X \in \{E, F, H\}$, ou seja, se $X^\diamond$ é o operador adjunto de X com respeito a $\langle \cdot, \cdot \rangle$, para todo $X \in \{E, F, H\}$. Aqui, assim como na definição de $\mathfrak{g}$-módulo unitarizável com respeito a $\star$, $E^\diamond$, $F^\diamond$ e $H^\diamond$ é a notação para $\rho(\mathbf{e}^\diamond)$, $\rho(\mathbf{f}^\diamond)$, $\rho(\mathbf{h}^\diamond)$, respectivamente, onde $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ é a representação de $\mathfrak{g}$ em V. Entendemos forma bilinear simétrica não degenerada em um espaço vetorial V como sendo uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ linear nas duas componentes, isto é, tal que $\langle \lambda v + w, u\rangle = \lambda\langle v, u\rangle + \langle w, u\rangle$ e $\langle v, \lambda w + u\rangle = \lambda\langle v, w\rangle + \langle v, u\rangle$, para todo $v, w, u \in V$ e para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ e que, além disso, seja comutativa, isto é, $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$, para todo $v, w \in V$, e que satisfaz a seguinte condição:

$$\text{se } \langle v, w\rangle = 0, \text{ para todo } w \in V, \text{ então } v = 0.$$

O mesmo comentário que fizemos para um produto escalar hermitiano vale para uma forma bilinear simétrica não degenerada, isto é, se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ uma forma bilinear simétrica não degenerada em um espaço vetorial de dimensão finita, com uma base fixada $\mathcal{V} := \{e_1, \ldots, e_n\}$, então, para todo $v, v' \in V$, sabemos que

$$\langle v, v'\rangle = [v]^t_{\mathcal{V}} \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1\rangle & \ldots & \langle e_1, e_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_n, e_1\rangle & \ldots & \langle e_n, e_n\rangle \end{pmatrix} [v']_{\mathcal{V}},$$

Além disso, se V é um espaço vetorial de dimensão $n \in \mathbb{N}$, como uma base fixada $\mathcal{V}$, então sabemos também que toda matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ invertível, com $a_{ij} \in \mathbb{C}$ e $a_{ij} = a_{ji}$, define uma forma bilinear simétrica não degenerada $\langle \cdot, \cdot \rangle$, fazendo $\langle v, v' \rangle := [v]^t_{\mathcal{V}} A [v']_{\mathcal{V}}$, para todo $v, v' \in V$.

Teorema 1.5.3. Todo $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita é um $\diamond$-módulo.

Demonstração. Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita. Então, pelo Corolário 1.3.7, V é soma direta de vários $\mathbf{V}^{(n)}$, com $n \in \mathbb{N}$. Usando a demonstração do Lema 1.5.1, podemos mostrar que se cada parcela de uma soma direta é $\diamond$-módulo, então a soma inteira também é $\diamond$-módulo, logo basta mostrarmos que $\mathbf{V}^{(n)}$, com $n \in \mathbb{N}$, é um $\diamond$-módulo. Assim, considere a base $\{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$ de $\mathbf{V}^{(n)}$, conforme visto no diagrama (1.5). Para essa base defina $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a forma bilinear simétrica não degenerada através da matrizes

$$A = (a_{ij})_{n\times n} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que $a_{ij} = a_{ji}$ e que $\det(A) = \pm 1 \neq 0$, logo A é invertível, portanto, A define uma forma bilinear simétrica não degenerada. Observe que $\langle v_i, v_j \rangle = 1$, se $i + j = n - 1$ e $\langle v_i, v_j \rangle = 0$, para qualquer outro caso. Seguindo a justificativa dada no Teorema 1.5.2, para mostrarmos que $\mathbf{V}^{(n)}$ é $\diamond$-módulo, basta mostrarmos que $\langle X(v_i), v_j \rangle = \langle v_i, X^\diamond(v_j) \rangle$, para $X \in \{E, F, H\}$ e para $i, j = 0, \ldots, n-1$. Dessa forma, veja que:

(i) $\langle E(v_0), v_0 \rangle = 0 = \langle v_0, E(v_0) \rangle$;

(ii) se $i, j = 1, \ldots, n-1$, então

$$\langle E(v_i), v_j \rangle = a_i \langle v_{i-1}, v_j \rangle = \qquad\qquad \langle v_i, E(v_j) \rangle = a_j \langle v_i, v_{j-1} \rangle =$$
$$= \begin{cases} a_i, & \text{se } i - 1 + j = n - 1 \\ 0, & \text{se } i - 1 + j \neq n - 1 \end{cases} \qquad\qquad = \begin{cases} a_j, & \text{se } j - 1 + i = n - 1 \\ 0, & \text{se } j - 1 + i \neq n - 1 \end{cases}$$

logo, $\langle E(v_i), v_j \rangle = \langle v_i, E(v_j) \rangle$.

Assim, $\langle E(v_i), v_j \rangle = \langle v_i, E^\diamond(v_j) \rangle$, para todo $i, j = 0, \ldots, n-1$. De forma similar, podemos mostrar que $\langle X(v_i), v_j \rangle = \langle v_i, X^\diamond(v_j) \rangle$, para todo $i, j = 0, \ldots, n-1$ e para $X = F, H$. Portanto, V é um $\diamond$-módulo. ⊠

Uma pergunta que se coloca é de quantas maneiras diferentes podemos definir um produto escalar hermitiano tal que torne um $\mathfrak{g}$-módulo unitarizável. A resposta para essa pergunta não é trivial, porém é facilitada se considerarmos apenas $\mathfrak{g}$-módulo simples de dimensão finita, conforme veremos na Proposição 1.5.4. A mesma questão pode ser feito, pensando, contudo, em

$\diamond$-módulo. Também, aqui, a resposta para um $\mathfrak{g}$-módulo qualquer é complicada, mas a Proposição 1.5.5 a responde, considerenado $\mathfrak{g}$-módulos simples de dimensão finita.

Proposição 1.5.4. Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo simples de dimensão finita. Então o produto escalar hermitiano com respeito a qual V é unitarizável é único a menos de um escalar real positivo.

Demonstração. Sabemos que todo $\mathfrak{g}$-módulo simples de dimensão finita é isomorfo a $\mathbf{V}^{(n)}$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Assim, seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto escalar hermitiano que torna $\mathbf{V}^{(n)}$ um $\mathfrak{g}$-módulo unitarizável. Considere a base $\{u_0, \dots, u_{n-1}\}$, dada no Teorema 1.5.2. Como $H^\star = H$, então $(n-1-2i)\langle u_i, u_j \rangle = \langle H(u_i), u_j \rangle = \langle u_i, H(u_j) \rangle = (n-1-2j)\langle u_i, u_j \rangle$, logo $(i-j)\langle u_i, u_j \rangle = 0$, ou seja, $\langle u_i, u_j \rangle = 0$, se $i \neq j$. Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto escalar hermitiano, então $\langle u_0, u_0 \rangle =: c \in \mathbb{R}^+$, já que $u_0 \neq 0$. Vamos mostrar que $\langle u_i, u_i \rangle = c$, para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$, usando indução sobre i. Por definição, para $i = 0$, temos que $\langle u_0, u_0 \rangle = c$. Suponha que $\langle u_{i-1}, u_{i-1} \rangle = c$. Então

$$\begin{aligned}\langle u_i, u_i \rangle &\overset{(1.14)}{=} \left\langle \frac{1}{\sqrt{a_i}} F(u_{i-1}), \frac{1}{\sqrt{a_i}} F(u_{i-1}) \right\rangle = \frac{1}{a_i}\langle u_{i-1}, F^\star(F(u_{i-1}))\rangle = \frac{1}{a_i}\langle u_{i-1}, E(F(u_{i-1}))\rangle = \\ &\overset{(1.14)}{=} \frac{1}{a_i}\langle u_{i-1}, a_i u_{i-1}\rangle = \langle u_{i-1}, u_{i-1}\rangle = c\end{aligned}$$

Assim, $\langle u_i, u_i \rangle = c$, para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$, logo a matriz que representa esse produto escalar hermitiano, segundo a base $\{u_0, \dots, u_{n-1}\}$ é $cI_{n\times n}$. Portanto, o produto escalar hermitiano que definimos é igual ao produto escalar hermitiano do Teorema 1.5.2 multiplicado por c. ⊠

Proposição 1.5.5. Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo simples de dimensão finita. Então a forma bilinear simétrica não degenerada com respeito a qual V é um $\diamond$-módulo é única a menos de um escalar complexo não zero.

Demonstração. Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ uma forma bilinear simétrica não degenerada que torna $\mathbf{V}^{(n)}$, com $n \in \mathbb{N}$, um $\diamond$-módulo. Considere a base $\{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ de $\mathbf{V}^{(n)}$, conforme visto no diagrama (1.5). Como $H^\diamond = -H$, então $(n-1-2i)\langle v_i, v_j \rangle = \langle H(v_i), v_j \rangle = -\langle v_i, H(v_j) \rangle = -(n-1-2j)\langle v_i, v_j \rangle$, logo $(n-1-i-j)\langle v_i, v_j \rangle = 0$. Daí, se $\langle v_i, v_j \rangle \neq 0$, então $i + j = n-1$. Isto significa que a matriz que representa $\langle \cdot, \cdot \rangle$, segundo a base $\{v_0, \dots, v_{n-1}\}$, só pode ter valores diferente de zero na diagonal secundária. Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma forma não degenerada e $\langle v_0, v_i \rangle = 0$, para todo $i = 0, \dots, n-2$, então $\langle v_0, v_{n-1} \rangle =: c \neq 0$. Vamos mostrar, por indução sobre i, que $\langle v_i, v_{n-1-i} \rangle = c$, para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Por hipótese, temos que $\langle v_0, v_{n-1} \rangle = c$. Seja $i \in \{1, \dots, n-1\}$ e suponha que $\langle v_{i-1}, v_{n-i} \rangle = c$. Então

$$\begin{aligned}\langle v_i, v_{n-1-i} \rangle &\overset{(1.5)}{=} \left\langle F(v_{i-1}), \frac{1}{a_{n-i}} E(v_{n-i}) \right\rangle = \frac{1}{a_{n-i}}\langle v_{i-i}, F^\diamond(E(v_{n-i}))\rangle = \frac{1}{a_{n-i}}\langle v_{i-1}, F(E(v_{n-i}))\rangle = \\ &\overset{(1.5)}{=} \frac{1}{a_{n-i}}\langle v_{i-1}, a_{n-i} v_{n-i}\rangle = \langle v_{i-1}, v_{n-i}\rangle = c\end{aligned}$$

Portanto, $\langle v_i, v_{n-1-i} \rangle = c$, para todo $i \in \{0, \dots, n-1\}$, logo a matriz que representa essa forma bilinear simétrica não degenerada, segundo a base $\{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ é cA, onde A é a matriz definida no Teorema 1.5.3. ⊠

Capítulo 2

Álgebra universal envelopante de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

2.1 Construção e propriedade universal de $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$

Seja A uma álgebra associativa com identidade denotada por 1_A. Por definição, A é um espaço vetorial (lembre-se de que espaço vetorial para este texto significa $\mathbb{C}$-espaço vetorial) com uma multiplicação bilinear associativa com identidade. Se considerarmos A apenas como grupo abeliano, então tal multiplicação o torna um anel associativo com identidade. Assim, dizemos que um grupo abeliano V é um **A-módulo** (ou módulo sobre a álgebra associativa A), se V for um módulo à esquerda sobre o anel A, isto é, se, dados $a \in A$ e $v \in V$, temos que $a \cdot v \in A$ e além disso:

- $(a+a')\cdot v = a\cdot v + a'\cdot v$,
- $(aa')\cdot v = a\cdot(a'\cdot v)$,
- $a\cdot(v+v') = a\cdot v + a\cdot v'$,
- $1_A \cdot v = v$,

para todo $a, a' \in A$, $v, v' \in V$. Observe que, como A é um espaço vetorial, então, dado $\lambda \in \mathbb{C}$, temos que $\lambda 1_A \in A$. Daí, segue que se V é um A-módulo, então V é um espaço vetorial. Se A e B são álgebras associativas com identidade, então $\varphi : A \to B$ é dito um **homomorfismo de álgebras associativas**, se φ é uma transformação linear tal que $\varphi(aa') = \varphi(a)\varphi(a')$, para todo $a, a' \in A$, e tal que $\varphi(1_A) = 1_B$, onde 1_A e 1_B denotam as identidades de A e B, respectivamente.

Da mesma forma, assim como mostramos que um $\mathfrak{g}$-módulo V é equivalente a uma representação de $\mathfrak{g}$ em V, podemos mostrar que um A-módulo, com A sendo uma álgebra associativa com identidade, é equivalente a um homomorfismo de álgebras associativas $\sigma : A \to \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Observe que se $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(V)$ é uma representação de $\mathfrak{g}$ em V, então $\rho(\mathfrak{g})$ é fechado pelo comutador, quer dizer, $[\rho(x), \rho(y)] \in \rho(\mathfrak{g})$, para todo $\rho(x), \rho(y) \in \rho(\mathfrak{g})$, pois $[\rho(x), \rho(y)] = \rho([x, y])$ e $[x, y] \in \mathfrak{g}$. Contudo, $\rho(\mathfrak{g})$ não é fechado por composição. Por exemplo, considere V o $\mathfrak{g}$-módulo natural, visto no Exemplo 1.1.2 item (d). Para esse $\mathfrak{g}$-módulo, temos que $\rho(x) = x$, para todo $x \in \mathfrak{g}$. Assim, $\rho(\mathbf{e})\rho(\mathbf{f}) = \mathbf{ef} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, cujo traço é igual a 1. Logo, $\rho(\mathbf{e})\rho(\mathbf{f}) \notin \rho(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$, pois todo $x \in \mathfrak{g}$ tem traço igual a zero. Acontece que algumas vezes precisamos trabalhar com a composição de elementos em $\rho(\mathfrak{g})$, como é o caso do Teorema de Weyl (Teorema 1.3.4), onde o operador de Casimir foi fundamental para mostrarmos que um $\mathfrak{g}$-módulo indecomponível de dimensão finita é simples. Para superar esse problema a ideia será considerar uma álgebra associativa A, com $\mathfrak{g} \subseteq A$ e tal que, dada uma representação $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(V)$, exista uma única representação $\overline{\rho} : A \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ satisfazendo $\rho(x) = \overline{\rho}(x)$, para todo $x \in \mathfrak{g}$. Sendo assim, a composição de elementos de $\rho(\mathfrak{g})$ será um elemento de $\overline{\rho}(A)$. A álgebra A é conhecida como álgebra universal envelopante de $\mathfrak{g}$.

Considere $\mathfrak{g}$ visto apenas como o espaço vetorial com base $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{h}\}$. Seja $T(\mathfrak{g})$ a álgebra tensorial de $\mathfrak{g}$ (ver Apêndice B). Um ideal de $T(\mathfrak{g})$ é um subespaço W de $T(\mathfrak{g})$ tal que, para todo $x \in T(\mathfrak{g})$ e para todo $w \in W$, temos que $xw, wx \in W$. Seja $I := (\mathbf{e}\otimes\mathbf{f} - \mathbf{f}\otimes\mathbf{e} - \mathbf{h},\ \mathbf{h}\otimes\mathbf{e} - \mathbf{e}\otimes\mathbf{h} - 2\mathbf{e},\ \mathbf{h}\otimes\mathbf{f} - \mathbf{f}\otimes\mathbf{h} + 2\mathbf{f})_{T(\mathfrak{g})}$ um ideal de $T(\mathfrak{g})$. Como $T(\mathfrak{g})$ é uma álgebra associativa com identidade, então os elementos de I são da forma $x_1(\mathbf{e}\otimes\mathbf{f} - \mathbf{f}\otimes\mathbf{e} - \mathbf{h})y_1 + x_2(\mathbf{h}\otimes\mathbf{e} - \mathbf{e}\otimes\mathbf{h} - 2\mathbf{e})y_2 + x_3(\mathbf{h}\otimes\mathbf{f} - \mathbf{f}\otimes\mathbf{h} + 2\mathbf{f})y_3$, onde $x_i, y_i \in T(\mathfrak{g})$, com $i = 1, 2, 3$. Veja, no Apêndice B, que a multiplicação em $T(\mathfrak{g})$ é dada pelo produto tensorial, quer dizer, se $x, y \in T(\mathfrak{g})$, então $xy := x \otimes y$. Assim, o quociente $T(\mathfrak{g})/I$ é denotado por $U(\mathfrak{g})$ e é denominado **álgebra universal envelopante de $\mathfrak{g}$**. Observe que, em $U(\mathfrak{g})$, valem as seguintes igualdades:

$$(\mathbf{e}\otimes\mathbf{f} - \mathbf{f}\otimes\mathbf{e}) + I = \mathbf{h} + I, \qquad (\mathbf{h}\otimes\mathbf{e} - \mathbf{e}\otimes\mathbf{h}) + I = 2\mathbf{e} + I \quad \text{e} \quad (\mathbf{h}\otimes\mathbf{f} - \mathbf{f}\otimes\mathbf{h}) + I = -2\mathbf{f} + I.$$

Exemplo 2.1.1.

(a) Denote por 1 a identidade de $T(\mathfrak{g})$ e seja $c = (\mathbf{h}+1)^2 + 4(\mathbf{f}\otimes\mathbf{e})$. Vamos mostrar que $c + I$ está no centro de $U(\mathfrak{g})$, isto é, que $(c+I)(x+I) = (x+I)(c+I)$, para todo $x \in T(\mathfrak{g})$. Observe que se $cx + I = xc + I$, para todo $x \in \{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{h}\}$, então $c + I$ está no centro de $U(\mathfrak{g})$. Assim, para $x = \mathbf{e}$, usando as relações que definem I, temos que $\mathbf{h}\otimes\mathbf{e} + I = (2\mathbf{e} + \mathbf{e}\otimes\mathbf{h}) + I$ e que $\mathbf{f}\otimes\mathbf{e} + I = (\mathbf{e}\otimes\mathbf{f} - \mathbf{h}) + I$. Disso, segue que

$$\begin{aligned}(\mathbf{h}+1)^2\mathbf{e} + I &= \big(\mathbf{h}\otimes\mathbf{h}\otimes\mathbf{e} + 2\mathbf{h}\otimes\mathbf{e} + \mathbf{e}\big) + I = \big(\mathbf{e}\otimes\mathbf{h}\otimes\mathbf{h} + 4\mathbf{e}\otimes\mathbf{h} + 4\mathbf{e} + 2\mathbf{e}\otimes\mathbf{h} + 4\mathbf{e} + \mathbf{e}\big) + I = \\ &= \big(\mathbf{e}(\mathbf{h}+2)^2 + 2\mathbf{e}(\mathbf{h}+2) + \mathbf{e}\big) + I\end{aligned}$$

e que

$$\begin{aligned}4(\mathbf{f}\otimes\mathbf{e})\mathbf{e} + I &= \big(4(\mathbf{e}\otimes\mathbf{f} - \mathbf{h})\otimes\mathbf{e}\big) + I = \big(4\mathbf{e}\otimes\mathbf{f}\otimes\mathbf{e} - 4(\mathbf{e}\otimes\mathbf{h} + 2\mathbf{e})\big) + I = \\ &= \big(4\mathbf{e}(\mathbf{f}\otimes\mathbf{e}) - 4\mathbf{e}(\mathbf{h}+2)\big) + I.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}c\mathbf{e} + I &= \big((\mathbf{h}+1)^2\mathbf{e} + 4(\mathbf{f}\otimes\mathbf{e})\mathbf{e}\big) + I = \big(\mathbf{e}(\mathbf{h}+2)^2 + 2\mathbf{e}(\mathbf{h}+2) + \mathbf{e} + 4\mathbf{e}(\mathbf{f}\otimes\mathbf{e}) - 4\mathbf{e}(\mathbf{h}+2)\big) + I = \\ &= \big(\mathbf{e}(\mathbf{h}+1)^2 + 4\mathbf{e}(\mathbf{f}\otimes\mathbf{e})\big) + I = \mathbf{e}c + I.\end{aligned}$$

Para $x = \mathbf{f}, \mathbf{h}$, procede-se analogamente.

(b) Observe que $(\mathbf{h}+1)^2 + 4(\mathbf{f}\otimes\mathbf{e}), (\mathbf{h}-1)^2 + 4(\mathbf{e}\otimes\mathbf{f}) \in T(\mathfrak{g})$ são elementos diferentes, porém

$$\big((\mathbf{h}+1)^2 + 4(\mathbf{f}\otimes\mathbf{e})\big) + I = \mathbf{h}\otimes\mathbf{h} + 2\mathbf{h} + 1 + 4(\mathbf{e}\otimes\mathbf{f}) - 4\mathbf{h} + I = \big((\mathbf{h}-1)^2 + 4(\mathbf{e}\otimes\mathbf{f})\big) + I.$$

(c) Seja A uma álgebra associativa. Denotamos por A^{op} a *álgebra oposta* de A, onde a multiplicação é definida como $a \cdot a' := a'a$. Note que A^{op} é associativa, pois $a_1 \cdot (a_2 \cdot a_3) = a_1 \cdot (a_3 a_2) = (a_3 a_2) a_1 = a_3(a_2 a_1) = (a_2 a_1) \cdot a_3 = (a_1 \cdot a_2) \cdot a_3$. Assim, defina $\varphi : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})^{\mathrm{op}}$ como sendo a transformação linear tal que $\varphi(\mathbf{e}) = \mathbf{f} + I$, $\varphi(\mathbf{f}) = \mathbf{e} + I$ e $\varphi(\mathbf{h}) = \mathbf{h} + I$. Pela propriedade universal de $T(\mathfrak{g})$ (Proposição B.2.2), temos que existe único homomorfismo de álgebras associativas $\overline{\varphi} : T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})^{\mathrm{op}}$ tal que $\overline{\varphi}(\mathbf{e}) = \mathbf{f} + I$, $\overline{\varphi}(\mathbf{f}) = \mathbf{e} + I$ e $\overline{\varphi}(\mathbf{h}) = \mathbf{h} + I$. Observe que

$$\begin{aligned}\overline{\varphi}(\mathbf{e} \otimes \mathbf{f} - \mathbf{f} \otimes \mathbf{e} - \mathbf{h}) = \overline{\varphi}(\mathbf{e}) \cdot \overline{\varphi}(\mathbf{f}) - \overline{\varphi}(\mathbf{f}) \cdot \overline{\varphi}(\mathbf{e}) - \overline{\varphi}(\mathbf{h}) = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{e} - \mathbf{f} \cdot \mathbf{e} - \mathbf{h}) + I = \\ = (\mathbf{e} \otimes \mathbf{f} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{f} - \mathbf{h}) + I = 0 + I.\end{aligned}$$

Também podemos mostrar que $\overline{\varphi}(\mathbf{h} \otimes \mathbf{e} - \mathbf{e} \otimes \mathbf{h} - 2\mathbf{e}) = \overline{\varphi}(\mathbf{h} \otimes \mathbf{f} - \mathbf{f} \otimes \mathbf{h} + 2\mathbf{f}) = 0 + I$, logo $I \subseteq \ker(\overline{\varphi})$. Daí, uma vez que $T(\mathfrak{g})/I = U(\mathfrak{g})$, podemos considerar $\psi : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})^{\mathrm{op}}$, $x + I \mapsto \overline{\varphi}(x)$. Note que ψ é uma função involutiva. Note também que

$$\psi(x \otimes y + I) = \overline{\varphi}(x \otimes y) = \overline{\varphi}(x) \cdot \overline{\varphi}(y) = \overline{\varphi}(y) \otimes \overline{\varphi}(x) = \psi(y + I) \otimes \psi(x + I),$$

ou seja, $\psi : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ é um anti-homomorfismo de álgebras associativas. Portanto, ψ é uma anti-involução de $U(\mathfrak{g})$. $\square$

Para simplificar a notação, a partir de agora, o elemento $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n + I \in U(\mathfrak{g})$ será denotado por $x_1 \cdots x_n + I$. Mais ainda, quando não houver risco de confusão, omitiremos o I da notação, ou seja, o elemento $x_1 \cdots x_n + I$ será denotado por $x_1 \cdots x_n$. Assim, usando essa simplificação, podemos mostrar, por indução, que em $U(\mathfrak{g})$ valem as seguintes igualdades

$$\begin{array}{llll} \mathbf{f}^n\mathbf{h} = (\mathbf{h} + 2n)\mathbf{f}^n, & \mathbf{h}\mathbf{f}^n = \mathbf{f}^n(\mathbf{h} - 2n), & \mathbf{e}^n\mathbf{h} = (\mathbf{h} - 2n)\mathbf{e}^n, & \mathbf{h}\mathbf{e}^n = \mathbf{e}^n(\mathbf{h} + 2n), \\ \mathbf{f}\mathbf{h}^n = (\mathbf{h} + 2)^n\mathbf{f}, & \mathbf{h}^n\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{h} - 2)^n, & \mathbf{e}\mathbf{h}^n = (\mathbf{h} - 2)^n\mathbf{e}, & \mathbf{h}^n\mathbf{e} = \mathbf{e}(\mathbf{h} + 2)^n, \end{array} \tag{2.1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Considere as transformações lineares $\pi : T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ como sendo a projeção canônica e $\iota : \mathfrak{g} \to T(\mathfrak{g})$ como sendo a inclusão canônica. Note que $\pi(xy) = xy + I = (x + I)(y + I) = \pi(x)\pi(y)$, para todo $x, y \in T(\mathfrak{g})$, logo π é um homomorfismo de álgebras associativas. Defina a transformação linear $\varepsilon := \pi\iota : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$. Veja que $\varepsilon(\mathbf{e}) = \pi\iota(\mathbf{e}) = \mathbf{e}$, $\varepsilon(\mathbf{f}) = \pi\iota(\mathbf{f}) = \mathbf{f}$ e $\varepsilon(\mathbf{h}) = \pi\iota(\mathbf{h}) = \mathbf{h}$. Note que $\varepsilon : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})^{(-)}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie, pois

$$\begin{aligned}\varepsilon([\mathbf{e}, \mathbf{f}]) = \varepsilon(\mathbf{h}) = \mathbf{h} = [\mathbf{e}, \mathbf{f}] = [\varepsilon(\mathbf{e}), \varepsilon(\mathbf{f})] \\ \varepsilon([\mathbf{h}, \mathbf{e}]) = 2\varepsilon(\mathbf{e}) = 2\mathbf{e} = [\mathbf{h}, \mathbf{e}] = [\varepsilon(\mathbf{h}), \varepsilon(\mathbf{e})] \\ \varepsilon([\mathbf{h}, \mathbf{f}]) = -2\varepsilon(\mathbf{f}) = -2\mathbf{f} = [\mathbf{h}, \mathbf{f}] = [\varepsilon(\mathbf{h}), \varepsilon(\mathbf{f})]\end{aligned}$$

Teorema 2.1.2 (Propriedade Universal de $U(\mathfrak{g})$)**.** A álgebra universal envelopante $U(\mathfrak{g})$, junto do homomorfismo de álgebras de Lie $\varepsilon : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})^{(-)}$, satisfaz a seguinte propriedade universal: dados A uma álgebra associativa com identidade e $\varphi : \mathfrak{g} \to A^{(-)}$ um homomorfismo de álgebras de Lie, existe único homomorfismo de álgebras associativas $\overline{\varphi} : U(\mathfrak{g}) \to A$ tal que $\varphi = \overline{\varphi}\varepsilon$, isto é, que o comuta o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\varphi"'] & U(\mathfrak{g}) \arrow[d, "\exists!\overline{\varphi}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft", near start] \\ & A \end{tikzcd}$$

Demonstração. Como φ é um homomorfismo de álgebras de Lie, então, em particular, ele é uma transformação linear. Pela propriedade universal de $T(\mathfrak{g})$, visto na Proposição B.2.2, existe único homomorfismo de álgebras associativas $\psi : T(\mathfrak{g}) \to A$ tal que $\varphi = \psi\iota$, onde $\iota : \mathfrak{g} \to T(\mathfrak{g})$ é a inclusão canônica. Assim, $\psi(\mathbf{e}\otimes\mathbf{f}-\mathbf{f}\otimes\mathbf{e}-\mathbf{h}) = \psi(\mathbf{e})\psi(\mathbf{f})-\psi(\mathbf{f})\psi(\mathbf{e})-\psi(\mathbf{h}) = \varphi(\mathbf{e})\varphi(\mathbf{f})-\varphi(\mathbf{f})\varphi(\mathbf{e})-\varphi(\mathbf{h})$. Considerando a álgebra de Lie $A^{(-)}$, temos que $\varphi(\mathbf{e})\varphi(\mathbf{f})-\varphi(\mathbf{f})\varphi(\mathbf{e}) = [\varphi(\mathbf{e}), \varphi(\mathbf{f})]$. Uma vez que $\varphi : \mathfrak{g} \to A^{(-)}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie, então $[\varphi(\mathbf{e}), \varphi(\mathbf{f})] = \varphi([\mathbf{e}, \mathbf{f}]) = \varphi(\mathbf{h})$. Dessa forma, $\psi(\mathbf{e}\otimes\mathbf{f}-\mathbf{f}\otimes\mathbf{e}-\mathbf{h}) = \varphi(\mathbf{h})-\varphi(\mathbf{h}) = 0$. O mesmo pode-se provar para $\mathbf{h}\otimes\mathbf{e}-\mathbf{e}\otimes\mathbf{h}-2\mathbf{e}$ e para $\mathbf{h}\otimes\mathbf{f}-\mathbf{f}\otimes\mathbf{h}+2\mathbf{f}$, isto é, que $\psi(\mathbf{h}\otimes\mathbf{e}-\mathbf{e}\otimes\mathbf{h}-2\mathbf{e}) = \psi(\mathbf{h}\otimes\mathbf{f}-\mathbf{f}\otimes\mathbf{h}+2\mathbf{f}) = 0$. Logo, $I \subseteq \ker(\psi)$, portanto, temos que $\overline{\varphi} : U(\mathfrak{g}) \to A$, $x \mapsto \psi(x)$ está bem definida. Seja $\pi : T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ a projeção canônica, então $\overline{\varphi}\pi = \psi$. Lembre-se de que $\varepsilon = \pi\iota$. Assim, $\overline{\varphi}\varepsilon = \overline{\varphi}\pi\iota = \psi\iota = \varphi$, o que conclui a demonstração. $\boxtimes$

Proposição 2.1.3. Se uma álgebra associativa com identidade $U(\mathfrak{g})'$ junto de um homomorfismo de álgebras de Lie $\varepsilon' : \mathfrak{g} \to (U(\mathfrak{g})')^{(-)}$, satisfazem o Teorema 2.1.2, então as álgebras $U(\mathfrak{g})$ e $U(\mathfrak{g})'$ são canonicamente isomorfas.

Demonstração. Pela propriedade universal que $U(\mathfrak{g})$ e $U(\mathfrak{g})'$ satisfazem, temos que os seguintes diagramas comutam.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\varepsilon'"'] & U(\mathfrak{g}) \arrow[d, "\exists!\overline{\varepsilon'}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft", near start] \\ & U(\mathfrak{g})' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\varepsilon'"] \arrow[dr, "\varepsilon"'] & U(\mathfrak{g})' \arrow[d, "\exists!\overline{\varepsilon}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft", near start] \\ & U(\mathfrak{g}) \end{tikzcd}$$

Ou seja, $\overline{\varepsilon'}\varepsilon = \varepsilon'$ e $\overline{\varepsilon}\varepsilon' = \varepsilon$. Daí, $\overline{\varepsilon'}\overline{\varepsilon}\varepsilon' = \overline{\varepsilon'}\varepsilon = \varepsilon'$, logo o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\varepsilon'"] \arrow[dr, "\varepsilon'"'] & U(\mathfrak{g})' \arrow[d, "\overline{\varepsilon'}\overline{\varepsilon}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft", near start] \\ & U(\mathfrak{g})' \end{tikzcd}$$

Uma vez que $\mathrm{id}_{U(\mathfrak{g})'} : U(\mathfrak{g})' \to U(\mathfrak{g})'$ também comuta esse diagrama, então pela unicidade, dada pela propriedade universal, temos que $\overline{\varepsilon'}\overline{\varepsilon} = \mathrm{id}_{U(\mathfrak{g})'}$. Analogamente, podemos mostrar que $\overline{\varepsilon}\overline{\varepsilon'} = \mathrm{id}_{U(\mathfrak{g})}$. Portanto, $U(\mathfrak{g})$ é canonicamente isomorfo a $U(\mathfrak{g})'$. $\boxtimes$

Sejam V e W $U(\mathfrak{g})$-módulos. Dizemos que $\varphi : V \to W$ é um **homomorfismo de $U(\mathfrak{g})$-módulos**, se φ é uma transformação linear e se $\varphi(x \cdot v) = x \cdot \varphi(v)$, para todo $x \in U(\mathfrak{g})$ e para todo $v \in V$. Considerando os $U(\mathfrak{g})$-módulos V e W, dados pelas representações associadas $\sigma_V : U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ e $\sigma_W : U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$, respectivamente, temos que $\varphi : V \to W$ é um homomorfismo de $U(\mathfrak{g})$-módulos, se φ é uma transformação linear e se $\varphi\sigma_V(x) = \sigma_W(x)\varphi$, para todo $x \in U(\mathfrak{g})$.

Denotamos por $\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(V,W)$ o conjunto de todos os homomorfismos de $U(\mathfrak{g})$-módulos de V para W. Observe que a transformação linear zero de V para W é um homomorfismo de $U(\mathfrak{g})$-módulo, logo $\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(V,W) \neq \emptyset$, para todo V e W $U(\mathfrak{g})$-módulos. Além disso, o operador linear identidade sobre V também é um homomorfismo de $U(\mathfrak{g})$-módulos de V para V, ou seja, $\mathrm{id}_V \in \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(V,V)$.

Seja $\mathfrak{g}$-Mod a categoria cujos objetos são $\mathfrak{g}$-módulos, os morfismos são homomorfismos de $\mathfrak{g}$-módulos e a composição é a composição de funções usual. Definimos similarmente a categoria $U(\mathfrak{g})$-Mod (ver Apêndice C).

Teorema 2.1.4. As categorias $\mathfrak{g}$-Mod e $U(\mathfrak{g})$-Mod são categorias isomorfas.

Demonstração. Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo. Considere $\rho_V : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(V)$ a representação de $\mathfrak{g}$ em V, dada pela Proposição 1.1.3. Pela propriedade universal de $U(\mathfrak{g})$ (Teorema 2.1.2), existe único homomorfismo de álgebras associativas $\overline{\rho_V} : U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ tal que $\overline{\rho_V}\varepsilon = \rho_V$. Tal homomorfismo é uma representação de $U(\mathfrak{g})$ em V, logo, como há uma equivalência entre representações de $U(\mathfrak{g})$ e $U(\mathfrak{g})$-módulos, temos que V é um $U(\mathfrak{g})$-módulo. Seja $\varphi : V \to W$ um homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos e considere ρ_V e ρ_W representações de $\mathfrak{g}$ em V e em W, respectivamente. Então $\varphi\rho_V(x) = \rho_W(x)\varphi$, para todo $x \in \mathfrak{g}$. Considere os $U(\mathfrak{g})$-módulos V e W, dadas pelas representações $\overline{\rho_V}$ e $\overline{\rho_W}$, obtidas através da propriedade universal de $U(\mathfrak{g})$, conforme comentado no início dessa demonstração. Então $\overline{\rho_V}\varepsilon = \rho_V$ e $\overline{\rho_W}\varepsilon = \rho_W$. Assim, como $\varphi\rho_V(x) = \rho_W(x)\varphi$, para todo $x \in \mathfrak{g}$, temos que $\varphi\overline{\rho_V}(\varepsilon(x)) = \overline{\rho_W}(\varepsilon(x))\varphi$, para todo $x \in \mathfrak{g}$. Sejam $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ e $\mathbf{h}$ elementos em $U(\mathfrak{g})$. Então, pelo comentário feito logo após o Exemplo 2.1.1, temos que $\varepsilon(\mathbf{e}) = \mathbf{e}$, $\varepsilon(\mathbf{f}) = \mathbf{f}$ e $\varepsilon(\mathbf{h}) = \mathbf{h}$. Dessa forma, $\varphi\overline{\rho_V}(x) = \overline{\rho_W}(x)\varphi$, para todo $x \in \{\mathbf{e},\mathbf{f},\mathbf{h}\} \subseteq U(\mathfrak{g})$. Note que todo elemento de $U(\mathfrak{g})$ se escreve como soma finita de elementos da forma $\lambda + \mu x_1 \cdots x_n$, onde $n \in \mathbb{N}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ e $x_i \in \{\mathbf{e},\mathbf{f},\mathbf{h}\}$. Assim, para um elemento da forma $x_1 \cdots x_n$, com $n \in \mathbb{N}$ e $x_i \in \{\mathbf{e},\mathbf{f},\mathbf{h}\}$, temos que

$$\begin{aligned} \varphi\overline{\rho_V}(x_1 \cdots x_n) &= \varphi\overline{\rho_V}(x_1(\cdots(x_n))) = \varphi\overline{\rho_V}(x_1)\overline{\rho_V}(x_2(\cdots(x_n))) = \\ &= \overline{\rho_W}(x_1)\varphi\overline{\rho_V}(x_2(\cdots(x_n))) = \cdots = \overline{\rho_W}(x_1(\cdots(x_n)))\varphi = \overline{\rho_W}(x_1 \cdots x_n)\varphi \end{aligned} \tag{2.2}$$

Portanto, como $\overline{\rho_V}$ e $\overline{\rho_W}$ são transformações lineares, então $\varphi\overline{\rho_V}(x) = \overline{\rho_W}(x)\varphi$, para todo $x \in U(\mathfrak{g})$, ou seja, φ é um homomorfismo de $U(\mathfrak{g})$-módulos. De posse da discussão feita acima, defina $F : \mathfrak{g}\text{-Mod} \to U(\mathfrak{g})\text{-Mod}$, da seguinte maneira:

- um $\mathfrak{g}$-módulo V, dado pela representação ρ_V é levado no próprio V, visto agora como $U(\mathfrak{g})$-módulo V, dado pela representação $\overline{\rho_V}$, via propriedade universal de $U(\mathfrak{g})$;
- um homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos $\varphi : V \to W$ é levado nele mesmo, visto agora como um homomorfismo de $U(\mathfrak{g})$-módulos, conforme a equação (2.2).

Como $F(\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_V = \mathrm{id}_{F(V)}$ e $F(\varphi\varphi') = \varphi\varphi' = F(\varphi)F(\varphi')$, então F é um funtor.

Sejam V um $U(\mathfrak{g})$-módulo e $\sigma_V : U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ sua representação associada. Defina $\widetilde{\sigma_V} := \sigma_V\varepsilon : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Note que, dados $x, y \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\sigma_V}([x,y]) &= \sigma_V\varepsilon([x,y]) = \sigma_V\pi\iota(\underbrace{[x,y]}_{\in\mathfrak{g}}) = \sigma_V\pi(\underbrace{[x,y]}_{\in T(\mathfrak{g})}) = \sigma_V([x,y]+I) = \\
&= \sigma_V\big((xy-yx)+I\big) = \sigma_V\big((x+I)(y+I)-(y+I)(x+I)\big) = \\
&= \sigma_V(x+I)\sigma_V(y+I) - \sigma_V(y+I)\sigma_V(x+I) = [\sigma_V(x+I), \sigma_V(y+I)] = \\
&= [\sigma_V\pi(x), \sigma_V\pi(y)] = [\sigma_V\pi\iota(x), \sigma_V\pi\iota(y)] = [\widetilde{\sigma_V}(x), \widetilde{\sigma_V}(y)].
\end{aligned}$$

Portanto, $\widetilde{\sigma_V} : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(V)$ é um homomorfismo de álgebras de Lie. Logo, $\widetilde{\sigma_V}$ é uma representação de $\mathfrak{g}$ em V, ou seja, V é um $\mathfrak{g}$-módulo. Seja $\varphi : V \to W$ um homomorfismo de $U(\mathfrak{g})$-módulos e considere σ_V e σ_W representações de $U(\mathfrak{g})$ em V e em W, respectivamente. Então $\varphi\sigma_V(x) = \sigma_W(x)\varphi$, para todo $x \in U(\mathfrak{g})$. Daí, em particular,

$$\varphi\sigma_V(\varepsilon(x)) = \sigma_W(\varepsilon(x))\varphi, \tag{2.3}$$

para todo $x \in \mathfrak{g}$, ou seja, $\varphi\widetilde{\sigma_V} = \widetilde{\sigma_W}\varphi$, para todo $x \in \mathfrak{g}$. Isto significa que $\varphi : V \to W$ é um homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos. Dessa forma, defina $G : U(\mathfrak{g})\text{-Mod} \to \mathfrak{g}\text{-Mod}$ da seguinte maneira:

- um $U(\mathfrak{g})$-módulo V, dado pela representação σ_V é levado no próprio V, visto agora como $\mathfrak{g}$-módulo V, dado pela representação $\widetilde{\sigma_V} = \sigma_V\varepsilon$;

- um homomorfismo de $U(\mathfrak{g})$-módulos $\varphi : V \to W$ é levado nele mesmo, visto agora como um homomorfismo de $U(\mathfrak{g})$-módulos, conforme a equação (2.3).

Como $G(\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_V = \mathrm{id}_{G(V)}$ e $G(\varphi\varphi') = \varphi\varphi' = G(\varphi)G(\varphi')$, então G é um funtor.

Se V é um $\mathfrak{g}$-módulo e $\rho_V : \mathfrak{g} \to \mathrm{gl}(V)$ é sua representação associada, então $GF(\rho_V) = G(\overline{\rho_V}) = \overline{\rho_V}\varepsilon = \rho_V$, pois $\overline{\rho_V}$ comuta o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\rho_V"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright", pos=0.35, shift left=3] & U(\mathfrak{g}) \arrow[d, "\overline{\rho_V}"] \\ & \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) \end{tikzcd}$$

Se $\varphi : V \to W$ é um homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos, então $GF(\varphi) = G(\varphi) = \varphi$. Portanto, $GF = \mathrm{id}_{\mathfrak{g}\text{-Mod}}$. Agora, se V é um $U(\mathfrak{g})$-módulo e $\sigma_V : U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ é sua representação associada, então $FG(\sigma_V) = F(\sigma_V\varepsilon) = \overline{\sigma_V\varepsilon}$. Como σ_V faz o diagrama abaixo comutar, segue que $\overline{\sigma_V\varepsilon} = \sigma_V$, pela unicidade de $\overline{\sigma_V\varepsilon}$.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\sigma_V\varepsilon"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright", pos=0.35, shift left=3] & U(\mathfrak{g}) \arrow[d, "\overline{\sigma_V\varepsilon}=\sigma_V"] \\ & \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V) \end{tikzcd}$$

Por fim, se $\varphi : V \to W$ é um homomorfismo de $U(\mathfrak{g})$-módulos, então $FG(\varphi) = F(\varphi) = \varphi$. Portanto, $FG = \mathrm{id}_{U(\mathfrak{g})\text{-Mod}}$. $\boxtimes$

2.2 Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt

Vimos que todo elemento de $U(\mathfrak{g})$ se escreve como soma finita de elementos da forma $\lambda + \mu x_1 \cdots x_n$, onde $n \in \mathbb{N}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ e $x_\ell \in \{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{h}\}$, com $\ell = 1, \ldots, n$. Isso significa que $U(\mathfrak{g}) = \langle 1, x_1 \cdots x_n \mid n \in \mathbb{N} \text{ e } x_\ell \in \{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{h}\}\rangle_{\mathbb{C}}$, quer dizer, os elementos da forma $x_1 \cdots x_n$, onde $n \in \mathbb{N}$ e $x_\ell \in \{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{h}\}$, juntamente com a identidade 1 de $\mathbb{C}$, geram $U(\mathfrak{g})$ como espaço vetorial. O Lema 2.2.1 a seguir, vai melhorar esse resultado e mostrar que $\{\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}_0\}$ gera $U(\mathfrak{g})$, onde $x^0 := 1 \in \mathbb{C}$, para todo $x \in \{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{h}\}$, logo, em particular, $\mathbf{f}^0\mathbf{h}^0\mathbf{e}^0 = 1$. Na verdade, mais do que gerar $U(\mathfrak{g})$, tal conjunto é linearmente independente, ou seja, ele forma uma base para o espaço vetorial $U(\mathfrak{g})$, conforme veremos no teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, chamado, usualmente, de Teorema de PBW (Teorema 2.2.4). Os elementos da forma $\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k$, com $i, j, k \in \mathbb{N}_0$, são ditos *monômios padrões*.

Lema 2.2.1. Os monômios padrões geram $U(\mathfrak{g})$.

Demonstração. Dados $n \in \mathbb{N}$ e $x_\ell \in \{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{h}\}$, com $\ell = 1, \ldots, n$, se mostrarmos que $x_1 \cdots x_n$ é igual a soma de monômios padrões, teremos que $\lambda + \mu x_1 \cdots x_n$ também é soma de monômios padrões, já que $\lambda = \lambda \mathbf{f}^0\mathbf{h}^0\mathbf{e}^0$. Daí, como todo elemento de $U(\mathfrak{g})$ se escreve como soma finita de elementos da forma $\lambda + \mu x_1 \cdots x_n$, concluiremos o resultado a ser provado, isto é, que os monômios padrões geram $U(\mathfrak{g})$.

Assim, para provar que $x_1 \cdots x_n$ é igual a soma de monômios padrões, vamos usar duas induções: uma sobre o comprimento de $x_1 \cdots x_n$, isto é, sobre n, e a outra sobre a quantidade de inversões (a ser definido ainda). Se $n = 1$, então $x_1 = \mathbf{f}^1\mathbf{h}^0\mathbf{e}^0$, $x_1 = \mathbf{f}^0\mathbf{h}^1\mathbf{e}^0$ ou $x_1 = \mathbf{f}^0\mathbf{h}^0\mathbf{e}^1$. Dado $r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, suponha que $x_1 \cdots x_n$ é igual a soma de monômios padrões, para todo $n < r$. Vamos mostrar que o mesmo acontece com $x_1 \cdots x_r$. Observe que $x_1 \cdots x_r$ é diferente de um monômio padrão, se houver:

- um $\mathbf{f}$ depois de um $\mathbf{h}$,
- um $\mathbf{f}$ depois de um $\mathbf{e}$ ou
- um $\mathbf{h}$ depois de um $\mathbf{e}$.

isto é, se existir um monômio da forma $\mathbf{h}^k\mathbf{f}$, $\mathbf{e}^k\mathbf{f}$ ou $\mathbf{e}^k\mathbf{h}$ em $x_1 \cdots x_r$. Um monômio dessa forma é chamado de *k-inversão*. Vamos usar indução sobre k. Se só houver 0-inversões, então $x_1 \cdots x_r$ é um monômio padrão. Suponha que exista pelo menos uma k-inversão, digamos $\mathbf{e}^k\mathbf{f}$ e que ela ocorra na posição $x_i = \mathbf{e}$ e $x_{i+k+1} = \mathbf{f}$. Como $\mathbf{ef} = \mathbf{fe} + \mathbf{h}$, temos que

$$x_1 \cdots x_{i-1}\mathbf{e}^{k-1}\mathbf{ef}x_{i+k+2} \cdots x_r = x_1 \cdots x_{i-1}\mathbf{e}^{k-1}\mathbf{fe}x_{i+k+2} \cdots x_r + x_1 \cdots x_{i-1}\mathbf{e}^{k-1}\mathbf{h}x_{i+k+2} \cdots x_r.$$

Observe que $x_1 \cdots x_{i-1}\mathbf{e}^{k-1}\mathbf{fe}x_{i+k+2} \cdots x_r$ tem a mesma quantidade de inversões do que o monômio inicial em $x_1 \cdots x_{i-1}$ e em $x_{i+k+2} \cdots x_r$, mas tem uma $(k-1)$-inversão entre esses dois monômios, portanto, por indução sobre k, tal monômio é igual a soma de monômios padrões. Note também que $x_1 \cdots x_{i-1}\mathbf{e}^{k-1}\mathbf{h}x_{i+k+2} \cdots x_r$ tem comprimento $r-1$, logo, por indução sobre o comprimento, é igual a soma de monômios padrões. Portanto, $x_1 \cdots x_{i-1}\mathbf{ef}x_{i+k+2} \cdots x_r$ é igual a soma de monômios padrões. O mesmo pode-se provar para as inversões da forma $\mathbf{hf}$ e $\mathbf{eh}$, usando que $\mathbf{hf} = \mathbf{fh} - 2\mathbf{f}$ e que $\mathbf{eh} = \mathbf{he} - 2\mathbf{e}$. ⊠

Considere o espaço vetorial $\mathbb{C}[a,b,c]$ dos polinômios na variáveis a, b e c, e seja $\{a^i b^j c^k \mid i,j,k \in \mathbb{N}_0\}$ uma base para ele. Defina E, F e H operadores lineares em $\mathbb{C}[a,b,c]$ da seguinte maneira:

$$F(a^i b^j c^k) = a^{i+1} b^j c^k; \tag{2.4}$$

$$H(a^i b^j c^k) = \begin{cases} b^{j+1} c^k, & \text{se } i = 0; \\ F(H(a^{i-1} b^j c^k)) - 2a^i b^j c^k, & \text{se } i \neq 0; \end{cases} \tag{2.5}$$

$$E(a^i b^j c^k) = \begin{cases} c^{k+1}, & \text{se } i,j = 0; \\ H(E(b^{j-1} c^k)) - 2E(b^{j-1} c^k), & \text{se } i = 0, j \neq 0; \\ F(E(a^{i-1} b^j c^k)) - H(a^{i-1} b^j c^k), & \text{se } i \neq 0; \end{cases} \tag{2.6}$$

onde $i,j,k \in \mathbb{N}_0$.

Observação 2.2.2. Considere F, H e E, conforme definido acima, e considere também a álgebra de Lie subjacente à $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[a,b,c])$. Então

- $[H,F] = HF - FH$;
- $[E,H] = EH - HE$;
- $[E,F] = EF - FE$.

Assim, dado $a^i b^j c^k \in \mathbb{C}[a,b,c]$, temos que:

1) se $i \neq 0$, então

$$H(a^i b^j c^k) = F(H(a^{i-1} b^j c^k)) - 2a^i b^j c^k \;\Rightarrow\; -2a^i b^j c^k = H(F(a^{i-1} b^j c^k)) - F(H(a^{i-1} b^j c^k)),$$

ou seja, $-2a^i b^j c^k = [H,F](a^{i-1} b^j c^k)$. Daí, para $i \neq 0$, temos que $H(a^i b^j c^k) = F(H(a^{i-1} b^j c^k)) + [H,F](a^{i-1} b^j c^k))$;

2) se $i = 0$ e $j \neq 0$, então

$$E(b^j c^k) = H(E(b^{j-1} c^k)) - 2E(b^{j-1} c^k) \;\Rightarrow\; -2E(b^{j-1} c^k) = E(H(b^{j-1} c^k)) - H(E(b^{j-1} c^k)),$$

ou seja, $-2E(b^{j-1} c^k) = [E,H](b^{j-1} c^k)$. Daí, se $i = 0$ e $j \neq 0$, então $E(b^j c^k) = H(E(b^{j-1} c^k)) + [E,H](b^{j-1} c^k)$;

3) se $i \neq 0$, então

$$E(a^i b^j c^k) = F(E(a^{i-1} b^j c^k)) - H(a^{i-1} b^j c^k) \;\Rightarrow\; -H(a^{i-1} b^j c^k) = E(F(a^{i-1} b^j c^k)) - F(E(a^{i-1} b^j c^k)),$$

ou seja, $-H(a^{i-1} b^j c^k) = [E,F](a^{i-1} b^j c^k)$. Daí, se $i \neq 0$, então $E(a^i b^j c^k) = F(E(a^{i-1} b^j c^k)) + [E,F](a^{i-1} b^j c^k)$. □

Lema 2.2.3. O espaço vetorial $\mathbb{C}[a,b,c]$ junto dos operadores F, H e E, definidos pelas fórmulas (2.4), (2.5), (2.6), respectivamente, é um $\mathfrak{g}$-módulo.

Demonstração. Temos que mostrar que os operadores F, H e E em questão satisfazem as equações (1.1). Vamos começar mostrando que $HF - FH = -2F$. Dados $i,j,k \in \mathbb{N}_0$, temos que

$$H(F(a^ib^jc^k)) \overset{(2.4)}{=} H(a^{i+1}b^jc^k) \overset{(2.5)}{=} F(H(a^ib^jc^k)) - 2a^{i+1}b^jc^k \overset{(2.4)}{=} F(H(a^ib^jc^k)) - 2F(a^ib^jc^k),$$

ou seja, $H(F(a^ib^jc^k)) - F(H(a^ib^jc^k)) = -2F(a^ib^jc^k)$.

Para mostrarmos que $EF - FE = H$, procedemos analogamente, isto é, dados $i,j,k \in \mathbb{N}_0$, temos que

$$E(F(a^ib^jc^k)) \overset{(2.4)}{=} E(a^{i+1}b^jc^k) \overset{(2.6)}{=} F(E(a^ib^jc^k)) + H(a^ib^jc^k),$$

ou seja, $E(F(a^ib^jc^k)) - F(E(a^ib^jc^k)) = H(a^ib^jc^k)$.

Sejam $i,j,k \in \mathbb{N}_0$. Vamos mostrar que $HE - EH = 2E$, usando indução sobre i. Se $i = 0$, então

$$E(H(b^jc^k)) \overset{(2.5)}{=} E(b^{j+1}c^k) \overset{(2.6)}{=} H(E(b^jc^k)) - 2E(b^jc^k),$$

quer dizer, $HE - EH = 2E$. Seja $i \in \mathbb{N}$ e suponha, por indução, que $(HE - EH)(a^rb^jc^k) = 2E(a^rb^jc^k)$, para todo $r < i$. Vamos mostrar que $(HE - EH - 2E)(a^ib^jc^k) = 0$. Pela Observação 2.2.2, temos que $H(a^ib^jc^k) = (FH + [H,F])(a^{i-1}b^jc^k)$ e que $E(a^ib^jc^k) = (FE + [E,F])(a^{i-1}b^jc^k)$. Então

$$(HE - EH - 2E)(a^ib^jc^k) = (\underbrace{HFE + H[E,F] - EFH - E[H,F]}_{\text{a)}}\underbrace{-2FE}_{\text{b)}}\underbrace{-2[E,F]}_{\text{c)}})(a^{i-1}b^jc^k) \quad (2.7)$$

a) Observe que

$$HFE + H[E,F] - EFH - E[H,F] = \cancel{HFE} + HEF - \cancel{HFE} - \cancel{EFH} - EHF + \cancel{EFH} =$$
$$= [H,E]F = -[E,H]F.$$

b) Por indução, temos que $[H,E](a^{i-1}b^jc^k) = 2E(a^{i-1}b^jc^k)$, logo

$$-2FE(a^{i-1}b^jc^k) = -F[H,E](a^{i-1}b^jc^k) = F[E,H](a^{i-1}b^jc^k).$$

c) Já mostramos que $[H,F] = -2F$. Daí,

$$-2[E,F] = -2[E, -\frac{1}{2}[H,F]] = [E,[H,F]].$$

Dessa forma, podemos reescrever a equação (2.7) da seguinte maneira

$$(HE - EH - 2E)(a^ib^jc^k) = ([F,[E,H]] + [E,[H,F]])(a^{i-1}b^jc^k) \quad (2.8)$$

Já mostramos que $[E,F] = H$. Assim, como $[H,H] = 0$, então $[H,[F,E]] = [H,-[E,F]] = [H,-H] = 0$. Logo, a equação (2.8) se reescreve como

$$(HE - EH - 2E)(a^ib^jc^k) = ([F,[E,H]] + [E,[H,F]] + [H,[F,E]])(a^{i-1}b^jc^k)$$

que, pela identidade de Jacobi, é igual a zero. Portanto, $HE - EH = 2E$. ⊠

Teorema 2.2.4 (Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt). O conjunto $\{\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k \mid i,j,k \in \mathbb{N}_0\}$ é uma base para o espaço vetorial $U(\mathfrak{g})$.

Demonstração. Já mostramos no Lema 2.2.1 que os monômios padrões geram $U(\mathfrak{g})$. Falta mostrar, portanto, que eles são linearmente independentes. Assim, seja $\sum_{i,j,k}\lambda_{i,j,k}\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k = 0$. Vamos mostrar que $\lambda_{i,j,k} = 0$. Considere o $\mathfrak{g}$-módulo $\mathbb{C}[a,b,c]$, conforme visto no Lema 2.2.3 e seja $\rho : U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[a,b,c])$ sua representação associada, garantida pela propriedade universal de $U(\mathfrak{g})$. Assim, por um lado $\rho(0) = \rho(\sum_{i,j,k}\lambda_{i,j,k}\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k) = \sum_{i,j,k}\lambda_{i,j,k}\rho(\mathbf{f}^i)\rho(\mathbf{h}^j)\rho(\mathbf{e}^k) = \sum_{i,j,k}\lambda_{i,j,k}F^iH^jE^k$ e, por outro, $\rho(0) = 0$, ou seja, $\sum_{i,j,k}\lambda_{i,j,k}F^iH^jE^k$ é igual o endomorfismo zero em $\mathbb{C}[a,b,c]$. Observe que, das equações (2.4), (2.5) e (2.6), temos que $(F^iH^jE^k)(1) = (F^iH^j)(c^k) = F^i(b^jc^k) = a^ib^jc^k$. Daí,

$$0 = 0(1) = (\sum_{i,j,k}\lambda_{i,j,k}F^iH^jE^k)(1) = \sum_{i,j,k}\lambda_{i,j,k}(F^iH^jE^k)(1) = \sum_{i,j,k}\lambda_{i,j,k}a^ib^jc^k.$$

Como $\{a^ib^jc^k \mid i,j,k \in \mathbb{N}_0\}$ é base de $\mathbb{C}[a,b,c]$, então $\lambda_{i,j,k} = 0$. ⊠

Observação 2.2.5. Sejam $x_1 = \mathbf{e}$, $x_2 = \mathbf{f}$ e $x_3 = \mathbf{h}$. Tudo o que foi feito acima poderia ser feito para monômios da forma $x^i_{\sigma(1)}x^j_{\sigma(2)}x^k_{\sigma(3)}$, onde σ é uma permutação do conjunto $\{1,2,3\}$ e $i,j,k \in \mathbb{N}_0$. Portanto, podemos concluir que os monômios assim formam uma base para $U(\mathfrak{g})$. □

Corolário 2.2.6. O homomorfismo de álgebras de Lie $\varepsilon : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})^{(-)}$ é injetivo.

Demonstração. Sabemos que uma transformação linear $f : V \to W$ é injetiva, se a imagem de uma base de V pela f é um conjunto linearmente independente. Assim, uma vez que a imagem da base $\{\mathbf{e},\mathbf{h},\mathbf{f}\}$ de $\mathfrak{g}$ por ε é um subconjunto de $\{\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k \mid i,j,k \in \mathbb{N}_0\}$, que é uma base de $U(\mathfrak{g})$, concluímos que ε é um homomorfismo de álgebras de Lie injetivo. ⊠

Seja A uma álgebra associativa. Dizemos que um subespaço de $S \subseteq A$ é uma **subálgebra associativa** de A, se S é fechado pela multiplicação, isto é, se $ss' \in S$, para todo $s,s' \in S$. Se $\varphi : A \to B$ é um homomorfismo de álgebras associativas, então pode-se provar que $\varphi(A)$ é uma subálgebra de B. O mesmo se aplica a uma álgebra de Lie $\mathfrak{a}$, quer dizer, dizemos que um subespaço $\mathfrak{s} \subseteq \mathfrak{a}$ é uma **subálgebra de Lie** de $\mathfrak{a}$, se, para todo $s,s' \in \mathfrak{s}$, temos que $[s,s'] \in \mathfrak{s}$. Além disso, a imagem de um homomorfismo de álgebras de Lie $\varphi : \mathfrak{a} \to \mathfrak{b}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{b}$. Assim, do Corolário 2.2.6, podemos considerar $\mathfrak{g}$ como sendo uma subálgebra de Lie de $U(\mathfrak{g})^{(-)}$. Portanto, da equivalência entre as categorias $\mathfrak{g}$-Mod e $U(\mathfrak{g})$-Mod, dada pelo Teorema 2.1.4, para toda representação ρ de $\mathfrak{g}$, podemos assumir que ρ é igual à restrição de $\overline{\rho}$ à $\mathfrak{g}$, isto é, $\rho = \overline{\rho}|_{\mathfrak{g}}$, onde $\overline{\rho}$ é dado pela Propriedade Universal de $U(\mathfrak{g})$ (Teorema 2.1.2).

2.3 Filtração em $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ e a álgebra graduada associada

Uma álgebra associativa com identidade A é uma **álgebra filtrada**, se existem subespaços de A, $A^{(0)} \subseteq A^{(1)} \subseteq A^{(2)} \subseteq \dots$, tais que $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} A^{(i)}$ e $A^{(i)}A^{(j)} := \{xy \mid x \in A^{(i)},\ y \in A^{(j)}\} \subseteq A^{(i+j)}$, para todo $i, j \in \mathbb{N}_0$. Definimos o grau de um monômio $x_1 \ldots x_k$ de $U(\mathfrak{g})$, onde $x_i \in \{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{h}\}$, como sendo o inteiro positivo k. Se o monômio é um número complexo, definimos seu grau como sendo zero. Denotamos o grau de um monômio $u \in U(\mathfrak{g})$ por $\deg(u)$. Para cada $k \in \mathbb{N}_0$, definimos $U(\mathfrak{g})^{(k)}$ como sendo o espaço vetorial gerado pelos monômios de grau no máximo igual a k. Note que $U(\mathfrak{g})^{(0)} = \mathbb{C}$. Definimos também $U(\mathfrak{g})^{(-1)} := \{0\}$. Observe que $U(\mathfrak{g})^{(i)} \subseteq U(\mathfrak{g})^{(i+1)}$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, e que $U(\mathfrak{g}) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} U(\mathfrak{g})^{(i)}$. Além disso, da definição de multiplicação em $U(\mathfrak{g})$, temos que $U(\mathfrak{g})^{(i)} U(\mathfrak{g})^{(j)} \subseteq U(\mathfrak{g})^{(i+j)}$. Portanto, $U(\mathfrak{g})$ é uma álgebra filtrada.

Lema 2.3.1. Para cada $k \in \mathbb{N}$, o conjunto dos monômios padrões de grau no máximo igual a k é uma base para $U(\mathfrak{g})^{(k)}$.

Demonstração. Já sabemos, pelo Teorema de PBW (Teorema 2.2.4), que o conjunto dos monômios padrões é uma base para $U(\mathfrak{g})$. Logo, em particular, o subconjunto formado pelos monômios padrões de grau no máximo igual a k é linearmente independente. Uma vez que $U(\mathfrak{g})^{(k)} \subseteq U(\mathfrak{g})$, então, novamente pelo Teorema de PBW, todo elemento de $U(\mathfrak{g})^{(k)}$ se escreve como combinação linear de monômios padrões. Contudo, como $U(\mathfrak{g})^{(k)}$ é, por definição, o espaço vetorial gerado pelos monômios de grau no máximo igual a k, concluímos que todo elemento de $U(\mathfrak{g})^{(k)}$ se escreve como combinação linear de monômios padrões de grau no máximo igual a k. Portanto, o conjunto de tais monômios é uma base para $U(\mathfrak{g})^{(k)}$. ⊠

Dados $u \in U(\mathfrak{g})^{(i)}$ e $v \in U(\mathfrak{g})^{(j)}$, como $U(\mathfrak{g})^{(i)} U(\mathfrak{g})^{(j)} \subseteq U(\mathfrak{g})^{(i+j)}$, temos que $uv \in U(\mathfrak{g})^{(i+j)}$. Assim, podemos concluir que $[u, v] \in U(\mathfrak{g})^{(i+j)}$. Porém, podemos melhorar tal resultado e mostrar que $[u, v] \in U(\mathfrak{g})^{(i+j-1)}$, conforme o lema abaixo.

Lema 2.3.2. Sejam $i, j \in \mathbb{N}_0$. Se $u \in U(\mathfrak{g})^{(i)}$ e $v \in U(\mathfrak{g})^{(j)}$, então $[u, v] \in U(\mathfrak{g})^{(i+j-1)}$.

Demonstração. Pela bilinearidade do colchete de Lie $[-,-]$ e pelo Lema 2.3.1, é suficiente mostrarmos a afirmação para o caso onde u e v são monômios padrões. Sejam $u \in U(\mathfrak{g})^{(i)}$ e $v \in U(\mathfrak{g})^{(j)}$ monômios padrões, onde $i, j \in \mathbb{N}_0$. Vamos mostrar esse lema usando indução sobre o inteiro não negativo i. Se $i = 0$, então $u = \lambda \in \mathbb{C}$. Logo, $[u, v] = 0 \in U(\mathfrak{g})^{(-1)} \subseteq U(\mathfrak{g})^{(i+j-1)}$. Suponha, agora, $i > 0$ e que o resultado valha para todo $k < i$. Escreva $u = xu'$, onde $x \in \{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{h}\} \subseteq U(\mathfrak{g})^{(1)}$ e $u' \in U(\mathfrak{g})^{(i-1)}$. Assim,

$$\begin{aligned}[u, v] &= xu'v - vxu' = xvu' + x[u', v] - vxu' = \cancel{vxu'} + [x, v]u' + x[u', v] - \cancel{vxu'} = \\ &= [x, v]u' + x[u', v]\end{aligned}$$

Por indução, $[x, v] \in U(\mathfrak{g})^{(1+j-1)}$ e $[u', v] \in U(\mathfrak{g})^{(i-1+j-1)}$. Portanto, $[x, v]u' \in U(\mathfrak{g})^{(i+j-1)}$ e $x[u', v] \in U(\mathfrak{g})^{(i+j-1)}$, ou seja, $[u, v] \in U(\mathfrak{g})^{(i+j-1)}$. ⊠

Dizemos que uma álgebra associativa com identidade A é uma **álgebra graduada**, se existem subespaços de A, $A_0, A_1, \ldots$, tais que $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}_0} A_i$ e $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$ para todo $i, j \in \mathbb{N}_0$. Para cada $i \in \mathbb{N}_0$, defina $G(\mathfrak{g})_i$ como sendo o espaço vetorial quociente $U(\mathfrak{g})^{(i)} / U(\mathfrak{g})^{(i-1)}$. Uma vez que $U(\mathfrak{g})^{(i)}$ é o espaço vetorial gerado pelos monômios de grau no máximo igual a i, então $G(\mathfrak{g})_i =$

$\langle x_1 \cdots x_i + U(\mathfrak{g})^{(i-1)} \mid x_j \in \{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{h}\}$, para todo $j = 1, \ldots, i\rangle_{\mathbb{C}}$. Note que $G(\mathfrak{g})_0 = {}^{\mathbb{C}}\!/_{\{0\}} \underset{\mathbb{C}}{\cong} \mathbb{C}$. Além disso, do Lema 2.3.1, temos que $U(\mathfrak{g})^{(1)}$ é o espaço vetorial cuja base é $\{1, \mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{h}\}$, ou seja, $U(\mathfrak{g})^{(1)} = \mathbb{C} \oplus \mathfrak{g}$, logo $G(\mathfrak{g})_1 = {}^{(\mathbb{C} \oplus \mathfrak{g})}\!/_{\mathbb{C}} \underset{\mathbb{C}}{\cong} \mathfrak{g}$.

Seja $G(\mathfrak{g}) := \bigoplus\limits_{i \in \mathbb{N}_0} G(\mathfrak{g})_i$. Vamos definir uma multiplicação em $G(\mathfrak{g})$ que torne tal espaço vetorial em uma álgebra associativa com identidade. Para isso, considere $\overline{x} \in G(\mathfrak{g})_i$ e $\overline{y} \in G(\mathfrak{g})_j$. Sejam $x \in U(\mathfrak{g})^{(i)}$ e $y \in U(\mathfrak{g})^{(j)}$ os representantes de $\overline{x}$ e $\overline{y}$, respectivamente, isto é, $\overline{x} = x + U(\mathfrak{g})^{(i-1)}$ e $\overline{y} = y + U(\mathfrak{g})^{(j-1)}$. Pela definição da multiplicação em $U(\mathfrak{g})$, sabemos que $xy \in U(\mathfrak{g})^{(i+j)}$. Assim, defina $\overline{x}\,\overline{y} = (x + U(\mathfrak{g})^{(i-1)})(y + U(\mathfrak{g})^{(j-1)}) := xy + U(\mathfrak{g})^{(i+j-1)} \in G(\mathfrak{g})_{i+j}$ e estenda bilinearmente para elementos arbitrários em $G(\mathfrak{g})$. Observe que $G(\mathfrak{g})_i G(\mathfrak{g})_j \subseteq G(\mathfrak{g})_{i+j}$. Contudo, da forma como definimos essa multiplicação, foi preciso tomar um representante. Vamos mostrar, agora, que tal multiplicação é bem definida, ou seja, que não depende do representante escolhido. Sejam $x' \in U(\mathfrak{g})^{(i)}$ e $y' \in U(\mathfrak{g})^{(j)}$ outros representantes de $\overline{x}$ e $\overline{y}$, respectivamente, quer dizer, $\overline{x} = \overline{x'}$ e $\overline{y} = \overline{y'}$. Então $x - x' = u_1 \in U(\mathfrak{g})^{(i-1)}$ e $y - y' = u_2 \in U(\mathfrak{g})^{(j-1)}$. Daí,

$$x'y' + U(\mathfrak{g})^{(i+j-1)} = (x - u_1)(y - u_2) + U(\mathfrak{g})^{(i+j-1)} = xy - xu_2 - u_1 y + u_1 u_2 + U(\mathfrak{g})^{(i+j-1)}.$$

Note que $xu_2, u_1 y \in U(\mathfrak{g})^{(i+j-1)}$ e $u_1 u_2 \in U(\mathfrak{g})^{(i+j-2)} \subseteq U(\mathfrak{g})^{(i+j-1)}$. Portanto, $x'y' + U(\mathfrak{g})^{(i+j-1)} = xy + U(\mathfrak{g})^{(i+j-1)}$, ou seja, $\overline{x}\,\overline{y} = \overline{x'}\,\overline{y'}$.

Sejam $\overline{x} = x + U(\mathfrak{g})^{(i-1)} \in G(\mathfrak{g})_i$, $\overline{y} = y + U(\mathfrak{g})^{(j-1)} \in G(\mathfrak{g})_j$ e $\overline{z} = z + U(\mathfrak{g})^{(k-1)} \in G(\mathfrak{g})_k$. Então $(\overline{x}\,\overline{y})\overline{z} = (xy)z + U(\mathfrak{g})^{(i+j+k-1)} = x(yz) + U(\mathfrak{g})^{(i+j+k-1)} = \overline{x}(\overline{y}\,\overline{z})$. Portanto, a multiplicação definida em $G(\mathfrak{g})$ é associativa. Além disso, $\overline{1} = 1 + \{0\}$ é a identidade de $G(\mathfrak{g})$. Assim, $G(\mathfrak{g})$ é uma álgebra associativa com identidade e, como $G = \bigoplus\limits_{i \in \mathbb{N}_0} G(\mathfrak{g})_i$ e $G(\mathfrak{g})_i G(\mathfrak{g})_j \subseteq G(\mathfrak{g})_{i+j}$, então $G(\mathfrak{g})$ é uma álgebra graduada. Por fim, note que pelo Lema 2.3.1, dado $n \in \mathbb{N}_0$, temos que $\{\mathbf{f}^i \mathbf{h}^j \mathbf{e}^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}_0 \text{ e } i + j + k \leq n\}$ forma uma base para $U(\mathfrak{g})^{(n)}$. Portanto, o conjunto $\{\mathbf{f}^i \mathbf{h}^j \mathbf{e}^k + U(\mathfrak{g})^{(n-1)} \mid i, j, k \in \mathbb{N}_0 \text{ e } i + j + k = n\}$ forma uma base para $G(\mathfrak{g})_n$.

Proposição 2.3.3. A álgebra $G(\mathfrak{g})$ é isomorfa à álgebra dos polinômios nas variáveis a, b e c, $\mathbb{C}[a, b, c]$.

Demonstração. Vamos mostrar que $G(\mathfrak{g})$ é uma álgebra comutativa. Sejam $\overline{x}, \overline{y} \in G(\mathfrak{g})$. Então, existem $i, j \in \mathbb{N}_0$, $x \in U(\mathfrak{g})^{(i)}$ e $y \in U(\mathfrak{g})^{(j)}$ tais que $\overline{x} = x + U(\mathfrak{g})^{(i-1)}$ e $\overline{y} = y + U(\mathfrak{g})^{(j-1)}$. Assim, $\overline{x}\,\overline{y} = xy + U(\mathfrak{g})^{(i+j-1)} = yx + [x, y] + U(\mathfrak{g})^{(i+j-1)}$. Pelo Lema 2.3.2, $[x, y] \in U(\mathfrak{g})^{(i+j-1)}$, portanto, $\overline{x}\,\overline{y} = yx + U(\mathfrak{g})^{(i+j-1)} = \overline{y}\,\overline{x}$. Por definição, $G(\mathfrak{g})$ é uma álgebra associativa com identidade, logo, pela Proposição B.2.3, existe único homomorfismo de álgebras associativas $\varphi : \mathbb{C}[a, b, c] \to G(\mathfrak{g})$ tal que $\varphi(a) = \mathbf{f} + U(\mathfrak{g})^{(0)}$, $\varphi(b) = \mathbf{h} + U(\mathfrak{g})^{(0)}$ e $\varphi(c) = \mathbf{e} + U(\mathfrak{g})^{(0)}$. Seja $x \in G(\mathfrak{g})_n$, para algum $n \in \mathbb{N}_0$. Como $\{\mathbf{f}^i \mathbf{h}^j \mathbf{e}^k + U(\mathfrak{g})^{(n-1)} \mid i, j, k \in \mathbb{N}_0 \text{ e } i + j + k = n\}$ é uma base para $G(\mathfrak{g})_n$, então x é combinação linear de elementos da forma $\mathbf{f}^i \mathbf{h}^j \mathbf{e}^k + U(\mathfrak{g})^{(n-1)}$, com $i + j + k = n$. Note que $\mathbf{f}^i \mathbf{h}^j \mathbf{e}^k + U(\mathfrak{g})^{(n-1)}$ é igual a

$$\underbrace{(\mathbf{f} + U(\mathfrak{g})^{(0)}) \cdots (\mathbf{f} + U(\mathfrak{g})^{(0)})}_{i \text{ vezes}} \underbrace{(\mathbf{h} + U(\mathfrak{g})^{(0)}) \cdots (\mathbf{h} + U(\mathfrak{g})^{(0)})}_{j \text{ vezes}} \underbrace{(\mathbf{e} + U(\mathfrak{g})^{(0)}) \cdots (\mathbf{e} + U(\mathfrak{g})^{(0)})}_{k \text{ vezes}}$$

ou seja, $\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k + U(\mathfrak{g})^{(n-1)} = \varphi(a^i b^j c^k)$. Portanto, x é imagem de algum elemento em $\mathbb{C}[a,b,c]$, quer dizer, φ é sobrejetiva. Além disso, como $\{a^i b^j c^k \mid i,j,k \in \mathbb{N}_0\}$ é base de $\mathbb{C}[a,b,c]$ e $\varphi(a^i b^j c^k) = \mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k + U(\mathfrak{g})^{(i+j+k-1)}$, então φ é injetiva, pois a imagem da base de $\mathbb{C}[a,b,c]$ é um conjunto linearmente independente em $G(\mathfrak{g})$. Logo, $G(\mathfrak{g})$ é isomorfa à álgebra $\mathbb{C}[a,b,c]$. ⊠

Corolário 2.3.4. A álgebra $U(\mathfrak{g})$ não possui divisores de zero.

Demonstração. Sejam $u, v \in U(\mathfrak{g}) = \bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} U(\mathfrak{g})^{(i)}$ tais que $u \neq 0 \neq v$. Vamos mostrar que $uv \neq 0$. Considere os menores inteiros não negativos i e j tais que $u \in U(\mathfrak{g})^{(i)}$ e $v \in U(\mathfrak{g})^{(j)}$. Sejam $\overline{u} = u + U(\mathfrak{g})^{(i-1)}$ e $\overline{v} = v + U(\mathfrak{g})^{(j-1)}$. Como i e j são os menores números inteiros não negativos tais que $u \in U(\mathfrak{g})^{(i)}$ e $v \in U(\mathfrak{g})^{(j)}$, então $u \notin U(\mathfrak{g})^{(i-1)}$ e $v \notin U(\mathfrak{g})^{(j-1)}$, isto é, $\overline{u} \neq 0 \neq \overline{v}$. Pela Proposição 2.3.3, a álgebra $G(\mathfrak{g})$ é isomorfa à álgebra $\mathbb{C}[a,b,c]$, portanto, $G(\mathfrak{g})$ é um domínio. Logo, $\overline{u}\,\overline{v} = uv + U(\mathfrak{g})^{(i+j-1)} \neq 0$ e, consequentemente, $uv \neq 0$. ⊠

2.4 Centro de $U(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))$ e centralizador da subálgebra de Cartan

Seja $\mathfrak{h}$ o subespaço de $\mathfrak{g}$ gerado por $\mathbf{h}$, isto é, $\mathfrak{h} := \{\lambda\mathbf{h} \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$. Note que, para todo $x, y \in \mathfrak{h}$, $[x,y] = 0$, pois $[\mathbf{h},\mathbf{h}] = 0$. Logo, $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$, dita **subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$**. Considere o $\mathfrak{g}$-módulo adjunto, visto no Exemplo 1.1.2 item (e), isto é, o espaço vetorial $\mathfrak{g}$ junto dos operadores lineares $E = [\mathbf{e}, -]$, $F = [\mathbf{f}, -]$ e $H = [\mathbf{h}, -]$, e seja $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$, $x \mapsto [x, -]$ sua representação associada. Note que

$$H(\mathbf{e}) = [\mathbf{h},\mathbf{e}] = 2\mathbf{e}, \quad H(\mathbf{f}) = [\mathbf{h},\mathbf{f}] = -2\mathbf{f} \quad \text{e} \quad H(\mathbf{h}) = [\mathbf{h},\mathbf{h}] = 0,$$

isto é, $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ e $\mathbf{h}$ são autovetores de H, com autovalores 2, -2 e 0, respectivamente. Uma vez que todo elemento de $\mathfrak{h}$ é da forma $\lambda\mathbf{h}$, com $\lambda \in \mathbb{C}$, temos que a matriz de $\mathrm{ad}(\lambda\mathbf{h})$ segundo a base natural de $\mathfrak{g}$ é $\begin{pmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ou seja, a ação de qualquer elemento de $\mathfrak{h}$ sobre o $\mathfrak{g}$-módulo adjunto é dada por uma matriz diagonal.

Exemplo 2.4.1. Similarmente ao feito no Exemplo 1.1.2 item (e), vamos mostrar que $U(\mathfrak{g})$ é um $\mathfrak{g}$-módulo cuja ação é dada por $x \cdot u := [x,u] = xu - ux$, para todo $x \in \mathfrak{g}$ e $u \in U(\mathfrak{g})$. Temos que mostrar que as equações em (1.1) são satisfeitas. Mostraremos a primeira das três equações. As outras duas seguem analogamente. Seja $u \in U(\mathfrak{g})$. Então

$$(EF - FE)(u) = [\mathbf{e},[\mathbf{f},u]] - [\mathbf{f},[\mathbf{e},u]] = [\mathbf{e},[\mathbf{f},u]] + [\mathbf{f},[u,\mathbf{e}]] \overset{\substack{\text{identidade de}\\ \text{Jacobi}}}{=} [u,[\mathbf{e},\mathbf{f}]] = [u,\mathbf{h}] = H(u)$$

Tal ação é chamada *ação adjunta de $\mathfrak{g}$ sobre $U(\mathfrak{g})$*. Vale a pena notar que $T(\mathfrak{g})$ é uma representação de $\mathfrak{g}$, onde tal representação é obtida usando produtos tensorais e somas diretas da representação adjunta de $\mathfrak{g}$. Como o ideal de $T(\mathfrak{g})$ que define $U(\mathfrak{g})$ é um $\mathfrak{g}$-submódulo de $T(\mathfrak{g})$, segue que $U(\mathfrak{g})$ é um $\mathfrak{g}$-módulo com representação quociente. Tal representação coincide com a representação adjunta que definimos acima. □

Lema 2.4.2. Para todo $i, j, k \in \mathbb{N}_0$, o monômio padrão $\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k$ é um autovetor para o operador linear $[\mathbf{h}, -]$, com autovalor $2(k-i)$. Em particular, a ação de $\mathfrak{h}$ sobre o $\mathfrak{g}$-módulo adjunto $U(\mathfrak{g})$ é diagonalizável.

Demonstração. Veja que

$$\begin{aligned}[\mathbf{h}, \mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k] &= \mathbf{h}\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k - \mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k\mathbf{h} \overset{(2.1)}{=} \mathbf{f}^i(\mathbf{h}-2i)\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k - \mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k\mathbf{h} = \mathbf{f}^i\mathbf{h}^j(\mathbf{h}-2i)\mathbf{e}^k - \mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k\mathbf{h} \\ &\overset{(2.1)}{=} \mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k(\mathbf{h}-2i+2k) - \mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k\mathbf{h} = 2(k-i)\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k.\end{aligned}$$

Portanto, $\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k$ é um autovetor para o operador linear $[\mathbf{h}, -]$, com autovalor $2(k-i)$. Como esses monômios formam uma base para $U(\mathfrak{g})$, a ação é diagonalizável. ⊠

Para cada $s \in \mathbb{Z}$, seja $U(\mathfrak{g})_{2s} := \{u \in U(\mathfrak{g}) \mid [\mathbf{h}, u] = 2su\}$. Note, pelo Teorema de PBW (Teorema 2.2.4) e pelo Lema 2.4.2, que $U(\mathfrak{g})_{2s}$ é o subespaço de $U(\mathfrak{g})$ com base $\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^{s+i}$, onde $i, j \in \mathbb{N}_0$. Logo, temos que $U(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}} U(\mathfrak{g})_{2s}$. Por definição, temos que $u \in U(\mathfrak{g})_0$ se, e somente se, $[\mathbf{h}, u] = 0$. Logo, $U(\mathfrak{g})_0$ é o *centralizador da subálgebra de Cartan em* $U(\mathfrak{g})$. Em particular, $U(\mathfrak{g})_0$ é uma subálgebra de $U(\mathfrak{g})$, pois, dados $u_1, u_2 \in U(\mathfrak{g})_0$, temos que $[\mathbf{h}, u_1u_2] = \mathbf{h}u_1u_2 - u_1u_2\mathbf{h} = 0$, já que u_1 e u_2 comutam com $\mathbf{h}$, ou seja, dados $u_1, u_2 \in U(\mathfrak{g})_0$, concluímos, usando o fato dele ser o centralizador de $\mathfrak{h}$ em $U(\mathfrak{g})$, que $u_1u_2 \in U(\mathfrak{g})_0$. Veja que $\mathbf{h} \in U(\mathfrak{g})_0$ e pelo Exemplo 2.1.1 item (a), temos que $c = (\mathbf{h}+1)^2 + 4\mathbf{fe} \in U(\mathfrak{g})_0$.

Para demonstrar a próxima proposição, precisamos definir uma ordem monomial no anel dos polinômios nas variáveis $\mathbf{h}$ e c, $\mathbb{C}[\mathbf{h}, c]$, e também uma ordem monomial em $U(\mathfrak{g})_0$. Definimos a **ordem lexicográfica inversa em $\mathbb{C}[\mathbf{h}, c]$** da seguinte maneira: dados $\mathbf{h}^ic^j, \mathbf{h}^mc^n \in \mathbb{C}[\mathbf{h}, c]$, com $i, j, m, n \in \mathbb{N}_0$, dizemos que $\mathbf{h}^ic^j$ *é menor do que* $\mathbf{h}^mc^n$, fato denotado por $\mathbf{h}^ic^j \underset{\text{lex inv}}{<} \mathbf{h}^mc^n$, se $j < n$ ou, no caso de $j = n$, se $i < m$. Definimos o *grau lexicográfico* de $p \in \mathbb{C}[\mathbf{h}, c]$ como sendo o par (i, j) correspondente ao monômio maximal $\mathbf{h}^ic^j$ que ocorre em p com coeficiente diferente de zero, segundo a ordem lexicográfica inversa. Similarmente, definimos a **ordem lexicográfica em $U(\mathfrak{g})_0$** da seguinte maneira: dados $\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^i, \mathbf{f}^m\mathbf{h}^n\mathbf{e}^m \in U(\mathfrak{g})_0$, com $i, j, m, n \in \mathbb{N}_0$, dizemos que $\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^i$ *é menor do que* $\mathbf{f}^m\mathbf{h}^n\mathbf{e}^m$, fato denotado por $\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^i \underset{\text{lex}}{<} \mathbf{f}^m\mathbf{h}^n\mathbf{e}^m$, se $i < m$ ou, no caso de $i = m$, se $j < n$. O *grau lexicográfico* de um elemento em $U(\mathfrak{g})_0$ é definido de modo análogo ao grau lexicográfico de um elemento em $\mathbb{C}[\mathbf{h}, c]$.

Lema 2.4.3. Seja $\varphi : \mathbb{C}[\mathbf{h}, c] \to U(\mathfrak{g})_0$ o homomorfismo de álgebras associativas tal que $\varphi(\mathbf{h}) = \mathbf{h}$ e $\varphi(c) = c$, dado pela Proposição B.2.3. Então, para todo $i, j \in \mathbb{N}_0$, temos que

$$\varphi(\mathbf{h}^ic^j) = \begin{cases} \mathbf{h}^i, & j = 0; \\ 4^j\mathbf{f}^j\mathbf{h}^i\mathbf{e}^j + \text{ termos de menor grau lexicográfico}, & j \neq 0. \end{cases}$$

Demonstração. Se $j = 0$, então $\varphi(\mathbf{h}^ic^j) = \varphi(\mathbf{h}^i) = \mathbf{h}^i$. Seja $j \neq 0$. Vamos mostrar que $\varphi(\mathbf{h}^ic^j) = 4\mathbf{f}^j\mathbf{h}^i\mathbf{e}^j +$ termos de menor grau lexicográfico, usando indução sobre j. Para $j = 1$, temos que

$\varphi(\mathbf{h}^i c^j) = \varphi(\mathbf{h}^i c) = \mathbf{h}^i((\mathbf{h}+1)^2+4\mathbf{fe}) = 4\mathbf{h}^i\mathbf{fe}+\mathbf{h}^{i+2}+2\mathbf{h}^{i+1}+\mathbf{h}^i \overset{(2.1)}{=} 4\mathbf{f}(\mathbf{h}-2)^i\mathbf{e}+\mathbf{h}^{i+2}+2\mathbf{h}^{i+1}+\mathbf{h}^i =$ $4\mathbf{fh}^i\mathbf{e}+$ termos de menor grau lexicográfico. Suponha que o resultado seja válido para $j \in \mathbb{N}$. Então $\varphi(\mathbf{h}^i c^{j+1}) = \varphi(\mathbf{h}^i c^j)\varphi(c) = 4^j\mathbf{f}^j\mathbf{h}^i\mathbf{e}^j((\mathbf{h}+1)^2+4\mathbf{fe})+$ termos de menor grau lexicográfico $= 4^{j+1}\mathbf{f}^j\mathbf{h}^i\mathbf{e}^j\mathbf{fe}+$ termos de menor grau lexicográfico. Note que $\mathbf{e}^j\mathbf{f} = \mathbf{fe}^j +$ termos de menor grau lexicográfico e, como vimos $\mathbf{h}^i\mathbf{f} = \mathbf{fh}^i +$ termos de menor grau lexicográfico. Portanto, $\varphi(\mathbf{h}^i c^{j+1}) =$ $4^{j+1}\mathbf{f}^{j+1}\mathbf{h}^i\mathbf{e}^{j+1} +$ termos de menor grau lexicográfico. ⊠

Seja A uma álgebra associativa com identidade. Dizemos que $\{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq A$ é **algebricamente independente sobre** $\mathbb{C}$, se para todo polinômio não trivial $p(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_k]$ temos que $p(a_1, \ldots, a_k) \neq 0$.

Proposição 2.4.4.

(a) Os elementos $\mathbf{h}$ e c geram $U(\mathfrak{g})_0$.

(b) A álgebra $U(\mathfrak{g})_0$ coincide com a álgebra de polinômios $\mathbb{C}[\mathbf{h}, c]$. Em particular, $\mathbf{h}$ e c são algebricamente independentes.

Demonstração.

(a) Seja A a subálgebra de $U(\mathfrak{g})_0$ gerada por $\mathbf{h}$ e c. Como um elemento de $U(\mathfrak{g})_0$ é combinação linear de elementos da forma $\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^i$, basta mostrarmos que $\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^i \in A$. Uma das equações em (2.1), nos diz que $\mathbf{f}^i\mathbf{h} = (\mathbf{h}+2i)\mathbf{f}^i$. Logo, $\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^i = (\mathbf{h}+2i)^j\mathbf{f}^i\mathbf{e}^i$. Assim, temos que mostrar que $\mathbf{f}^i\mathbf{e}^i \in A$. Faremos isso usando indução sobre i. Se $i = 0$, então $\mathbf{f}^0\mathbf{e}^0 = 1 \in A$. Agora, observe que $\mathbf{f}^i\mathbf{e}^i = \mathbf{fef}^{i-1}\mathbf{e}^{i-1} + \mathbf{f}[\mathbf{f}^{i-1}, \mathbf{e}]\mathbf{e}^{i-1}$. Por indução, temos que $\mathbf{f}^{i-1}\mathbf{e}^{i-1} \in A$, logo, $\mathbf{fef}^{i-1}\mathbf{e}^{i-1} \in A$. Pelo Lema 2.3.2, $[\mathbf{f}^{i-1}, \mathbf{e}] \in U(\mathfrak{g})^{(i-1)}$, logo $\mathbf{f}[\mathbf{f}^{i-1}, \mathbf{e}]\mathbf{e}^{i-1} \in U(\mathfrak{g})^{(2i-1)}$. Além disso, como $\mathbf{f}[\mathbf{f}^{i-1}, \mathbf{e}]\mathbf{e}^{i-1} = \mathbf{f}^i\mathbf{e}^i - \mathbf{fef}^{i-1}\mathbf{e}^{i-1}$, onde $\mathbf{f}^i\mathbf{e}^i \in U(\mathfrak{g})_0$ e $\mathbf{fef}^{i-1}\mathbf{e}^{i-1} \in A \subseteq U(\mathfrak{g})_0$, então $\mathbf{f}[\mathbf{f}^{i-1}, \mathbf{e}]\mathbf{e}^{i-1} \in U(\mathfrak{g})_0$. Logo, $\mathbf{f}[\mathbf{f}^{i-1}, \mathbf{e}]\mathbf{e}^{i-1} \in U(\mathfrak{g})^{(2i-1)} \cap U(\mathfrak{g})_0$. Isso implica que podemos escrever $\mathbf{f}[\mathbf{f}^{i-1}, \mathbf{e}]\mathbf{e}^{i-1}$ como combinação linear de monômios da forma $\mathbf{f}^m\mathbf{h}^n\mathbf{e}^m = (\mathbf{h}+2m)^n\mathbf{f}^m\mathbf{e}^m$, com $2m+n \leq 2i-1$. Uma vez que $n, m, i \in \mathbb{N}_0$, temos que $m \leq i-1$, logo, por indução, $\mathbf{f}[\mathbf{f}^{i-1}, \mathbf{e}]\mathbf{e}^{i-1} \in A$.

(b) Seja $\varphi : \mathbb{C}[\mathbf{h}, c] \to U(\mathfrak{g})_0$ o homomorfismo de álgebras associativas tal que $\varphi(\mathbf{h}) = \mathbf{h}$ e $\varphi(c) = c$, dado pela proposição B.2.3. Pelo item (a), esse homomorfismo é sobrejetivo. Vamos mostrar, agora, que ele é injetivo. Seja $g(\mathbf{h}, c) \in \mathbb{C}[\mathbf{h}, c] \setminus \{0\}$ tal que $g(\mathbf{h}, c) = \alpha\mathbf{h}^i c^j +$ termos de menor grau lexicográfico, onde $i, j \in \mathbb{N}_0$ e $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Assim, pelo Lema 2.4.3, temos que $\varphi(g(\mathbf{h}, c)) = 4^j\alpha\mathbf{f}^j\mathbf{h}^i\mathbf{e}^j +$ termos de menor grau lexicográfico. Logo, $\varphi(g(\mathbf{h}, c)) \neq 0$, já que os monômios padrões são linearmente independentes. Portanto, φ é injetiva, como queríamos demonstrar. ⊠

Observação 2.4.5. Dado A uma álgebra associativa com identidade e $a \in A$, não necessariamente a subálgebra de A gerada por a coincide com $\mathbb{C}[a]$, porque a pode não ser algebricamente independente. A Proposição 2.4.4, contudo, afirma que as subálgebras de $U(\mathfrak{g})_0$ geradas por $\mathbf{h}$ e por c coincidem, respectivamente, com $\mathbb{C}[\mathbf{h}]$ e com $\mathbb{C}[c]$. □

Denote por $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ o centro da álgebra $U(\mathfrak{g})$. Como $U(\mathfrak{g})$ é gerada (como álgebra associativa) por $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ e $\mathbf{h}$, então

$$\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) := \{u \in U(\mathfrak{g}) \mid [x,u] = 0, \forall\, x \in U(\mathfrak{g})\} = \{u \in U(\mathfrak{g}) \mid [\mathbf{e},u] = [\mathbf{f},u] = [\mathbf{h},u] = 0\}.$$

Em particular, $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \subseteq U(\mathfrak{g})_0$. Note que $U(\mathfrak{g})^{(0)} = \mathbb{C} \subseteq \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ e que, pelo Exemplo 2.1.1 item (a), $c \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$.

Teorema 2.4.6. $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[c]$.

Demonstração. Como $c \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \subseteq U(\mathfrak{g})_0$, então, pela Observação 2.4.5, temos que $\mathbb{C}[c] \subseteq \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$. Uma vez que $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \subseteq U(\mathfrak{g})_0 = \mathbb{C}[\mathbf{h},c]$, considere $g(\mathbf{h},c) = \sum_{i=1}^k g_i(\mathbf{h})c^i \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, onde $g_i(\mathbf{h}) \in \mathbb{C}[\mathbf{h}]$. Vamos mostrar que $g_i(\mathbf{h}) \in \mathbb{C}$, para todo $i = 1,\dots,k$. Note que, por um lado $[\mathbf{e}, g(\mathbf{h},c)] = 0$, pois $g(\mathbf{h},c) \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, e por outro lado

$$[\mathbf{e}, g(\mathbf{h},c)] = [\mathbf{e}, \sum_{i=1}^k g_i(\mathbf{h})c^i] = \sum_{i=1}^k [\mathbf{e}, g_i(\mathbf{h})c^i] \overset{c^i \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})}{=} \sum_{i=1}^k c^i[\mathbf{e}, g_i(\mathbf{h})] = \sum_{i=1}^k c^i(\mathbf{e}g_i(\mathbf{h}) - g_i(\mathbf{h})\mathbf{e})$$

Das equações em (2.1), temos que $\mathbf{h}^n\mathbf{e} = \mathbf{e}(\mathbf{h}+2)^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, logo $g_i(\mathbf{h})\mathbf{e} = \mathbf{e}g_i(\mathbf{h}+2)$. Assim, $0 = [\mathbf{e}, g(\mathbf{h},c)] = \mathbf{e}\sum_{i=1}^k c^i(g_i(\mathbf{h}) - g_i(\mathbf{h}+2))$. Como $U(\mathfrak{g})$ não possui divisores de zero, então $\sum_{i=1}^k c^i(g_i(\mathbf{h}) - g_i(\mathbf{h}+2)) = 0$. Daí, $g_i(\mathbf{h}) - g_i(\mathbf{h}+2) = 0$, para todo $i = 1,\dots,k$, pois $U(\mathfrak{g})_0$ coincide com a álgebra $\mathbb{C}[\mathbf{h},c]$, conforme visto na Proposição 2.4.4. Isso implica que $g_i(\mathbf{h})$ é um polinômio constante, para todo $i = 1,\dots,k$, já que, caso contrário, $g_i(\mathbf{h})$ possuiria infinitas raízes, o que é absurdo. Portanto, $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathbb{C}[c]$. ⊠

Uma vez que $U(\mathfrak{g})_0, \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \subseteq U(\mathfrak{g})$, podemos considerar $U(\mathfrak{g})$ como $U(\mathfrak{g})_0$-módulo e como $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$-módulo tanto à esquerda, quanto à direita, via multiplicação. Esse será o caso para o próximo teorema.

Teorema 2.4.7.

(a) A álgebra $U(\mathfrak{g})$ é $U(\mathfrak{g})_0$-módulo livre, tanto à direita quanto à esquerda, com base $\mathcal{B}_1 = \{1, \mathbf{e}^k, \mathbf{f}^k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

(b) A álgebra $U(\mathfrak{g})$ é $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$-módulo livre, tanto à direita quanto à esquerda: à direita com base $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{h}^i\mathbf{e}^k, \mathbf{h}^i\mathbf{f}^k \mid i,k \in \mathbb{N}_0\}$ e à esquerda com base $\mathcal{B}_3 = \{\mathbf{e}^k\mathbf{h}^i, \mathbf{f}^k\mathbf{h}^i \mid i,k \in \mathbb{N}_0\}$.

Demonstração.

(a) Como $U(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{s\in\mathbb{Z}} U(\mathfrak{g})_{2s}$, basta mostrar que $U(\mathfrak{g})_{2s}$ é $U(\mathfrak{g})_0$-módulo livre tanto à direita, quanto à esquerda com base $\mathcal{B}_1$, para todo $s \in \mathbb{Z}$. Se $s > 0$, $U(\mathfrak{g})_{2s}$ tem como base os monômios padrões da forma $\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^{s+i}$. Como $\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^{s+i} = \mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^i\mathbf{e}^s$, temos que $U(\mathfrak{g})_{2s}$ é $U(\mathfrak{g})_0$-módulo à esquerda gerado por $\mathbf{e}^s$. Se s é um inteiro negativo, os elementos $\mathbf{e}^i\mathbf{h}^j\mathbf{f}^{i+|s|}$, os quais formam uma base para $U(\mathfrak{g})_{2s}$ (conforme visto na Observação 2.2.5), estão em $U(\mathfrak{g})_0\mathbf{f}^{|s|}$, já que $\mathbf{e}^i\mathbf{h}^j\mathbf{f}^{i+|s|} = \mathbf{e}^i\mathbf{h}^j\mathbf{f}^i\mathbf{f}^{|s|} \in U(\mathfrak{g})_0\mathbf{f}^{|s|}$, ou seja, $U(\mathfrak{g})_{2s}$ é $U(\mathfrak{g})_0$-módulo à esquerda gerado por $\mathbf{f}^{|s|}$. Finalmente, como $U(\mathfrak{g})$ não possui divisores de zero (Corolário 2.3.4), os geradores encontrados acima são, na verdade, uma base de $U(\mathfrak{g})_{2s}$ como $U(\mathfrak{g})_0$-módulo à esquerda (observe que $U(\mathfrak{g})_0$ é um $U(\mathfrak{g})_0$-módulo livre com base 1). A demonstração que $U(\mathfrak{g})$ é um $U(\mathfrak{g})_0$-módulo livre à direita é análoga.

(b) Como $U(\mathfrak{g})$ é $U(\mathfrak{g})_0$-módulo livre à esquerda e à direita com base $\mathcal{B}_1$, e $U(\mathfrak{g})_0 = \mathbb{C}[\mathbf{h}, c]$ é $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$-módulo livre à esquerda e à direita com base $\{1, \mathbf{h}, \mathbf{h}^2, \dots\}$ (lembre-se de que $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[c]$), segue que $U(\mathfrak{g})$ é $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$-módulo livre à direita com base $\mathcal{B}_2$ e à esquerda com base $\mathcal{B}_3$. ⊠

2.5 Homomorfismo de Harish-Chandra

Sabemos, pelo Lema 1.3.3, que a ação de c sobre $\mathbf{V}^{(n)}$ é dada pelo escalar n^2, quer dizer, dado $v \in \mathbf{V}^{(n)}$, temos que $c \cdot v = n^2 v$. Uma vez que $\mathbf{V}^{(n)}$ é o espaço vetorial de base $\{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ e cada $v_i = F^i(v_0)$, com $i = 2, \dots, n-1$ (ver diagrama 1.5), então podemos simplificar o cálculo da ação de c sobre um elemento arbitrário de $\mathbf{V}^{(n)}$, aplicando no elemento v_0. Como $E(v_0) = 0$ e lembrando que $c = (\mathbf{h}+1)^2 + 4\mathbf{fe}$, então $c \cdot v_0 = (\mathbf{h}+1)^2 \cdot v_0$. Pelo Teorema 2.4.6, sabemos que o centro da álgebra $U(\mathfrak{g})$ é $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[c]$, logo a ação de um elemento em $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ se reduz a ação de um elemento em $\mathbb{C}[\mathbf{h}]$. Abaixo investigaremos melhor a ação de $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ sobre módulos gerados por vetores que são anulados pela ação de $\mathbf{e}$.

Lema 2.5.1.

(a) $U(\mathfrak{g})\mathbf{e} \cap U(\mathfrak{g})_0 = \mathbf{f}U(\mathfrak{g}) \cap U(\mathfrak{g})_0$. Em particular, $I := U(\mathfrak{g})\mathbf{e} \cap U(\mathfrak{g})_0$ é um ideal de $U(\mathfrak{g})_0$.

(b) $U(\mathfrak{g})_0 = \mathbb{C}[\mathbf{h}] \oplus I$, como espaço vetorial.

Demonstração.

(a) Se $x \in I$, então $x = \sum_{k=1}^{n} u_k \mathbf{e}$, onde $u_k \in U(\mathfrak{g})$ são monômios da base de PBW. Como $I \subseteq U(\mathfrak{g})_0$, então $u_k = \mathbf{f}^{i_k+1}\mathbf{h}^{j_k}\mathbf{e}^{i_k}$. Assim, $u_k\mathbf{e} = \mathbf{f}\mathbf{f}^{i_k}\mathbf{h}^{j_k}\mathbf{e}^{i_k+1} \in \mathbf{f}U(\mathfrak{g}) \cap U(\mathfrak{g})_0$. Logo, $x \in \mathbf{f}U(\mathfrak{g}) \cap U(\mathfrak{g})_0$, ou seja, $I \subseteq \mathbf{f}U(\mathfrak{g}) \cap U(\mathfrak{g})_0$. A inclusão recíproca se demonstra analogamente. Vamos mostrar que I é um ideal de $U(\mathfrak{g})_0$, isto é, dados $u \in U(\mathfrak{g})_0$ e $x \in I$, temos que mostrar que $ux, xu \in I$. Como $I = U(\mathfrak{g})\mathbf{e} \cap U(\mathfrak{g})_0$, então $x = \sum_{k=1}^{n} u_k\mathbf{e}$, onde $u_k \in U(\mathfrak{g})$. Note que $ux \in U(\mathfrak{g})_0$, pois $u, x \in U(\mathfrak{g})_0$ e $U(\mathfrak{g})_0$ é subálgebra de $U(\mathfrak{g})$, e note também que $ux = \sum_{k=1}^{n} uu_k\mathbf{e} \in U(\mathfrak{g})\mathbf{e}$. Logo, $ux \in I$. Agora, como $I = \mathbf{f}U(\mathfrak{g}) \cap U(\mathfrak{g})_0$, então $x = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{f}u'_k$, com $u'_k \in U(\mathfrak{g})$. Assim, $xu \in U(\mathfrak{g})_0$, pelo mesmo motivo que $ux \in U(\mathfrak{g})_0$, e também $xu = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{f}u'_k u \in \mathbf{f}U(\mathfrak{g})$. Portanto, $xu \in I$.

(b) Como $U(\mathfrak{g})_0$ tem base os monômios padrões da forma $\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^i$, basta mostrarmos que $\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^i \in \mathbb{C}[\mathbf{h}] \oplus I$, para todo $i, j \in \mathbb{N}_0$. Se $i = 0$, então $\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^i = \mathbf{h}^j \in \mathbb{C}[\mathbf{h}]$. Se $i \in \mathbb{N}$, então $\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^i \overset{2.1}{=} (\mathbf{h}+2i)^j\mathbf{f}^i\mathbf{e}^i \in U(\mathfrak{g})\mathbf{e} \cap U(\mathfrak{g})_0 = I$. Observe que um elemento não nulo em I tem a forma $u\mathbf{e}$, com $u \in U(\mathfrak{g}) \setminus \{0\}$. Logo, $\mathbb{C}[\mathbf{h}] \cap I = \{0\}$. Dessa forma, $U(\mathfrak{g})_0 = \mathbb{C}[\mathbf{h}] \oplus I$. ⊠

Defina κ como sendo a projeção de $U(\mathfrak{g})_0$ sobre $\mathbb{C}[\mathbf{h}]$ cujo núcleo é I, isto é, $\kappa : U(\mathfrak{g})_0 \to \mathbb{C}[\mathbf{h}]$, $x + y \mapsto x$, onde $x \in \mathbb{C}[\mathbf{h}]$ e $y \in I$. Note que, por um lado, $\kappa((x+y)(x'+y')) = \kappa(xx' + xy' + yx' + yy') = xx'$, pois, como I é ideal de $U(\mathfrak{g})_0$, então $xy', yx', yy' \in I$. Por outro lado,

$xx' = \kappa(x+y)\kappa(x'+y')$. Portanto, κ é um homomorfismo de álgebras associativas, chamado de **homomorfismo de Harish-Chandra**.

Proposição 2.5.2. Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo e $v \in V$ um elemento tal que $E(v) = 0$. Então para qualquer $g \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, temos que $g \cdot v = \kappa(g) \cdot v$

Demonstração. Como $c = (\mathbf{h}+1)^2 + 4\mathbf{fe}$ e $\mathbf{fe} \in I$, segue que $\kappa(c) = (\mathbf{h}+1)^2$. Além disso, como $E(v) = 0$, então $c \cdot v = (\mathbf{h}+1)^2 \cdot v = \kappa(c) \cdot v$. Logo, se $g(c) \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}[c]$, então $g(c) \cdot v = \kappa(g(c)) \cdot v$, pois κ é um homomorfismo de álgebras associativas. ⊠

Teorema 2.5.3. A restrição de κ a $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ define um isomorfismo de álgebras associativas entre $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ e $\mathbb{C}[(\mathbf{h}+1)^2]$.

Demonstração. Como já foi observado $\kappa(c) = \kappa((\mathbf{h}+1)^2 + 4\mathbf{fe}) = (\mathbf{h}+1)^2$, pois $\mathbf{fe} \in I$. Logo, $\kappa(\mathbb{C}[c]) = \mathbb{C}[(\mathbf{h}+1)^2]$. Como κ leva a base $\{1, c, c^2, \dots\}$ de $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ na base $\{1, (\mathbf{h}+1)^2, (\mathbf{h}+1)^4, \dots\}$ de $\mathbb{C}[(\mathbf{h}+1)^2]$, temos que κ é injetiva, e portanto um isomorfismo. ⊠

2.6 Propriedade noetheriana

Sejam R um anel associativo com identidade e M um R-módulo à esquerda. Dizemos que:

i) M é **R-módulo noetheriano à esquerda**, se toda cadeia ascendente de R-submódulos à esquerda de M estabiliza, isto é, se para toda cadeia $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \dots$ de R-submódulos à esquerda de M, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que $M_i = M_n$, para todo $i \geq n$;

ii) R é **anel noetheriano à esquerda**, se R visto como R-módulo à esquerda for um R-módulo noetheriano à esquerda.

Em particular, como uma álgebra associativa com identidade pode ser vista como um anel associativo com identidade, então dizemos que uma tal álgebra A é uma **álgebra noetheriana à esquerda**, se A é um anel noetheriano à esquerda. De maneira semelhante, define-se uma *álgebra noetheriana à direita*.

Proposição 2.6.1. Sejam R um anel associativo com identidade, M um R-módulo à esquerda e N um R-submódulo à esquerda de M. Então M é R-módulo noetheriano à esquerda se, e somente se, N e M/N são R-módulos noetherianos à esquerda.

Demonstração. Suponha que M é um R-módulo noetheriano à esquerda. Então N é um R-módulo noetheriano à esquerda, pois toda cadeia ascendente de R-submódulos à esquerda de N é, em particular, cadeia ascendente de R-submódulos à esquerda de M, portanto estabiliza. Sejam $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots$ uma cadeia ascendente de R-submódulos à esquerda de M/N e $\varphi : M \to M/N$, a projeção $m \mapsto m+N$. Defina $M_i := \varphi^{-1}(U_i)$. Assim, temos que $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$. Como M é um R-módulo noetheriano à esquerda, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $M_i = M_n$, para todo $i \geq n$. Daí, $U_i = U_n$, para todo $i \geq n$. Reciprocamente, suponha que N e M/N são R-módulo noetheriano à esquerda e seja $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots$ uma cadeia ascendente de R-submódulos á esquerda de M. Dessa cadeia obtemos as cadeias $\varphi(M_1) \subseteq \varphi(M_2) \subseteq \cdots$ em M/N e $M_1 \cap N \subseteq M_2 \cap N \subseteq \cdots$ em N. Então, existem $n_1 \in \mathbb{N}$ e $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $\varphi(M_i) = \varphi(M_{n_1})$, para todo $i \geq n_1$, e $M_j \cap N = M_{n_2} \cap N$, para todo $j \geq n_2$. Seja n igual ao máximo entre n_1 e n_2. Vamos mostrar que $M_i = M_n$, para todo $i \geq n$. Seja $m \in M_i$. Então, como $\varphi(M_i) = \varphi(M_n)$, existe $m' \in M_n$ tal que $\varphi(m) = \varphi(m')$, ou seja, $m - m' \in N$. Uma vez que $\varphi(m) \in \varphi(M_i) = \varphi(M_n)$, então $m - m' \in M_n \cap N$. Daí, $m - m' = n \in M_n \cap N$, logo, $m = n + m' \in M_n$, ou seja, $M_i \subseteq M_n$, para todo $i \geq n$. Logo, como pela definição da cadeia ascendente $M_n \subseteq M_i$, obtemos $M_i = M_n$, para todo $i \geq n$. ⊠

Proposição 2.6.2. Sejam R um anel associativo com identidade e M um R-módulo noetheriano à esquerda. Então $M^n := \underbrace{M \times \cdots \times M}_{n \text{ vezes}}$ também um R-módulo noetheriano à esquerda.

Demonstração. Note que M é um R-submódulo à esquerda de $M \times M$ e que $M \times M/M$ é isomorfo ao R-módulo M. Portanto, pela Proposição 2.6.1, $M \times M$ é um R-módulo noetheriano à esquerda. Por indução, concluímos a demonstração. ⊠

Dizemos que um R-módulo à esquerda M é um **R-módulo à esquerda finitamente gerado**, se existem $m_1, \ldots, m_n \in M$ tais que $M = \{r_1 m_1 + \cdots + r_n m_n \mid r_i \in R, m_i \in M\}$. Usamos a notação $Rm_1 + \cdots + Rm_n$ para denotar o R-módulo à esquerda gerado por $m_1, \ldots, m_n$.

Proposição 2.6.3. Sejam R um anel associativo com identidade e M um R-módulo à esquerda. Então M é um R-módulo noetheriano à esquerda se, e somente se, todo R-submódulo à esquerda de M é finitamente gerado.

Demonstração. Sejam M um R-módulo noetheriano à esquerda e S um R-submódulo à esquerda de M. Suponha que S não é finitamente gerado. Então $S \neq Rm_1$, para todo $m_1 \in S$. Assim, existe $m_2 \in S \setminus \{m_1\}$. Daí, novamente por S não ser finitamente gerado, temos que $S \neq Rm_1 + Rm_2$. Seguindo esse raciocínio, concluímos que existe uma cadeia ascendente de R-submódulos à esquerda de M, $Rm_1 \subsetneq Rm_1 + Rm_2 \subsetneq Rm_1 + Rm_2 + Rm_3 \subsetneq \cdots$, que não estabiliza. Absurdo, pois M um R-módulo noetheriano à esquerda. Logo, todo R-submódulo à esquerda de M é finitamente gerado. Reciprocamente, suponha que todo R-submódulo à esquerda de M é finitamente gerado. Seja $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \ldots$ uma cadeia ascendente de R-submódulos à esquerda de M. Então $N := \cup_{i \in \mathbb{N}} M_i$ é um R-submódulo à esquerda de M, logo, existem $m_1, \ldots, m_k \in M$ tal que $N = Rm_1 + \cdots + Rm_k$. Portanto, como $N = \cup_{i \in \mathbb{N}} M_i$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $m_j \in M_n$, para todo $j = 1, \ldots, k$, ou seja, $N \subseteq M_n$. Uma vez que, pela definição de N, $M_n \subseteq N$, então $N = M_n$, portanto $M_i = M_n$, para todo $i \geq n$. ⊠

Seja R um anel associativo com identidade. Uma vez que um ideal à esquerda de R é equivalente a um R-submódulo à esquerda de R, então, da Proposição 2.6.3, concluímos que se A é uma álgebra associativa com identidade, então A é uma álgebra noetheriana à esquerda se, e somente se, todo ideal à esquerda de A é finitamente gerado.

Proposição 2.6.4. Sejam R anel noetheriano à esquerda e M um R-módulo à esquerda. Então M é um R-módulo noetheriano à esquerda se, e somente se, M é finitamente gerado. Em particular, se M é finitamente gerado e $N \subseteq M$ é R-submódulo à esquerda, então N é finitamente gerado.

Demonstração. Se M é um R-módulo noetheriano à esquerda, então, pela Proposição 2.6.3, temos que M é finitamente gerado, pois M é um R-submódulo à esquerda de M. Reciprocamente, suponha que M é finitamente gerado, isto é, que existem $m_1, \ldots, m_k \in M$ tais que $M = Rm_1 + \cdots + Rm_k$. Pela Proposição 2.6.2, R^k é um R-módulo noetheriano à esquerda. Defina $\varphi : R^k \to M$, $(r_1, \ldots, r_k) \mapsto \sum_{i=1}^k r_i m_i$. Como $M = Rm_1 + \cdots + Rm_k$, então φ é sobrejetiva, logo M é isomorfo ao R-módulo quociente ${R^k}/{\ker(\varphi)}$. Uma vez que R^k é um R-módulo noetheriano à esquerda, então, pela proposição 2.6.1, ${R^k}/{\ker(\varphi)}$ é também um R-módulo noetheriano à esquerda, ou seja, M é um R-módulo noetheriano à esquerda. Em particular, se M é finitamente gerado, então, acabamos de mostrar que, M é um R-módulo noetheriano à esquerda, logo, pela Proposição 2.6.3, todo R-submódulo à esquerda é finitamente gerado. ⊠

Teorema 2.6.5 (Teorema da Base de Hilbert)**.** Seja K um corpo. Então o anel de polinômios nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, $K[x_1, \ldots, x_n]$, é um anel noetheriano. Em particular, todo ideal de $K[x_1, \ldots, x_n]$ é finitamente gerado.

Demonstração. Ver (Kem11), página 40, Corolário 2.13. ⊠

Teorema 2.6.6. A álgebra $U(\mathfrak{g})$ é noetheriana tanto à esquerda quanto à direita.

Demonstração. Supondo que $U(\mathfrak{g})$ é noetheriano à esquerda conseguimos concluir que $U(\mathfrak{g})$ é noetheriano à direita. De fato, considere a anti-involução $\psi : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$, vista no Exemplo 2.1.1 item (c), e tome uma cadeia de ideais à direita de $U(\mathfrak{g})$, $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$. Como ψ é uma anti-involução, a cadeia $\psi(I_1) \subseteq \psi(I_2) \subseteq \cdots$ é composta por ideais à esquerda de $U(\mathfrak{g})$. Uma vez que $U(\mathfrak{g})$ é noetheriano à esquerda, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\psi(I_j) = \psi(I_N)$, para todo $j \geq N$. Aplicando ψ nessa igualdade, obtemos que $I_j = I_N$, para todo $j \geq N$. Portanto, $U(\mathfrak{g})$ é noetheriano à direita. Além disso, pelo parágrafo imediatamente depois da Proposição 2.6.3, basta mostrarmos que todo ideal à esquerda de $U(\mathfrak{g})$ é finitamente gerado. Seja I um ideal à esquerda de $U(\mathfrak{g})$. Sabemos que $U(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} U(\mathfrak{g})_{2s}$ e que cada $U(\mathfrak{g})_{2s}$ é um $U(\mathfrak{g})_0$-módulo livre à direita com base $\{\mathbf{e}^s\}$, se $s \geq 0$ e $\{\mathbf{f}^{|s|}\}$, se $s < 0$. Então, dado $u \in U(\mathfrak{g})$, temos que $u = \sum_{s \in \mathbb{Z}} u_s$, com $u_s = \begin{cases} \mathbf{e}^s v_s, & s \geq 0 \\ \mathbf{f}^{|s|} v_s, & s < 0 \end{cases}$, onde $v_s \in U(\mathfrak{g})_0$ é diferente de zero somente para uma quantidade finita de termos. Para $u \neq 0$, defina $d_+(u)$ e $d_-(u)$ como sendo, respectivamente, o máximo e o mínimo s possível tal que $v_s \neq 0$. Defina também $k_+(u) := v_{d_+(u)}$ e $k_-(u) := v_{d_-(u)}$. Para cada $i \in \mathbb{N}_0$, sejam $J_i := \{k_+(u) \mid u \in I, d_+(u) = i\}$ e $J_i' := \{k_-(u) \mid u \in I, d_-(u) = -i\}$.

Afirmação: para qualquer $i \in \mathbb{N}$, os conjuntos J_i e J_i' são ideais à esquerda da álgebra $U(\mathfrak{g})_0$. Vamos mostrar esse fato para J_i. A demonstração para J_i' é análoga. Seja $v \in J_i$ e tome $u \in I$ tal que $d_+(u) = i$ e $k_+(u) = v$. Seja $g(\mathbf{h}, c) \in U(\mathfrak{g})_0 = \mathbb{C}[\mathbf{h}, c]$. Vamos mostrar que $g(\mathbf{h} - 2i, c)u \in I$, $d_+(g(\mathbf{h} - 2i, c)u) = i$ e $k_+(g(\mathbf{h} - 2i, c)u) = g(\mathbf{h}, c)v$, concluindo, portanto, que $g(\mathbf{h}, c)v \in J_i$. Uma vez que I é um ideal à esquerda de $U(\mathfrak{g})$ e $g(\mathbf{h} - 2i, c) \in U(\mathfrak{g})_0 \subseteq U(\mathfrak{g})$, então $g(\mathbf{h} - 2i, c)u \in I$. Seja $u_i = \mathbf{e}^i v$. Como $c \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ e $\mathbf{e}^i \mathbf{h} = (\mathbf{h} - 2i)\mathbf{e}^i$, então $g(\mathbf{h} - 2i, c)u_i = \mathbf{e}^i g(\mathbf{h}, c)v_i$, ou seja, $d_+(g(\mathbf{h} - 2i, c)u) = i$ e $k_+(g(\mathbf{h} - 2i, c)u) = g(\mathbf{h}, c)v_i$. Portanto, J_i é ideal à esquerda de $U(\mathfrak{g})_0$.

Seja $k_+(u) \in J_i$. Então $d_+(u) = i$, ou seja, $u_i = \mathbf{e}^i k_+(u)$. Note que $\mathbf{e}u_i = \mathbf{e}^{i+1} k_+(u)$. Assim, $d_+(\mathbf{e}u) = i + 1$ e $k_+(\mathbf{e}u) = k_+(u)$. Logo, $k_+(u) \in J_{i+1}$. Daí, concluímos que $J_1 \subseteq J_2 \subseteq$

$\cdots$. Analogamente, prova-se que $J'_1 \subseteq J'_2 \subseteq \cdots$. Como J_i e J'_i são ideais de $U(\mathfrak{g})_0 = \mathbb{C}[\mathbf{h}, c]$, pelo Teorema da Base de Hilbert (Teorema 2.6.5), existem $r, s \in \mathbb{N}$ tais que $J_i = J_r$, para todo $i \geq r$, e $J'_j = J'_s$, para todo $j \geq s$. Seja m o maior entre r e s. Além disso, J_m e J'_m são ideais do anel noetheriano $U(\mathfrak{g})_0 = \mathbb{C}[\mathbf{h}, c]$, portanto, são finitamente gerados. Sejam $a_1, \ldots, a_t \in I$ tais que $d_+(a_1) = \cdots = d_+(a_t) = m$ e $k_+(a_1), \ldots, k_+(a_t)$ geram J_m. Similarmente, sejam $b_1, \ldots, b_\ell \in I$ tais que $d_-(b_1) = \cdots = d_-(b_\ell) = -m$ e $k_-(b_1), \ldots, k_-(b_\ell)$ geram J'_m. Considere $n := \max\big(|d_\pm(a_1)|, \ldots, |d_\pm(a_t)|, |d_\pm(b_1)|, \ldots, |d_\pm(b_\ell)|\big)$ e defina M como sendo o $U(\mathfrak{g})_0$-módulo à esquerda $\bigoplus_{i=-n}^{n} U(\mathfrak{g})_{2i}$. Note que M é $U(\mathfrak{g})_0$-módulo livre à esquerda com base $\{1, \mathbf{e}^s, \mathbf{f}^s \mid s = 1, \ldots, n\}$. Logo, como $U(\mathfrak{g})_0 = \mathbb{C}[\mathbf{h}, c]$ é um anel noetheriano, então, pela Proposição 2.6.4, M é $U(\mathfrak{g})_0$-módulo noetheriano à esquerda. Assim, $I \cap M$ é finitamente gerado sobre $U(\mathfrak{g})_0$, pela Proposição 2.6.3. Sejam $p_1, \ldots, p_k$ geradores de $I \cap M$.

Vamos mostrar que $X = \{a_1, \ldots, a_t, b_1, \ldots, b_\ell, p_1, \ldots, p_k\}$ gera I, finalizando a demonstração. Defina I' como sendo o ideal à esquerda gerado por X. Uma vez que $X \subseteq I$, então $I' \subseteq I$. Seja $u \in I$. Se $d_-(u) \geq -n$ e $d_+(u) \leq n$, então $u \in I \cap M$. O caso onde $d_-(u) \leq -n$ ou $d_+(u) \geq n$, será demonstrado usando indução sobre o número $N = \max(n, d_+(u)) + \max(n, |d_-(u)|) \geq 2n$. Note que o caso base para a indução é $N = 2n$, que já foi provado. Suponha que $N > 2n$ e assuma que $d_+(u) = i > n$, isto é, $k_+(u) \in J_i$ (o caso $|d_-(u)| > n$ é tratado analogamente). Uma vez que $k_+(a_1), \ldots, k_+(a_t)$ geram J_m e $J_i \subseteq J_m$, então existem $g_1(\mathbf{h}, c), \ldots, g_t(\mathbf{h}, c) \in U(\mathfrak{g})_0$ tais que $k_+(u) = \sum_{j=1}^{t} g_j(\mathbf{h}, c) k_+(a_j)$. Seja $v := \sum_{j=1}^{t} g_j(\mathbf{h} - 2i, c)\mathbf{e}^{i-m} a_j$. Observe que $v \in I'$. Como $d_+(a_j) = m$, para todo $j = 1, \ldots, t$, então $d_+(\mathbf{e}^{i-m} a_j) = i$. Assim, $d_+(v) = i = d_+(u)$. Além disso, note que $a_j = u_j + \mathbf{e}^m k_+(a_j)$, onde $u_j \in U(\mathfrak{g})$ é tal que $d_+(u_j) < m$. Disso, segue que

$$v = \sum_{j=1}^{t} g_j(\mathbf{h} - 2i, c)\mathbf{e}^{i-m} u_j + \sum_{j=1}^{t} g_j(\mathbf{h} - 2i, c)\mathbf{e}^{i} k_+(a_j) = \sum_{j=1}^{t} g_j(\mathbf{h} - 2i, c)\mathbf{e}^{i-m} u_j + \mathbf{e}^i \sum_{j=1}^{t} g_j(\mathbf{h}, c) k_+(a_j),$$

ou seja, $k_+(v) = k_+(u)$. Daí, concluímos que $d_+(u - v) < d_+(u)$. Procedendo analogamente, pela definição do número n, temos que $d_-(u - v) \geq \min(d_-(u), -n)$. Portanto, por indução, $u - v \in I'$. Uma vez que $v \in I'$, então $u \in I'$, finalizando a demonstração. ⊠

Observação 2.6.7. A seguir, vamos fazer algumas observações sobre a validade dos principais resultados desse capítulo em contextos mais gerais do que o tratado nessa dissertação.

(a) O fato que as categorias de módulos sobre uma álgebra de Lie e sobre sua álgebra universal envelopante são categorias isomorfas (Teorema 2.1.4) é válido para qualquer álgebra de Lie. A construção da álgebra universal envelopante de uma álgebra de Lie qualquer é feita de forma análoga e a demonstração de que as duas categorias são isomorfas é essencialmente a mesma do caso $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

(b) O Teorema de PBW (Teorema 2.2.4) é válido para uma álgebra de Lie arbitrária (ver Seção 17.3 de (Hum78) ou Teorema 9.4 de (Car05)).

(c) Vimos que a álgebra universal envelopante de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ não possui divisores de zero (Corolário 2.3.4). Tal fato é válido para qualquer álgebra de Lie (ver Corolário 9.8 de (Car05)).

(d) Pelo Teorema 2.6.6, sabemos que a álgebra universal envelopante de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ é noetheriana tanto à esquerda quanto à direita. Essa propriedade continua sendo válida para qualquer álgebra de Lie de dimensão finita (ver Corolário 1.7.4 de (MR01)). Ressaltamos, contudo, que esse teorema falha se considerarmos álgebras de Lie de dimensão infinita (ver (SW14)). $\square$

Capítulo 3

$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-módulos de peso

3.1 Módulos de peso

Dizemos que um $\mathfrak{g}$-módulo V é um **módulo de peso**, se $V = \bigoplus\limits_{\lambda\in\mathbb{C}} V_\lambda$, onde, conforme definido na Seção 1.2, $V_\lambda = \{v \in V \mid H(v) = \lambda v\}$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Observe que a ação de $\mathbf{h}$ sobre um módulo de peso é diagonalizável. Chamamos o número λ de **peso** e o espaço V_λ de **espaço de peso**. Denotamos por $\mathfrak{W}$ a subcategoria da categoria $\mathfrak{g}$-Mod consistindo de todos os módulos de peso tais que para qualquer $V, W \in \mathfrak{W}$, temos que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{W}}(V,W) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V,W)$. Definimos também, para todo $\mathfrak{g}$-módulo de peso V, o **suporte de V** como sendo $\mathrm{supp}(V) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid V_\lambda \neq \{0\}\}$. Se V é um módulo de peso e $\lambda \in \mathrm{supp}(V)$, então qualquer vetor em V_λ é chamado de um **vetor de peso $\boldsymbol{\lambda}$**. Além disso, se λ é tal que $\lambda + 2 \notin \mathrm{supp}(V)$, então o peso λ é dito **peso máximo** e qualquer vetor não nulo em V_λ é dito **vetor de peso máximo**. Um $\mathfrak{g}$-módulo gerado por um vetor de peso máximo é chamado de **módulo de peso máximo**. Analogamente, define-se **peso mínimo** um $\lambda \in \mathrm{supp}\, V$ tal que $\lambda - 2 \notin \mathrm{supp}(V)$; **vetor de peso mínimo** qualquer vetor em V_λ; e **módulo de peso mínimo** um $\mathfrak{g}$-módulo gerado por um vetor de peso mínimo.

Exemplo 3.1.1.

(a) Dado $n \in \mathbb{N}$, considere o $\mathfrak{g}$-módulo $\mathbf{V}^{(n)}$. Como visto na Seção 1.2, $\mathbf{V}^{(n)} = \langle v_0, \dots, v_{n-1}\rangle_{\mathbb{C}} = \bigoplus\limits_{i=0}^{n-1} \langle v_i\rangle_{\mathbb{C}}$, onde as ações de E, F e H podem ser vistas no diagrama (1.5). Em particular, H age sobre v_i pela multiplicação da constante $n-1-2i$, quer dizer, $H(v_i) = (n-1-2i)v_i$. Assim, $\langle v_i\rangle_{\mathbb{C}} \subseteq \mathbf{V}^{(n)}_{n-1-2i}$. Seja $v \in \mathbf{V}^{(n)}_{n-1-2i}$. Então $H(v) = (n-1-2i)v$. Uma vez que $v \in \mathbf{V}^{(n)}$, então existem $\lambda_j \in \mathbb{C}$ tais que $v = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j v_j$. Daí

$$\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j (n-1-2j) v_j = H\Big(\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j v_j\Big) = H(v) = (n-1-2i)v = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j (n-1-2i) v_j,$$

ou seja, $\sum_{j=0}^{n-1} 2\lambda_j (i-j) v_j = 0$. Como $v_0, \dots, v_{n-1}$ são linearmente independentes, então $\lambda_j = 0$, se $i \neq j$. Portanto, $v \in \langle v_i\rangle_{\mathbb{C}}$, isto é, $\mathbf{V}^{(n)}_{n-1-2i} \subseteq \langle v_i\rangle_{\mathbb{C}}$. Assim, temos que $\mathbf{V}^{(n)} = \bigoplus\limits_{i=0}^{n-1} \mathbf{V}^{(n)}_{n-1-2i}$, ou seja, $\mathbf{V}^{(n)} \in \mathfrak{W}$. Observe que $\mathrm{supp}(\mathbf{V}^{(n)}) = \{1-n, 3-n, \dots, n-3, n-1\}$. Logo, $n-1$ é o peso máximo e v_0 é o vetor de peso máximo. Uma vez que $\mathbf{V}^{(n)} = U(\mathfrak{g})v_0$, então $\mathbf{V}^{(n)}$ é um módulo de peso máximo.

(b) Sejam $V, W \in \mathfrak{W}$ e $\varphi : V \to W$ um homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos. Sejam $\lambda \in \mathbb{C}$ e $v \in V_\lambda$. Então $H_W(\varphi(v)) = \varphi(H_V(v)) = \lambda\varphi(v)$, ou seja, $\varphi(V_\lambda) \subseteq W_\lambda$.

(c) Seja $(V_i)_{i\in I}$ uma família de módulos de peso. Vamos mostrar que $(\bigoplus\limits_{i\in I} V_i)_\lambda = \bigoplus\limits_{i\in I}(V_i)_\lambda$. Seja $\sum_{i\in I} v_i \in (\bigoplus\limits_{i\in I} V_i)_\lambda$. Então

$$\sum_{i\in I} H_{V_i}(v_i) = H_{\bigoplus\limits_{i\in I} V_i}\Big(\sum_{i\in I} v_i\Big) = \lambda\Big(\sum_{i\in I} v_i\Big) = \sum_{i\in I} \lambda v_i.$$

Daí, $H_{V_i}(v_i) = \lambda v_i$, para cada $i \in I$, ou seja, $\sum_{i\in I} v_i \in \bigoplus\limits_{i\in I}(V_i)_\lambda$. Seja, agora, $\sum_{i\in I} v_i \in \bigoplus\limits_{i\in I}(V_i)_\lambda$. Então

$$H_{\bigoplus\limits_{i\in I} V_i}\Big(\sum_{i\in I} v_i\Big) = \sum_{i\in I} H_{V_i}(v_i) = \sum_{i\in I} \lambda v_i = \lambda\Big(\sum_{i\in I} v_i\Big).$$

Logo, $\sum_{i\in I} v_i \in (\bigoplus\limits_{i\in I} V_i)_\lambda$.

(d) Sejam $V, W \in \mathfrak{W}$. Vamos mostrar que $(V \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W)_\lambda = \bigoplus\limits_{\nu+\mu=\lambda} \big(V_\nu \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W_\mu\big)$. Para isso note que

$$(V \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W)_\lambda = \Big(\big(\bigoplus_{\nu\in\mathbb{C}} V_\nu\big) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \big(\bigoplus_{\mu\in\mathbb{C}} W_\mu\big)\Big)_\lambda = \Big(\bigoplus_{\nu,\mu\in\mathbb{C}} V_\nu \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W_\mu\Big)_\lambda \overset{\substack{\text{Exemplo 3.1.1,}\\ \text{item } (c)}}{=} \bigoplus_{\nu,\mu\in\mathbb{C}} \big(V_\nu \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W_\mu\big)_\lambda$$

Afirmação: $(V_\nu \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W_\mu)_\lambda = \begin{cases} V_\nu \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W_\mu, & \text{se } \lambda = \nu + \mu; \\ \{0\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

De fato, se $(V_\nu \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W_\mu)_\lambda \neq \{0\}$, então existe $v = \sum_{i=1}^n (v_i \otimes w_i) \in (V_\nu \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W_\mu)_\lambda$ não nulo. Aplicando $H_{V \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W}$ nesse elemento, obtemos

$$\lambda v = H_{V\underset{\mathbb{C}}{\otimes} W}\Big(\sum_{i=1}^n (v_i \otimes w_i)\Big) = \sum_{i=1}^n H_V(v_i) \otimes w_i + \sum_{i=1}^n v_i \otimes H_W(w_i) = (\nu + \mu)v.$$

Como $v \neq 0$, temos que $\lambda = \nu + \mu$. Portanto, $(V_\nu \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W_\mu)_\lambda \subseteq V_\nu \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W_\mu$, com $\lambda = \nu + \mu$. A inclusão recíproca se demonstra analogamente. Logo, $(V_\nu \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W_\mu)_\lambda = V_\nu \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W_\mu$, se $\lambda = \nu + \mu$, de onde se conclui que $(V \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W)_\lambda = \bigoplus\limits_{\mu+\nu=\lambda} \big(V_\mu \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W_\nu\big)$. □

Lema 3.1.2. Sejam $V \in \mathfrak{W}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Então $E(V_\lambda) \subseteq V_{\lambda+2}$ e $F(V_\lambda) \subseteq V_{\lambda-2}$.

Demonstração. Sejam $\lambda \in \mathbb{C}$ e $v \in V_\lambda$. Então

$$\begin{aligned} H(E(v)) &\overset{(1.1)}{=} E(H(v)) + 2E(v) = \lambda E(v) + 2E(v) = (\lambda+2)E(v), \\ H(F(v)) &\overset{(1.1)}{=} F(H(v)) - 2F(v) = \lambda F(v) - 2F(v) = (\lambda-2)F(v). \end{aligned}$$

Logo, $E(V_\lambda) \subseteq V_{\lambda+2}$ e $F(V_\lambda) \subseteq V_{\lambda-2}$. ⊠

Corolário 3.1.3. Sejam $V \in \mathfrak{W}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $i \in \mathbb{Z}$. Então $U(\mathfrak{g})_{2i}V_\lambda \subseteq V_{\lambda+2i}$.

Demonstração. Basta mostrar que a ação de um elemento da base de $U(\mathfrak{g})_{2i}$ em um V_λ pertence a $V_{\lambda+2i}$. Assim, sejam $\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^{2i}$ um elemento da base de $U(\mathfrak{g})_{2i}$ e $v \in V_\lambda$. Então, usando o Lema 3.1.2, temos que

$$\mathbf{e}^{2i} \cdot v \in V_{\lambda+4i} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{h}^j\mathbf{e}^{2i} \cdot v \in V_{\lambda+4i} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^{2i} \cdot v \in V_{\lambda+2i}. \qquad \boxtimes$$

Levando em conta a estrutura de grupo abeliano de $\mathbb{C}$, considere a classe lateral $\mathbb{C}/2\mathbb{Z}$. Dado $V \in \mathfrak{W}$ e $\xi \in \mathbb{C}/2\mathbb{Z}$, defina $V^\xi := \bigoplus_{\lambda\in\xi} V_\lambda$ e denote por $\mathfrak{W}^\xi$ a subcategoria plena de $\mathfrak{W}$ consistindo de todos os $\mathfrak{g}$-módulos V tais que $\operatorname{supp}(V) \subseteq \xi$. Considere a categoria $\bigoplus_{\xi\in\mathbb{C}/2\mathbb{Z}} \mathfrak{W}^\xi$, conforme apresentado no Exemplo C.2. Sejam $\xi, \eta \in \mathbb{C}/2\mathbb{Z}$, com $\xi \neq \eta$, e $\varphi : \bigoplus_{\lambda\in\xi} V_\lambda = V^\xi \to W^\eta = \bigoplus_{\mu\in\eta} W_\mu$ um homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos. Então, dado $\lambda \in \xi$, temos que $\lambda \notin \eta$, o que implica que $W_\lambda = \{0\}$. Assim, como $\varphi(V_\lambda) \subseteq W_\lambda = \{0\}$, então φ é o homomorfismo zero, ou seja, $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(V^\xi, W^\eta) = \{0\}$. Essa conta mostra que $\bigoplus_{\xi\in\mathbb{C}/2\mathbb{Z}} \mathfrak{W}^\xi$ é uma subcategoria plena de $\mathfrak{W}$.

Corolário 3.1.4.

(a) Seja $V \in \mathfrak{W}$. Então, para todo $\xi \in \mathbb{C}/2\mathbb{Z}$, o subespaço V^ξ é um $\mathfrak{g}$-submódulo de V e $V \cong_{\mathfrak{g}} \bigoplus_{\xi\in\mathbb{C}/2\mathbb{Z}} V^\xi$.

(b) As categorias $\bigoplus_{\xi\in\mathbb{C}/2\mathbb{Z}} \mathfrak{W}^\xi$ e $\mathfrak{W}$ são isomorfas.

Demonstração.

(a) Sejam $\xi \in \mathbb{C}/2\mathbb{Z}$ e $\lambda \in \xi$. Então $\lambda \pm 2i \in \xi$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$. Como $V^\xi = \bigoplus_{\lambda\in\xi} V_\lambda$, então, pelo Lema 3.1.2, temos que V^ξ é invariante por E e por F. Uma vez que $H = EF - FE$, então V^ξ também é invariante por H. Logo, V^ξ é $\mathfrak{g}$-submódulo de V. Agora, como $V = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} V_\lambda$ e a relação $2\mathbb{Z}$ particiona o conjunto $\mathbb{C}$, temos que $V \cong_{\mathfrak{g}} \bigoplus_{\xi\in\mathbb{C}/2\mathbb{Z}} V^\xi$.

(b) Pelo item (a), temos que $V \cong_{\mathfrak{g}} \bigoplus_{\xi\in\mathbb{C}/2\mathbb{Z}} V^\xi$. Assim, uma vez que os morfismos de $\bigoplus_{\xi\in\mathbb{C}/2\mathbb{Z}} \mathfrak{W}^\xi$ e $\mathfrak{W}$ são os mesmos, então podemos construir o funtor $F : \mathfrak{W} \to \bigoplus_{\xi\in\mathbb{C}/2\mathbb{Z}} \mathfrak{W}^\xi$ tal que $F(V) = \bigoplus_{\xi\in\mathbb{C}/2\mathbb{Z}} V^\xi$ e $F(\varphi : V \to W) = \varphi : V \to W$. Por outro lado, como os objetos de $\bigoplus_{\xi\in\mathbb{C}/2\mathbb{Z}} \mathfrak{W}^\xi$ são módulos de peso, podemos considerar o funtor $G : \bigoplus_{\xi\in\mathbb{C}/2\mathbb{Z}} \mathfrak{W}^\xi \to \mathfrak{W}$, que envia objetos e morfismos neles próprios. Note que F e G são funtores inversos um do outro e portanto as categorias $\bigoplus_{\xi\in\mathbb{C}/2\mathbb{Z}} \mathfrak{W}^\xi$ e $\mathfrak{W}$ são isomorfas. $\boxtimes$

Lema 3.1.5. Sejam $\mathfrak{a}$ uma álgebra de Lie, $(V_i)_{i\in I}$ uma família de $\mathfrak{a}$-módulos e $(X_i)_{i\in I}$ uma família de $\mathfrak{a}$-submódulos, como $X_i \subseteq V_i$. Então $\left(\bigoplus_{i\in I} V_i\right)\Big/\left(\bigoplus_{i\in I} X_i\right) \cong_{\mathfrak{a}} \bigoplus_{i\in I} V_i/X_i$.

Demonstração. Seja

$$\begin{aligned} \varphi : \bigoplus_{i\in I} V_i &\to \bigoplus_{i\in I} {}^{V_i}\!/\!_{X_i} \\ (v_i)_{i\in I} &\mapsto (v_i + X_i)_{i\in I} \end{aligned}.$$

Note que φ é sobrejetiva e que $\ker(\varphi) = \bigoplus_{i\in I} X_i$. Portanto, ${}^{(\bigoplus_{i\in I} V_i)}\!/\!_{(\bigoplus_{i\in I} X_i)} \underset{\mathbb{C}}{\cong} \bigoplus_{i\in I} {}^{V_i}\!/\!_{X_i}$. Agora, veja que, para todo $a \in \mathfrak{a}$, considerando A o operador linear correspondente à a, onde o subescrito indica o espaço, temos que

$$\varphi\big(A_{\bigoplus_{i\in I} V_i}((v_i)_{i\in I})\big) = \varphi\big((A_{V_i}(v_i))_{i\in I}\big) = \big(A_{V_i}(v_i) + X_i\big)_{i\in I} = A_{\bigoplus_{i\in I} V_i/X_i}\big(\varphi((v_i)_{i\in I})\big).$$

Portanto, ${}^{(\bigoplus_{i\in I} V_i)}\!/\!_{(\bigoplus_{i\in I} X_i)} \underset{\mathfrak{a}}{\cong} \bigoplus_{i\in I} {}^{V_i}\!/\!_{X_i}$. ⊠

Proposição 3.1.6.

(a) $\mathfrak{g}$-submódulo de um módulo de peso é um módulo de peso.

(b) Quociente de um módulo de peso é um módulo de peso.

(c) Soma de direta de módulos de peso é um módulo de peso.

(d) Produto tensorial finito módulos de peso é um módulo de peso.

Demonstração.

(a) Seja $V = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} V_\lambda$ um módulo de peso e W um $\mathfrak{g}$-submódulo de V. Dado $w \in W$, existem $w_i \in V_{\lambda_i} \setminus \{0\}$, com $i = 1, \dots, n$, tais que $w = \sum_{i=1}^n w_i$. Para cada $i = 1, \dots, n$, defina

$$h_i := (\mathbf{h} - \lambda_1)(\mathbf{h} - \lambda_2)\dots(\mathbf{h} - \lambda_{i-1})(\mathbf{h} - \lambda_{i+1})\dots(\mathbf{h} - \lambda_{n-1})(\mathbf{h} - \lambda_n) \in U(\mathfrak{g}).$$

Fixados $i, j = 1, \dots, n$, uma vez que $\mathbf{h} \cdot w_j = \lambda_j w_j$, temos que

$$h_i \cdot w_j = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j, \\ (\lambda_i - \lambda_1)\dots(\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1})\dots(\lambda_i - \lambda_n)w_j, & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Note que, por um lado, como W um $\mathfrak{g}$-submódulo de V, temos que $h_i \cdot w \in W$. Por outro lado, $h_i \cdot w = h_i \cdot w_1 + \dots + h_i \cdot w_n = h_i \cdot w_i = (\lambda_i - \lambda_1)\dots(\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1})\dots(\lambda_i - \lambda_n)w_i \neq 0$. Assim, $w_i \in W$, para todo $i = 1, \dots, n$, ou seja, todo vetor em W é soma de vetores de peso em W. Portanto, $W = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} W_\lambda$, onde $W_\lambda = W \cap V_\lambda$.

(b) Sejam $V \in \mathfrak{W}$ e $W \subseteq V$ um $\mathfrak{g}$-submódulo. Pelo item (a), $W \in \mathfrak{W}$, portanto, ${}^{V}\!/\!_{W} = {}^{(\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} V_\lambda)}\!/\!_{(\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} W_\lambda)}$. Como $W_\lambda = W \cap V_\lambda$, pelo Lema 3.1.5, temos que

$${}^{V}\!/\!_{W} = {}^{\big(\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} V_\lambda\big)}\!/\!_{\big(\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} W_\lambda\big)} \underset{\mathfrak{h}}{\cong} \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} \big({}^{V_\lambda}\!/\!_{W_\lambda}\big).$$

Denotando $\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}}\left({}^{V_\lambda}\!/\!_{W_\lambda}\right)$ por U, afirmamos que $U_\lambda = {}^{V_\lambda}\!/\!_{W_\lambda}$. De fato, se $v + W_\lambda \in {}^{V_\lambda}\!/\!_{W_\lambda}$, então $H_U(v + W_\lambda) = H_V(v) + W_\lambda = \lambda v + W_\lambda = \lambda(v + W_\lambda)$, ou seja, $v + W_\lambda \in U_\lambda$. Reciprocamente, se $v \in U_\lambda$, então $v = \sum_{i=1}^n (v_{\mu_i} + W_{\mu_i})$. Assim,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n(\lambda v_{\mu_i} + W_{\mu_i}) = \lambda\Big(\sum_{i=1}^n(v_{\mu_i} + W_{\mu_i})\Big) = \lambda v = H_U(v) = H_U\Big(\sum_{i=1}^n(v_{\mu_i} + W_{\mu_i})\Big) =\\ = \sum_{i=1}^n(H_{V_{\mu_i}}(v_{\mu_i}) + W_{\mu_i}) = \sum_{i=1}^n(\mu_i v_{\mu_i} + W_{\mu_i}).\end{aligned}$$

Disso segue que $\sum_{i=1}^n((\lambda-\mu_i)v_{\mu_i} + W_{\mu_i})$ é igual ao zero de U. Uma vez que $v_{\mu_i} + W\mu_i$ são linearmente independentes, então $\mu_i = \lambda$, para todo $i = 1, \dots, n$, isto é, $v \in {}^{V_\lambda}\!/\!_{W_\lambda}$.

(c) Sejam $V, W \in \mathfrak{W}$. Então $V \oplus W \in \mathfrak{W}$, pois

$$V \oplus W = \Big(\bigoplus_{\nu\in\mathbb{C}} V_\nu\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\mu\in\mathbb{C}} W_\mu\Big) = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}}(V_\lambda \oplus W_\lambda) \overset{\substack{\text{Exemplo 3.1.1,}\\ \text{item } (c)}}{=} \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}}(V \oplus W)_\lambda.$$

(d) Sejam $V, W \in \mathfrak{W}$. Então $V \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W \in \mathfrak{W}$, pois

$$V \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W = \Big(\bigoplus_{\nu\in\mathbb{C}} V_\nu\Big) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \Big(\bigoplus_{\mu\in\mathbb{C}} W_\mu\Big) = \bigoplus_{\nu,\mu\in\mathbb{C}}(V_\nu \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W_\mu) \overset{\substack{\text{Exemplo 3.1.1,}\\ \text{item } (d)}}{=} \bigoplus_{\nu,\mu\in\mathbb{C}}(V \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W)_{\nu+\mu}. \qquad \boxtimes$$

Exemplo 3.1.7.

(a) Vamos mostrar que $\mathrm{supp}(V \oplus W) = \mathrm{supp}(V) \cup \mathrm{supp}(W)$. Seja $\lambda \in \mathrm{supp}(V \oplus W)$. Então $(V \oplus W)_\lambda \neq \{0\}$. Como, pelo Exemplo 3.1.1, item (c), $(V \oplus W)_\lambda = V_\lambda \oplus W_\lambda$, então $V_\lambda \neq \{0\}$ ou $W_\lambda \neq \{0\}$. Logo, $\lambda \in \mathrm{supp}(V) \cup \mathrm{supp}(W)$. A demonstração da recíproca é análoga.

(b) Vamos mostrar que $\mathrm{supp}(V \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W) = \mathrm{supp}(V) + \mathrm{supp}(W)$. Se $\lambda \in \mathrm{supp}(V \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W)$, então $(V \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W)_\lambda \neq \{0\}$. Como, pelo Exemplo 3.1.1, item (d), $(V \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W)_\lambda = \bigoplus_{\nu+\mu=\lambda}(V_\nu \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W_\mu)$, então existem $\nu, \mu \in \mathbb{C}$, com $\nu + \mu = \lambda$, tais que $V_\nu \underset{\mathbb{C}}{\otimes} W_\mu \neq \{0\}$. Uma vez que $\nu \in \mathrm{supp}(V)$ e $\mu \in \mathrm{supp}(W)$, temos que $\lambda \in \mathrm{supp}(V) + \mathrm{supp}(W)$. A recíproca é similar. $\square$

Sejam $(V_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ uma sequência de $\mathfrak{g}$-módulos e $(\varphi_i : V_i \to V_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$ uma sequência de homomorfismos de $\mathfrak{g}$-módulos. Dizemos que a sequência

$$\cdots \longrightarrow V_{i-1} \xrightarrow{\varphi_{i-1}} V_i \xrightarrow{\varphi_i} V_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

é uma **sequência exata**, se $\ker(\varphi_i) = \mathrm{im}(\varphi_{i-1})$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Uma sequência exata da forma $0 \to V \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\psi} U \to 0$ é chamada uma **sequência exata curta**. Note que nesse caso, φ é monomorfismo e ψ é epimorfismo.

Proposição 3.1.8. Se $0 \to V \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\psi} U \to 0$ é uma sequência exata curta de módulos de peso, então $0 \to V_\lambda \xrightarrow{\varphi|_{V_\lambda}} W_\lambda \xrightarrow{\psi|_{W_\lambda}} U_\lambda \to 0$ é uma sequência exata curta. Além disso, $W_\lambda \underset{\mathfrak{h}}{\cong} V_\lambda \oplus U_\lambda$.

Demonstração. Pelo Exemplo 3.1.1, item (b) temos que $\varphi|_{V_\lambda} : V_\lambda \to W_\lambda$ e que $\psi|_{W_\lambda} : W_\lambda \to U_\lambda$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Assim, fixado λ, precisamos mostrar que $\varphi|_{V_\lambda}$ é monomorfismo, $\psi|_{W_\lambda}$ é epimorfismo e $\ker(\psi|_{W_\lambda}) = \mathrm{im}(\varphi|_{V_\lambda})$, pois, dessa forma, concluiremos que $0 \to V_\lambda \xrightarrow{\varphi|_{V_\lambda}} W_\lambda \xrightarrow{\psi|_{W_\lambda}} U_\lambda \to 0$ é uma sequência exata curta.

- $\varphi|_{V_\lambda}$ é monomorfismo: esse fato segue de φ ser monomorfismo.

- $\psi|_{W_\lambda}$ é epimorfismo: como ψ é epimorfismo, então

$$\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} U_\lambda = U = \psi(W) = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} \psi(W_\lambda),$$

mas, já sabemos que $\psi(W_\lambda) \subseteq U_\lambda$. Logo, $\psi(W_\lambda) = U_\lambda$.

- $\ker(\psi|_{W_\lambda}) = \mathrm{im}(\varphi|_{V_\lambda})$: sabemos da Proposição 1.1.4, que o $\ker(\psi)$ é um $\mathfrak{g}$-submódulo de W, portanto, um módulo de peso. Assim, $\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} \ker(\psi)_\lambda = \ker(\psi) = \varphi(V) = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} \varphi(V_\lambda)$. Como $\varphi(V_\mu) \subseteq W_\mu$, para todo $\mu \in \mathbb{C}$, concluímos que $\ker(\psi)_\lambda = \varphi(V_\lambda)$, ou seja, $\mathrm{im}(\varphi|_{V_\lambda}) = \varphi(V_\lambda) = \ker(\psi)_\lambda = \ker(\psi) \cap W_\lambda = \ker(\psi|_{W_\lambda})$.

Portanto, $0 \to V_\lambda \xrightarrow{\varphi|_{V_\lambda}} W_\lambda \xrightarrow{\psi|_{W_\lambda}} U_\lambda \to 0$ é uma sequência exata curta. Vamos mostrar, agora, que $W_\lambda \underset{\mathfrak{h}}{\cong} V_\lambda \oplus U_\lambda$. Para isso, observe que por $\varphi|_{V_\lambda}$ ser injetiva, temos que $V_\lambda \underset{\mathbb{C}}{\cong} \mathrm{im}(\varphi|_{V_\lambda}) = \ker(\psi|_{W_\lambda})$. Além disso, uma vez que $\psi|_{W_\lambda}$ é sobrejetiva, então ${W_\lambda}/{\ker(\psi|_{W_\lambda})} \underset{\mathbb{C}}{\cong} U_\lambda$. Daí, temos que ${W_\lambda}/{V_\lambda} \underset{\mathbb{C}}{\cong} U_\lambda$. Assim, como $W_\lambda \underset{\mathbb{C}}{\cong} V_\lambda \oplus {W_\lambda}/{V_\lambda}$, concluímos que $W_\lambda \underset{\mathbb{C}}{\cong} V_\lambda \oplus U_\lambda$. Seja $\zeta : W_\lambda \to V_\lambda \oplus U_\lambda$ o isomorfismo de espaços vetoriais onde $w \mapsto v_w + u_w$. Então $\zeta(\mathbf{h} \cdot w) = \zeta(\lambda w) = \lambda\zeta(w) = \lambda(v_w + u_w) = \mathbf{h} \cdot (v_w + u_w) = \mathbf{h} \cdot \zeta(w)$. Portanto, $W_\lambda \underset{\mathfrak{h}}{\cong} V_\lambda \oplus U_\lambda$. ⊠

Proposição 3.1.9. Um $\mathfrak{g}$-módulo gerado por vetores de peso é um módulo de peso.

Demonstração. Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo gerado por vetores de peso $v_1, \ldots, v_n$, quer dizer, $V = U(\mathfrak{g})v_1 + \cdots + U(\mathfrak{g})v_n$. Assim, é suficiente mostrar que $V = U(\mathfrak{g})v \in \mathfrak{W}$, onde v é um vetor de peso μ, isto é, basta mostrar que $U(\mathfrak{g})v = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} (U(\mathfrak{g})v)_\lambda$. Uma vez que $(U(\mathfrak{g})v)_\lambda \subseteq U(\mathfrak{g})v$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, então $\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} (U(\mathfrak{g})v)_\lambda \subseteq U(\mathfrak{g})v$. Seja $x \in U(\mathfrak{g})v$. Então $x = u \cdot v$, onde $u \in U(\mathfrak{g})$. Como os monômios padrões geram $U(\mathfrak{g})$ (Teorema 2.2.4), temos que u se escreve como soma de elementos da forma $\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k$, com $i, j, k \in \mathbb{N}_0$. Daí, basta mostrar que $\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k \cdot v \in (U(\mathfrak{g})v)_\lambda$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}$. Assim,

$$\begin{aligned} H(\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k \cdot v) &= \mathbf{h}\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k \cdot v = \mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k\mathbf{h} \cdot v + [\mathbf{h}, \mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k] \cdot v = \mu\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k \cdot v + [\mathbf{h}, \mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k] \cdot v = \\ &\overset{\substack{\text{Lema}\\ 2.4.2}}{=} \mu\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k \cdot v + 2(k-i)\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k \cdot v = (\mu + 2(k-i))\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k \cdot v, \end{aligned}$$

ou seja, $\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k \cdot v \in (U(\mathfrak{g})v)_{\mu+2(k-i)}$. ⊠

3.2 Módulos de Verma

Na seção anterior, estudamos algumas propriedades de módulos de peso, mas apresentamos apenas $\mathbf{V}^{(n)}$ como exemplo concreto pertencente à categoria $\mathfrak{W}$. Vamos, agora, construir mais um exemplo. Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, defina $M(\lambda)$ como sendo o espaço vetorial de base $\{v_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$. Defina E, F e H como sendo os operadores lineares sobre $M(\lambda)$ tais que

$$F(v_i) = v_{i+1}, \quad H(v_i) = (\lambda - 2i)v_i \quad \text{e} \quad E(v_i) = \begin{cases} i(\lambda - i + 1)v_{i-1}, & \text{se } i \neq 0, \\ 0, & \text{se } i = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Tais operadores lineares podem ser visualizados através do seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, bend left, "a_{n+2}"] & v_{n+1} \arrow[l, Rightarrow, bend left, "1"] \arrow[loop above, dotted, "\lambda-2(n+1)"] \arrow[r, bend left, "a_{n+1}"] & v_n \arrow[l, Rightarrow, bend left, "1"] \arrow[loop above, dotted, "\lambda-2n"] \arrow[r, bend left, "a_n"] & v_{n-1} \arrow[l, Rightarrow, bend left, "1"] \arrow[loop above, dotted, "\lambda-2(n-1)"] \arrow[r, bend left, "a_{n-1}"] & \cdots \arrow[l, Rightarrow, bend left, "1"] \arrow[r, bend left, "a_3"] & v_2 \arrow[l, Rightarrow, bend left, "1"] \arrow[loop above, dotted, "\lambda-4"] \arrow[r, bend left, "a_2"] & v_1 \arrow[l, Rightarrow, bend left, "1"] \arrow[loop above, dotted, "\lambda-2"] \arrow[r, bend left, "a_1"] & v_0 \arrow[l, Rightarrow, bend left, "1"] \arrow[loop above, dotted, "\lambda"] \arrow[r, bend left, "0"] & {}
\end{tikzcd} \tag{3.2}$$

onde as setas duplas representam a ação de F, as setas usuais representam a ação de E, as setas pontilhadas representam a ação de H e $a_i = i(\lambda - i + 1)$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Proposição 3.2.1.

(a) $M(\lambda)$ junto dos operadores lineares E, F e H, definidos em (3.1), é um $\mathfrak{g}$-módulo.

(b) $\operatorname{supp}(M(\lambda)) = \{\lambda - 2i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$.

(c) O elemento de Casimir c, age sobre $M(\lambda)$ da seguinte maneira: dado $v \in M(\lambda)$, temos que $c \cdot v = (\lambda + 1)^2 v$.

Demonstração.

(a) Temos que mostrar que as equações em (1.1) são satisfeitas. Faremos isso para a equação $EF - FE = H$. As outras se demonstram analogamente. Uma vez que que $M(\lambda) = \langle v_i \mid i \in \mathbb{N}_0 \rangle_{\mathbb{C}}$, basta mostrarmos que $E(F(v_i)) - F(E(v_i)) = H(v_i)$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$. Se $i = 0$, então $E(F(v_0)) - F(E(v_0)) = E(v_1) = \lambda v_0 = H(v_0)$. Se $i \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned} E(F(v_i)) - F(E(v_i)) &= E(v_{i+1}) - i(\lambda - i + 1)F(v_{i-1}) = (i+1)(\lambda - (i+1) + 1)v_i - i(\lambda - i + 1)v_i = \\ &= \big(\cancel{i(\lambda - i)} + \lambda - i - \cancel{i(\lambda - i)} - i\big)v_i = (\lambda - 2i)v_i = H(v_i). \end{aligned}$$

(b) Como $M(\lambda) = \langle v_i \mid i \in \mathbb{N}_0 \rangle_{\mathbb{C}}$ e $H(v_i) = (\lambda - 2i)v_i$, então $\operatorname{supp}(M(\lambda)) = \{\lambda - 2i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$.

(c) Vamos mostrar que $c \cdot v_i = (\lambda + 1)^2 v_i$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$. Observe que $E(v_0) = 0$ e $c \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$, logo, pela Proposição 2.5.2, temos que $c \cdot v_0 = \kappa(c) \cdot v_0 = (\mathbf{h} + 1)^2 \cdot v_0 = (\lambda + 1)^2 v_0$. Seja $i \in \mathbb{N}$. Então

$$c \cdot v_i = c\mathbf{f}^i \cdot v_0 = \mathbf{f}^i c \cdot v_0 = (\lambda + 1)^2 \mathbf{f}^i \cdot v_0 = (\lambda + 1)^2 v_i. \qquad \boxtimes$$

Observe que λ é o peso máximo de $M(\lambda)$ e v_0 é o vetor de peso máximo. Observe também que v_0 gera $M(\lambda)$, como $U(\mathfrak{g})$-módulo, logo, $M(\lambda)$ é um módulo de peso máximo, dito **módulo de Verma com peso máximo $\boldsymbol{\lambda}$**. Na próxima proposição $U(\mathfrak{g})$ é vista como um $U(\mathfrak{g})$-módulo à esquerda via multiplicação dessa álgebra. Em particular, para todo $x \in \mathfrak{g}$ e $u \in U(\mathfrak{g})$, temos que $x \cdot u = xu$. Note que, temos também, $xu = [x,u] + ux$.

Proposição 3.2.2. $M(\lambda) \underset{\mathfrak{g}}{\cong} {U(\mathfrak{g})}/{I}$, onde $I = U(\mathfrak{g})\mathbf{e} + U(\mathfrak{g})(\mathbf{h} - \lambda)$.

Demonstração. Como $U(\mathfrak{g})$ é $U(\mathfrak{g})$-módulo livre à esquerda com base $\{1\}$, defina $\varphi : U(\mathfrak{g}) \to M(\lambda)$ como sendo o homomorfismo de $U(\mathfrak{g})$-módulos tal que $\varphi(1) = v_0$. Assim, como qualquer $u \in U(\mathfrak{g})$ se escreve como $u \cdot 1$, então $\varphi(u) = \varphi(u \cdot 1) = u \cdot \varphi(1) = u \cdot v_0$. Note que φ é sobrejetivo, pois $M(\lambda) = U(\mathfrak{g})v_0$. Como $E(v_0) = 0$ e $(H - \lambda)(v_0) = 0$, temos que $\mathbf{e}, \mathbf{h} - \lambda \in \ker(\varphi)$, ou seja, $I \subseteq \ker(\varphi)$. Daí, o homomorfismo de $U(\mathfrak{g})$-módulos $\overline{\varphi} : {U(\mathfrak{g})}/{I} \to M(\lambda)$, $u + I \mapsto \varphi(u)$ está bem definido e é sobrejetivo. Vamos mostrar que ${U(\mathfrak{g})}/{I} = U(\mathfrak{g})\{\mathbf{f}^i + I \mid i \in \mathbb{N}_0\}$. Pelo Teorema de PBW, é suficiente mostrar que $\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k + I$ se escreve como soma de elemento da forma $u\mathbf{f}^n + I$, com $u \in U(\mathfrak{g})$ e $n \in \mathbb{N}_0$. Se $i, j \in \mathbb{N}_0$ e $k \in \mathbb{N}$, então $\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k \in I$. Suponha $k = 0$. Se $i \in \mathbb{N}_0$ e $j = 0$, então $\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k + I = \mathbf{f}^i + I$. Se $i \in \mathbb{N}_0$ e $j \in \mathbb{N}$, então

$$\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j = \mathbf{f}^i(\mathbf{h} - \lambda + \lambda)^j = \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} \lambda^{j-s}\mathbf{f}^i(\mathbf{h} - \lambda)^s = \lambda^j\mathbf{f}^i + \sum_{s=1}^{j} \binom{j}{s} \lambda^{j-s}\mathbf{f}^i(\mathbf{h} - \lambda)^s.$$

Como $\sum_{s=1}^{j} \binom{j}{s} \lambda^{j-s}\mathbf{f}^i(\mathbf{h} - \lambda)^s \in I$, então $\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j + I = \lambda^j\mathbf{f}^i + I$. Logo, ${U(\mathfrak{g})}/{I} = U(\mathfrak{g})\{\mathbf{f}^i + I \mid i \in \mathbb{N}_0\}$. Note que $\overline{\varphi}(\mathbf{f}^i + I) = \varphi(\mathbf{f}^i) = \mathbf{f}^i \cdot v_0 = v_i$. Isso significa que a imagem dos geradores de ${U(\mathfrak{g})}/{I}$ por $\overline{\varphi}$ é um conjunto linearmente independente, o que implica que o homomorfismo de $U(\mathfrak{g})$-módulo $\overline{\varphi}$ é injetivo. Portanto, $M(\lambda) \underset{\mathfrak{g}}{\cong} {U(\mathfrak{g})}/{I}$. ⊠

Corolário 3.2.3 (Propriedade Universal do Módulo de Verma)**.**

(a) Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo e $v \in V$ tal que $E(v) = 0$ e $H(v) = \lambda v$. Então existe único $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M(\lambda), V)$ tal que $\psi(v_0) = v$.

(b) Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo gerado por um vetor de peso máximo com peso λ. Então V é um quociente de $M(\lambda)$.

Demonstração.

(a) Assim como foi feito na demonstração da Proposição 3.2.2, considere o único $\varphi : U(\mathfrak{g}) \to V$ como sendo o homomorfismo de $U(\mathfrak{g})$-módulos tal que $\varphi(1) = v$. Considere também $I = U(\mathfrak{g})\mathbf{e} + U(\mathfrak{g})(\mathbf{h} - \lambda)$. Como $E(v) = 0$ e $H(v) = \lambda v$, então $I \subseteq \ker(\varphi)$, logo, $\overline{\varphi} : {U(\mathfrak{g})}/{I} \to V$, $u + I \mapsto \varphi(u)$ está bem definido. Uma vez que, também da Proposição 3.2.2, $M(\lambda) \underset{\mathfrak{g}}{\cong} {U(\mathfrak{g})}/{I}$, de $\overline{\varphi}$ obtemos o homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos desejado.

(b) Seja $v \in V$ o vetor de peso máximo com peso λ. Então $E(v) = 0$ e $H(v) = \lambda v$. Pelo item (a), existe $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M(\lambda), V)$ tal que $\psi(v_0) = v$. Como v gera V, ψ é sobrejetivo, logo $V \underset{\mathfrak{g}}{\cong} {M(\lambda)}/{\ker(\psi)}$. ⊠

Lema 3.2.4. Se V um módulo de peso gerado por um vetor de peso $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $V_\lambda = \langle v \rangle_{\mathbb{C}}$, então V é indecomponível.

Demonstração. Suponha que existam W e U dois $\mathfrak{g}$-submódulos de V tais que $V = W \oplus U$. Como $\dim(V_\lambda) = 1$ e $V_\lambda = W_\lambda \oplus U_\lambda$, temos que $W_\lambda = \{0\}$ ou $U_\lambda = \{0\}$. Disso segue que $v \in W_\lambda$ ou $v \in U_\lambda$. Uma vez que v gera V, temos que $V = W$ ou $V = U$, ou seja, V é indecomponível. ⊠

Teorema 3.2.5 (Estrutura do Módulo de Verma)**.** O módulo de Verma $M(\lambda)$ é indecomponível para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Além disso,

(a) $M(\lambda)$ é simples se, e somente se, $\lambda \notin \mathbb{N}_0$.

(b) para todo $n \in \mathbb{N}_0$, temos que $M(-n-2)$ é simples. Além disso, se V um $\mathfrak{g}$-submódulo não nulo de $M(n)$, temos que $V = M(n)$ ou $V = M(-n-2)$. Mais ainda, temos o seguinte isomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulo ${M(n)}\big/{M(-n-2)} \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathbf{V}^{(n+1)}$.

Demonstração. Do Lema 3.2.4, segue que $M(\lambda)$ é indecomponível, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

(a) Suponha que $\lambda \notin \mathbb{N}_0$ e seja $V \subseteq M(\lambda)$ um $\mathfrak{g}$-módulo não nulo. Tome $v \in V \setminus \{0\}$. Escrevendo v como combinação linear de elementos da base $\{v_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ de $M(\lambda)$, temos que existe $k \in \mathbb{N}_0$ e existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C}$, com $\alpha_k \neq 0$, tais que $v = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i v_i$. Lembre-se de que $E(v_0) = 0$ e que, dado $i \in \mathbb{N}$, $E(v_i) = a_i v_{i-1}$, onde $a_i = i(\lambda - i + 1)$. Como $\lambda \notin \mathbb{N}_0$, então $a_i \neq 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Assim, $E^k(v) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i E^k(v_i) = (\alpha_k \prod_{i=1}^{k} a_i) v_0$. Logo, $v_0 \in V$. Uma vez que $M(\lambda) = U(\mathfrak{g}) v_0$, então $V = M(\lambda)$, ou seja, $M(\lambda)$ é simples. Reciprocamente, seja $n \in \mathbb{N}_0$. Então $a_{n+1} = (n+1)(n-(n+1)+1) = 0$. Logo, v_{n+1} é um vetor tal que $E(v_{n+1}) = 0$ e $H(v_{n+1}) = (n - 2(n+1)) v_{n+1} = (-n-2) v_{n+1}$. Considere o módulo de Verma $M(-n-2) = \langle v_i' \mid i \in \mathbb{N}_0 \rangle_{\mathbb{C}}$. Pelo Corolário 3.2.3, existe único homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos $\varphi : M(-n-2) \to M(n)$ tal que $\varphi(v_0') = v_{n+1}$. Note que $\mathrm{im}(\varphi) = U(\mathfrak{g}) v_{n+1} \neq \{0\}$ e também $\mathrm{im}(\varphi) \neq M(n)$. Como $\mathrm{im}(\varphi)$ é um $\mathfrak{g}$-submódulo de $M(n)$, então $M(n)$ não é simples.

(b) Pelo item (a), temos que $M(-n-2)$ é simples. Seja, agora, V um $\mathfrak{g}$-submódulo não nulo de $M(n)$. Sabemos que V é um módulo de peso. Seja v_μ um vetor de peso não nulo de V tal que μ é o maior peso de V. Se $\mu \leq -n-2$, então $V = M(-n-2)$, pois $V \subseteq M(-n-2)$ que é simples. Se $\mu > -n-2$, então $V = M(n)$, porque $v_0 \in V$. Portanto, concluímos que se V um $\mathfrak{g}$-submódulo não nulo de $M(n)$, então $V = M(-n-2)$ ou $V = M(n)$. Para provar a última afirmação, considere o homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos $\varphi : M(-n-2) \to M(n)$ obtido na demonstração do item (a). Observe que a imagem da base $\{v_i' \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ de $M(-n-2)$ por φ é o conjunto linearmente independente $\{v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots\}$, o que significa que φ é injetiva. Assim, $M(-n-2) \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathrm{im}(\varphi)$, logo, podemos ver $M(-n-2)$ como sendo um $\mathfrak{g}$-submódulo de $M(n)$. Uma vez que $M(n)$ tem como base $\{v_0, v_1, \ldots\}$ e $\mathrm{im}(\varphi)$ tem como base $\{v_{n+1}, v_{n+2}, \ldots\}$, então ${M(n)}\big/{M(-n-2)}$ tem como base $\{v_i + M(-n-2) \mid i = 0, \ldots, n\}$. Como as ações de $E_{{M(n)}/{M(-n-2)}}$, $F_{{M(n)}/{M(-n-2)}}$ e $H_{{M(n)}/{M(-n-2)}}$ nos elementos dessa base coincide com as ações de $E_{\mathbf{V}^{(n+1)}}$, $F_{\mathbf{V}^{(n+1)}}$ e $H_{\mathbf{V}^{(n+1)}}$ nos elementos da base $\{w_0, \ldots, w_n\}$ de $\mathbf{V}^{(n+1)}$, então o homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos que envia $v_i + M(-n-2)$ em w_i é um isomorfismo, logo, ${M(n)}\big/{M(-n-2)} \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathbf{V}^{(n+1)}$. ⊠

Seja M um $\mathfrak{g}$-módulo. Se, dados quaisquer dois $\mathfrak{g}$-submódulos de M, N_1 e N_2, temos que $N_1 \subseteq N_2$ ou $N_2 \subseteq N_1$, então M é dito **$\mathfrak{g}$-módulo unisserial**. Se existe uma cadeia finita $M_0 = \{0\} \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n = M$ de $\mathfrak{g}$-submódulos, onde ${M_i}/{M_{i-1}}$ é simples, então dizemos que M é um **$\mathfrak{g}$-módulo de comprimento n**. Assim, pelo Teorema 3.2.5, se $n \in \mathbb{N}_0$, então $\{0\} \subseteq M(-n-2) \subseteq M(n)$ é uma cadeia cujos quocientes consecutivos são simples. Além disso, $M(-n-2)$ é o único $\mathfrak{g}$-submódulo próprio não trivial de $M(n)$. Portanto, $M(n)$ é um $\mathfrak{g}$-módulo unisserial de comprimento 2.

Corolário 3.2.6 (Classificação de Módulos de Peso Máximo Simples)**.** Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, existe único $\mathfrak{g}$-módulo de peso simples, com peso máximo λ, denotado por $L(\lambda)$. Mais ainda

$$L(\lambda) \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \begin{cases} M(\lambda), & \text{se } \lambda \notin \mathbb{N}_0; \\ \mathbf{V}^{(n+1)}, & \text{se } \lambda = n \in \mathbb{N}_0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Demonstração. Seja $V = U(\mathfrak{g})v$ um $\mathfrak{g}$-módulo de peso simples, com peso máximo λ. Pelo Corolário 3.2.3, existe único homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos $\varphi : M(\lambda) \to V$ tal que $\varphi(v_0) = v$. Note que φ é um epimorfismo, pois v gera V. Assim, ${M(\lambda)}/{\ker(\varphi)} \underset{\mathfrak{g}}{\cong} V$. Se $\lambda \notin \mathbb{N}_0$, então, pelo Teorema 3.2.5, $M(\lambda)$ é simples. Logo, $\ker(\varphi) = \{0\}$, o que implica que $M(\lambda) \underset{\mathfrak{g}}{\cong} V$. Se $\lambda = n \in \mathbb{N}_0$, então $\ker(\varphi) = M(-n-2)$, logo, $\mathbf{V}^{(n+1)} \underset{\mathfrak{g}}{\cong} {M(\lambda)}/{M(-n-2)} \underset{\mathfrak{g}}{\cong} V$. ⊠

Uma sequência exata curta de $\mathfrak{g}$-módulos $0 \to V \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\psi} U \to 0$ é dita uma **sequência exata curta que cinde**, se $W \underset{\mathfrak{g}}{\cong} V \oplus U$.

Corolário 3.2.7. Seja $n \in \mathbb{N}_0$ e considere o homomorfismo injetor $\varphi : M(-n-2) \to M(n)$ e a projeção canônica $\psi : M(n) \to {M(n)}/{M(-n-2)} \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathbf{V}^{(n+1)}$, definidos na demonstração do Teorema 3.2.5. Então a sequência $0 \to M(-n-2) \xrightarrow{\varphi} M(n) \xrightarrow{\psi} \mathbf{V}^{(n+1)} \to 0$ é uma sequência exata curta que não cinde.

Demonstração. Segue do fato de $M(n)$ ser indecomponível. ⊠

Vamos construir um $\mathfrak{g}$-módulo de maneira análoga à construção no módulo de Verma. Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, defina $\overline{M}(\lambda)$ como sendo o espaço vetorial de base $\{w_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$. Defina E, F e H como sendo os operadores lineares sobre $\overline{M}(\lambda)$ tais que

$$E(w_i) = w_{i+1}, \quad H(w_i) = (\lambda + 2i)w_i \quad \text{e} \quad F(w_i) = \begin{cases} -i(\lambda + i - 1)w_{i-1}, & \text{se } i \neq 0, \\ 0, & \text{se } i = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Tais operadores lineares podem ser visualizados através do seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
{} & w_0 \arrow[l, Rightarrow, "0"'] \arrow[loop above, dotted, "\lambda"] \arrow[r, bend left, "1"] & w_1 \arrow[l, Rightarrow, bend left, "b_1"] \arrow[loop above, dotted, "\lambda+2"] \arrow[r, bend left, "1"] & w_2 \arrow[l, Rightarrow, bend left, "b_2"] \arrow[loop above, dotted, "\lambda+4"] \arrow[r, bend left, "1"] & \cdots \arrow[l, Rightarrow, bend left, "b_3"] \arrow[r, bend left, "1"] & w_{n-1} \arrow[l, Rightarrow, bend left, "b_{n-1}"] \arrow[loop above, dotted, "\lambda+2(n-1)"] \arrow[r, bend left, "1"] & w_n \arrow[l, Rightarrow, bend left, "b_n"] \arrow[loop above, dotted, "\lambda+2n"] \arrow[r, bend left, "1"] & w_{n+1} \arrow[l, Rightarrow, bend left, "b_{n+1}"] \arrow[loop above, dotted, "\lambda+2(n+1)"] \arrow[r, bend left, "1"] & \cdots \arrow[l, Rightarrow, bend left, "b_{n+2}"]
\end{tikzcd} \tag{3.5}$$

onde as setas duplas representam a ação de F, as setas usuais representam a ação de E, as setas pontilhadas representam a ação de H e $b_i = -i(\lambda + i - 1)$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Observe que $\overline{M}(\lambda)$ é o módulo de peso mínimo gerado por w_0 e que $\operatorname{supp}(\overline{M}(\lambda)) = \{\lambda + 2i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$.

Observação 3.2.8. Podemos mostrar, assim como fizemos para $M(\lambda)$, que o elemento de Casimir c age em $\overline{M}(\lambda)$ como o escalar $(\lambda-1)^2$. $\square$

O Corolário 3.2.3, o Teorema 3.2.5 e o Corolário 3.2.6 têm suas versões para o $\mathfrak{g}$-módulo $\overline{M}(\lambda)$, conforme os enunciados a seguir.

Proposição 3.2.9.

(a) Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo e $v \in V$ tal que $F(v) = 0$ e $H(v) = \lambda v$. Então existe único $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\overline{M}(\lambda), V)$ tal que $\psi(w_0) = v$.

(b) Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo gerado por um vetor de peso mínimo com peso λ. Então V é um quociente de $\overline{M}(\lambda)$.

Proposição 3.2.10. O $\mathfrak{g}$-módulo $\overline{M}(\lambda)$ é indecomponível para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Além disso,

(a) O $\mathfrak{g}$-módulo $\overline{M}(\lambda)$ é simples se, e somente se, $-\lambda \notin \mathbb{N}_0$.

(b) Para todo $-n \in \mathbb{N}_0$, temos que $\overline{M}(n+2)$ é simples. Além disso, se V é um $\mathfrak{g}$-submódulo não nulo de $\overline{M}(n)$, então $V = \overline{M}(n+2)$ ou $V = \overline{M}(n)$. Mais ainda, temos que o seguinte isomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos ${\overline{M}(n)}\big/{\overline{M}(n+2)} \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathbf{V}^{(n+1)}$.

Proposição 3.2.11. Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, existe único $\mathfrak{g}$-módulo de peso simples, com peso mínimo λ, denotado por $\overline{L}(\lambda)$. Mais ainda

$$\overline{L}(\lambda) \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \begin{cases} \overline{M}(\lambda), & \text{se } -\lambda \notin \mathbb{N}_0; \\ \mathbf{V}^{(n+1)}, & \text{se } -\lambda = n \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

3.3 Módulos densos

Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ e considere o espaço vetorial $V = M(\lambda) \oplus \overline{M}(\lambda+2)$. Considere as ações de E, F e H como sendo a usual dada pela soma direta dos $\mathfrak{g}$-módulos $M(\lambda)$ e $\overline{M}(\lambda+2)$, com a diferença de que, ao invés de se fazer $F(0, w_0) = 0$, faremos $F(0, w_0) = (v_0, 0)$. Para verificar que V é um $\mathfrak{g}$-módulo basta observar que:

$$\begin{aligned} E(F(0,w_0)) - F(E(0,w_0)) &= E(v_0,0) - F(0,w_1) = \lambda(0,w_0) = H(0,w_0), \\ H(F(0,w_0)) - F(H(0,w_0)) &= H(v_0,0) - (\lambda+2)F(0,w_0) = -2F(0,w_0). \end{aligned}$$

O $\mathfrak{g}$-módulo V está representado no diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, shift left, "a_3"] & (v_2,0) \arrow[l, Rightarrow, shift left, "1"] \arrow[loop above, dotted, "\lambda-4"] \arrow[r, shift left, "a_2"] & (v_1,0) \arrow[l, Rightarrow, shift left, "1"] \arrow[loop above, dotted, "\lambda-2"] \arrow[r, shift left, "a_1"] & (v_0,0) \arrow[l, Rightarrow, shift left, "1"] \arrow[loop above, dotted, "\lambda"] \arrow[r, shift left, "0"] & (0,w_0) \arrow[l, Rightarrow, shift left, "1"] \arrow[loop above, dotted, "\lambda+2"] \arrow[r, shift left, "1"] & (0,w_1) \arrow[l, Rightarrow, shift left, "b_1"] \arrow[loop above, dotted, "\lambda+4"] \arrow[r, shift left, "1"] & (0,w_2) \arrow[l, Rightarrow, shift left, "b_2"] \arrow[loop above, dotted, "\lambda+6"] \arrow[r, shift left, "1"] & \cdots \arrow[l, Rightarrow, shift left, "b_3"]
\end{tikzcd} \tag{3.6}$$

onde as setas duplas representam a ação de F, as setas usuais representam a ação de E, as setas pontilhadas representam a ação de H, $a_i = i(\lambda - i + 1)$ e $b_i = -i(\lambda + i - 1)$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Uma vez que o $\mathfrak{g}$-módulo V dado pelo diagrama (3.6) é gerado pelo vetor de peso $(0, w_0)$ e $V_{\lambda+2} = \langle(0, w_0)\rangle_{\mathbb{C}}$, então, pelo Lema 3.2.4, V é indecomponível. Considere, agora, o espaço vetorial $V' = V$ e faça E, F e H serem as ações dadas pela soma direta dos $\mathfrak{g}$-módulos $M(\lambda)$ e $\overline{M}(\lambda+2)$, com a diferença de que $E(v_0, 0) = (0, w_0)$.

O $\mathfrak{g}$-módulo V' está representado no diagrama abaixo.

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, shift left, "a_3"] & (v_2,0) \arrow[l, Rightarrow, shift left, "1"] \arrow[loop above, dotted, "\lambda-4"] \arrow[r, shift left, "a_2"] & (v_1,0) \arrow[l, Rightarrow, shift left, "1"] \arrow[loop above, dotted, "\lambda-2"] \arrow[r, shift left, "a_1"] & (v_0,0) \arrow[l, Rightarrow, shift left, "1"] \arrow[loop above, dotted, "\lambda"] \arrow[r, shift left, "1"] & (0,w_0) \arrow[l, Rightarrow, shift left, "0"] \arrow[loop above, dotted, "\lambda+2"] \arrow[r, shift left, "1"] & (0,w_1) \arrow[l, Rightarrow, shift left, "b_1"] \arrow[loop above, dotted, "\lambda+4"] \arrow[r, shift left, "1"] & (0,w_2) \arrow[l, Rightarrow, shift left, "b_2"] \arrow[loop above, dotted, "\lambda+6"] \arrow[r, shift left, "1"] & \cdots \arrow[l, Rightarrow, shift left, "b_3"]
\end{tikzcd}
\tag{3.7}
$$

onde as setas duplas representam a ação de F, as setas usuais representam a ação de E, as setas pontilhadas representam a ação de H, $a_i = i(\lambda - i + 1)$ e $b_i = -i(\lambda + i - 1)$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Note que V' é indecomponível pelas mesmas razões que V é indecomponível.

Diferenciando os elementos de V e V' por um subescrito, suponha que $\varphi : V \to V'$ é um isomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos. Então $\varphi((v_0, 0)_V) = \alpha(v_0, 0)_{V'}$ e $\varphi((0, w_0)_V) = \beta(0, w_0)_{V'}$, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Daí, temos que, por uma lado, $\varphi(E_V((v_0, 0)_V)) = 0$, mas, por outro, $E_{V'}(\varphi((v_0, 0)_V)) = \alpha E_{V'}((v_0, 0)_{V'}) = \alpha(0, w_0)_{V'} \neq 0$. Absurdo. Portanto, $V \underset{\mathfrak{g}}{\ncong} V'$.

Do Corolário 3.1.4, vemos que qualquer módulo de peso indecomponível V satisfaz $\mathrm{supp}(V) \subseteq \xi$, para algum $\xi \in {}^{\mathbb{C}}\!/_{2\mathbb{Z}}$. Assim, temos que os $\mathfrak{g}$-módulos V e V' construídos acima têm o maior suporte possível para $\mathfrak{g}$-módulos indecomponíveis. Um $\mathfrak{g}$-módulo com essa propriedade é chamado de *denso*. Mais especificamente, um módulo de peso V tal que $\mathrm{supp}(V) = \lambda + 2\mathbb{Z}$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}$, é dito **módulo denso**.

Sejam $\xi \in {}^{\mathbb{C}}\!/_{2\mathbb{Z}}$ e $\tau \in \mathbb{C}$. Defina $\mathbf{V}(\xi, \tau)$ como sendo o espaço vetorial com base $\{v_\lambda \mid \lambda \in \xi\}$. Considere os operadores lineares E, F e H sobre $\mathbf{V}(\xi, \tau)$ definidos como a seguir:

$$F(v_\lambda) = v_{\lambda-2}, \quad H(v_\lambda) = \lambda v_\lambda, \quad E(v_\lambda) = \frac{1}{4}(\tau - (\lambda+1)^2)v_{\lambda+2}. \tag{3.8}$$

Lema 3.3.1.

(a) $\mathbf{V}(\xi, \tau)$ junto dos operadores definidos em (3.8) é um $\mathfrak{g}$-módulo denso com suporte ξ.

(b) O elemento de Casimir age em $\mathbf{V}(\xi, \tau)$ como o escalar τ.

Demonstração.

(a) Observe que

$$
\begin{aligned}
E(F(v_\lambda)) - F(E(v_\lambda)) = E(v_{\lambda-2}) - a_\lambda F(v_{\lambda+2}) = a_{\lambda-2}v_\lambda - a_\lambda v_\lambda = \\
= \frac{1}{4}\big(\cancel{\tau} - (\lambda - 2 + 1)^2 - \cancel{\tau} + (\lambda+1)^2\big) = \lambda v_\lambda = H(v_\lambda).
\end{aligned}
$$

O mesmo pode ser feito para mostrar que as outras equações em (1.1) são satisfeitas. Logo, $\mathbf{V}(\xi, \tau)$, junto dos operadores E, F e H, é um $\mathfrak{g}$-módulo. Observe que $\mathbf{V}(\xi, \tau)_\lambda = \langle v_\lambda \rangle_{\mathbb{C}}$. Portanto, $\mathbf{V}(\xi, \tau)$ é um módulo de peso. Por fim, veja que, por definição de H nos elementos da base, temos que $\mathrm{supp}(\mathbf{V}(\xi, \tau)) = \xi$, isto é, $\mathbf{V}(\xi, \tau)$ é um módulo denso.

(b) Basta mostrar que o resultado vale para os elementos da base. Assim, dado $v_\lambda \in \mathbf{V}(\xi,\tau)$ um elemento da base, temos que

$$c \cdot v_\lambda = ((\mathbf{h}+1)^2 + 4\mathbf{fe}) \cdot v_\lambda = ((\lambda+1)^2 + 4a_\lambda)v_\lambda = (\cancel{(\lambda+1)^2} + \tau - \cancel{(\lambda+1)^2})v_\lambda = \tau v_\lambda. \qquad \boxtimes$$

O diagrama a seguir representa o $\mathfrak{g}$-módulo $\mathbf{V}(\xi,\tau)$ junto das ações definidas em (3.8).

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, shift left, "a_{\lambda-6}"] & v_{\lambda-4} \arrow[l, Rightarrow, shift left, "1"] \arrow[loop above, dashed, "\lambda-4"] \arrow[r, shift left, "a_{\lambda-4}"] & v_{\lambda-2} \arrow[l, Rightarrow, shift left, "1"] \arrow[loop above, dashed, "\lambda-2"] \arrow[r, shift left, "a_{\lambda-2}"] & v_{\lambda} \arrow[l, Rightarrow, shift left, "1"] \arrow[loop above, dashed, "\lambda"] \arrow[r, shift left, "a_{\lambda}"] & v_{\lambda+2} \arrow[l, Rightarrow, shift left, "1"] \arrow[loop above, dashed, "\lambda+2"] \arrow[r, shift left, "a_{\lambda+2}"] & v_{\lambda+4} \arrow[l, Rightarrow, shift left, "1"] \arrow[loop above, dashed, "\lambda+4"] \arrow[r, shift left, "a_{\lambda+4}"] & \cdots \arrow[l, Rightarrow, shift left, "1"]
\end{tikzcd} \tag{3.9}$$

onde as setas duplas representam a ação de F, as setas usuais representam a ação de E, as setas pontilhadas representam a ação de H e $a_\lambda = \frac{1}{4}(\tau - (\mu+1)^2)$, para todo $\mu \in \xi$.

Proposição 3.3.2. Sejam $\xi \in \mathbb{C}/2\mathbb{Z}$, $\tau \in \mathbb{C}$ e V é um $\mathfrak{g}$-módulo tal que

(i) $\operatorname{supp}(V) = \xi$;

(ii) c age em V como o escalar τ;

(iii) $\dim(V_\lambda) = 1$, para todo $\lambda \in \xi$;

(iv) F_V age injetivamente em V.

Então $V \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathbf{V}(\xi,\tau)$.

Demonstração. Como V é um módulo de peso com $\operatorname{supp}(V) = \xi$ e $\dim(V_\lambda) = 1$, para todo $\lambda \in \xi$, então $V = \langle w_\lambda \mid \lambda \in \xi \rangle_{\mathbb{C}}$, onde $\{w_\lambda\}$ é a base de V_λ. Defina $\varphi : V \to \mathbf{V}(\xi,\tau)$, $w_\lambda \to v_\lambda$. Então φ é um isomorfismo entre espaços vetoriais. Vamos mostrar que a ação de F_V e E_V nos elementos da base de V coincide com a ação de $F_{\mathbf{V}(\xi,\tau)}$ e $E_{\mathbf{V}(\xi,\tau)}$ na base de $\mathbf{V}(\xi,\tau)$, e daí concluir que φ é um homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos. Uma vez que $F_V : V \to V$ é um operador linear injetivo, então, dado $\lambda \in \xi$, podemos assumir (depois de um reescalonamento dos vetores w_λ, se necessário) que $F_V(w_\lambda) = w_{\lambda-2}$. Agora, como $c \cdot w_{\lambda+2} = \tau w_{\lambda+2}$, temos que

$$(\lambda+2-1)^2 w_{\lambda+2} + 4E_V(w_\lambda) = (H_V - 1)^2(w_{\lambda+2}) + 4E_V(F_V(w_{\lambda+2})) = c \cdot w_{\lambda+2} = \tau w_{\lambda+2}.$$

Logo, $E_V(w_\lambda) = \dfrac{1}{4}(\tau - (\lambda+1)^2)w_{\lambda+2}$. Portanto, $V \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathbf{V}(\xi,\tau)$. $\boxtimes$

Para $\tau \in \mathbb{C}$, faça $g_\tau(x) := \tau - (x+1)^2 \in \mathbb{C}[x]$. Note que $g_\tau(x)$ é um polinômio de grau 2, portanto possui no máximo duas raízes complexas distintas. Vamos, agora, descrever a estrutura dos $\mathfrak{g}$-módulos $\mathbf{V}(\xi,\tau)$.

Teorema 3.3.3 (Estrutura de $\mathbf{V}(\xi,\tau)$)**.** Sejam $\xi \in \mathbb{C}/2\mathbb{Z}$ e $\tau \in \mathbb{C}$.

(a) Todo endomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos de $\mathbf{V}(\xi,\tau)$ é um múltiplo escalar da identidade. Em particular, $\mathbf{V}(\xi,\tau)$ é indecomponível.

(b) $\mathbf{V}(\xi,\tau)$ é simples se, e somente se, ξ não contém raiz de $g_\tau(x)$.

(c) Se ξ contém uma única raiz de $g_\tau(x)$, digamos μ, então $M(\mu)$ é o único $\mathfrak{g}$-submódulo próprio de $\mathbf{V}(\xi,\tau)$. Além disso, $M(\mu)$ é simples e $\mathbf{V}(\xi,\tau)/M(\mu) \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \overline{M}(\mu+2)$ é simples também.

(d) Se ξ contém duas raízes distintas de $g_\tau(x)$, μ_1 e μ_2, então $\tau = n^2$, $\mu_1 = n-1$ e $\mu_2 = -n-1$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Além disso, se V é um $\mathfrak{g}$-submódulo próprio não trivial de $\mathbf{V}(\xi,\tau)$, então $V = M(-n-1)$ ou $V = M(n-1)$. Em particular:

- $\mathbf{V}(\xi,\tau)$ contém um único $\mathfrak{g}$-submódulo simples $M(-n-1)$;
- $\mathbf{V}(\xi,\tau)$ contém um único $\mathfrak{g}$-submódulo próprio não simples $M(n-1)$;
- $\mathbf{V}(\xi,\tau)/M(n-1) \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \overline{M}(n+1)$ é simples.

Demonstração.

(a) Seja φ um endomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos de $\mathbf{V}(\xi,\tau)$. Dado $\mu \in \xi$, uma vez que $\varphi(\mathbf{V}(\xi,\tau)_\mu) \subseteq \mathbf{V}(\xi,\tau)_\mu$ e que $\mathbf{V}(\xi,\tau)_\mu = \langle v_\mu \rangle_{\mathbb{C}}$, então $\varphi(v_\mu) = \alpha v_\mu$, para algum $\alpha \in \mathbb{C}$. Vamos mostrar que $\varphi(v_\lambda) = \alpha v_\lambda$, para todo $\lambda \in \xi$, concluindo que $\varphi = \mathrm{id}_{\mathbf{V}(\xi,\tau)}$. Seja $i \in \mathbb{N}$. Então

$$\varphi(v_{\mu-2i}) = \varphi(F^i(v_\mu)) = F^i(\varphi(v_\mu)) = \alpha v_{\mu-2i}.$$

Analogamente,

$$F^i(\varphi(v_{\mu+2i})) = \varphi(F^i(v_{\mu+2i})) = \varphi(v_\mu) = \alpha v_\mu = \alpha F^i(v_{\mu+2i}).$$

Como F é bijetora, aplicando sua inversa i vezes na equação acima, concluímos que $\varphi(v_{\mu+2i}) = v_{\mu+2i}$, ou seja, $\varphi = \mathrm{id}_{\mathbf{V}(\xi,\tau)}$. Além disso, $\mathbf{V}(\xi,\tau)$ é indecomponível, pois caso contrário, se $\mathbf{V}(\xi,\tau) = X \oplus Y$, então $\psi : X \oplus Y \to X \oplus Y$, $(x,y) \mapsto (x,0)$ é um endomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos diferente da identidade.

(b) Assuma que ξ não contém raiz de $g_\tau(x)$ e seja V um $\mathfrak{g}$-submódulo de $\mathbf{V}(\xi,\tau)$ não nulo. Como V é um módulo de peso, então $V = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} V_\lambda$, onde $V_\lambda \subseteq \mathbf{V}(\xi,\tau)_\lambda$. Como $V \neq \{0\}$, temos que $V_\lambda \neq \{0\}$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}$. Seja v_λ um vetor não nulo em V_λ. Aplicando F indutivamente, temos que $v_{\lambda-2i} \in V$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$. Como ξ não contém raiz de $g_\tau(x)$, então, uma vez que $E(v_\lambda) = \frac{1}{4} g_\tau(\lambda) v_{\lambda+2}$, concluímos que $v_{\lambda+2i} \in V$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$, aplicando E indutivamente. Portanto, $V = \mathbf{V}(\xi,\tau)$, ou seja, $\mathbf{V}(\xi,\tau)$ é simples. A recíproca é consequência dos itens (c) e (d).

(c) Assuma que ξ contenha apenas uma raiz de $g_\tau(x)$, digamos μ. Então $E(v_\mu) = 0$ e $H(v_\mu) = \mu v_\mu$. Pela Propriedade Universal do Módulo de Verma (Corolário 3.2.3), existe único homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos $\varphi : M(\mu) \to \mathbf{V}(\xi,\tau)$ tal que $\varphi(v_0) = v_\mu$. Se $\mu \in \mathbb{N}_0$, então $\tau - (-\mu-2+1)^2 = \tau - (\mu+1)^2 = 0$, ou seja, $\mu - 2 \in \xi$ também seria raiz de $g_\tau(x)$. Absurdo. Logo, $\mu \notin \mathbb{N}_0$. Portanto, pelo Teorema 3.2.5, $M(\mu)$ é simples. Logo, φ é injetiva, ou seja, $M(\mu)$ é um $\mathfrak{g}$-submódulo simples de $\mathbf{V}(\xi,\tau)$. Usando o mesmo raciocínio usado na demonstração do Teorema 3.2.5, podemos mostrar que $M(\mu)$ é o único $\mathfrak{g}$-submódulo próprio de $\mathbf{V}(\xi,\tau)$ e que o quociente $\mathbf{V}(\xi,\tau)/M(\mu)$ também é simples. Note que o conjunto $\{v_{\mu+2i} + M(\mu) \mid i \in \mathbb{N}\}$ é uma base de $\mathbf{V}(\xi,\tau)/M(\mu)$ e que $F(v_{\mu+2} + M(\mu)) = 0$ e $H(v_{\mu+2} + M(\mu)) = (\mu+2)(v_{\mu+2} + M(\mu))$. Como μ é a única raiz de $g_\tau(x)$, temos que $E^i(v_{\mu+2} + M(\mu)) \neq 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Logo, $\{E^i(v_{\mu+2} + M(\mu)) \mid i \in \mathbb{N}\}$ é base de $\mathbf{V}(\xi,\tau)/M(\mu)$, o que implica que $\mathbf{V}(\xi,\tau)/M(\mu)$ é um $\mathfrak{g}$-módulo simples de peso mínimo, gerado por um vetor de peso $\mu+2$. Assim, pela Proposição 3.2.11, temos que $\mathbf{V}(\xi,\tau)/M(\mu) \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \overline{M}(\mu+2)$.

(d) Suponha que ξ contenha as duas raízes de $g_\tau(x)$, digamos μ_1 e μ_2. Então podemos assumir, sem perda de generalidade, que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu_2 = \mu_1 - 2n$. Como $g_\tau(\mu_1) = 0 = g_\tau(\mu_2)$, temos que $\tau - (\mu_1 + 1)^2 = \tau - (\mu_1 - 2n + 1)^2$, o que resulta em $\mu_1 = n - 1$. Daí, segue que $\mu_2 = -n-1$ e $\tau = n^2$. Por $-n-1$ e $n-1$ serem raízes de $g_\tau(x)$, temos que $M(-n-1)$ e $M(n-1)$ são $\mathfrak{g}$-submódulos de $\mathbf{V}(\xi,\tau)$, pois os vetores v_{-n-1} e v_{n-1} são vetores de peso máximo e F age injetivamente nesses vetores. Pelo Teorema 3.2.5, $M(-n-1)$ é simples. Para mostrar que se V é um $\mathfrak{g}$-submódulo próprio não trivial de $\mathbf{V}(\xi,\tau)$, então $V = M(-n-1)$ ou $V = M(n-1)$, basta usar o mesmo raciocínio da demonstração do Teorema 3.2.5. Sendo assim, se V é simples, temos que $V = M(-n-1)$ e se V não é simples, então $V = M(n-1)$. Também, analogamente ao que foi feito no Teorema 3.2.5, concluímos que ${}^{\mathbf{V}(\xi,\tau)}\!/_{M(n-1)} \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \overline{M}(n+1)$ que é simples pela Proposição 3.2.10. ⊠

Segue, do Teorema 3.3.3, que,

- se ξ contém uma só raiz de $g_\tau(x)$, digamos μ, então $\{0\} \subsetneq M(\mu) \subsetneq \mathbf{V}(\xi,\tau)$ é uma cadeia cujos quocientes consecutivos são simples. Como esses são os únicos $\mathfrak{g}$-submódulos de $\mathbf{V}(\xi,\tau)$ nesse caso, concluímos que $\mathbf{V}(\xi,\tau)$ é uniserial de comprimento 2;

- se ξ contém duas raízes distintas de $g_\tau(x)$, então $\{0\} \subsetneq M(-n-1) \subsetneq M(n-1) \subsetneq \mathbf{V}(n-1+2\mathbb{Z},n^2)$ é uma cadeia cujos quocientes consecutivos são simples. Como esses são os únicos $\mathfrak{g}$-submódulos de $\mathbf{V}(n-1+2\mathbb{Z},n^2)$ nesse caso, concluímos que $\mathbf{V}(n-1+2\mathbb{Z},n^2)$ é uniserial de comprimento 3.

Corolário 3.3.4.

(a) Se ξ contém um só raiz de $g_\tau(x)$, digamos μ, então a sequência $0 \to M(\mu) \xrightarrow{\varphi} \mathbf{V}(\xi,\tau) \xrightarrow{\psi} \overline{M}(\mu+2) \to 0$ é uma sequência exata curta que não cinde, onde $\varphi : M(\mu) \to \mathbf{V}(\xi,\tau)$ é a inclusão canônica e $\psi : \mathbf{V}(\xi,\tau) \to {}^{\mathbf{V}(\xi,\tau)}\!/_{M(\mu)} \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \overline{M}(\mu+2)$ é a projeção canônica.

(b) Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que a sequência $0 \to M(n-1) \xrightarrow{\varphi} \mathbf{V}(n-1+2\mathbb{Z},n^2) \xrightarrow{\psi} \overline{M}(n+1) \to 0$ é uma sequência exata curta que não cinde, onde $\varphi : M(n-1) \to \mathbf{V}(n-1+2\mathbb{Z},n^2)$ é a inclusão canônica e $\psi : \mathbf{V}(n-1+2\mathbb{Z},n^2) \to {}^{\mathbf{V}(n-1+2\mathbb{Z},n^2)}\!/_{M(n-1)} \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \overline{M}(n+1)$ é a projeção canônica.

Demonstração.

(a) Pelo Teorema 3.3.3, $M(\mu)$ é o único $\mathfrak{g}$-submódulo próprio de $\mathbf{V}(\xi,\tau)$. Logo, $\mathbf{V}(\xi,\tau)$ é indecomponível e, consequentemente, a sequência do enunciado é uma sequência exata curta que não cinde.

(b) Também pelo Teorema 3.3.3, $M(n-1)$ e $M(-n-1)$ são os únicos $\mathfrak{g}$-submódulos de $\mathbf{V}(n-1+2\mathbb{Z},n^2)$, portanto, $\mathbf{V}(n-1+2\mathbb{Z},n^2)$ é indecomponível, o que implica no resultado. ⊠

3.4 Classificação de módulos de peso simples

Lema 3.4.1. Sejam V um $\mathfrak{g}$-módulo de peso simples e $\lambda \in \operatorname{supp}(V)$. Então V_λ é um $\mathbb{C}[c]$-módulo simples.

Demonstração. Lembre-se de que $\mathbb{C}[c] = \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$. Logo, V_λ é um $\mathbb{C}[c]$-módulo. Suponha que V_λ não é simples e seja $W' \subsetneq V_\lambda$ um $\mathbb{C}[c]$-submódulo não nulo. Defina W como sendo o $\mathfrak{g}$-submódulo de V gerado por W', isto é, $W := U(\mathfrak{g})W'$. Observe que $W \neq \{0\}$, pois $\{0\} \neq W' \subseteq W$. Como W é um $\mathfrak{g}$-submódulo de um módulo de peso, então W é um módulo de peso. Vamos mostrar que $W_\lambda = W'$. Como $W' \subsetneq V_\lambda$, então $W' \subseteq W_\lambda$. Para ver a outra inclusão, note que $W_\lambda = W \cap V_\lambda = \big(\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} U(\mathfrak{g})_{2i} W'\big) \cap V_\lambda$. Uma vez que $W' \subsetneq V_\lambda$, então, pelo Corolário 3.1.3, temos que $U(\mathfrak{g})_{2i}W' \subseteq V_{\lambda+2i}$. Daí, $W_\lambda = \big(\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} U(\mathfrak{g})_{2i} W'\big) \cap V_\lambda = U(\mathfrak{g})_0 W'$. Lembre-se de que $U(\mathfrak{g})_0 = \mathbb{C}[\mathbf{h}, c]$. Portanto, $U(\mathfrak{g})_0 W' \subseteq W'$, pois W' é invariante por $\mathbf{h}$, já que $W' \subseteq V_\lambda$, e W' é invariante por c, já que W' é um $\mathbb{C}[c]$-módulo. Daí, segue que $W_\lambda \subseteq W'$. Logo, $W_\lambda = W'$. Por hipótese, temos que $V_\lambda \neq W'$, logo $V_\lambda \neq W_\lambda$, o que implica que $V \neq W$. Absurdo, pois W é um $\mathfrak{g}$-submódulo de V não nulo e V é simples. Portanto, V_λ é simples. ⊠

Lema 3.4.2. Se V é $\mathbb{C}[c]$-módulo simples, então $\dim(V) = 1$.

Demonstração. Seja V um $\mathbb{C}[c]$-módulo simples. Se $\dim(V) < \infty$, então o elemento de Casimir c tem algum autovetor, o qual gera um $\mathbb{C}[c]$-submódulo de V unidimensional (observe que identificamos c com sua imagem pela representação dentro de $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$). Como V é simples, então V tem que coincidir com o $\mathbb{C}[c]$-submódulo gerado pelo autovetor de c. Agora, suponha que $\dim(V) = \infty$. Vamos mostrar que ele não pode ser simples. Como $\ker(c)$ é um $\mathbb{C}[c]$-submódulo de V, então $\ker(c) = \{0\}$ ou $\ker(c) = V$. Se $\ker(c) = V$, então qualquer subespaço de V é um $\mathbb{C}[c]$-submódulo de V, o que é absurdo, pois V é simples. Então $\ker(c) = \{0\}$. O mesmo raciocínio mostra que $\operatorname{im}(c) = V$. Logo, c é um operador linear bijetivo. Seja $v \in V \setminus \{0\}$ e defina $B := \{c^i \cdot v \mid i \in \mathbb{Z}\}$. Note que B está bem definida, porque c é bijetiva. Suponha que B seja um conjunto linearmente dependente. Então, aplicando alguma potência de c, se necessário, temos que $\alpha_0 v + \alpha_1 c \cdot v + \cdots + \alpha_k c^k \cdot v = 0$, onde $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_0, \alpha_1 \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C}$, $\alpha_0, \alpha_k \neq 0$ (já que c é bijetiva, logo $c^\ell \cdot v \neq 0$, para $\ell \in \mathbb{Z}$). Daí, vemos por recursão que $c^\ell \cdot v$ pertence ao espaço gerado por $\{v, c\cdot v, \ldots, c^{k-1}\cdot v\}$, para todo $\ell \in \mathbb{N}_0$. Logo, o espaço gerado por $\{v, c\cdot v, \ldots, c^{k-1}\cdot v\}$ é um $\mathbb{C}[c]$-submódulo de V. Absurdo, pois V é simples. Assim, B é linearmente independente. Uma vez que o espaço gerado por B é invariante por c, então B gera V, ou seja, B é base para V. Contudo, o espaço gerado por $\{v, c\cdot v, c^2\cdot v, \ldots\}$ é diferente de V e também é invariante por c, ou seja, é um $\mathbb{C}[c]$-submódulo próprio de V não nulo. Portanto, V não é simples. ⊠

Teorema 3.4.3 (Classificação de $\mathfrak{g}$-módulos de Peso Simples)**.** Se V é um $\mathfrak{g}$-módulo de peso simples, então V é isomorfo a algum dos $\mathfrak{g}$-módulos (não isomorfos) abaixo:

(a) $\mathbf{V}^{(n)}$, para algum $n \in \mathbb{N}$;

(b) $M(\lambda)$, para algum $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$;

(c) $\overline{M}(-\lambda)$, para algum $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$;

(d) $\mathbf{V}(\xi, \tau)$, para algum $\xi \in \mathbb{C}/2\mathbb{Z}$ e para algum $\tau \in \mathbb{C}$ tal que $\tau \neq (\mu+1)^2$, para todo $\mu \in \xi$.

Demonstração. Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo simples. Então V é indecomponível e, pelo Corolário 3.1.4, $\operatorname{supp}(V) \subseteq \xi$, para algum $\xi \in \mathbb{C}/2\mathbb{Z}$. Além disso, dado $\lambda \in \xi$, pelo Lema 3.4.1 e Lema 3.4.2, temos que $\dim(V_\lambda) = 1$. Considere as ações de E e F sobre V.

- E não é injetiva: existe $v \in V$, com $v \neq 0$ tal que $E(v) = 0$. Como V é um espaço de peso e a dimensão dos espaços de peso é igual a 1, então $v = \alpha_1 v_{\lambda_1} + \cdots + \alpha_n v_{\lambda_n}$, com $V_{\lambda_i} = \langle v_{\lambda_i} \rangle_{\mathbb{C}}$ e $\alpha_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Logo, $0 = E(v) = \alpha_1 E(v_{\lambda_1}) + \cdots + \alpha_n E(v_{\lambda_n})$. Como $E(v_{\lambda_i}) \in V_{\lambda_i+2}$ e como elementos não nulos em diferentes espaço de peso são linearmente independentes, então podemos assumir que v é um vetor de peso, digamos v_λ. Daí, v_λ é um vetor de peso máximo. Além disso, note que $V = U(\mathfrak{g})v_\lambda$, ou seja, V é um módulo de peso máximo. Portanto, pelo Corolário 3.2.6, temos que $V \underset{\mathfrak{g}}{\cong} M(\lambda)$, para algum $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$, ou $V \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathbf{V}^{(n)}$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

- F não é injetiva: procedendo analogamente ao caso onde E não é injetiva, vamos chegar que V é um módulo de peso mínimo e, usando a Proposição 3.2.11, concluir que $V \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \overline{M}(-\lambda)$, para algum $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$, ou $V \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathbf{V}^{(n)}$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

- E e F são injetivas: sejam $\lambda \in \operatorname{supp}(V)$ e $v \in V_\lambda$, com $v \neq 0$. Então $E^i(v) \neq 0$ e $F^i(v) \neq 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Logo, $\operatorname{supp}(V) = \{\lambda + 2i \mid i \in \mathbb{Z}\} = \xi$. Em particular, E e F são bijetoras em V, já que enviam base de V em base de V (lembre-se de que $\dim(V_\lambda) = 1$, para todo λ). Para cada $i \in \mathbb{Z}$, defina $w^i := F^i(v)$, que está bem definida porque F é bijetora. Como $\dim(V_\mu) = 1$, para todo $\mu \in \xi$ e $F^i(v) \in V_{\lambda-2i}$, para todo $i \in \mathbb{Z}$, então $\{w^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ é uma base de V. Uma vez que $c \cdot V_\lambda \subseteq V_\lambda$ e $V_\lambda = \langle v \rangle_{\mathbb{C}}$, então $c \cdot v = \tau v$, para algum $\tau \in \mathbb{C}$. Como c comuta com a ação de F, temos que $c \cdot w_i = c \cdot F^i(v) = F^i(c \cdot v) = F^i(\tau v) = \tau F^i(v) = \tau w_i$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Portanto, c age em V como o escalar τ e, pela Proposição 3.3.2, temos que $V \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathbf{V}(\xi, \tau)$. Além disso, observe que $\tau \neq (\mu+1)^2$, para todo $\mu \in \xi$, já que E age injetivamente, ou seja, $g_\tau(x) = \tau - (x+1)^2$ não tem raiz em ξ (ver Teorema 3.3.3).

Finalmente, vamos mostrar que os $\mathfrak{g}$-módulos dados no enunciado não são isomorfos. Sejam V e W dois módulos diferentes dessa lista e assuma que eles são isomorfos. Então, em particular, $\operatorname{supp}(V) = \operatorname{supp}(W)$. Como $\operatorname{supp}(\mathbf{V}^{(n)}) = \{-n+1, -n+3, \ldots, n-3, n-1\}$, $\operatorname{supp}(M(\lambda)) = \{\lambda - 2i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$, $\operatorname{supp}(\overline{M}(\lambda)) = \{\lambda + 2i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ e $\operatorname{supp}(\mathbf{V}(\xi, \tau)) = \xi$, então a única possibilidade não trivial a ser checada é o caso em que $V = \mathbf{V}(\xi, \tau)$ e $W = \mathbf{V}(\xi, \tau')$, com $\tau \neq \tau'$. Contudo, c age em $\mathbf{V}(\xi, \tau)$ como τ e c age em $\mathbf{V}(\xi, \tau')$ como τ', o que implica que $V \underset{\mathfrak{g}}{\ncong} W$. Contradição. Portanto, os $\mathfrak{g}$-módulos dessa lista não são isomorfos. ⊠

3.5 Famílias coerentes

Fixado $\tau \in \mathbb{C}$, defina o $\mathfrak{g}$-módulo $\mathbf{V}(\tau) := \bigoplus_{\xi \in \mathbb{C}/2\mathbb{Z}} \mathbf{V}(\xi, \tau)$, chamado de **família coerentes correspondente a τ**. Note que, pela Proposição 3.3.2, $V(\tau)$ satisfaz as seguintes propriedades:

(I) $\dim(\mathbf{V}(\tau)_\lambda) = 1$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$;

(II) c age em $\mathbf{V}(\tau)$ como o escalar τ;

(III) F age injetivamente.

Além disso, se V é um $\mathfrak{g}$-módulo que satisfaz as propriedades acima, então $V \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathbf{V}(\tau)$. De fato, sabemos que $V = \bigoplus_{\xi \in \mathbb{C}/2\mathbb{Z}} V^\xi$ e se V satisfaz as condições acima, então cada V^ξ satisfaz as condições da Proposição 3.3.2. Portanto, $V^\xi \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathbf{V}(\xi,\tau)$, para todo $\xi \in \mathbb{C}/2\mathbb{Z}$, e $V \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathbf{V}(\tau)$. Em outras palavras, o $\mathfrak{g}$-módulo $\mathbf{V}(\tau)$ é caracterizado pelas propriedades acima. Vamos mostrar, nesta seção, que $\mathbf{V}(\tau)$ pode ser obtida de maneira natural usando apenas módulos de Verma.

Sejam V o espaço vetorial de base $\{f^{-1}, f, h, e\}$ e $T(V)$ a álgebra tensorial de V. Defina I como sendo o ideal bilateral gerado pelos elementos

$$ef - fe - h, \qquad hf - fh + 2f, \qquad he - eh - 2e, \qquad ff^{-1} - f^{-1}f \quad \text{e} \quad ff^{-1} - 1 \tag{3.10}$$

Perceba que simplificamos a notação escrevendo, por exemplo, $ef - fe - h$ ao invés de $e \otimes f - f \otimes e - h$. Defina $U^{(f)}$ como sendo $T(V)/I$. Note que $U^{(f)}$ é uma álgebra associativa com identidade. Ela é chamada de **localização de Ore de $U(\mathfrak{g})$ com relação ao conjunto multiplicativo $\{f^i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$**.

Exemplo 3.5.1. Das relações que definem I, temos que $f^{-1}f + I = ff^{-1} + I$ e que $ff^{-1} + I = 1 + I$. Daí,

$$\begin{aligned} hf^{-1} - f^{-1}h - 2f^{-1} + I &= (f^{-1}f + I)(hf^{-1} - f^{-1}h - 2f^{-1} + I)(ff^{-1} + I) = \\ &= f^{-1}(fh - hf - 2f)f^{-1} + I = 0 + I. \end{aligned}$$

Portanto, $hf^{-1} - f^{-1}(h+2) \in I$, ou seja, $hf^{-1} + I = f^{-1}(h+2) + I$. Usando o mesmo raciocínio, podemos mostrar que $f^{-1}e - ef^{-1} + I = f^{-2}(h+2) + I = (h-2)f^{-2} + I$. □

Para simplificar ainda mais a notação, sempre que não houver risco de confusão, omitiremos a escrita "$+I$" nos elementos de $U^{(f)}$. Assim, por exemplo, escreveremos $hf^{-1} = f^{-1}(h+2)$, no lugar de $hf^{-1} + I = f^{-1}(h+2) + I$, quando estivermos nos referindo a igualdade em $U^{(f)}$.

Considere o espaço vetorial $\mathbb{C}[a^{-1}, a, b, c]$ dos polinômios nas variáveis a^{-1}, a, b e c, os quais são polinômios ordinários nas variáveis b e c e polinômios de Laurent na variável a. Temos que $\{a^i b^j c^k \mid i \in \mathbb{Z}, j,k \in \mathbb{N}_0\}$ é uma base para esse espaço. Defina em $\mathbb{C}[a^{-1}, a, b, c]$ os operadores lineares F^{-1}, F, H e E da seguinte maneira:

$$F(a^i b^j c^k) = a^{i+1} b^j c^k;$$

$$F^{-1}(a^i b^j c^k) = a^{i-1} b^j c^k;$$

$$H(a^i b^j c^k) = \begin{cases} b^{j+1}c^k, & \text{se } i = 0; \\ F(H(a^{i-1}b^jc^k)) - 2F(a^{i-1}b^jc^k), & \text{se } i > 0; \\ F^{-1}(H(a^{i+1}b^jc^k)) - 2F^{-1}(a^{i+1}b^jc^k), & \text{se } i < 0; \end{cases}$$

$$
E(a^i b^j c^k) = \begin{cases} c^{k+1}, & \text{se } i, j = 0; \\ H(E(b^{j-1}c^k)) + 2E(b^{j-1}c^k), & \text{se } i = 0, j \neq 0; \\ F(E(a^{i-1}b^j c^k)) + H(a^{i-1}b^j c^k), & \text{se } i > 0; \\ F^{-1}(E(a^{i+1}b^j c^k)) - F^{-2}(H+2)(a^{i+1}b^j c^k), & \text{se } i < 0; \end{cases}
$$

Observação 3.5.2. De maneira análoga ao que foi feito na Seção 2.2, podemos mostrar que $\mathbb{C}[a^{-1}, a, b, c]$, junto dos operadores definidos acima, é um $U^{(f)}$-módulo. □

Teorema 3.5.3 (Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt para $U^{(f)}$)**.** O conjunto $\{f^i h^j e^k \mid i \in \mathbb{Z}, j, k \in \mathbb{N}_0\}$ é uma base para o espaço vetorial $U^{(f)}$.

Demonstração. Para se demonstrar esse teorema, a ideia é seguir analogamente a demonstração do Teorema 2.2.4. Primeiro se mostra que, assim como feito no Lema 2.2.1, todo elemento de $U^{(f)}$ se escreve como combinação linear de elementos da forma $f^i h^j e^k$. Depois, usando o $U^{(f)}$-módulo $\mathbb{C}[a^{-1}, a, b, c]$, prova-se que o conjunto $\{f^i h^j e^k \mid i \in \mathbb{Z}, j, k \in \mathbb{N}_0\}$ é linearmente independente. ⊠

Corolário 3.5.4. Existe único homomorfismo injetivo de álgebras associativas $\iota : U(\mathfrak{g}) \to U^{(f)}$ tal que $\iota(\mathbf{f}) = f$, $\iota(\mathbf{h}) = h$ e $\iota(\mathbf{e}) = e$.

Demonstração. Pela Propriedade Universal de $T(\mathfrak{g})$, dados $\varphi : \mathfrak{g} \to T(\mathfrak{g})$ a injeção canônica e $L : \mathfrak{g} \to U^{(f)}$ a transformação linear, onde $L(\mathbf{f}) = f$, $L(\mathbf{h}) = h$ e $L(\mathbf{e}) = e$, existe único homomorfismo de álgebras associativas $\overline{L} : T(\mathfrak{g}) \to U^{(f)}$ tal que $\overline{L}\varphi = L$.

$$
\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "L"'] & T(\mathfrak{g}) \arrow[d, "\exists! \overline{L}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\
 & U^{(f)}
\end{tikzcd}
$$

Observe que $\overline{L}(\mathbf{ef} - \mathbf{fe} - \mathbf{h}) = ef - fe - h = 0$. Analogamente, $\overline{L}(\mathbf{he} - \mathbf{eh} - 2\mathbf{e}) = \overline{L}(\mathbf{hf} - \mathbf{fh} + 2\mathbf{f}) = 0$. Portanto, existe único homomorfismo de álgebras associativas $\iota : U(\mathfrak{g}) \to U^{(f)}$, tal que $\iota(\mathbf{f}) = \overline{L}(\mathbf{f}) = f$, $\iota(\mathbf{h}) = \overline{L}(\mathbf{h}) = h$ e $\iota(\mathbf{e}) = \overline{L}(\mathbf{e}) = e$. Além disso, ι é injetiva, pois, pelo Teorema 3.5.3, ι leva base de $U(\mathfrak{g})$ em conjunto linearmente independente em $U^{(f)}$. ⊠

Dado um elemento invertível x em uma álgebra A, podemos definir uma família discreta de automorfismos de A, fazendo $a \mapsto x^i a x^{-i}$, para cada $i \in \mathbb{Z}$. Vamos mostrar que essa família discreta de automorfismos pode ser mergulhado em uma família de automorfismos indexada por $\mathbb{C}$ (que é fazer $i \in \mathbb{C}$, apesar de não fazer sentido x^i, com $i \notin \mathbb{Z}$). De posse dessa família de automorfismos de $U^{(f)}$ indexada por $\mathbb{C}$, considere o seguinte procedimento: dado um $U(\mathfrak{g})$-módulo, estenda-o a um $U^{(f)}$-módulo, aplique uma torção na ação de $U^{(f)}$ e restrinja esse módulo "torcido" a $U(\mathfrak{g})$ para obter um novo $U(\mathfrak{g})$-módulo. Usaremos tal procedimento para obter qualquer família coerente a partir de módulos de Verma. Observe que a construção de $U^{(f)}$ é crucial, pois $U(\mathfrak{g})$ não possui elementos invertíveis não trivial e, portanto, não contém tal família de automorfismos.

Para cada $k \in \mathbb{Z}$, denote por Θ_k o automorfismo em $U^{(f)}$, definido pela regra $\Theta_k(u) = f^k u f^{-k}$, para todo $u \in U^{(f)}$.

Lema 3.5.5. Para todo $k \in \mathbb{Z}$, temos que

$$\begin{aligned} &\Theta_k(f) = f, && \Theta_k(f^{-1}) = f^{-1}, \\ &\Theta_k(h) = h + 2k, && \Theta_k(e) = e - kf^{1}h - k(k+1)f^{-1} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Demonstração. As igualdades $\Theta_k(f) = f$ e $\Theta_k(f^{-1}) = f^{-1}$ são obtidas pela simples aplicação da fórmula de Θ_k. Para obter a igualdade $\Theta_k(h) = h + 2k$, basta usar o Exemplo 3.5.1, que nos diz que $fhf^{-1} = h + 2$. Logo, se $k \in \mathbb{N}_0$, então, por indução sobre k, temos que $f^k h f^{-k} = h + 2k$. Agora, se $k < 0$, então basta notar que de $fhf^{-1} = h + 2$, obtemos $f^{-1}hf = h - 2$. Assim, por indução sobre $|k|$, temos que $f^{-|k|}hf^{|k|} = h - 2|k|$, ou seja, $f^k h f^{-k} = h + 2k$. Vamos mostrar que $\Theta_k(e) = e - kf^{-1}h - k(k+1)f^{-1}$, supondo que $k \in \mathbb{N}_0$ e usando indução sobre ele. O caso onde $-k \in \mathbb{N}$ é similar. Se $k = 0$, então $\Theta_k(e) = e = e - 0f^{-1}h - 0(0+1)f^{-1}$. Seja $k \in \mathbb{N}$ e suponha que $\Theta_k(e) = e - kf^{-1}h - k(k+1)f^{-1}$. Então

$$\begin{aligned} \Theta_{k+1}(e) &= f^{k+1}ef^{-k-1} = ff^k ef^{-k}f^{-1} \overset{\text{indução}}{=} f(e - kf^{-1}h - k(k+1)f^{-1})f^{-1} = \\ &= fef^{-1} - kff^{-1}hf^{-1} - k(k+1)ff^{-1}f^{-1} = \\ &\overset{(3.10)}{=} e - hf^{-1} - khf^{-1} - k(k+1)f^{-1} = \\ &= e - (k+1)hf^{-1} - k(k+1)f^{-1} = \\ &\overset{\text{Exemplo 3.5.1}}{=} e - (k+1)f^{-1}(h+2) - k(k+1)f^{-1} = \\ &= e - (k+1)f^{-1}h - (k+1)(k+2)f^{-1}. \end{aligned}$$

⊠

Proposição 3.5.6. Para todo $z \in \mathbb{C}$, existe único automorfismo Θ_z de $U^{(f)}$ tal que

$$\begin{aligned} &\Theta_z(f) = f, && \Theta_z(f^{-1}) = f^{-1}, \\ &\Theta_z(h) = h + 2z, && \Theta_z(e) = e - zf^{-1}h - z(z+1)f^{-1} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Além disso, temos que $\Theta_z^{-1} = \Theta_{-z}$.

Demonstração. Seja V o espaço vetorial do qual partimos para definir $U^{(f)}$, conforme apresentado no início dessa seção. Sejam $\iota : V \to T(V)$ a injeção canônica e, dado $z \in \mathbb{C}$, seja também $\vartheta_z : V \to U^{(f)}$ a transformação linear tal que

$$\begin{aligned} &\vartheta_z(f) = f && \vartheta_z(f^{-1}) = f^{-1} \\ &\vartheta_z(h) = h + 2z && \vartheta_z(e) = e - zf^{-1}h - z(z+1)f^{-1}. \end{aligned}$$

Pela Propriedade Universal de $T(V)$, existe único homomorfismo de álgebras associativas $\overline{\vartheta_z} : T(V) \to U^{(f)}$ tal que $\overline{\vartheta_z}\iota = \vartheta_z$.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\vartheta_z"'] & T(V) \arrow[d, "\exists!\overline{\vartheta_z}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & U^{(f)} \end{tikzcd}$$

Observe que:

$$
\begin{aligned}
\overline{\vartheta_z}(ef-fe-h) &= \vartheta_z(e)\vartheta_z(f)-\vartheta_z(f)\vartheta_z(e)-\vartheta_z(h) = \\
&= (e-zf^{-1}h-z(z+1)f^{-1})f-f(e-zf^{-1}h-z(z+1)f^{-1})-h-2z = \\
&= ef-zf^{-1}hf-\cancel{z(z+1)}-fe+zh+\cancel{z(z+1)}-h-2z = \\
&\overset{(3.10)}{=} \underbrace{\cancel{ef-fe}}_{h}-\underbrace{zf^{-1}hf}_{zf^{-1}(fh-2f)}+zh-\cancel{h}-2z = 0
\end{aligned}
$$

Analogamente, podemos mostrar que $\overline{\vartheta_z}(hf-fh+2f)=\overline{\vartheta_z}(he-eh-2e)=\overline{\vartheta_z}(ff^{-1}-f^{-1}f)=\overline{\vartheta_z}(ff^{-1}-1)=0$. Portanto, existe único homomorfismo de álgebras associativas $\Theta_z : U^{(f)} \to U^{(f)}$, tal que $\Theta_z(u)=\vartheta_z(u)$, para todo $u \in U^{(f)}$, ou seja, que satisfaz as equações em (3.12). Vamos mostrar, agora, que $\Theta_{-z}\Theta_z = \mathrm{id}_{U^{(f)}}$, pois disso segue que Θ_z é um automorfismo e que $\Theta_z^{-1}=\Theta_{-z}$. Como Θ_{-z} e Θ_z são homomorfismo de álgebras associativas, basta mostrar que $\Theta_{-z}\Theta_z = \mathrm{id}_{U^{(f)}}$, para os elementos f^{-1}, f, h e e. A verificação que tal igualdade vale para os elementos f^{-1}, f, h é obtida pela simples aplicação da regra que define Θ_z, para todo $z \in \mathbb{C}$. Para o elemento e, temos que

$$
\begin{aligned}
\Theta_{-z}(\Theta_z(e)) &= \Theta_{-z}(e-zf^{-1}h-z(z+1)f^{-1}) = \\
&= e+zf^{-1}h+z(-z+1)f^{-1}-zf^{-1}(h-2z)-z(z+1)f^{-1} \\
&= e+\cancel{zf^{-1}h}-\cancel{z^2f^{-1}}+\cancel{zf^{-1}}-\cancel{zf^{-1}h}+\cancel{2z^2f^{-1}}-\cancel{z^2f^{-1}}-\cancel{zf^{-1}} = e = \\
&= \mathrm{id}_{U^{(f)}}(e).
\end{aligned}
$$
⊠

Lema 3.5.7. Para todo $z, z' \in \mathbb{C}$, temos que $\Theta_z\Theta_{z'} = \Theta_{z+z'}$.

Demonstração. Basta mostrarmos a igualdade do enunciado vale quando calculada nos elementos f^{-1}, f, h e e. Uma simples aplicação de fórmula demonstra o caso para os elementos f^{-1}, f e h. Também, através da fórmula de Θ_z, mostramos que a igualdade vale para o elemento e, em uma conta semelhante à feita na demonstração da Proposição 3.5.6. ⊠

Fixado $z \in \mathbb{C}$, considere o espaço vetorial $B(z) = U^{(f)}$. Para cada $x, y \in U(\mathfrak{g})$ e para cada $u \in B(z)$, defina $x \cdot u \cdot y := \Theta_z(x)uy$ (note que x e y à direita do símbolo de definição estão sendo identificados com $\iota(x)$ e $\iota(y)$, respectivamente, onde $\iota : U(\mathfrak{g}) \to U^{(f)}$ é o homomorfismo injetivo de álgebras associativas dado no Corolário 3.5.4). Afirmação: $B(z)$, com a operação $x \cdot u \cdot y$, definida anteriormente, é um $U(\mathfrak{g})$-módulo à esquerda e também um $U(\mathfrak{g})$-módulo à direta. De fato, pelo Corolário 3.5.4, $U(\mathfrak{g})$ é uma subálgebra de $U^{(f)}$, logo, a multiplicação à direita por um elemento de $U(\mathfrak{g})$ faz $B(z)$ ser um $U(\mathfrak{g})$-módulo à direta. Por outro lado, Θ_z é um automorfismo de $U^{(f)}$, logo, $\Theta_z(x+x') = \Theta_z(x)+\Theta_z(x')$, $\Theta_z(xx') = \Theta_z(x)\Theta_z(x')$ e $\Theta_z(1) = 1$, portanto, a multiplicação à esquerda por $\Theta_z(x)$ faz $B(z)$ ser um $U(\mathfrak{g})$-módulo à esquerda. Assim, considere o funtor $B_z := \mathrm{Tor}(B(z), -) : U(\mathfrak{g})\text{-Mod} \to U(\mathfrak{g})\text{-Mod}$, conforme apresentado no Exemplo C.3, item (b), isto é,

$$
B_z(M) = B(z) \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} M \quad \text{e} \quad B_z(\varphi) = \mathrm{id}_{B(z)} \otimes \varphi,
$$

para todo $M \in U(\mathfrak{g})$-Mod e para todo $\varphi : X \to Y$ homomorfismo de $U(\mathfrak{g})$-módulos.

Observação 3.5.8. Os funtores B_z são conhecidos como **funtores de torção de Mathieu** e foram considerados no artigo (Mat00), onde O. Mathieu classificou todos os módulos de peso simples com espaços de peso de dimensão finita sobre uma álgebra de Lie complexa redutiva. $\square$

Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo. Se cada $u \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ age em V pela multiplicação por um escalar $\chi_V(u) \in \mathbb{C}$, então o homomorfismo de álgebras associativas $\chi_V : \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$, $u \mapsto \chi_V(u)$ é dito **caracter central**.

Proposição 3.5.9.

(a) O funtor B_z é exato, para todo $z \in \mathbb{C}$.

(b) Para todo $z, z' \in \mathbb{C}$, existe um isomorfismo funtorial $\eta : B_z \circ B_{z'} \to B_{z+z'}$, ou seja, $B_z \circ B_{z'} \underset{\eta}{\cong} B_{z+z'}$.

(c) A inclusão $\iota : U(\mathfrak{g}) \to U^{(f)}$ induz uma transformação natural $\bar{\iota} : \mathrm{id}_{U(\mathfrak{g})\text{-Mod}} \to B_0$.

(d) Se $\mathscr{C}$ denotar a subcategoria plena de $U(\mathfrak{g})$-Mod, consistindo de todos os $U(\mathfrak{g})$-módulos cuja ação de F é bijetiva, então existe um isomorfismo funtorial $\eta : B_0|_{\mathscr{C}} \to \mathrm{id}_{U(\mathfrak{g})\text{-Mod}}$, ou seja, $B_0|_{\mathscr{C}} \underset{\eta}{\cong} \mathrm{id}_{U(\mathfrak{g})\text{-Mod}}$, onde $B_0|_{\mathscr{C}}$ significa a restrição de B_0 a $\mathscr{C}$.

(e) Se M admite um caracter central χ_M e $B_z(M) \neq \{0\}$, então $B_z(M)$ admite um caracter central e $\chi_{B_z(M)} = \chi_M$.

Demonstração.

(a) Fixe $z \in \mathbb{C}$ e seja $0 \to M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} P \to 0$ uma sequência exata curta em $U(\mathfrak{g})$-Mod. Sabemos, da Proposição C.4, que B_z é exato à direita, portanto, para basta mostrarmos que $\mathrm{id}_{B(z)} \otimes \varphi$ é injetiva. Para isso, considere $\{m_\ell \mid \ell \in L\}$ uma base de M, onde L é um conjunto de índices e note que, pelo Teorema 3.5.3, $\{f^i h^j e^k \mid i \in \mathbb{Z}, j, k \in \mathbb{N}_0\}$ é uma base para o espaço vetorial $B(z)$. Pelo Corolário 3.5.4, $U(\mathfrak{g})$ é uma subálgebra de $U^{(f)}$, onde o monômio $\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k$ é identificado com o monômio $f^i h^j e^k$. Assim, $\{f^i \otimes m_\ell \mid i < 0 \text{ e } \ell \in L\}$ é uma base de $B(z) \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} M$. Seja $\sum_{i,\ell} \alpha_{i\ell}(f^i \otimes m_\ell)$ um elemento arbitrário do núcleo de $\mathrm{id}_{B(z)} \otimes \varphi$. Então

$$\sum_{i,\ell} \alpha_{i\ell}\big(f^i \otimes \varphi(m_\ell)\big) = \big(\mathrm{id}_{B(z)} \otimes \varphi\big)\big(\sum_{i,\ell} \alpha_{i\ell}(f^i \otimes m_\ell)\big) = 0$$

Como $\{f^i \mid i < 0\}$ é um conjunto linearmente independente em $B(z)$, então, pelo Lema B.1.2, para cada i, temos que

$$\varphi\big(\sum_{i,\ell} \alpha_{i\ell} m_\ell\big) = \sum_{i,\ell} \alpha_{i\ell}\varphi(m_\ell) = 0$$

Uma vez que φ é injetiva, então $\sum_{i,\ell} \alpha_{i\ell} m_\ell = 0$. Finalmente, como $\{m_\ell \mid \ell \in L\}$ é base de M, então $\alpha_{i\ell} = 0$, para todo i e ℓ no somatório. Portanto, $\ker(\mathrm{id}_{B(z)} \otimes \varphi) = \{0\}$, ou seja, $\mathrm{id}_{B(z)} \otimes \varphi$ é injetiva.

(b) Sejam M e N $U(\mathfrak{g})$-módulos e $\varphi : M \to N$ um homomorfismo de $U(\mathfrak{g})$-módulos. Seja $\{m_\ell \mid \ell \in L\}$ uma base para o espaço vetorial M, onde L é um conjunto de índices. Note que $\{f^{-i} \otimes f^{-j} \otimes m_\ell \mid i,j \in \mathbb{N}_0, \ell \in L\}$ é uma base do espaço vetorial $B(z) \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} (B(z') \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} M)$. Assim, podemos definir a transformação linear $\eta_M : B(z) \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} (B(z') \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} M) \to B(z+z') \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} M$, $f^{-i} \otimes f^{-j} \otimes m_\ell \mapsto f^{-i-j} \otimes m_\ell$. Observe que η_M leva base em base, portanto, η_M é bijetora. Observe que

$$\begin{aligned}
\mathbf{h} \cdot (f^{-i} \otimes f^{-j} \otimes m_\ell) &= \Theta_z(h) f^{-i} \otimes f^{-j} \otimes m_\ell = (h+2z) f^{-i} \otimes f^{-j} \otimes m_\ell = \\
&= h f^{-i} \otimes f^{-j} \otimes m_\ell + f^{-i} \otimes f^{-j} \otimes 2z m_\ell = \\
&\overset{\text{Exemplo 3.5.1}}{=} f^{-i}(h+2i) \otimes f^{-j} \otimes m_\ell + f^{-i} \otimes f^{-j} \otimes 2z m_\ell = \\
&= f^{-i} \otimes \Theta_{z'}(h) f^{-j} \otimes m_\ell + f^{-i} \otimes f^{-j} \otimes 2(i+z) m_\ell = \\
&= f^{-i} \otimes (h+2z') f^{-j} \otimes m_\ell + f^{-i} \otimes f^{-j} \otimes 2(i+z) m_\ell = \\
&= f^{-i} \otimes h f^{-j} \otimes m_\ell + f^{-i} \otimes f^{-j} \otimes 2(i+z+z') m_\ell = \\
&\overset{\text{Exemplo 3.5.1}}{=} f^{-i} \otimes f^{-j}(h+2j) \otimes m_\ell + f^{-i} \otimes f^{-j} \otimes 2(i+z+z') m_\ell = \\
&= f^{-i} \otimes f^{-j} \otimes \mathbf{h} \cdot m_\ell + f^{-i} \otimes f^{-j} \otimes 2(i+j+z+z') m_\ell.
\end{aligned}$$

Assim, por um lado, $\eta_M(\mathbf{h} \cdot (f^{-i} \otimes f^{-j} \otimes m_\ell)) = f^{-i-j} \otimes \mathbf{h} \cdot m_\ell + 2(i+j+z+z') f^{-i-j} \otimes m_\ell$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\mathbf{h} \cdot \eta_M(f^{-i} \otimes f^{-j} \otimes m_\ell) &= \mathbf{h} \cdot (f^{-i-j} \otimes m_\ell) = \Theta_{z+z'}(h) f^{-i-j} \otimes m_\ell = (h + 2(z+z')) f^{-i-j} \otimes m_\ell = \\
&= f^{-i-j}(h + 2(i+j)) \otimes m_\ell + 2(z+z') f^{-i-j} \otimes m_\ell = \\
&= f^{-i-j} \otimes \mathbf{h} \cdot m_\ell + 2(i+j+z+z') f^{-i-j} \otimes m_\ell.
\end{aligned}$$

Logo, $\eta_M(\mathbf{h} \cdot (f^{-i} \otimes f^{-j} \otimes m_\ell)) = \mathbf{h} \cdot \eta_M(f^{-i} \otimes f^{-j} \otimes m_\ell)$. Como $\Theta_z(f) = f$, para todo $z \in \mathbb{C}$, temos que

$$\begin{aligned}
\eta_M(\mathbf{f} \cdot (f^{-i} \otimes f^{-j} \otimes m_\ell)) &= \eta_M(f^{-i} \otimes f^{-j} \otimes \mathbf{f} \cdot m_\ell) = f^{-i-j} \otimes \mathbf{f} \cdot m_\ell = \mathbf{f} \cdot (f^{-i-j} \otimes m_\ell) = \\
&= \mathbf{f} \cdot \eta_M(f^{-i} \otimes f^{-j} \otimes m_\ell).
\end{aligned}$$

O mesmo pode-se fazer para $\mathbf{e}$. Portanto, η_M é um homomorfismo de $U(\mathfrak{g})$-módulos. Observe, agora, que

$$\begin{aligned}
(\mathrm{id}_{B(z+z')} \otimes \varphi)(\eta_M(f^{-i} \otimes f^{-j} \otimes m_\ell)) &= (\mathrm{id}_{B(z+z')} \otimes \varphi)(f^{-i-j} \otimes m_\ell) = f^{-i-j} \otimes \varphi(m_\ell) = \\
&= \eta_N\big((\mathrm{id}_{B(z)} \otimes \mathrm{id}_{B(z')} \otimes \varphi)(f^{-i} \otimes f^{-j} \otimes m_\ell)\big),
\end{aligned}$$

ou seja, o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd}
B(z) \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} (B(z') \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} M) \arrow[r, "\mathrm{id}_{B(z)} \otimes (\mathrm{id}_{B(z')} \otimes \varphi)"] \arrow[d, "\eta_M"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & B(z) \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} (B(z') \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} N) \arrow[d, "\eta_N"] \\
B(z+z') \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} M \arrow[r, "\mathrm{id}_{B(z+z')} \otimes \varphi"'] & B(z+z') \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} N
\end{tikzcd}$$

Assim, temos que $\eta = (\eta_M)_{M \in U(\mathfrak{g})\text{-Mod}} : B_z \circ B_{z'} \to B_{z+z'}$ é um isomorfismo funtorial.

(c) Seja M um $U(\mathfrak{g})$-módulo. Usando o homomorfismo de álgebras associativas $\iota : U(\mathfrak{g}) \to U^{(f)}$ do Corolário 3.5.4, temos que $\bar{\iota}_M : M \to B(0) \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} M$, $m \mapsto 1 \otimes m$ é um homomorfismo de $U(\mathfrak{g})$-módulos, pois, dado $x \in U(\mathfrak{g})$, temos que $\bar{\iota}_M(x \cdot m) = 1 \otimes (x \cdot m) = (1 \cdot x) \otimes m = x \otimes m = \Theta_0(x) \otimes m = (x \cdot 1) \otimes m = x \cdot (1 \otimes m)$. Assim, dados N um $U(\mathfrak{g})$-módulo e $\psi : M \to N$ um homomorfismo de $U(\mathfrak{g})$-módulos, temos que $(\mathrm{id}_{B(0)} \otimes \psi)(\bar{\iota}_M(m)) = (\mathrm{id}_{B(0)} \otimes \psi)(1 \otimes m) = 1 \otimes \psi(m) = \bar{\iota}_N(\psi(m))$, ou seja, o diagrama abaixo comuta.

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\bar{\iota}_M"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & N \arrow[d, "\bar{\iota}_N"] \\
B(0) \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} M \arrow[r, "\mathrm{id}_{B(0)} \otimes \psi"'] & B(0) \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} N
\end{tikzcd}
$$

Portanto, $\bar{\iota} = (\bar{\iota}_M)_{M \in U(\mathfrak{g})\text{-mod}} : \mathrm{id}_{U(\mathfrak{g})\text{-Mod}} \to B_0$ é uma transformação natural.

(d) Seja M um $U(\mathfrak{g})$-módulo tal que F age bijetivamente, isto é, seja $M \in \mathscr{C}$. Então M é um $U^{(f)}$-módulo, onde a ação de f, h e e são iguais as ações de $\mathbf{f}$, $\mathbf{h}$ e $\mathbf{e}$ e a ação de f^{-1} e dada pela inversa de F. Vamos construir, para cada $\bar{\iota}_M$ do item (c), seu homomorfismo de $U(\mathfrak{g})$-módulo inverso. Para isso, observe que $\varphi_M : B(0) \times M \to M$, $(u, m) \mapsto u \cdot m$ é uma função bilinear, onde $\varphi_M(u \cdot x, m) = \varphi_M(u, x \cdot m)$, para todo $u \in B(0)$, $m \in M$ e $x \in U(\mathfrak{g})$. Assim, pela Propriedade Universal de $B(0) \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} M$, existe única transformação linear $\eta_M : B(0) \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} M \to M$ tal que $\eta_M(u \otimes m) = u \cdot m$. Observe que

$$
\begin{aligned}
\eta_M(x \cdot (u \otimes m)) &= \eta_M((x \cdot u) \otimes m) = \eta_M(\Theta_0(x) u \otimes m) = \Theta_0(x) u \cdot m = (x \cdot u) \cdot m = \\
&= x \cdot (u \cdot m) = x \cdot \eta_M(u \otimes m),
\end{aligned}
$$

para todo $u \in B(0)$, $m \in M$ e $x \in U(\mathfrak{g})$. Assim, η_M é um homomorfismo de $U(\mathfrak{g})$-módulo. Agora, note que, $\eta_M(\bar{\iota}_M(m)) = \eta_M(1 \otimes m) = m$, ou seja, $\eta_M \bar{\iota}_M = \mathrm{id}_M$. Para mostrar que $\bar{\iota}_M \eta_M = \mathrm{id}_{B(0) \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} M}$, observe que dado $m \in M$, existe único $m' \in M$ tal que $m = \mathbf{f} \cdot m'$. Logo, $f^{-1} \otimes m = f^{-1} \otimes \mathbf{f} \cdot m' = f^{-1} \cdot \mathbf{f} \otimes m' = f^{-1} f \otimes m' = 1 \otimes m' = 1 \otimes f^{-1} \cdot m$. Portanto, $1 \otimes u \cdot m = u \otimes m$, para todo $u \in U^{(f)}$. Com isso, temos que $\bar{\iota}_M(\eta_M(u \otimes m)) = \bar{\iota}_M(u \cdot m) = 1 \otimes u \cdot m = u \otimes m$. Disso segue que, $\bar{\iota}_M$ é a inversa de η_M, o que significa que η é um isomorfismo funtorial, ou seja, $B_0|_{\mathscr{C}} \underset{\eta}{\cong} \mathrm{id}_{U(\mathfrak{g})\text{-Mod}}$.

(e) Seja c o elemento de Casimir, isto é, o elemento $(\mathbf{h} + 1)^2 + 4\mathbf{fe}$. Então

$$
\begin{aligned}
\Theta_z(c) &= \Theta_z((h+1)^2 + 4fe) = ((h + 2z) + 1)^2 + 4f(e - zf^{-1}h - z(z+1)f^{-1}) = \\
&= (h + 2z)^2 + 2(h + 2z) + 1 + 4fe - 4zh - 4z(z+1) = \\
&= h^2 + \cancel{4zh} + \cancel{4z^2} + 2h + \cancel{4z} + 1 + 4fe - \cancel{4zh} - \cancel{4z^2} - \cancel{4z} = \iota(c)
\end{aligned}
$$

Como ι é a inclusão de $U(\mathfrak{g})$ em $U^{(f)}$, identificamos $\iota(c)$ com c (simplificação que já estamos usando), note que, dados $u \in U^{(f)}$ e $m \in M$, temos que

$$c \cdot (u \otimes m) = (c \cdot u) \otimes m = (\Theta_z(c)u) \otimes m = (cu) \otimes m = (uc) \otimes m = (u \cdot c) \otimes m =$$
$$= u \otimes (c \cdot m) = u \otimes (\chi_M(c)m) = \chi_M(c)(u \otimes m).$$

Logo, $\chi_{B_z(M)}(c) = \chi_M(c)$ o que implica que $\chi_{B_z(M)} = \chi_M$. ⊠

Agora, vamos descrever a família coerente usando os funtores de torção de Mathieu, aplicados sobre módulos de Verma.

Teorema 3.5.10. Seja $\tau \in \mathbb{C}$.

(a) Para todo $\xi \in \mathbb{C}/_{2\mathbb{Z}}$ e para todo $z \in \mathbb{C}$, temos que $B_z(\mathbf{V}(\xi,\tau)) \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathbf{V}(\xi + 2z, \tau)$.

(b) Para todo $z \in \mathbb{C}$, temos que $B_z(\mathbf{V}(\tau)) \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathbf{V}(\tau)$.

(c) Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $(\lambda+1)^2 = \tau$. Então $B_0(M(\lambda)) \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathbf{V}(\lambda + 2\mathbb{Z}, \tau)$.

Demonstração.

(a) Como F é bijetiva em $\mathbf{V}(\xi,\tau)$, então $\mathbf{V}(\xi,\tau)$ é um $U^{(f)}$-módulo onde as ações de f, h, e e são herdadas do $U(\mathfrak{g})$-módulo e a ação de f^{-1} é dada pela inversa da F. Assim, $\varphi : B(z) \times \mathbf{V}(\xi,\tau) \to \mathbf{V}(\xi,\tau)$, $(u,v) \mapsto u \cdot v$ é uma função bilinear, onde $\varphi(u \cdot x, v) = \varphi(u, x \cdot v)$, para todo $u \in B(z)$, $v \in \mathbf{V}(\xi,\tau)$ e $x \in U(\mathfrak{g})$. Logo, pela Propriedade Universal de $B(z) \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} \mathbf{V}(\xi,\tau)$, existe única transformação linear $\overline{\varphi} : B(z) \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} \mathbf{V}(\xi,\tau) \to \mathbf{V}(\xi,\tau)$ tal que $\overline{\varphi}(u \otimes v) = u \cdot v$. Observe que $\psi : \mathbf{V}(\xi,\tau) \to B(z) \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} \mathbf{V}(\xi,\tau)$, $v \to 1 \otimes v$ é a transformação linear inversa de $\overline{\varphi}$. Portanto, $B(z) \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} \mathbf{V}(\xi,\tau) \underset{\mathbb{C}}{\cong} \mathbf{V}(\xi,\tau)$. Sejam $\lambda \in \xi$ e $v_\lambda \in \mathbf{V}(\xi,\tau)$ um vetor de peso λ. Então:

$$\mathbf{h} \cdot (1 \otimes v_\lambda) = (\mathbf{h} \cdot 1) \otimes v_\lambda = \Theta_z(h) \otimes v_\lambda = (h + 2z) \otimes v_\lambda = (1 \cdot (\mathbf{h} + 2z)) \otimes v_\lambda =$$
$$= 1 \otimes ((\mathbf{h} + 2z) \cdot v_\lambda) = (\lambda + 2z)(1 \otimes v_\lambda).$$

Logo, $1 \otimes v_\lambda$ é um vetor de peso $\lambda + 2z$. Como $\{1 \otimes v_\lambda \mid \lambda \in \xi\}$ é base de $B(z) \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} \mathbf{V}(\xi,\tau)$, concluímos que $\operatorname{supp}(B_z(\mathbf{V}(\xi,\tau))) = \xi + 2z$ e que todo espaço de peso não nulo de $B_z(\mathbf{V}(\xi,\tau))$ tem dimensão 1. Observe que por F ser bijetiva em $\mathbf{V}(\xi,\tau)$, então F é bijetiva em $B_z(\mathbf{V}(\xi,\tau))$, pois $\mathbf{f} \cdot (1 \otimes v_\lambda) = \Theta_z(f) \otimes v_\lambda = f \otimes v_\lambda = 1 \otimes \mathbf{f} \cdot v_\lambda$. Além disso, pela Proposição 3.5.9, $\chi_{\mathbf{V}(\xi,\tau)} = \chi_{B_z(\mathbf{V}(\xi,\tau))}$, pois $B_z(\mathbf{V}(\xi,\tau)) \neq \{0\}$, ou seja, c age em $B_z(\mathbf{V}(\xi,\tau))$ pela multiplicação dos escalar τ. Daí, pela Proposição 3.3.2, temos que $B_z(\mathbf{V}(\xi,\tau)) \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathbf{V}(\xi + 2z, \tau)$.

(b) Veja que

$$B_z(\mathbf{V}(\tau)) = B_z\Big(\bigoplus_{\xi \in \mathbb{C}/_{2\mathbb{Z}}} \mathbf{V}(\xi,\tau)\Big) = B(z) \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} \Big(\bigoplus_{\xi \in \mathbb{C}/_{2\mathbb{Z}}} \mathbf{V}(\xi,\tau)\Big) = \bigoplus_{\xi \in \mathbb{C}/_{2\mathbb{Z}}} \Big(B(z) \underset{U(\mathfrak{g})}{\otimes} \mathbf{V}(\xi,\tau)\Big) =$$
$$= \bigoplus_{\xi \in \mathbb{C}/_{2\mathbb{Z}}} B_z(\mathbf{V}(\xi,\tau)) \overset{\text{item (a)}}{\underset{\mathfrak{g}}{\cong}} \bigoplus_{\xi \in \mathbb{C}/_{2\mathbb{Z}}} \mathbf{V}(\xi + 2z, \tau) = \bigoplus_{\xi \in \mathbb{C}/_{2\mathbb{Z}}} \mathbf{V}(\xi,\tau) = \mathbf{V}(\tau).$$

(c) Como $\{\mathbf{f}^i \cdot v_0 \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ é base de $M(\lambda)$, então, por definição de B_0, temos que $\{f^{-i} \otimes \mathbf{f}^j \cdot v_0 \mid i, j \in \mathbb{N}_0\}$ é base de $B_0(M(\lambda))$. Observe que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{h} \cdot (f^{-i} \otimes \mathbf{f}^j \cdot v_0) &= (\mathbf{h} \cdot f^{-i}) \otimes \mathbf{f}^j \cdot v_0 = (\Theta_0(h) f^{-i}) \otimes \mathbf{f}^j \cdot v_0 = \\
&\underset{\substack{\text{Exemplo}\\ 3.5.1}}{=} (h f^{-i}) \otimes \mathbf{f}^j \cdot v_0 = f^{-i}(h + 2i) \otimes \mathbf{f}^j \cdot v_0 = f^{-i} \cdot (\mathbf{h} + 2i) \otimes \mathbf{f}^j \cdot v_0 = \\
&= f^{-i} \otimes (\mathbf{h} + 2i)\mathbf{f}^j \cdot v_0 = f^{-i} \otimes (\mathbf{h} + 2i) v_j = f^{-i} \otimes (\lambda - 2j + 2i) v_j = \\
&= (\lambda - 2j + 2i)(f^{-i} \otimes \mathbf{f}^j \cdot v_0),
\end{aligned}
$$

ou seja, $f^{-i} \otimes \mathbf{f}^j \cdot v_0$ é um vetor de peso $\lambda + 2(i - j)$, com $i, j \in \mathbb{N}_0$. Daí, $\operatorname{supp}(B_0(M(\lambda))) = \lambda + 2\mathbb{Z}$ e todo espaço de peso não nulo de $B_0(M(\lambda))$ tem dimensão 1. Note que, como $\mathbf{f}^j \in U(\mathfrak{g})$, com $j \in \mathbb{N}_0$, então $\{f^i \otimes v_0 \mid i \in \mathbb{Z}\}$ é base de $B_0(M(\lambda))$. Assim,

$$
\mathbf{f} \cdot (f^i \otimes v_0) = (\mathbf{f} \cdot f^i) \otimes v_0 = (\Theta_0(f) f^i) \otimes v_0 = f^{i+1} \otimes v_0,
$$

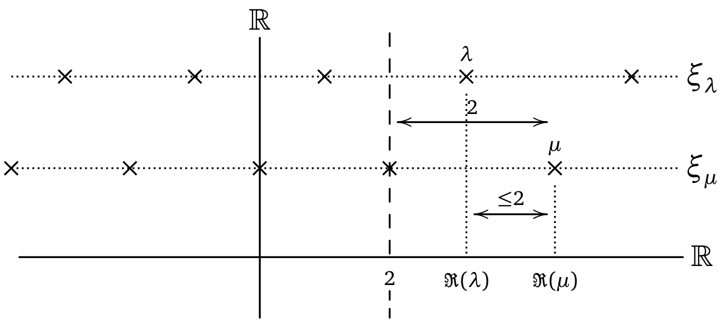
ou seja, F leva base em base, quer dizer, F é bijetiva. Finalmente, pela Proposição 3.5.9, $\chi_{M(\lambda)} = \chi_{B_0(M(\lambda))}$, pois $B_0(M(\lambda)) \neq \{0\}$, ou seja, c age em $B_0(M(\lambda))$ pela multiplicação dos escalar $(\lambda + 1)^2 = \tau$. Portanto, pela Proposição 3.3.2, temos que $B_0(M(\lambda)) \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathbf{V}(\lambda + 2\mathbb{Z}, \tau)$. ⊠

Corolário 3.5.11. Sejam $\tau, \lambda \in \mathbb{C}$ tais que $(\lambda + 1)^2 = \tau$. Então

$$
\mathbf{V}(\tau) = \bigoplus_{\substack{z \in \mathbb{C} \\ 0 \leq \Re(z) < 2}} B_z(M(\lambda)),
$$

onde $\Re(z)$ é a parte real do complexo z.

Demonstração. Sejam λ e τ conforme enunciado. Dado qualquer $z \in \mathbb{C}$, denote a classe $z + 2\mathbb{Z} \in \mathbb{C}/_{2\mathbb{Z}}$ por ξ_z. Então, pelo Teorema 3.5.10 item (c) e pela Proposição 3.5.9 item (b), temos que $B_z(M(\lambda)) = B_{z+0}(M(\lambda)) = B_z(B_0(M(\lambda))) = B_z(\mathbf{V}(\xi_\lambda, \tau)) = \mathbf{V}(\xi_{\lambda+2z}, \tau)$. Observe, agora, que dado qualquer classe $\xi \in \mathbb{C}/_{2\mathbb{Z}}$, podemos escolher um representante dela, $\mu \in \xi$, de modo que $\xi = \xi_\mu$. Além disso, esse μ pode ser escolhido de forma que $0 \leq \frac{\Re(\mu - \lambda)}{2} < 2$.



Logo, tomando $z = \frac{\mu - \lambda}{2}$, temos que $\lambda + 2z = \mu \in \xi_\mu$. Daí, temos que $\xi_\mu = \xi_{\lambda+2z}$ e também temos que $0 \leq \Re(z) < 2$. Uma vez que, por definição, $\mathbf{V}(\tau) = \bigoplus_{\xi \in \mathbb{C}/_{2\mathbb{Z}}} \mathbf{V}(\xi, \tau)$, então

$$\mathbf{V}(\tau) = \bigoplus_{\substack{z\in\mathbb{C}\\ 0\leq\Re(z)<2}} \mathbf{V}(\xi_{\lambda+2z}, \tau) = \bigoplus_{\substack{z\in\mathbb{C}\\ 0\leq\Re(z)<2}} B_z(M(\lambda)). \qquad \boxtimes$$

3.6 Categoria dos módulos de peso cuja dimensão dos espaços de peso é finita

Vamos nesta seção investigar os módulos de peso, cujos espaços de peso têm dimensão finita. Assim, denote por $\overline{\mathfrak{W}}$ a subcategoria plena de $\mathfrak{W}$ cujos objetos têm espaços de peso de dimensão finita. Para cada $\xi \in {}^{\mathbb{C}}\!/_{2\mathbb{Z}}$, defina $\overline{\mathfrak{W}}^{\xi}$ como sendo a subcategoria plena de $\mathfrak{W}$ de todos os $\mathfrak{g}$-módulos V tais que $\operatorname{supp}(V) \subseteq \xi$ e que $\dim(V_\lambda) < \infty$, para todo $\lambda \in \operatorname{supp}(V)$, isto é, $\overline{\mathfrak{W}}^{\xi} = \mathfrak{W}^{\xi} \cap \overline{\mathfrak{W}}$. Pelo Corolário 3.1.4, temos que $\mathfrak{W}$ e $\bigoplus_{\xi\in{}^{\mathbb{C}}/_{2\mathbb{Z}}} \mathfrak{W}^{\xi}$ são categorias isomorfas. Logo, $\overline{\mathfrak{W}}$ e $\bigoplus_{\xi\in{}^{\mathbb{C}}/_{2\mathbb{Z}}} \overline{\mathfrak{W}}^{\xi}$ também são categorias isomorfas.

Dado $\xi \in {}^{\mathbb{C}}\!/_{2\mathbb{Z}}$, vamos decompor a categoria $\overline{\mathfrak{W}}^{\xi}$ usando o elemento de Casimir c. Seja $M \in \overline{\mathfrak{W}}^{\xi}$. Observe que, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, temos que $c \cdot M_\lambda \subseteq M_\lambda$. Portanto, assim como fizemos na Seção 1.2, usando a Decomposição de Jordan de c, temos que $M_\lambda = \bigoplus_{\tau\in\mathbb{C}} M_\lambda(\tau)$, onde $M_\lambda(\tau) := \{m \in M_\lambda \mid \exists\, k \in \mathbb{N} \text{ tal que } (c-\tau)^k \cdot v = 0\}$, pois $\dim(M_\lambda) < \infty$ (ver Apêndice A). Para cada $\tau \in \mathbb{C}$, defina $M(\tau) := \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} M_\lambda(\tau)$ e defina $\overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$ como sendo a subcategoria plena de $\overline{\mathfrak{W}}^{\xi}$ de todos os $\mathfrak{g}$-módulos M tais que $M = M(\tau)$.

Sejam $M \in \overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$, N um $\mathfrak{g}$-módulo qualquer e $\varphi : M \to N$ um homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos. Seja $m \in M_\lambda(\tau)$. Então $m \in M_\lambda$ e $(c-\tau)^k \cdot m = 0$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Já sabemos que $\varphi(m) \in N_\lambda$. Agora, como φ é um homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos, temos que $(c-\tau)^k \cdot \varphi(m) = \varphi((c-\tau)^k \cdot m) = 0$. Portanto, $\varphi(m) \in N_\lambda(\tau)$, ou seja, mostramos que $\varphi(M_\lambda(\tau)) \subseteq N_\lambda(\tau)$. Agora, considere a categoria $\bigoplus_{\tau\in\mathbb{C}} \overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$, conforme visto no Exemplo C.2. Se $\varphi : M \to N$ é um homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos, onde $M \in \overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$ e $N \in \overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau'}$, com $\tau \neq \tau'$, então, uma vez que $\varphi(M_\lambda(\tau)) \subseteq N_\lambda(\tau) = \{0\}$, temos que φ é o homomorfismo zero. Isso implica que $\bigoplus_{\tau\in\mathbb{C}} \overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$ é uma subcategoria plena de $\mathfrak{W}$.

Lema 3.6.1. Seja $\xi \in {}^{\mathbb{C}}\!/_{2\mathbb{Z}}$.

(a) Para cada $M \in \overline{\mathfrak{W}}^{\xi}$ e para cada $\tau \in \mathbb{C}$, o espaço $M(\tau)$ é um $\mathfrak{g}$-submódulo de M e $M = \bigoplus_{\tau\in\mathbb{C}} M(\tau)$.

(b) As categorias $\bigoplus_{\tau\in\mathbb{C}} \overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$ e $\overline{\mathfrak{W}}^{\xi}$ são isomorfas.

Demonstração.

(a) Assim como fizemos na Seção 1.3, temos que $M(\tau) = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} M_\lambda(\tau)$ é um $\mathfrak{g}$-submódulo de M, já que $c \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ e, portanto, $\mathbf{e} \cdot M_\lambda(\tau) \subseteq M_{\lambda+2}(\tau)$, $\mathbf{f} \cdot M_\lambda(\tau) \subseteq M_{\lambda-2}(\tau)$ e $\mathbf{h} \cdot M_\lambda(\tau) \subseteq M_\lambda(\tau)$. Além disso, $M = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} M_\lambda = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} \bigoplus_{\tau\in\mathbb{C}} M_\lambda(\tau) = \bigoplus_{\tau\in\mathbb{C}} \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{C}} M_\lambda(\tau) = \bigoplus_{\tau\in\mathbb{C}} M(\tau)$.

(b) Pelo item (a), podemos definir $F : \overline{\mathfrak{W}}^{\xi} \to \bigoplus_{\tau\in\mathbb{C}} \overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$ como sendo o funtor que leva o objeto M no objeto $\bigoplus_{\tau\in\mathbb{C}} M(\tau)$ e um morfismo nele mesmo. Seja $G : \bigoplus_{\tau\in\mathbb{C}} \overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau} \to \overline{\mathfrak{W}}^{\xi}$ o funtor que leva objetos e morfismos neles próprios. Então F e G são funtores inversos um do outro, ou seja, as categorias $\bigoplus_{\tau\in\mathbb{C}} \overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$ e $\overline{\mathfrak{W}}^{\xi}$ são isomorfas. ⊠

Lema 3.6.2. Sejam S um módulo de peso simples e $\varphi : S \to S$ um homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos. Então $\varphi = \gamma\,\mathrm{id}_S$, para algum $\gamma \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Vimos no Teorema 3.4.3 que $\dim(S_\lambda) = 1$, para todo $\lambda \in \mathrm{supp}(S)$. Fixado $\lambda \in \mathrm{supp}(V)$, denote por $\{v_\lambda\}$ uma base de S_λ. Como S é simples, então $S = U(\mathfrak{g})v_\lambda$. Sabendo que $\varphi(S_\lambda) \subseteq S_\lambda$, então existe $\gamma \in \mathbb{C}$ tal que $\varphi(v_\lambda) = \gamma v_\lambda$. Assim, para qualquer $u \in U(\mathfrak{g})$, temos que $\varphi(u \cdot v_\lambda) = u \cdot \varphi(v_\lambda) = \gamma u \cdot v_\lambda$, ou seja, $\varphi = \gamma\,\mathrm{id}_S$. ⊠

Corolário 3.6.3 (Lema de Schur em dimensão infinita)**.** Sejam V e W módulos de peso simples. Então

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W) \underset{\mathbb{C}}{\cong} \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{se } V \underset{\mathfrak{g}}{\cong} W; \\ \{0\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. Observe que do Lema de Schur (Teorema 1.2.5), se $V \underset{\mathfrak{g}}{\ncong} W$, então $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W) = \{0\}$. Suponha que $V \underset{\mathfrak{g}}{\cong} W$ e lembre-se, da demonstração do Lema de Schur, que qualquer homomorfismo entre V e W é um isomorfismo. Fixe $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$ um isomorfismo. Se $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$ é outro isomorfismo, então $\varphi^{-1}\psi : V \to V$ também é um isomorfismo. Logo, pelo Lema 3.6.2, $\varphi^{-1}\psi = \gamma\,\mathrm{id}_V$, para algum $\gamma \in \mathbb{C}$. Daí, temos que $\psi = \gamma\varphi$, ou seja, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W) = \langle\varphi\rangle_{\mathbb{C}} \underset{\mathbb{C}}{\cong} \mathbb{C}$. ⊠

Observação 3.6.4. Seja $M \in \overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$ um $\mathfrak{g}$-módulo simples. Pelo Lema 3.6.2, temos que c age em M pela multiplicação do escalar τ, pois τ é o único autovalor de c em M. Pelo Teorema 3.4.3,

$$M \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \begin{cases} \mathbf{V}^{(n)}, & \text{onde } n-1 \in \xi; \\ M(\lambda), & \text{onde } \lambda \in \xi; \\ \overline{M}(\lambda), & \text{onde } \lambda \in \xi; \\ \mathbf{V}(\xi, \tau), & \text{onde } \tau \neq (\mu+1)^2,\ \forall\, \mu \in \xi\,. \end{cases}$$

Pelo Lema 1.3.3, Proposição 3.2.1, Observação 3.2.8 e Lema 3.3.1, temos que a ação de c sobre M é dada pelo escalar:

(i) $\tau = n^2$, se $M \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathbf{V}^{(n)}$, onde $n-1 \in \xi$;

(ii) $\tau = (\lambda+1)^2$, se $M \underset{\mathfrak{g}}{\cong} M(\lambda)$, onde $\lambda \in \xi$;

(iii) $\tau = (\lambda-1)^2$, se $M \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \overline{M}(\lambda)$, onde $\lambda \in \xi$;

(iv) τ, se $M \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathbf{V}(\xi, \tau)$, onde $\tau \neq (\mu+1)^2$, $\forall\, \mu \in \xi$. □

Lema 3.6.5. Seja V um módulo de peso e seja $\{0\} \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_n = V$ uma cadeia de $\mathfrak{g}$-submódulos de V. Então, dado $\lambda \in \mathbb{C}$, temos que $V_\lambda \underset{\mathfrak{h}}{\cong} \bigoplus_{i=0}^{n-1} \left({}^{V_{i+1}}\!/_{V_i} \right)_\lambda$.

Demonstração. Vamos usar indução sobre n. Se $n = 1$, então $V \underset{\mathfrak{g}}{\cong} {}^{V}\!/_{\{0\}}$, logo, em particular, $V_\lambda \underset{\mathfrak{h}}{\cong} \left({}^{V}\!/_{\{0\}} \right)_\lambda$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Suponha que o resultado valha para qualquer $k \in \mathbb{N}$, com $k < n$. Sejam $\{0\} \subseteq V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_{n-1} \subseteq V_n = V$ uma cadeia de $\mathfrak{g}$-submódulos e $\lambda \in \mathbb{C}$. Considere $\iota : V_{n-1} \to V$ a inclusão canônica e $\pi : V \to {}^{V_n}\!/_{V_{n-1}}$ a projeção canônica. Então a sequência $0 \to V_{n-1} \xrightarrow{\iota} V \xrightarrow{\pi} {}^{V}\!/_{V_{n-1}} \to 0$ é uma sequência exata curta. Pela Proposição 3.1.8, temos que $0 \to (V_{n-1})_\lambda \xrightarrow{\iota|_{(V_{n-1})_\lambda}} V_\lambda \xrightarrow{\pi|_{V_\lambda}} \left({}^{V}\!/_{V_{n-1}} \right)_\lambda \to 0$ é uma sequência exata curta e $V_\lambda \underset{\mathfrak{h}}{\cong} (V_{n-1})_\lambda \oplus \left({}^{V}\!/_{V_{n-1}} \right)_\lambda$. Por indução, $(V_{n-1})_\lambda \underset{\mathfrak{h}}{\cong} \bigoplus_{i=0}^{n-2} \left({}^{V_{i+1}}\!/_{V_i} \right)_\lambda$. Portanto, $V_\lambda \underset{\mathfrak{h}}{\cong} \bigoplus_{i=0}^{n-1} \left({}^{V_{i+1}}\!/_{V_i} \right)_\lambda$. ⊠

Proposição 3.6.6. Considere $g_\tau(x) = \tau - (x+1)^2 \in \mathbb{C}[x]$, como no Teorema 3.3.3.

(a) A categoria $\overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$ é fechada por: submódulos, quocientes e somas direta.

(b) Se $g_\tau(x)$ não tem raiz em ξ, então $\mathbf{V}(\xi,\tau)$ é o único objeto simples de $\overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$.

(c) Se $g_\tau(x)$ tem uma única raiz $\mu \in \xi$, então $M(\mu)$ e $\overline{M}(\mu+2)$ são os únicos objetos simples de $\overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$.

(d) Se $g_\tau(x)$ tem duas raízes distintas em ξ, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\tau = n^2$ e $\mathbf{V}^{(n)}$, $M(-n-1)$ e $\overline{M}(n+1)$ são os únicos objetos simples de $\overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$.

(e) Todo objeto de $\overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$ tem comprimento finito.

(f) $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M,N)) < \infty$, para todo $M, N \in \overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$.

Demonstração.

(a) Sejam $V, W \in \overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$ e U um $\mathfrak{g}$-submódulo de V. Pela Proposição 3.1.6, temos que:

$$U = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} \overbrace{U \cap V_\lambda}^{U_\lambda}, \qquad {}^{V}\!/_{U} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} \overbrace{{}^{V_\lambda}\!/_{U_\lambda}}^{\left({}^{V}\!/_{U} \right)_\lambda}, \qquad V \oplus W = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} \overbrace{V_\lambda \oplus W_\lambda}^{(V \oplus W)_\lambda},$$

ou seja, $U, {}^{V}\!/_{U}, V \oplus W \in \mathfrak{W}$. Como $\dim(V_\lambda)$ e $\dim(W_\lambda)$ são finitas, então $U, {}^{V}\!/_{U}, V \oplus W \in \overline{\mathfrak{W}}$. Note que $\mathrm{supp}(U) \subseteq \mathrm{supp}(V)$ e, pelo Exemplo 3.1.7, $\mathrm{supp}(V \oplus W) = \mathrm{supp}(V) \cup \mathrm{supp}(W)$. Logo, $U, {}^{V}\!/_{U}, V \oplus W \in \overline{\mathfrak{W}}^{\xi}$, já que $\mathrm{supp}(V), \mathrm{supp}(W) \subseteq \xi$. Por fim, note que $V_\lambda = V_\lambda(\tau)$ e $W_\lambda = W_\lambda(\tau)$. Daí, segue que $U_\lambda = U_\lambda(\tau)$, $\left({}^{V}\!/_{U} \right)_\lambda = \left({}^{V}\!/_{U} \right)_\lambda(\tau)$ e $(V \oplus W)_\lambda = (V \oplus W)_\lambda(\tau)$, ou seja, $U, {}^{V}\!/_{U}, V \oplus W \in \overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$.

(b) Suponha que $g_\tau(x)$ não tenha raiz em ξ. Seja $M \in \overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$ um $\mathfrak{g}$-módulo simples. Como c age em M pelo escalar τ e, por hipótese, $\tau \neq (\mu+1)^2$, para todo $\mu \in \xi$, então pela Observação 3.6.4, $M \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathbf{V}(\xi,\tau)$.

(c) Suponha que $g_\tau(x)$ tenha apenas uma raiz $\mu \in \xi$. Seguindo a ideia do item (b), temos, pela Observação 3.6.4, que um $\mathfrak{g}$-módulo simples $M \in \overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$ para o caso onde c age em M pelo escalar $\tau = (\mu+1)^2$, para exatamente um $\mu \in \xi$, pode ser isomorfo a $M(\mu)$, a $\overline{M}(\mu+2)$ ou a $\mathbf{V}^{(n)}$ e não pode ser isomorfo a $\mathbf{V}(\xi,\tau)$. Vamos mostrar que $M \underset{\mathfrak{g}}{\ncong} \mathbf{V}^{(n)}$ para concluir a demonstração deste item. Para isso, suponha que tais $\mathfrak{g}$-módulos sejam isomorfos. Então, como $c \cdot \mathbf{V}^{(n)} = n^2\mathbf{V}^{(n)}$, temos que $\tau = (n-1+1)^2$. Uma vez que $n-1 \in \xi$, então $n-1 = \mu$. Assim, pelo Corolário 3.2.6, temos que $\mathbf{V}^{(n)} \underset{\mathfrak{g}}{\cong} M(\mu)$. Absurdo, pois $\dim(\mathbf{V}^{(n)}) = n$ e $\dim(M(\mu)) = \infty$. Portanto, as únicas possibilidades para M é ele ser isomorfo a $M(\mu)$ ou a $\overline{M}(\mu+2)$.

(d) Suponha que $g_\tau(x)$ tenha duas raízes distintas em $\mu_1, \mu_2 \in \xi$. Nesse caso, pelo Teorema 3.3.3, sabemos que $\tau = n^2$, $\mu_1 = n-1$ e $\mu_2 = -n-1$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Assim, novamente pela Observação 3.6.4, M só pode ser isomorfo aos seguintes $\mathfrak{g}$-módulos: $\mathbf{V}^{(n)}$, $M(-n-1)$ e $\overline{M}(n+1)$.

(e) Suponha que $M \in \overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$ tenha comprimento infinito. Então existe uma cadeia $\{0\} \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n \subseteq \cdots$ de $\mathfrak{g}$-submódulos de M, onde ${M_{i+1}}/{M_i}$ é simples, para todo $i \in \mathbb{N}_0$. Pelo Teorema 3.4.3, os $\mathfrak{g}$-módulo simples de $\overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$ são: $\mathbf{V}^{(n)}$, $M(\lambda)$, $\overline{M}(\lambda)$ ou $\mathbf{V}(\xi,\tau)$, onde $\lambda, n-1 \in \xi$ e são raízes de $g_\tau(x)$. Daí, existe algum S dentre esses da lista tal que $[M:S] = \infty$, onde $[M:S]$ denota a quantidade de vezes que ${M_{i+1}}/{M_i} \underset{\mathfrak{g}}{\cong} S$. Pelo Lema 3.6.5, temos que $\bigoplus_{i=0}^{n} \left({M_{i+1}}/{M_i}\right)_\lambda \subseteq M_\lambda$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $\lambda \in \mathbb{C}$, ou seja, $\bigoplus_{i=0}^{\infty} \left({M_{i+1}}/{M_i}\right)_\lambda \subseteq M_\lambda$. Assim, dado $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $S_\lambda \neq \{0\}$, temos que $\dim(M_\lambda) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \dim(S_\lambda) = \infty$, pois $\dim(S_\lambda) = 1$. Isso é um absurdo, pois $\dim(M_\lambda) < \infty$. Portanto, M tem comprimento finito.

(f) Sejam $M, N \in \overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$. Pelo item (e), temos que M e N têm comprimento finito. Vamos mostrar que $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M,N)) < \infty$, usando indução duas vezes: uma sobre o comprimento de N, mantendo o comprimento de M fixo e igual a 1; e outra sobre o comprimento de M, qualquer que seja o comprimento de N. Assim, suponha que o comprimento de M é igual a 1, ou seja, que M é simples. O caso base da indução é quando o comprimento de N é igual a 1. Considerando esse caso, temos, pelo Corolário 3.6.3, que $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M,N)) \leq 1$. Seja, agora, $n > 1$ o comprimento de N e suponha que $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M,P)) < \infty$, para todo $P \in \overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$ com comprimento menor do que n. Seja também $\varphi : M \to N$ um homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos. Como M é simples, então φ é injetiva. Assim, considere a sequência exata curta $0 \to M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\pi} {N}/{\mathrm{im}(\varphi)}$, onde π é a projeção canônica. Pela Proposição C.5, o funtor covariante $\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(M,-) : U(\mathfrak{g})\text{-Mod} \to \mathrm{Vec}$ é exato à esquerda, logo

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M,M) \xrightarrow{\varphi^*} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M,N) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M, {N}/{\mathrm{im}(\varphi)}),$$

é sequência exata em Vec. Disso segue, pelo Teorema de Isomorfismo, que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M,M) \underset{\mathbb{C}}{\cong} \mathrm{im}(\varphi^*)$. Também, uma vez que $\mathrm{im}(\pi^*) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M, {N}/{\mathrm{im}(\varphi)})$ e $\ker(\pi^*) = \mathrm{im}(\varphi^*)$, temos que

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M,N)) = \dim(\ker(\pi^*)) + \dim(\mathrm{im}(\pi^*)) = \dim(\mathrm{im}(\varphi^*)) + \dim(\mathrm{im}(\pi^*)) \leq \\ \leq \dim(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M,M)) + \dim(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M, {N}/{\mathrm{im}(\varphi)})).\end{aligned}$$

Como M é simples então $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M,M)) = 1$ e, por indução, $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M, {}^{N}\!/_{\mathrm{im}(\varphi)})) < \infty$, já que o comprimento de ${}^{N}\!/_{\mathrm{im}(\varphi)}$ é menor do que n. Portanto, $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M,N)) < \infty$. Assim, mostramos que se M tem comprimento igual a 1 e N tem comprimento qualquer, então $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M,N)) < \infty$. Note que esse é o caso base para a indução sobre o comprimento de M. Assim, seja $m > 1$ o comprimento de M e suponha que $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(P,N)) < \infty$, para todo $P \in \overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$ com comprimento menor do que m. Seja $\{0\} \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_{m-1} \subseteq M_m = M$ uma cadeia de $\mathfrak{g}$-submódulos de M de comprimento m tal que ${}^{M_i}\!/_{M_{i-1}}$ é simples, para todo i. Observe também que o comprimento de M_{k-1} é $k-1$. Assim, considere a sequência exata curta $0 \to M_{m-1} \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} {}^{M}\!/_{M_{m-1}} \to 0$, onde ι é a inclusão e π é a projeção. Pela Proposição C.5, temos que o funtor contravariante $\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{g})}(-,N) : U(\mathfrak{g})\text{-Mod} \to \mathrm{Vec}$ é exato à esquerda. Logo,

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}({}^{M}\!/_{M_{m-1}}, N) \xrightarrow{\pi_*} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M,N) \xrightarrow{\iota_*} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M_{m-1},N)$$

é sequência exata em Vec. Disso segue que

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M,N)) \leq \dim(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}({}^{M}\!/_{M_{m-1}}, N)) + \dim(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M_{m-1},N)).$$

Por indução, $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}({}^{M}\!/_{M_{m-1}}, N)) < \infty$ e $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M_{m-1},N)) < \infty$. Portanto, temos que $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M,N)) < \infty$. ⊠

3.7 Estrutura de $\overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$ no caso de um objeto simples

Considere o caso em que $\overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$ tenha apenas um objeto simples. Pela Proposição 3.6.6, isso significa que $\tau \neq (\mu+1)^2$, para todo $\mu \in \xi$ e que $\mathbf{V}(\xi,\tau)$ é o objeto simples dessa categoria. Seja $\mathbb{C}[[x]]$ a álgebra associativa das séries de potência formal e seja V um $\mathbb{C}[[x]]$-módulo. Considere a ação de x em V e note que, para qualquer $\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i x^i \in \mathbb{C}[[x]]$ e $v \in V$, temos que $\sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i x^i \cdot v$ é um elemento bem definido em V. Portanto, a única forma disso acontecer (como γ_i são arbitrários) é se existir $\ell(v) \in \mathbb{N}$ tal que $x^{\ell(v)} \cdot v = 0$, ou seja, se x age nilpotentemente em qualquer elemento de V (note que essa potência pode variar de acordo com o elemento de V). Denote por $\mathbb{C}[[x]]$-Mod a categoria de todos os $\mathbb{C}[[x]]$-módulos de dimensão finita.

Fixe algum $\lambda \in \xi$ e considere $V \in \mathbb{C}[[x]]$-Mod. Definimos sobre V uma estrutura de $\mathbb{C}[\mathbf{h}, c]$-módulo, fazendo $\mathbf{h}\cdot v := \lambda v$ e $c \cdot v := \tau v + x \cdot v$, para todo $v \in V$. Isso define uma inclusão dos objetos da categoria $\mathbb{C}[[x]]$-Mod na categoria $\mathbb{C}[\mathbf{h}, c]$-Mod. Observe que se V, W são $\mathbb{C}[[x]]$-módulos e $\varphi : V \to W$ é um homomorfismo de $\mathbb{C}[[x]]$-módulos, então $\varphi : V \to W$ é um homomorfismo de $\mathbb{C}[\mathbf{h}, c]$-módulos, pois

$$\varphi(\mathbf{h} \cdot v) = \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v) = \mathbf{h} \cdot \varphi(v),$$
$$\varphi(c \cdot v) = \varphi(\tau v + x \cdot v) = \tau \varphi(v) + x \cdot \varphi(v) = c \cdot \varphi(v).$$

Disso segue que os morfismos da categoria $\mathbb{C}[[x]]$-Mod são morfismos na categoria $\mathbb{C}[\mathbf{h}, c]$-Mod. Logo, a categoria $\mathbb{C}[[x]]$-Mod está contida na categoria $\mathbb{C}[\mathbf{h}, c]$-Mod.

Lembre-se de que $\mathbb{C}[\mathbf{h},c] = U(\mathfrak{g})_0$ (Proposição 2.4.4). Como $U(\mathfrak{g})_0$ é uma subálgebra de $U(\mathfrak{g})$, temos que $U(\mathfrak{g})$ é um $U(\mathfrak{g})$-módulo à esquerda e um $\mathbb{C}[\mathbf{h},c]$-módulo à direita, onde as ações são, simplesmente, a multiplicação à esquerda e à direita, respectivamente. Assim, podemos considerar o funtor $U(\mathfrak{g}) \underset{\mathbb{C}[\mathbf{h},c]}{\otimes} - : \mathbb{C}[\mathbf{h},c]\text{-Mod} \to U(\mathfrak{g})\text{-Mod}$ e o funtor $F : \mathbb{C}[[x]]\text{-Mod} \to U(\mathfrak{g})\text{-Mod}$ como sendo a restrição de $U(\mathfrak{g}) \underset{\mathbb{C}[\mathbf{h},c]}{\otimes} -$ à categoria $\mathbb{C}[[x]]$-Mod. Observe que, como $U(\mathfrak{g})$ é um $\mathbb{C}[\mathbf{h},c]$-módulo livre à direita, temos que o funtor $U(\mathfrak{g}) \underset{\mathbb{C}[\mathbf{h},c]}{\otimes} -$ é exato e, portanto, o funtor F também é exato.

Proposição 3.7.1. $F(V) \in \overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$, para todo $V \in \mathbb{C}[[x]]$-Mod.

Demonstração. Seja $V \in \mathbb{C}[[x]]$-Mod. Temos que mostrar que $F(V) = U(\mathfrak{g}) \underset{\mathbb{C}[\mathbf{h},c]}{\otimes} V \in \overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$, isto é, temos que mostrar que: (1) para todo $m \in F(V)$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(c-\tau)^k \cdot m = 0$; (2) $\mathrm{supp}(F(V)) \subseteq \xi$; (3) e $\dim(F(V)_\lambda) < \infty$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Vejamos.

(1) Seja $v \in V$. Observe que $(c-\tau)\cdot v = c\cdot v - \tau v = \tau v + x \cdot v - \tau v = x \cdot v$. Procedendo indutivamente, temos que $(c-\tau)^n \cdot v = x^n \cdot v$. Como x age nilpotentemente em qualquer elemento de V, existe $\ell(v) \in \mathbb{N}$ tal que $(c-\tau)^{\ell(v)} \cdot v = 0$. Vamos mostrar que a ação de $(c-\tau)^{\ell(v)}$ se anula em qualquer tensor simples da forma $\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k \otimes v \in U(\mathfrak{g}) \underset{\mathbb{C}[\mathbf{h},c]}{\otimes} V$:

$$(c-\tau)^{\ell(v)} \cdot (\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k \otimes v) = (c-\tau)^{\ell(v)}\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k \otimes v = \mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k(c-\tau)^{\ell(v)} \otimes v = \mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k \otimes (c-\tau)^{\ell(v)} \cdot v = 0.$$

Tome $m \in U(\mathfrak{g}) \underset{\mathbb{C}[\mathbf{h},c]}{\otimes} V$ qualquer. Então $m = \sum_t \mathbf{f}^{i_t}\mathbf{h}^{j_t}\mathbf{e}^{k_t} \otimes v_t$, onde a soma é finita. Para cada t, seja $\ell(v_t)$, conforme o parágrafo anterior. Tome $\ell(m)$ como sendo o máximo entre os $\ell(v_t)$. Assim, $(c-\tau)^{\ell(m)} \cdot m = 0$.

(2) Observe que, das equações em (2.1), obtemos $\mathbf{h}\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k = \mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k\mathbf{h} + 2(k-i)\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k$. Daí, como $\mathbf{h}\cdot v = \lambda v$, por definição, temos que

$$\begin{aligned}\mathbf{h}\cdot(\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k \otimes v) &= \mathbf{h}\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k \otimes v = \mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k\mathbf{h} \otimes v + 2(k-i)\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k \otimes v = \\ &= \mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k \otimes \mathbf{h}\cdot v + 2(k-i)\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k \otimes v = \big(\lambda + 2(k-i)\big)\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k \otimes v.\end{aligned}$$

Como os tensores da forma $\mathbf{f}^i\mathbf{h}^j\mathbf{e}^k \otimes v$ geram $F(V)$, temos que $F(V)$ é um módulo de peso tal que $\mathrm{supp}(F(V)) \subseteq \lambda + 2\mathbb{Z} = \xi$, já que $\lambda \in \xi$.

(3) Pelo Teorema 2.4.7, temos que $U(\mathfrak{g})$ é $U(\mathfrak{g})_0$-módulo livre à direita, com base $\{1, \mathbf{e}^k, \mathbf{f}^k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Daí, pelo Lema B.3.1, temos que $F(V) = U(\mathfrak{g}) \underset{U(\mathfrak{g})_0}{\otimes} V \underset{\mathbb{C}}{\cong} \langle 1, \mathbf{e}^k, \mathbf{f}^k \mid k \in \mathbb{N}\rangle_{\mathbb{C}} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} V$. Denote $\langle 1, \mathbf{e}^k, \mathbf{f}^k \mid k \in \mathbb{N}\rangle_{\mathbb{C}}$ por W e considere sobre esse espaço vetorial a ação dada pela ação adjunta de $\mathbf{h}$, isto é, $\mathbf{h}\cdot\mathbf{e}^k = [\mathbf{h}, \mathbf{e}^k] = \mathbf{h}\mathbf{e}^k - \mathbf{e}^k\mathbf{h} = \mathbf{e}^k(\mathbf{h}+2k) - \mathbf{e}^k\mathbf{h} = 2k\mathbf{e}^k$ e, analogamente, $\mathbf{h}\cdot\mathbf{f}^k = -2k\mathbf{f}^k$ e $\mathbf{h}\cdot 1 = 0$. Dessa forma, podemos considerar o $\mathfrak{h}$-módulo dado pelo produto tensorial $W \underset{\mathbb{C}}{\otimes} V$, cuja ação é dada por $\mathbf{h}\cdot(w\otimes v) = (\mathbf{h}\cdot w)\otimes v + w \otimes (\mathbf{h}\cdot v)$, conforme visto na Seção 1.4. Observe que dado $\mathbf{e}^k \otimes v \in F(V)$, temos que

$$\begin{aligned}\mathbf{h}\cdot(\mathbf{e}^k \otimes v) &= \mathbf{h}\mathbf{e}^k \otimes v = \mathbf{e}^k\mathbf{h} \otimes v + 2k\mathbf{e}^k \otimes v = \mathbf{e}^k \otimes \mathbf{h}\cdot v + 2k\mathbf{e}^k \otimes v = \\ &= \mathbf{e}^k \otimes \lambda v + 2k\mathbf{e}^k \otimes v = (\lambda + 2k)(\mathbf{e}^k \otimes v).\end{aligned}$$

Por outro lado, dado $\mathbf{e}^k \otimes v \in W \underset{\mathbb{C}}{\otimes} V$, temos que

$$\begin{aligned}\mathbf{h} \cdot (\mathbf{e}^k \otimes v) &= \mathbf{h} \cdot \mathbf{e}^k \otimes v + \mathbf{e}^k \otimes \mathbf{h} \cdot v = [\mathbf{h}, \mathbf{e}^k] \otimes v + \mathbf{e}^k \otimes \lambda v = 2k\mathbf{e}^k \otimes v + \mathbf{e}^k \otimes \lambda v = \\ &= (\lambda + 2k)(\mathbf{e}^k \otimes v).\end{aligned}$$

Isso mostra que a ação de $\mathbf{h}$ no elemento $\mathbf{e}^k \otimes v$ coincide quando o vemos tanto em $F(V)$, quanto em $W \underset{\mathbb{C}}{\otimes} V$. O mesmo pode ser feito para elementos da forma $\mathbf{f}^k \otimes v$. Portanto, $F(V) \underset{\mathfrak{h}}{\cong} W \underset{\mathbb{C}}{\otimes} V$ e, consequentemente, $F(V)_\mu \underset{\mathfrak{h}}{\cong} (W \underset{\mathbb{C}}{\otimes} V)_\mu$. Pelo Exemplo 3.1.1, item (d), temos que $(W \underset{\mathbb{C}}{\otimes} V)_\mu = \bigoplus_{\nu+\gamma=\mu} \left(W_\nu \underset{\mathbb{C}}{\otimes} V_\gamma\right)$. Contudo, como o único espaço de peso de V é V_λ, então $(W \underset{\mathbb{C}}{\otimes} V)_\mu = W_{\mu-\lambda} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} V_\lambda$. Uma vez que $\dim(V_\lambda) < \infty$, pois $V = V_\lambda \in \mathbb{C}[[x]]$-Mod, e $\dim(W_{\mu-\lambda}) = 1$, pois qualquer espaço de peso de W tem como base um único elemento da forma 1, $\mathbf{e}^k$ ou $\mathbf{f}^k$, temos que $\dim((W \underset{\mathbb{C}}{\otimes} V)_\mu) < \infty$, ou seja, $\dim(F(V)_\mu) < \infty$. ⊠

Seja $G : \overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau} \to \mathbb{C}[[x]]$-Mod o funtor tal que,

- dado um $\mathfrak{g}$-módulo $M \in \overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$, $G(M) = M_\lambda$, onde a ação de x em $m \in M_\lambda$ é dada por: $x \cdot m := (c - \tau) \cdot m$ (lembre-se de que $\lambda \in \xi$).
- dado $\varphi : M \to N$ um homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos, $G(\varphi) = \varphi|_{M_\lambda}$. Note que, por $\varphi(M_\lambda) \subseteq N_\lambda$ e por $\varphi|_{M_\lambda}(x \cdot m) = \varphi|_{M_\lambda}((c-\tau) \cdot m) = (c-\tau) \cdot \varphi|_{M_\lambda}(m) = x \cdot \varphi|_{M_\lambda}(m)$, então G está bem definida.

Observe que, pela Proposição 3.1.8, G é um funtor exato.

Finalizaremos esse manuscrito com o próximo resultado, o qual é bastante interessante. Ele nos diz que a categoria $\overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$, cujos objetos consistem de certos módulos de dimensão infinita sobre $\mathfrak{g}$ (e, portanto, sobre $U(\mathfrak{g})$ que é uma álgebra associativa não comutativa), é equivalente a categoria $\mathbb{C}[[x]]$-Mod, cujos objetos consistem de módulos de dimensão finita sobre uma álgebra comutativa.

Teorema 3.7.2. As categorias $\overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$ e $\mathbb{C}[[x]]$-Mod são equivalentes.

Demonstração. Temos que mostrar que existem isomorfismos funtoriais $\alpha : \mathrm{id}_{\mathbb{C}[[x]]\text{-Mod}} \to GF$ e $\beta : FG \to \mathrm{id}_{\overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}}$. Sejam $M, N \in \mathbb{C}[[x]]$-Mod e $\varphi : M \to N$ homomorfismo de $\mathbb{C}[[x]]$-módulos. Como a ação de $\mathbf{h}$ em qualquer $\mathbb{C}[[x]]$-módulos é dada pela multiplicação do escalar λ, então $M = M_\lambda$ e $N = N_\lambda$. Além disso, como foi demonstrado na Proposição 3.7.1, temos que $(U(\mathfrak{g}) \underset{\mathbb{C}[\mathbf{h},c]}{\otimes} M)_\mu \underset{\mathbb{C}}{\cong} W_{\mu-\lambda} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} M_\lambda$, onde W denota o espaço vetorial $\langle 1, \mathbf{e}^k, \mathbf{f}^k \mid k \in \mathbb{N} \rangle_{\mathbb{C}}$. Assim,

$$G(F(M)) = (U(\mathfrak{g}) \underset{\mathbb{C}[\mathbf{h},c]}{\otimes} M)_\lambda = \langle 1 \rangle_{\mathbb{C}} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} M \quad \text{e} \quad G(F(N)) = \langle 1 \rangle_{\mathbb{C}} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} N.$$

Dessa forma, considere a transformação linear $\alpha_M : M \to G(F(M))$, $m \mapsto 1 \otimes m$. Lembre-se de que, no início da seção, definimos que c age em qualquer $\mathbb{C}[[x]]$-módulo via $\tau + x$. Assim, observe que

$$
\begin{aligned}
x\cdot\alpha_M(m) &= x\cdot(1\otimes m) = (c-\tau)\cdot(1\otimes m) = (c-\tau)\otimes m = 1\otimes(c-\tau)\cdot m = \\
&= 1\otimes c\cdot m - 1\otimes\tau m = 1\otimes(\tau+x)\cdot m - 1\otimes\tau m = \cancel{1\otimes\tau m} + 1\otimes x\cdot m - \cancel{1\otimes\tau m} \\
&= \alpha_M(x\cdot m),
\end{aligned}
$$

ou seja, α_M é um homomorfismo de $\mathbb{C}[[x]]$-módulos. Além disso, se $\alpha_M(m)=0$, então $1\otimes m=0$, logo $m=0$, o que implica que α_M é injetiva. Agora, se $\gamma\otimes m\in\mathbb{C}\underset{\mathbb{C}}{\otimes}M$, então $\alpha_M(\gamma m)=1\otimes\gamma m=\gamma\otimes m$, portanto α_M é sobrejetiva. Finalmente, dado $m\in M$, temos que

$$
\big(\mathrm{id}_{U(\mathfrak{g})}\otimes\varphi\big)|_{F(M)_\lambda}\big(\alpha_M(m)\big) = (\mathrm{id}_{U(\mathfrak{g})}\otimes\varphi)|_{F(M)_\lambda}(1\otimes m) = 1\otimes\varphi(m) = \alpha_N(\varphi(m)),
$$

ou seja, que comuta o diagrama abaixo.

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha_M"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & N \arrow[d, "\alpha_N"] \\
G(F(M)) \arrow[r, "(\mathrm{id}_{U(\mathfrak{g})}\otimes\varphi)|_{F(M)_\lambda}"'] & G(F(N))
\end{tikzcd}
$$

Portanto, $\alpha=(\alpha_M)_{M\in\mathbb{C}[[x]]\text{-Mod}}:\mathrm{id}_{\mathbb{C}[[x]]\text{-Mod}}\to GF$ é um isomorfismo funtorial.

Vamos mostrar, agora, que existe um isomorfismo funtorial $\beta: FG\to\mathrm{id}_{\overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}}$. Sejam $M,N\in\overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$ e $\varphi: M\to N$ homomorfismo de $U(\mathfrak{g})$-módulos. Observe que $F(G(M))=U(\mathfrak{g})\underset{\mathbb{C}[\mathbf{h},c]}{\otimes}M_\lambda$. Assim, considere a transformação linear $\beta_M: U(\mathfrak{g})\underset{\mathbb{C}[\mathbf{h},c]}{\otimes}M_\lambda\to M$, $u\otimes m\mapsto u\cdot m$. Note que β_M está bem definida, porque M é um $U(\mathfrak{g})$-módulo. Dado $y\in U(\mathfrak{g})$, temos que

$$
\beta_M\big(y\cdot(u\otimes m)\big)=\beta_M\big((y\cdot u)\otimes m\big)=(y\cdot u)\cdot m=y\cdot(u\cdot m)=y\cdot\beta_M(u\otimes m).
$$

Logo, β_M é um homomorfismo de $U(\mathfrak{g})$-módulo. Seja $u\otimes m\in F(G(M))$. Então

$$
\begin{aligned}
\beta_N\big((\mathrm{id}_{U(\mathfrak{g})}\otimes\varphi|_{M_\lambda})(u\otimes m)\big) &= \beta_N(u\otimes\varphi|_{M_\lambda}(m)) = \beta_N(u\otimes\varphi(m)) = u\cdot\varphi(m) = \varphi(u\cdot m) = \\
&= \varphi\big(\beta_M(u\otimes m)\big),
\end{aligned}
$$

ou seja, o diagrama abaixo comuta.

$$
\begin{tikzcd}
F(G(M)) \arrow[r, "\mathrm{id}_{U(\mathfrak{g})}\otimes\varphi|_{M_\lambda}"] \arrow[d, "\beta_M"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & F(G(N)) \arrow[d, "\beta_N"] \\
M \arrow[r, "\varphi"'] & N
\end{tikzcd}
\tag{3.13}
$$

Agora, vamos mostrar que β_M é um isomorfismo de $U(\mathfrak{g})$-módulo. A demonstração será por indução no comprimento de M, que já provamos ser finito. Suponha que $M\in\overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$ é simples. Então $M\underset{\mathfrak{g}}{\cong}\mathbf{V}(\xi,\tau)$, por hipótese da seção. Assim, considere $\{m_\mu\mid\mu\in\xi=\lambda+2\mathbb{Z}\}$ uma base de M. Uma vez que $F(G(M))=U(\mathfrak{g})\underset{\mathbb{C}[\mathbf{h},c]}{\otimes}M_\lambda\underset{\mathbb{C}}{\cong}\langle 1,\mathbf{e}^k,\mathbf{f}^k\mid k\in\mathbb{N}\rangle_{\mathbb{C}}\underset{\mathbb{C}}{\otimes}\langle m_\lambda\rangle_{\mathbb{C}}$, então $\{1\otimes m_\lambda,\mathbf{e}^k\otimes m_\lambda,\mathbf{f}^k\otimes m_\lambda\mid k\in\mathbb{N}\}$ é uma base de $F(G(M))$. Observe que: $\beta_M(1\otimes m_\lambda)=m_\lambda$, $\beta_M(\mathbf{e}^k\otimes m_\lambda)=\mathbf{e}^k\cdot m_\lambda=\gamma m_{\lambda+2k}$, onde $\gamma\neq 0$, já que $\gamma=a_\lambda a_{\lambda+2}\cdots a_{\lambda+2k}$ (veja diagrama (3.9)), e $\beta_M(\mathbf{f}^k\otimes m_\lambda)=\mathbf{f}^k\cdot m_\lambda=m_{\lambda-2k}$.

Portanto, $\beta_M : F(G(M)) \to M$ leva base em base, ou seja, β_M é bijetiva. Assuma, agora, que M é um $\mathfrak{g}$-módulo qualquer em $\overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$ de comprimento $n > 1$ e suponha que β_N é bijetiva para todo $N \in \overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}$, com comprimento menor do que n. Considere $\{0\} \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_{n-1} \subseteq M_n = M$ uma cadeia de $\mathfrak{g}$-submódulos de M cujos coeficiente consecutivos sejam simples, isto é, tais que ${M_i}/{M_{i-1}} \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \mathbf{V}(\xi,\tau)$. Disso, segue que a sequência $0 \to M_{n-1} \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} \mathbf{V}(\xi,\tau) \to 0$ é uma sequência exata curta. Assim, como F e G são funtores exatos, então FG também o é. Logo, $0 \to F(G(M_{n-1})) \xrightarrow{F(G(\iota))} F(G(M)) \xrightarrow{F(G(\pi))} F(G(\mathbf{V}(\xi,\tau))) \to 0$ é uma sequência exata curta. Considere, agora, o seguinte diagrama que é comutativo por (3.13):

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_{n-1} \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbf{V}(\xi,\tau) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & F(G(M_{n-1})) \arrow[r, "F(G(\iota))"'] \arrow[u, "\beta_{M_{n-1}}"] & F(G(M)) \arrow[r, "F(G(\pi))"'] \arrow[u, "\beta_M"] & F(G(\mathbf{V}(\xi,\tau))) \arrow[r] \arrow[u, "\beta_{\mathbf{V}(\xi,\tau)}"] & 0
\end{tikzcd}$$

Por $\mathbf{V}(\xi,\tau)$ ser simples, temos que $\beta_{\mathbf{V}(\xi,\tau)}$ é bijetiva, e por indução, já que M_{n-1} tem comprimento menor do que n, temos que $\beta_{M_{n-1}}$ também é bijetiva. Logo, pela Proposição C.6, concluímos que β_M é bijetiva. Portanto, $\beta = (\beta_M)_{M \in \overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}} : FG \to \mathrm{id}_{\overline{\mathfrak{W}}^{\xi,\tau}}$ é um isomorfismo funtorial. $\boxtimes$

Apêndice A

Forma normal de Jordan

Seja V um K-espaço vetorial e seja $T : V \to V$ um operador linear. Dizemos que um subespaço $W \subseteq V$ é **subespaço T-invariante**, se $T(W) \subseteq W$.

Para a demonstração do Lema A.1, note que se $f(x), g(x) \in K[x]$ e $T : V \to V$ é um operador linear, então $f(T)g(T) = g(T)f(T)$, pois $f(x)g(x) = g(x)f(x)$.

Lema A.1. Sejam V um K-espaço vetorial, $T : V \to V$ um operador linear e $f(x) \in K[x]$ um polinômio. Então $\ker(f(T))$ é T-invariante.

Demonstração. Vamos mostrar que, dado $v \in V$, se $f(T)(v) = 0$, então $f(T)(T(v)) = 0$. Assim, seja $v \in V$ tal que $f(T)(v) = 0$. Uma vez que $f(x)x = xf(x)$, então $f(T)T = Tf(T)$. Daí, $f(T)(T(v)) = (f(T)T)(v) = (Tf(T))(v) = T(f(T)(v)) = 0$. ⊠

Sejam V um K-espaço vetorial e $T : V \to V$ um operador linear. Dizemos que T é **nilpotente**, se existe um inteiro $n \geq 1$ tal que $T^n = 0$. O menor inteiro com essa propriedade é dito **índice de nilpotência** de T.

Lema A.2. Sejam V um K-espaço vetorial, $T : V \to V$ um operador linear nilpotente com índice de nilpotência n e $v \in V$ tal que $T^{n-1}(v) \neq 0$. Então $\{v, T(v), \ldots, T^{n-1}(v)\}$ é linearmente independente.

Demonstração. Ver (Lan87), página 262, Teorema 6.1. O enunciado desse teorema é diferente, porém a demonstração se aplica ao nosso caso. ⊠

Teorema A.3 (Teorema de Hamilton-Cayley)**.** Sejam V um $\mathbb{C}$-espaço vetorial de dimensão finita e $\dim(V) \geq 1$, $T : V \to V$ um operador linear e $p_T(x)$ o polinômio característico de T. Então $p_T(T) = 0$.

Demonstração. Ver (Lan87), página 241, Teorema 2.1. ⊠

Seja $T : V \to V$ um operador linear nilpotente de índice de nilpotência $n \geq 1$, onde V é um $\mathbb{C}$-espaço vetorial, cuja dimensão é igual a n. Então existe $v \in V$ tal que $\mathcal{B} := \{v, T(v), \ldots, T^{n-1}(v)\}$

é base de V e a matriz de T segundo essa base é

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Considere, agora, $F : V \to V$ um operador linear cujo polinômio característico é $p_F(x) = (x-\lambda)^n$. Neste caso, o operador $F - \lambda\,\mathrm{id}_V$ é nilpotente, pelo Teorema A.3. Se seu índice de nilpotência for n, então existe $v \in V$ tal que $\mathcal{B}' := \{v, (F-\lambda\,\mathrm{id}_V)(v), \dots, (F-\lambda\,\mathrm{id}_V)^{n-1}(v)\}$ é base de V. Note que

$$\begin{aligned} F\left((F-\lambda\,\mathrm{id})^i(v)\right) &= \lambda\,\mathrm{id}\left((F-\lambda\,\mathrm{id})^i(v)\right) + (F-\lambda\,\mathrm{id})\left((F-\lambda\,\mathrm{id})^i(v)\right) \\ &= \lambda(F-\lambda\,\mathrm{id})^i(v) + (F-\lambda\,\mathrm{id})^{i+1}(v), \end{aligned}$$

para todo $i = 0, \dots, n-1$. Dessa forma, segundo essa base, a matriz de F é

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(F) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Uma matriz dessa forma é chamada de **bloco de Jordan $n \times n$ associado à λ** e é denotada por $J(\lambda, n)$.

Teorema A.4. Seja $T : V \to V$ um operador linear nilpotente com índice de nilpotência $m \geq 1$, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita. Então existem números inteiros positivos $t, m_1, \dots, m_t$ e vetores $v_1, \dots, v_t \in V$ tais que

(a) o conjunto $\mathcal{B} := \{v_1, T(v_1), \dots, T^{m_1-1}(v_1), \dots, v_t, T(v_t), \dots, T^{m_t-1}(v_t)\}$ é uma base de V;

(b) $T^{m_i}(v_i) = 0$, para cada $i = 1, \dots, t$.

Demonstração. Ver (CL13), página 164, Seção 5.5.8. ⊠

Observe que a matriz de T do Teorema A.4,segundo a base de V dada nesse teorema, se escreve como

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} J(0,m_1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & J(0,m_2) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J(0,m_3) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J(0,m_{t-1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & J(0,m_t) \end{pmatrix}$$

Teorema A.5 (Teorema da Decomposição Primária)**.** Sejam V um $\mathbb{C}$-espaço vetorial, $T : V \to V$ um operador linear e $f(x) = (x-\lambda_1)^{m_1} \cdots (x-\lambda_r)^{m_r} \in K[x]$ um polinômio tal que $f(T) = 0$, onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ são raízes distintas de $f(x)$. Então

$$V = \ker(T - \lambda_1 \operatorname{id}_V)^{m_1} \oplus \cdots \oplus \ker(T - \lambda_r \operatorname{id}_V)^{m_r}.$$

Demonstração. Ver (Lan87), página 257, Teorema 4.2. ⊠

Teorema A.6. Sejam V um $\mathbb{C}$-espaço vetorial com $1 \leq \dim(V) < \infty$, $T : V \to V$ um operador linear e $p_T(x) = (x-\lambda_1)^{m_1} \cdots (x-\lambda_r)^{m_r}$ o polinômio característico de T, onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ são raízes distintas de $p_T(x)$. Então:

(a) $V = \ker(T - \lambda_1 \operatorname{id}_V)^{m_1} \oplus \cdots \oplus \ker(T - \lambda_r \operatorname{id}_V)^{m_r}$;

(b) $\ker(T - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{m_i}$ é T-invariante, para todo $i = 1, \ldots, r$;

(c) $T - \lambda_i \operatorname{id}_V$ restrito a $\ker(T - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{m_i}$ é nilpotente.

Demonstração.

(a) Juntando os Teoremas A.5 e A.3, temos que $V = \ker(T - \lambda_1 \operatorname{id}_V)^{m_1} \oplus \cdots \oplus \ker(T - \lambda_r \operatorname{id}_V)^{m_r}$;

(b) Se definirmos o polinômio $f_i(x) = (x - \lambda_i)^{m_i}$, então, pelo Lema A.1, temos que $\ker(T - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{m_i}$ é T-invariante, para todo $i = 1, \ldots, r$;

(c) Por $\ker(T - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{m_i}$ ser T-invariante, então ele também é $(T - \lambda_j \operatorname{id}_V)$-invariante, para todo $j = 1, \ldots, r$. Assim, restringindo $T - \lambda_i \operatorname{id}_V$ a $\ker(T - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{m_i}$, temos que se $v \in \ker(T - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{m_i}$, então $(T - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{m_i}(v) = 0$, ou seja, $T - \lambda_i \operatorname{id}_V$ restrito a $\ker(T - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{m_i}$ é nilpotente. ⊠

Assuma as hipóteses do Teorema A.6. O item (b) desse teorema nos permite definir $T_i : \ker(T - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{m_i} \to \ker(T - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{m_i}$. Do item (a), fixadas bases para os subespaços $\ker(T - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{m_i}$, temos que a matriz de T, com respeito a união dessas bases, se decompõe em blocos de matrizes, onde cada bloco é formada pela matriz de T_i com respeito a base fixada para $\ker(T - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{m_i}$. Pelo item (c), pelo Teorema A.4 e pelo comentário que antecede o Teorema A.4, existe uma base $\mathcal{B}_i := \{v_{i1}, (T - \lambda_i \operatorname{id}_V)(v_{i1}), \ldots, (T - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{m_1 - 1}(v_{i1}), \ldots, v_{it_i}, (T - \lambda_i \operatorname{id}_V)(v_{it_i}), \ldots, (T - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{m_{t_i} - 1}(v_{it_i})\}$ de $\ker(T - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{m_i}$ tal que a matriz de T_i com respeito a essa base é

$$M_{\mathcal{B}_i}^{\mathcal{B}_i}(T_i) = \begin{pmatrix} J(\lambda_i, m_1) & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & J(\lambda_i, m_2) & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J(\lambda_i, m_3) & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & J(\lambda_i, m_{t_i - 1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & J(\lambda_i, m_{t_i}) \end{pmatrix}$$

Portanto, a matriz de T com respeito a base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_r$ é

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1}(T_1) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_2}(T_2) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_3}(T_3) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & M_{\mathcal{B}_{r-1}}^{\mathcal{B}_{r-1}}(T_{r-1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & M_{\mathcal{B}_r}^{\mathcal{B}_r}(T_r) \end{pmatrix}$$

A decomposição de V na soma direta de subespaços gerados pelos elementos de $\mathcal{B}_i$, com $i = 1, \dots r$, isto é, $V = \bigoplus_{i=1}^{r} \langle \mathcal{B}_i \rangle_{\mathbb{C}}$, é chamada de **decomposição de Jordan**.

Mostramos no item (c) do Teorema A.6 que o fato de $\ker(T - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{m_i}$ ser T-invariante, implica que ele também é $(T - \lambda_j \operatorname{id}_V)$-invariante, para todo $j = 1, \dots, r$. Portanto, se definirmos $W_i :=$ $\ker(T - \lambda_1 \operatorname{id}_V)^{m_1} \oplus \cdots \oplus \ker(T - \lambda_{i-1} \operatorname{id}_V)^{m_{i-1}} \oplus \ker(T - \lambda_{i+1} \operatorname{id}_V)^{m_{i+1}} \oplus \cdots \oplus \ker(T - \lambda_r \operatorname{id}_V)^{m_r}$, temos que W_i é $(T - \lambda_i \operatorname{id}_V)$-invariante. Observe que a matriz de $T - \lambda_i \operatorname{id}_V$ restrita a W_i, segundo a base $\mathcal{B}$, tem determinante diferente de zero, pois é uma matriz triangular inferior com a diagonal tendo como valores $\lambda_j - \lambda_i \neq 0$, já que $\lambda_j \neq \lambda_i$. Assim, $T - \lambda_i \operatorname{id}_V$ restrita a W_i é invertível.

Ainda nas hipóteses do Teorema A.6, defina $V(\lambda_i) := \{v \in V \mid \exists\, k \in \mathbb{N} \text{ tal que } (T - \lambda_i)^k(v) = 0\}$. Vamos mostrar que $V(\lambda_i) = \ker(T - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{m_i}$. Se $v \in \ker(f - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{m_i}$, então $v \in V(\lambda_i)$, já que existe $m_i \in \mathbb{N}$ tal que $(f - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{m_i}(v) = 0$, ou seja, $\ker(f - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{m_i} \subseteq V(\lambda_i)$. Reciprocamente, se $v \in V(\lambda_i)$, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(f - \lambda_i \operatorname{id}_V)^k(v) = 0$. Supondo $k \leq m_i$, temos que $(f - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{m_i}(v) = (f - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{m_i - k}\big((f - \lambda_i \operatorname{id}_V)^k(v)\big) = 0$. Suponha $k > m_i$ e seja W_i como no parágrafo anterior. Uma vez que $V = \ker(T - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{m_i} \oplus W_i$, então $v = v_i + w$, onde $v_i \in$ $\ker(T - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{m_i}$ e $w \in W_i$. Daí $0 = (f - \lambda_i \operatorname{id}_V)^k(v) = (f - \lambda_i \operatorname{id}_V)^k(v_i) + (f - \lambda_i \operatorname{id}_V)^k(w)$. Por hipótese $k > m_i$, logo $(f - \lambda_i \operatorname{id}_V)^k(v_i) = 0$ e, consequentemente, $(f - \lambda_i \operatorname{id}_V)^k(w) = 0$. Vimos que $f - \lambda_i \operatorname{id}_V$ é invertível em W_i, portanto $(f - \lambda_i \operatorname{id}_V)^k$ também é invertível em W_i. Assim, por $(f - \lambda_i \operatorname{id}_V)^k(w) = 0$, concluímos que $w = 0$. Dessa forma, $v = v_i \in \ker(T - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{m_i}$. Portanto, provamos que $V(\lambda_i) \subseteq \ker(T - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{m_i}$. Como a outra inclusão já havíamos provado, então $V(\lambda_i) = \ker(T - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{m_i}$.

Do Teorema A.6 e do parágrafo anterior, podemos escrever $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} V(\lambda_i)$, onde $V(\lambda_i) \neq 0$, somente quando $i = 1, \dots, r$.

Apêndice B

Produtos tensoriais

Os resultados e definições apresentados nesse apêndice podem ser encontrados em (Bre14, Kna88).

B.1 Produto tensorial sobre um corpo

Seja K um corpo e sejam V e W K-espaços vetoriais. Considere o produto cartesiano de V e W, $V \times W$, sem nenhuma estrutura algébrica, apenas visto como conjunto. Assim, por exemplo, usando a estrutura de K-espaço vetorial de V e W, temos que $(\lambda v, \lambda w), (v + v', w + w') \in V \times W$, onde $\lambda \in K$, $v, v' \in V$ e $w, w' \in W$. Contudo, não está definido nesse produto cartesiano o que significam $\lambda(v, w)$ e $(v, w) + (v', w')$.

Defina L como sendo o K-espaço vetorial com base sendo o conjunto $V \times W$, isto é, o conjunto

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (v_i, w_i) \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\, \lambda_i \in K,\, v_i \in V,\, w_i \in W \right\},$$

onde, dados $\mu \in K$ e $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (v_i, w_i), \sum_{i=1}^{m} \mu_i (v_i', w_i') \in L$, com $n \geq m$, a multiplicação por escalar e a soma são como abaixo:

- $\mu \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (v_i, w_i) \right) = \sum_{i=1}^{n} \mu \lambda_i (v_i, w_i)$;
- $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (v_i, w_i) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i (v_i', w_i') = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i (v_i, w_i) + \mu_j (v_i', w_i') \right)$, em que $\mu_j = 0$, para $j \geq m + 1$.

Observe que, em L, os elementos $(\lambda v + v', w)$ e $\lambda(v, w) + (v', w)$ são diferentes. O mesmo acontece com a segunda coordenada. Portanto, L não é bilinear, quer dizer, não é linear na primeira coordenada, nem na segunda. Contudo, definindo $N \subseteq L$ como sendo o subespaço gerado por todos os elementos da forma

$$\begin{aligned} &(\lambda v + v', w) - \lambda(v, w) - (v', w) \quad \text{e} \\ &(v, \lambda w + w') - \lambda(v, w) - (v, w'), \end{aligned} \tag{B.1}$$

temos que no K-espaço vetorial quociente, ${}^{L}\!/_{N}$, vale a linearidade em ambas as coordenadas, isto é,

$$\begin{aligned}(\lambda v+v',w)+N &= \big(\lambda(v,w)+N\big)-\big((v',w)+N\big) \quad \text{e}\\ (v,\lambda w+w')+N &= \big(\lambda(v,w)+N\big)-\big((v,w')+N\big).\end{aligned}$$

Tal quociente é dito **produto tensorial de V e W** e é denotado por $V \underset{K}{\otimes} W$. Além disso, denotamos um elemento da forma $(v,w)+N \in V \underset{K}{\otimes} W$ por $v \otimes w$ e o chamamos de *tensor simples*. Assim, temos que $\otimes : V \times W \to V \underset{K}{\otimes} W$, $(v,w) \mapsto v \otimes w$ é uma função bilinear.

A propriedade que caracteriza o produto tensorial de K-espaços vetoriais é transformar função bilinear em transformação linear, conforme enunciado no teorema B.1.1 abaixo.

Teorema B.1.1. Sejam V e W K-espaços vetoriais.

(a) Então $V \underset{K}{\otimes} W$, junto da função bilinear $\otimes$, satisfaz a seguinte *propriedade universal*: dados U um K-espaço vetorial e $f : V \times W \to U$ uma função bilinear, temos que existe única transformação linear, $\overline{f} : V \underset{K}{\otimes} W \to U$, tal que $\overline{f}(v \otimes w) = f(v,w)$, isto é, que comuta o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "f"'] & V \underset{K}{\otimes} W \arrow[d, "\exists! \overline{f}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & U \end{tikzcd}$$

(b) Suponha que T é um K-espaço vetorial que, junto de uma função bilinear $g : V \times W \to T$, satisfaz a propriedade universal, isto é, dados U um K-espaço vetorial e $f : V \times W \to U$ uma função bilinear, temos que existe única transformação linear, $\overline{f} : T \to U$, tal que $\overline{f}(g(v,w)) = f(v,w)$. Então $T \underset{K}{\cong} V \underset{K}{\otimes} W$.

Demonstração.

(a) Sabemos que dada uma base para um K-espaço vetorial, existe única transformação linear definida nos elementos dessa base. Assim, como L é o K-espaço vetorial com base $V \times W$, então podemos definir única transformação linear, $g : L \to U$, tal que $(v,w) \mapsto f(v,w)$. Também sabemos que se $\varphi : X \to Y$ é uma transformação linear e Z é um subespaço de X tal que $Z \subseteq \ker(\varphi)$, então a função $\varphi' : {}^{X}\!/_{Z} \to Y$, $x + Z \mapsto \varphi(x)$ é uma transformação linear bem definida. Assim, como $V \underset{K}{\otimes} W = {}^{L}\!/_{N}$, se mostrarmos que $g(N) = 0$, então concluiremos a demonstração, já que obteremos $\overline{f} := g' : V \underset{K}{\otimes} W \to U$, onde $\overline{f}(v \otimes w) = \overline{f}((v,w)+N) = f(v,w)$. Note que a unicidade de $\overline{f}$ vem da unicidade g. Portanto, vamos mostrar que $g(N) = 0$. Mas isso, pela definição da g, significa mostrar que $f(N) = 0$. Uma vez que N é o subespaço de L gerado pelos elementos cuja forma são vistas em (B.1), então basta mostrarmos que f se anula nesses elementos. Assim, pela bilinearidade de f, temos que

$$\begin{aligned} f\big((\lambda v+v',w)-\lambda(v,w)-(v',w)\big) &= \lambda f(v,w)+f(v',w)-\lambda f(v,w)-f(v',w)=0\\ f\big((v,\lambda w+w')-\lambda(v,w)-(v,w')\big) &= \lambda f(v,w)+f(v,w')-\lambda f(v,w)-f(v,w')=0\end{aligned}$$

(b) Seja T conforme o enunciado. Então, pela propriedade universal que T e $V \underset{K}{\otimes} W$ satisfazem, temos que os seguintes diagramas comutam.

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "g"'] & V \underset{K}{\otimes} W \arrow[d, "\exists!\overline{g}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\otimes"'] & T \arrow[d, "\exists!\overline{\otimes}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & V \underset{K}{\otimes} W \end{tikzcd}$$

Ou seja, $\overline{g} \circ \otimes = g$ e $\overline{\otimes} \circ g = \otimes$. Daí, $\overline{g} \circ \overline{\otimes} \circ g = \overline{g} \circ \otimes = g$, logo o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "g"'] & T \arrow[d, "\overline{g} \circ \overline{\otimes}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & T \end{tikzcd}$$

Uma vez que $\mathrm{id}_T : T \to T$ também comuta esse diagrama, então pela unicidade, dada pela propriedade universal, temos que $\overline{g} \circ \overline{\otimes} = \mathrm{id}_T$. Analogamente, podemos mostrar que $\overline{\otimes} \circ \overline{g} = \mathrm{id}_{V \underset{K}{\otimes} W}$. Portanto, $T \underset{K}{\cong} V \underset{K}{\otimes} W$. $\boxtimes$

Observe que dado $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (v_i', w_i) + N \in V \underset{K}{\otimes} W$, temos que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (v_i', w_i) + N = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i v_i', w_i) + N = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i,$$

onde $v_i = \lambda_i v_i'$. Logo, os tensores simples geram $V \underset{K}{\otimes} W$, ou seja, todo elemento do produto tensorial de V e W se escreve como combinação linear de tensores simples. Porém, note que, tal escrita não é única. Por exemplo, como vimos acima, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (v_i', w_i) + N$ é escrito como $\sum_{i=1}^{n} v_i \otimes w_i$, mas também pode ser escrito como $\sum_{i=1}^{n} v_i' \otimes w_i'$, onde $w_i' = \lambda_i w_i$.

Um importante resultado sobre combinação linear de tensores simples é apresentado no lema B.1.2 abaixo.

Lema B.1.2. Sejam V e W K-espaços vetoriais e sejam $v_1, \ldots, v_n \in V$ vetores linearmente independentes. Se $w_1, \ldots, w_n \in W$ são tais que $v_1 \otimes w_1 + \cdots + v_n \otimes w_n = 0$, então $w_i = 0$, para cada $i = 1, \ldots, n$.

Demonstração. Uma vez que todo conjunto linearmente independente está contido em uma base, então existe uma base de V que contém os vetores $v_1, \ldots, v_n$, digamos $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\} \cup \{e_j\}_{j \in J}$, com J sendo um conjunto de índices. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, defina a transformação linear $f_i : V \to K$, $v_k \mapsto \begin{cases} 1, & \text{se } i = k \\ 0, & \text{se } i \neq k \end{cases}$, para $k \in \{1, \ldots, n\}$, e $f_i(e_j) = 0$, para $j \in J$. Defina, agora, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, a função $g_i : V \times W \to W$, $(v, w) \mapsto f_i(v) w$. Observe que, pela linearidade de f_i e por $f_i(v) \in K$, temos que g_i é uma função bilinear. Portanto, temos que, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe única transformação linear $\overline{g_i} : V \underset{K}{\otimes} W \to W$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "g_i"'] & V \underset{K}{\otimes} W \arrow[d, "\exists ! \overline{g_i}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & W \end{tikzcd}$$

ou seja, $\overline{g_i}(v \otimes w) = g_i(v, w) = f_i(v)w$. Suponha que $w_1, \ldots, w_n \in W$ são tais que $v_1 \otimes w_1 + \cdots + v_n \otimes w_n = 0$. Então, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, temos que, por um lado,

$$\overline{g_i}(v_1 \otimes w_1 + \cdots + v_n \otimes w_n) = \overline{g_i}(v_1 \otimes w_1) + \cdots + \overline{g_i}(v_n \otimes w_n) = f_i(v_1)w_1 + \cdots + f_i(v_n)w_n = w_i,$$

e, por outro, $\overline{g_i}(v_1 \otimes w_1 + \cdots + v_n \otimes w_n) = \overline{g_i}(0) = 0$. Logo, $w_i = 0$, com $i \in \{1, \ldots, n\}$. ⊠

Um resultado análogo pode ser estabelecido, considerando os vetores linearmente independentes em W e não em V.

Usando a propriedade universal, descrita no teorema B.1.1, podemos mostrar que o produto tensorial de K-espaços vetoriais é comutativo, associativo, se distribui com relação a soma direta e tem K como sendo uma espécie de elemento neutro, conforme se vê na proposição B.1.3.

Proposição B.1.3. Sejam U, V e W K-espaços vetoriais. Então

(a) $K \underset{K}{\otimes} V \underset{K}{\cong} V$;

(b) $V \underset{K}{\otimes} W \underset{K}{\cong} W \underset{K}{\otimes} V$;

(c) $(U \underset{K}{\otimes} V) \underset{K}{\otimes} W \underset{K}{\cong} U \underset{K}{\otimes} (V \underset{K}{\otimes} W)$;

(d) $U \underset{K}{\otimes} (V \oplus W) \underset{K}{\cong} (U \underset{K}{\otimes} V) \oplus (U \underset{K}{\otimes} W)$.

Demonstração.

(a) Seja $f : K \times V \to V$, $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$. Observe que por V ser K-espaço vetorial, temos que f é uma função bilinear. Daí, temos que existe única transformação linear $\overline{f} : K \underset{K}{\otimes} V \to V$ tal que $\overline{f}(\lambda \otimes v) = f(\lambda, v) = \lambda v$, ou seja, que comuta o seguinte diagrama.

$$\begin{tikzcd} K \times V \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "f"'] & K \underset{K}{\otimes} V \arrow[d, "\exists ! \overline{f}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & V \end{tikzcd}$$

Defina $g : V \to K \underset{K}{\otimes} V$, $v \mapsto 1 \otimes v$. Note que, pela bilinearidade de $\otimes$, temos que g é uma transformação linear. Além disso, uma vez que todo elemento de $K \underset{K}{\otimes} V$ pode ser escrito como combinação linear de tensores simples, então, para mostrarmos que $g\overline{f} = \mathrm{id}_{K \underset{K}{\otimes} V}$, basta mostrarmos que essa igualdade vale para um tensor simples. Assim, temos que $g(\overline{f}(\lambda \otimes v)) = g(\lambda v) = 1 \otimes \lambda v = \lambda \otimes v$, logo, $g\overline{f} = \mathrm{id}_{K \underset{K}{\otimes} V}$. Analogamente, $\overline{f}(g(v)) = \overline{f}(1 \otimes v) = v = \mathrm{id}_V(v)$. Portanto, $K \underset{K}{\otimes} V \underset{K}{\cong} V$.

(b) Considere as funções $f : V \times W \to W \underset{K}{\otimes} V$, $(v, w) \mapsto w \otimes v$ e $g : W \times V \to V \underset{K}{\otimes} W$, $(w, v) \mapsto v \otimes w$. Pela bilinearidade de $\otimes$, temos que f e g são bilineares. Então existem únicas transformações lineares $\overline{f} : V \underset{K}{\otimes} W \to W \underset{K}{\otimes} V$ e $\overline{g} : W \underset{K}{\otimes} V \to V \underset{K}{\otimes} W$ tais que $\overline{f}(v \otimes w) = w \otimes v$ e $\overline{g}(w \otimes v) = v \otimes w$, ou seja, que comutam os seguintes diagramas.

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "f"'] & V \underset{K}{\otimes} W \arrow[d, "\exists! \overline{f}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & W \underset{K}{\otimes} V \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W \times V \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "g"'] & W \underset{K}{\otimes} V \arrow[d, "\exists! \overline{g}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & V \underset{K}{\otimes} W \end{tikzcd}$$

Assim, $\overline{f} \circ \overline{g} = \mathrm{id}_{W \underset{K}{\otimes} V}$ e $\overline{g} \circ \overline{f} = \mathrm{id}_{V \underset{K}{\otimes} W}$. Logo, $V \underset{K}{\otimes} W \underset{K}{\cong} W \underset{K}{\otimes} V$.

(c) Fixado $w \in W$, temos que a função $f_w : U \times V \to U \underset{K}{\otimes} (V \underset{K}{\otimes} W)$, $(u, v) \mapsto u \otimes (v \otimes w)$ é bilinear, devido a bilinearidade de $\otimes$. Assim, existe única transformação linear $\overline{f_w} : U \underset{K}{\otimes} V \to U \underset{K}{\otimes} (V \underset{K}{\otimes} W)$ tal que $\overline{f_w}(u \otimes v) = u \otimes (v \otimes w)$, ou seja, que comuta o seguintes diagramas.

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "f_w"'] & U \underset{K}{\otimes} V \arrow[d, "\exists! \overline{f_w}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & U \underset{K}{\otimes} (V \underset{K}{\otimes} W) \end{tikzcd}$$

Se variarmos $w \in W$, então $\overline{f_w} : (U \underset{K}{\otimes} V) \times W \to U \underset{K}{\otimes} (V \underset{K}{\otimes} W)$, $(u \otimes v, w) \mapsto u \otimes (v \otimes w)$ é uma função bilinear, portanto existe única $\widetilde{f_w} : (U \underset{K}{\otimes} V) \underset{K}{\otimes} W \to U \underset{K}{\otimes} (V \underset{K}{\otimes} W)$, tal que $\widetilde{f_w}\big((u \otimes v) \otimes w\big) = u \otimes (v \otimes w)$, ou seja, que comuta o seguintes diagramas.

$$\begin{tikzcd} (U \underset{K}{\otimes} V) \times W \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "\overline{f_w}"'] & (U \underset{K}{\otimes} V) \underset{K}{\otimes} W \arrow[d, "\exists! \widetilde{f_w}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & U \underset{K}{\otimes} (V \underset{K}{\otimes} W) \end{tikzcd}$$

Agora, fixando $u \in U$, podemos, analogamente ao que foi feito anteriormente, definir uma função bilinear $g_u : V \times W \to (U \underset{K}{\otimes} V) \underset{K}{\otimes} W$, $(v, w) \mapsto (u \otimes v) \otimes w$ e dele, a partir da propriedade universal, determinar uma transformação linear $\overline{g_u} : V \underset{K}{\otimes} W \to (U \underset{K}{\otimes} V) \underset{K}{\otimes} W$, onde $\overline{g_u}(v \otimes w) = (u \otimes v) \otimes w$. Variando $u \in U$, então $\overline{g_u} : U \times (V \underset{K}{\otimes} W) \to (U \underset{K}{\otimes} V) \underset{K}{\otimes} W$, $(u, v \otimes w) \mapsto (u \otimes v) \otimes w$ é bilinear, portanto, novamente pela propriedade universal, temos que existe única transformação linear $\widetilde{g_u} : U \underset{K}{\otimes} (V \underset{K}{\otimes} W) \to (U \underset{K}{\otimes} V) \underset{K}{\otimes} W$ tal que $\widetilde{g_u}\big(u \otimes (v \otimes w)\big) = (u \otimes v) \otimes w$. Dessa forma, $\widetilde{f_w} \circ \widetilde{g_u} = \mathrm{id}_{U \underset{K}{\otimes} (V \underset{K}{\otimes} W)}$ e $\widetilde{g_u} \circ \widetilde{f_w} = \mathrm{id}_{(U \underset{K}{\otimes} V) \underset{K}{\otimes} W}$, ou seja, $(U \underset{K}{\otimes} V) \underset{K}{\otimes} W \underset{K}{\cong} U \underset{K}{\otimes} (V \underset{K}{\otimes} W)$.

(d) Considere a função $h : U \times (V \oplus W) \to (U \underset{K}{\otimes} V) \oplus (U \underset{K}{\otimes} W)$, $(u, v + w) \mapsto u \otimes v + u \otimes w$. Pela bilinearidade de $\otimes$, temos que h é bilinear. Sejam T um K-espaço vetorial e $f : U \times (V \oplus W) \to T$ uma função bilinear. Então, se mostrarmos que existe única transformação linear, $\overline{f} : (U \underset{K}{\otimes} V) \oplus (U \underset{K}{\otimes} W) \to T$, tal que $\overline{f}\big(h(u, v + w)\big) = f(u, v + w)$, pelo teorema B.1.1 item (b), concluiremos que $(U \underset{K}{\otimes} V) \oplus (U \underset{K}{\otimes} W) \underset{K}{\cong} U \underset{K}{\otimes} (V \oplus W)$. Como f é bilinear, então $f(u, v + w) = f(u, v + 0) + f(u, 0 + w)$. Logo, podemos escrever f como $f|_{U \times V} + f|_{U \times W}$. Restringindo f para $U \times V$, temos que, pela propriedade universal de $U \underset{K}{\otimes} V$, existe única transformação linear $g_1 : U \underset{K}{\otimes} V \to T$ tal que $g_1(u \otimes v) = f|_{U\times V}(u, v)$, ou seja, que comuta o seguinte diagrama.

$$\begin{tikzcd} U \times V \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "f|_{U\times V}"'] & U \underset{K}{\otimes} V \arrow[d, "\exists! g_1"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft" near start] \\ & T \end{tikzcd}$$

Podemos fazer o mesmo restringindo f para $U \times W$, quer dizer, podemos determinar única única transformação linear $g_2 : U \underset{K}{\otimes} W \to T$ tal que $g_2(u \otimes w) = f|_{U\times W}(u, w)$. Defina $\overline{f} : (U \underset{K}{\otimes} V) \oplus (U \underset{K}{\otimes} W) \to T$, $u \otimes v + u \otimes w \mapsto g_1(u \otimes v) + g_2(u \otimes w)$. Observe que $\overline{f}$ é uma transformação linear, já que é a soma de transformações lineares e que:

$$\begin{aligned} (\overline{f} \circ h)(u, v + w) = \overline{f}(u \otimes v + u \otimes w) &= g_1(u \otimes v) + g_2(u \otimes w) = \\ &= f|_{U\times V}(u, v) + f|_{U\times W}(u, w) = f(u, v + w) \end{aligned}$$

ou seja, $\overline{f} \circ h = f$. Suponha que exista $g : (U \underset{K}{\otimes} V) \oplus (U \underset{K}{\otimes} W) \to T$, uma transformação linear, tal que $g \circ h = f$. Então

$$\begin{aligned} g(u \otimes v + u \otimes w) &= g(u \otimes v + 0) + g(0 + u \otimes w) = \\ &= g(h(u, v + 0)) + g(h(u, 0 + w)) = \\ &= f(u, v + 0) + f(u, 0 + w) = f|_{U\times V}(u, v) + f|_{U\times W}(u, w) = \\ &= g_1(u, v) + g_2(u, w) = \overline{f}(u \otimes v + u \otimes w) \end{aligned}$$

Portanto, $\overline{f}$ é única transformação linear tal que $\overline{f} \circ h = f$. Assim, concluímos que $(U \underset{K}{\otimes} V) \oplus (U \underset{K}{\otimes} W) \underset{K}{\cong} U \underset{K}{\otimes} (V \oplus W)$. ⊠

Do lema B.1.2, podemos estabelecer uma base para $V \underset{K}{\otimes} W$, a partir de uma base para V e de uma base para W, conforme apresentado no teorema B.1.4.

Teorema B.1.4. Sejam V e W K-espaços vetoriais. Se $\{v_i \mid i \in I\}$ é base de V e $\{w_j \mid j \in J\}$ é base de W, com I e J conjuntos de índices, então $\{v_i \otimes w_j \mid i \in I, j \in J\}$ é base de $V \underset{K}{\otimes} W$.

Demonstração. Seja $v \otimes w \in V \underset{K}{\otimes} W$. Então $v = \sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell v_{i_\ell}$ e $w = \sum_{t=1}^{m} \mu_t w_{j_t}$, onde $\lambda_\ell, \mu_t \in K$, v_{i_ℓ} são elementos da base de V e w_{j_t} são elementos da base de W. Daí, pela bilinearidade de $\otimes$, temos que $v \otimes w = \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{t=1}^{m} \lambda_\ell \mu_t (v_{i_\ell} \otimes w_{j_t})$, ou seja, $\{v_i \otimes w_j \mid i \in I, j \in J\}$ gera os tensores simples de $V \underset{K}{\otimes} W$. Uma vez que todo elemento do produto tensorial de V e W é combinação linear de tensores simples, então tal conjunto gera $V \underset{K}{\otimes} W$. Precisamos mostrar, agora, que $\{v_i \otimes w_j \mid i \in I, j \in J\}$ é linearmente independente, isto é, que uma combinação linear de elementos nesse conjunto igual a zero implica que os escalares são iguais a zero. Assim, suponha que $\sum_{\ell=1}^{n} \sum_{t=1}^{m} \lambda_{\ell,t}(v_{i_\ell} \otimes w_{j_t}) = 0$. Então, pela bilinearidade de $\otimes$, temos que

$$\sum_{\ell=1}^{n} \sum_{t=1}^{m} \lambda_{\ell,t}(v_{i_\ell} \otimes w_{j_t}) = \sum_{\ell=1}^{n} \big(v_{i_\ell} \otimes (\sum_{t=1}^{m} \lambda_{\ell,t} w_{j_t})\big) = v_{i_1} \otimes (\sum_{t=1}^{m} \lambda_{1,t} w_{j_t}) + \cdots + v_{i_n} \otimes (\sum_{t=1}^{m} \lambda_{n,t} w_{j_t})$$

Uma vez que v_{i_ℓ} são linearmente independentes, com $\ell = 1, \dots, n$, já que são elementos de uma base de V, então, pelo lema B.1.2, concluímos que $\sum_{t=1}^{m} \lambda_{\ell,t} w_{j_t} = 0$, para cada $\ell = 1, \dots, n$. Mas w_{j_t} são linearmente independentes, para $t = 1, \dots, m$, pois pertencem a uma base de W, logo $\lambda_{\ell,t} = 0$, para cada $\ell = 1, \dots, n$ e para cada $t = 1, \dots, m$. Portanto, $\{v_i \otimes w_j \mid i \in I, j \in J\}$ é linearmente independente. ⊠

O lema abaixo define o que chamamos de *produto tensorial de transformações lineares*.

Lema B.1.5. Sejam $f : V \to V'$ e $g : W \to W'$ transformação lineares. Então existe única transformação linear de $V \underset{K}{\otimes} W$ para $V' \underset{K}{\otimes} W'$, denotada por $f \otimes g$, tal que $(f \otimes g)(v \otimes w) = f(v) \otimes g(w)$, para todo $v \in V$ e para todo $w \in W$.

Demonstração. Seja $h : V \times W \to V' \underset{K}{\otimes} W'$, $(v,w) \mapsto f(v) \otimes g(w)$. Como f e g são lineares e $\otimes$ é bilinear, então h é bilinear. Assim, pela propriedade universal, existe única transformação linear $f \otimes g := \overline{h} : V \underset{K}{\otimes} W \to V' \underset{K}{\otimes} W'$ tal que $(f \otimes g)(v \otimes w) = h(v,w) = f(v) \otimes g(w)$. ⊠

Considere as seguintes transformação lineares

$$V \xrightarrow{f} V' \xrightarrow{f'} U \quad \text{e} \quad W \xrightarrow{g} W' \xrightarrow{g'} U'.$$

Então $(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) : V \underset{K}{\otimes} W \to U \underset{K}{\otimes} U'$ é tal que, dados $v \in V$ e $w \in W$:

$$\big((f' \circ f) \otimes (g' \circ g)\big)(v \otimes w) = f'\big(f(v)\big) \otimes g'\big(g(w)\big) = \big((f' \otimes g') \circ (f \otimes g)\big)(v \otimes w).$$

Daí, $(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g)$. Assim, se f e g são isomorfismos, então $f \otimes g$ também é um isomorfismo, com inversa $(f \otimes g)^{-1} = f^{-1} \otimes g^{-1}$. Logo, se $V \underset{K}{\cong} V'$ e $W \underset{K}{\cong} W'$, então $V \underset{K}{\otimes} W \underset{K}{\cong} V' \underset{K}{\otimes} W'$. Observe que, se $f, f' : V \to W$ e $g, g' : U \to T$ são transformações lineares e $\lambda, \lambda' \in K$, então

$$\begin{aligned}\big(\lambda(f \otimes g) + \lambda'(f' \otimes g)\big)(v \otimes u) &= \lambda\big(f(v) \otimes g(u)\big) + \lambda'\big(f'(v) \otimes g(u)\big) = \\ &= \big(\lambda f(v) + \lambda' f'(v)\big) \otimes g(u) = \big((\lambda f + \lambda' f') \otimes g\big)(v \otimes u)\end{aligned}$$

ou seja, $\lambda(f \otimes g) + \lambda'(f' \otimes g) = (\lambda f + \lambda' f') \otimes g$. Analogamente, $\lambda(f \otimes g) + \lambda'(f \otimes g') = f \otimes (\lambda g + \lambda' g')$.

Observação B.1.6. Sejam $V_1, \dots, V_n$ K-espaços vetoriais. Assim como definimos o produto tensorial de dois K-espaços vetoriais, podemos definir o produto tensorial $V_1 \underset{K}{\otimes} \cdots \underset{K}{\otimes} V_n$, como sendo o quociente do K-espaço vetorial de base $V_1 \times \cdots \times V_n$ pelo subespaço gerado por elementos da forma $(v_1, \dots, \lambda v_i + v_i', \dots, v_n) - \lambda(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n) - (v_1, \dots, v_i', \dots, v_n)$, para todo $i = 1, \dots, n$, para todo $v_j \in V_j$ e para todo $\lambda \in K$. Note que, por exemplo, $V_1 \underset{K}{\otimes} V_2 \underset{K}{\otimes} V_3 \neq V_1 \underset{K}{\otimes} (V_2 \underset{K}{\otimes} V_3)$, pois cada lado dessa desigualdade foi construído de maneira diferente. Porém, $V_1 \underset{K}{\otimes} V_2 \underset{K}{\otimes} V_3 \underset{K}{\cong} V_1 \underset{K}{\otimes} (V_2 \underset{K}{\otimes} V_3)$.

Pode-se mostrar que todas as afirmações feitas para o produto tensorial para dois K-espaços vetoriais, valem se considerarmos o produto tensorial $V_1 \underset{K}{\otimes} \cdots \underset{K}{\otimes} V_n$. Por exemplo, podemos enunciar o teorema B.1.1, parte (a) da seguinte maneira: dados U um K-espaço vetorial e $f : V_1 \times \cdots \times V_n \to$

U uma função multilinear, temos que existe única transformação linear, $\overline{f} : V_1 \underset{K}{\otimes} \cdots \underset{K}{\otimes} V_n \to U$, tal que $\overline{f}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = f(v_1, \ldots, v_n)$, isto é, que comuta o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \cdots \times V_n \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "f"'] & V_1 \underset{K}{\otimes} \cdots \underset{K}{\otimes} V_n \arrow[d, "\exists! \overline{f}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & U \end{tikzcd}$$

$\square$

B.2 Álgebra tensorial

Sejam V um K-espaço vetorial e $n \in \mathbb{N}$. Considerando a observação B.1.6, denote o produto tensorial de V com ele mesmo n vezes, $V \underset{K}{\otimes} \cdots \underset{K}{\otimes} V$, por $V^{\otimes n}$, e defina $V^{\otimes 0} := K$. Observe que $V^{\otimes 1} = V$. Defina $T(V) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} V^{\otimes n}$. Vamos definir uma multiplicação que torne $T(V)$ uma álgebra associativa com identidade.

Seja $\{v_i\}_{i \in I}$ uma base de V. Pelo teorema B.1.4 estendido para o produto tensorial $V^{\otimes n}$, conforme comentado na observação B.1.6, temos que $\{v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_n} \mid i_j \in I\}$ é base de $V^{\otimes n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, defina a multiplicação em $T(V)$ estendendo por bilinearidade a seguinte regra:

$$(v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_n})(v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_k}) = v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_n} \otimes v_{j_1} \otimes \cdots \otimes v_{j_k}.$$

Assim, por exemplo,

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu(v_1 \otimes v_2))(v_4 \otimes v_3 \otimes v_5 + \gamma(v_7 \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes v_{11})) &= \lambda(v_4 \otimes v_3 \otimes v_5) + \lambda\gamma(v_7 \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes v_{11}) + \\ &+ \mu(v_1 \otimes v_2 \otimes v_4 \otimes v_3 \otimes v_5) + \mu\gamma(v_1 \otimes v_2 \otimes v_7 \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes v_{11}).\end{aligned}$$

Observe que $1 \in K$ é a identidade de $T(V)$ e que a multiplicação é associativa. Portanto, o K-espaço vetorial $T(V)$ munido da multiplicação definida acima é uma álgebra associativa com identidade, dita **álgebra tensorial de V**.

Observação B.2.1. A álgebra tensorial $T(V)$ pode ser vista como sendo a álgebra dos polinômios sobre K com $\dim(V)$ variáveis não comutativas (e sem relações). $\square$

Proposição B.2.2. A álgebra tensorial de V, junto da inclusão canônica $\iota : V \to T(V)$, satisfaz a seguinte propriedade universal: dadas A uma álgebra associativa com identidade e $f : V \to A$ uma transformação linear, existe único homomorfismo de álgebras associativas $\overline{f} : T(V) \to A$ tal que $f = \overline{f}\iota$, isto é, que comuta o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & T(V) \arrow[d, "\exists! \overline{f}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Demonstração. Como A é uma álgebra com identidade, digamos 1, então $\overline{f_0} : V^{\otimes 0} \to A$, $\lambda \mapsto \lambda 1_A$ é uma transformação linear, onde 1_A é a identidade de A. Defina $\overline{f_1} = f : V^{\otimes 1} \to A$ que, por definição, é uma transformação linear. Agora, observe que $f_n : V \times \cdots \times V \to A$, $(v_1, \ldots, v_n) \mapsto f(v_1) \ldots f(v_n)$ é uma função multilinear, já que f é uma transformação linear. Pela propriedade universal de $V^{\otimes n}$ dada na observação B.1.6, existe única transformação linear $\overline{f_n} : V^{\otimes n} \to A$ tal que $\overline{f_n}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = f(v_1) \ldots f(v_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, com $n > 2$. Defina $\overline{f} : T(V) \to A$, como sendo $\sum_{i \in \mathbb{N}_0} \overline{f_n}$. Seja $1 \in K$ a identidade de $T(V)$. Então $\overline{f}(1) = \overline{f_0}(1) = 1_A$. Agora, observe que, dado $v \in V$, temos que $\overline{f}(\iota(v)) = \overline{f}(v) = \overline{f_1}(v) = f(v)$, isto é, $f = \overline{f}\iota$. Além disso, note que

$$\begin{aligned}
\overline{f}((v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)(v_1' \otimes \cdots \otimes v_m')) &= \overline{f}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes v_1' \otimes \cdots \otimes v_m') = \\
&= \overline{f_{n+m}}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes v_1' \otimes \cdots \otimes v_m') = f(v_1) \ldots f(v_n) f(v_1') \ldots f(v_n') = \\
&= \overline{f_n}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \overline{f_m}(v_1' \otimes \cdots \otimes v_m') = \overline{f}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \overline{f}(v_1' \otimes \cdots \otimes v_m'))
\end{aligned}$$

Portanto, $\overline{f}$ é um homomorfismo de álgebras. Por fim, observe que a unicidade de $\overline{f}$ vem da unicidade de $\overline{f_n}$, para cada $n \in \mathbb{N}_0$. ⊠

Seja V o $\mathbb{C}$-espaço vetorial de base $\{x_1, \ldots, x_n\}$ e considere a álgebra tensorial de V, $T(V)$. Denote por S_k o grupo de permutação de $\{1, \ldots, k\}$, onde $k \in \mathbb{N}$ e defina I como sendo o ideal de $T(V)$ igual a $(x_1 \ldots x_k - x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(k)} \mid k \in \{1, \ldots, n\} \text{ e } \sigma \in S_k)_{T(V)}$. Seja $\mathbb{C}[y_1, \ldots, y_n]$ a álgebra de polinômios em n variáveis. Então pode-se mostrar que $\mathbb{C}[y_1, \ldots, y_n]$ é isomorfa a álgebra ${T(V)}/{I}$. A ideia para se demonstrar esse fato é definir $f : V \to \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_n]$ como sendo a transformação linear tal que $f(x_i) = y_i$; usar a propriedade universal de $T(V)$, para exibir o único homomorfismo de álgebras associativas $\overline{f} : T(V) \to \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_n]$ tal que $\overline{f}(x_i) = y_i$; e mostrar que $I = \ker(\overline{f})$.

Proposição B.2.3. Sejam A uma álgebra associativa, com identidade e comutativa, e $a_1, \ldots, a_n \in A$. Então existe único homomorfismo de álgebras associativas $\varphi : \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_n] \to A$ tal que $\varphi(y_i) = a_i$.

Demonstração. Vimos no parágrafo imediatamente anterior a essa proposição que as álgebras $\mathbb{C}[y_1, \ldots, y_n]$ e ${T(V)}/{I}$ são isomorfas. Então vamos construir um homomorfismo de álgebras associativas de ${T(V)}/{I}$ para A. Seja $f : V \to A$ a transformação linear tal que $f(x_i) = a_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Pela propriedade universal de $T(V)$, existe único homomorfismo de álgebras associativas $\overline{f} : T(V) \to A$ tal que $\overline{f}(x_i) = a_i$. Seja $x_1 \ldots x_k - x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(k)} \in I$. Então $\overline{f}(x_1 \ldots x_k - x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(k)}) = a_1 \ldots a_k - a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma(k)}$. Como A é comutativo, então $a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma(k)} = a_1 \ldots a_k$, o que implica que $\overline{f}(x_1 \ldots x_k - x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(k)}) = 0$. Logo, $\overline{f}(I) = 0$. Portanto, o homomorfismo de álgebras associativas que queremos é $\varphi : {T(V)}/{I} \to A$, $x_i + I \mapsto \overline{f}(x_i)$. ⊠

B.3 Produto tensorial sobre um anel

Vamos estender o conceito de produto tensorial sobre um corpo para o conceito de produto tensorial sobre um anel. Sejam M e N grupos abelianos. Então, em particular, eles podem ser vistos como $\mathbb{Z}$-módulos à esquerda. Considere S o $\mathbb{Z}$-módulo livre de base $M \times N$ e defina X como sendo o subconjunto de S, cujos elementos são da forma

$$\begin{aligned} &(km,n)-k(m,n), \qquad &(m+m',n)-(m,n)-(m',n),\\ &(m,kn)-k(m,n), \qquad &(m,n+n')-(m,n)-(m,n'), \end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{Z}$, $m,m' \in M$ e $n,n' \in N$. Seja I o $\mathbb{Z}$-submódulo de S gerado por X. Assim, definimos o **produto tensorial sobre** $\mathbb{Z}$, denotado por $M \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} N$, como sendo o quociente ${}^{S}\!/_{I}$. Note que $M \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} N$ é um $\mathbb{Z}$-módulo à esquerda. Denotamos um elemento da forma $(m,n)+I \in M \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} N$ por $m \otimes n$.

Sejam R e S anéis associativos com identidade e considere que M seja um R-módulo à esquerda e um S-módulo à direta e que N seja um S-módulo à esquerda (note que M e N são grupos abelianos e, portanto, $\mathbb{Z}$-módulos). Seja Y o subconjunto de $M \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} N$, cujos elementos são da forma $(m \cdot s) \otimes n - m \otimes (s \cdot n)$, para todo $m \in M$, $n \in N$ e $s \in S$ e defina J como sendo o $\mathbb{Z}$-submódulo de $M \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} N$ gerado por Y. Definimos **produto tensorial sobre o anel S**, denotado por $M \underset{S}{\otimes} N$, como sendo o quociente ${}^{(M \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} N)}\!/_{J}$. É sabido que $M \underset{S}{\otimes} N$ é um R-módulo à esquerda cuja ação é dada por: $r \cdot (m \otimes n) = (r \cdot m) \otimes n$, para todo $r \in R$ (ver (Kna88), capítulo 2, seção 8).

Assim como foi feito no Teorema B.1.1, temos que $M \underset{S}{\otimes} N$, junto da função bilinear $\otimes$, satisfaz a seguinte *propriedade universal*: dados U um K-espaço vetorial e $f : M \times N \to U$ uma função bilinear tal que $f(m \cdot r, n) = f(m, r \cdot n)$, temos que existe única transformação linear, $\overline{f} : M \underset{S}{\otimes} N \to U$, tal que $\overline{f}(m \otimes n) = f(m,n)$, isto é, que comuta o diagrama abaixo.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "f"'] & M \underset{S}{\otimes} N \arrow[d, "\exists ! \overline{f}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & U \end{tikzcd}$$

Analogamente ao que foi feito no Lema B.1.5, dados M um R-módulo à esquerda e também um S-módulo à direita, L e N S-módulos à esquerda e $f : L \to N$ um homomorfismo de S-módulos, podemos definir o homomorfismo de S-módulos, $\mathrm{id}_M \otimes f : M \underset{S}{\otimes} L \to M \underset{S}{\otimes} N$, fazendo $(\mathrm{id}_M \otimes f)(m \otimes \ell) = m \otimes f(\ell)$.

Lema B.3.1. Sejam R e S álgebras associativos com identidade, M um R-módulo à esquerda e um S-módulo livre à direita, com base $\{m_i \mid i \in I\}$. Seja também N um S-módulo à esquerda. Então $M \underset{S}{\otimes} N \underset{\mathbb{C}}{\cong} \langle m_i \mid i \in I \rangle_{\mathbb{C}} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} N$.

Demonstração. Dado $m \in M$, como M é um S-módulo livre à direita, com base $\{m_i \mid i \in I\}$, existem únicos $s_j \in S$ não nulos tais que $m = \sum_{j=1}^{n} m_{i_j} \cdot s_j$, onde $i_j \in I$. Uma vez que em $M \underset{S}{\otimes} N$, vale a propriedade $m \cdot s \otimes n = m \otimes s \cdot n$, defina $f : M \times N \to \langle m_i \mid i \in I \rangle_{\mathbb{C}} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} N$, $(m,n) \mapsto \sum_{j=1}^{n} (m_{i_j} \otimes s_j \cdot n)$, onde $m = \sum_{j=1}^{n} m_{i_j} \cdot s_j$ e $i_j \in I$. Observe que f é bilinear e que $f(m \cdot s, n) = f(m, s \cdot n)$. Assim, pela Propriedade Universal de $M \underset{S}{\otimes} N$, existe única transformação linear $\overline{f} : M \underset{S}{\otimes} N \to \langle m_i \mid i \in I \rangle_{\mathbb{C}} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} N$ tal que $\overline{f}(m \otimes n) = \sum_{j=1}^{n} (m_{i_j} \otimes s_j \cdot n)$, onde $m = \sum_{j=1}^{n} m_{i_j} \cdot s_j$ e $i_j \in I$. Note que $\overline{f}$ é sobrejetiva. Seja $\sum_{k=1}^{\ell} (\sum_{i=1}^{n} m_{i_j}^{k} \cdot s_j^{k} \otimes n_k)$ um elemento arbitrário em $M \underset{S}{\otimes} N$ que pertence ao núcleo de $\overline{f}$. Então

$$0 = \overline{f}\Big(\sum_{k=1}^{\ell}\Big(\sum_{i=1}^{n} m_{i_j}^k \cdot s_j^k \otimes n_k\Big)\Big) = \sum_{k=1}^{\ell}\Big(\sum_{i=1}^{n} m_{i_j}^k \otimes s_j^k \cdot n_k\Big)$$

Como $\{m_{i_j}^k\}$ é linearmente independente, então $s_j^k \cdot n_k = 0$, para todo j e todo k. Uma vez que $s_j^k \neq 0$, então $n_k = 0$, o que implica que $\ker(\overline{f}) = \{0\}$, ou seja, $\overline{f}$ é injetiva. Portanto, $\overline{f}$ é bijetiva, o que encerra a demonstração. ⊠

Apêndice C

Teoria de categorias

Uma **categoria** (pequena) é uma tripla $\mathscr{C} = \big(\operatorname{Obj}(\mathscr{C}), \operatorname{Hom}(\mathscr{C}), \circ\big)$, onde:

1. $\operatorname{Obj}(\mathscr{C})$ é um conjunto cujos elementos são ditos **objetos**;

2. $\operatorname{Hom}(\mathscr{C})$ é um conjunto cujos elementos são ditos **morfismos**;

3. $\circ : \operatorname{Hom}(\mathscr{C}) \times \operatorname{Hom}(\mathscr{C}) \to \operatorname{Hom}(\mathscr{C})$ é uma operação binária parcial dita **composição**;

onde:

a) para todo $X, Y \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C})$, existe um subconjunto de $\operatorname{Hom}(\mathscr{C})$, denotado por $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$ e dito *conjunto de morfismos de X para Y* tal que $\operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y) \cap \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Z,U) = \varnothing$, se $(X,Y) \neq (Z,U)$;

b) para todo $X, Y, Z \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C})$ a operação $\circ : \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,Z) \times \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Z)$, $(g,f) \mapsto g \circ f$, está definida e satisfaz:

   i) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, para todo $f \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$, $g \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,Z)$ e $h \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Z,U)$;

   ii) para todo $X \in \operatorname{Obj}(\mathscr{C})$, existe $1_X \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,X)$, dito *morfismo identidade de X*, tal que, se $f \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$ e $g \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(Z,X)$, então $f \circ 1_X = f$ e $1_X \circ g = g$;

Denotamos $f \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$ por $f : X \to Y$ ou $X \xrightarrow{f} Y$ e escrevermos fg no lugar de $f \circ g$.

Exemplo C.1.

(a) Seja K um corpo. Definimos Vec_K como sendo a categoria cujos objetos são K-espaços vetoriais, os morfismos são aplicações lineares e a composição $\circ$ é a composição usual de funções. Quando $K = \mathbb{C}$, a categoria $\operatorname{Vec}_{\mathbb{C}}$ será denotada por Vec.

(b) Seja R um anel associativo com identidade. Definimos R-Mod como sendo a categoria cujos objetos são R-módulos à esquerda, os morfismos são os homomorfismos de R-módulos à esquerda e a composição $\circ$ é a composição usual de funções. Analogamente definimos a categoria Mod-R, dos R-módulos à direita. □

Dizemos que $\mathscr{C}'$ é uma **subcategoria** de uma categoria $\mathscr{C}$, se

i) todo objeto de $\mathscr{C}'$ é um objeto de $\mathscr{C}$;

ii) todo morfismo de $\mathscr{C}'$ é um morfismo de $\mathscr{C}$;

iii) a composição de $\mathscr{C}'$ é a mesma de $\mathscr{C}$;

iv) dado um objeto X de $\mathscr{C}'$, o morfismo identidade de X em $\mathscr{C}'$ é igual ao morfismo identidade de X em $\mathscr{C}$.

Uma subcategoria $\mathscr{C}'$ de $\mathscr{C}$ é dita **plena** se $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}'}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$, para todo $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}')$.

Exemplo C.2. Considere R-Mod a categoria definida no Exemplo C.1, item (b). Dados I um conjunto de índice e $(\mathscr{C}_i)_{i\in I}$ uma família de subcategorias plenas de R-Mod, definimos a categoria $\bigoplus\limits_{i\in I}\mathscr{C}_i$, como sendo a categoria cujos objetos são da forma $\bigoplus\limits_{i\in I} X_i$, com $X_i \in \mathscr{C}_i$, e os morfismos são os morfismos $\varphi \in R$-Mod, tais que $\varphi : X_i \to Y_j$ é o morfismo zero, sempre que $X_i \in \mathscr{C}_i$, $Y_j \in \mathscr{C}_j$ e $i \neq j$. Note que essa categoria não é necessariamente plena. □

Sejam $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ categorias. Um **funtor covariante** $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ é uma função que associa cada objeto $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ a um objeto $F(X) \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}')$ e cada morfismo $f : X \to Y$ em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$ a um morfismo $F(f) : F(X) \to F(Y)$ em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C}')$, tal que

- $F(1_X) = 1_{F(X)}$, para todo $X \in \mathscr{C}$;
- dados morfismos $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$, temos que $F(gf) = F(g)F(f)$.

$$\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathscr{C}'$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[loop above, "1_X"] \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "gf"'] & Y \arrow[loop above, "1_Y"] \arrow[r, "g"] & Z \arrow[loop above, "1_Z"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(X) \arrow[loop above, "F(1_X)=1_{F(X)}"] \arrow[r, "F(f)"] \arrow[rr, bend right, "F(gf)=F(g)F(f)"'] & F(Y) \arrow[loop above, "F(1_Y)=1_{F(Y)}"] \arrow[r, "F(g)"] & F(Z) \arrow[loop above, "F(1_Z)=1_{F(Z)}"] \end{tikzcd}$$

Um **funtor contravariante** $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$, assim como um funtor covariante, é uma função que associa cada objeto $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ a um objeto $F(X) \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C}')$, mas que inverte os morfismos, isto é, associa cada morfismo $f : X \to Y$ em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$ a um morfismo $F(f) : F(Y) \to F(X)$ em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C}')$, satisfazendo

- $F(1_X) = 1_{F(Y)}$, para todo $X \in \mathscr{C}$;
- dados morfismos $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ em $\mathrm{Hom}(\mathscr{C})$, temos que $F(gf) = F(f)F(g)$.

$$\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathscr{C}'$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[loop above, "1_X"] \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "gf"'] & Y \arrow[loop above, "1_Y"] \arrow[r, "g"] & Z \arrow[loop above, "1_Z"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(X) \arrow[loop above, "F(1_X)=1_{F(X)}"] & F(Y) \arrow[loop above, "F(1_Y)=1_{F(Y)}"] \arrow[l, "F(f)"'] & F(Z) \arrow[loop above, "F(1_Z)=1_{F(Z)}"] \arrow[l, "F(g)"'] \arrow[ll, bend left, "F(gf)=F(f)F(g)"] \end{tikzcd}$$

Exemplo C.3.

(a) Sejam R um anel associativo com identidade e $S \subseteq R$ um subanel. Definimos $\mathrm{Res} : R\text{-Mod} \to S\text{-Mod}$ como sendo o funtor tal que restringe a ação de R a S, isto é, um R-módulo M é visto como sendo um S-módulo e um homomorfismo de R-módulos $\varphi : M \to N$ é visto como sendo um homomorfismo de S-módulos.

(b) Sejam R e S anéis associativos com identidade e M um R-módulo à esquerda e também um S-módulo à direita. Definimos o funtor $\mathrm{Tor}(M,-) := M \underset{S}{\otimes} - : S\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$, da seguinte maneira:

$$\mathrm{Tor}(M,N) = M \underset{S}{\otimes} N \quad \text{e} \quad \mathrm{Tor}(M,f : A \to B) = \mathrm{id}_M \otimes f,$$

para todo $N \in S\text{-Mod}$ e $f : A \to B$ um morfismo em S-Mod (veja no Apêndice B o que são $M \underset{S}{\otimes} N$ e $\mathrm{id}_M \otimes f$). Note que $\mathrm{Tor}(M,-)$ é um funtor covariante.

(c) Sejam R e S anéis associativos com identidade e M um R-módulo à esquerda e também um S-módulo à direita. Dado N um R-módulo à esquerda, temos que o espaço vetorial de todos os homomorfismos de R-módulos de M para N, $\mathrm{Hom}_R(M,N)$, é um S-módulo à esquerda, onde a ação é dada por: $(s \cdot h)(m) := h(m \cdot s)$, para todo $s \in R$ e $h \in \mathrm{Hom}_R(M,N)$ (ver (Kna88), capítulo 2, seção 8). Além disso, se $g : M \to A$ e $f : A \to B$ são homomorfismos de R-módulos, então $fg : M \to B$ também o é. Fixado $f : A \to B$ um homomorfismo de R-módulos, observe que a função

$$f^* : \mathrm{Hom}_R(M,A) \to \mathrm{Hom}_R(M,B), \quad g \mapsto fg$$

é um homomorfismo de S-módulos:

(i) segue da composição que f^* é uma transformação linear;

(ii) $(s \cdot f^*(g))(m) = f^*(g)(m \cdot s) = (fg)(m \cdot s) = f((s \cdot g)(m)) = f^*(s \cdot g)(m)$, onde $s \in S$, $m \in M$ e $g \in \mathrm{Hom}_R(M,A)$.

Assim, definimos o funtor $\mathrm{Hom}_R(M,-) : R\text{-Mod} \to S\text{-Mod}$ tal que

$$N \mapsto \mathrm{Hom}_R(M,N) \quad \text{e} \quad f \mapsto \mathrm{Hom}_R(M,f) := f^*,$$

onde $N \in R\text{-Mod}$ e $f \in \mathrm{Hom}_R(A,B)$. Observe que $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ é um funtor covariante.

(d) Sejam R um anel associativo com identidade e M um R-módulo à esquerda. Fixado $f : A \to B$ um homomorfismo de R-módulos, considere f^*, definido no exemplo anterior, visto apenas como uma transformação linear. Então definimos o funtor $\mathrm{Hom}_R(M,-) : R\text{-Mod} \to \mathrm{Vec}$ da seguinte maneira:

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{Hom}_R(M,-) : & R\text{-Mod} & \to & \mathrm{Vec} \\ & N & \mapsto & \mathrm{Hom}_R(M,N) \\ & f : A \to B & \mapsto & f^* : \mathrm{Hom}_R(M,A) \to \mathrm{Hom}_R(M,B) \\ & & & \qquad\qquad g \mapsto fg \end{array}$$

Note que $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ é um funtor covariante.

Semelhantemente ao feito no parágrafo anterior, definimos o funtor $\mathrm{Hom}_R(-,M): R\text{-Mod} \to \mathrm{Vec}$, fazendo:

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{Hom}_R(-,M): & R\text{-Mod} & \to & \mathrm{Vec} \\ & N & \mapsto & \mathrm{Hom}_R(N,M) \\ & f: A \to B & \mapsto & f_*: \mathrm{Hom}_R(M,A) \to \mathrm{Hom}_R(M,B) \\ & & & \qquad\qquad g \mapsto gf \end{array}$$

Nesse caso, $\mathrm{Hom}_R(-,M)$ é um funtor contravariante. □

Sejam R e S anéis associativos com identidade, $F: R\text{-Mod} \to S\text{-Mod}$ um funtor covariante e $0 \to V \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\psi} U \to 0$ uma sequência exata curta em R-Mod.

- Dizemos que F é um **funtor exato**, se $0 \to F(V) \xrightarrow{F(\varphi)} F(W) \xrightarrow{F(\psi)} F(U) \to 0$ é uma sequência exata curta em S-Mod.
- Dizemos que F é um **funtor exato à direita**, se $F(V) \xrightarrow{F(\varphi)} F(W) \xrightarrow{F(\psi)} F(U) \to 0$ é uma sequência exata em S-Mod.
- Dizemos que F é um **funtor exato à esquerda**, se $0 \to F(V) \xrightarrow{F(\varphi)} F(W) \xrightarrow{F(\psi)} F(U)$ é uma sequência exata em S-Mod.

As mesmas definições se aplicam, quando F for um funtor contravariante:

- Dizemos que F é um **funtor exato**, se $0 \to F(U) \xrightarrow{F(\psi)} F(W) \xrightarrow{F(\varphi)} F(V) \to 0$ é uma sequência exata curta em S-Mod.
- Dizemos que F é um **funtor exato à direita**, se $F(U) \xrightarrow{F(\psi)} F(W) \xrightarrow{F(\varphi)} F(V) \to 0$ é uma sequência exata em S-Mod.
- Dizemos que F é um **funtor exato à esquerda**, se $0 \to F(U) \xrightarrow{F(\psi)} F(W) \xrightarrow{F(\varphi)} F(V)$ é uma sequência exata em S-Mod.

Proposição C.4. Sejam R e S álgebras associativas com identidade e M um R-módulo à esquerda e também um S-módulo à direita. Então

(a) $\mathrm{Tor}(M,-): S\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$ é um funtor exato à direita.

(b) Se M é um S-módulo livre à direita, então $\mathrm{Tor}(M,-)$ é um funtor exato.

Demonstração.

(a) Seja $0 \to V \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\psi} U \to 0$ uma sequência exata curta em S-Mod. Vamos mostrar que

$$M \underset{S}{\otimes} V \xrightarrow{\mathrm{id}_M \otimes \varphi} M \underset{S}{\otimes} W \xrightarrow{\mathrm{id}_M \otimes \psi} M \underset{S}{\otimes} U \to 0$$

é uma sequência exata em R-Mod.

- Vamos mostrar que $\mathrm{id}_M \otimes \psi$ é sobrejetiva. Seja $\sum_{i=1}^n (m_i \otimes u_i) \in M \underset{S}{\otimes} U$. Como ψ é sobrejetiva, então, para cada u_i, existe w_i tal que $\psi(w_i) = u_i$. Assim, $(\mathrm{id}_M \otimes \psi)(\sum_{i=1}^n (m_i \otimes w_i)) = \sum_{i=1}^n (m_i \otimes \psi(w_i)) = \sum_{i=1}^n (m_i \otimes u_i)$. Logo, $\mathrm{id}_M \otimes \psi$ é sobrejetiva.

- Vamos mostrar que $\mathrm{im}(\mathrm{id}_M \otimes \varphi) \subseteq \ker(\mathrm{id}_M \otimes \psi)$. Seja $x \in \mathrm{im}(\mathrm{id}_M \otimes \varphi)$. Então $x = (\mathrm{id}_M \otimes \varphi)(\sum_{i=1}^n (m_i \otimes v_i)) = \sum_{i=1}^n (m_i \otimes \varphi(v_i))$, onde $\sum_{i=1}^n (m_i \otimes v_i) \in M \underset{S}{\otimes} V$. Logo, $(\mathrm{id}_M \otimes \psi)(x) = (\mathrm{id}_M \otimes \psi)\big(\sum_{i=1}^n (m_i \otimes \varphi(v_i))\big) = \sum_{i=1}^n \big(m_i \otimes \psi(\varphi(v_i))\big) = \sum_{i=1}^n (m_i \otimes 0) = 0$. Portanto, $x \in \ker(\mathrm{id}_M \otimes \psi)$.

- Vamos mostrar que $\mathrm{im}(\mathrm{id}_M \otimes \varphi) = \ker(\mathrm{id}_M \otimes \psi)$. Para simplificar a notação, escreva L para denotar $\mathrm{im}(\mathrm{id}_M \otimes \varphi)$. Como $L \subseteq \ker(\mathrm{id}_M \otimes \psi)$, então o homomorfismo de R-módulos $\overline{\psi} : {(M \underset{S}{\otimes} W)}/{L} \to M \underset{S}{\otimes} U$, $m \otimes w + L \mapsto m \otimes \psi(w)$ está bem definido. Seja $\pi : M \underset{S}{\otimes} W \to {(M \underset{S}{\otimes} W)}/{L}$ a projeção canônica. Observe que $\mathrm{id}_M \otimes \psi = \overline{\psi}\pi$.

$$\begin{tikzcd}
M \underset{S}{\otimes} W \arrow[r, "\pi"] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_M \otimes \psi"] & {(M \underset{S}{\otimes} W)}/{L} \arrow[r, "\overline{\psi}"] & M \underset{S}{\otimes} U \\
m \otimes w \arrow[r, mapsto] & m \otimes w + L \arrow[r, mapsto] & m \otimes \psi(w)
\end{tikzcd}$$

Vamos mostrar que $\overline{\psi}$ é um isomorfismo, pois daí concluiremos que $\ker(\mathrm{id}_M \otimes \psi) = \ker(\overline{\psi}\pi) = \ker(\pi) = L$. Para mostrar que $\overline{\psi}$ é um isomorfismo, vamos exibir sua inversa. Considere a função $h : M \times U \to {(M \underset{S}{\otimes} W)}/{L}$, $(m,u) \mapsto m \otimes w + L$, onde $w \in W$ é tal que $\psi(w) = u$. Observe que sempre podemos escolher um w assim, porém tal escolha pode não ser única. Assim, se w e w' são tais que $\psi(w) = \psi(w') = u$, então $w - w' \in \ker(\psi) = \mathrm{im}(\varphi)$, ou seja, existe $v \in V$ tal que $\varphi(v) = w - w'$. Daí, $m \otimes w - m \otimes w' = m \otimes \varphi(v) = (\mathrm{id}_M \otimes \varphi)(m \otimes v) \in L$. Logo, $m \otimes w + L = m \otimes w' + L$ o que implica que a função h está bem definida. Observe que h é bilinear e que $h(m \cdot r, u) = h(m, r \cdot u)$. Dessa forma, pela Propriedade Universal de $M \underset{S}{\otimes} U$, temos que existe única transformação linear $\overline{h} : M \underset{S}{\otimes} W \to {(M \underset{S}{\otimes} W)}/{L}$ tal que $\overline{h}(m \otimes u) = m \otimes w + L$, onde $w \in W$ é tal que $\psi(w) = u$.

$$\begin{tikzcd}
M \times U \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "h"'] \arrow[dr, phantom, shift left=3, "\circlearrowright"] & M \underset{S}{\otimes} U \arrow[d, "\exists ! \overline{h}"] \\
& {(M \underset{S}{\otimes} W)}/{L}
\end{tikzcd}$$

Por fim, veja que $\overline{\psi}\,\overline{h}(m \otimes u) = \overline{\psi}(m \otimes w + L) = m \otimes \psi(w) = m \otimes u$ e que $\overline{h}\,\overline{\psi}(m \otimes w + L) = \overline{h}(m \otimes \psi(w)) = m \otimes w + L$. Portanto, $\overline{h}$ é a inversa de $\overline{\psi}$, que finaliza esta parte da demonstração.

(b) Temos que mostrar que $\mathrm{id}_M \otimes \varphi$ é injetiva. Seja $\{m_i \mid i \in I\}$ base de M como S-módulo à direita. Pelo Lema B.3.1, temos que $M \underset{S}{\otimes} V \underset{\mathfrak{g}}{\cong} \langle m_i \mid i \in I \rangle_{\mathbb{C}} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} V$. Assim, seja $\sum_{j=1}^n m_{i_j} \otimes v_j \in \ker(\mathrm{id}_M \otimes \varphi)$, onde $i_j \in I$. Então

$$0 = (\mathrm{id}_M \otimes \varphi)\Big(\sum_{j=1}^n m_{i_j} \otimes v_j\Big) = \sum_{j=1}^n m_{i_j} \otimes \varphi(v_j)$$

Como $\{m_{i_j}\}$ é linearmente independente, então $\varphi(v_j) = 0$. Uma vez que φ é injetiva, então $v_j = 0$. Assim, $\sum_{j=1}^{n} m_{i_j} \otimes v_j = 0$, ou seja, $\ker(\mathrm{id}_M \otimes \varphi) = \{0\}$. ⊠

Proposição C.5. Sejam R uma álgebra associativa com identidade e M um R-módulo à esquerda. Então os funtores

$$\mathrm{Hom}_R(M, -) : R\text{-Mod} \to \mathrm{Vec} \quad \text{e} \quad \mathrm{Hom}_R(-, M) : R\text{-Mod} \to \mathrm{Vec}$$

são exatos à esquerda.

Demonstração. Vamos mostrar que $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ é exato à esquerda. De forma análoga, mostra-se que $\mathrm{Hom}_R(-, M)$ também é exato à esquerda. Seja $0 \to V \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\psi} U \to 0$ uma sequência exata em R-Mod. Temos que mostrar que

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M, V) \xrightarrow{\varphi^*} \mathrm{Hom}_R(M, W) \xrightarrow{\psi^*} \mathrm{Hom}_R(M, U)$$

é uma sequência exata em Vec.

- φ^* é injetiva: seja $f \in \ker(\varphi^*)$. Então $f : M \to V$ e $\varphi^*(f) = 0$, ou seja, $\varphi(f(m)) = 0$, para todo $m \in M$. Como φ é injetiva, então $f(m) = 0$, para todo $m \in M$, ou seja, f é a transformação linear zero.

- $\mathrm{im}(\varphi^*) \subseteq \ker(\psi^*)$: seja $f \in \mathrm{im}(\varphi^*)$. Então $f : M \to W$ e existe $g \in \mathrm{Hom}_R(M, V)$ tal que $\varphi^*(g) = f$, ou seja, $\varphi g = f$. Daí, $(\psi^*(f))(m) = \psi(f(m)) = \psi\big(\varphi(g(m))\big) = 0$, para todo $m \in M$, pois $\mathrm{im}(\varphi) = \ker(\psi)$. Logo, $\psi^*(f)$ é a transformação linear zero, ou seja, $f \in \ker(\psi^*)$.

- $\ker(\psi^*) \subseteq \mathrm{im}(\varphi^*)$: seja $g \in \ker(\psi^*)$. Então $g : M \to W$ e $\psi^*(g) = \psi g = 0$. Disso segue que, para cada $m \in M$, $g(m) \in \ker(\psi) = \mathrm{im}(\varphi)$, ou seja, $g(m) = \varphi(v)$, para algum $v \in V$. Contudo, como φ é injetiva, tal v é único. Daí, podemos definir $f : M \to V$, $m \mapsto v$, onde v é tal que $\varphi(v) = g(m)$. Observe que, dado $r \in R$ e $m, m' \in M$ e denotando v e v' em V como sendo tais que $\varphi(v) = g(m)$ e $\varphi(v') = g(m')$, então $g(r \cdot m + m') = r \cdot g(m) + g(m') = r \cdot \varphi(v) + \varphi(v') = \varphi(r \cdot v + v')$. Logo, $f(r \cdot m + m') = r \cdot v + v' = r \cdot f(m) + f(m')$, ou seja, $f \in \mathrm{Hom}_R(M, V)$. Agora, veja que $(\varphi^*(f))(m) = \varphi(f(m)) = \varphi(v) = g(m)$, para todo $m \in M$. Portanto, $\varphi^*(f) = g$, isto é, $g \in \mathrm{im}(\varphi^*)$. ⊠

Sejam $\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ categorias e sejam também $F, G : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ functores covariantes. Se para cada objeto $X \in \mathscr{C}$, temos um morfismo $\eta_X : F(X) \to G(X)$ em $\mathscr{C}'$, tal que para cada morfismo $f : X \to Y \in \mathscr{C}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_X"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & F(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

é comutativo, ou seja, $\eta_Y F(f) = G(f)\eta_X$, então dizemos que $\eta = (\eta_X)_{X \in \mathscr{C}}$ é uma **transformação natural** de F para G e escrevemos $\eta : F \to G$. Uma transformação natural também é dita um *morfismo functorial*. Além disso, se η_X é um isomorfismo para todo $X \in \mathscr{C}$, dizemos que η é um **isomorfismo funtorial** e denotamos $F \underset{\eta}{\cong} G$. A discussão acima pode ser feita similarmente para o caso em que os functores são contravariantes.

Sejam $\mathscr{C}, \mathscr{C}'$ categorias, $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ e $G : \mathscr{C}' \to \mathscr{C}$ functores covariantes. Dizemos que $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ são **categorias isomorfas**, se $FG = \mathrm{id}_{\mathscr{C}'}$ e $GF = \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$. Dizemos que $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ são **categorias equivalentes**, se existem isomorfismos funtoriais $\eta : FG \to \mathrm{id}_{\mathscr{C}'}$ e $\sigma : GF \to \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$, isto é, $FG \underset{\eta}{\cong} \mathrm{id}_{\mathscr{C}'}$ e $GF \underset{\sigma}{\cong} \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$. O mesmo se faz para funtores contravariantes.

Proposição C.6. Sejam $0 \to V \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\psi} U \to 0$ e $0 \to V' \xrightarrow{\varphi'} W' \xrightarrow{\psi'} U' \to 0$ sequências exatas curtas na categoria R-Mod, onde R é uma anel associativo com identidade. Sejam também $f : V \to V'$, $g : W \to W'$ e $h : U \to U'$ homomorfismos de R-módulos. Se f e h são injetoras (respectivamente, sobrejetoras) e se o diagrama abaixo comutar, então g é injetora (respectivamente, sobrejetora) também.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & W \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & U \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & V' \arrow[r, "\varphi'"'] & W' \arrow[r, "\psi'"'] & U' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Consequência do Lema Cinco (ver (Rot09), página 90, Proposição 2.72). ⊠

Para mais detalhes sobre os resultados e definições apresentados nesse apêndice sugerimos as referências (ASS06, Kna88, Wei94, Rot09).

Bibliografia

[ASS06] I. Assem, D. Simson, and A. Skowroński. *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1*, volume 65 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2006. Techniques of representation theory.

[Bor01] A. Borel. *Essays in the history of Lie groups and algebraic groups*, volume 21 of *History of Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI; London Mathematical Society, Cambridge, 2001.

[Bre14] M. Brešar. *Introduction to noncommutative algebra*. Universitext. Springer, Cham, 2014.

[Car05] R. Carter. *Lie algebras of finite and affine type*, volume 96 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[CL13] F. Coelho and M. Lourenço. *Um curso de álgebra linear*. Edusp, São Paulo, 2 edition, 2013.

[Hum78] J. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*, volume 9 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978. Second printing, revised.

[Hum08] J. Humphreys. *Representations of semisimple Lie algebras in the BGG category $\mathcal{O}$*, volume 94 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[Kem11] G. Kemper. *A course in commutative algebra*, volume 256 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Heidelberg, 2011.

[Kle93] F. Klein. A comparative review of recent researches in geometry. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 2(10):215–249, 1893.

[Kna88] A. Knapp. *Lie groups, Lie algebras, and cohomology*, volume 34 of *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1988.

[Lan87] S. Lang. *Linear algebra*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 3 edition, 1987.

[Mat00] O. Mathieu. Classification of irreducible weight modules. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 50(2):537–592, 2000.

[Maz10] V. Mazorchuk. *Lectures on $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$-modules*. Imperial College Press, London, 2010.

[MR01] J. McConnell and J. Robson. *Noncommutative Noetherian rings*, volume 30 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, revised edition, 2001. With the cooperation of L. W. Small.

[Rot09] J. Rotman. *An introduction to homological algebra*. Universitext. Springer, New York, second edition, 2009.

[SM10] L. San Martin. *Álgebras de Lie*. Ed. Unicamp, 2010.

[SM16] L. San Martin. *Grupos De Lie*. Ed. Unicamp, 2016.

[SW14] S. Sierra and C. Walton. The universal enveloping algebra of the witt algebra is not noetherian. *Advances in Mathematics*, 262:239–260, 2014.

[Wei94] C. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

Índice Remissivo