Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Distância Química em modelos de Percolação de Longo Alcance

Pablo Almeida Gomes

Belo Horizonte - MG
2016

Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Distância Química em modelos de Percolação de Longo Alcance

Pablo Almeida Gomes

Dissertacão apresentada ao corpo docente de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Rémy de Paiva Sanchis.

Belo Horizonte - MG
2016

Gomes, Pablo Almeida

G633d Distância química em modelos de percolação de longo alcance [manuscrito] / Pablo Almeida Gomes – 2016.
48 f.: il. ; 29cm

Orientador: Rémy de Paiva Sanchis.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f. 47-48

1.Matemática – Teses. 2. Probabilidades - Teses. Percolação de alta densidade – Teses. 4. Grupo de renormalização – Teses. 4. Grafos aleatórios – Teses. I. Sanchis, Rémy de Paiva. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irénquer Vismeg Lucas Cruz - CRB 6ª Região / nº 819.

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

Distância Química em Modelos de Percolação de Longo Alcance

PABLO ALMEIDA GOMES

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Prof. Rémy de Paiva Sanchis
UFMG

Prof. Paulo Cupertino de Lima
UFMG

Prof. Roger William Câmara Silva
EST / UFMG

Belo Horizonte, 02 de agosto de 2016.

Av. Antônio Carlos, 6627 – Campus Pampulha - Caixa Postal: 702
CEP-31270-901 - Belo Horizonte – Minas Gerais - Fone (31) 3409-5963
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br - home page: http://www.mat.ufmg.br/pgmat

Agradecimentos

Primeiramente agradeço aos meus pais, irmãos e à minha amável Mariana, por todo apoio e companhia. Agradeço também ao Leandro Cioletti e à OBMEP, por terem me mostrado o quão fascinante e prazeroso é estudar matemática. Agradeço a todos os professores e colegas, em especial ao meu orientador Rémy Sanchis, pela contribuição em minha formação pessoal e profissional. E por fim, à agência CAPES pelo financiamento.

Resumo

Esta dissertação tem como objetivo apresentar resultados em Percolação de Longo Alcance na rede $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$, cujos elos de primeiros vizinhos estão todos presentes e cada par de vértices $x, y \in \mathbb{Z}^d$, com $||x - y|| > 1$, estão conectados, independentemente dos demais, com probabilidade $p_{x,y} \in [0, 1]$. Assumimos que $p_{x,y}$ é invariante por translação e tem decaimento polinomial $p_{x,y} = ||x - y||^{-s+o(1)}$. Estes resultados relacionam a distância química (distância usual em grafos) no grafo aleatório com a distância euclidiana, sendo que estes variam de acordo com o parâmetro de decaimento s.

No primeiro capítulo são apresentados argumentos heurísticos que desenvolvi ao decorrer destes estudos, os quais tem como finalidade dar uma melhor compreensão para os resultados nos casos $s < d$, $d < s < 2d$ e $2d < s$. Enquanto que no segundo capítulo encontra-se uma demostração via método de renormalização multi-escalas, desenvolvida por Marek Biskup em [8], que afirma que o diâmetro D_L do grafo aleatório na caixa $\Lambda_L = [-L, L]^d \cap \mathbb{Z}^d$, é tal que

$$\lim_{L\to\infty} \mathbb{P}((\log L)^{\Delta-\epsilon} \leq D_L \leq (\log L)^{\Delta+\epsilon}) = 1, \; \forall \epsilon > 0.$$

Onde $\Delta = \log 2/ \log(2d/s)$, com $d < s < 2d$.

PALAVRAS-CHAVE: Percolação de Longo Alcance, Distância Química, Renormalização.

Abstract

This text shows results in Long-Range Percolation on the d-dimensional lattice $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$, which all nearest-neighbor edges are presents and each pair of vertices $x, y \in \mathbb{Z}^d$, with $||x-y|| > 1$, are connected, independently of the others, with probability $p_{x,y} \in [0,1]$. We assume that $p_{x,y}$ is translation invariant and has polynomial decay $p_{x,y} = ||x-y||^{-s+o(1)}$, $s > 0$. These results relate the chemical distance (graph theoretical distance) $D(x,y)$ on the random graph with the euclidean distance $||x-y||$, according to the parameter s.

In the first chapter are presented heuristic arguments, that I developed along these studies, which have as finality to give a better understanding about results in the cases $s < d$, $d < s < 2d$ and $2d < s$. While in the second chapter, are presented a proof by multiscale renormalization method, developed by Marek Biskup in [8], which proves that the diameter D_L of the random graph in the box $\Lambda_L = [-L, L]^d \cap \mathbb{Z}^d$, is such that

$$\lim_{L\to\infty} \mathbb{P}((\log L)^{\Delta-\epsilon} \leq D_L \leq (\log L)^{\Delta+\epsilon}) = 1, \, \forall \epsilon > 0.$$

Where $\Delta = \log 2 / \log(2d/s)$, with $d < s < 2d$.

KEYWORDS: Long-Range Percolation, Chemical Distance, Renormalization.

Sumário

Introdução

O modelo de Percolação de Longo Alcance foi inicialmente apresentado, com rigor matemático, por Schulman [16] em 1983, com o intuito de se estudar fenômenos relacionados à existência de percolação na rede unidimensional $\mathbb{Z}$, uma vez que neste caso, o modelo de percolação sobre elos de primeiros vizinhos é tido como trivial. Nesta dissertação, de forma geral, o modelo consiste em, considerando a rede $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$, fixado um parâmetro $s \in (0, +\infty)$, dados $x, y \in \mathbb{Z}^d$, o elo cujos extremos são x e y está presente no grafo aleatório, de maneira independente dos demais, com probabilidade $p_{x,y} \in [0,1]$, onde assumimos que $p_{x,y}$ é invariante por translação e decai de forma polinomial, $p_{x,y} = ||x - y||^{-s+o(1)}$, de acordo com o parâmetro de decaimento s.

Os artigos [1], [13], [15] e [16], dão respostas satisfatórias à questões relacionadas a existência de percolação na rede $\mathbb{Z}$. Entretanto, em $\mathbb{Z}^d$, $(d \geq 2)$, o modelo de percolação sobre elos de primeiros vizinhos, já apresenta transição de fase no que diz respeito à existência de percolação, podemos assim dizer, que de certa maneira, as conexões de longo alcance não são cruciais para tal existência. Entretanto, os elos de longo alcance são de extrema importância no estudo de características geométricas do grafo aleatório. Apresentar algumas destas características em função da dimensão d e do parâmetro de decaimento s é o objetivo deste texto.

Com a finalidade de podermos explicitar essas características geométricas, encontram-se a seguir algumas definições básicas sobre grafos que utilizaremos ao longo do texto, além de uma definição formal do modelo em questão.

Dado um conjunto V, denotamos por $V^{(2)} = \big\{\{x,y\} \; ; \, x \neq y \text{ e } \{x,y\} \subset V\big\}$ o conjunto de todos os pares não ordenados de V. Um grafo G é uma dupla ordenada $G = (V, E)$, onde V é o conjunto dos vértices de G e $E \subseteq V^{(2)}$ é o conjunto dos elos de G. Assim, se $x \in V$, dizemos que x é um vértice de G e dados dois vértices distintos $x, y \in V$, dizemos que x está conectado à y ou que $\{x,y\}$ é um elo de G se $\{x,y\} \in E$, neste caso escrevemos $x \sim y$.

Dado um vértice $x \in V$, o grau de x em G é o número de elos que tem x como um de seus extremos, isto é, $d(x) = \big|\{y \in V \; ; \, \{x,y\} \in E\}\big|$.

Uma sequência finita de vértices $\gamma = x_0, x_1, \ldots x_n$ é dita um caminho em G, se $x_i \sim x_{i+1}$ para todo $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Neste caso, escrevemos ainda que o tamanho do caminho γ é $|\gamma| = n$.

O grafo G é dito conexo se para qualquer par de vértices distintos x e $y \in V$, existe um caminho $\gamma = x_0, \ldots, x_n$ em G com vértice inicial x e final y, isto é, $x_0 = x$ e $x_n = y$. Definimos agora a distância química (distância usual em grafos), também conhecida como distância intrínseca do grafo, entre dois vértices distintos x e $y \in V$, denotada por

$$D_G(x, y) = \begin{cases} \min\{|\gamma| \ ; \ \gamma = x, x_1, \ldots, y \text{ é um caminho em } G\}; \\ +\infty, \quad \text{se } \{\gamma \ ; \ \gamma = x, x_1, \ldots, y \text{ é um caminho em } G\} = \emptyset \end{cases}.$$

Observe então que, se G é conexo, temos $D_G(x, y) < +\infty$, para todo par de vértices $x, y \in V$. Note que a distância química define em G a relação de equivalência R em V, dada por

$$xRy \Longleftrightarrow D_G(x, y) < +\infty \text{ ou } x = y.$$

Esta relação particiona o conjunto de vértices V em classes de equivalência. Denotamos por $\mathcal{C}_x = \{y \in V \ ; \ yRx\}$ a classe de equivalência contendo x. Seja $\Lambda = V/R = \{\mathcal{C}_x \ ; \ x \in V\}$ o conjunto destas classes. O conjunto de elos E também é dividido através de sua restrição a cada uma dessas classes. Denotamos por $E_x = E \cap \mathcal{C}_x^{(2)}$ a parte de E que contém os elos adjacentes a x. Dessa forma, obtemos uma partição do grafo G, onde cada parte é dita uma componente conexa de G,

$$G = \bigcup_{x \in V} \left(G_x = (\mathcal{C}_x, E_x) \right).$$

Uma vez definida a distância química sobre os vértices de G, podemos definir o diâmetro D_G do grafo G, que é o máximo entre as distâncias de todos os pares de vértices, se G é conexo, ou $+\infty$ caso contrário, precisamente

$$D_G = \sup_{x, y \in V} D_G(x, y).$$

Agora que já temos todas as definições necessárias, vamos em direção ao nosso modelo. Sob a rede cúbica $d-$dimensional $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$, considere o grafo aleatório $\mathbb{G} = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E})$, onde para cada par de vértices distintos $x, y \in \mathbb{Z}^d$, temos que, de forma independente dos demais pares, $\{x, y\} \in \mathbb{E}$ com probabilidade $p_{x,y} \in [0, 1]$ e ainda $\{x, y\} \notin \mathbb{E}$ com probabilidade $1 - p_{x,y}$. Assumimos que $p_{x,y}$ é invariante por translação e tem decaimento polinomial. Precisamente $p_{x,y} = p(x - y)$, onde $p : \mathbb{Z}^d \longrightarrow [0, 1]$ é tal que para algum $s \in (0, +\infty)$, exista o limite

$$0 < \lim_{||x|| \to \infty} \frac{p(x)}{||x||^{-s}} < +\infty.$$

Aqui $|| \cdot ||$ denota a distância da norma $\mathbb{L}_1$ em $\mathbb{Z}^d$, dado $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d) \in \mathbb{Z}^d$ temos $||x|| = ||x||_1 = |x_1| + \cdots + |x_d|$. Devido a equivalência entre a norma $\mathbb{L}_1$ e a norma euclidiana $||x||_2 = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$, os resultados aqui presentes continuam válidos se tomarmos $|| \cdot || = || \cdot ||_2$ ao invés de $|| \cdot || = || \cdot ||_1$.

Fixado um inteiro não-negativo L, considere a caixa $\Lambda_L = [-L, L] \in \mathbb{Z}^d$. Definimos como $\mathbb{G}_L = (\Lambda_L, \mathbb{E}_L)$ o grafo obtido ao se restringir o grafo aleatório $\mathbb{G} = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E})$ à caixa Λ_L, ou seja, $\mathbb{E}_L = \{\{x, y\} \in \mathbb{E} \; ; \; x, y \in \Lambda_L\}$. A distância química entre dois vértices no grafo $\mathbb{G}_L$ é denotada por $D_L(x, y)$ enquanto que seu diâmetro é denotado simplesmente por D_L.

Devido à independência entre as conexões de pares de vértices, a medida de probabilidade $\mathbb{P}$ de nosso modelo é portanto a medida produto entre as medidas de Bernoulli com parâmetro $p_{x,y}$ associada a cada par de vértices $\{x, y\} \in (\mathbb{Z}^d)^{(2)}$. A saber,

$$\mathbb{P} \; = \prod_{\{x,y\} \in (\mathbb{Z}^d)^{(2)}} \mu_{x,y},$$

onde $\mu_{x,y}$ é uma Bernoulli com parâmetro $p_{x,y}$.

Como foi mencionado anteriormente, os estudos sobre este modelo foram inicialmente concentrados em fenômenos relacionados à existência de percolação em $\mathbb{Z}$, ou seja, estavam ligados à probabilidade de existência de uma componente conexa infinita

$$\mathbb{P}\left(\exists \; x \in \mathbb{Z}^d \; ; \; |\mathcal{C}_x| = +\infty\right),$$

ou ainda à probabilidade de existência de uma única componente conexa infinita

$$\mathbb{P}\left(\exists! \; C_x \in \Lambda \; ; \; |\mathcal{C}_x| = +\infty\right).$$

Entretanto, uma nova linha de estudos, sob a hipótese de que quase certamente existe um único cluster infinito (componente conexa infinita) em $\mathbb{G} = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E})$, ou ainda sob a hipótese em que estão presentes todas as conexões de pares de primeiros vizinhos, isto é, $p_{x,y} = 1$ para todo $x, y \in (\mathbb{Z}^d)^{(2)}$ com $||x - y|| = 1$, buscam compreender características geométricas da componente conexa infinita do grafo aleatório, provocadas pelas conexões de longo alcance. Essas características consistem basicamente em relacionar a distância química $D(x, y)$ com a distância $||x - y||$ e estimar assintoticamente o diâmetro D_L. Os artigos [2], [4], [5], [7], [8], [10] e [12] apresentam resultados nessa linha de pesquisa, evidenciando a existência de cinco regimes em função do parâmetro de decaimento s, os quais listamos abaixo:

i) $\boldsymbol{s < d}$ — I. Benjamini, H. Kesten, Y. Peres and O. Schramm [4], obtêm como um corolário de seu resultado principal, que

$$\lim_{L \to \infty} D_L = \left\lceil \frac{d}{d - s} \right\rceil$$

quase certamente.

ii) $\boldsymbol{s = d}$ — D. Coppersmith, D. Gamarnik e M. Sviridenko [10], mostram que

$$D_L \asymp \frac{\log L}{\log \log L},$$

isto é, existem constantes $c_1, c_2 \in (0, \infty)$ para as quais

$$\lim_{L\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{c_1 \log L}{\log\log L} \leq D_L \leq \frac{c_2 \log L}{\log\log L}\right) = 1.$$

iii) $\boldsymbol{d < s < 2d}$ — No artigo [8], cujas ideias serão apresentadas de forma detalhada no segundo capítulo dessa dissertação, Marek Biskup mostra que para todo $\epsilon > 0$,

$$\lim_{L\to\infty} \mathbb{P}\left((\log L)^{\Delta-\epsilon} \leq D_L \leq (\log L)^{\Delta+\epsilon}\right) = 1, \text{ onde } \Delta = \frac{\log 2}{\log\left(\frac{2d}{s}\right)}.$$

iv) $\boldsymbol{s = 2d}$ — Este caso ainda não se encontra completamente resolvido, em [10], D. Coppersmith, D. Gamarnik e M. Sviridenko mostram uma cota superior para o diâmetro D_L, onde afirmam que, sendo $\beta = \lim_{||x||\to\infty} p_{0,x}/||x||^{-2d}$ existe $\theta(\beta) \in (0,1)$ onde

$$\lim_{L\to\infty} \mathbb{P}\left(D_L \leq L^{\theta(\beta)}\right) = 1.$$

Somente para o caso $d = 1$, muito recentemente, J. Ding e A. Sly [12] obtiveram uma cota inferior para para o diâmetro D_L, eles mostram a existência de $\theta'(\beta) \in (0,1)$ onde

$$\lim_{L\to\infty} \mathbb{P}\left(D_L \geq L^{\theta'(\beta)}\right) = 1.$$

Estes artigos mostram a existência dos valores $\theta(\beta)$ e $\theta'(\beta) \in (0,1)$, embora ainda não os conhecemos explicitamente.

v) $\boldsymbol{s > 2d}$ — Berger mostra em [5] que, quase certamente, temos

$$\liminf_{L\to\infty} \frac{D_L}{L} > 0,$$

o que associado à presença de todos os elos de primeiros vizinhos, se torna, $D_L \asymp L$ quase certamente.

Apresentaremos no Capítulo 1 desta dissertação, argumentos heurísticos para resultados parciais sob os regimes $s < d$, $d < s < 2d$ e $2d < s$. Enquanto que no Capítulo 2, faremos uma exposição das ideias utilizadas no artigo [8], que tem como resultado principal o teorema

Teorema 1. *Supondo que $p_{x,y} = 1 - e^{-q(x-y)}$, onde $q(x) = \infty$ se $||x|| = 1$ e $q : \mathbb{Z}^d \longrightarrow [0,\infty]$ é uma função par para a qual o limite*

$$s = -\lim_{||x||\to\infty} \frac{\log q(x)}{\log ||x||}$$

exista e satisfaça $d < s < 2d$. Então

$$\lim_{L\to\infty} \mathbb{P}\left((\log L)^{\Delta-\epsilon} \leq D_L \leq (\log L)^{\Delta+\epsilon}\right) = 1, \quad \forall\epsilon > 0 \text{ e } \Delta = \frac{\log 2}{\log\left(\frac{2d}{s}\right)}.$$

Note que $q(x) = \infty$ para todo $x \in \mathbb{Z}^d$ tal que $||x|| = 1$ implica que $p_{x,y} = 1$ sempre que $||x - y|| = 1$, isto é, todos os elos de primeiros vizinhos estão presentes no grafo aleatório. Note ainda que, sendo $p_{x,y}$ como definida no Teorema 1, devido a expansão em série de Taylor da função exponencial, temos $p_{x,y} = ||x - y||^{-s+o(1)}$, de acordo com o mencionado anteriormente.

Capítulo 1

Argumentos Heurísticos

Na matemática, tão importante quanto se conhecer um determinado resultado é compreender os fatos ou ter indícios que nos levam a crer em sua veracidade, antes mesmo de se ter visto uma demostração. Temos ainda que este conhecimento prévio, na maioria das vezes, nos auxilia na compreensão de uma demonstração.

Neste capítulo, com o intuito de facilitar a compreensão de estimativas para o diâmetro D_L sob os regimes $s < d$, $d < s < 2d$ e $2d < s$, apresentarei alguns argumentos heurísticos que desenvolvi ao estudar o modelo de Percolação de Longo Alcance.

1.1 Longo alcance intenso, $s < d$

Neste regime, temos que $p_{x,y} = ||x-y||^{-s+o(1)}$ com parâmetro de decaimento $s < d$, ou seja, a probabilidade de conexões tem uma taxa de decaimento mais lenta que a taxa em que cresce o volume $|\Lambda_L|$, que corresponde ao total de possibilidades de conexões para um dado vértice. Dessa forma, é esperado que para cada vértice, uma grande quantidade de conexões de longo alcance estejam presentes no grafo aleatório.

No que segue, verificamos que para cada vértice $x \in \mathbb{Z}^d$, o grau de x no grafo aleatório $\mathbb{G} = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E})$ é infinito com probabilidade 1.

Dados dois vértices distintos $x, y \in \mathbb{Z}^d$, assumimos que $p_{x,y} = 1 - e^{-||x-y||^{-s}}$. Seja $\mathcal{J}_x^n = \{y \in \mathbb{Z}^d \ ; \ ||x-y|| = n\}$ o conjunto dos vértices que estão a uma distância n de x em $\mathbb{Z}^d$. Existe $c_d \in (0, +\infty)$ para o qual $|\mathcal{J}_x^n| \geq c_d n^{d-1}$. Considerando o evento $A_n = \{\exists y \in \mathcal{J}_x^n \ ; \ x \sim y \text{ em } \mathbb{G}\}$, no qual x se conecta a pelo menos um dos vértices que se encontram a uma distância n de x, da independência entre os elos temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_n) = 1 - \mathbb{P}\left(A_n^c\right) &= 1 - \prod_{y \in \mathcal{J}_x^n} \left(1 - p_{x,y}\right) = 1 - \prod_{y \in \mathcal{J}_n^x} e^{-||x-y||^{-s}} \\
&= 1 - \exp\left\{\frac{-|\mathcal{J}_x^n|}{n^s}\right\} \geq 1 - \exp\left\{-c_d n^{d-1-s}\right\}. \quad (1.1)
\end{aligned}$$

Uma vez que $d > s$, temos que $d - 1 - s \geq 0$ ou $0 > d - 1 - s > -1$. No primeiro caso, por (1.1) temos que $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n) > 0$. Já no segundo caso, temos

$\lim_{n\to\infty} c_d n^{d-1-s} = 0$, desta maneira, fixado $a \in (0,1)$, temos que para n grande

$$1 - \exp\{-c_d n^{d-1-s}\} \geq a c_d n^{d-1-s}.$$

Portanto, em ambos os casos temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_n\right) = \infty.$$

Desta forma, como os conjuntos $(\mathcal{J}_x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ são dois a dois disjuntos, temos que os eventos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são independentes. Portanto, segue do Lema de Borel-Cantelli que $\mathbb{P}(A_n \ \text{ i.v.}) = 1$, ou seja, x possui grau infinito no grafo aleatório, quase certamente.

Além do fato acima, pode-se verificar que cada vértice, se conecta com probabilidade tendendo a 1, a subconjuntos de Λ_L, desde que estes subconjuntos possuam cardinalidade maior ou igual a L^α, com $\alpha = s/d + \delta$ e $\delta > 0$. Portanto, dado um vértice $x \in \Lambda_L$ para cada outro vértice $y \in \Lambda_L$, teremos que com alta probabilidade x está conectado a um conjunto de vértices próximos de y. Dessa maneira, somos levados a crer que o diâmetro D_L pode ser cotado superiormente por uma constante uniforme em L.

Com a finalidade de esclarecermos as ideias acima, realizaremos alguns cálculos. E uma vez que estamos interessados somente em uma argumentação heurística, para a realização desses cálculos, assumiremos que $p_{x,y} = 1 - e^{-||x-y||^{-s}}$, com $0 < s < d$. Assumiremos também que $\Lambda_L = [1, L]^d \cap \mathbb{Z}^d$ ao invés de $\Lambda_L = [-L, L]^d \cap \mathbb{Z}^d$, apenas para utilizarmos que o comprimento do lado da caixa Λ_L é L e não $2L + 1$, o que facilita a notação e não altera as ideias utilizadas, uma vez que não necessitamos que Λ_L esteja centralizada na origem.

Dados dois vértices distintos $x, y \in \Lambda_L$, temos que $||x - y|| < dL$, então

$$p_{x,y} = 1 - e^{-||x-y||^{-s}} \geq 1 - e^{-(dL)^{-s}},$$

portanto obtemos que para todo $x, y \in \Lambda_L$, vale a desigualdade

$$1 - p_{x,y} \leq e^{-(dL)^{-s}}. \tag{1.2}$$

De posse da Desigualdade (1.2), vamos analisar a probabilidade de um dado vértice $x \in \Lambda_L$ estar conectado à um subconjunto de vértices $V \subset \Lambda_L$. Denotamos por $\{x \sim V\}$ o evento onde $x \sim y$ em $\mathbb{G}_L$ para algum $y \in V$, denotamos ainda por $\{x \nsim V\}$ o complementar deste evento. Dessa forma temos

$$\mathbb{P}\left(x \nsim V\right) = \prod_{y\in V} \left(1 - p_{x,y}\right) \leq \prod_{y\in V} e^{-(dL)^{-s}} = e^{-|V|(dL)^{-s}}. \tag{1.3}$$

Observe agora que, com a finalidade de obtermos $\lim_{L\to\infty} \mathbb{P}\left(x \sim V\right) = 1$, é necessário que $\lim_{L\to\infty} |V|(dL)^{-s} = +\infty$. Isto nos leva a dividir Λ_L em cubos de tal forma que o volume de cada cubo seja maior que L^s. Assim, teremos que dado um vértice $x \in \Lambda_L$, este vértice se conecta a pelo menos um vértice de cada cubo com probabilidade tendendo a 1. Note que para garantir a conexão de x a todos os cubos deveríamos utilizar a propriedade subaditiva da probabilidade, mas como estamos interessados somente nas ideias, falaremos sobre isto apenas no fim da seção.

Sendo $k_1(L)$ o comprimento do lado de cada cubo, seu volume é portanto $(k_1(L))^d$. Para que se tenha $\lim_{L\to\infty}(k_1(L))^d/L^s = +\infty$, escolhemos $k_1(L) = L^{(\frac{s}{d}+\delta)} = L^\alpha$, onde $\delta > 0$ é escolhido de forma que $\alpha = s/d + \delta < 1$, o que pode ser feito, uma vez que $s < d$. A condição $\alpha < 1$ é necessária para que se tenha $k_1(L) < L$.

O total de cubos nessa divisão é $\lfloor (L/k_1(L))^d \rfloor = \lfloor L^{d(1-\alpha)} \rfloor$, mas como só nos interessa a heurística, digamos que seja $L^{d(1-\alpha)}$. No evento em que x se conecta a pelo menos um vértice de cada cubo, denotamos por $V_1(x) = \{x_1, x_2, \ldots, x_{L^{d(1-\alpha)}}\}$, o conjunto de tais vértices.

Observe agora que, procedendo de maneira análoga, podemos dividir cada um desses cubos de comprimento $k_1(L)$ em cubos de comprimento $k_2(L) = k_1(L)^\alpha$, com o propósito de mensurar a probabilidade do evento em que cada x_i esteja conectado a cada uma dessas subdivisões do cubo de comprimento $k_1(L)$ ao qual pertence.

Calculando o total de cubos de comprimento $k_2(L)$ contidos em um cubo de comprimento $k_1(L)$, obtemos

$$\left(\frac{k_1(L)}{k_2(L)}\right)^d = k_1(L)^{d(1-\alpha)}. \tag{1.4}$$

Assim, cada x_i se conecta a pelo menos $k_1(L)^{d(1-\alpha)}$ vértices, todos distintos dos demais x_i's uma vez que estes se encontram em cubos diferentes.

A Figura 1.1 abaixo, que tem como finalidade ilustrar esse processo de divisões. As conexões em preto representam as conexões de x com cada x_i contidos nos cubos de comprimento $k_1(L)$ os quais tem borda também em preto, enquanto que as conexões em vermelho representam as conexões de cada x_i a cubos de comprimento $k_2(L)$, os quais por sua vez, tem a borda em vermelho.

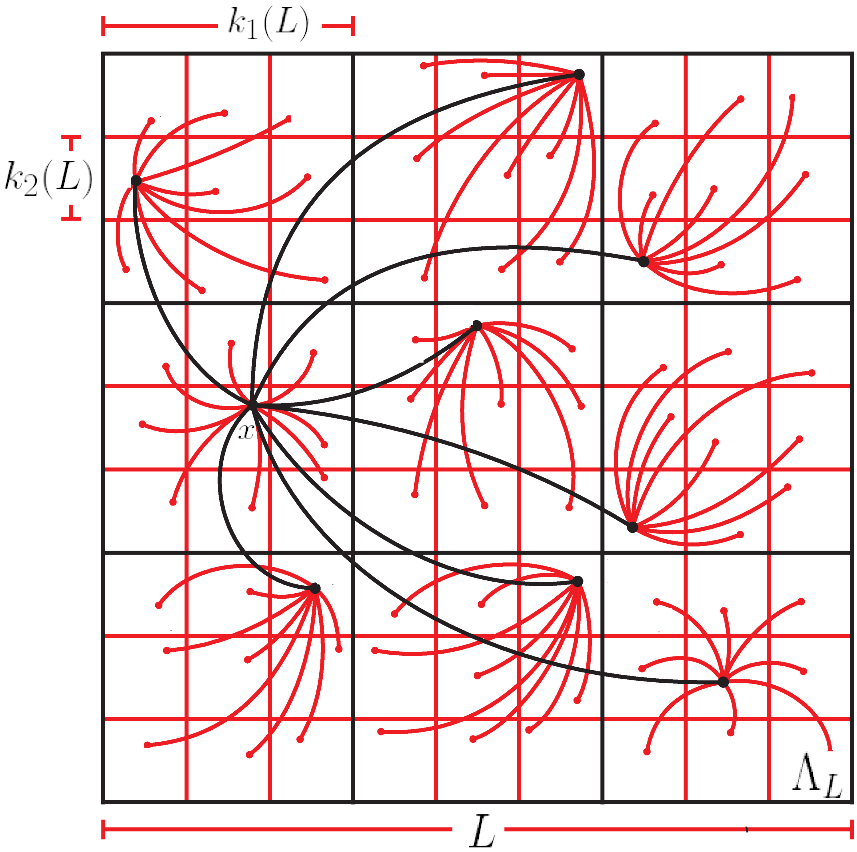

Figura 1.1: Divisões e conexões entre cubos nas escalas $k_1(L)$ e $k_2(L)$

Considere agora o conjunto $V_2(x)$, formado pelos vértices obtidos através da ocorrência das conexões mencionadas nas divisões de Λ_L em cubos de comprimento $k_1(L)$ e $k_2(L)$. Temos que a cardinalidade de $V_2(x)$ é dada por

$$\big|V_2(x)\big| = L^{d(1-\alpha)}.(k_1(L))^{d(1-\alpha)} = L^{d(1-\alpha)(1+\alpha)}. \tag{1.5}$$

Observe ainda, que $D_L(x,z) \leq 2$, qualquer que seja $z \in V_2(x)$.

Procedemos de maneira indutiva, dividindo cada cubo de comprimento $k_n(L) = L^{\alpha^n}$ em uma quantidade $(k_n(L))^{d(1-\alpha)}$ de cubos de comprimento $k_{n+1}(L) = (k_n(L))^{\alpha} = L^{\alpha^{n+1}}$.

Ao final da realização de n divisões, obtemos o conjunto $V_n(x)$ dos vértices obtidos através das conexões em cada divisão, assim temos que $D_L(x,z) \leq n$, qualquer que seja $z \in V_n(x)$. E ainda,

$$\begin{aligned} \big|V_n(x)\big| &= L^{d(1-\alpha)}.(k_1(L))^{d(1-\alpha)} \cdots (k_{n-1}(L))^{d(1-\alpha)} \\ &= L^{d(1-\alpha)(1+\alpha+\cdots+\alpha^{n-1})} = L^{d(1-\alpha^n)}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Observe agora que, se $m \in \mathbb{N}$ é tal que $\alpha^m < 1 - s/d$, temos $d(1-\alpha^m) > s$, o que implica $|V_m(x)| > L^s$. Neste caso, devido à (1.3), dado $y \in \Lambda_L$, temos que o evento $\{y \sim V_m(x)\}$ ocorre com alta probabilidade. Portanto, sob a ocorrência das conexões obtidas nos m passos de divisões e do evento $\{y \sim V_m(x)\}$, obtemos $D_L(x,y) \leq m+1$. É interessante ressaltar que como α pode ser tomado tão próximo de s/d como se queira, considerando $\alpha = s/d$ e tomando

$$m = \log_\alpha(1-\alpha) = \log_{d/s}\left(\frac{d}{d-s}\right),$$

obtemos $\alpha^m = 1 - s/d$. Temos assim uma estimativa para D_L.

Estes argumentos nos levam a crer que $\lim_{L\to\infty} \mathbb{P}(D_L \leq \log_{d/s}(d/(d-s)) + 1) = 1$, ou seja, o diâmetro é limitado uniformemente em L. Como foi mencionado na Introdução, em [4], Benjamini, Kesten, Peres e Schramm mostram de forma indireta que

$$\lim_{L\to\infty} D_L = \left\lceil \frac{d}{d-s} \right\rceil,$$

onde este limite ocorre quase certamente.

Para finalizarmos esta seção, fazemos uma simples análise assintótica, notando que a probabilidade obtida em (1.3) é boa no sentido de que todos os eventos mencionados nesta seção ocorrem simultaneamente, uma vez que o total de eventos é de ordem polinomial em L, enquanto que a probabilidade em (1.3) é cotada por $e^{-cL^{d\delta}}$, que decai exponencialmente em L.

1.2 Longo alcance intermediário, $d < s < 2d$

Nesta seção trataremos o caso em que $p_{x,y} = ||x-y||^{-s+o(1)}$ com parâmetro de decaimento $d < s < 2d$. Como $s > d$, ao contrário da seção anterior, teremos que a probabilidade de conexões de longo alcance decai mais rapidamente que a taxa em que o volume $|\Lambda_L|$, correspondente às possibilidades de conexões, cresce. Assim é de se esperar que D_L tenda a infinito com L.

Realizando cálculos similares aos apresentados no início da seção anterior, podemos verificar que para cada vértice $x \in \mathbb{Z}^d$, o grau de x no grafo aleatório é finito com probabilidade 1.

Dados $x, y \in \mathbb{Z}^d$, assumimos $p_{x,y} = ||x-y||^{-s}$. Seja $\mathcal{J}_x^n = \{y \in \mathbb{Z}^d \,;\, ||x-y|| = n\}$ o conjunto dos vértices que estão a uma distância n de x em $\mathbb{Z}^d$. Existe $c_d \in (0, +\infty)$ para o qual $|\mathcal{J}_x^n| \leq c_d n^{d-1}$. Considerando o evento A_n, onde existe $y \in \mathcal{J}_x^n$ em que x está conectado a y no grafo aleatório, segue da propriedade de subaditividade, que

$$\mathbb{P}(A_n) \leq \sum_{y\in\mathcal{J}_x^n} p_{x,y} = \sum_{y\in\mathcal{J}_x^n} \frac{1}{||x-y||^s} = \frac{|\mathcal{J}_x^n|}{n^s} \leq c_d n^{d-1-s}. \tag{1.7}$$

E portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) \leq c_d \sum_{n=1}^{\infty} n^{(d-s)-1} < +\infty, \tag{1.8}$$

uma vez que $s > d$ implica $(d - s) - 1 < -1$.

Então, segue do Lema de Borel-Cantelli que $\mathbb{P}(A_n \quad \text{i.v.}) = 0$. Ou seja, x possui grau finito no grafo aleatório com probabilidade 1, o que implica que $\lim_{L\to\infty} D_L = +\infty$ quase certamente.

Entretanto, ao dividirmos a caixa Λ_L em cubos disjuntos de comprimento $k_1(L)$, temos que o total de possíveis conexões entre cada par de cubos distintos é $k_1(L)^{2d}$ e, como $s < 2d$, é então esperado que ocorra uma grande quantidade de pares de cubos que se conectam. Dado um par de vértices distintos em Λ_L poderemos obter uma conexão entre os cubos ao qual cada um pertence e dessa forma essa conexão é feita entre vértices próximos aos vértices dados, o que nos fornece um método de obtermos uma cota superior para D_L. Este fato nos leva a acreditar que $\lim_{L\to\infty} D_L/L = 0$, uma vez que ainda no regime $d < s < 2d$, há uma quantidade considerável de conexões de longo alcance.

Com a finalidade de obtermos assintoticamente a ordem em que D_L tende a infinito e para melhor explorarmos o raciocínio acima, faremos a seguir alguns cálculos, onde novamente como na seção anterior, assumimos que $\Lambda_L = [1, L]^d \cap \mathbb{Z}^d$ e que dados $x, y \in \Lambda_L$ temos $p_{x,y} = 1 - e^{-||x-y||^{-s}}$.

Sejam Γ_1 e Γ_2 dois cubos distintos contidos em Λ_L, denotamos por $\{\Gamma_1 \sim \Gamma_2\}$ o evento onde existem $x \in \Gamma_1$ e $y \in \Gamma_2$ para os quais $x \sim y$ em $\mathbb{G}_L$. Denotamos ainda por $\{\Gamma_1 \nsim \Gamma_2\}$ o complementar deste evento. Como é válida a Desigualdade (1.2), segue da independência entre os elos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\Gamma_1 \nsim \Gamma_2) = \prod_{\substack{x\in\Gamma_1 \\ y\in\Gamma_2}} (1 - p_{x,y}) \quad &\leq \quad \prod_{\substack{x\in\Gamma_1 \\ y\in\Gamma_2}} e^{-(dL)^{-s}} = \\
= \exp\left\{-\frac{|\Gamma_1|\,|\Gamma_2|}{(dL)^s}\right\} \quad &= \quad \exp\left\{-\frac{(k_1(L))^{2d}}{(dL)^s}\right\}.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Tomamos $k_1(L) = L^\alpha$ onde $\alpha = s/2d + \delta$ e $\delta > 0$ é escolhido de forma que $\alpha < 1$, o que pode ser feito uma vez que $s < 2d$. Dessa forma $\lim_{L\to\infty} \mathbb{P}(\Gamma_1 \sim \Gamma_2) = 1$.

Dividindo a caixa Λ_L em cubos de comprimento $k_1(L)$, dados dois vértices distintos x_1 e $x_2 \in \Lambda_L$, caso estejam ambos em um mesmo cubo, podemos cotar superiormente a distância química $D_L(x_1, x_2)$ por $||x_1 - x_2|| \leq dk_1(L)$, uma vez que todos os elos de primeiros vizinhos estão presentes. E caso estejam em cubos distintos, digamos Γ_1 e Γ_2 respectivamente, sob a ocorrência do evento $(\Gamma_1 \sim \Gamma_2)$ existem $x_3 \in \Gamma_1$ e

$x_4 \in \Gamma_2$ onde $x_3 \sim x_4$ em $\mathbb{G}_L$, assim

$$\begin{aligned} D_L(x_1, x_2) &\leq D_L(x_1, x_3) + D_L(x_3, x_4) + D_L(x_4, x_2) \\ &\leq dk_1(L) + 1 + dk_1(L) \\ &= 2dk_1(L) + 1. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Procedendo de maneira análoga, dividimos cada cubo de comprimento $k_1(L)$ em cubos de comprimento $k_2(L) = k_1(L)^\alpha = L^{\alpha^2}$. Com o mesmo raciocínio acima, através da ocorrência de conexões entre essas subdivisões de lado $k_2(L)$, podemos cotar $D_L(x_1, x_3)$ e $D_L(x_2, x_4)$ por $2dk_2(L)+1$. Desta forma, obtemos a desigualdade

$$\begin{aligned} D_L(x_1, x_2) &\leq D_L(x_1, x_3) + D_L(x_3, x_4) + D_L(x_4, x_2) \\ &\leq (2dk_2(L) + 1) + 1 + (2dk_2(L) + 1) \\ &= 2^2 dk_2(L) + (2^2 - 1). \end{aligned} \tag{1.11}$$

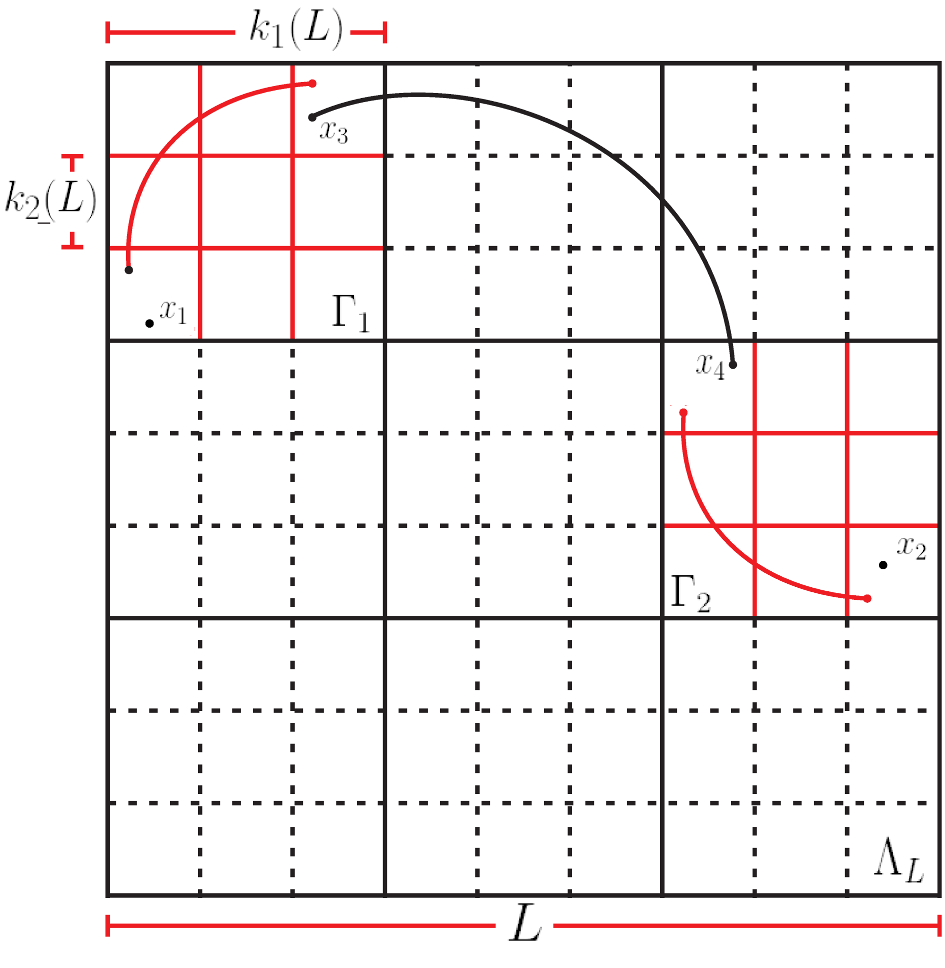

Figura 1.2: Divisões e conexões entre cubos nas escalas $k_1(L)$ e $k_2(L)$

A Figura 1.2 acima, ilustra esse processo de divisões. Cada cubo de comprimento $k_1(L)$ está representado com bordas em preto, enquanto que os cubos de comprimento $k_2(L)$ estão representados com bordas em vermelho em Γ_1 e Γ_2 e bordas pontilhadas nos demais. Observe que temos $2^2 - 1$ conexões diretas e 2^2 pares de vértices, cada um deles contidos em cubos de comprimento $k_2(L)$, o que auxilia na compreensão de (1.11).

Podemos seguir realizando este procedimento de divisões indutivamente, dividindo cada cubo de comprimento $k_n(L) = L^{\alpha^n}$ em cubos de comprimento $k_{n+1}(L) = (k_n(L))^\alpha = L^{\alpha^{n+1}}$. Após a realização de n iterações, sob a ocorrência das conexões em cada subdivisão, obtemos a desigualdade

$$\begin{aligned} D_L(x_1, x_2) &\leq 2^n d k_n(L) + (2^n - 1) \\ &= 2^n d L^{\alpha^n} + (2^n - 1). \end{aligned} \tag{1.12}$$

O próximo passo é obter n, em função de L e α, com a finalidade de otimizar a Desigualdade (1.12). Para isto, note que o termo $2^n - 1$ representa as conexões diretas entre os cubos, enquanto que o fator L^{α^n} representa a distância euclidiana dentro de um cubo de comprimento $k_n(L) = L^{\alpha^n}$. Assim é interessante tomar n de forma que o fator L^{α^n} seja desprezível em relação à quantidade de conexões diretas $2^n - 1$. Assintoticamente, isto significa

$$\begin{aligned} L^{\alpha^n} \ll 2^n &\implies \alpha^n(\log L) \ll n \\ &\implies n(\log \alpha) + \log\log L \ll \log n \\ &\implies n + \frac{\log n}{\log\left(\frac{1}{\alpha}\right)} \gg \frac{\log\log L}{\log\left(\frac{1}{\alpha}\right)}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Dessa maneira, somos levados a tomar $n \sim c \log\log L$ para algum $c \in (0, +\infty)$. Entretanto, o menor valor de c para o qual seja satisfeita a última sentença em (1.13), é $c = (\log(1/\alpha))^{-1}$. Portanto tomamos

$$n \sim \frac{\log\log L}{\log\left(\frac{1}{\alpha}\right)}. \tag{1.14}$$

Lembrando agora que $\alpha = s/2d + \delta$, onde $\delta > 0$ pode ser escolhido tão próximo de zero quanto se queira, podemos assumir que $\alpha = s/2d$. Desta forma,

$$\frac{1}{\log_2\left(\frac{1}{\alpha}\right)} = \frac{1}{\log_2\left(\frac{2d}{s}\right)} = \Delta, \tag{1.15}$$

onde Δ é exatamente o mesmo que no Teorema 1, cuja demonstração veremos detalhadamente no próximo capítulo. Neste caso temos que

$$n \sim \frac{\log\log L}{\log\left(\frac{1}{\alpha}\right)} = \frac{\log_2 \log L}{\log_2\left(\frac{1}{\alpha}\right)} = \Delta \log_2 \log L. \tag{1.16}$$

Um outro raciocínio que nos leva a (1.16) é o de que, a fim de minimizar a expressão $2^n d L^{\alpha^n}$ em (1.12), somos levados a considerar a igualdade $2^{n+1} d L^{\alpha^{n+1}} = 2^n d L^{\alpha^n}$, a qual nos fornece a seguinte cadeia de implicações

$$\begin{aligned}
2^{n+1}dL^{\alpha^{n+1}} = 2^n dL^{\alpha^n} &\implies L^{\alpha^n(\alpha-1)} = 2 \\
&\implies \alpha^n(1-\alpha)\log_2 L = 1 \\
&\implies n\log(\alpha) + \log(1-\alpha) + \log\log_2 L = 0 \\
&\implies n = \frac{\log\log L}{\log\left(\frac{1}{\alpha}\right)} + \mathcal{O}(1). \qquad (1.17)
\end{aligned}$$

Tomando agora n como em (1.16) e (1.17), a Desigualdade (1.12) nos diz que, dado $\epsilon > 0$, definindo $\epsilon' = \epsilon/\Delta$, para todo L suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned}
D_L(x_1, x_2) &\leq 2^{n(1+\epsilon')} = 2^{\Delta(1+\epsilon')\log_2 \log L} \\
&= (\log L)^{\Delta+\epsilon}. \qquad (1.18)
\end{aligned}$$

Mas como x_1 e x_2 foram escolhidos arbitrariamente, temos que dado $\epsilon > 0$, para L suficientemente grande

$$D_L \leq (\log L)^{\Delta+\epsilon}, \qquad (1.19)$$

que é a mesma cota superior do Teorema 1.

Para finalizar, mencionamos a mesma observação que foi feita ao final da seção anterior. A quantidade de eventos cuja ocorrência é necessária para este argumento continua sendo polinomial em L, enquanto que a probabilidade de não ocorrência de cada um deles, tem decaimento exponencial em L, como pode ser visto em (1.9).

1.3 Longo alcance escasso, $2d < s$

Trataremos agora o caso $s > 2d$. Como vimos na seção anterior, se $s > d$ temos que todo vértice possui grau finito no grafo aleatório $\mathbb{G} = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E})$ com probabilidade 1. Além disso, quando $s > 2d$, temos que não é possível realizarmos um esquema de conexões entre cubos como feito anteriormente, ou seja, é esperado que uma pequena quantidade de conexões de longo alcance esteja presente. Em [5], Berger mostra que D_L é assintoticamente linear com L, mais precisamente, mostra que $D_L \asymp L$ quase certamente. Aqui daremos uma argumentação para um resultado mais fraco, cuja afirmação é

$$\lim_{L\to\infty} \mathbb{P}\left(D_L \geq L^{\theta(s)}\right) = 1, \qquad (1.20)$$

para algum $\theta(s) \in (0, 1)$ e com $\lim_{s\to\infty} \theta(s) = 1$.

Dado L um inteiro não-negativo, considere um certo valor $k(L)$, para o qual queremos garantir que, com alta probabilidade, em $\mathbb{G}_L = (\Lambda_L, \mathbb{E}_L)$, não haja nenhuma conexão entre pares de vértices cuja distância é maior ou igual a $k(L)$. Precisamente, considere o evento

$$\mathcal{A}_L = \left\{ \{x, y\} \notin \mathbb{E}_L \ , \forall x, y \in \Lambda_L \text{ com } ||x - y|| \geq k(L) \right\}. \qquad (1.21)$$

Assumindo novamente que $p_{x,y} = 1 - e^{-||x-y||^{-s}}$ e $\Lambda_L = [1, L]^d \cap \mathbb{Z}^d$, temos que

$$||x - y|| \geq k(L) \implies 1 - p_{x,y} \geq e^{-k(L)^{-s}}. \tag{1.22}$$

Dessa forma, segue da independência entre os elos, que

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_L) = \prod_{||x-y|| \geq k(L)} \big(1 - p_{x,y}\big) \geq \prod_{||x-y|| \geq k(L)} e^{-k(L)^{-s}} \geq \exp\left\{\frac{-L^{2d}}{k(L)^s}\right\}, \tag{1.23}$$

uma vez que o total de pares de vértices $x, y \in \Lambda_L$ com $||x - y|| \geq k(L)$ pode ser cotado superiormente por $|\Lambda_L|^2 = L^{2d}$.

A desigualdade acima nos leva a tomar $k(L) = L^\alpha$, onde $\alpha = (2d+\delta(s))/s$ e $\delta(s) > 0$ é escolhido de forma que se tenha $\alpha < 1$, sendo assim, obtemos

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}_L) \geq e^{-L^{-\delta(s)}}, \tag{1.24}$$

ou seja, $\lim_{L\to\infty} \mathbb{P}(\mathcal{A}_L) = 1$.

Observe agora que a ocorrência do evento $\mathcal{A}_L$ implica que, para todo par de vértices distintos $x, y \in \Lambda_L$, é válida a desigualdade

$$D_L(x, y) \geq \frac{||x - y||}{k(L)}. \tag{1.25}$$

De fato, dados $x, y \in \Lambda_L$, por definição, existe um caminho $\gamma = x_0, x_1, \ldots, x_n$ em $\mathbb{G}_L$, onde $x_0 = x$, $x_n = y$ e $n = D_L(x, y)$. Sob a ocorrência de $\mathcal{A}_L$, como $x_{i-1} \sim x_i$, $i = 1, \ldots, n$, em $\mathbb{G}_L$, temos $||x_{i-1} - x_i|| < k(L)$, $i = 1, \ldots, n$. Portanto,

$$\begin{aligned} ||x - y|| &\leq ||x_0 - x_1|| + ||x_1 - x_2|| + \cdots + ||x_{n-1} - x_n|| \\ &\leq n \cdot k(L) = D_L(x, y) \cdot k(L). \end{aligned} \tag{1.26}$$

Uma vez que a Desigualdade (1.25) é satisfeita para todos os pares $x, y \in \Lambda_L$, escolhendo $x, y \in \Lambda_L$ de maneira que $||x - y|| = L$, a ocorrência de $\mathcal{A}_L$ nos fornece a cota inferior

$$D_L \geq D_L(x, y) \geq \frac{L}{k(L)} = L^{1-\alpha}. \tag{1.27}$$

Portanto, definindo $\theta(s) = 1 - \alpha$, temos que

$$\lim_{L\to\infty} \mathbb{P}\left(D_L \geq L^{\theta(s)}\right) \geq \lim_{L\to\infty} \mathbb{P}(\mathcal{A}_L) = 1. \tag{1.28}$$

Lembrando ainda que $\delta(s)$ pode ser escolhido tão próximo de zero quanto se queira, esta escolha pode ser feita de maneira que

$$\lim_{s\to\infty} \theta(s) = \lim_{s\to\infty} \left(1 - \frac{2d + \delta(s)}{s}\right) = 1, \tag{1.29}$$

o que conclui a argumentação para o resultado desejado.

Capítulo 2

O Diâmetro na caixa Λ_L com parâmetro $d < s < 2d$

Neste capítulo, apresentaremos de forma detalhada as ideias desenvolvidas por Marek Biskup em [8]. A primeira seção desenvolve toda a estrutura da renormalização via blocos que nos leva à cota superior do Teorema 1. Na segunda seção apresentaremos as ideias de Trapman em [18], que nos darão uma cota para a probabilidade $\mathbb{P}(D(0,x) \leq n)$ em função de n e $||x||$, a qual será utilizada para se obter a cota inferior do Teorema 1. Veremos ainda, na terceira e última seção, que esta probabilidade nos leva ao resultado que afirma que a bola raio r na métrica intrínseca do grafo aleatório, isto é, o conjunto dos pontos cuja distância química à origem é menor ou igual a r, de certa forma coincide com a bola de raio $\exp\{r^{\frac{1}{\Delta}+o(1)}\}$ na métrica euclidiana.

2.1 Uma cota superior para D_L

Nesta seção daremos uma demonstração para a cota superior do teorema principal deste texto, o Teorema 1.

2.1.1 Renormalização via blocos

Faremos agora a renormalização da caixa Λ_L utilizando a estrutura de blocos em multi-escalas. Para isto, temos a seguinte definição:

Definição 2.1.1. *Seja l um número inteiro positivo, um conjunto de vértices é dito um l-bloco, se é uma translação de uma caixa retangular do seguinte tipo: $\Upsilon_{m_1,...,m_d} = \{(x_1,...,x_d); 0 \leq x_i < m_i\}$, onde $m_i \in [l/2, l], i = 1, 2, ..., d$.*

Faremos uso do seguinte lema técnico, o qual nos diz que é sempre possível dividir um bloco maior em blocos menores, precisamente:

Lema 2.1.2. *Dados inteiros positivos $l' < l$, um l-bloco pode ser particionado em l'-blocos disjuntos.*

Demonstração. Iniciaremos nossa demonstração com o caso $d = 1$, o que é suficiente, pois podemos realizar a divisão independentemente em cada direção, e por fim basta tomarmos o produto cartesiano dessas divisões em cada dimensão.

Seja nosso l-bloco uma translação do retângulo $\Upsilon_m = \{(x_1) ; 0 \leq x_1 < m\}$, com $m \in [l/2, l]$. O Lema de Euclides afirma que existem q e r inteiros não negativos, onde $m = ql' + r$ e $0 \leq r < l'$. Desta forma, $l' \leq l' + r < 2l'$, logo $l'/2 \leq (l' + r)/2 < l'$. Portanto podemos dividir este retângulo Υ_m em $q - 1$ retângulos do tipo $\Upsilon_{l'} = \{(x_1) ; 0 \leq x_1 < l'\}$ e dois retângulos do tipo $\Upsilon_{(l'+r)/2} = \{(x_1) ; 0 \leq x_1 < (l' + r)/2\}$. □

Conhecida a definição de l-blocos e sabendo como dividi-los em blocos menores, escolheremos a seguir algumas constantes que nos darão as escalas para nossa renormalização e que satisfaçam certas condições que nos levarão à demonstração da cota superior do Teorema 1.

Enfim, fixados $\epsilon > 0$, $d < s < 2d$ e $\Delta = \log 2 / \log \big(2d/s\big)$, escolhemos s', γ e τ, sob as condições

$$s < s' < 2d \ , \ \frac{s'}{2d} < \gamma < 1 \tag{2.1}$$

$$\frac{\log 2}{\log\left(\frac{1}{\gamma}\right)} < \Delta + \epsilon \tag{2.2}$$

$$\gamma < \tau < 1 \ , \ \Delta > \frac{1}{2d\tau - s'} \tag{2.3}$$

Entretanto, é necessário mostrar que é possível realizar tais escolhas, para isto utilizaremos o seguinte lema:

Lema 2.1.3. *Seja $\Delta = \log 2/\log(2d/s)$, para $s \in (d, 2d)$, temos que $\Delta > \frac{1}{2d-s}$.*

Demonstração. Observe inicialmente que $\Delta = \log 2/\log\big(2d/s\big)$ implica

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{\log(\frac{2d}{s})}{\log 2} = \log_2\left(\frac{2d}{s}\right) = \log_2(2d) - \log_2(s).$$

Assim definimos $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = (2d - x) - \big(\log_2(2d) - \log_2(x)\big)$.

Observe que $f(2d) = 0$ e $f'(x) = -1 + 1/(x \log 2) < 0$ em $(d, 2d)$. Portanto se $s \in (d, 2d)$, temos $f(s) > f(2d) = 0$, donde se obtém $2d - s > 1/\Delta$. □

Com o lema acima, podemos escrever $2d - s = 1/\Delta + f(s)$. Portanto, se $s' < s + f(s)$, teremos que

$$2d - s' = 2d - s + (s - s') = \frac{1}{\Delta} + f(s) + (s - s') > \frac{1}{\Delta}.$$

E, por outro lado, seja s^* tal que $\log 2/\left(\log(2d/s^*)\right) = \Delta + \epsilon$. Note que $s^* > s$.

Então, escolhendo $s' < \min\{s + f(s)\ ,\ s^*\}$ teremos

$$d - s' > \frac{1}{\Delta} \text{ e } \frac{\log 2}{\log\left(\frac{2d}{s'}\right)} < \Delta + \epsilon.$$

Dessa maneira, sendo γ suficientemente próximo de $2d/s'$ e τ suficientemente próximo de 1, com $\gamma < \tau$, as relações (2.1), (2.2) e (2.3) são satisfeitas.

Por fim escolhemos η de forma que

$$\Delta > \eta > \frac{1}{2d\tau - s'} \tag{2.4}$$

e definimos

$$\theta = \max\left\{\eta\ ,\ \frac{1}{2d\gamma - s'}\right\}. \tag{2.5}$$

Fixado um número inteiro positivo L, definimos

$$k_0(L) = \max\{k \geq 1\ ;\ \lfloor L^{\gamma^k} \rfloor > (\log L)^\theta\}. \tag{2.6}$$

E considerando

$$L_0 = 2L, \tag{2.7}$$

$$L_k = \begin{cases} \lfloor L^{\gamma^k} \rfloor, & \text{se} \quad 0 < k \leq k_0 \\ \lfloor L^{\gamma^{k_0}\tau^{k-k_0}} \rfloor, & \text{se} \quad k > k_0 \end{cases} \tag{2.8}$$

definimos:

$$k_1(L) = \max\{k \geq 1\ ;\ L_k > (\log L)^\eta\} \tag{2.9}$$

$$k_2(L) = \min\{k \geq 1\ ;\ L_k < (\log L)^\epsilon\} \tag{2.10}$$

Fazemos aqui a pequena observação de que, apesar de $k_0(L), k_1(L)$ e $k_2(L)$ serem constantes que dependem de L, iremos denotá-las somente por k_0, k_1 e k_2, exceto quando necessário. A seguir, faremos uma pequena análise a respeito destas constantes.

Seja ζ o número que satisfaça a equação $L^{\gamma^\zeta} = (\log L)^\theta$. Aplicando a função logaritmo duas vezes em ambos lados dessa equação obtemos a seguinte cadeia de igualdades

$$\begin{aligned} L^{\gamma^\zeta} &= (\log L)^\theta \\ \gamma^\zeta(\log L) &= \theta \log\log L \\ \zeta \log\gamma + \log\log L &= \log\theta + \log\log\log L \\ \zeta &= \frac{\log\log L - (\log\log\log L + \log\theta)}{\log\left(\frac{1}{\gamma}\right)}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Portanto, segue da definição de k_0 em (2.6), que

$$k_0 = \left\lfloor \frac{\log\log L - (\log\log\log L + \log\theta)}{\log\left(\frac{1}{\gamma}\right)} - 1 \right\rfloor = \mathcal{O}(\log\log L). \tag{2.12}$$

Utilizando agora as definições de k_1 e k_2 em (2.9) e (2.10) respectivamente, obtemos

$$L^{\gamma^{k_0}\tau^{k_2-k_0}} < (\log L)^{\epsilon} < (\log L)^{\eta} < L^{\gamma^{k_0}\tau^{k_1-k_0}}. \tag{2.13}$$

Combinando as equações (2.13) e (2.6), obtemos as implicações

$$\begin{aligned}
(\log L)^{\epsilon} < (\log L)^{\theta\tau^{(k_2-1)-k_0}} &< (\log L)^{\theta\tau^{(k_1+1)-k_0}} < (\log L)^{\eta} \\
\Longrightarrow \quad & \epsilon < \theta\tau^{(k_2-1)-k_0} < \theta\tau^{(k_1+1)-k_0} < \eta \\
\Longrightarrow \quad & \frac{\theta\tau^{k_1-k_0+1}}{\theta\tau^{k_2-k_0-1}} < \frac{\eta}{\epsilon} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\tau^{k_1-k_0+1}}{\tau^{k_2-k_0-1}} < \frac{\eta}{\epsilon}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Aplicando agora a função logaritmo em ambos lados da última inequação acima, obtemos

$$\begin{aligned}
\big[(k_2 - k_0 - 1) - (k_1 - k_0 + 1)\big] \log\left(\frac{1}{\tau}\right) &< \log\left(\frac{\eta}{\epsilon}\right) \\
k_2 - k_1 &< \log\left(\frac{\eta}{\epsilon}\right) \frac{1}{\log\left(\frac{1}{\tau}\right)} + 2.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Isto é, $k_2 - k_1$ pode ser cotado uniformemente em L. Logo podemos escolher $\delta > 0$ suficientemente próximo de 1 de tal forma que

$$(1-\delta)^{k_2(L)-k_1(L)} > \frac{1}{2}, \qquad \forall L. \tag{2.16}$$

De forma análoga, se mostra que existe uma constante $M > 0$ tal que, para todo inteiro positivo L, se tenha

$$k_2(L) - k_0(L) < M. \tag{2.17}$$

Agora que já temos nossas escalas e uma certa análise feita sobre elas, podemos construir a estrutura de blocos e definições sobre as quais trabalharemos. Fixado um inteiro não-negativo L, a caixa Λ_L é um L_0-bloco, o qual pode ser particionado em L_1-blocos. Indutivamente para $k = 1, 2, ..., k_2 - 1$, cada L_k-bloco é particionado em L_{k+1}-blocos. A definição a seguir faz uma classificação entre os blocos.

Definição 2.1.4. *Todo L_{k_2}-bloco é um bloco* bom. *Para $k = k_1, ..., k_2 - 1$, um L_k-bloco é* bom *se:*

1. *Pelo menos uma fração $(1-\delta)$ dos L_{k+1}-blocos nele contidos são bons.*

2. *Dados dois L_{k+1}-blocos bons distintos, digamos Γ e Γ', nele contidos, existem $x \in \Gamma$ e $y \in \Gamma'$ onde $x \sim y$ no grafo aleatório $\mathbb{G}_L$ e ainda todos os L_j-blocos, com $j = k+1, ..., k_2$, aos quais cada um pertence são bons.*

Se um L_k-bloco não cumpre pelo menos uma das propriedades acima, dizemos que este L_k-bloco é ruim.

Faremos agora uma distinção entre os tipos de vértices.

Definição 2.1.5. *Um vértice $x \in \Lambda_L$ é dito um vértice* bom *se todo L_k-bloco, com $k = k_1, ..., k_2$, contendo x é um bloco bom. Caso contrário x é dito um vértice* ruim.

Definição 2.1.6. *O conjunto dos vértices bons é denotado por $\mathcal{B}_L = \{x \in \Lambda_L;$ x é bom $\}$, enquanto que o conjunto dos vértices ruins é denotado por $\Lambda_L \backslash \mathcal{B}_L$.*

2.1.2 Trabalhando sobre vértices bons

Nesta seção veremos que à medida que L cresce, ocorre com alta probabilidade que uma fração considerável de vértices em Λ_L são bons. E devido a suas propriedades, veremos que estes satisfazem a cota superior do Teorema 1. Para isto iniciamos esta seção com os alguns lemas técnicos.

Lema 2.1.7. *Dado L_k-bloco bom Γ, com $k = k_1, ..., k_2$, se este só está contido em blocos bons, então pelo menos metade de seus vértices são bons.*

Demonstração. Provaremos por indução a seguinte afirmação: Dado Γ um L_k-bloco como no lema acima, então pelo menos uma fração $(1-\delta)^{k_2-k}$ de seus vértices são bons.

De fato, para $k = k_2$, segue das definições (2.1.4) e (2.1.5) que todo vértice em Γ é bom (lembre-se que Γ só está contido em blocos bons), logo vale a afirmação.

Supondo válido para $k+1$, sendo Γ um L_k-bloco bom, pelo menos uma fração $(1-\delta)$ de seus L_{k+1}-blocos são bons, logo pela hipótese de indução em cada um desses L_{k+1}-blocos ao menos uma fração $(1-\delta)^{k_2-(k+1)}$ de vértices são bons, portanto em Γ teremos ao menos uma fração $(1-\delta)(1-\delta)^{k_2-(k+1)} = (1-\delta)^{k_2-k}$ de vértices bons.

Para finalizarmos, basta notar que devido a (2.16) e pelo fato de $k \geq k_1$, temos $(1-\delta)^{k_2-k} \geq (1-\delta)^{k_2-k_1} > 1/2$. □

Sendo $s' \in (s, 2d)$ o número escolhido no início dessa seção, segue da definição de $p_{x,y}$ no Teorema 1, que existe $R > 0$ onde:

$$||x-y|| > R \implies p_{x,y} \geq 1 - e^{||x-y||^{-s'}}. \tag{2.18}$$

Definição 2.1.8. *Dado um L_k-bloco Γ, definimos o conjunto $\mathcal{B}_\Gamma = \{x \in \Gamma\ ;\ x \in \mathcal{B}_L$ e $||x-y|| > R,\ \ \forall y \notin \Gamma\}$, que denota o conjunto de vértices bons e que estão à distância pelo menos R da borda de Γ, onde R é tomado como em (2.18).*

Lema 2.1.9. *Seja L suficientemente grande de modo que $L_{k_2} > 2^{d+3}dR$ e seja Γ satisfazendo as hipóteses do Lema 2.1.7, então pelo menos um quarto dos vértices de Γ pertencem ao conjunto $\mathcal{B}_\Gamma$.*

Demonstração. Considerando o conjunto $\mathcal{R}_\Gamma = \{x \in \Gamma \ ; \ ||x-y|| < R, \quad \text{para algum } y \notin \Gamma\}$, têm-se que $|\mathcal{R}_\Gamma| \leq 2dR(L_k)^{d-1}$.

Para ver isto, basta notar que escolhida uma das $2d$ faces de Γ, a quantidade de vértices que está a uma distância menor ou igual a R, dessa face é menor ou igual a $(L_k)^{d-1}R$.

Por outro lado, $|\Gamma| \geq (L_k/2)^d$. O que nos leva a

$$\frac{|\mathcal{R}_\Gamma|}{|\Gamma|} \leq \frac{2^{d+1}dR}{L_k} \leq \frac{1}{4}, \tag{2.19}$$

uma vez que $L_k \geq L_{k_2} \geq 2^{d+3}dR$.

O Lema 2.1.7 nos diz que pelo menos metade dos vértices de Γ são bons, e pela observação acima no máximo um quarto dos vértices de Γ estão em $\mathcal{R}_\Gamma$. Logo pelo menos $1/2 - 1/4 = 1/4$ dos vértices de Γ são bons e não estão em $\mathcal{R}_\Gamma$, isto é, estão em $\mathcal{B}_\Gamma$. □

A partir de agora, estaremos sempre considerando que L é suficientemente grande de modo que satisfaz a condição $L_{k_2} > 2^{d+3}dR$. De posse destes lemas, vamos analisar a probabilidade de um dado bloco ser ruim.

Proposição 2.1.10. *Dado um L_k-bloco, com $k = k_1, ..., k_2$, seja ξ_k o evento onde este bloco seja bom. Existem constantes c_1 e $c_2 \in (0, \infty)$ tais que:*

$$\mathbb{P}\left(\xi_k^c\right) \leq c_1 e^{-c_2 L_k^{2d\tau - s'}}. \tag{2.20}$$

Demonstramos esta proposição com o auxílio do seguite lema:

Lema 2.1.11. *Para $k = k_1, ..., k_2$ seja a_k o valor máximo de $\mathbb{P}\left(\xi_k^c\right)$ sobre todos os L_k-blocos. Então existem constantes c_3 e $c_4 \in (0, \infty)$ para as quais estes valores obedecem à seguinte relação recursiva:*

$$a_k \leq (2a_{k+1})^{c_3 L_k^{d(1-\tau)}} + L_k^{2d} e^{-c_4 L_k^{2d\tau - s'}}, \qquad k = k_1, ..., k_2 - 1 \ \text{e} \ a_{k_2} = 0.$$

Demonstração. Como todo L_{k_2}-bloco é bom, temos que $a_{k_2} = 0$. Seja Γ_k um L_k-bloco, com $k = k_1, ..., k_2 - 1$, considere o evento A_k onde pelo menos uma fração $(1 - \delta)$, de L_{k+1}-blocos contidos em Γ_k, sejam bons. Assim

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\xi_k^c) &= \mathbb{P}(\xi_k^c | A_k^c)\mathbb{P}(A_k^c) + \mathbb{P}(\xi_k^c | A_k)\mathbb{P}(A_k) \\ &\leq \mathbb{P}(A_k^c) + \mathbb{P}(\xi_k^c | A_k). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Seja $\mathcal{R}_k$ a variável aleatória que conta o total de L_{k+1}-blocos ruins contidos em Γ_k, e seja η_k o total de L_{k+1}-blocos contidos em Γ_k. Como a probabilidade de cada L_{k+1}-bloco ser ruim é cotada por a_{k+1}, temos que $\mathbb{P}(\mathcal{R}_k > \delta\eta_k) \leq \mathbb{P}(X > \delta\eta_k)$, onde $X \sim \text{bin}(\eta_k, a_{k+1})$. Portanto

$$\mathbb{P}(A_k^c) \leq \mathbb{P}(\mathcal{R}_k > \delta\eta_k) \leq \mathbb{P}(X > \delta\eta_k). \tag{2.22}$$

Utilizando a desigualdade exponencial de Chebyschev, temos

$$\mathbb{P}(X > \delta\eta_k) \leq e^{-t(\delta\eta_k)}\mathbb{E}(e^{Xt}), \quad \forall t > 0. \tag{2.23}$$

Mas como $X \sim$ bin(η_k, a_{k+1}), podemos calcular

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{Xt}) &= \sum_{m=0}^{\eta_k} e^{tm}\binom{\eta_k}{m}a_{k+1}^m(1-a_{k+1})^{\eta_k - m} \\
&= \sum_{m=0}^{\eta_k}\binom{\eta_k}{m}(e^t a_{k+1})^m(1-a_{k+1})^{\eta_k-m} \\
&= (e^t a_{k+1} + (1-a_{k+1}))^{\eta_k}. \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

Retomando a equação (2.23), obtemos

$$\mathbb{P}(X > \delta\eta_k) \leq e^{-t(\delta\eta_k)}(e^t a_{k+1} + (1-a_{k+1}))^{\eta_k}, \quad \forall t > 0. \tag{2.25}$$

Tomando t de forma que $e^{-t} = a_{k+1}$, a equação acima se torna

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X > \delta\eta_k) &\leq a_{k+1}^{(\delta\eta_k)}(1 + (1-a_{k+1}))^{\eta_k} \\
&\leq (2a_{k+1}^{\delta})^{\eta_k}. \qquad (2.26)
\end{aligned}$$

Da definição 2.8 temos que $L_{k+1} \geq \tilde{c}L_k^{\gamma}$, se $k \leq k_0$ e $L_{k+1} \geq \tilde{c}L_k^{\tau}$, se $k > k_0$ para algum $\tilde{c} \in (0,\infty)$. Como cada L_k-bloco tem comprimento no máximo L_k e cada L_{k+1}-bloco tem comprimento no mínimo $L_{k+1}/2$ em cada uma de suas dimensões, seque que

$$\eta_k \leq \left(\frac{L_k}{\frac{L_{k+1}}{2}}\right)^d \leq 2^d\left(\frac{L_k}{\tilde{c}L_k^{\tau}}\right)^d = \left(\frac{2}{\tilde{c}}\right)^d L_k^{d(1-\tau)}. \tag{2.27}$$

Combinando as equações (2.22), (2.26) e (2.27) obtemos $\mathbb{P}(A_k^c) \leq (2a_{k+1})^{c_3 L_k^{d(1-\tau)}}$.

Considere agora Γ_{k+1} um L_{k+1}-bloco bom contido em Γ_k. Pelo Lema 2.1.9 temos

$$\left|\mathcal{B}_{\Gamma_{k+1}}\right| \geq \frac{1}{4}\left|\Gamma_{k+1}\right| \geq \frac{1}{4}\left(\frac{L_{k+1}}{2}\right)^d = aL_{k+1}^d. \tag{2.28}$$

Assim, dados dois L_{k+1}-blocos bons e distintos, digamos Γ_{k+1}^1 e Γ_{k+1}^2, contidos em Γ_k, sendo $\{\Gamma_{k+1}^1 \nsim \Gamma_{k+1}^2\}$ o evento em que Γ_{k+1}^1 e Γ_{k+1}^2 não satisfaçam a condição *2* da definição (2.1.4), obtemos

$$\mathbb{P}(\Gamma_{k+1}^1 \nsim \Gamma_{k+1}^2) = \prod_{\substack{x \in \Gamma_{k+1}^1 \cap \mathcal{B}_L \\ y \in \Gamma_{k+1}^2 \cap \mathcal{B}_L}} \left(1 - p_{x,y}\right) \leq \prod_{\substack{x \in \mathcal{B}_{\Gamma_{k+1}^1} \\ y \in \mathcal{B}_{\Gamma_{k+1}^2}}} \left(1 - p_{x,y}\right). \tag{2.29}$$

Mas observe que

$$\begin{aligned}
x \in \mathcal{B}_{\Gamma_{k+1}^1} \text{ e } y \in \mathcal{B}_{\Gamma_{k+1}^2} &\implies ||x-y|| > R \\
&\implies p_{x,y} \geq 1 - e^{-||x-y||^{-s'}} \\
&\implies 1 - p_{x,y} \leq e^{-||x-y||^{-s'}} \leq e^{-L_k^{-s'}}, \qquad (2.30)
\end{aligned}$$

uma vez que $x, y \in \Gamma_k$ implica $||x-y|| < L_k$. Assim, a desigualdade (2.29) se torna

$$\mathbb{P}(\Gamma^1_{k+1} \nsim \Gamma^2_{k+1}) \leq \left(e^{-L_k^{-s'}}\right)^{\left|\mathcal{B}_{\Gamma^1_{k+1}}\right|\left|\mathcal{B}_{\Gamma^2_{k+1}}\right|}. \tag{2.31}$$

Utilizando (2.28) e sendo $\tilde{c}$ como em (2.27), segue que

$$\mathbb{P}(\Gamma^1_{k+1} \nsim \Gamma^2_{k+1}) \leq \exp\left\{\frac{-a^2 L_{k+1}^{2d}}{L_k^{-s'}}\right\} \leq \exp\left\{\frac{-a^2 \tilde{c} L_k^{2d\tau}}{L_k^{-s'}}\right\} = e^{-c_4 L_k^{2d\tau - s'}}. \tag{2.32}$$

Observe agora que o total de pares de L_{k+1}-blocos distintos e contidos em Γ_k é menor que L_k^{2d}, assim concluimos a partir da desigualdade acima que

$$\mathbb{P}(\xi_k^c | A_k) \leq L_k^{2d} e^{-c_4 L_k^{2d\tau - s'}}. \tag{2.33}$$

Finalmente, por (2.21) obtemos

$$a_k \leq (2a_{k+1})^{c_3 L_k^{d(1-\tau)}} + L_k^{2d} e^{-c_4 L_k^{2d\tau - s'}}, \tag{2.34}$$

como queriamos demonstrar. □

Agora com o auxílio da relação de recorrência (2.34) obtida no lema acima, podemos provar a Proposição 2.1.10.

Demonstração da Proposição 2.1.10. Utilizaremos nesta demonstração a técnica de indução reversa, isto é, se uma sentença é válida para $k+1$ então é válida para k. O objetivo é encontrar constantes c_5 e $c_2 \in (0, \infty)$ de maneira que $a_k \leq c_5^{k_2 - k} e^{-c_2 L_k^{2d\tau - s'}}$ para todo $k = k_1, \ldots, k_2$, uniformemente em L. Note inicialmente que, quando $k = k_2$, temos $a_{k_2} = 0$ e portanto esta desigualdade é satisfeita para quaisquer que sejam os valores c_5 e $c_2 \in (0, \infty)$. Ou seja, o primeiro passo da indução está garantido.

Fixados c_5 e $c_2 \in (0, \infty)$, dado $k \in \{k_1, ..., k_2 - 1\}$, adimitindo como verdade que $a_{k+1} \leq c_5^{k_2-(k+1)} e^{-c_2 L_{k+1}^{2d\tau - s'}}$, partindo de (2.34), obtemos

$$\begin{aligned} a_k &\leq (2a_{k+1})^{c_3 L_k^{d(1-\tau)}} + L_k^{2d} e^{-c_4 L_k^{2d\tau - s'}} \\ &\leq \left(2 c_5^{k_2-k-1} e^{-c_2 L_{k+1}^{2d\tau - s'}}\right)^{c_3 L_k^{d(1-\tau)}} + L_k^{2d} e^{-c_4 L_k^{2d\tau - s'}} \\ &= \left(2 c_5^{k_2-k-1}\right)^{c_3 L_k^{d(1-\tau)}} e^{-(c_2 c_3) L_{k+1}^{2d\tau - s'} L_k^{d(1-\tau)}} + L_k^{2d} e^{-c_4 L_k^{2d\tau - s'}}. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Entretanto, sendo $\tilde{c}$ como utilizado em (2.27), temos que

$$\begin{aligned} e^{-(c_2 c_3) L_{k+1}^{2d\tau - s'} L_k^{d(1-\tau)}} &\leq e^{-(\tilde{c} c_2 c_3) L_k^{\tau(2d\tau - s') + d(1-\tau)}} \\ &\leq e^{-(\tilde{c} c_2 c_3) L_k^{2d\tau - s'}}, \end{aligned} \tag{2.36}$$

uma vez que $s' \in (d, 2d)$ e $0 \leq \tau \leq 1$ implicam $d > 2d\tau - s'$ e portanto $\tau(2d\tau - s') + d(1-\tau) > 2d\tau - s'$.

Note que se c_5 foi fixado de maneira que $c_5 > 2$, temos $2c_5^{k_2-k-1} \leq c_5^{k_2-k}$. Portanto podemos escrever

$$\left(2c_5^{k_2-k-1}\right)^{c_3 L_k^{d(1-\tau)}} e^{-(\tilde{c}c_2c_3)L_k^{2d\tau-s'}} \leq c_5^{k_2-k} e^{-c_2 L_k^{2d\tau-s'}} \left[c_5^{1-c_3 L_k^{d(1-\tau)}} e^{-c_2(\tilde{c}c_3-1)L_k^{2d\tau-s'}} \right]$$

e também,

$$L_k^{2d} e^{-c_4 L_k^{2d\tau-s'}} = c_5^{k_2-k} e^{-c_2 L_k^{2d\tau-s'}} \left[\frac{L_k^{2d}}{c_5^{k_2-k}} e^{-(c_4-c_2)L_k^{2d\tau-s'}} \right].$$

Observe agora que se $c_2 < c_4$, devido à $\tilde{c}c_3 > 1$ — ver (2.27) —, os dois termos entre colchetes nos itens acima se tornam decrescentes em L, portanto para valores de c_5 suficientemente grande, a soma destes dois termos se tornam menor que 1 para todo L. Sendo assim, c_2 e c_5 podem ser fixados de maneira que se a sentença desejada é válida para $k+1$ então, por (2.35), é também válida para k. O que encerra a demonstração por indução reversa, da existência de c_5 e $c_2 \in (0, \infty)$, tais que $a_k \leq c_5^{k_2-k} e^{-c_2 L_k^{2d\tau-s'}}$ para todo $k = k_1, \ldots, k_2$, uniformemente em L.

E para concluir a demonstração da proposição basta tomar $c_1 = c_5^{\mathcal{R}}$, onde $\mathcal{R}$ é escolhido de forma que $k_2 - k_1 < \mathcal{R}$ — ver (2.15). $\square$

Da Proposição 2.1.10, segue diretamente o seguinte corolário:

Corolário 2.1.12. *Seja $\mathcal{F}_L$ o evento onde todo L_{k_1}-bloco seja um bloco bom. Então* $\lim_{L\to\infty} \mathbb{P}(\mathcal{F}_L) = 1$.

Demonstração. Vamos primeiramente estimar $\mathbb{P}(\mathcal{F}_L^c)$, isto é, a probabilidade de ao menos um L_{k_1}-bloco ser ruim.

Observe que o número total de tais L_{k_1}-blocos é menor que que $(2L)^d$. Pela Proposição 2.1.10, temos que a probabilidade de cada um desses L_{k_1}-blocos ser ruim é cotado por $c_1 e^{-c_2 L_{k_1}^{2d\tau-s'}}$. Segue da propriedade de subaditividade que

$$\lim_{L\to\infty} \mathbb{P}(\mathcal{F}_L^c) \leq \lim_{L\to\infty} (2L)^d c_1 e^{-c_2 L_{k_1}^{2d\tau-s'}}. \tag{2.37}$$

Com a definição de k_1 dada em (2.9), a Desigualdade (2.37) se torna

$$\lim_{L\to\infty} \mathbb{P}(\mathcal{F}_L^c) \leq \lim_{L\to\infty} (2L)^d c_1 e^{-c_2 (\log L)^{\eta(2d\tau-s')}} = 0, \tag{2.38}$$

uma vez que a condição (2.4) implica que $\eta(2d\tau - s') > 1$. $\square$

Veremos agora que a segunda condição da Definição 2.1.4, também será satisfeita com alta probabilidade nas escalas $k = 0, 1, ..., k_1 - 1$, lembrando que nestas escalas não é feita a classificação de blocos bons ou ruins.

Definição 2.1.13. *Seja Γ um L_k-bloco, com $k = 0, 1, ..., k_1 - 1$. Dizemos que Γ é um bloco* bem comportado *se, para quaisquer dois L_{k+1}-blocos distintos Γ^1 e Γ^2, contindos em Γ, a seguinte condição é satisfeita:*

- *Existem $x \in \Gamma^1 \cap \mathcal{B}_L$ e $y \in \Gamma^2 \cap \mathcal{B}_L$ para os quais $x \sim y$ em $\mathbb{G}_L$.*

Proposição 2.1.14. *Dado $k = 0, 1, ..., k_1 - 1$, considere o evento $\mathcal{F}_{L,k}$, onde todo L_k-bloco é bem comportado. Então:*

$$\lim_{L\to\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{k_1-1} \mathcal{F}_{L,k}\right) = 1.$$

Demonstração. Dado um L_k-bloco Γ, seja Υ_Γ o evento onde Γ é bem comportado. Vamos analisar a probabilidade $\mathbb{P}(\Upsilon_\Gamma^c|\mathcal{F}_L)$.

Seja Γ^1 um L_{k+1}-bloco contido em Γ, como para $k = 0, 1, ..., k_1 - 1$ temos $k+1 \leq k_1$, Γ^1 pode ser visto como a união dos L_{k_1}-blocos nele contidos. Nomeando os L_{k_1}-blocos por $\Gamma_1, \Gamma_2, ...$, e sendo $I_{\Gamma^1} = \{\lambda\ ;\ \Gamma_\lambda \subset \Gamma^1\}$, escrevemos

$$\Gamma^1 = \bigcup_{\lambda\in I_{\Gamma^1}} \Gamma_\lambda.$$

Como no evento $\mathcal{F}_L$, todo L_{k_1}-bloco é bom, segue do Lema (2.1.9) que $\left|\mathcal{B}_{\Gamma_\lambda}\right| \geq |\Gamma_\lambda|/4$ para cada $\lambda \in I_{\Gamma^1}$, e como claramente

$$\bigcup_{\lambda\in I_{\Gamma^1}} \mathcal{B}_{\Gamma_\lambda} \subseteq \mathcal{B}_{\Gamma^1},$$

temos que

$$\left|\mathcal{B}_{\Gamma_\lambda}\right| \geq \sum_{\lambda\in I_{\Gamma^1}} |\mathcal{B}_{\Gamma^\lambda}| \geq \frac{1}{4}\sum_{\lambda\in I_{\Gamma^1}} |\Gamma_\lambda| = \frac{1}{4}\left|\Gamma^1\right|. \tag{2.39}$$

Portanto, dados dois L_{k+1}-blocos distintos Γ^1 e Γ^2 contidos em Γ, o evento em que Γ^1 e Γ^2 não satisfazem a condição da Definicão 2.1.13, denotado por $\{\Gamma^1 \nsim \Gamma^2\}$, é tal que

$$\mathbb{P}\left(\Gamma^1 \nsim \Gamma^2|\mathcal{F}_L\right) \;=\; \prod_{\substack{x\in\Gamma^1\cap\mathcal{B}_L\\ y\in\Gamma^2\cap\mathcal{B}_L}} \left(1-p_{x,y}\right) \;\leq\; \prod_{\substack{x\in\mathcal{B}_{\Gamma^1}\\ y\in\mathcal{B}_{\Gamma^2}}} \left(1-p_{x,y}\right). \tag{2.40}$$

Procedendo com as mesmas ideias utilizadas em (2.31) e (2.32), com a desigualdade (2.39) obtemos

$$\mathbb{P}\left(\Gamma^1 \nsim \Gamma^2|\mathcal{F}_L\right) \leq \left(e^{-L_k^{-s'}}\right)^{|\Gamma^1||\Gamma^2|} \leq \exp\left\{\frac{-a^2 L_{k+1}^{2d}}{L_k^{-s'}}\right\}. \tag{2.41}$$

Relembrando agora a definição dos L_k's em (2.8), temos que $L_{k+1} \geq \tilde{c}L_k^{\gamma}$, se $k \leq k_0$ e $L_{k+1} \geq \tilde{c}L_k^{\tau}$, se $k > k_0$ para algum $\tilde{c} \in (0, \infty)$. Portanto, retomando (2.41),

$$\mathbb{P}\left(\Gamma^1 \nsim \Gamma^2 | \mathcal{F}_L\right) \leq \begin{cases} \exp\left\{\dfrac{-\tilde{c}a^2 L_k^{2d\gamma}}{L_k^{-s'}}\right\} = e^{-c_4 L_k^{2d\gamma - s'}}, \text{ se } k \leq k_0; \\ \\ \exp\left\{\dfrac{-\tilde{c}a^2 L_k^{2d\tau}}{L_k^{-s'}}\right\} = e^{-c_4 L_k^{2d\tau - s'}}, \text{ se } k > k_0. \end{cases} \tag{2.42}$$

Pelas definições de k_1 em (2.9) e de k_0 em (2.6), temos que $0 \leq k \leq k_0$ implica $L_k > (\log L)^{\theta}$ e $k_0 < k < k_1$ implica $L_k > (\log L)^{\eta}$, assim

$$\mathbb{P}\left(\Gamma^1 \nsim \Gamma^2 | \mathcal{F}_L\right) \leq \begin{cases} e^{-c_4 (\log L)^{\theta(2d\gamma - s')}} & , \text{ se } k \leq k_0; \\ e^{-c_4 (\log L)^{\eta(2d\tau - s')}} & , \text{ se } k > k_0. \end{cases} \tag{2.43}$$

Sendo $\alpha = \min\{\eta(2d\tau - s'), \theta(2d\gamma - s')\}$, segue de (2.4) e (2.5) que $\alpha > 1$. E como o número de pares de L_{k+1}-blocos contidos em Γ pode ser cotado por $(2L)^{2d}$, com a desigualdade (2.43) obtemos

$$\mathbb{P}(\Upsilon_{\Gamma}^c | \mathcal{F}_L) \leq (2L)^d e^{-c_4 (\log L)^{\alpha}}. \tag{2.44}$$

Agora, o total de L_k-blocos em Λ_L também pode ser contado por $(2L)^d$, assim $\mathbb{P}(\mathcal{F}_{L,k}^c | \mathcal{F}_L) \leq (2L)^{3d} e^{-c_4 (\log L)^{\alpha}}$. E por independência entre os eventos $\mathcal{F}_{L,k}$, para $k = 0, 1, \ldots, k_1 - 1$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{k_1 - 1} \mathcal{F}_{L,k}^c \;\middle|\; \mathcal{F}_L\right) \leq k_1(L)(2L)^{3d} e^{-c_4 (\log L)^{\alpha}}. \tag{2.45}$$

Sendo $\alpha > 1$ e como, de forma análoga a (2.12), podemos ver que $k_1(L) = \mathcal{O}(\log \log L)$, então obtemos

$$\lim_{L \to \infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{k_1 - 1} \mathcal{F}_{L,k}^c \;\middle|\; \mathcal{F}_L\right) = 0.$$

Por fim, segue do Corolário 2.1.12, que

$$\lim_{L \to \infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{k_1 - 1} \mathcal{F}_{L,k}\right) = \lim_{L \to \infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{k_1 - 1} \mathcal{F}_{L,k} \;\middle|\; \mathcal{F}_L\right) = 1, \tag{2.46}$$

o que conclui essa demonstração. □

Finalmente provaremos agora que os vértices bons satisfazem a cota superior do Teorema 1.

Proposição 2.1.15. *Dados $x, y \in \mathcal{B}_L$, então sob a hipótese de ocorrência do evento*

$$\bigcap_{k=0}^{k_1-1} \mathcal{F}_{L,k}$$

definido na Proposição 2.1.14, temos que $D_L(x,y) \leq (\log L)^{\Delta+\epsilon}$.

Demonstração. Novamente utilizaremos a técnica de indução reversa, dessa vez para mostrar a seguinte afirmação: Se x, y são vértices bons que pertençam a um mesmo L_k-bloco, então

$$D_L(x,y) \leq (2^{k_2-k} - 1) + 2^{k_2-k} d(\log L)^{\epsilon}. \tag{2.47}$$

Para isto, veja que se $x, y \in \Gamma_{k_2}$, onde Γ_{k_2} é um L_{k_2}-bloco, então

$$D_L(x,y) \leq ||x-y|| \leq dL_{k_2} \leq d(\log L)^{\epsilon}, \tag{2.48}$$

portanto, a desigualdade (2.47) é válida se $k = k_2$.

Agora supondo válida a afirmação para algum $k+1$ com $k \geq k_1$, sejam $x, y \in \Gamma_k$ vértices bons, onde Γ_k é um L_k-bloco. Como x e y são bons, necessariamente Γ_k é um L_k-bloco bom.

Sendo Γ_x e Γ_y, os L_{k+1}-blocos contidos em Γ_k que contêm x e y respectivamente, pelo mesmo motivo observado acima, Γ_x e Γ_y são bons. Assim, caso $\Gamma_x \neq \Gamma_y$, segue da condição *2* da Definição 2.1.4 que existem $x' \in \Gamma_x \cap \mathcal{B}_L$ e $y' \in \Gamma_y \cap \mathcal{B}_L$ onde $x \sim y$ em $\mathbb{G}_L$.

Com o uso da desigulade triangular escrevemos

$$D_L(x,y) \leq D_L(x,x') + D_L(x',y') + D_L(y',y). \tag{2.49}$$

Mas sendo a afirmação válida para $k+1$, do fato que x e $x' \in \Gamma_x$ e também y e $y' \in \Gamma_y$, obtemos que

$$\begin{aligned} D_L(x,x') + D_L(y,y') &\leq 2\left[2^{k_2-(k+1)} - 1 + 2^{k_2-(k+1)} d(\log L)^{\epsilon}\right] \\ &= (2^{k_2-k} - 2) + 2^{k_2-k} d(\log L)^{\epsilon}. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Dessa forma, segue do fato que $x \sim y$ em $\mathbb{G}_L$ e da desigualdade (2.49) que

$$\begin{aligned} D_L(x,y) &\leq (2^{k_2-k} - 2) + 2^{k_2-k} d(\log L)^{\epsilon} + 1 \\ &= (2^{k_2-k} - 1) + 2^{k_2-k} d(\log L)^{\epsilon}. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Caso $\Gamma_x = \Gamma_y$, segue diretamente da hipótese de indução que a afirmação (2.47) é válida para o par x, y e para $k+1$, uma vez que já estão contidos em um mesmo L_{k+1}-bloco, e portanto é também válida para k. Isto encerra a demonstração de nossa afirmação para $k \geq k_1$. Lembrando agora que sob a ocorrência do evento $\bigcap_{k=0}^{k_1-1} \mathcal{F}_{L,k}$ temos que todo L_k-bloco, com $k = 0, \ldots, k_1 - 1$, é bem comportado e portanto, podemos utilizar a condição da Proposição 2.1.14 e com a mesma ideia acima prosseguimos com a demonstração por indução. Então está demonstrada nossa afirmação.

Lembrando que Λ_L é o L_0-bloco, dados $x, y \in \mathcal{B}_L$, a desigualdade (2.47) com $k = 0$, se torna

$$D_L(x,y) \leq (2^{k_2} - 1) + 2^{k_2} d(\log L)^{\epsilon} \leq 2^{k_2}[d(\log L)^{\epsilon} + 1]. \tag{2.52}$$

Recorrendo agora a (2.12) e (2.17) realizamos o seguinte cálculo:

$$2^{k_2} = 2^{k_2 - k_0} 2^{k_0} \leq 2^M 2^{\frac{\log_2 \log L}{\log_2(\frac{1}{\gamma})}} \leq 2^M (\log L)^{\log_2(\frac{1}{\gamma})} \leq 2^M (\log L)^{\Delta + \epsilon}, \tag{2.53}$$

onde nesta última igualdade utilizamos a condição (2.2). E portanto, (2.52), se torna

$$D_L(x,y) \leq (\log L)^{\Delta+\epsilon} 2^M [d(\log L)^{\epsilon} + 1] \ll (\log L)^{\Delta + 3\epsilon}. \tag{2.54}$$

Isto encerra a demonstração. □

2.1.3 Lidando com os vértices ruins

Mostraremos agora que todo vértice ruim está próximo de um vértice bom.

Definição 2.1.16. *Seja $x \in \Lambda_L \backslash \mathcal{B}_L$ um vértice ruim e $\delta_1 = (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{Z}^d$, definimos a distância mínima de x a um vértice bom ao longo direção de δ_1, por $k_x = \min\{k \geq 1 \ ; (x + k\delta_1) \in \mathcal{B}_L\}$. Denotamos por $x' = x + k_x \delta_1$ o vértice que minimiza esta distância.*

Note que, a fim de que se tenha $k_x > t$ para um dado $t \in (0, \infty)$, é necessário que exista uma família de L_k-blocos disjuntos, com $k = k_1, ..., k_2 - 1$, alinhados na direção δ_1, todos ruins, digamos $\Gamma^1_{k_1}, \Gamma^2_{k_1}, ..., \Gamma^{m_{k_1}}_{k_1}, ..., \Gamma^1_{k_2-1}, \Gamma^2_{k_2-1}, ..., \Gamma^{m_{k_2-1}}_{k_2-1}$ (isto é, para cada k temos uma quantidade m_k de L_k-blocos), que contenham todos os vértices $x, x + \delta_1, x + 2\delta_1, ..., x + t\delta_1$.

Fixada uma coleção de blocos $\Gamma^1_{k_1}, \Gamma^2_{k_1}, ..., \Gamma^{m_{k_1}}_{k_1}, ..., \Gamma^1_{k_2-1}, \Gamma^2_{k_2-1}, ..., \Gamma^{m_{k_2-1}}_{k_2-1}$, como estes são independentes entre si, a probabilidade de que todos sejam ruins pode ser cotada, através da Proposição 2.1.10, por

$$\mathbb{P}\left(\Gamma^i_k \text{ ser ruim}, \forall k = k_1, ..., k_2 - 1 \text{ e } \forall i = 1, ..., m_k\right) \leq \prod_{k=k_1}^{k_2-1} \left\{c_1 e^{-c_2 L_k^{2d\tau - s'}}\right\}^{m_k} \tag{2.55}$$

Para que esta coleção contenha todos os vértices $x, x + \delta_1, x + 2\delta_1, ..., x + t\delta_1$, é necessário que $\sum_{k=k_1}^{k_2-1} m_k L_k > t$. Mas note que se $2d\tau - s' < 1$, então

$$\sum_{k=k_1}^{k_2-1} m_k L_k^{2d\tau - s'} \geq \sum_{k=k_1}^{k_2-1} (m_k L_k)^{2d\tau - s'} \geq \left(\sum_{k=k_1}^{k_2-1} m_k L_k\right)^{2d\tau - s'} > t^{2d\tau - s'}. \tag{2.56}$$

Dessa maneira, temos que

$$\sum_{k=k_1}^{k_2-1} m_k L_k^{2d\tau - s'} > t^{1\wedge(2d\tau - s')}. \tag{2.57}$$

Note ainda que $L_k > L_{k_2}$, então, substituindo metade do fator exponencial de (2.55) e substituindo L_k por L_{k_2} chegamos a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\Gamma_k^i \text{ ser ruim}, \forall k = k_1, ..., k_2 - 1 \text{ e } \forall i = 1, ..., m_k\right) \leq \\ e^{\frac{-1}{2}c_2\left(\sum_{k=k_1}^{k_2-1} m_k L_k^{2d\tau-s'}\right)} \prod_{k=k_1}^{k_2-1} \left\{c_1 e^{\frac{-1}{2}c_2 L_k^{2d\tau-s'}}\right\}^{m_k} \leq \\ e^{\frac{-1}{2}c_2 t^{1\wedge(2d\tau-s')}} \left\{c_1 e^{\frac{-1}{2}c_2 L_{k_2}^{2d\tau-s'}}\right\}^m,\end{aligned} \tag{2.58}$$

onde $m = m_{k_1} + m_{k_1+1} + ... + m_{k_2-1}$.

Como o número de coleções ordenadas com um total de m blocos é menor que $(k_2 - k_1)^m$ (pois, para cada um dos m blocos, temos $k_2 - k_1$ escolhas para a escala do bloco), a fim de que se tenha $k_x > t$, é necessário que para algum m, alguma dessas coleções seja completamente ruim. Assim, utilizando a desigualdade (2.58) e a subatividade,

$$\mathbb{P}(k_x > t) \leq e^{\frac{-1}{2}c_2 t^{1\wedge(2d\tau-s')}} \sum_{m\geq 1} \left\{(k_2 - k_1) c_1 e^{\frac{-1}{2}c_2 L_{k_2}^{2d\tau-s'}}\right\}^m. \tag{2.59}$$

Relembrando (2.15) e (2.10), temos que $k_2 - k_1$ é cotado por uma constante $\mathcal{C}$ e $L_{k_2} > (\log L)^{\tau\epsilon}$, o termo no somatório acima é tal que

$$(k_2 - k_1) c_1 e^{\frac{-1}{2}c_2 L_{k_2}^{2d\tau-s'}} \leq \mathcal{C} e^{\frac{-1}{2}c_2 (\log L)^{\tau\epsilon(2d\tau-s')}} \underset{L\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.60}$$

Dessa maneira, assumindo L suficientemente grande,

$$\sum_{m\geq 1} \left\{(k_2 - k_1) c_1 e^{\frac{-1}{2}c_2 L_{k_2}^{2d\tau-s'}}\right\}^m \leq \mathcal{M}, \text{ para algum } \mathcal{M} > 0. \tag{2.61}$$

Tomando agora $t = (\log L)^\Delta$, temos que $t^{1\wedge(2d\tau-s')} = (\log L)^{\Delta\wedge\Delta(2d\tau-s')}$. Mas como $\Delta > 1$ e (2.3) implica que $\Delta(2d\tau - s') > 1$, através de (2.59) e (2.61) obtemos

$$\mathbb{P}(k_x > (\log L)^\Delta) \leq \mathcal{M} e^{\frac{-1}{2}c_2(\log L)^\alpha}, \qquad \text{com } \alpha > 1. \tag{2.62}$$

Com as contas feitas acima, facilmente obtemos a seguinte proposição:

Proposição 2.1.17. *Seja $\mathcal{A}_L$ o evento onde $k_x \leq (\log L)^\Delta$, $\forall x \in \Lambda_L \backslash \mathcal{B}_L$. Então* $\lim_{L\to\infty} \mathbb{P}(\mathcal{A}_L) = 1$.

Demonstração. Como $\left|\Lambda_L \backslash \mathcal{B}_L\right| \leq (2L)^d$, utilizando a desigualdade (2.62) e a propridade subaditiva, obtemos

$$\lim_{L\to\infty} \mathbb{P}(\mathcal{A}_L^c) \leq (2L)^d \mathcal{M} e^{\frac{-1}{2}c_2(\log L)^\alpha} = 0, \tag{2.63}$$

uma vez que $\alpha > 1$. □

Agora que já temos o controle sobre todos os vértices, concluímos esta seção com a demonstração da cota superior do Teorema 1.

Demonstração da Cota Superior do Teorema 1. Sob a hipótese de ocorrência dos eventos $\mathcal{A}_L$ e $\bigcap_{k=0}^{k_1-1} \mathcal{F}_{L,k}$, dados $x, y \in \Lambda_L$, se $x \in \mathcal{B}_L$ escrevemos $x' = x$ e caso $x \notin \mathcal{B}_L$ tomamos x' como na Definição 2.1.16. De forma análoga procedemos na definição de y'.

O evento $\mathcal{A}_L$ garante que $D_L(x, x') \leq (\log L)^\Delta$ e $D_L(y, y') \leq (\log L)^\Delta$, enquanto que como visto na (2.1.15), o evento $\bigcap_{k=0}^{k_1-1} \mathcal{F}_{L,k}$ garante que $D_L(x', y') \leq (\log L)^{\Delta+3\epsilon}$.

Portanto, $\forall x, y \in \Lambda_L$, temos que

$$\begin{aligned} D_L(x,y) &\leq D_L(x,x') + D_L(x',y') + D_L(y',y) \\ &\leq (\log L)^{\Delta+3\epsilon} + 2(\log L)^\Delta \ll (\log L)^{\Delta+3\epsilon}. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Mas como x e y são tomados arbitrariamente, isto significa $D_L \leq (\log L)^{\Delta+3\epsilon}$.

Fazendo agora uso da Proposição 2.1.14 e da Proposição 2.1.17, com o fato acima obtemos

$$\begin{aligned} &\lim_{L\to\infty} \mathbb{P}\left(D_L \leq (\log L)^{\Delta+3\epsilon}\right) = \\ &\qquad \lim_{L\to\infty} \mathbb{P}\left(D_L \leq (\log L)^{\Delta+3\epsilon} \;\middle|\; \left(\bigcap_{k=0}^{k_1-1} \mathcal{F}_{L,k}\right) \cap \mathcal{A}_L\right) = 1, \end{aligned} \tag{2.65}$$

que é exatamente o fato desejado. □

2.2 Uma cota inferior para D_L

Nesta seção mostraremos algumas ideias desenvolvidas por Trapman em [18], que nos levam a uma cota para a probabilidade de um dado vértice $x \in \mathbb{Z}^d$ estar conectado à origem por um caminho de tamanho menor ou igual a n. Esta cota é dada em função de $||x||$ e n. Veremos posteriormente que este resultado pode ser utilizado para se demonstrar a cota inferior para D_L dada no Teorema 1.

Enfim, enunciamos o teorema:

Teorema 2.2.1. *Sob as condições do Teorema 1, dado $s' \in (d,s)$, existem constantes $c_1, c_2 \in (0,\infty)$, tais que, para todo $x \in \mathbb{Z}^d$ e $n \geq 1$, sendo $\Delta' = \log 2/\log\big(2d/s'\big)$, temos*

$$\mathbb{P}\left(D(0,x) \leq n\right) \leq c_1 \left(\frac{e^{c_2 n^{\frac{1}{\Delta'}}}}{||x||}\right)^{s'}. \tag{2.66}$$

Para demosntrar este teorema utilizaremos três lemas, mas primeiramente fazemos a observação de que, pela definição de $p_{x,y}$ no Teorema 1, dado $s' < s$ existe $R = R(s') > 1$, onde

$$p_{x,y} \leq \frac{1}{||x-y||^{s'}} \qquad \forall x, y \in \mathbb{Z}^d \text{ com } ||x-y|| \geq R. \tag{2.67}$$

Feita a observação, proseguimos com os lemas:

Lema 2.2.2. *Se $||x||/k \geq R$, então*

$$\mathbb{P}\left(D(0,x) \leq k\right) \leq \left(\frac{k}{||x||}\right)^{s'} \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{E}|B_j|\mathbb{E}|B_{k-1-j}|, \tag{2.68}$$

onde $B_j = \{x \in \mathbb{Z}^d\ ;\ D(0,x) \leq j\}$.

Demonstração. Se $D(0,x) \leq k$, então necessariamente existe um caminho com vértices distintos $\gamma = 0 = x_0, x_1, ..., x_n = x$, com $n \leq k$, que esteja presente no grafo aleatório. E como

$$||x|| = ||x-0|| \leq ||0-x_1|| + ||x_1 - x_2|| + \cdots + ||x_{n-1} - x|| \tag{2.69}$$

temos que $||x_j - x_{j+1}|| \ \geq\ ||x||/n \ \geq\ ||x||/k$, para algum $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Dessa maneira, podemos escrever

$$\big(D(0,x) \leq k\big) = \bigcup_{j=0}^{k-1} \mathcal{A}_j, \tag{2.70}$$

onde $\mathcal{A}_j$ é o evento em que existe um caminho $\gamma := 0 = x_0, x_1, ..., x_n = x$ presente no grafo aleatório, com $n \leq k$ e $||x_j - x_{j+1}|| \ \geq\ ||x||/k$.

Podemos estimar $\mathbb{P}(\mathcal{A}_j)$, condicionando-o sob as possibilidades para o elo x_j, x_{j+1}:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathcal{A}_j) &= \sum_{\substack{y,z \in \mathbb{Z}^d, \\ ||y-z|| \geq ||x||/k}} p_{y,z} \cdot \mathbb{P}(\mathcal{A}_j | x_j = y \text{ e } x_{j+1} = z) \\
&\leq \left(\frac{k}{||x||}\right)^{s'} \sum_{y,z \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(\mathcal{A}_j | x_j = y \text{ e } x_{j+1} = z),
\end{aligned} \tag{2.71}$$

uma vez que $||y-z|| \geq ||x||/k > R$, o que implica — ver Observação (2.67) —

$$p_{y,z} \leq \left(\frac{1}{||y-z||}\right)^{s'} \leq \left(\frac{k}{||x||}\right)^{s'}$$

e, retirando a condição $||y-z|| \geq ||x||/k$, estamos acrescentando parcelas não negativas ao somatório.

Por outro lado, no evento $\mathcal{A}_j$, com $x_j = y$ e $x_{j+1} = z$, deve existir um par de caminhos disjuntos e com vértices distintos (γ_1, γ_2), $\gamma_1 := 0 = y_0, y_1, \ldots y_j = y$ e $\gamma_2 := z = z_0, z_1, \ldots, z_m = x$ com $m \leq k-1-j$, presentes no grafo aleatório. Denotamos por Γ o conjunto desses possíveis pares, Γ_1 o conjunto dos possíveis caminhos com vértices distintos iniciando em 0 e terminando em y com tamanho j, e Γ_2 o conjunto de todos os caminhos com vértices distintos iniciando em z e acabando em x de tamanho menor ou igual a $k-1-j$. Da independência entre os elos, obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathcal{A}_j | x_j = y \text{ e } x_{j+1} = z) &= \sum_{(\gamma_1,\gamma_2)\in\Gamma} \mathbb{P}(\gamma_1)\mathbb{P}(\gamma_2) \\
&\leq \left(\sum_{\gamma_1\in\Gamma_1} \mathbb{P}(\gamma_1)\right)\left(\sum_{\gamma_2\in\Gamma_2} \mathbb{P}(\gamma_2)\right) \\
&= \mathbb{P}(D(0,y) = j)\mathbb{P}(D(z,x) \leq k-1-j) \\
&\leq \mathbb{P}(D(0,y) \leq j)\mathbb{P}(D(z,x) \leq k-1-j). \qquad (2.72)
\end{aligned}$$

Com a desigualdade acima retomamos (2.71):

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathcal{A}_j) &\leq \left(\frac{k}{||x||}\right)^{s'} \sum_{y,z\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(D(0,y) \leq j)\mathbb{P}(D(z,x) \leq k-1-j) \\
&= \left(\frac{k}{||x||}\right)^{s'} \left(\sum_{y\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(D(0,y) \leq j)\right)\left(\sum_{z\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(D(z,x) \leq k-1-j)\right) \\
&= \left(\frac{k}{||x||}\right)^{s'} \left(\sum_{y\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(D(0,y) \leq j)\right)\left(\sum_{z\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(D(0,z) \leq k-1-j)\right) \\
&= \left(\frac{k}{||x||}\right)^{s'} \mathbb{E}|B_j|\mathbb{E}|B_{k-1-j}|, \qquad (2.73)
\end{aligned}$$

onde, na penúltima igualdade, utilizamos o fato de $p_{x,y}$ ser invariante por translação.

Para finalizar, combinando (2.70) com (2.73) chegamos a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(D(0,x) \leq k\right) &\leq \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{P}(\mathcal{A}_j) \\
&\leq \left(\frac{k}{||x||}\right)^{s'} \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{E}|B_j|\mathbb{E}|B_{k-1-j}|, \qquad (2.74)
\end{aligned}$$

donde segue a conclusão do lema. $\square$

Lema 2.2.3. *Existe um valor $a = a(d, s') > 0$, tal que, dado $j \geq 1$, se existe um $k \geq Rj$, para o qual $\mathbb{P}\big(D(0,x) \leq j\big) \leq \big(k/||x||\big)^{s'}$, $\forall x \in \mathbb{Z}^d$ com $||x|| \geq Rj$, então $\mathbb{E}|B_j| \leq ak^d$.*

Demonstração. Basta notar que $||x|| \geq k$ implica que $||x|| \geq Rj$, e portanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|B_j| = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \mathbb{P}\big(D(0,x) \leq j\big) &\leq \sum_{x\ ;\ ||x||<k} 1 + \sum_{x\ ;\ ||x||\geq k} \left(\frac{k}{||x||}\right)^{s'} \\
&\leq a_1 k^d + a_2 \left(\sum_{n=k}^{\infty} n^{d-1-s'}\right) k^{s'} \\
&\leq a_1 k^d + a_2 k^{d-s'} k^{s'}, \qquad (2.75)
\end{aligned}$$

onde $a_1, a_2 \in (0,\infty)$ são constantes para as quais $\big|A_n = \{x \in \mathbb{Z}^d\ ;\ ||x|| \leq n\}\big| \leq a_1 n^d$ e $\big|B_n = \{x \in \mathbb{Z}^d\ ;\ ||x|| = n\}\big| \leq a_2 n^{d-1}$.

Tomando $a = a_1 + a_2$, o resultado segue. $\square$

Lema 2.2.4. *Sejam $s' \in (d, s)$ e $\Delta' = (\log_2(\frac{2d}{s'}))^{-1}$. Dado $p > \max\{\frac{s'+1}{2d-s'}\ ,\ \frac{1}{d}\}$, existe $C = C(p) \in (0,\infty)$, tal que para todo $c > 1$, a função*

$$K(n) = \frac{1}{C} n^{-p} e^{cn^{\frac{1}{\Delta'}}}$$

satisfaz:

$$\sum_{j=0}^{n} K(j)^d K(n-j)^d \leq (n+1)^{-s'} K(n+1)^{s'}, \quad n \geq 1. \qquad (2.76)$$

Demonstração. Primeiramente observe que

$$\begin{aligned}
K(j)K(n-j) &= \frac{1}{C^2}(j)(n-j)e^{\left(j^{\frac{1}{\Delta'}}+(n-j)^{\frac{1}{\Delta'}}\right)} \\
&= \frac{1}{C^2}(j)(n-j)e^{cn^{\frac{1}{\Delta'}}\left(\left(\frac{j}{n}\right)^{\frac{1}{\Delta'}}+\left(\frac{n-j}{n}\right)^{\frac{1}{\Delta'}}\right)} \\
&= \frac{1}{C^2}(j)(n-j)e^{cn^{\frac{1}{\Delta'}}\varphi\left(\frac{j}{n}\right)}, \qquad (2.77)
\end{aligned}$$

onde $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $\varphi(x) = \Big(x^{\frac{1}{\Delta'}} + (1-x)^{\frac{1}{\Delta'}}\Big)$. Calculando sua derivada e utilizando o fato de que $\Delta' > 1$, temos que φ é crescente no intervalo $[0, 1/2]$ e decrescente em $[1/2, 1]$ e portanto seu valor máximo é

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\Delta'}} = 2\left(\frac{1}{2^{\log_2(2d/s')}}\right) = 2\left(\frac{s'}{2d}\right) = \frac{s'}{d}. \qquad (2.78)$$

Por simetria podemos dividir o somátorio da equação (2.77) em duas partes e através das observações feitas sobre a função auxiliar acima, temos

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n} K(j)^d K(n-j)^d = \\
&= \frac{2}{C^{2d}} \sum_{j\le n/4} (j)^{-pd}(n-j)^{-pd} e^{cdn^{\frac{1}{\Delta'}}\varphi\left(\frac{j}{n}\right)} + \frac{1}{C^{2d}} \sum_{n/4<j<3n/4} (j)^{-pd}(n-j)^{-pd} e^{cdn^{\frac{1}{\Delta'}}\varphi\left(\frac{j}{n}\right)} \\
&\le \frac{2}{C^{2d}} \sum_{j\le n/4} (j)^{-pd}(n-j)^{-pd} e^{cdn^{\frac{1}{\Delta'}}\varphi\left(\frac{1}{4}\right)} + \frac{1}{C^{2d}} \sum_{n/4<j<3n/4} (j)^{-pd}(n-j)^{-pd} e^{cdn^{\frac{1}{\Delta'}}\varphi\left(\frac{1}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Como $p > 1/d$, temos que $pd > 1$, portanto $(j)^{-pd}(n-j)^{-pd} \le 1$. E ainda se $n/4 < j < 3n/4$, então temos $(j)^{-pd} < (n/4)^{pd}$ e $(n-j)^{-pd} < (n/4)^{pd}$.

Em cada somatório há menos do que n parcelas. Assim, sendo $\delta > 0$ dado pela igualdade

$$\varphi\left(\frac{1}{4}\right) = \varphi\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\delta}{d}, \tag{2.79}$$

retomamos (2.77):

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n} K(j)^d K(n-j)^d &\le \frac{2}{C^{2d}} n e^{cn^{\frac{1}{\Delta'}}(s'-\delta)} + \frac{4^{2dp}}{C^{2d}} n^{1-2dp} e^{cn^{\frac{1}{\Delta'}}s'} \\
&\le \frac{2}{C^{2d}} (n+1) e^{c(n+1)^{\frac{1}{\Delta'}}(s'-\delta)} + \frac{4^{2dp}}{C^{2d}} n^{1-2dp} e^{c(n+1)^{\frac{1}{\Delta'}}s'} \\
&= \frac{1}{C^{s'}} (n+1)^{-s'(p+1)} e^{c(n+1)^{\frac{1}{\Delta'}}s'} h(n) \\
&= (n+1)^{-s'} K(n+1)^{s'} h(n), \qquad (2.80)
\end{aligned}$$

onde $h(n)$ é dado por:

$$h(n) = \frac{1}{C^{2d-s'}} \left[2(n+1)^{1+(1+p)s'} e^{-cn^{\frac{1}{\Delta'}}\delta} + 4^{2pd} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1-2pd} (n+1)^{1-2pd+(1+p)s'} \right].$$

Mas como $c > 1$, temos que $h(n) < \tilde{h}(n)$, onde

$$\tilde{h}(n) = \frac{1}{C^{2d-s'}} \left[2(n+1)^{1+(1+p)s'} e^{-n^{\frac{1}{\Delta'}}\delta} + 4^{2pd} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1-2pd} (n+1)^{1-2pd+(1+p)s'} \right].$$

Note agora que o termo $2(n+1)^{1+(1+p)s'} e^{-n^{\frac{1}{\Delta'}}\delta}$ tende a zero quando n cresce e como $p > (s'+1)/(2d-s')$ implica $1-2pd+(1+p)s' < 0$, o termo

$$4^{2pd} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{1-2pd} (n+1)^{1-2pd+(1+p)s'}$$

também tende a zero quando n cresce. Assim tomando C suficientemente grande teremos $\tilde{h}(n) < 1$ para todo n. O que, por (2.80), significa

$$\sum_{j=0}^{n} K(j)^d K(n-j)^d \leq (n+1)^{-s'} K(n+1)^{s'} h(n) \leq (n+1)^{-s'} K(n+1)^{s'}, \quad (2.81)$$

encerrando assim a demonstração. □

Agora que temos os três lemas acima, exibimos uma demonstração do Teorema 2.2.1:

Demonstração do Teorema 2.2.1. Seja a o número obtido no Lema (2.2.3). Escolha p sob as condições do Lema 2.2.4, e considere $C = C(p)$ obtido no Lema (2.2.4). E considere ainda, $q = 2/(2d - s')$.

Tome agora $c \in (1, \infty)$ suficientemente grande, de maneira que

$$K(n) = \frac{1}{C} n^{-p} e^{cn^{\frac{1}{\Delta'}}} \geq a^q R n, \quad n \geq 1. \quad (2.82)$$

Por indução em n, mostraremos a afirmação:

$$\mathbb{P}\big(D(0,x) \leq n\big) \leq \left(\frac{a^{-q}K(n)}{||x||}\right)^{s'}, \quad n \geq 1 \text{ e } x \in \mathbb{Z}^d. \quad (2.83)$$

Observe que se $||x|| \leq a^{-q}K(n)$, então a Desigualdade (2.83) é válida. Portanto, só precisamos considerar $x \in \mathbb{Z}^d$ com $||x||a^q > K(n)$. Mas por (2.82), isto significa $||x|| > Rn$.

Para $n = 1$, sendo $x \in \mathbb{Z}^d$, com $||x|| > R$, obtemos

$$\mathbb{P}\big(D(0,x) \leq 1\big) = p_{0,x} \leq \left(\frac{1}{||x||}\right)^{s'} \leq \left(\frac{a^{-q}K(1)}{||x||}\right)^{s'}, \quad (2.84)$$

uma vez que $a^{-q}K(1) \geq R \geq 1$.

Supondo a desigualdade (2.83) seja válida para $n = 1, 2, \cdots, m$, então dado $j \in \{1, \ldots, m\}$, temos que $a^{-q}K(j) \geq Rj$ e

$$\mathbb{P}\big(D(0,x) \leq j\big) \leq \left(\frac{a^{-q}K(j)}{||x||}\right)^{s'},$$

para todo $x \in \mathbb{Z}^d$ com $||x|| > Rj$. Portanto podemos aplicar o Lema 2.2.3, o que nos dá: $\mathbb{E}|B_j| \leq a(a^{-q}K(j))^d$.

Agora, utilizando o Lema 2.2.2, temos que se $||x|| \geq a^{-q}K(m+1) \geq R(m+1)$, então

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\big(D(0,x) \leq m = 1\big) &\leq \left(\frac{m+1}{||x||}\right)^{s'} \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{E}|B_j| \mathbb{E}|B_{k-1-j}| \\ &\leq \left(\frac{m+1}{||x||}\right)^{s'} a^{2(1-dq)} \sum_{j=0}^{m} K(j)^d K(m-j)^d. \quad (2.85) \end{aligned}$$

Segue do Lema 2.2.4 e do fato de que $q = \frac{2}{2d-s'}$, que a Equação (2.85) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(D(0,x) \leq m+1\right) &\leq \left(\frac{m+1}{||x||}\right)^{s'} a^{-qs'} \left(\frac{K(m+1)}{m+1}\right)^{s'} \\ &= \left(\frac{a^{-q}K(m+1)}{||x||}\right)^{s'}, \end{aligned} \tag{2.86}$$

o que completa a demonstração por indução da Desigualdade (2.83).

Para concluírmos a demonstração do Teorema 2.2.1, basta notar que a Desigualdade (2.83) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(D(0,x) \leq n\right) &\leq \left(\frac{\frac{a^{-q}}{C} n^{-p} e^{cn^{\frac{1}{\Delta}}}}{||x||}\right)^{s'} \\ &\leq \frac{a^{-qs'}}{C^{s'}} \left(\frac{e^{cn^{\frac{1}{\Delta}}}}{||x||}\right)^{s'}. \end{aligned} \tag{2.87}$$

Então escolhendo $c_1 = a^{-qs'}/C^{s'}$ e $c_2 = c$, o resultado segue. □

O Teorema 2.2.1 é muito poderoso, nos fornece de forma simples a cota inferior para D_L no Teorema 1. Para isto, basta notar que

$$\begin{aligned} \{D_L \geq (\log L)^{\Delta-\epsilon}\}^c &= \{D_L(x,y) < (\log L)^{\Delta-\epsilon}, \forall x, y \in \Lambda_L\} \\ &\subset \{D_L(0, x_L) \leq \lfloor (\log L)^{\Delta-\epsilon} \rfloor\}, \end{aligned}$$

onde x_L é dado por $x_L = (L, 0, 0, ..., 0) \in \Lambda_L$.

Podemos escolher $s' \in (d, s)$ suficientemente próximo de s, de forma que se tenha $(\Delta - \epsilon)/\Delta' < 1$. Dessa maneira,

$$\begin{aligned} \lim_{L\to\infty} \mathbb{P}\left(D_L \geq (\log L)^{\Delta-\epsilon}\right)^c &\leq \lim_{L\to\infty} \mathbb{P}\left(D_L(0,x_L) \leq \lfloor (\log L)^{\Delta-\epsilon} \rfloor\right) \\ &\leq \lim_{L\to\infty} c_1 \left(\frac{e^{c_2 \lfloor (\log L)^{\Delta-\epsilon} \rfloor^{\frac{1}{\Delta'}}}}{L}\right)^{s'} \\ &\leq \lim_{L\to\infty} c_1 \left(\frac{e^{c_2 (\log L)^{\frac{\Delta-\epsilon}{\Delta'}}}}{L}\right)^{s'} = 0, \end{aligned} \tag{2.88}$$

o que demonstra a cota inferior de D_L. Combinando as demonstrações para as cotas superior e inferior, obtemos a demostração do nosso resultado principal, o Teorema 1.

2.3 Uma análise sobre $B(0,r) = \{x \in \mathbb{Z}^d;\ D(0,x) \leq r\}$

Nesta seção veremos que o Teorema 2.2.1, nos permite ainda, fazermos uma comparação entre uma bola na métrica euclidiana com uma bola na métrica gerada pela distância usual de grafos, a distância química.

Esta relação é vista no seguinte teorema:

Teorema 2.3.1. *Sendo $B(0,r) = \{x \in \mathbb{Z}^d\ ;\ D(0,x) \leq r\}$, ainda sob as hipóteses do Teorema 1, para todo $\epsilon > 0$, temos que*

$$\lim_{r\to\infty} \mathbb{P}\left(\Lambda_{\exp\{r^{\frac{1}{\Delta}-\epsilon}\}} \subset B(0,r) \subset \Lambda_{\exp\{r^{\frac{1}{\Delta}+\epsilon}\}}\right) = 1. \tag{2.89}$$

Demonstração. Vamos provar inicialmente que

$$\lim_{r\to\infty} \mathbb{P}\left(\Lambda_{\exp\{r^{\frac{1}{\Delta}-\epsilon}\}} \subset B(0,r)\right) = 1. \tag{2.90}$$

Para isso, dado $L \in \mathbb{N}$, seja r_L tal que $L = \exp\{r_L^{\frac{1}{\Delta}-\epsilon}\}$, isto é,

$$r_L = (\log L)^{\left(\frac{1}{\Delta}-\epsilon\right)^{-1}} = (\log L)^{\Delta+\epsilon'}. \tag{2.91}$$

Mas como,

$$\left\{\Lambda_{\exp\{r_L^{\frac{1}{\Delta}-\epsilon}\}} \subset B(0,r_L)\right\} = \left\{\Lambda_L \subset B(0,r_L)\right\}$$
$$\supset \left\{D_L \leq r_L\right\} = \left\{D_L \leq (\log L)^{\Delta+\epsilon'}\right\}, \tag{2.92}$$

aplicando o Teorema 1, obtemos:

$$\lim_{r\to\infty} \mathbb{P}\left(\Lambda_{\exp\{r_L^{\frac{1}{\Delta}-\epsilon}\}} \subset B(0,r_L)\right) \geq \lim_{L\to\infty} \mathbb{P}\left(D_L \leq (\log L)^{\Delta+\epsilon'}\right) = 1. \tag{2.93}$$

Isto encerra a primeira parte da demonstração. Agora, utilizaremos a desigualdade obtida no Teorema 2.2.1, para obtermos a segunda parte, a saber

$$\lim_{r\to\infty} \mathbb{P}\left(B(0,r) \subset \Lambda_{\exp\{r^{\frac{1}{\Delta}+\epsilon}\}}\right) = 1. \tag{2.94}$$

Para isso, dado $L \in \mathbb{N}$, seja r_L tal que $L = \exp\{r_L^{\frac{1}{\Delta}+\epsilon}\}$, isto é,

$$r_L = (\log L)^{\left(\frac{1}{\Delta}+\epsilon\right)^{-1}} = (\log L)^{\Delta-\epsilon'}. \tag{2.95}$$

Note que

$$\left\{B(0,r_L) \subset \Lambda_{\exp\{r_L^{\frac{1}{\Delta}+\epsilon}\}}\right\}^c = \left\{B(0,r_L) \subset \Lambda_L\right\}^c$$
$$\subset \left\{\exists x \notin \Lambda_L\ ;\ D(0,x) \leq r_L = (\log L)^{\Delta-\epsilon'}\right\}, \tag{2.96}$$

e ainda, pelo Teorema 2.2.1, temos que

$$\mathbb{P}\left(D(0,x) \le (\log L)^{\Delta-\epsilon'}\right) \le c_1 \left(\frac{e^{c_2(\log L)^{\frac{\Delta-\epsilon'}{\Delta'}}}}{||x||}\right)^{s'}. \tag{2.97}$$

Portanto, sendo a_2 o mesmo que em (2.75) e $M = c_1 a_2$, temos

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\left\{B(0,r_L) \subset \Lambda_L\right\}^c\right) &\le c_1 \sum_{x \notin \Lambda_L} \left(\frac{e^{c_2(\log L)^{\frac{\Delta-\epsilon'}{\Delta'}}}}{||x||}\right)^{s'} \\
&\le c_1 \sum_{||x||>L} \left(\frac{e^{c_2(\log L)^{\frac{\Delta-\epsilon'}{\Delta'}}}}{||x||}\right)^{s'} \le c_1 a_2 \left(e^{c_2(\log L)^{\frac{\Delta-\epsilon'}{\Delta'}}}\right)^{s'} \sum_{n>L} n^{d-1-s'} \\
&\le M \left(e^{c_2(\log L)^{\frac{\Delta-\epsilon'}{\Delta'}}}\right)^{s'} L^{d-s'}. \qquad (2.98)
\end{aligned}$$

Escolhendo $s' \in (d,s)$ suficientemente próximo de s, de maneira que $(\Delta-\epsilon')/\Delta' < 1$, e com o fato $s' > d$, temos que

$$\lim_{L\to\infty} M \left(e^{c_2(\log L)^{\frac{\Delta-\epsilon'}{\Delta'}}}\right)^{s'} L^{d-s'} = 0, \tag{2.99}$$

o que conclui a demonstração da segunda parte. E portanto, com as duas partes demonstradas, segue a demonstração do teorema. □

Conclusão

Como foi apresentado nesta dissertação, as perguntas envolvendo uma comparação entre distância química e distância euclidiana no modelo de Percolação de Longo Alcance na rede $\mathbb{Z}^d$, encontram-se praticamente respondidas, restando somente compreender melhor o regime crítico $s = 2d$.

Entretanto, outros estudos surgiram, como em Trapman [18], que busca estudar o volume da bola de raio n, precisamente o limite:

$$\lim_{n\to\infty} |B_n|^{\frac{1}{n}}, \text{ onde } B_n = \{x \in \mathbb{Z}^d \ ; \ D(0,x) \leq n\}.$$

Berger em [6], apresentou um estudo relacionado à densidade do(s) cluster(s) sob a existência de percolação, onde afirma que no regime $d < s < 2d$, sob o condicionamento de que há percolação, ao menos um cluster infinito é tal que, dada uma caixa com volume n^d, este cluster contém $n^{d-o(1)}$ vértices desta caixa. Berger, juntamente com Benjaminni e Yadin [3], apresentam ainda, um estudo estimando assintoticamente o tempo de mistura do passeio aleatório no grafo gerado pelas conexões de longo-alcance sobre a rede cíclica $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$.

Outros modelos relacionados à percolação de Longo Alcance também foram estudados, como por exemplo, um caso em que há dependência entre as conexões [19], o modelo de Percolação de Primeira Passagem de Longo Alcance [9], além do modelo de percolação de Longo Alcance na rede hierárquica de ordem n, como pode ser visto em [11], [14] e [17], respectivamente. Entretando, esses artigos têm resultados relacionados à existência de percolação e não do caráter geométrico, como explorado nessa dissertação. Isto nos leva a indícios de que muito ainda pode ser feito nesta recente linha de estudos.

Referências Bibliográficas

[1] Aizenman, M. and Newman, C. (1986). *Discontinuity of the percolation density in one-dimensional* $1/||x-y||^2$ *percolation models*. Comm. Math. Phys. **107**, 611–647.

[2] Benjamini, I. and Berger, N. (2001). *The diameter of long-range percolation clusters on finite cycles*. Random Structures Algorithms **19**, 102–111.

[3] Benjamini, I., Berger, N. and Yadin, A. (2008). *Long Range Percolation Mixing Time*. Comb. Probab. Comp. **17**, 487-494.

[4] Benjamini, I., Kesten, H., Peres, Y. and Schramm, O. (2004). *The geometry of the uniform spanning forests: transitions in dimensions 4, 8, 12, . . . ,* Ann. Math. (2) **160**, no. 2, 465–491.

[5] Berger, N. (2008). *A lower bound for the chemical distance in sparse long-range percolation models*, preprint (arxiv:math.PR/0409021).

[6] Berger, N. (2002). *Transience, recurrence and critical behavior for long-range percolation*. Commun. Math. Phys. **226**, 531–558.

[7] Biskup, M. (2004). *On the scaling of the chemical distance in long range percolation models*. Ann. Probab. **32**, no. 4, 2938–2977.

[8] Biskup, M. (2010). *Graph Diameter in Long-Range Percolation*. Random Structures & Algorithms, **39**: 210–227

[9] Chatterjee, S. and Dey, P.S. (2016) *Multiple Phase Transitions in Long-Range First-Passage Percolation on Square Lattices*. Commun. on Pure and Appl. Math. **69**, No. 2, 203–256.

[10] Coppersmith, D., Gamarnik, D. and Sviridenko, M. (2002). *The diameter of a long-range percolation graph*. Random Structures Algorithms **21** 1–13.

[11] Dawson, D.A. and Gorostiza, L.G. (2013). *Percolation in an ultrametric space*. Electron. J. Probab. **18**, no. 12, 1–26.

[12] Ding, J. and Sly, A. (2015) *Distances in critical long range percolation*, preprint (arXiv:1303.3995v2)

[13] Imbrie, J. and Newman, C. (1988). *An intermediate phase with slow decay of correlations in one-dimensional* $1/||x-y||^2$ *percolation, Ising and Potts models.* Comm. Math. Phys. **118** 303–336.

[14] Koval V., Meester, R. and Trapman, P. (2012). *Long-range percolation on the hierarchical lattice*. Electron. J. Probab. **17**, no. 57, 1–21

[15] Newman, C. M. and Schulman, L. S. (1986). *One-dimensional* $1/||j-i||^s$ *percolation models: The existence of a transition for* $s \leq 2$. Comm. Math. Phys. **104** 547–571.

[16] Schulman, L. S. (1983). *Long-range percolation in one dimension.* J. PRhys. A **16** L639–L641.

[17] Shang, Y. (2015). *Inhomogeneous Long-Range Percolation on the Hierarchical Lattice*. Reports on Mathematical Physics **76**, No.1, Pages 53–61

[18] Trapman P. (2010) *The growth of the infinite long-range percolation cluster.* Ann. Probab. **38**, no. 4, 1583-1608.

[19] Yukich, J. E. (2006). *Ultra-Small Scale-Free Geometric Networks*. Journal of Applied Probability, **43**, No. 3, pp. 665-677.