Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Fernando dos Reis Naves

# Álgebra de caminhos generalizada e uma representação para álgebras de dimensão finita

Belo Horizonte - MG
2017

Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Autor: Fernando dos Reis Naves
Orientador: John William MacQuarrie

Belo Horizonte - MG
2017

FERNANDO DOS REIS NAVES

Álgebra de caminhos generalizada e uma representação para álgebras de dimensão finita

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. John William MacQuarrie

Belo Horizonte - MG
2017

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende Costa CRB 6ª Região nº 1510

Naves, Fernando dos Reis.

N323a Álgebra de caminhos generalizada e uma r representação para álgebras de dimensão finita / Fernando dos Reis Naves — Belo Horizonte, 2017.
viii,42 f. il.; 29 cm.

(Dissertação) - Universidade Federal de Minas Gerais – Departamento de Matemática.

Orientador: John William MacQuarrie.

1. Matemática – Teses. 2. Álgebra de caminhos generalizadas – Teses. 3. K-álgebras – Teses. 3. I. Orientador. II. Título.

CDU 51(043)

**Universidade Federal de Minas Gerais**
**Departamento de Matemática**
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**

FOLHA DE APROVAÇÃO

# *Álgebras de caminhos generalizadas e uma representação para K-álgebras de dimensão finita*

**FERNANDO DOS REIS NAVES**

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

John MacQuarrie

Prof. John William MacQuarrie
UFMG

Flávio U. Coelho

Prof. Flávio Ulhoa Coelho
USP

Prof. Viktor Bekkert
UFMG

Belo Horizonte, 30 de novembro de 2017.

Av. Antônio Carlos, 6627 – Campus Pampulha - Caixa Postal: 702
CEP-31270-901 - Belo Horizonte – Minas Gerais - Fone (31) 3409-5963
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br - home page: http://www.mat.ufmg.br/pgmat

*Aos meus pais.*

# AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais por todo amor, incentivo e lições que recebi deles. Agradeço à minha irmã por ter me ensinado que o amor às vezes vem com o tempo, não necessariamente curto, no nosso caso, com 22 anos.

Agradeço aos meus amigos pelo peso que eles tiram dos meus ombros, por me ensinarem a rir de mim mesmo e pela mão estendida. Agradeço aos que já foram algum dia, mas que por algum motivo a vida nos fizeram distanciar, nada na vida é definitivo, mas em algum momento da minha vida vocês foram essenciais e isso é muito.

Agradeço ao professor John por todos os ensinamentos que o trabalho proporcionou, pela paciência gigantesca durante o desenrolar dos estudos e principalmente pelo incentivo em um momento determinante.

Por fim, agradeço a CAPES, pelo financiamento concedido.

# CONTEÚDO

# RESUMO

Este trabalho tem dois objetivos. O primeiro é introduzir o conceito de álgebra generalizada de caminhos do Artigo [7] e apresentar alguns resultados dele. O segundo é desenvolver um resultado que nos permite realizar toda $K$-álgebra de dimensão finita como um quociente de uma álgebra de caminhos generalizada, cujos vértices são álgebras simples, por um ideal "bem comportado".

Palavras-chave: Álgebra de caminhos generalizadas, $K$-álgebras de dimensão finita, Álgebras semissimples .

# ABSTRACT

This work has two goals. The first one is to introduce the concept of generalized path algebra of the article [7] and present some results from it. The second one is to develop a result that realizes every finite dimensional $K$-algebra as a quocient of a generalized path algebra whose vertices are simple algebras by a "well behaved"ideal.

Key words: Generalized path algebra, Finite dimensional $K$-algebra, Semisimple algebra .

# INTRODUÇÃO

O estudo de representação de álgebras consiste na classificação de módulos indecomponíveis e os morfismos entre eles. Estamos interessados na representação via aljavas, que deu uma importante classificação para álgebras de dimensão finita. O Teorema de Gabriel (1972), que permite classificar todas as aljavas do tipo finito em termos diagramas de Dynkin, é um dos resultados mais celebrados da área.

Cada $k$-álgebra de dimensão finita básica sobre um corpo algebricamente pode ser associada a uma aljava, conhecida como aljava de Gabriel, de tal forma que tais álgebras são isomorfas ao quociente da álgebra de caminhos associadas aljava da álgebra por um ideal admissível.

No ano de 2010, os Professores Doutores Flavio Ulhoa Coelho e Shao-Xue Liu introduziram o conceito de álgebra de caminhos generalizadas, encontrada no artigo [7]. Pensando que cada vértice de uma $K$-álgebra de caminho está associado ao corpo $K$, a generalização proposta pelos professores consiste associar cada vértice com uma álgebra.

Motivados pelo estudo das álgebras de caminhos generalizados e o resultado já conhecido para álgebra de caminhos, nosso trabalho se movimentou no sentido de responder a seguinte pergunta: Toda álgebra associativa de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado pode ser realizada como um quociente de uma álgebra de caminhos generalizada, onde a álgebra de cada vértice é uma álgebra simples?

O Capítulo 1 contém resultados e definições já estabelecidas na literatura matemática. Ressaltando, em particular, o Teorema de Wedderburn-Artin − provado por Joseph Wedderburn, e generalizado por Emil Artin para álgebra Artinianas − que nos permite classificar todas as álgebras semissimples.

No Capítulo 2, interessados na generalização do problema descrito no segundo parágrafo, introduziremos o conceito de álgebra de caminhos.

Introduziremos na Seção 1 do Capítulo 3 o conceito de álgebras de caminhos generalizados. Com base no artigo [7], daremos uma caracterização para o radical de Jacobson de tais álgebras, além de dar apresentar sob que condições uma álgebra de caminhos generalizada é uma álgebra Noetheriana.

Com os conceitos e resultados já estabelecidos, dedicaremos a Seção 2 do Capítulo 3 em responder a questão que motivou este trabalho. Veremos que o desenvolvimento não se dará de forma tão bem comportada. Será necessária algumas generalizações na aljava de uma álgebra e no conceito de ideais admissíveis, mas uma generalização pequena, de forma que nosso novo ideal se comporte como um ideal admissível, exceto por uma quantidade mínima de flechas.

# CAPÍTULO 1

# PRELIMINARES ALGÉBRICOS

Assumimos que o leitor é familiar aos conceitos de anéis, unidades, corpos algebricamente fechados, ideais, anéis quocientes, homomorfismo de anéis, os Teoremas de isomorfismo, módulos à direita, módulos à esquerda, submódulos, homomorfismo de módulos e os Teoremas de isomorfismo para módulos.

## 1 Ideais regulares, módulos simples e módulos livres

**Definição 1.1.** *Seja $K$ um corpo. Diremos que o espaço vetorial $A$ sobre $K$ é uma $K$-**álgebra associativa** se $A$ é um anel e*

$$\lambda(ab) = (a\lambda)b = a(\lambda b) = (ab)\lambda, \forall a, b \in A, \forall \lambda \in K.$$

**Definição 1.2.** *Um ideal à esquerda $I$ é **regular** se existir $e \in A$ tal que $a - ae \in I$ para todo $a \in A$. Um ideal à direita $I$ é **regular** se existir $e \in A$ tal que $a - ea \in I$ para todo $a \in A$.*

Seja $A$ é um anel sem unidade. O ideal nulo é um ideal não regular. Caso contrário, existiriam $e, f \in A$ tais que $a - ae = 0$ e $a - fa = 0$ para todo $a \in A$. Como $f = fe$ e $e = fe$, ou seja, $e = f$. Portanto $e$ seria a identidade de $A$, contradizendo o fato de $A$ ser um anel sem unidade.

Observe que se $A$ é um anel com unidade, todo ideal à esquerda $I$ é regular.

**Exemplo 1.3.** *Sejam $A_1$ e $A_2$ duas $K$-álgebras com unidade. O produto de duas álgebras $A_1$ e $A_2$ é a álgebra $A_1 \times A_2$ com adição e multiplicação definidas por:*

- $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$*, para todos* $a_1, a_2 \in A_1$ *e* $b_1, b_2 \in A_2$*;*
- $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1b_1, a_2b_2)$*, para todos* $a_1, a_2 \in A_1$ *e* $b_1, b_2 \in A_2$*.*

*A unidade de $A_1 \times A_2$ é o elemento $1_{A_1 \times A_2} = (1_A, 1_B)$*

**Exemplo 1.4.** *Seja $(A, +, .)$ uma $K$-álgebra. A **álgebra oposta**, $A^{op}$, de $A$ é a $K$-álgebra $(A, +, *)$, onde o conjunto é o próprio $A$, a soma é exatamente a mesma de $(A, +, .)$ e a multiplicação é dada pela regra $a * b = b.a$.*

**Definição 1.5.** *Sejam $A$, $B$ duas $K$-álgebras, um $A$-$B$-**bimódulo** é um grupo abeliano $M$ tal que:*

(a) *$M$ é um $A$-módulo à esquerda e um $B$-módulo à direita;*

(b) *Para todo $a \in A, b \in B$ e $m \in M$ temos $a(mb) = (am)b$.*

O conjunto $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ de todos os homomorfismo de $A$-módulos à direita de $M$ a $N$ é um $K$-espaço vetorial com respeito a multiplicação por um escalar $(f, \lambda) \mapsto f\lambda$ dada por $(f\lambda)(m) = f(m\lambda)$, para todos $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N), m \in M$ e $\lambda \in K$.

O $K$-espaço vetorial

$$\mathrm{End}M = \mathrm{Hom}_A(M, M)$$

de todos os endomorfismos de $A$-módulos é uma $K$-álgebra associativa com multiplicação dada pela composição de mapas. O mapa $1_M$ é a unidade de $\mathrm{End}M$.

**Definição 1.6.** *Um $A$-módulo à esquerda $M$ sobre o anel $A$ é dito* ***simples*** *se $AM \neq 0$ e $M$ não possui submódulos próprios, ou seja, os únicos submódulos de $M$ são ele mesmo e o submódulo nulo.*

**Definição 1.7.** *Um $A$-módulo à esquerda $M$ é* ***cíclico*** *se $M = Am$ para algum $m \in M$.*

**Lema 1.8.** *([2], obs.9.(iii), pág.416 ) Se $M$ é um $A$-módulo à esquerda simples, então $M = Am$, para todo elemento não nulo $m \in M$.*

*Demonstração.* Seja $m \in M$ não nulo. Considere os seguintes submódulos de $M$, $Am$ e $B = \{m \in M | Am = 0\}$.

Como $M$ é simples, ou seja, todo submódulo de $M$ é nulo ou o próprio $M$. Como $AM \neq 0$, concluímos que $B \neq M$, logo $B = 0$. Então $Am = M$ para todo elemento não nulo $m \in M$. □

**Lema 1.9.** ([1], *Lema* 1.3.1, *pág.*14) ( ***Lema de Schur***)*:*

*Sejam $S$ e $S'$ $A$-módulos à esquerda, e $f : S \to S'$ um homomorfismo não nulo.*

(a) *Se $S$ é simples, então $f$ é monomorfismo.*

(b) *Se $S'$ é simples, então $f$ é epimorfismo.*

(c) *Se $S$ e $S'$ são simples, então $f$ é isomorfismo.*

*Demonstração.* Seja $f : S \to S'$ um homomorfismo não nulo. Temos que $\mathrm{Ker} f$ e $\mathrm{Im} f$ são submódulos de $S$ e $S'$, respectivamente. Se $S$ é simples, seque que $\mathrm{Ker} f = 0$. Se $S'$ é simples, $\mathrm{Im} f = S'$. □

**Corolário 1.10.** ([1], *Cor* 1.3.2, *pág.*14). *Sejam $K$ um corpo algebricamente fechado, $A$ uma $K$-álgebra com unidade de dimensão finita. Se $S$ é $A$-módulo à esquerda simples, então $\mathrm{End} S \cong K$.*

*Demonstração.* Pelo Lema de Schur, temos que cada elemento não nulo de $\mathrm{End} S$ possui inverso. Como $S$ é simples, temos que $\dim_K S$ é finita, portanto $\dim_K \mathrm{End} S$ é finita. Seja $\varphi \in \mathrm{End} S$ não nulo, temos que $1_S, \varphi, \varphi^2, ..., \varphi^m, ...$ são linearmente dependentes sobre $K$. Consequentemente, existe um polinômio não nulo $f(t) \in K[t]$ tal que $f(\varphi) = 0$. Já que $K$ é algebricamente fechado, temos que $f$ possui grau 1, ou seja, $f(\varphi(s)) = \varphi(s) - \lambda_\varphi = 0$, logo $\varphi(s) = \lambda_\varphi$, para todo $s \in S$. E a correspondência $\varphi \mapsto \lambda_\varphi$ estabelece um isomorfismo de $K$-álgebras. Portanto $\mathrm{End} S \cong K$.

□

Os $\mathbb{M}_n(K)$-módulos simples são da forma $I_l = \{(a_{ij}) | a_{ij} = 0 \text{ para } j \neq l\}$, com $i = 1, ..., n$.

De fato, seja $M$ um submódulo à esquerda não nulo de $I_l$. Existe elemento não nulo $v \in M$ tal que $v$ é da forma

$$v = \sum_{r=1}^{n} c_r e_{rl}.$$

Como $v \neq 0$, temos que para algum $1 \leq s \leq n$, $c_s$ é não nulo. Agora,

$$c_s^{-1} e_{is} v = e_{il} \in M;$$

para cada $i$. Como cada $e_{il}$ gera $I_l$, portanto $M = I_l$.

**Corolário 1.11.** *Um $\mathbb{M}_n(K)$-módulo à esquerda simples é isomorfo a $I_l = \{(a_{ij}) | a_{ij} = 0 \text{ para } j \neq l\}$, para algum $i = 1, ..., n$.*

*Demonstração.* Como $M$ um $\mathbb{M}_n(K)$-módulo à esquerda simples, existe $m$ não nulo tal que $M = \mathbb{M}_n(K)m$. Já que $I_l$ é um $\mathbb{M}_n(K)$-módulo à esquerda simples, temos $I_l = \mathbb{M}_n(K)e_{1l}$ . Considere o homomorfismo $f : M \to I_l$ que leva $m$ a $e_{1l}$. Como $f$ é homomorfismo não nulo de módulos simples, pelo Lema de Schur, obtemos $M \cong I_l$. . □

**Lema 1.12.** ([2], *Teorema* 9.1.3, *pág.*417) *Um $A$-módulo à esquerda $M$ é simples se, e somente se, $M$ é isomorfo a $A/I$ para algum ideal à esquerda maximal e regular.*

*Demonstração.* Seja $M$ um $A$-módulo simples, logo $M = Am$, para algum $m$ não nulo em $M$. Seja $f$ o homomorfismo de $A$-módulos $f : A \to M$ definido por $f(a) = am$. Como $f$ é sobrejetivo, e o núcleo $I$ é um ideal à esquerda de $A$, pelo teorema do isomorfismo para $A$-módulos, obtemos $A/I \cong M$.

Como cada ideal de $A/I$ é da forma $J/I$, onde $J$ é um ideal à esquerda de $A$ que contém $I$. Usando o fato de $A/I$ ser simples, concluímos que $J/I = A/I$, logo $J = A$, ou seja, $I$ é um ideal à esquerda maximal de $A$.

Como $M = Am$, existe $e \in A$ tal que $m = em$, logo $(a - ea)m = am - aem = 0$, ou seja, $a - ea \in \ker f$, para todo $a \in A$, portanto $I$ é regular.

Seja $I$ é um ideal à esquerda maximal regular de $A$ tal que $M \cong A/I$. Como todo ideal de $A/I$ é da forma $J/I$, onde $J$ é um ideal contendo $I$, como $I$ é maximal, temos que $J = A$, portanto $J/I = A/I$. Provaremos que $A(A/I) \neq 0$.

Assuma que não, como $I$ é regular, existe $e \in A$ tal que $a - ae \in I$, para todo $a \in A$. Como $A(A/I) = 0$, para cada $a \in A$ temos $a(e + I) = I$, segue que $ae \in I$. Já que $a - ae \in I$, teremos que $a \in I$, para todo $a \in A$, ou seja, $I = A$, contradizendo a maximalidade de $I$. □

Note que se $A$ não possui $A$-módulos à esquerda simples se, e somente se, $A$ não possui ideais à esquerda maximais e regulares.

**Definição 1.13.** *Sejam $F$ um $A$-módulo à esquerda e $X$ um subconjunto de $F$. Diremos que o $A$-módulo $F$ é gerado livremente pelo subconjunto $X$ se, dado um $A$-módulo $M$, e uma função $f : X \to M$, existe um único homomorfismo de $A$-módulos $\varphi : F \to M$ que estende a função $f$.*

**Definição 1.14.** *Um módulo $F$ sobre um anel com unidade $A$ é chamado de* ***livre*** *se existe algum subconjunto de $F$ que gera livremente o $A$-módulo $F$.*

**Proposição 1.15.** ***Propriedade universal para módulos livres:*** *Sejam $F$ um módulo à esquerda sobre um anel $A$ com unidade, $X$ um conjunto e $i : X \to F$ uma função. Suponha que a função $i : X \to F$ satisfaça a seguinte propriedade universal:*

*Dados um $A$-módulo à esquerda $M$ e uma função $f : X \to M$, existe um único homomorfismo $\varphi : F \to M$ tal que $\varphi \circ i = f$.*

*Então a função $i : X \to F$ é injetiva, e $F$ é gerado livremente por $i(X)$.*

*Demonstração.* Sejam $x, y \in X$ dois elementos distintos, e $f : X \to A$ uma função satisfazendo $f(x) = 0$ e $f(y) = 1$. Pela propriedade universal, existe um único $\omega : F \to A$ com $\omega \circ i = f$. Então, $\omega(i(x)) = 0$ e $\omega(i(y)) = 1$. Segue que $i(x) \neq i(y)$. Então $i$ é injetiva.

Seja $M$ um $A$-módulo à esquerda, e seja $g : i(X) \to M$. Então existe um único homomorfismo $\varphi : F \to M$ tal que $\varphi \circ i = g \circ i$, portanto $\varphi|_{i(X)} = g$. A função $\varphi$ estende a função $g$, Mmstrando que $F$ é gerado livremente por $i(X)$. □

**Proposição 1.16.** *Seja $X$ um conjunto, existem um $A$-modulo à esquerda $F_A(X)$ e uma função $i_X : X \to F_A(X)$ tal que $F_A(X)$ é livremente gerado por $i(X)$. O $A$-módulo $F_A(X)$ e a função $i_X : X \to F_A(X)$ satisfazem a propriedade universal.*

*Demonstração.* Defina $F_A(X)$ o conjunto de todas as funções indo de $X$ a $A$ com uma quantidade finita de valores não nulos.

Note que se $\tau, \sigma \in F_A(X)$, $\tau + \sigma$ é uma função com quantidade finita de valores não nulos, assim $\tau + \sigma \in F_A(X)$. Dados $a \in A$ e $\tau \in F_A(X)$. Seja $a\tau$ a função de $X$ a $A$ definida por $(a\tau)(x) = a\tau(x)$ ,para todo $x \in X$. Então,

(a) $(a(\tau + \sigma))(x) = a(\tau + \sigma)(x) = a(\tau(x) + \sigma(x)) = a\tau(x) + a\sigma(x)$, portanto $a(\tau + \sigma) = a\tau + a\sigma$;

(b) $((ab)\sigma)(x) = (ab)\sigma(x) = a(b\sigma(x)) = (a(b\sigma))(x)$, assim $(ab)\sigma = a(b\sigma)$;

(c) $((a + b)\sigma)(x) = (a + b)\sigma(x) = a\sigma(x) + b\sigma(x) = (a\sigma)(x) + (b\sigma)(x)$, ou seja, $(a + b)\sigma = a\sigma + b\sigma$;

(d) $(1\sigma)(x) = 1\sigma(x) = \sigma(x)$, e $1\sigma = \sigma$;

para todo $\sigma, \tau \in F_A(X)$ e $a, b \in A$. Segue que $F_A(X)$ é um $A$-módulo à esquerda.

Dado $x \in X$, considere $\delta_x : X \to A$ a função definida por

$$\delta_x(y) \begin{cases} 1; & \text{se } x = y; \\ 0; & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

Então $\delta_x \in F_A(X)$. Denote por $i_X : X \to F_A(X)$ a função que leva $x$ a $\delta_x$ para todo $x \in X$.

Sejam $M$ um $A$-módulo à esquerda e $f : X \to M$ uma função de $X$ a $M$. Se $\sigma \in F_A(X)$, $\sigma$ é uma função de $X$ a $R$ com uma quantidade finita de valores distintos de zero.

Já que $\sigma = \sum\limits_{x \in \text{supp}\sigma} \sigma(x)\delta_x$, onde $\text{supp}\sigma = \{x \in X | \sigma(x) \neq 0\}$. Defina $\varphi(\sigma) = \sum\limits_{x \in \text{supp}\sigma} \sigma(x)f(x)$. Temos que $\varphi$ é homomorfismo. Sejam $\sigma, \tau \in F_A(X)$, $a \in A$ e $Y$ um subconjunto finito de $X$ com $\text{supp}\sigma \subseteq Y$ e $\text{supp}\tau \subseteq Y$, assim $\text{supp}(\sigma + \tau) \subseteq Y$. Como

(a)

$$\begin{aligned}
\varphi(\sigma+\tau) &= \sum_{x\in \operatorname{supp}(\sigma+\tau)} (\sigma+\tau)(x)f(x)\\
&= \sum_{x\in Y}(\sigma+\tau)(x)f(x)\\
&= \sum_{x\in Y}\sigma(x)f(x) + \sum_{x\in Y}\tau(x)f(x)\\
&= \sum_{x\in \operatorname{supp}\sigma}\sigma(x)f(x) + \sum_{x\in \operatorname{supp}\tau}\tau(x)f(x)\\
&= \varphi(\sigma)+\varphi(\tau);
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\varphi(a\sigma) &= \sum_{x\in \operatorname{supp} a\sigma} a\sigma(x)f(x)\\
&= \sum_{x\in \operatorname{supp}\sigma} a\sigma(x)f(x)\\
&= a\left(\sum_{x\in \operatorname{supp}\sigma}\sigma(x)f(x)\right).
\end{aligned}$$

Tome $\psi : F_A(X)\to M$ tal que $\psi\circ i_X = f$, então

$$\begin{aligned}
\psi(\sigma) =& \psi\left(\sum_{x\in \operatorname{supp}\sigma}\sigma(x)\delta_x\right)\\
=& \sum_{x\in \operatorname{supp}\sigma}\sigma(x)\psi(\delta_x)\\
=& \sum_{x\in \operatorname{supp}\sigma}\sigma(x)\psi(i_X(x))\\
=& \sum_{x\in \operatorname{supp}\sigma}\sigma(x)f(x)=\varphi(\sigma).
\end{aligned}$$

Portanto $\varphi : F_A(X)\to M$ é o único homomorfismo de $A$-módulos à esquerda satisfazendo $\varphi\circ i = f$. Segue que $F_A(X)$ é gerado livremente por $i(X)$. □

# 2 Radical de uma álgebra

**Lema 2.1.** *([2], Teorema 9.1.4, pág.417). Seja $N$ um subconjunto do $A$-módulo à esquerda $M$. Então $\operatorname{Ann}(N)=\{a\in A|an=0,\forall n\in N\}$ é um ideal à esquerda de $A$. Se $N$ é um submódulo de $M$, então $\operatorname{Ann}(N)$ é um ideal.*

*Demonstração.* Sejam $a_1,a_2\in \operatorname{Ann}(N)$, $a\in A$ e $n\in N$. Temos que $0n=0$, $(a_1+a_2)n=a_1n+a_2n=0+0$ e $(aa_1)n=a(a_1n)=0$, portanto $a_1+a_2, aa_1, 0\in \operatorname{Ann}(N)$. Se $N$ é um submódulo de $M$, então $(a_1a)n=a_1(an)=0$, já que $an\in N$, então $a_1a\in \operatorname{Ann}(N)$, logo $\operatorname{Ann}(N)$ é um ideal. □

O conjunto $\operatorname{Ann}(N)$ é chamado de **anuladores à esquerda** de $N$.

**Definição 2.2.** *Seja $A$ um anel, definiremos o **radical de Jacobson** de $A$, denotado por $\mathrm{J}(A)$, como a interseção de todos anuladores de $A$-módulos à esquerda simples. Se $A$ não possui $A$-módulos à esquerda simples, então $\mathrm{J}(A)=A$.*

**Definição 2.3.** *Um elemento $a\in A$ é chamado de **quase-regular à esquerda** (respectivamente, direita) se existir $b\in A$ (respectivamente, $c\in A$) tal que $a+b+ba=0$ (respectivamente,$a+c+ac=0$). Um elemento $a\in A$ é **quase-regular** se ele for quase-regular à direita e à esquerda.*

Dado um elemento $a$ quase-regular, então existem elementos $b, c \in A$ tais que $a + b + ab = 0$ e $a + c + ca = 0$. Então, $b = c$. De fato,

$$b = -a - ab = c + ca + (c + ca)b = c + ca + cb + cab = c + c(a + b + ab) = c.$$

**Definição 2.4.** *Um ideal $I$ à esquerda de $A$ é quase-regular à esquerda (respectivamente, direita) se todo elemento de $I$ for quase-regular à esquerda (respectivamente, direita).*

**Lema 2.5.** *([2], Lema 9.2.8, pág.428). Seja $I$ um ideal à esquerda de $A$. Se $I$ é quase-regular à esquerda, então $I$ é quase-regular.*

*Demonstração.* Seja $a \in I$, então existe $r$ tal que $a + r + ra = 0$. Como $r = -a - ra$, seque que $r \in I$, portanto existe $s$ tal que $r + s + sr = 0$. Agora,

$$a = a + (s + sr + r)a + (s + sr + r) = a + sa + sra + ra + s + sr + r = s + s(r + a + ra) + r + a + ra = s.$$

Portanto $I$ é quase-regular. □

**Lema 2.6.** *([2], obs.9.2, Pág 426 ). Seja $A$ um anel com unidade. Um elemento $a$ é quase-regular à esquerda se, e somente se, $1 + a$ for invertível à esquerda.*

*Demonstração.* Seja $a$ é um elemento quase-regular à esquerda, existe $r$ tal que $a + r + ra = 0$. Como $1 + a + r + ra = 1$, portanto $(1 + r)(1 + a) = 1$, ou seja, $1 + a$ é invertível à esquerda.

Se $1 + a$ é invertível à esquerda, existe $r \in A$ tal que $r(1 + a) = 1$, logo $ra = 1 - r$. Como

$$a + (-ra) + (-ra)a = a + (-ra) + (r - 1)a = a - ra + ra - a = 0,$$

$a$ é quase-regular à esquerda. □

**Lema 2.7.** *([2], Lema 9.2.4, pág.426 ). Seja $I \neq A$ um ideal à esquerda regular de $A$, então $I$ está contido em um ideal à esquerda maximal regular.*

*Demonstração.* Seja $I$ regular, existe $e \in A$ tal que $a - ae \in I$, para todo $a \in A$.Todo ideal à esquerda $J$ contendo $I$ é também regular com o mesmo elemento $e$. Seja $I \subseteq J$, e suponha que $e \in J$, temos que $a - ae \in I \subseteq J$, logo $a \in J$, portanto $J = A$.

Considere o conjunto $\Sigma$ de todos os ideais à esquerda $L$ tais que $I \subseteq L \subsetneq A$. Como $I \neq A$ temos que $\Sigma \neq \emptyset$. Mostraremos que $\Sigma$ possui um elemento maximal.

Dada uma cadeia $S \subseteq \Sigma$ , exibiremos uma cota superior em $\Sigma$. Seja $S = (I_\alpha)$ uma cadeia de ideais em $\Sigma$, então para cada índice $\alpha, \beta$ temos uma das seguintes possibilidades: $I_\alpha \subseteq I_\beta$ ou $I_\beta \subseteq I_\alpha$. Denote por $M_S = \bigcup I_\alpha$, temos que esse será nosso candidato a cota superior de $S$ em $\Sigma$.

Temos que $M_S$ é um ideal à esquerda. De fato, sejam $x, y \in M_S$, então $x \in I_\alpha$ e $y \in I_\beta$, como $I_\alpha \subseteq I_\beta$ ou $I_\beta \subseteq I_\alpha$, então podemos supor sem perda de generaliadde que $x, y \in I_\beta$, logo $x + y \in I_\beta$ e $x + y \in M_S$. Seja $a \in A$, então $ax \in I_\alpha$, assim $ax \in M_S$.

Para cada índice $\alpha$, sabemos que $I_\alpha \subseteq M$. Suponha que $M_S = A$. Teríamos que para algum índice $\alpha$, $e \in I_\alpha$, portanto $I_\alpha = A$, contradizendo nossa escolha, logo $M_S \neq A$. Pelo Lema de Zorn, temos que $\Sigma$ possui um elemento maximal. □

**Lema 2.8.** *([2], Lema.9.2.5 pág.427 ). Sejam $A$ um anel e $J$ a interseção de todos os ideais à esquerda maximais regulares de $A$. Então $J$ é um ideal à esquerda quase-regular de $A$.*

*Demonstração.* Temos que $J$ é um ideal à esquerda, já que é a interseção de ideais à esquerda. Seja $a \in J$ e considere o conjunto $T = \{r + ra | r \in A\}$. Caso $T = A$, existe $r \in A$ tal que $r + ra = -a$, logo $r + ra + a = 0$, portanto $a$ é quase-regular à esquerda. É suficiente mostrar que $T = A$.

Temos que $T$ é um ideal à esquerda regular de $A$. De fato, sejam $r_1 + r_1a, r_2 + r_2a \in T$ e $x \in A$, logo $r_1 + r_1a + r_2 + r_2a = (r_1 + r_2) + (r_1 + r_2)a \in T$ e $x(r_1 + r_1a) = xr_1 + xr_1a \in T$, Assim $r - r(-a) = r + ra \in T$ , para todo $r \in A$, ou seja, $T$ é regular.

Assuma $T \neq A$, então $T$ está contido em um ideal à esquerda maximal $I_0$. Já que $a \in J \subseteq I_0$, $ra \in I_0$, para cada $r \in A$, teríamos $r + ra \in T \subseteq I_0$ e $r \in I_0$, para cada $r \in A$, portanto $A = I_0$, contrariando a maximalidade de $I_0$. □

**Lema 2.9.** *([2], Lema 9.2.6, pág.427 ). Seja $A$ um anel que possui pelo menos $A$-módulo à esquerda simples. Se $I$ é um ideal à esquerda quase-regular, então $I$ está contido na interseção de todos anuladores de $A$-módulos à esquerda simples, ou seja, $I \subseteq \mathrm{J}(A)$.*

*Demonstração.* Seja $I \nsubseteq \mathrm{J}(A)$, temos que $IM \neq 0$, para algum $A$-módulo simples $M$. Para algum $m \in M$, $Im \neq 0$, Como $I$ é um ideal, vem que $Im$ é um submódulo de $M$, portanto $M = IM$. Existe $x \in I$ tal que $-m = xm$. Pelo fato de $I$ ser um ideal à esquerda quase-regular, sabemos que existe $r \in A$ tal que $r + x + rx = 0$. Portanto

$$0 = 0m = (r + x + rx)m = rm + xm + rxm = rm - m - rm = -m,$$

ou seja, $m = 0$. Portanto $I \subseteq \mathrm{J}(A)$. □

**Teorema 2.10.** ([2], *Lema* 9.2.3, *pág.*428). *Temos que o* $\mathrm{J}(A)$ *é a interseção de todos ideais à esquerda maximais regulares de* $A$. *Se* $A$ *é um anel com unidade, o radical de* $A$ *é a interseção de todos ideais à esquerda maximais de* $A$.

*Demonstração.* Assuma que $\mathrm{J}(A) \neq A$. Seja $J$ a interseção de todos os ideais à esquerda maximais e regulares de $A$. Usando o Lema (2.8) e o Lema (2.9), temos que $J \subseteq \mathrm{J}(A)$ .

Seja $c \in \mathrm{J}(A)$, pelo Lema (1.12), $\mathrm{J}(A)$ é a interseção de todos os anuladores à esquerda do quociente $A/I$, onde $I$ percorre todos os ideais à esquerda maximais regulares de $A$.

Para cada ideal à esquerda maximal regular $I$, existe um $e \in A$ tal que $r - re \in I$, para todo $r \in A$. Como $c \in \mathrm{Ann}(A/I)$, obtemos que $ca \in I$, para todo $a \in A$, em particular, $ce \in I$. Assim $c \in I$, portanto $\mathrm{J}(A) \subseteq I$, concluindo que $\mathrm{J}(A) \subseteq J$. □

**Corolário 2.11.** ([2], *Lema* 9.2.3, *pág.*428). *O radical de Jacobson de* $A$ *é um ideal à esquerda quase-regular que contém todos ideais à esquerda quase-regulares.*

*Demonstração.* Pelos Lemas (2.10) e (2.8), e que $\mathrm{J}(A)$ contém todos ideais à esquerda quase-regulares, segue do Lema (2.9) que $\mathrm{J}(A)$ é um ideal à esquerda quase-regular. □

**Corolário 2.12.** ([2], *Lema* 9.2.15, *pág.*431 ). *Seja* $A$ *um anel e* $a \in A$.

(*a*) *Se* $-a^2$ *é quase-regular, então* $a$ *também será quase-regular.*

(*b*) $Aa$ *é um ideal à esquerda quase-regular se, e somente se,* $a \in \mathrm{J}(A)$.

*Demonstração.* Tome $s = r - a - ra$, portanto

$$s + a + sa = r - a - ra + a + (r - a - ra)a = r - a^2 - ra^2 = 0,$$

concluindo o item (*a*).

Assuma $Aa$ quase-regular. Considere $J = \{ra + na | r \in A, n \in \mathbb{Z}\}$. $J$ é um ideal. Se $n = 0$, concluímos que $Aa \subseteq J$. Se $r = 0$ e $n = 1$, concluímos que $a \in J$.

Seja $s = ra + na$, logo $-s^2 \in Aa$. Pelo item (*a*), concluímos que $s \in Aa$. $J$ é quase-regular, portanto $a \in J \subseteq \mathrm{J}(A)$, pelo Lema (2.11).

□

O item (*b*) do lema anterior nos dá uma nova caracterização para o radical de Jacobson de $A$.

**Definição 2.13.** *Um anel* $A$ *é dito* ***semissimples*** *se* $\mathrm{J}(A) = 0$.

**Corolário 2.14.** ([2], *Teorema* 9.2.14, *pág.*431 ). *Seja* $A$ *um anel, o anel quociente* $A/\mathrm{J}(A)$ *é semissimples. Em particular,* $\mathrm{J}(A)$ *é o menor ideal à esquerda* $I$ *de* $A$ *tal que* $A/I$ *é semissimples.*

*Demonstração.* Considere a projeção $\pi : A \to A/\mathrm{rad}A$. Tome $\Sigma$ o conjunto de todos os ideais à esquerda maximais regulares de $A$. Se $I \in \Sigma$, segue que $\mathrm{J}(A) \subseteq I$ e $\pi(I) = I/\mathrm{J}(A)$ é um ideal maximal regular de $A/\mathrm{J}(A)$. Seja $e \in A$ tal que $a - ae \in I$, para todo $a \in A$. Temos que $\overline{a} - \overline{ae} \in \pi(I)$, para todo $a \in A/\mathrm{J}(A)$. Para cada $I \in \Sigma$, $\pi(I)$ é regular. Como $\mathrm{J}(A) = \bigcap_{I \in \Sigma} I$, caso $\overline{a} \in \bigcap_{I \in \Sigma} \pi(I) = \bigcap_{I \in \Sigma} I/\mathrm{rad}A$, segue que $a \in \bigcap_{I \in \Sigma} I = \mathrm{rad}A$.

Portanto

$$\mathrm{rad}(A/\mathrm{rad}A) \subseteq \bigcap_{I \in \Sigma} \pi(I) \subseteq \pi(\mathrm{rad}A) = 0.$$

Seja $I$ um ideal à esquerda de $A$ tal que $A/I$ é semissimples. A interseção de todos os ideais à esquerda maximais regulares de $A/I$ é o ideal nulo. Existe uma correspondência uma-a-uma entre os ideais à esquerda maximais regulares de $A$ contendo $I$ e os ideais à esquerda maximais regulares de $A/I$. Segue que $A/I$ é semissimples se, e somente se, $I$ é a interseção de todos os ideais à esquerda maximais regulares de $A$ que contém $I$. Portanto $\mathrm{J}(A)$ é o menor ideal de $A$ tal que $A/\mathrm{J}(A)$ é semissimples. □

**Corolário 2.15.** *([2], Prop* 9.2.12*, pág.*430*). Cada ideal à esquerda nilpotente está contido em* $\mathrm{J}(A)$*.*

*Demonstração.* Seja $a^n = 0$, para algum inteiro positivo $n$. Tome $r = -a + a^2 - a^3 + ... + (-1)^{n-1}a^{n-1}$, então $a + r + ar = 0$, portanto todo ideal à esquerda nilpotente é quase-regular. Pelo Lema (2.9), concluímos que $I$ está contido em $\mathrm{J}(A)$. □

Seja $A$ uma $K$-álgebra com unidade, sabemos que todo ideal é regular. Temos que $a \in \mathrm{J}(A)$ se, e somente se, $Aa$ é quase-regular, ou seja, para todo $b \in A$, $ba$ é quase-regular. Já vimos que $ba$ é quase-regular se, e somente se, $1 - ba$ é invertível à esquerda. Portanto $a \in \mathrm{J}(A)$ se, e somente se, $1 - ba$ for invertível à esquerda, para todo $b \in A$.

**Lema 2.16.** *([8], Teorema* 1.3.1*, pág.*32*). Seja $A$ um anel com unidade.*

*(a) Se $I$ é um ideal de $A$, $\mathbb{M}_n(I)$ é um ideal de $\mathbb{M}_n(A)$.*

*(b) Se $J$ é um ideal de $\mathbb{M}_n(A)$, então existe um ideal $I$ de $A$ tal que $J = \mathbb{M}_n(I)$.*

*Demonstração.* Temos que $0_A \in I$, então a matriz nula está contida em $\mathbb{M}_n(I)$. Sejam $(a_{ij}), (b_{ij}) \in \mathbb{M}_n(I)$ e $(c_{ij}) \in \mathbb{M}_n(A)$, com $a_{ij}, b_{ij} \in I$ e $c_{ij} \in A$. Temos que $a_{ij} + b_{ij} \in I$ e $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathbb{M}_n(I)$.

Como $(c_{ij})(a_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^{n} c_{ik}a_{kj}\right)$ e $c_{ik}a_{kj} \in I$, obtemos que $\sum_{i=1}^{n} c_{ik}a_{kj} \in I$, portanto $(c_{ij})(a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(I)$, provando $(a)$.

Seja $J$ um ideal em $\mathbb{M}_n(A)$ e considere

$$I = \{a \in A |\ a \ \text{ é uma entrada em } J\}.$$

Temos que $J \subseteq \mathbb{M}_n(I)$. Como a matriz nula está no ideal $J$, então $0 \in I$. Seja $A \in J$, então $E_{ki}AE_{jl} \in J$. Se $a \in I$, então $aE_{kl} \in J$, para todo $1 \leq k, l \leq n$. Em particular, $aE_{11} \in J$. Se $a, b \in I$, então $aE_{11}, bE_{11} \in J$, assim $(a + b)E_{11} \in J$, portanto $a + b \in I$. Seja $r \in A$, então $(rE_{11})(aE_{11}) = raE_{11} \in J$, portanto $ra \in I$. Logo $I$ é um ideal de $A$.

Seja $A = (a_{ij})$, onde $a_{ij} \in I$, então $a_{ij}E_{ij} \in J$, para todo $1 \leq i, j \leq n$. Como $A = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$, segue que $A \in J$. □

**Lema 2.17.** *([8], Exemplo* 1.4.7*, pág.*61*) Seja $A$ um anel com unidade, então* $\mathrm{J}(\mathbb{M}_n(A)) = \mathbb{M}_n(\mathrm{J}(A))$*.*

*Demonstração.* Do lema anterior, $\mathrm{J}(\mathbb{M}_n(K)) = \mathbb{M}_n(I)$, para algum ideal $I$ de $A$. Seja $a \in I$, temos que $a1_{\mathbb{M}_n(K)} \in \mathrm{J}(\mathbb{M}_n(K))$. Como $1_{\mathbb{M}_n(K)} - ra1_{\mathbb{M}_n(K)} = (1 - ra)1_{\mathbb{M}_n(K)}$ é invertível para todo $r \in A$, segue que $a \in \mathrm{J}(A)$.

Seja $B = 1_{\mathbb{M}_n(K)} - (a_{kl})aE_{ij}$, onde $(a_{kl}) \in \mathbb{M}_n(K)$. Temos que $B = 1_{\mathbb{M}_n(K)} - \sum_k a_{ki}aE_{kj}$. Considere $\alpha = \sum_{j \neq k} a_{ki}aE_{kj}$, então $\alpha^2 = 0$.

Seja $a \in \mathrm{J}(A)$, segue que $1 - a_{ji}a$ é invertível em $A$. Considere $1 - b$ o inverso de $1 - a_{ji}a$, com $b \in A$. Temos que $(1_{\mathbb{M}_n(K)} - bE_{jj})(1_{\mathbb{M}_n(K)} - a_{ji}aE_{jj}) = 1_{\mathbb{M}_n(K)} - (a_{ji}a + b - ba_{ji}a)E_{jj} = 1_{\mathbb{M}_n(K)}$. Portanto

$$\begin{aligned}
(1_{\mathbb{M}_n(K)} - bE_{jj})B &= (1_{\mathbb{M}_n(K)} - bE_{jj})(1_{\mathbb{M}_n(K)} - \sum_k a_{ki}aE_{kj}) \\
&= 1_{\mathbb{M}_n(K)} - \sum_k a_{ki}aE_{kj} - bE_{jj} + ba_{ki}aE_{jj} \\
&= 1_{\mathbb{M}_n(K)} - \sum_{k \neq j} a_{ki}aE_{kj} - a_{ji}aE_{jj} - bE_{jj} + ba_{ki}aE_{jj} \\
&= 1_{\mathbb{M}_n(K)} - \sum_{k \neq j} a_{ki}aE_{kj}.
\end{aligned}$$

Multiplicando à esquerda por $1_{\mathbb{M}_n(K)} + \sum_{k \neq j} a_{ki}aE_{kj}$, concluímos que $B$ é invertível. □

**Corolário 2.18.** *Seja $K$ um corpo, então* $\mathrm{J}(\mathbb{M}_n(K)) = 0$.

**Proposição 2.19.** *Sejam $A$ e $B$ duas $K$-álgebras com unidades. Temos que* $\mathrm{J}(A \times B) \subseteq \mathrm{J}A \times \mathrm{J}B$.

*Demonstração.* Seja $(a,b) \in \mathrm{J}(A \times B)$, para todo $(c,d) \in A \times B$, temos que $(1_A, 1_B) - (c,d)(a,b)$ é invertível à esquerda. Para todo $c \in A$, $1 - ca$ é invertível em $A$ e, para todo $d \in B$, $1 - db$ é invertível em $B$, logo $a \in \mathrm{J}(A)$ e $b \in \mathrm{J}(B)$. □

# 3 Módulos Noetherianos e Artinianos

**Definição 3.1.** *Uma sequência de homomorfismo de $A$-módulos*

$$M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} M_2 \longrightarrow ... \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{f_n} M_n$$

*é chamada de* ***sequência exata*** *se* $\mathrm{Im} f_i = \ker f_i$ *para* $i = 2, ..., n-1$.

**Lema 3.2.** (*[2], Prop* 4.1.17, *pág.*176 ). *Seja $A$ um anel e*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "f'"] & M' \arrow[r, "g'"] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

*um diagrama comutativo de $A$-módulos à esquerda com linhas exatas. Então:*

(*a*) *$\alpha, \gamma$ monomorfismo, então $\beta$ monomorfismo.*

(*b*) *$\alpha, \gamma$ epimorfismo, então $\beta$ epimorfismo.*

(*c*) *$\alpha, \gamma$ isomorfismo, então $\beta$ isomorfismo.*

*Demonstração.* Seja $m \in M$ tal que $\beta(m) = 0$. Temos que $\gamma g(m) = g'(\beta(m)) = g'(0) = 0$, como $\gamma$ é monomorfismo, segue que $g(m) = 0$. Já que $m \in \ker g = \mathrm{Im} f$, existe $l \in L$ tal que $f(l) = m$. Já que $f'\alpha(l) = \beta f(l) = \beta(m) = 0$, segue que $\alpha(l) = 0$. Como $\alpha$ é monomorfismo, logo $m = 0$, portanto $\beta$ é monomorfismo. De maneira análoga, prova-se o item ($b$), e ($c$) segue de ($a$) e ($b$).

□

**Definição 3.3.** *Um $A$-módulo $M$ satisfaz a* ***condição da cadeia ascendente*** *para submódulos se para cada cadeia $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq ...$ de submódulos de $M$, existe um inteiro positivo $m$ tal que $M_m = M_i$ para $i \geq m$.*

**Definição 3.4.** *Um $A$-módulo $N$ satisfaz a* ***condição da cadeia descendente*** *para submódulos se para cada cadeia $N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq ...$ de submódulos de $M$, existe um inteiro positivo $n$ tal que $N_n = N_i$ para $i \geq m$.*

**Definição 3.5.** *Um $A$-módulo à esquerda* (*respectivamente, direita*) *$M$ é* ***Noetheriano à esquerda*** (*respectivamente, direita*) *se $M$ satisfaz a condição da cadeia ascendente para submódulos de $M$.*

**Definição 3.6.** *Um $A$-módulo à esquerda* (*respectivamente, direita*) *$M$ é* ***Artiniano à esquerda*** (*respectivamente, direita*) *se $M$ satisfaz a condição da cadeia ascendente para submódulos de $M$.*

Um anel $A$ é Artiniano ( Noetheriano ) se $A$ é um $A$-módulo Artiniano (Noetheriano ).

**Teorema 3.7.** (*[2], Teorema* 8.1.5, *pág.*373 ). *Seja* $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ *uma sequência exata. $M$ satisfaz a condição da cadeia ascendente* (*respectivamente, descendente*) *para submódulos se, e somente se, $L$ e $N$ satisfazerem.*

*Demonstração.* Seja $M$ satisfazendo a condição da cadeia ascendente. Como $f(L) \cong L$ é um submódulo de $M$, segue que $L$ também satisfaz.

Seja $N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq ...$ uma cadeia de submódulos de $N$, então $g^{-1}(N_1) \subseteq g^{-1}(N_2) \subseteq g^{-1}(N_3) \subseteq ...$ é uma cadeia de submódulos em $M$. Existe um inteiro positivo $n$ tal que $g^{-1}(N_i) = g^{-1}(N_n)$ para $n \geq i$. Como $g$ é epimorfismo, segue que $N_i = N_n$, para $i \geq n$.

Suponha que $L$ e $N$ satisfaçam a condição da cadeia ascendente, e seja $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq ...$ uma cadeia de submódulos de $M$. Para cada $i$, considere

$$L_i = f^{-1}(f(L) \cap M_i) \text{ e } N_i = g(M_i).$$

Seja $f_i = f|_{L_i}$ e $g_i = g|_{M_i}$. Temos que para cada $i$, a sequência

$$0 \longrightarrow L_i \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{g_i} N_i \longrightarrow 0$$

é exata. Como $N_i = g(M_i) = g|_{M_i}(M_i) = g_i(M_i)$, segue que $g_i$ é epimorfismo. Já que $f_i$ é a restrição de um monomorfismo, segue que $f_i$ é monomorfismo . Dado $m_i \in \ker g_i$, então $m_i \in \ker g = \mathrm{Im} f$, existe $l \in L$ tal que $f(l) = m_i$. Como $m \in f(L) \cap M_i$, segue que $l \in L_i$ e $m_i \in \mathrm{Im} f_i$. Seja $m \in \mathrm{Im} f_i$, portanto $m_i \in \mathrm{Im} f = \ker g$. como $\ker g$ é igual a $\ker g_i$ restrito a elementos de $M_i$, concluímos que $m_i \in \ker g_i$.

Por hipótese, existe um inteiro positivo $n$ tal que $L_i = L_n$ e $N_i = N_n$ , para $i \geq n$. Para cada $i \geq n$, existe o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "1_{L_n}"] & M_i \arrow[r, "g_i"] \arrow[d, "\beta_i"] & N_i \arrow[r] \arrow[d, "1_{N_n}"] & 0 , \\
0 \arrow[r] & L_n \arrow[r, "f_i"] & M_n \arrow[r, "g_i"] & N_n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

onde $\beta_i$ é a inclusão. Como $1_{L_n}$ e $1_{N_n}$ são isomorfismo, segue $\beta_i$ é isomorfismo, logo $\beta$ é a identidade, portanto $M_i = M_n$ para $n \geq i$. □

**Corolário 3.8.** *Se $N$ é um submódulo de $M$, então $M$ é Noetheriano (respectivamente, Artiniano) se, e somente se, $N$ e $M/N$ também o são.*

*Demonstração.* Aplicando o resultado anterior à sequencia exata $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M/N \longrightarrow 0$ . □

**Corolário 3.9.** *([2], Teorema 8.1.7, pág.374 ). Sejam $M$ e $N$ $A$-módulos à esquerda. A soma direta $M \oplus N$ é Noetheriano à esquerda se, e somente se, $M$ e $N$ também o são.*

*Demonstração.* Aplicando o resultado anterior à sequencia exata $0 \longrightarrow M \longrightarrow M \oplus N \longrightarrow N \longrightarrow 0$ . □

**Corolário 3.10.** *Sejam $A$ Noetheriano à esquerda e $M$ é um $A$-módulo à esquerda finitamente gerado, então $M$ é um $A$-módulo Noetheriano à esquerda.*

*Demonstração.* Suponha que $M$ seja gerado pelo conjunto $\{m_1, ..., m_s\}$. Considere o mapa sobrejetivo de $A$-módulos, $\varphi : A^s \to M$ que leva $(a_1, ..., a_s)$ a $a_1 m_1 + \cdots + a_s m_s$. Como $A$ é Noetheriano, segue que $A^s$ também será. Segue da sequência exata $0 \longrightarrow \ker\varphi \longrightarrow A^s \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$ , que $M$ é Noetheriano à esquerda. □

**Definição 3.11.** *Um $A$-módulo $M$ satisfaz a condição de maximalidade para submódulos se cada conjunto não vazio de submódulos de $M$ contém um elemento maximal com respeito a inclusão.*

**Definição 3.12.** *Um $A$-módulo $M$ safisfaz a condição de minimalidade para submódulos se cada conjunto não vazio de submódulos de $M$ contém um elemento minimal com respeito a inclusão.*

**Lema 3.13.** *([2], Teorema 8.1.4, pág.373 ). Um $A$-módulo à esquerda $M$ é Noetheriano à esquerda (respectivamente, Artiniano à esquerda) se, e somente se, $M$ satisfaz a condição de maximalidade (respectivamente, mininalidade) para submódulos.*

*Demonstração.* Seja $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq ...$ uma cadeia de submódulos de $M$. Então o conjunto $\{M_i \mid i \geq 1\}$ possui um elemento maximal, digamos $M_n$. Para todo $i \geq n$, temos que $M_n \subseteq M_i$, mas $M_i \subseteq M_n$, para todo $n$. Portanto $M_i = M_n$.

Seja $S$ um conjunto não vazio de submódulos de $M$. Dado $M_0 \in S$, caso $S$ não possui elemento maximal, existe $M_1$ tal que $M_0 \subseteq M_1$, procedendo dessa maneira, obteremos uma cadeia $M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq ...$ não estacionária. □

**Teorema 3.14.** ([2], *Teorema* 8.1.9, *pág.*375 ). *Um $A$-módulo à esquerda $M$ é Noetheriano à esquerda se, e somente se, cada submódulo de $M$ é finitamente gerado.*

*Demonstração.* Seja $N$ é um submódulo de $M$. Tome $S$ o conjunto de todos os submódulos finitamente gerados de $N$. $S$ é não vazio, já que $0 \in S$. Temos que $S$ contém um elemento maximal $L$, com $L$ finitamente gerado. Sejam $l_1, ..., l_s$ os geradores de $L$. Para cada $n \in N$, considere $D_n$ o submódulo gerado por $n, l_1, ..., l_s$. Como $D_n \subseteq S$ e $L \subseteq D_n$, logo $n \in D_n = L$, para cada $n \in N$, portanto $N \subseteq L$.

Seja $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq ...$ uma cadeia de submódulos de $M$. $\bigcup_{i \geq 1} M_i$ é um submódulo finitamente gerado. Sejam $m_1, ..., m_s$ os geradores de $\bigcup_{i \geq 1} M_i$. Cada $m_j$ é um elemento de algum $M_j$. Existe $n$ tal que $m_j \in M_n$, para cada $j = 1, ..., s$, portanto $M_i = M_n$ para $i \geq n$. $\square$

**Corolário 3.15.** *Se $A$ é uma $K$-álgebra de dimensão finita, então $A$ é Artiniano.*

*Demonstração.* Seja $J_1 \supseteq J_2 \supseteq ...$ uma sequência de ideais à esquerda de $A$, temos que $\dim_A \geq \dim_K J_1 \geq \dim_K J_2 \geq ...$ . Como $A$ tem dimensão finita como $K$-espaço, existe uma quantidade finita de desigualdades estritas, portanto a cadeia é estacionária. $\square$

# 4 Módulos semissimples, radicais de $A$-módulos

**Lema 4.1.** ([1], *Cor* 1.2.3, *pág.*8). (***Lema de Nakayama***)*: Sejam $A$ uma $K$-álgebra com unidade, $M$ um $A$-módulo à esquerda finitamente gerado e $I \subset \mathrm{J}(A)$ um ideal de $A$. Se $IM = M$, então $M = 0$.*

*Demonstração.* Suponha $IM = M$ e $M = Am_1 + \cdots + Am_s$. Faremos indução sobre o número de geradores. Se $s = 1$, então $Am_1 = Im_1$, logo $m_1 = xm_1$, para algum $x \in I$. Como $m_1(1-x) = 0$ e $1 - x$ é invertível, segue que $m_1 = 0$.

Suponha que seja válido para $s - 1$. Como $M = IM$, então $m_1 = m_1x_1 + \cdots + m_sx_s$, para cada $x_1, ..., x_s \in I$. Como $m_1(1 - x_1) = x_2m_2 + \cdots + x_sm_s$, segue que $m_1 \in Am_2 + \cdots + Am_s$, já que $1 - x$ invertível. Portanto $M = Am_2 + \cdots + Am_s$, aplicando a hipótese de indução, concluímos que $M = 0$. $\square$

**Corolário 4.2.** ([1], *Prop* 1.2.3, *pág.*8 ). *Se $A$ é uma $K$-álgebra de dimensão finita com unidade, então o $\mathrm{J}(A)$ é nilpotente.*

*Demonstração.* Considere a cadeia

$$A \supseteq \mathrm{J}(A) \supseteq (\mathrm{J}(A))^2 \supseteq ... \supseteq (\mathrm{J}(A))^m \supseteq (\mathrm{J}(A))^{m+1} \supseteq ....$$

Como $\dim_K A < \infty$, segue que $(\mathrm{J}(A))^s = (\mathrm{J}(A))^s(\mathrm{J}(A))$, para algum $s$. Pelo Lema de Nakayama, $(\mathrm{J}(A))^s = 0$. $\square$

**Definição 4.3.** *Um $A$-módulo à esquerda $M$ é* ***semissimples*** *se é soma direta de $A$-módulos simples.*

**Lema 4.4.** ([1], *Lema* 1.3.3, *pág.*14 ). *Seja $A$ uma $K$-álgebra de dimensão finita.*

(*a*) *Um $A$-módulo à esquerda $M$ é semissimples se, e somente se, para cada submódulo $N$ de $M$ existe um submódulo $L$ de $M$ tal que $L \oplus N = M$.*

(*b*) *Um submódulo de um módulo semissimples é semissimples.*

*Demonstração.* (*a*) $M$ é semissimples, portanto $M = \oplus_{i=1}^{s} S_i$, onde $S_1, ..., S_s$ são módulos simples. Sejam $N$ um submódulo de $M$ e $\{S_{j_1}, ..., S_{j_r}\}$ uma família maximal de módulos do conjunto $\{S_1, ..., S_s\}$ tal que a interseção de $N$ com o módulo $L = \oplus_{t=1}^{r} S_{j_t}$ é nula. Temos que $N \cap (L + S_t) \neq 0$, para todo $t \notin \{j_1, ..., j_r\}$, portanto $(L + N) \cap S_t \neq 0$. Como $S_t$ é simples, $(L + N) \cap S_t = S_t$, então $S_t \subseteq L + N$, para todo $t \notin \{j_1, ..., j_r\}$. Portanto $M = N \oplus L$.

Se $\dim_K M = 1$, então $M$ é simples. Assuma $\dim_K M > 1$. Seja $N$ um submódulo simples de $M$, existe submódulo $N'$ tal que $M = N \oplus N'$. Seja $U$ um submódulo simples de $N'$ com $U'$ o submódulo tal que $M = U \oplus U'$. Para cada elemento $x \in N'$, temos que $x = u + u'$, onde $u \in U$ e $u' \in U'$, logo $u' = x - u \in N' \cap U'$. Como $N' = U \oplus (U' \cap N')$, pela hipótese de indução, $N'$ é semissimples, portanto $N' = \oplus_{i=2}^{n} N_i$, com cada $N_i$ simples, para $i = 2, ..., n$. Portanto $M = \oplus_{i=1}^{n} N_i$, onde $N_1 = N$.

(*b*) Seja $L$ um submódulo de $M$. Considere $N$ um submódulo de $L$, portanto $N$ é um submódulo de $M$, pelo item anterior, existe $P$ tal que $M = N \oplus P$. Como $L = M \cap L = (N \oplus P) \cap L = (N \cap L) + (P \cap L) = N + (P \cap L)$ e $N \cap (P \cap L) = (N \cap P) \cap L = \{0\}$, segue que $L = N \oplus (P \cap L)$. Usando o item anterior concluímos que $L$ é semissimples.

□

**Definição 4.5.** *Sejam $A$ um anel e $M$ um $A$-módulo à esquerda. Um submódulo $N$ de $M$ é chamado* ***maximal*** *ou* ***cossimples*** *se o quociente $M/N$ é um módulo simples.*

**Definição 4.6.** *O radical de $M$, denotado por* $\mathrm{rad}M$, *é a interseção de todos os submódulos maximais de $M$.*

**Proposição 4.7.** (*[1], Prop* 1.3.7, *pág.*15 ). *Seja $A$ uma $K$-álgebra de dimensão finita. Sejam $L, M$ e $N$ $A$-módulos à esquerda:*

(*a*) *$m \in \mathrm{rad}M$ se, e somente se, $f(m) = 0$, para todo $f \in \mathrm{Hom}_A(M, S)$ com $S$ sendo um $A$-módulo à esquerda simples;*

(*b*) *$f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$, então $f(\mathrm{rad}M) \subseteq \mathrm{rad}N$;*

(*c*) *$\mathrm{rad}(M \oplus N) = \mathrm{rad}M \oplus \mathrm{rad}N$;*

(*d*) *$L + \mathrm{rad}M = M$, para algum submódulo $L$ de $M$, então $L = M$;*

*Demonstração.* (*a*) Se $L$ é um $A$-submódulo à esquerda maximal de $M$, então $M/L$ é um $A$-módulo simples. Temos um epimorfismo canônico $\varphi : M \to M/L$ com $\ker\varphi = L$.

Seja $f : M \to S$ um homomorfismo não nulo, onde $S$ é um módulo simples, segue que $f$ é um epimorfismo, e $M/\ker f \cong S$, portanto $\mathrm{Ker} f$ é um submódulo maximal;

(*b*) Sejam $m \in \mathrm{rad}M$ e $g : N \to U$, onde $U$ simples. Como $gf \in \mathrm{Hom}(M, U)$, segue que $0 = (g \circ f)(m) = g(f(m))$, portanto $f(m) \in \mathrm{rad}N$.

(*c*) Como $M \to M \oplus N$ e $N \to M \oplus N$ são homomorfismo de $A$-módulos, segue que $\mathrm{rad}M, \mathrm{rad}N \subseteq \mathrm{rad}(M \oplus N)$, portanto $\mathrm{rad}M \oplus \mathrm{rad}N \subseteq \mathrm{rad}(M \oplus N)$.

Seja $x \in \mathrm{rad}(M \oplus N)$. Para cada submódulo maximal $M_1$ de $M$, segue que $M_1 \oplus N$ é um submódulo maximal de $M \oplus N$. Como $x = (x_1, x_2) \in \bigcap_{M_1 \text{ maximal}} N_1 \oplus N = \mathrm{rad}M_1 \oplus N$, segue que $x_1 \in \mathrm{rad}M_1$. De maneira análoga, $x_2 \in \mathrm{rad}M_2$, portanto $x \in \mathrm{rad}M \oplus \mathrm{rad}N$.

(*d*) Seja $L$ um submódulo próprio de $M$ tal que $M = L + \mathrm{rad}M$. Seja $X$ um submódulo maximal de $M$ contendo $L$. Como $L \subsetneq X$ e $\mathrm{rad}M \subseteq X$, segue que $M \subsetneq X$.

□

**Corolário 4.8.** (*[1], Lema* 1.3.9, *pág.*17 ). *Seja $A$ uma $K$-álgebra com unidade. Se $S$ é um $A$-módulo simples, então $(\mathrm{rad}A)S = 0$.*

*Demonstração.* Como $S$ é um $A$-módulo simples, temos que $S$ é cíclico. Pelo Lema de Nakayama, $S \neq (\mathrm{rad}A)S$. Como $(\mathrm{rad}A)S$ é submódulo de $S$, segue que $(\mathrm{rad}A)S = 0$. □

**Corolário 4.9.** (*[1], Lema* 1.3.8, *pág.*16 ). *Sejam $A$ uma $K$-álgebra com unidade e $M$ um $A$-módulo à esquerda. Se $L$ é um submódulo de $M$ tal que $M/L$ é semissimples, então $\mathrm{rad}M \subseteq L$.*

*Demonstração.* Considere o homomorfismo canônico $\pi : M \to M/L$, pelo item (*c*) da Proposição (4.7), segue que $\pi(\mathrm{rad}M) \subseteq \mathrm{rad}(M/L) = 0$, concluindo que $\pi(\mathrm{rad}M) \subseteq \mathrm{Ker}\pi = L$. □

**Lema 4.10.** *Seja $A$ uma $K$-álgebra com unidade, então $A \cong \mathrm{End}(\,_AA)$.*

*Demonstração.* Temos que

$$\begin{array}{rcc} \varphi : A & \to & \mathrm{End}(_AA)^{op} \\ a & \mapsto & f_a, \end{array}$$

onde $f_a :_A A \to_A A$ é dado por $f_a(x) = xa$, é um isomorfismo de $K$-álgebras. Seja $f_a = 0$, então $ax = 0$ para todo $x \in A$, em particular no caso $x = 1$, concluindo que $a = 0$. Seja $g \in \mathrm{End}(_AA)$, $g(1x) = g(1)x = f_{g(1)}(x)$, ou seja $\varphi(g(1)) = g$. □

**Lema 4.11.** *Seja $A$ uma $K$-álgebra com unidade e $L$ um $A$-módulo simples. Então,* $\mathrm{End}(L^n) \cong \mathbb{M}_n(\mathrm{End}L)$.

*Demonstração.* Defina $e_i : L \to L^n$ um mapa dado por $x \mapsto (0, ..., \underbrace{x}_{i}, ..., 0)$ e $\pi_i : L^n \to L$ um mapa dado por $(x_1, ..., x_i, ..., x_n) \mapsto x_i$. Temos que $p_i e_j = 1_L$, se $i = j$, e $p_i e_j = 0$, sempre que $i \neq j$. Tome

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathrm{End}L^n & \to & \mathbb{M}_n(\mathrm{End}L) \\ f & \mapsto & (f_{ij}) \end{array},$$

onde $f_{ij} = \pi_j f e_i$. Temos que $\varphi$ é um homomorfismo de $K$-álgebras. De fato,

$(a)$

$$\begin{aligned} \varphi(f + kg) &= \varphi(\sum_{i,j=1}^{n} \pi_j f e_i + \pi_j k g e_i) \\ &= (f_{ij} + k g_{ij}) \\ &= (f_{ij}) + k(g_{ij}) \\ &= \varphi(f) + k\varphi(g); \end{aligned}$$

$(b)$

$$\begin{aligned} \varphi(fg) &= \varphi((\sum_{i,j=1}^{n} \pi_j f e_i)(\sum_{i,j=1}^{n} \pi_j f e_i)) \\ &= \varphi(\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \pi_j f e_k \pi_k g e_j) \\ &= (\sum_{k=1}^{n} f_{ik} g_{kj}) \\ &= (f_{ij})(g_{ij}) = \varphi(f)\varphi(g); \end{aligned}$$

$(c)$

$$\begin{aligned} \varphi(1_{L^n}) &= \varphi(\sum_{i,j=1}^{n} \pi_j 1_{L^n} e_i) \\ &= \varphi(\sum_{i}^{n} \pi_i e_i) \\ &= (\pi_i e_i) \\ &= (1_{ii}) \\ &= 1_{\mathbb{M}_n(\mathrm{End}L)}. \end{aligned}$$

Se $f_{ij} = 0$ para todo $i, j = 1, ..., n$, então $f = 0$.
Seja $(f_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathrm{End}L)$. Como

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1, ..., x_n) \\ &= f(x_1, ..., 0) + f(0, x_2, ..., 0) + ... + f(0, ..., x_n) \\ &= fe_1(x) + ... + fe_n(x) \\ &= (\pi_1 f e_1(x), ..., \pi_n f e_1(x)) + ... + (\pi_1 f e_n(x), ..., \pi_n f e_n(x)) \\ &= (\sum_{i=1}^{n} \pi_1 f e_i(x), ..., \sum_{i=1}^{n} \pi_n f e_i(x)) \\ &= (\sum_{i=1}^{n} f_{i1}(x), ..., \sum_{i=1}^{n} f_{in}(x)), \end{aligned}$$

segue que $\varphi$ é um isomorfismo.

□

**Corolário 4.12.** *Sejam $A$ uma $K$-álgebra com unidade, onde $K$ é um corpo algebricamente fechado, e $L$ um $A$-módulo à esquerda, então* $\mathrm{End}L^n \cong \mathbb{M}_n(K)$.

*Demonstração.* Pelo Lema (4.11) e pelo Corolário (1.10), segue o resultado. □

**Lema 4.13.** ([3], *Prop* 6.6.5, *Pág.*173 ). *Sejam $A$ uma $K$-álgebra com unidade sobre um corpo algebricamente fechado e $M$ um $A$-módulo semissimples, então existem inteiros positivos $n_1, ..., n_s$ tais que* $\mathrm{End}M \cong \mathbb{M}_{n_1}(K) \times ... \times \mathbb{M}_{n_s}(K)$.

*Demonstração.* Seja $M = \oplus i = 1^s L_s^{n_s}$, onde cada $L_s$ é simples, e para cada $ineqj$, $L_i \ncong L_j$. Temos que $\mathrm{Hom}(L_i, L_j) = 0$, caso contrário, existiria um homomorfismo não nulo $f \in \mathrm{Hom}(L_i, L_j)$, pelo Lema de Schur, teríamos que $L_i \cong L_j$.

Como $\mathrm{End}L_i^{n_i} \cong \mathbb{M}_{n_i}(K)$. De forma similar ao resultado (4.11), obtemos $\mathrm{End}(L_1^{n_1} \oplus ... \oplus L_s^{n_s}) \cong ((\mathrm{Hom}(L_i^{n_i}, L_j^{n_j}))_{ij})$ definindo o homomorfismo que leva $f$ a $(f_{ij})$, onde $f_{ij} = \pi_j f e_i$. Já que $\mathrm{Hom}(L_i, L_j) = 0$, segue que $((\mathrm{Hom}(L_i^{n_i}, L_j^{n_j}))_{ij}) \cong ((\mathrm{End}L_i^{n_i})_{ii}) \cong \mathrm{End}L_1^{n_1} \times ... \times \mathrm{End}L_s^{n_s} \cong \mathbb{M}_{n_1}(K) \times ... \times \mathbb{M}_{n_s}(K)$. □

**Definição 4.14.** *Um ideal à esquerda não nulo $I$ é chamado de* ***minimal*** *se se não existir ideal à esquerda $J$ satisfazendo $0 \subsetneq J \subsetneq I$.*

**Proposição 4.15.** *Seja $A$ uma $K$-álgebra de dimensão finita.*

($a$) *Cada ideal à esquerda minimal $I$ é um $A$-módulo à esquerda simples.*

($b$) *Cada ideal à esquerda $I$ contém um ideal à esquerda minimal.*

*Demonstração.* Se $I$ contém um submódulo $J$ com $0 \subsetneq J \subsetneq I$, então $J$ é um ideal à esquerda de $A$, contrariando a minimalidade de $I$.

Como $A$ é uma $K$-álgebra de dimensão finita, então $A$ é Artiniano. Seja $S$ uma família de ideais não nulos contidos em $I$. Como $I$ é não nulo, então $S \neq \emptyset$. Pelo Lema (3.13) $S$ possui elemento minimal. □

**Teorema 4.16.** ([6], *Prop* 8.3.5, *pág.*555 ).(***Teorema de Wedderburn-Artin***)*:Seja $A$ uma $K$-álgebra com unidade de dimensão finita, onde $K$ é um corpo algebricamente fechado. As seguintes afirmações são equivalentes:*

($a$) *$A$ é uma álgebra semissimples;*

($b$) *$A$ é um $A$-módulo semissimples;*

($c$) *existem inteiros positivos $n_1, ..., n_s$ tais que $A \cong \mathbb{M}_{n_1}(K) \times ... \times \mathbb{M}_{n_s}(K)$.*

*Demonstração.* Seja $I$ um ideal minimal, portanto um $A$-módulo simples não nulo. Como $\mathrm{J}(A) = 0$, existe um ideal maximal $M$ tal que $M$ não contém $I$. Como $I \cap M$ é um submódulo de $I$, então $I \cap M = 0$ ou $I \cap M = I$, mas se $I \cap M = I$, então $I \subseteq M$, absurdo, logo $I \cap M = 0$. Como $M \subsetneq M + I \subseteq A$ e $M$ é maximal, segue que $M + I = A$, portanto $A = M \oplus I$.

Como $A$ é Artiniano, escolha $I_1$ um ideal à esquerda minimal de $A$. Pelo raciocínio do parágrafo anterior, seja $J_1$ um ideal à esquerda de $A$ tal que $I_1 \oplus J_1 = A$. Como $J_1$ contém um ideal à esquerda minimal $I_2$, existe ideal $J_2$ tal que $J_1 = J_2 \oplus I_2$. Procedendo dessa forma, construímos uma sequência $J_1 \supsetneq J_2 \supsetneq J_3 \supsetneq ....$ Existe inteiro positivo $m$ tal que $J_m$ é o ideal nulo, então $A = I_1 \oplus ... \oplus I_m$, onde cada $I_j$ é minimal, portanto simples, provando $(a) \Rightarrow (b)$.

Como $A$ é um $A$-módulo semissimples, ou seja, $A = L_1^{n_1} \oplus ... \oplus L_s^{n_s}$, onde $L_i \ncong L_j$ sempre que $i \neq j$. Pelo Corolário (4.13) e pelo Lema (4.10) ganhamos a implicação $(b) \Rightarrow (c)$.

Pela Proposição (2.19), $\mathrm{J}(\mathbb{M}_{n_1}(K) \times ... \times \mathbb{M}_{n_s}(K)) \subseteq \mathrm{J}(\mathbb{M}_{n_1}(K)) \times ... \times \mathrm{J}(\mathbb{M}_{n_s}(K)) = 0$. Portanto $\mathrm{J}(A) = 0$, ou seja, $A$ é uma álgebra semissimples. □

**Lema 4.17.** *Seja $A = A_1 \times ... \times A_s$, onde cada $A_i$ é um $A_i$-módulo à esquerda semissimples. Então $A$ é um $A$-módulo semissimples.*

*Demonstração.* Temos que $A_i$ é um $A_i$-módulo à esquerda semissimples, então $A_i = I_{i1} \oplus ... \oplus I_{it_i}$, onde cada $I_{is}$ é um ideal à esquerda simples. Cada $(0, .., I_{is}, ..., 0)$ é um ideal à esquerda minimal de $A$, caso contrário, teríamos que existiria um ideal à esquerda $0 \neq (0, .., J_{is}, ..., 0) \subseteq (0, .., I_{is}, ..., 0)$, ou seja, $J_{is} \subseteq I_{is}$, contrariando a minimalidade de $I_{is}$. Então $A$ é a soma direta de ideais à esquerda simples. □

**Proposição 4.18.** *Seja $A$ uma $K$-álgebra com unidade de dimensão finita. Se $I$ é um ideal à esquerda nilpotente e $A/I$ é semissimples, então $I = \mathrm{J}(A)$.*

*Demonstração.* Como $I$ é nilpotente, pelo Lema (2.15), temos que $I \subseteq \mathrm{J}(A)$.Como $A/I$ é semissimples, pela segunda afirmação do Lema (2.14), J$A$ é o menor ideal de $A$ tal que $A/I$ é semissimples, portanto $\mathrm{J}(A) \subseteq I$. □

**Corolário 4.19.** ([4], *Prop* 1.2.8, *pág.*5 ). *Seja $A$ uma $K$-álgebra de dimensão finita e seja $B$ um subálgebra de $A$ tal que $B + \mathrm{rad}^2 A = A$. Então $A = B$.*

*Demonstração.* Como $A$ é uma $K$-álgebra de dimensão finita, existe inteiro positivo $m$ tal que $\mathrm{J}(A)^m = 0$. Temos que $B + \mathrm{rad}^n A = B + \mathrm{rad}^{n+1} A$ para todo $n \geq 2$.

De fato, sejam $x \in \mathrm{J}(A)^{n-1}$ e $y \in \mathrm{J}(A)$, escolha $x' \in \mathrm{J}(A)^{n-1} \cap B$ tal que $x - x' \in \mathrm{J}(A)^n$ e $y' \in \mathrm{J}(A) \cap B$ tal que $y - y' \in \mathrm{J}(A)^2$. Então

$$xy = x(y - y') + (x - x')y' + x'y';$$

assim $x(y - y') \in \mathrm{J}(A)^{n-1}\mathrm{J}(A)^2$, logo $(x - x')y' \in \mathrm{J}(A)^n(\mathrm{J}(A) \cap B)$ e $x'y' \in (\mathrm{J}(A)^{n-1} \cap B)(\mathrm{J}(A) \cap B)$, portanto $xy \in \mathrm{J}(A)^{n+1} + B$.

Como $\mathrm{J}(A)^{n+1} \subseteq \mathrm{J}(A)^n$, segue que $\mathrm{J}(A)^{n+1} + B \subseteq \mathrm{J}(A)^n + B$. Portanto $A = B + \mathrm{J}(A)^2 = B + \mathrm{J}(A)^m = B + 0 = B$. □

**Teorema 4.20.** ([1], *Prop* 1.1.6, *pág.*6 ). *Seja $A$ uma $K$-álgebra de dimensão finita. Se $K$ é um corpo algebricamente fechado, existe uma subálgebra $B$ de $A$ tal que $A = \mathrm{rad}A \oplus B$ como $K$-espaço vetorial e o homomorfismo de álgebras canônico $\pi : A \to A/\mathrm{rad}A$ restrito a $B$ é um isomorfismo.*

## 5 Decomposição em somas diretas

Assumiremos a partir de agora que $A$ é uma $K$-álgebra com unidade de dimensão finita.

**Definição 5.1.** *Seja $A$ uma $K$-álgebra.*

(*a*) *$e \in A$ é chamado de* ***idempotente*** *se $e^2 = ee = e$;*

(*b*) *$e \in A$ é chamado de* ***central*** *se $ea = ae$ para todo $a \in A$;*

(*c*) *$e_1, e_2 \in A$ são chamados de* ***ortogonais*** *se $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$;*

(*d*) *um idempotente $e \in A$ é chamado de* ***primitivo*** *se $e$ não pode ser escrito como soma de dois elementos idempotentes ortogonais não nulos.*

**Definição 5.2.** *Uma $K$-álgebra não-trivial $A$ é chamada de* ***conexa*** *se $A = A_1 \times A_2$, onde $A_1, A_2$ são duas $K$-álgebras, implicar que $A_1 = 0$ ou $A_2 = 0$.*

**Definição 5.3.** *Uma $K$-álgebra $A$ é chamada de* ***local*** *se os únicos idempotentes de $A$ são os triviais.*

**Lema 5.4.** *Se $A$ é uma $K$-álgebra conexa se, e somente se, os únicos idempotentes centrais de $A$ são* 0 *e* 1.

*Demonstração.* Seja $c$ um idempotente central de $A$ diferente dos triviais. Temos que $c^2 = c$ e $c(1-c) = 0$, então $A = Ac \times A(1 - c)$ é uma decomposição não trivial de $A$.

Seja $A = A_1 \times A_2$ uma decomposição não trivial de $A$, temos que $(1, 0)^2 = (1, 0)$ e $(1, 0)(a, b) = (a, 0) = (a, b)(1, 0)$ portanto, $(1, 0)$ idempotente central não trivial de $A$. □

Assuma $e$ um idempotente não trivial, então $1-e$ é um idempotente não trivial. Os idempotentes $e$ e $1 - e$ são ortogonais e existe uma decomposição não trivial $A = Ae \oplus A(1 - e)$.

Seja $A = M_1 \oplus M_2$ uma decomposição não-trivial de $A$-módulos. Seja $1 = e_1 + e_2$, com $e_i \in M_i$, com $i = 1, 2$, temos que $e_1, e_2$ são ortogonais. De fato, $e_1e_2, e_2e_1 \in M_1 \cap M_2$, então $e_1e_2 = 0 = e_2e_1$. Temos que $e_1$ e $e_2$ são idempotentes, já que $e_1 = e_1 1 = e_1(e_1 + e_2) = e_1^2 + e_1e_2 = e_1^2$ e $e_2 = e_2 1 = e_2(e_1 + e_2) = e_2^2$. Portanto $A = Ae_1 \oplus Ae_2$, e $M_i = Ae_i$ para $i = 1, 2$.

**Lema 5.5.** *$M_i = Ae_i$ é indecomponível se, e somente se, $e_i$ é primitivo.*

*Demonstração.* Se $e_i$ não é primitivo, então existem $e_{i_1}, e_{i_2}$ idempotentes não triviais tais que $e_i = e_{i_1} + e_{i_2}$ e podemos decompor $M_i$ como $M_i = Ae_{i_1} \oplus Ae_{i_2}$, contradizendo nossa hipótese.

Se $M_i$ é decomponível, então existe uma decomposição não-trivial de $A$-módulos $M_i = M_{i_1} \oplus M_{i_2}$, e $e_i = e_{i_1} + e_{i_2}$, onde $e_{i_1} \in M_{i_1}$ e $e_{i_2} \in M_{i_2}$. Segue que $e_{i_1}, e_{i_2}$ são idempotentes e ortogonais, portanto $e_i$ é não primitivo. $\square$

**Teorema 5.6.** *([1], Prop 1.4.2, pág.19 ). Sejam $A$ uma $K$-álgebra, e um elemento idempotente e $M$ um $A$-módulo à direita.*

(a) *O mapa $K$-linear*

$$\begin{array}{rcl} \theta_M : \mathrm{Hom}_A(eA, M) & \to & Me \\ \varphi & \mapsto & \varphi(e) \end{array},$$

*é um isomorfismo de $eAe$-módulos à direita.*

(b) *O isomorfismo $\theta_{eA} : \mathrm{End}(eA) \to eAe$ de $eAe$-módulos à direita, induz um isomorfismo de $K$-álgebras.*

*Demonstração.* Sejam $f, g \in \mathrm{Hom}_A(eA, M)$ e $k \in K$. Temos que $\theta_{eA}(f + kg) = (f + kg)(e) = f(e) + (kg)(e) = f(e) + k(g(e)) = \theta_{eA}(f) + k\theta_{eA}(g)$. Portanto $\theta_{eA}$ é um homomorfismo de $A$-módulos. Como $f(e^2) = f(ee) = f(e)e$, logo $f(e)e \in Me$. Se $f(e) = g(e)$, então $f(ea) = f(e)a = g(e)a = g(ea)$, para todo $a \in A$. Concluímos que $f = g$.

Se restringirmos o homomorfismo $f : A \to M$ que leva $a$ a $ma$ ao $eAe$-módulo $eA$, iremos obter o homomorfismo $f : eA \to M$, que leva $e$ em $me$, portanto o mapa $\theta_M$ é um epimorfismo. Logo um isomorfismo. Provando o item $(a)$.

Para demonstramos o item $(b)$, basta tomarmos $M = eA$. Como $\theta_{eA}(f)\theta_{eA}(g) = f(e)g(e) = f(eg(e)) = f(g(e^2)) = f(g(e)) = f \circ g(e) = \theta_{eA}(f \circ g)$ e $\theta_{eA}(1_{eA}) = 1_{eA}(e) = e$, pelo item $(a)$, $\theta_{eA}$ é isomorfismo de $K$-álgebras.

$\square$

**Lema 5.7.** *([1], Prop 1.4.4, pág.19 ). Seja $A$ uma $K$-álgebra. Os idempotentes da álgebra $B = A/\mathrm{J}(A)$ pode ser levantado ao módulo $A$, isto é, para cada elemento idempotente $n = g + \mathrm{J}(A) \in B$, onde $g \in A$, existe um idempotente $e$ de $A$ tal que $g - e \in \mathrm{J}(A)$.*

*Demonstração.* Existe um inteiro positivo $m$ tal que $\mathrm{J}(A)^m = 0$. Temos que $(g + \mathrm{J}(A))^2 = g + \mathrm{J}(A)$, portanto $g - g^2 \in \mathrm{J}A$. Além disso $(g - g^2)^m = 0$. Portanto:

$$g^m(1-g)^m = g^m \left( \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} (-1)^i g^i \right) = g^m - g^{m+1}t,$$

onde $t = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} (-1)^{i-1} \binom{m}{i} g^{i-1}$. Temos que $g^m = g^{m+1}t$ e $gt = tg$.

Tome $e = (gt)^m$, segue que $e = (gt)^m = g^m t^m = g^{m+1}t^{t+1} = \ldots = g^{2m}t^{2m} = (gt)^{2m} = e^2$, ou seja, $e$ é idempotente.

Como, $g - g^m = g(1 - g^{m-1}) = g(1-g)(1 + \cdots + g^{m-2}) = (g - g^2)(1 + \cdots + g^{m-2}) \in \mathrm{J}(A)$, seque que $g - g^m \in \mathrm{J}(A)$

Basta concluirmos que $g - gt \in \mathrm{rad}A$. Temos

$$\begin{aligned} g + \mathrm{rad}A &= g^m + \mathrm{J}(A) \\ &= g^{m+1}t + \mathrm{J}(A) \\ &= (g^{m+1} + \mathrm{J}(A))(t + \mathrm{J}(A)) \\ &= (g^m + \mathrm{J}(A))(g + \mathrm{J}(A))(t + \mathrm{J}(A)) \\ &= (g + \mathrm{J}(A))(g + \mathrm{J}(A))(t + \mathrm{J}(A)) \\ &= (g^2 + \mathrm{J}(A))(t + \mathrm{J}(A)) \\ &= (g + \mathrm{J}(A))(t + \mathrm{J}(A)) \\ &= (gt + \mathrm{J}(A)); \end{aligned}$$

logo $e + \mathrm{J}(A) = (gt)^m + \mathrm{J}(A) = (gt + \mathrm{J}(A))^m = (g + \mathrm{J}(A))^m = g^m + \mathrm{J}(A) = g + \mathrm{J}(A)$, portanto $g - e \in \mathrm{rad}A$. $\square$

**Proposição 5.8.** (*[1], Cor* 1.4.7, *pág.*22 ) *Um idempotente $e \in A$ é primitivo se, e somente se, os únicos idempotentes da álgebra $eAe$ são* 0 *e* $e$.

*Demonstração.* Suponha que exista um idempotente $x = eae$ diferente dos triviais. Temos que $e - x$ é idempotente não trivial . De fato $(e-x)^2 = e - x - x + x = e - x$. Como $e = x + (e - x)$, seque que $e$ não é primitivo.

Se $e$ não é primitivo, existem $e_1, e_2$ não nulos tais que $e = e_1 + e_2$ e $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$. Temos que $e_ie = e_i(e_1 + e_2) = e_i$ para $i = 1, 2$, portanto $(ee_ie)^2 = ee_ieee_ie = ee_iee_1e = ee_ie_ie = ee_ie$ para $i = 1, 2$, ou seja, $ee_1e$ e $ee_2e$ são idempotentes não triviais. □

**Proposição 5.9.** (*[1], Prop* 1.4.5, *pág.*20 ). *Seja $A$ é uma $K$-álgebra e considere $B = A/\mathrm{J}(A)$. Cada ideal à esquerda $I$ de $B$ é soma direta de ideais à esquerda simples da forma $Be$, onde $e$ é um idempotente e primitivo de $B$.*

*Demonstração.* Seja $S$ um ideal à esquerda simples de $B$ contido em $I$ tal que a dimensão de $S$ seja minimal. Como $S$ é um $B$-módulo simples e $S^2 \neq 0$, pois caso contrário, teríamos que $0 \neq S \subseteq \mathrm{J}(B) = 0$.

Como $S^2 = S$, existe um $x \in S$ tal que $Sx = S$ e $x = ex$, para algum $e \in S$ não nulo. Pelo Lema de Schur, o homomorfismo $\varphi : S \to S$ dado por $\varphi(y) = yx$ é bijetivo. Já que $\varphi(e^2 - e) = (e^2 - e)x = eex - ex = ex - ex = 0$, segue que $e^2 = e$. Portanto $e \in S$ é um elemento idempotente. Então $S = Be$.

Como $B = Be \oplus B(1-e)$ e $I = S \oplus I(1-e)$ e $\dim_K(I(1-e)) < \dim_K(I)$. Procedendo de maneira similar para $I(1-e)$, obtemos o resultado. □

Um importante resultado é o Teorema da decomposição primária, ele nos diz que todo $A$-módulo $M$ pode ser decomposto como soma direta de $A$-módulos indecomponíveis. A prova do resultado pode ser encontrada em [1], página 23.

**Teorema 5.10.** (***Teorema da decomposição primária***). *Seja $A$ uma $K$-álgebra de dimensão finita.*

(*a*) *Cada $A$-módulo à esquerda $M$ possui decomposição $M \cong \oplus_{i=1}^{s} M_i$, onde cada $M_1, M_2, ..., M_s$ são $A$-módulos indecomponível e o endomorfismo de $K$-álgebras $\mathrm{End}M_j$ é local para cada $i = 1, ..., s$.*

(*b*) *Se $M \cong \oplus_{i=1}^{s} M_i \cong \oplus_{j=1}^{t} N_j$, onde $M_i$ e $N_j$ são indecomponíveis, então $s = t$ e existe uma permutação $\sigma$ de $\{1, ..., n\}$ tais que $M_i \cong N_{\sigma(i)}$, para cada $i = 1, ..., n$.*

Como uma $K$-álgebra $A$ pode ser vista como um $A$-módulo à esquerda. Segue do teorema anterior que $A$ possui decomposição em soma direta de módulos indecomponíveis:

$$A = P_1 \oplus P_2 \oplus ... \oplus P_m.$$

Como $1 = e_1 + ... + e_m$, segue que $A = Ae_1 + ... + Ae_n$, $P_i = Ae_i$. Cada $e_1, ..., e_m$ são idempotentes ortogonais primitivos. Isso inspira nossa próxima definição.

**Definição 5.11.** *O conjunto $\{e_1, ..., e_m\}$ acima é chamado de* ***conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos*** *de $A$.*

**Definição 5.12.** *Assuma que $A$ é uma $K$-álgebra com conjunto $\{e_1, ..., e_n\}$ sendo um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos de $A$. A álgebra $A$ é chamada de* ***básica*** *se $e_iA \ncong e_jA$, para todo $i \neq j$.*

**Proposição 5.13.** *Uma $K$-álgebra $A$ de dimensão finita é básica se, e somente se, a álgebra $A/\mathrm{rad}A$ é isomorfo ao produto $K \times ... \times K$ de cópias de $K$.*

Uma prova para esse resultado pode ser encontrado no cápitulo 1, seção 6 da referência [1].

# 6 Produto tensorial

**Definição 6.1.** *Sejam $M$ um $A$-módulo à direita , $N$ um $A$-módulo à esquerda e $P$ grupo abeliano. Um mapa $A$-balanceado de $M \times N$ a $P$ é uma função $f : M \times N \to P$ tal que para todo $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ e $a \in A$ :*

(*a*) $f(m + m', n) = f(m, n) + f(m', n)$;

(*b*) $f(m, n + n') = f(m, n) + f(m, n')$;

(c) $f(ma, n) = f(m, bn)$.

**Definição 6.2.** *Sejam $M$ um $A$-módulo à direita e $N$ um $A$-módulo à esquerda. Seja $F$ o grupo abeliano livre do conjunto $M \times N$. Seja $J$ o subgrupo de $F$ gerado por todos os elementos da forma:*

(a) $(m + m', n) - (m, n) - (m', n)$;

(b) $(m, n + n') - (m, n) + -(m, n')$;

(c) $(ma, n) - (m, bn)$;

*com $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ e $a \in A$. O grupo quociente $F/J$ é chamado de produto tensorial de $M$ e $N$, denotado por $M \otimes_A N$. A classe $(m, n) + J$ do elemento $(m, n)$ em $F$ é denotado por $m \otimes n$.*

Considere o mapa $i : M \times N \to M \otimes N$ definido por $i(m, n) = m \otimes n$. O mapa $i$ é um mapa $A$-balanceado. De fato,

(a) $i(m + m', n) = (m + m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n = i(m, n) + i(m', n)$;

(b) $i(m, n + n') = m \otimes (n + n') = m \otimes n + m \otimes n' = i(m, n) + i(m, n')$;

(c) $i(ma, n) = ma \otimes n = m \otimes an = i(m, an)$.

O mapa $i$ é chamado de mapa $A$-balanceado canônico.

**Proposição 6.3.** *Sejam $M$ um $A$-módulo à direita, $N$ um $A$-módulo à esquerda e $P$ um grupo abeliano. Se $g : M \times N \to P$ é um mapa $A$-balanceado, então existe um único homomorfismo de grupos $g' : M \otimes_A N \to P$ tal que $g'i = g$, onde $i : M \times N \to M \otimes_A N$ é o mapa canônico. $M \otimes_A N$ é unicamente determinado a menos de isomorfismo por essa propriedade.*

*Demonstração.* Seja $F$ o grupo abeliano livre do conjunto $M \times N$ e seja $J$ o subgrupo descrito na definição anterior. Já que $F$ é livre, $g : M \times N \to P$ determina um único homomorfismo de grupos $g_1 : F \to P$. Usando o fato de que $g$ é um mapa $A$-balanceado e $g$ um homomorfismo de grupos, obtemos :

(a)

$$\begin{aligned} g_1((m + m', n) - (m, n) - (m', n)) &= g_1(m + m', n) - g_1(m, n) - g_1(m', n) \\ &= g(m + m', n) - g(m, n) - g(m', n) \\ &= 0; \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} g_1((m, n + n') - (m, n) - (m, n')) &= g_1(m, n + n') - g_1(m, n) - g_1(m, n') \\ &= g(m, n + n') - g(m, n) - g(m, n') \\ &= 0; \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} g_1((ma, n) - (m, an) &= g_1(ma, n) - g_1(m, an) \\ &= g(ma, n) - g(m, na) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $J \subseteq \mathrm{Ker} g_i$, existe um homomorfismo induzido $g' : F/J \to P$ tal que $g'((m, n) + J) = g'i(m, n) = g(m, n)$. Mas $F/J = M \otimes_A N$ e $(m, n) + J = m \otimes n$. Segue que $g' : M \otimes_A N \to P$ é um homomorfismo tal que $g' \circ i(m, n) = g'(m \otimes n) = g(m, n)$ para todo $(m, n) \in M \times N$, isto é $g' \circ i = g$. Se $h : M \otimes_A N \to P$ é um homomorfismo com $h \circ i = g$, então

$$h(m \otimes n) = h \circ i(m, n) = g(m, n) = g' \circ i(m, n) = g'(m \otimes n)$$

para todo $(m \otimes n)$, portanto $h = g'$.

Sejam $S$ um grupo abeliano e $j : M \times N \to S$ uma mapa $A$-balanceado satisfazendo as propriedades do enunciado. Considere os seguintes diagramas:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "i"'] & S \\ & M \otimes_A N \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "j"'] & M \otimes_A N \\ & S \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Pela hipótese, existem únicos mapas $\alpha : M \otimes_A N \to S$ e $\beta : S \to M \otimes_A N$ tais que os diagramas acima sejam comutativo, em outras palavras, $\alpha \circ i = j$ e $\beta \circ j = i$. Temos que $\alpha \circ \beta(j) = \alpha(\beta(j)) = \alpha(i) = j$ e $\beta \circ \alpha(i) = \beta(\alpha(i)) = \beta(j) = i$, portanto $\alpha : M \otimes_A N \to S$ é um isomorfismo. Concluindo o resultado.

□

Se $M$ um $B$-$A$-bimódulo, $N$ um $A$-módulo à esquerda e $P$ um $B$-módulo à esquerda, então $g' : M \otimes_A N \to P$ é um homomorfismo de $B$-módulos à esquerda. Se $M$ é um $A$-módulo à direita, $N$ um $A$-$C$-bimódulo e $P$ um $C$-módulo à direita, então $g' : M \otimes_A N \to P$ é um homomorfismo de $C$-módulos à direita.

Sejam $A$ e $B$ duas $K$-álgebras. Já que $A$ e $B$ são $K$-módulos, então podemos definir o produto tensorial de $D = A \otimes_K B$.

Considere o mapa $\varphi : A \times B \times A \times B \to D$ definido por $\varphi(a, b, a', b') = aa' \otimes bb'$.

Como $\varphi$ é $K$-linear para cada coordenada, então $\varphi$ induz um homomorfismo de $K$-módulos $\psi : D \otimes D \to D$ definido por $\psi(a \otimes b \otimes a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$. $D = A \otimes_K B$ é uma $K$-álgebra com unidade.

**Proposição 6.4.** *Sejam $\mathbb{M}_n(K)$ e $\mathbb{M}_m(K)$ $K$-álgebras. Então $\mathbb{M}_n(K) \otimes \mathbb{M}_m(K) \cong \mathbb{M}_{nm}(K)$.*

*Demonstração.* Sejam $V_1 = \{e_{ij} | 1 \leq i, j \leq n\}$ e $V_2 = \{f_{rs} | 1 \leq r, s \leq m\}$ bases de $\mathbb{M}_n(K)$ e $\mathbb{M}_m(K)$, respectivamente. Temos que $\{e_{ij} \otimes f_{rs} | 1 \leq i, j \leq n, 1 \leq r, s \leq m\}$ formam uma base para $\mathbb{M}_n(K) \otimes \mathbb{M}_m(K)$. Temos que

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathbb{M}_n(K) \otimes \mathbb{M}_m(K) & \to & \mathbb{M}_{nm}(K) \\ e_{ij} \otimes f_{rs} & \mapsto & E_{i+n(r-1)\ j+n(s-1)} \end{array},$$

é um isomorfismo de álgebras. Como

$(a)$

$$\begin{aligned} \psi((e_{ij} \otimes f_{rs}) \otimes (e_{jp} \otimes f_{sv})) &= \psi(e_{ij}e_{jp} \otimes f_{rs}f_{sv}) \\ &= \psi(e_{ip} \otimes f_{rv}) \\ &= E_{i+n(r-1)\ p+n(v-1)} \\ &= E_{i+n(r-1)\ j+n(s-1)}E_{j+n(s-1)\ p+n(v-1)} \\ &= \psi((e_{ij} \otimes f_{rs}) \otimes \psi((e_{jp} \otimes f_{sv}); \end{aligned}$$

$(b)$

$$\begin{aligned} \psi(1) &= \psi(\sum_{i=1}^{n} e_{ii} \otimes \sum_{r=1}^{m} f_{rr}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \psi(e_{ii} \otimes f_{rr}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} E_{i+n(r-1)\ i+n(r-1)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

segue que $\psi$ é um homomorfismo de álgebras.

Seja $E_{lt}$, com $1 \leq l, t \leq nm$, pelo algoritmo da divisão temos que existem $1 \leq i, j \leq n$ e $1 \leq r, s \leq m$ tais que $l = i + n(r-1)$ e $t = j + n(s-1)$, assim $\psi(e_{ij} \otimes e_{rs}) = E_{lt}$.

Seja $0 = \psi(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} k_{ijrs}e_{ij}\otimes f_{rs}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} k_{ijrs}\psi(e_{ij}\otimes f_{rs}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} k_{ijrs}E_{i+n(r-1)\ j+n(s-1)}$, então $k_{ijrs} = 0$.

□

**Proposição 6.5.** *Temos que* $\mathbb{M}_n(K)^{op} \cong \mathbb{M}_n(K)$.

*Demonstração.* Defina o homomorfismo $\psi : \mathbb{M}_n(K) \to \mathbb{M}_n(K)^{op}$ que leva $A \mapsto A^t$, onde $A^t$ é a transposta de $A$. Como $\psi(A + B) = (A + B)^t = A^t + B^t = \psi(A) + \psi(B)$, $\psi(AB) = (AB)^t = B^tA^t = A^t.B^t = \psi(A)\psi(B)$ e $\psi(1) = 1^t = 1$, portanto homomorfismo. Como $\psi((A^t)^t) = A$ e $\psi(A) = A^t = 0$, implica que $A = 0$, segue que $\psi$ é um isomorfismo. □

**Lema 6.6.** *Sejam $A$ e $B$ $K$-álgebras com unidades e $M$ um $A$-$B$-bimódulo. Então $M$ é um $A \otimes_K B^{op}$-módulo à esquerda.*

*Demonstração.* Seja $m \in M$, seja $f_m : A \times B^{op} \to M$ que leva $(a, b) \mapsto (am)b$ para todo $a \in A$ e $b \in B$, $f_m$ é $K$-bilinear. De fato,

$(a)$

$$\begin{aligned} f_m(a_1 + ka_2, b_1) &= ((a_1 + ka_2)m)b_1 \\ &= a_1mb_1 + ka_2mb_1 \\ &= a_1mb_1 + k(a_2mb_1) \\ &= f_m(a_1, b_1) + kf_m(a_2, b_1); \end{aligned}$$

$(b)$

$$\begin{aligned} f_m(a_1, b_1 + kb_2) &= ((a_1)m)(b_1 + kb_2) \\ &= a_1mb_1 + a_1mkb_2 \\ &= a_1mb_1 + k(a_1mb_2) \\ &= f_m(a_1, b_1) + kf_m(a_1, b_2). \end{aligned}$$

Pela propriedade universal do produto tensorial existe um único homomorfismo induzido $\varphi_m : A\otimes_K B^{op} \to M$, onde $\varphi_m(a\otimes b) = f_m(a, b) = (am)b$ para todo $a \in A, b \in B$ e $m \in M$. Então $M$ é um $A\otimes_K B^{op}$-módulo com a seguinte ação: $u.m = \varphi_m(u)$ para $m \in M$ e $u \in A \otimes_K B^{op}$.

□

De maneira análoga, obtém-se que se $M$ é um $A \otimes_K B^{op}$-módulo à esquerda, então $M$ pode ser visto como $A$-$B$-bimódulo, onde $(am)b = a(mb) = (a \otimes b)m$ ,para todo $a \in A, b \in B$ e $m \in M$. Cada $A$-$B$-bimódulo é um $A \otimes B^{op}$-módulo à esquerda.

**Proposição 6.7.** *Um $\mathbb{M}_n(K)$-$\mathbb{M}_m(K)$-bimódulo é um $\mathbb{M}_{nm}(K)$-módulo à esquerda.*

*Demonstração.* Do lema anterior ganhamos que um $\mathbb{M}_n(K)$-$\mathbb{M}_m(K)$-bimódulo $M$ é um $\mathbb{M}_n(K)\otimes\mathbb{M}_m(K)^{op}$-módulo à esquerda, e segue $M$ é um $\mathbb{M}_{nm}(K)$-módulo à esquerda. □

**Definição 6.8.** *Sejam $A$ uma álgebra com unidade e $M$ um $A$-bimódulo. Então $M^{\otimes 2} = M \otimes_A M$ é também um $A$-bimódulo. Procedendo de forma natural, podemos construir o $A$-bimódulo $M^{\otimes n}$, para $n \geq 2$ onde $M^{\otimes n} = M^{\otimes n-1} \otimes_A M^{\otimes 1}$. Iremos identificar $M^{\otimes 0} = A$ e $M^{\otimes 1} = M$. Pela associatividade do produto tensorial, temos que $M^{\otimes m} \otimes M^{\otimes n} \cong M^{\otimes m+n}$.*

*Considere $T(A, M) = \oplus_{k=0}^{\infty} M^{\otimes k}$. Os elementos de $T(A, M)$ são somas finitas da forma $\displaystyle\sum_k w_k$, onde $w_k \in M^{\otimes k}$. Para cada elemento de $w_n \in M^{\otimes n}$ e $w_m \in M^{\otimes m}$, o produto será definido por $w_nw_m = w_n \otimes_A w_m \in M^{\otimes m+n}$. A multiplicação pode ser estentida por linearidade para $T(A, M)$. $T(A, M)$ definido como acima é uma álgebra, chamada de **álgebra tensorial** do $A$-bimódulo $M$.*

**Lema 6.9.** (*[5], Prop* 8.5.1, *pág.*152 ). (***Propriedade universal da álgebra tensorial:***) *Seja $A$ uma $K$-álgebra e $M$ um $A$-$A$-bimódulo. Seja $B$ uma $K$-álgebra e $f : A \oplus M \to B$ um mapa que satisfaça as seguintes condições:*

(*a*) *$f|_A : A \to B$ é um homomorfismo de álgebras;*

(b) *Vendo $f(M)$ como $A$-$A$-bimódulo via $f|_A : A \to B$, então $f|_M : M \to f(M) \subseteq B$ é um homomorfismo de $A$-bimódulos.*

*Então existe um único homomorfismo de álgebras $\varphi : T(A, M) \to B$ tal que $\varphi|_{A\oplus M} = f$.*

*Demonstração.* Defina $\theta : M \times M \to B$ dado por $(m_1, m_2) \mapsto f(m_1)f(m_2)$. O mapa $\theta$ é $A$-balanceado. Sejam $m_1, m_1', m_2, m_2' \in M$ e $a \in A$, temos:

$$\begin{aligned}\theta(m_1 + m_1', m_2 + m_2') &= f(m_1 + m_1')f(m_2 + m_2')\\ &= (f(m_1) + f(m_1'))(f(m_2) + f(m_2'))\\ &= f(m_1)f(m_2) + f(m_1)f(m_2') + f(m_1')f(m_2) + f(m_1)f(m_2)\\ &= \theta(m_1, m_2) + \theta(m_1, m_2') + \theta(m_1', m_2) + \theta(m_1', m_2');\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta(m_1, am_2) &= f(m_1)f(am_2)\\ &= f(m_1)f(a)f(m_2)\\ &= f(m_1a)f(m_2)\\ &= \theta(m_1a, m_2).\end{aligned}$$

Existe um único homomorfismo $f_2 : M \otimes_A M \to B$ tal que $f_2(m_1 \otimes_A m_2) = f(m_1)f(m_2)$. Considerando $M \otimes_A M$ como $A$-bimódulo da forma natural, temos que $f_2 : M \otimes_A M \to B$ é um homomorfismo de $A$-bimódulos. A linearidade de $f_2$ vem da linearidade de $\theta$ e $f_2(a(m_1 \otimes_A m_2) = f_2((am_1) \otimes_A m_2) = f(am_1)f(m_2) = f(a)f(m_1)f(m_2) = f(a)f_2(m_1 \otimes_A m_2)$ e $f((m_1 \otimes_A m_2)a) = f(m_1)f(m_2a) = f(m_1)f(m_2)f(a) = f_2(m_1 \otimes_A m_2)f(a)$.

Repetindo o mesmo processo, existe único homomorfismo de $A$-bimódulos $f_n : M^{\otimes n} \to B$ definido por $(m_1 \otimes_A m_2 \otimes_A ... \otimes_A m_n) \mapsto f(m_1)f(m_2)...f(m_n)$, onde $M^{\otimes n} = \underbrace{M \otimes_A ... \otimes_A M}_{n \text{ vezes}}$.

Defina $\varphi : T(A, M) \to B$ dado por $\sum_{n=0}^{\infty} w_n \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(w_n)$, onde $w_n \in M^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} w_n \in T(A, M)$. $\varphi$. A linearidade de cada $f_n$ garante a linearidade de $\varphi$. Como $f(1_{T(A,M)}) = f(1_A) = 1_B$ e $\varphi(w_n.w_m) = \varphi(w_{n+m}) = f_{n+m}(w_{n+m}) = f_n(w_n)f_m(w_m) = \varphi(w_n)\varphi(w_m)$ segue que $\varphi$ é um mapa de $K$-álgebras. Como $\varphi(a + m) = f_0(a) + f_1(m) = f(a) + f(m) = f(a_m)$, portanto $\varphi|_{A\oplus M} = f$. A unicidade de $\varphi$ é garantida pela unicidade de cada $f_n$. $\square$

# CAPÍTULO 2

# ÁLGEBRAS DE CAMINHOS

## 1 Aljavas e álgebra de caminhos

**Definição 1.1.** *Uma* ***aljava*** $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, s, t)$ *é uma quádrupla consistindo de dois conjuntos* ,$\Delta_0$ *e* $\Delta_1$*, onde* $\Delta_0$ *é um conjunto de pontos ou vértices,* $\Delta_1$ *é o conjunto de flechas, e dois mapas* $s, t : \Delta_1 \to \Delta_0$ *que associam a cada flecha* $\alpha \in \Delta_1$*, sua origem,* $s(\alpha) \in \Delta_0$ *e seu destino,* $t(\alpha) \in \Delta_0$*, respectivamente.*

Uma flecha $\alpha \in Q_1$ de origem $a = s(\alpha)$ e destino $b = t(\alpha)$ é denotada por $\alpha : a \to b$. Uma aljava $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, s, t)$ é usualmente denotado por $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$, ou simplesmente por $\Delta$.

**Definição 1.2.** *Uma subaljava de uma aljava* $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, s, t)$ *é uma aljava* $\Delta' = (\Delta'_0, \Delta'_1, s', t')$ *tais que* $\Delta'_0 \subseteq \Delta_0$*,* $\Delta'_1 \subseteq \Delta_1$ *e as restrições* $s|_{\Delta'_1}$*,* $t|_{\Delta'_1}$ *de* $s$ *e* $t$ *são respectivamente iguais a* $s'$ *e* $t'$*. Uma subaljava é dita completa se o conjunto de todas as flechas em* $\Delta'_1$ *é igual ao conjunto de todas as flechas em* $\Delta_1$ *tais que a origens e destino estejam em* $\Delta'_0$*, isto é,*

$$\Delta'_1 = \{\Delta_1 | s(\alpha) \in \Delta'_0, t(\alpha) \in \Delta'_0\}.$$

**Definição 1.3.** *Uma aljava* $\Delta$ *é dita finita se* $\Delta_0$ *e* $\Delta_1$ *são conjuntos finitos.*

**Definição 1.4.** *Um* ***caminho*** *em* $\Delta$ *é* $(a \mid \alpha_1, ..., \alpha_n \mid b)$*, onde* $\alpha_i \in \Delta_1$*, para* $i = 1, ..., n$*, e* $s(\alpha_1) = a, t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$*, para* $i = 1, ..., n$*, e* $t(\alpha_n) = b$*. O comprimento do caminho é o número de flechas no caminho. Uma outra notação para um caminho* $(a \mid \alpha_1, ..., \alpha_n \mid b)$ *é* $\alpha_1 ... \alpha_n$*.*

**Definição 1.5.** *Para cada flecha* $\alpha$ *podemos associar uma aresta* $\overline{\alpha}$ *onde a orientação é esquecida. Um* ***passeio*** *entre dois vértices* $a$ *e* $b$ *é dado por* $(a \mid \overline{\alpha_1} ... \overline{\alpha_n} \mid b)$*, onde* $a \in \{s(\alpha_1), t(\alpha_1)\}$*,* $b \in \{s(\alpha_n), t(\alpha_n)\}$*, e para cada* $i = 1, ..., n-1$*,* $\{s(\alpha_i), t(\alpha_i)\} \cap \{s(\alpha_{i+1}), t(\alpha_{i+1})\} \neq \varnothing$*.*

**Definição 1.6.** *Uma aljava é chamada* ***conexa*** *se para cada par de vértices* $a, b \in \Delta_0$*, existir um passeio entre eles.*

Denotaremos por $\Delta_l$ o conjunto de todos os caminhos de comprimento $l$, podemos associar a cada ponto $a \in \Delta_0$, um caminho de comprimento $l = 0$, chamado de caminho trivial ou caminho estacionário, denotado por

$$\varepsilon_a = (a||a).$$

**Definição 1.7.** *Um caminho de comprimento* $l \geq 1$ *é chamado de* ***ciclo orientado*** *sempre que sua origem e término coincidam, um ciclo de comprimento* $1$ *é chamado de laço. Uma aljava é chamada de* ***acíclica*** *se não contém ciclos orientados.*

Caso exista em $\Delta$ um caminho de $a$ a $b$, $a$ é dito predecessor de $b$ e $b$ é dito sucessor de $a$. Em particular, se existir uma flecha $\alpha : a \to b$, então $a$ é dito predecessor direto de $b$ e $b$ é dito sucessor direto de $a$. Para cada $a \in \Delta_0$, denotaremos por $a^-$ o conjunto de todos os predecessores diretos de $a$ e por $a^+$ o conjunto de todos os sucessores diretos de $a$. Os elementos de $a^- \cup a^+$ são chamados de vizinhanças de $a$.

**Exemplo 1.8.** *Considere a seguinte aljava $\Delta$:*

$$\begin{tikzcd}
5 & & & \\
& 3 \arrow[ul, "\beta"'] \arrow[r, "\alpha"'] & 2 & 1 \arrow[l, "\gamma"'] \\
4 \arrow[ur, "\theta"'] & & &
\end{tikzcd}$$

*. Temos que é uma aljava conexa, já que entre cada par de vértices existe um passeio entre eles, por exemplo, entre os vértices 5 e 1 existe o passeio $\overline{\beta\alpha\gamma}$. Também temos que $\Delta$ é uma aljava sem ciclos orientados e finita.*

**Exemplo 1.9.** *Considere a seguinte aljava $\Delta$:*

$$\begin{tikzcd}
& 2 \arrow[dl, "\alpha"'] \\
1 \arrow[r, "\beta"'] & 3 \arrow[u, "\theta"'] \\
& 4 \arrow[ul, "\gamma"]
\end{tikzcd}$$

*temos que é uma aljava conexa com o ciclo orientado $(1|\ \beta\theta\alpha\ |1)$.*

**Definição 1.10.** *Seja $\Delta$ uma aljava. A **álgebra de caminhos** $K\Delta$ é a $K$-álgebra com base formada, como $K$-espaço vetorial, por todos os caminhos $(a\ |\alpha_1, ..., \alpha_l\ |\ b)$ de comprimento $l \geq 0$ em $\Delta$ cuja multiplicação de dois caminhos $(a\ |\alpha_1, ..., \alpha_l\ |\ b)$ e $(c\ |\beta_1, ..., \beta_k\ |\ d)$ em $K\Delta$ é dada por:*

$$(a\ |\alpha_1, ..., \alpha_l\ |\ b)(c\ |\beta_1, ..., \beta_k\ |\ d) = \delta_{bc}(a\ |\alpha_1, ..., \alpha_l, \beta_1, ..., \beta_k\ |\ d),$$

*onde $\delta_{bc}$ é o delta de Kronecker. Em outras palavras, o produto dos caminhos é igual a zero se $t(\alpha_l) \neq s(\beta_1)$, e será igual a composição de caminhos se $t(\alpha_l) = s(\beta_1)$.*

Temos que existe uma decompisição em somas diretas de

$$K\Delta = K\Delta_0 \oplus K\Delta_1 \oplus K\Delta_2 \oplus ... \oplus K\Delta_l \oplus ...$$

de $K$-subespaços vetorias de $K\Delta$, onde, para cada $l \geq 0$, $K\Delta_l$ é um subespaço vetorial de $K\Delta$ gerado por $\Delta_l$, o conjunto de todos os caminhos de comprimento $l$. Temos que $K\Delta_n K\Delta_m \subseteq K\Delta_{m+n}$, para todo $n, m \geq 0$.

**Lema 1.11.** ([1], *Lema* 2.1.4, *pág.*45 ). *Seja $K\Delta$ uma álgebra de caminhos. Então:*

(*a*) *$K\Delta$ possui unidade se, e somente se, $\Delta_0$ é finto;*

(*b*) *$K\Delta$ possui dimensão finita se, e somente se, $\Delta$ é finito e acíclico;*

(*c*) *$K\Delta$ é uma álgebra associativa.*

*Demonstração.* (*a*) Se $\Delta_0$ é finito, temos que $\displaystyle\sum_{a \in \Delta_0} \varepsilon_a$ é a unidade de $K\Delta$.

Suponha que $\Delta_0$ seja um conjunto infinito. Seja $1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i$ a identidade de $K\Delta$. Tome $\Delta_0'$ como sendo o conjunto de todas as origens de $w_i$. Temos que $\Delta_0'$ possui no máximo $m$ elementos, portanto finito. Seja $a \in \Delta_0 / \Delta_0'$, então $\varepsilon_a 1 = 0$.

(*b*) Seja $\Delta$ uma aljava infinita, então a base de $K\Delta$ é infinita, portanto $K\Delta$ é uma álgebra de dimensão infinita. Se $w = \alpha_1 ... \alpha_l$ um ciclo orientado em $\Delta$, então para cada $t \geq 0$, teremos que $w^t = (\alpha_1, ...\alpha_l)^t$ é um vetor na base, portanto $K\Delta$ possui dimensão infinita.

Seja $\Delta$ finito e acíclico, existe uma quantidade finita de caminhos, portanto $\dim_K K\Delta < \infty$.

$(c)$ Segue diretamente da definição do produto, já que o produto de dois elementos da base é a composição deles, que é associativa.

□

**Lema 1.12.** *([1], Cor 2.1.5, pág.46 ). Seja $\Delta$ uma aljava finita. O conjunto $\{\varepsilon_a \mid a \in \Delta_0\}$ de todos os caminhos triviais $\varepsilon_a$ é um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos de $K\Delta$.*

*Demonstração.* Segue da definição que $\varepsilon_i^2 = \varepsilon_i$ e $\varepsilon_i\varepsilon_j = 0$ sempre que $i \neq j$, portanto é um conjunto de idempotentes ortogonais. Pela Proposição (5.8) do Capítulo 1, devemos mostrar que os únicos idempotentes da álgebra $\varepsilon_a(K\Delta)\varepsilon_a$ são 0 e $\varepsilon_a$.

Seja $\varepsilon$ um idempotente de $\varepsilon_a(K\Delta)\varepsilon_a$, podemos escrever $\varepsilon = \lambda\varepsilon_a + w$, onde $\lambda \in K$ e $w$ é uma combinação linear de clicos em $a$ de comprimento maior ou igual a 1. Como

$$0 = \varepsilon^2 - \varepsilon = (\lambda^2 - \lambda)\varepsilon_a + (2\lambda - 1)w + w^2$$

segue que $w = 0$ e $\lambda^2 = \lambda$, logo $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$, portanto $\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon = \varepsilon_a$, respectivamente. □

**Lema 1.13.** *([1], Lema 2.1.6, pág.46 ). Sejam $A$ uma álgebra associativa e $\{e_1, ..., e_n\}$ um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos. $A$ é uma álgebra conexa se, e somente se, não existir uma partição não trivial $I\dot{\cup}J$ do conjunto $\{1, ..., n\}$ tais que se $i \in I$ e $j \in J$ implicar que $e_iAe_j = 0 = e_jAe_i$.*

*Demonstração.* Seja $c = \sum_{j\in J} e_j$. Já que a partição é não trivial, $c \neq 0, 1$. Como cada $e_j$ é um elemento idempotente, para cada par de inteiros positivos distintos $l, m$ em $J$,temos que $e_le_m = 0$, portanto $c$ é idempotente. Além disso, $ce_i = e_ic = 0$, para cada $i \in I$, e $ce_j = e_jc = e_j$, para cada $j \in J$. Seja $a \in A$, pela hipótese $e_jae_i = e_iae_j = 0$, logo

$$\begin{aligned}
ca &= \left(\sum_{j\in J} e_j\right) a \\
&= \left(\sum_{j\in J} e_j\right) a1 \\
&= \left(\sum_{j\in J} e_ja\right)\left(\sum_{i\in I} e_i + \sum_{j\in J} e_j\right) \\
&= \sum_{j,k\in J} e_jae_k \\
&= (\sum_{j\in J} e_j + \sum_{i\in I} e_i)a(\sum_{k\in J} e_k) \\
&= ac,
\end{aligned}$$

ou seja, $c$ é central, assim $A = cA \times (1 - c)A$ é uma decomposição não trivial de $A$.

Assuma que $A$ é desconexo, existe um idempotente central $c \neq 0, 1$. Então

$$\begin{aligned}
c &= 1c1 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} e_i\right) c \left(\sum_{j=1}^{n} e_j\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} e_ice_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} e_ice_i,
\end{aligned}$$

Tome $c_i = e_ice_i \in e_iAe_i$. Como $c_i^2 = e_ic^2e_i = e_ice_i = c_i$, segue que $c_i$ é um idempotente de $e_iAe_i$. Como $e_i$ é primitivo, $c_i = 0$ ou $c_i = e_i$. Considere $I = \{i \mid c_i = 0\}$ e $J = \{j \mid c_j = e_j\}$. Como $c \neq 0, 1$, segue que é uma partição não trivial de $\{1, ..., n\}$.Se $i \in I$ e $j \in J$, entã $e_iAe_j = e_iAce_j = e_icAe_j = 0$. □

**Lema 1.14.** *([1], Lema 2.1.7, pág.47 ). Seja $\Delta$ uma aljava finita. A álgebra de caminhos $K\Delta$ é conexa se, e somente se, $\Delta$ é uma aljava conexa.*

*Demonstração.* Assuma que $\Delta$ não seja aljava conexa, e seja $\Delta'$ uma componente conexa de $\Delta$. Denote por $\Delta''$ uma subaljava completa de $\Delta$ tendo como conjunto de pontos $\Delta_0/\Delta'_0$. Temos que e $\Delta'$ e $\Delta''$ são não vazios.

Sejam $a \in \Delta'_0$ e $b \in \Delta''_0$. Como $\Delta$ é desconexa, um caminho arbitrário $w \in \Delta$ está inteiramente contido em $\Delta'$ ou $\Delta''$. No primeiro caso, teremos que $w\varepsilon_b = 0$ e assim $\varepsilon_a w \varepsilon_b = 0$. No outro caso, teremos que $\varepsilon_a w = 0$, assim $\varepsilon_a w \varepsilon_b = 0$. Logo $\varepsilon_a (K\Delta)\varepsilon_b = 0$. De maneira análoga obtemos que $\varepsilon_b(K\Delta)\varepsilon_a = 0$.

Suponha que $\Delta$ conexo e $K\Delta$ desconexa. Existe uma união disjunta $\Delta_0 = \Delta'_0 \cup \Delta''_0$ onde $\Delta'_0, \Delta''_0$ são conjuntos não vazios tais que se $x \in \Delta'_0$ e $y \in \Delta''_0$, então $\varepsilon_x(K\Delta)\varepsilon_y = \varepsilon_y(K\Delta)\varepsilon_x = 0$. Como $\Delta$ é conexa, existem $a \in \Delta'_0$ e $b \in \Delta''_0$ tais que $a$ e $b$ sejam vizinhos. Sem perda de generalidade, podemos supor a existência deu uma flecha $\alpha : a \to b$. Concluindo que $\alpha = \varepsilon_a \alpha \varepsilon_b \in \varepsilon_a(K\Delta)\varepsilon_b = 0$.

□

**Lema 1.15.** *([1], Teorema 2.1.8, pág.48 ). Sejam $\Delta$ uma aljava finita e conexa e $A$ uma $K$-álgebra associativa com identidade. Para cada par de mapas, $\varphi_0 : Q_0 \to A$ e $\varphi_1 : Q_1 \to A$, satisfazendo as seguintes condições:*

*(a)* $1 = \sum_{a\in\Delta_0} \varphi_0(a)$, $\varphi_0(a)^2 = \varphi_0(a)$ *e* $\varphi_0(a)\varphi(b) = 0$ *sempre que* $a \neq b$;

*(b) Se* $\alpha : a \to b$, *então* $\varphi_1(\alpha) = \varphi_0(a)\varphi_1(\alpha)\varphi_0(b)$;

*existe um único homomorfismo de $K$-álgebras $\varphi : K\Delta \to A$ tal que $\varphi(\varepsilon_a) = \varphi_0(a)$, para cada $a \in \Delta_0$, e $\varphi(\alpha) = \varphi_1(\alpha)$. para cada $\alpha \in \Delta_1$.*

*Demonstração.* Assuma que exista um homomorfismo de $K$-álgebra $\varphi : K\Delta \to A$ estendendo $\varphi_0$ e $\varphi_1$, e seja $\alpha_1...\alpha_l$ um caminho em $\Delta$. Já que $\varphi$ é um homomorfismo de $K$-álgebras, teremos:

$$\varphi(\alpha_1...\alpha_l) = \varphi(\alpha_1)...\varphi(\alpha_l) = \varphi_1(\alpha_1)...\varphi_1(\alpha_l)$$

mostrando a unicidade. Por outro lado, a fórmula define um mapa $K$-linear de $K\Delta$ a $A$ que é a compatível com a composição de caminhos tal que

$$\varphi(1) = \varphi\left(\sum_{a\in\Delta_0} \varepsilon_a\right) = \sum_{a\in\Delta_0} \varphi(a) = \sum_{a\in\Delta_0} \varphi_0(a) = 1,$$

isto é, preserva identidade, portanto é um homomorfismo de $K$-álgebra. □

**Definição 1.16.** *Seja $\Delta$ uma aljava finita e conexa. O ideal da álgebra de caminhos $K\Delta$ gerado por todas as flechas em $\Delta$ é chamado de **ideal de flechas** de $K\Delta$, denotado por $R_\Delta$.*

Existe uma decomposição em soma direta $R_\Delta = K\Delta_1 \oplus K\Delta_2 \oplus K\Delta_3 \oplus ...K\Delta_l \oplus ....$ Para cada $l \geq 1$, temos que $R^l_\Delta = \oplus_{i\geq l} K\Delta_i$, onde $R^l_\Delta$ é um ideal de $K\Delta$ gerado por todos os caminhos de comprimento maior ou igual a $l$. Temos que o $K$-espaço vetorial $R^l_\Delta/R^{l+1}_\Delta$ é gerado pela classes residuais de todos os caminhos de comprimento precisamente igual a $l$.

**Lema 1.17.** *([1], Prop 2.1.10, pág.49 ). Sejam $\Delta$ uma aljava finita e conexa, $R_\Delta$ o ideal de flechas de $K\Delta$. O conjunto $\{\overline{\varepsilon_a} = \varepsilon_a + R\}$ é um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos de $K\Delta/R$ e $K\Delta/R$ é isomorfo ao produto de cópias de $K$. Se $\Delta$ é acíclica, então $\mathrm{J}(K\Delta) = R$ e $K\Delta$ é uma álgebra básica de dimensão finita.*

*Demonstração.* Considere a decomposição em soma direta

$$K\Delta/R_\Delta = \oplus_{a,b\in\Delta_0} \overline{\varepsilon_a}(K\Delta/R_\Delta)\overline{\varepsilon_b}$$

como $K$-espaço vetorial. Já que $R_\Delta$ contém todos os caminhos de comprimento $l \geq 1$, $K\Delta/R$ é gerado, como $K$-espaço vetorial, pelas classes de resíduos de caminhos de comprimento zero, isto é, pelo conjunto $\{\overline{\varepsilon_a} = \varepsilon_a + R\}$. Usando um argumento parecido da prova do Teorema (1.12) demonstramos que esse conjunto é um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos.

Para cada $a \in \Delta_0$, a álgebra $\overline{\varepsilon_a}(K\Delta/R)\overline{\varepsilon_a}$ é gerado, como $K$-espaço vetorial, por $\overline{\varepsilon_a}$. Segue que é isomorfo, como $K$-álgebra, a $K$. Mostrando que $K\Delta/R$ é isomorfo ao produto $|\Delta_0|$ de cópias de $K$.

Assuma que $\Delta$ é acíclica, portanto $K\Delta$ é uma álgebra de dimensão finita. Existe um $l \geq 1$ tal que $\Delta$ contém todos os caminhos de comprimento $l$. Qualquer produto de $l+1$ flechas é nulo, isto é, $R^{l+1} = 0$, ou seja, $R_\Delta$ é nilpotente, $R_\Delta \subseteq \mathrm{J}(K\Delta)$. Como $K\Delta/R_\Delta$ é isomorfo ao produto de cópias de $K$, segue que $\mathrm{J}(K\Delta) = R_\Delta$. Pela Proposição (5.13) do Capítulo 1, a álgebra $K\Delta$ é básica. $\square$

**Teorema 1.18.** *([1], Lema.*2.1.11*, Pág.*50 *). Seja $\Delta$ uma aljava finita, conexa e acíclica. Então a álgebra de caminhos $K\Delta$ é uma $K$-álgebra com identidade básica, conexa, associativa e de dimensão finita como $K$-álgebra. O radical de Jacobson de $K\Delta$ é o ideal de flechas. O conjunto $\{\varepsilon_a \mid a \in \Delta_0\}$ é um conjunto completo de idempotentes, ortogonais e primitivos.*

*Demonstração.* Pelo fato de $\Delta$ ser finita e acíclica, pelos itens $(a)$, $(b)$ e $(c)$ do Lema (1.11) segue que $K\Delta$ possui identidade,possui dimensão finita como $K$-espaço vetorial e $K\Delta$ é associativa. Do Lema 1.12 vem que $\{\varepsilon_a \mid a \in \Delta_0\}$ é um conjunto completo idempotentes ortogonais primitivos. Como a aljava $\Delta$ é conexa, segue do Lema (1.14) que $K\Delta$ é conexa. Como a aljava é acíclica, do Lema (1.17), concluímos que $\mathrm{J}(K\Delta) = R_\Delta$ e que $K\Delta$ é básica. $\square$

# 2 Ideais admissíveis

**Definição 2.1.** *Sejam $\Delta$ uma aljava finita e $R_\Delta$ o ideal de flechas da álgebra de caminhos $K\Delta$. Um ideal $\mathcal{I}$ de $K\Delta$ é dito **admissível** se existir um $m \geq 2$ tal que*

$$R_\Delta^m \subseteq \mathcal{I} \subseteq R_\Delta^2.$$

Temos que $R_\Delta^m$ é admissível, já que $R_\Delta^{m+1} \subseteq R_\Delta^m \subseteq R_\Delta^2$.

**Exemplo 2.2.** *Seja $\Delta$ a aljava*

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[dl, "\beta"'] \\
1 & 4 \arrow[u, "\alpha"'] \arrow[l, "\lambda"'] \arrow[d, "\gamma"] \\
 & 3 \arrow[ul, "\delta"]
\end{tikzcd}$$

*o ideal $\mathcal{I} = \langle \alpha\beta - \gamma\delta \rangle$ é um ideal admissível de $K\Delta$ pois $\alpha\beta, \gamma\delta \in R_\Delta^2$, portanto $\alpha\beta - \gamma\delta \in R_\Delta^2$, e $0 = R_\Delta^3 \subseteq \mathcal{I} \subseteq R_\Delta^2$. Mas o ideal $\mathcal{I} = \langle \alpha\beta - \lambda \rangle$ não é um ideal admissível, já que $\lambda \notin R_Q^2$, portanto $\alpha\beta - \lambda \notin R_\Delta^2$.*

**Definição 2.3.** *Seja $\Delta$ uma aljava. Uma **relação** em $\Delta$ com coeficientes em $K$ é uma combinação $K$-linear de caminhos de comprimento maior ou igual a 2 com o mesma origem e o mesmo destino. Uma relação $\rho$ é o elemento de $K\Delta$ da forma:*

$$\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i,$$

*onde $\lambda_i$'s são escalares e $w_i$'s são caminhos de comprimento maior ou igual a 2 com todas origens coincidindo.*

Se $m = 1$ , a relação é chamada de **relação monomial**. Se é da forma $w_1 - w_2$, a relação é chamada de **relação comutativa**.

**Lema 2.4.** *([1], Lema* 2.2.4*, pág.*55 *). Sejam $\Delta$ uma aljava e $\mathcal{I}$ um ideal admissível de $K\Delta$. O conjunto $\{e_a = \varepsilon_a + \mathcal{I} \mid a \in \Delta_0\}$ é um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos de $K\Delta/\mathcal{I}$.*

*Demonstração.* Como $e_a$ é a imagem de $\varepsilon_a$ pelo homomorfismo canônico $\pi : K\Delta \to K\Delta/\mathcal{I}$, segue que são idempotentes ortogonais. Para cada $e \in e_a(K\Delta/\mathcal{I})e_a$ pode ser escrito da forma $e = \lambda\varepsilon_a + w + \mathcal{I}$, onde $\lambda \in K$ e $w$ é uma combinação linear de ciclos em torno de $a$ de comprimento maior ou igual a 1. Da igualdade $e^2 = e$, obtemos

$$(\lambda^2 - \lambda)\varepsilon_a + (2\lambda - 1)w + w^2 \in \mathcal{I}.$$

Como $\mathcal{I} \subseteq R_\Delta^2$, teremos que $\lambda^2 - \lambda = 0$, então $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

Se $\lambda = 0$, então $e = w + \mathcal{I}$.Já que $R_Q^m \subseteq \mathcal{I}$, temos que $w^m \in \mathcal{I}$, isto é, $w$ também nilpotente módulo $\mathcal{I}$, portanto $e = 0$. Se $\lambda = 1$, então $e - e_a = w + \mathcal{I}$ é um idempotente em $e_a(KQ/\mathcal{I})e_a$. Como $w$ também é um idempotente módulo $\mathcal{I}$, usando o raciocínio anterior, obtemos que $w \in \mathcal{I}$, consequentemente $e = e_a$. □

**Lema 2.5.** *([1], Lema* 2.2.5*, pág.*55 *). Sejam $\Delta$ uma aljava finita e $\mathcal{I}$ um ideal admissível de $K\Delta$. $K\Delta/\mathcal{I}$ é conexa se, e somente se, $\Delta$ é um aljava conexa.*

*Demonstração.* Assuma $\Delta$ desconexo, então $K\Delta$ não é uma álgebra conexa. Existe idempotente central $\gamma$ em $K\Delta$ diferente dos triviais. Temos que $\gamma + \mathcal{I} \neq 0$. Assuma que $\gamma + \mathcal{I} = c = 1 + \mathcal{I}$, segue que $1 - \gamma \in \mathcal{I} \subseteq R_\Delta^2$, portanto $c$ é um idempotente central de $K\Delta/\mathcal{I}$ diferente dos triviais.

Assuma $K\Delta/\mathcal{I}$ não seja uma álgebra conexa. Existe uma partição disjunta não trivial $\Delta_0 = \Delta_0' \cup \Delta_0''$. Sejam $x \in Q_0'$ e $y \in Q_0''$, teríamos que $e_x(KQ/\mathcal{I})e_y = e_y(KQ/\mathcal{I})e_x = 0$. Como $\Delta$ é conexo, existe $\alpha : a \to b$, com $a \in Q_0'$ e $b \in Q_0''$. Temos que $\overline{\alpha} = \alpha + \mathcal{I}$ satisfaz $\overline{\alpha} = e_a\overline{\alpha}e_b \in e_a(K\Delta/\mathcal{I})e_b = 0$, portanto $\alpha \in \mathcal{I}$. □

**Lema 2.6.** *([1], Prop* 2.2.6*, pág.*56 *). Sejam $\Delta$ uma aljava finita e $\mathcal{I}$ um ideal admissível de $K\Delta$. A álgebra $K\Delta/\mathcal{I}$ possui dimensão finita.*

*Demonstração.* Como $\mathcal{I}$ é admissível, existe $m$ maior ou igual a 2 tal que $R_\Delta^m \subseteq \mathcal{I}$, onde $R_\Delta$ é o ideal de flechas de $K\Delta$. Existe um homomorfismo sobrejetivo de álgebras $K\Delta/R_\Delta^m \to K\Delta/\mathcal{I}$. Portanto é suficiente mostrar que $KQ/R_\Delta^m$ possui dimensão finita. As classes residual de todos os caminhos de comprimento menor que $m$ formam uma base para $K\Delta/R_\Delta^m$ como $K$-espaço vetorial. Já que existem um número finito de caminhos dessa forma, segue o resultado. □

**Lema 2.7.** *([1], Lema* 2.2.8*, pág.*56 *). Seja $\Delta$ uma aljava finita. Cada ideal admissível $\mathcal{I}$ de $K\Delta$ é finitamente gerado.*

*Demonstração.* Seja $m$ um inteiro positivo maior ou igual a 2 satisfazendo $R_\Delta^m \subseteq \mathcal{I}$. Seja

$$0 \longrightarrow R_\Delta^m \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}/R_\Delta^m \longrightarrow 0$$

uma sequência exata curta de $K\Delta$-módulos. $R_\Delta^m$ é um $K\Delta$-módulo finitamente gerado. Como $\mathcal{I}/R_\Delta^m$ é um ideal da álgebra de dimensão finita $K\Delta/R_\Delta^m$, segue que $\mathcal{I}/R_\Delta^m$ possui dimensão finita como $K$-espaço vetorial, portanto finitamente gerado. Pelo Corolário (3.8) do Capítulo 1, temos que $\mathcal{I}$ é finitamente gerado. □

**Lema 2.8.** *([1], Cor* 2.2.9*, pág.*56 *). Sejam $\Delta$ uma aljava finita e $\mathcal{I}$ um ideal admissível de $K\Delta$. Então existe um conjunto de relações $\{\rho_1, \rho_2, ..., \rho_m\}$ tal que $\mathcal{I} = \langle \rho_1, \rho_2, ..., \rho_m \rangle$.*

*Demonstração.* Como o ideal $\mathcal{I}$ possui dimensão finita, existe um conjunto finito de geradores $\{\sigma_1, ..., \sigma_t\}$. Para cada $i : 1 \leq i \leq t$ e $a, b \in \Delta_0$, o termo $\varepsilon_a\sigma_i\varepsilon_b$ é nulo ou uma relação. Já que $\sigma_i = \sum_{a,b \in Q_0} \varepsilon_a\sigma_i\varepsilon_b$ para todo $i$, portanto os conjunto $\{\varepsilon_a\sigma_i\varepsilon_b \mid 1 \leq i \leq t;\ a, b \in \Delta_0\}$. forma um conjunto finito de relações gerando $\mathcal{I}$. □

**Lema 2.9.** *([1], Lema* 2.2.10*, pág.*57 *). Sejam $\Delta$ uma aljava finita, $R_\Delta$ o ideal de flechas de $K\Delta$ e $\mathcal{I}$ um ideal admissível de $K\Delta$. Então $\mathrm{J}(K\Delta/\mathcal{I}) = R_\Delta/\mathcal{I}$. Mais ainda, $K\Delta/\mathcal{I}$ é uma álgebra básica.*

*Demonstração.* Como $\mathcal{I} \supseteq R_\Delta^m$, para algum inteiro positivo $m \geq 2$, temos que $(R_\Delta/\mathcal{I})^m = 0$, logo $R_\Delta/\mathcal{I}$ é um ideal nilpotente de $K\Delta/\mathcal{I}$. Por outro lado, $(K\Delta/\mathcal{I})/(R_\Delta/\mathcal{I}) \cong K\Delta/R_\Delta$ é isomorfo ao produto de cópias de $K$, segue que $\mathrm{J}(K\Delta/\mathcal{I}) = R_\Delta/\mathcal{I}$ e $K\Delta/\mathcal{I}$ é uma álgebra básica. □

**Lema 2.10.** *([1], Cor* 2.2.11*, pág.*57 *). Para cada $l$ maiou ou igual a* 1 *teremos que $\mathrm{J}^l(K\Delta/\mathcal{I}) = (R_\Delta/\mathcal{I})^l$.*

*Demonstração.* Segue diretamente do lema anterior. □

**Teorema 2.11.** *([1], Lema.*2.2.12*, Pág.*57 *). Sejam $\Delta$ uma aljava conexa e finita, $R_\Delta$ o ideal de flechas de $K\Delta$ e $\mathcal{I}$ o ideal admissível de $K\Delta$. $K\Delta/\mathcal{I}$ é uma álgebra básica, conexa, de dimensão finita e com identidade. O radical é exatamente $R_\Delta/\mathcal{I}$ e $\{e_a \mid a \in \Delta_0\}$ é um conjunto completo de idempotentes, primitivos e ortogonais .*

*Demonstração.* Pelo Lema (2.9) sabemos que $K\Delta/\mathcal{I}$ é básica e que seu radical é $R_\Delta/\mathcal{I}$. Do Lema (2.6), sabemos que $K\Delta/\mathcal{I}$ possui dimensão finita. Pelos Lemas (2.5) e (2.4), temos que $K\Delta/\mathcal{I}$ é uma álgebra conexa e $\{e_a \mid a \in \Delta_0\}$ forma o conjunto completo de elementos idempotentes ortogonais primitivos, respectivamente. □

# 3 A aljava de uma álgebra básica, conexa e de dimensão finita

**Definição 3.1.** *Sejam $A$ uma $K$-álgebra básica, conexa e de dimensão finita e $\{e_1, ..., e_n\}$ um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos $A$. A aljava de $A$, denotado por $\Delta_A$, é definida como:*

(a) *Os pontos de $\Delta_A$ são números $1, ..., n$ que estão em correspondência bijetiva com os idempotentes $e_1, ..., e_n$.*

(b) *Dados dois pontos $a, b \in (\Delta_A)_0$, as flechas $\alpha : a \to b$ estão em uma correspondência bijetiva com os vetores de uma base do $K$-espaço vetorial $e_a(\mathrm{J}(A)/\mathrm{J}(A)^2)e_b$.*

**Lema 3.2.** *([1], Lema 2.3.2, pág.60 ). Seja $A$ uma álgebra conexa, de dimensão finita e básica.*

(a) *A aljava de $A$ não depende da escolha do conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonais.*

(b) *Para cada par $e_a, e_b$ de idempotentes primitivos ortogonais de $A$, o mapa $K$-linear*

$$\begin{array}{rcl}\psi : e_a(\mathrm{J}(A))e_b/e_a(\mathrm{J}(A)^2)e_b & \to & e_a(\mathrm{J}(A)/\mathrm{J}(A)^2)e_b \\ e_a x e_b + e_a(\mathrm{J}(A)^2)e_b & \mapsto & e_a(x + \mathrm{J}(A)^2)e_b\end{array}$$

*é um isomorfismo.*

*Demonstração.* Pelo Teorema da decomposição primária, o número de pontos em $\Delta_A$ é unicamente determinada, uma vez que é igual ao número de indecomponíveis que aparecem na soma direta de $A_A$. Os fatores dessa decomposição são unicamente determinados pelos isomorfismos, isto é, se

$$A_A = \oplus_{a=1}^{n} e_a A = \oplus_{b=1}^{n} e'_b A,$$

podemos rearranjar os fatores, assim $e_a A \cong e'_a A$, para cada $1 \leq a \leq n$. O núcleo homomorfismo

$$\begin{array}{rccc}\varphi : & e_a(\mathrm{J}(A)) & \to & e_a(\mathrm{J}(A)/\mathrm{J}(A)^2) \\ & e_a x & \longmapsto & e_a(x + \mathrm{J}(A)^2)\end{array}$$

é $e_a(\mathrm{J}(A)^2)$. Consequentemente:

$$e_a(\mathrm{J}(A)/\mathrm{J}(A)^2) \cong (e_a\mathrm{J}(A))/(e_a\mathrm{J}(A)^2) \cong \mathrm{J}(e_aA)/\mathrm{J}(e_aA)^2;$$

portanto

$$\begin{aligned} e_a(\mathrm{J}(A)/\mathrm{J}(A)^2)e_b &\cong (\mathrm{J}(e_aA)/\mathrm{J}(e_aA)^2)e_b \\ &\cong \mathrm{Hom}(e_bA, \mathrm{J}(e_aA)/\mathrm{J}(e_aA)^2) \\ &\cong \mathrm{Hom}(e'_bA, \mathrm{J}(e'_aA)/\mathrm{J}(e'_aA)^2) \\ &\cong (\mathrm{J}(e'_aA)/\mathrm{J}(e'_aA)^2)e'_b \\ &\cong e'_a(\mathrm{J}(A)/\mathrm{J}(A)^2)e'_b. \end{aligned}$$

Segue que o núcleo do homomorfismo

$$\begin{array}{rccc}\psi : & e_a(\mathrm{J}(A))e_b/e_a(\mathrm{J}(A)^2)e_b & \to & e_a(\mathrm{J}(A)/\mathrm{J}(A)^2)e_b \\ & e_a x e_b & \longmapsto & e_a(x + \mathrm{J}(A)^2)e_b\end{array};$$

é $e_a(\mathrm{J}(A)^2)e_b$, portanto um isomorfismo. □

**Lema 3.3.** *([1], Lema 2.3.3, pág.61 ). Para cada flecha $\alpha : i \to j$ em $(\Delta_A)_1$, seja $x_\alpha \in e_i(\mathrm{rad}A)e_j$ tal que o conjunto $\{x_\alpha + \mathrm{J}(A)^2 \ |\alpha : i \to j\}$ forme uma base para $e_i(\mathrm{J}(A)^2)e_j$. Então:*

(a) *Para cada ponto $a, b \in (\Delta_A)_0$, temos que cada elemento $x \in e_a(\mathrm{J}(A))e_b$ pode ser escrita da forma $x = \sum x_{\alpha_1}...x_{\alpha_l}\lambda_{\alpha_1}...\lambda_{\alpha_l}$, onde $\lambda_{\alpha_1} ..., \lambda_{\alpha_l} \in K$, e a soma é realizada sobre todos os caminhos indo de $a$ a $b$;*

(b) *Para cada flecha $\alpha : i \to j$, o elemento $x_\alpha$ é unicamente determinado pelo homomorfismo não nulo $\widetilde{x}_\alpha \in \mathrm{Hom}(e_jA, e_iA)$ satifazendo $\widetilde{x_\alpha}(e_j) = x_\alpha$, $\mathrm{Im}\widetilde{x_\alpha} \subseteq e_i(\mathrm{J}(A))$ e $\mathrm{Im}\widetilde{x}_\alpha \nsubseteq e_i(\mathrm{J}(A)^2)$.*

*Demonstração.* Como $K$-espaço vetorial, $\mathrm{J}(A) = (\mathrm{J}(A)/\mathrm{J}(A)^2) \oplus \mathrm{J}(A)^2$, portanto $e_a(\mathrm{J}(A))e_b = e_a(\mathrm{J}(A)/\mathrm{J}(A)^2)e_b \oplus e_a(\mathrm{J}(A)^2)e_b$. Cada elemento $x$ pode ser escrito da forma:

$$x = \sum_{\alpha : a \to b} x_\alpha \lambda_\alpha \text{ módulo } e_a(\mathrm{J}(A)^2)e_b.$$

Então

$$x' = x - \sum_{\alpha : a \to b} x_\alpha \lambda_\alpha \in e_a(\mathrm{J}(A)^2)e_b.$$

Como $e_a(\mathrm{J}(A)^2)e_b = \sum_{c \in (\Delta_A)_0} [e_a(\mathrm{J}(A))e_c] \, [e_c(\mathrm{J}(A))e_b]$, segue que $x' = \sum x'_c y'_c$, onde $x'_c \in e_a(\mathrm{J}(A))e_c$ e $y'_c \in e_c(\mathrm{J}(A))e_b$.

Procedendo de maneira similar para $x'_c$ e $y'_c$, obtemos expressões da forma $x'_c = \sum_{\beta : a \to c} x_\beta \lambda_\beta$ e $y'_c = \sum_{\gamma : c \to b} x_\gamma \lambda_\gamma$ módulo $\mathrm{J}(A)^2$. Como

$$x = \sum_{\alpha : a \to b} x_\alpha \lambda_\alpha + \sum_{\beta : a \to c} \sum_{\gamma : c \to b} x_\beta x_\gamma \lambda_\beta \lambda_\gamma \text{ módulo } e_a(\mathrm{J}(A)^3)e_b;$$

e $\mathrm{J}(A)$ é nilpotente, segue $(a)$.

Seja $x_\alpha \in e_i(\mathrm{J}(A))e_j \neq 0$. Temos que $x_\alpha$ é mapeado para um elemento não nulo $\widetilde{x_\alpha}$ pelo isomorfismo $K$-linear, já que $e_i(\mathrm{rad}A)e_j \cong \mathrm{Hom}(e_jA, e_i(\mathrm{rad}A))$. Segue que $\widetilde{x_\alpha}(e_j) = x_\alpha$, $\mathrm{Im}(\widetilde{x_\alpha}) \subseteq e_i(\mathrm{rad}A)$ e $\mathrm{Im}\widetilde{x_\alpha} \nsubseteq e_i(\mathrm{rad}^2 A)$, finalizando item $(b)$. $\square$

**Corolário 3.4.** *([1], Cor* 2.3.4*, pág.*62 *). Se $A$ é básica, conexa e de dimensão finita, então a aljava $\Delta_A$ de $A$ é conexa.*

*Demonstração.* Suponha que $\Delta_A$ desconexa. O conjunto de pontos de $\Delta_A$ pode ser escrito como uma união disjunta de dois conjuntos não vazios $\Delta'_0$ e $\Delta''_0$. Seja $i \in \Delta'_0$ e $j \in \Delta''_0$, temos que

$$e_iAe_j \cong \mathrm{Hom}_A(e_jA, e_iA) \cong \mathrm{Hom}_A(e_jA, \mathrm{rad}(e_iA)) \cong (\mathrm{rad}(e_iA)e_j) \cong e_i(\mathrm{rad}A)e_j.$$

Cada elemento $x \in e_iAe_j \cong e_i(\mathrm{rad}A)e_j$ pode ser escrito como uma soma $x = \sum x_{\alpha_1}...x_{\alpha_l}\lambda_{\alpha_1}...\lambda_{\alpha_l}$, onde a soma é realizada sobre todos os caminhos indo de $i$ a $j$. Como não existem caminhos de $i$ a $j$, segue que $x = 0$, portanto $e_iAe_j = 0$. $\square$

**Teorema 3.5.** *([1], Teorema* 2.3.7*, pág.*64 *). Seja $A$ uma $K$-álgebra conexa, básica e de dimensão finita. Então existe um ideal admissível $\mathcal{I}$ de $K\Delta_A$ tal que $A \cong K\Delta_A/\mathcal{I}$.*

*Demonstração.* Para cada flecha $\alpha : i \to j$ em $(\Delta_A)_1$, escolha $x_\alpha \in \mathrm{J}(A)=$ de tal forma que $\{x_\alpha + \mathrm{J}(A)^2\}$ forme uma base para $e_i(\mathrm{J}(A)/\mathrm{J}(A)^2)e_j$. Sejam $\varphi_0 : (\Delta_A)_0 \to A$ o mapa definido por $\varphi(a) = e_a$, para todo $a \in (\Delta_A)_0$, e $\varphi_1 : (\Delta_A)_1 \to A$ o mapa definido por $\varphi_1(\alpha) = x_\alpha$, para todo $\alpha \in (\Delta_A)_1$.

Os elementos $\varphi_0(a)$ formam um conjunto completos de idempotentes ortogonais primitivos de $A$. Para cada $\alpha : a \to b$, temos $\varphi_0(a)\varphi_1(\alpha)\varphi_0(b) = e_a x_\alpha e_b = x_\alpha = \varphi_1(\alpha)$. Pela propriedade universal da álgebra de caminhos, Teorema (1.15), existe um único homomorfismo de $K$-álgebras $\varphi : K\Delta_A \to A$ que estende $\varphi_0$ e $\varphi_1$. Como $\mathrm{Im}\varphi + \mathrm{rad}^2 A = A$, segue $\mathrm{Im}\varphi = A$.

Resta mostrar $\ker\varphi = \mathcal{I}$ é admissível.Seja $R_{\Delta_A}$ o ideal de flechas da álgebra $K\Delta_A$. Pela definição de $\varphi$, temos que $\varphi(R_{\Delta_A}) \subseteq \mathrm{rad}A$, portanto $\varphi((R_{\Delta_A})^l) \subseteq \mathrm{J}(A)^l$, para cada $l$ maior ou igual a 1. Como $\mathrm{J}(A)$ é nilpotente, existe $m \geq 0$ tal que $\mathrm{rad}^m A = 0$, portanto $R^m_{\Delta_A} \subseteq \mathrm{Ker}\varphi$.

Seja $x \in \mathcal{I}$, então

$$x = \sum_{a \in (\Delta_A)_0} \varepsilon_a \lambda_a + \sum_{\alpha \in (\Delta_A)_1} \alpha \mu_\alpha + y,$$

onde $\lambda_a, \mu_\alpha \in K$ e $y \in R^2_{\Delta_A}$. Como $\varphi(x) = 0$, segue que $0 = \sum_{a \in (\Delta_A)_0} e_a \lambda_a + \sum_{\alpha \in (\Delta_A)_1} x_\alpha \mu_\alpha + \varphi(y)$, concluindo que $\sum_{a \in (\Delta_A)_0} e_a(-\lambda_a) = \sum_{\alpha \in (\Delta_A)_1} x_\alpha \mu_\alpha + \varphi(y) \in \mathrm{J}(A)$. Para cada par de vértices distintos $b, c \in (\Delta_A)_0$, temos que $e_b e_c = 0$, portanto $\lambda_a = 0$, para cada $a \in (\Delta_A)_0$. $\sum_{\alpha \in (\Delta_A)_1} x_\alpha \mu_\alpha = -\varphi(y) \in \mathrm{J}(A)^2$.

Como $\{x_\alpha + \mathrm{J}(A)^2\}$ é uma base de $\mathrm{J}(A)/\mathrm{J}(A)^2$ e $\sum\limits_{\alpha\in(\Delta_A)_1}(x_\alpha + \mathrm{J}(A)^2)\mu_\alpha = 0$ em $\mathrm{J}(A)/\mathrm{J}(A)^2$, segue que $\mu_\alpha = 0$, para cada $\alpha \in (\Delta_A)_1$, portanto $x = y \in R^2_{\Delta_A}$.

$\square$

**Exemplo 3.6.** *Seja* $A = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ K & K & 0 \\ K & 0 & K \end{bmatrix}$. *Temos que*

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\ e\ e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*formam um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos e* $I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{J}(A)$, *pois* $I$ *é nilpotente e* $A/I \cong \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{bmatrix} \cong K\times K\times K$. *Como* $e_2(\mathrm{rad}A)e_1$ *e* $e_3(\mathrm{rad}A)e_1$ *são unidimensionais e os demais subespaços* $e_i(\mathrm{rad}A)e_j$ *são nulos, segue que a aljava de* $A$ *é*

$$\begin{tikzcd} & 1 & \\ 2 \arrow[ur, "\alpha"] & & 3 \arrow[ul, "\beta"'] \end{tikzcd}.$$

*Obtemos que* $K\Delta_A \cong A$ *pelo homomorfismo induzido definido do seguinte modo:* $\varphi(\varepsilon_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\varphi(\varepsilon_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\varphi(\varepsilon_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\varphi(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\varphi(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

**Exemplo 3.7.** *Seja* $A = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ K & K & 0 \\ K & K & K \end{bmatrix}$. *Temos que*

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\ e\ e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*formam um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos e* $I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \\ K & K & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{J}(A)$. *Como* $\mathrm{J}(A)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathrm{J}(A)/\mathrm{J}(A)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \\ 0 & K & 0 \end{bmatrix}$, *segue que* $e_2(\mathrm{J}(A)/\mathrm{J}(A)^2)e_1$ *e* $e_3(\mathrm{J}(A)/\mathrm{J}(A)^2)e_2$ *são unidimensionais, os demais subespaços* $e_i(\mathrm{J}(A)/\mathrm{J}(A)^2)e_j$ *são nulos. Portanto a aljava de* $A$ *é*

$$1 \xleftarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3\,.$$

*Temos o isomorfismo* $K$*-álgebras* $\varphi : K\Delta_A \to A$ *definido da seguinte forma:*

$$\varphi(\varepsilon_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \varphi(\varepsilon_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \varphi(\varepsilon_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \varphi(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\ e\ \varphi(\beta\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 3.8.** *Seja* $A$ *o anel das matrizes triangulares inferiores*

$$\left\{\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ c & b & 0 \\ e & d & a \end{bmatrix} \mid a,b,c,d,e \in K\right\},$$

*e* $I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *um ideal de* $A$.

*Considere a álgebra* $B = A/I$. *Um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos de* $B$ *é formado por*

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + I \text{ e } e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + I.$$

*Temos que* $\mathrm{J}(B) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \end{bmatrix} + I \mid c, d \in K \right\}$. *Como* $\mathrm{J}(B)^2 = 0$, *então* $\mathrm{J}(B)/\mathrm{J}(B)^2 = \mathrm{rad}B$, *segue que* $e_2(\mathrm{rad}B)e_1$ *e* $e_1(\mathrm{rad}B)e_2$ *são unidimensionais, portanto a aljava de* $B$ *é*

$$1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} 2 \; .$$

*Obtendo o homomorfismo de* $K$*-álgebras definido da seguinte maneira:* $\varphi(\varepsilon_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + I$, $\varphi(\varepsilon_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + I$,

$\varphi(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + I$ *e* $\varphi(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + I$,

*cujo* $\ker\varphi = \langle \alpha\beta, \beta\alpha \rangle = R^2_{\Delta_B}$.

# CAPÍTULO 3

# ÁLGEBRA DE CAMINHOS GENERALIZADA

Neste capítulo estamos assumindo que $K$ é um corpo algebricamente fechado.

## 1 Álgebra de caminhos generalizadas

**Definição 1.1.** *Sejam $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ uma aljava e $\mathcal{A} = \{A_i : i \in \Delta_0\}$ uma família de $K$-álgebras $A_i$ com identidade indexada por cada vértice de $\Delta$. Para cada $i \in \Delta_0$, denotaremos por $e_i$ a identidade de $A_i$ . Os elementos de $\bigcup_{i\in\Delta_0} A_i$ são chamado de $\mathcal{A}$-caminhos de comprimento nulo. Para todo $n \geq 1$, um $\mathcal{A}$-caminho de comprimento $n$ é dado por $a_1\beta_1 a_2\beta_2 ... a_n\beta_n a_{n+1}$, onde $(s(\beta_1) \mid \beta_1...\beta_n \mid e(\beta_n))$ é um caminho de comprimento $n$ em $\Delta$, para cada $i = 1, ..., n$, $a_i \in A_{s(\beta_i)}$, e $a_{n+1} \in A_{e(\beta_n)}$.*

*Considere o quociente $R$ do $K$-espaço vetorial com base os $\mathcal{A}$-caminhos de $\Delta$ pelo subespaço gerado por todos os elementos da forma*

$$a_1\beta_1...\beta_{j-1}(k_1a_j^1 + \cdots + k_m a_j^m)\beta_j a_{j+1}...\beta_n a_{n+1} - \sum_{l=1}^{m} k_l a_1\beta_1...\beta_{j-1}a_j^l\beta_j...\beta_n a_{n+1}$$

*onde $(s(\beta_1) \mid \beta_1...\beta_n \mid e(\beta_n))$ é um caminho em $\Delta$ de comprimento $n$, $k_1, ..., k_m \in K$, para cada $i = 1, ..., n$, $a_i \in A_{s(\beta_i)}$, $a_{n+1} \in A_{e(\beta_n)}$, e $a_j^l \in A_{s(\beta_j)}$ para $l = 1, ..., m$. Dado dois elementos $[a_1\beta_1...\beta_n a_{n+1}]$ e $[b_1\gamma_1...\gamma_m b_{m+1}]$, a multiplicação em $R$ é definida por*

$$[a_1\beta_1...\beta_n a_{n+1}][b_1\gamma_1...\gamma_m b_{m+1}] = \begin{cases} [a_1\beta_1...\beta_n a_{n+1}b_1\gamma_1...\gamma_m b_{m+1}], \textit{se } a_{n+1}, b_1 \in A_{s(\gamma_1)}, \\ 0, \textit{caso contrário} \end{cases}.$$

*A $K$-álgebra $R$ definida acima é **álgebra de $\mathcal{A}$-caminhos generalizada** de $\Delta$, denotada por $R = K(\Delta, \mathcal{A})$.*

A operação é bem definida. De fato, sejam $[a_1\alpha_1...\alpha_n a_{n+1}] = [b_1\beta_1...\beta_n b_{n+1}]$ e $[c_1\gamma_1...\gamma_m c_{m+1}] = [d_1\varepsilon_1...\varepsilon_m d_{m+1}]$. Temos que

$$\begin{aligned}[][a_1\alpha_1...\alpha_n(a_{n+1}c_1)\gamma_1...\gamma_m c_{m+1}] = [a_1\alpha_1...\alpha_n a_{n+1}][c_1\gamma_1...\gamma_m c_{m+1}] \\ = [b_1\beta_1...\beta_n b_{n+1}][d_1\varepsilon_1...\varepsilon_m d_{m+1}] = [b_1\beta_1...\beta_n(b_{n+1}d)_1\varepsilon_1...\varepsilon_m d_{m+1}].\end{aligned}$$

**Lema 1.2.** *$R$ possui identidade se, e somente se, $\Delta_0$ é finito.*

*Demonstração.* Assuma que $|\Delta_0| = n$, então $1_R = \sum_{i=1}^{n}[e_i]$ é a identidade de $R$. Suponha $\Delta_0$ seja infinito. Seja $1 = \sum_{i=1}^{m}[\lambda_i w_i]$a identidade de $R$, onde $\lambda_i \in K$ e $w_i$'s são $\mathcal{A}$-caminhos. Tome $\Delta_0'$o conjunto de todas as origens de $w_i$'s. A cardinalidade de $\Delta_0'$ é no máximo $m$. Tome $a \in \Delta_0 \backslash \Delta_0'$, portanto $e_a 1 = 0$. $\square$

**Lema 1.3.** *Seja $R$ uma álgebra de caminhos generalizada. A dimensão de $R$ como $K$-espaço espaço vetorial é finita se, e somente se, $\Delta$ for uma aljava finita sem ciclos orientados e $\dim_K A_i < \infty$, para cada $i \in \Delta_0$.*

*Demonstração.* Assuma que $\Delta$ é infinito, então a dimensão de $R$ como $K$-espaço será infinita. Seja $\gamma = \alpha_1\alpha_2...\alpha_m$ um ciclo orientado em $\Delta$, temos que $\gamma^t$ formam um conjunto linearmente independente, para todo $t > 0$, portanto $\dim_K R$ é infinita. Assuma que $\dim_K A_i$ é infinito, para algum $i \in \Delta_0$, portanto uma base para $A_i$ é um conjunto linearmente independente para $R$, portanto $\dim_K R$ é infinita.

Como $\Delta$ é finita e sem ciclos orientados, $\Delta$ contém um número finito de caminhos e já que $\dim_K A_i < \infty$, para todo $i \in \Delta_0$, segue que $\dim_K R < \infty$. $\square$

**Observações:**

($i$) Uma $K$-álgebra $R$ com identidade pode ser vista como uma álgebra de $\mathcal{A}$-caminhos, $K(\Delta, \mathcal{A})$, com $\Delta$ sendo a aljava com um único vértice e $\mathcal{A} = R$.

($ii$) Se $A_i = K$, para cada $i \in \Delta$, temos que $K(\Delta, \mathcal{A})$ é a álgebra usual de caminhos da aljava $\Delta$.

Daremos uma outra interpretação para álgebras de caminhos generalizadas:

Sejam $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ uma aljava finita e $\mathcal{A} = \{A_i | i \in \Delta_0\}$ uma família de $K$-álgebras $A_i$. Para cada $i, j \in \Delta_0$, tome ${}_iM_j$ como sendo o $A_i$-$A_j$-bimódulo livre com geradores livres formados por todas as flechas indo de $i$ a $j$. Tome $A = \oplus_{k\in\Delta_0} A_k$. Portanto ${}_iM_j$ é um $A$-$A$-bimódulo definido por $A_k {}_iM_j = 0$ se $k \neq i$ e ${}_iM_j A_k = 0$ se $k \neq j$. Segue que $M = \oplus_{i\to j}\ {}_iM_j$ é também um $A$-$A$-bimódulo. Definiremos nossa álgebra de caminho generalizada como sendo a álgebra tensorial $T(A, M)$.

Sejam $f_1 : A \to K(\Delta, \mathcal{A})$ o mapa que leva $(a_i)_{i\in\Delta_0}$ a $\sum_{i\in\Delta_0} a_i$ e $f_2 : M \to K(\Delta, \mathcal{A})$ o mapa inclusão. Como $f_1$ é um homomorfismo de $K$-álgebras e $f_2$ é um homomorfismo de $A$-bimódulos, pela propriedade universal da álgebra tensorial, (6.9) do Capítulo 1, existe um único homomorfismo de $K$-álgebras $\varphi : T(A, M) \to K(\Delta, \mathcal{A})$ tal que $\varphi|_A = f_1$ e $\varphi|_M = f_2$.

Como

$$\begin{aligned} a_1\alpha_1 a_2...a_n\alpha_n a_{n+1} &= (a_1)(\alpha_1)(a_2)...(a_n)(\alpha_n)(a_{n+1}) \\ &= a_1 f(\alpha_1)a_2...a_n f(\alpha_n)a_{n+1} \\ &= \varphi(a_1)\varphi(\alpha_1)\varphi(a_2)...\varphi(a_n)\varphi(\alpha_n)\varphi(\alpha_{n+1}) \\ &= \varphi(a_1\alpha_1 a_2 \otimes ... \otimes a_n\alpha_n\alpha_{n+1}), \end{aligned}$$

concluímos que $\varphi$ é sobrejetivo.

Para cada $i$, seja $\{a_i^{j_i} : j_i \in I_i\}$ uma base para a álgebra $A_i$ como $K$-espaço vetorial. Temos que $\{a_{s(\beta_1)}^{j_1}\beta_1...a_{s(\beta_n)}^{j_n}\beta_n a_{t(\beta_n)}^{j_{n+1}} : \beta_1...\beta_n \in \Delta\}$ e $\{a_{s(\beta_1)}^{j_1}\beta_1 \otimes ... \otimes a_{s(\beta_n)}^{j_n}\beta_n a_{t(\beta_n)}^{j_{n+1}} : \beta_1...\beta_n \in \Delta\}$ formam bases para $K(\Delta, \mathcal{A})$ e $T(A, M)$, respectivamente. Portanto

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi(\sum k_{a_{s(\beta_1)}^{j_1}\beta_1...a_{s(\beta_n)}^{j_n}\beta_n a_{t(\beta_n)}^{j_{n+1}}} a_{s(\beta_1)}^{j_1}\beta_1...a_{s(\beta_n)}^{j_n}\beta_n a_{t(\beta_n)}^{j_{n+1}}) \\ &= \sum k_{a_{s(\beta_1)}^{j_1}\beta_1...a_{s(\beta_n)}^{j_n}\beta_n a_{t(\beta_n)}^{j_{n+1}}} a_{s(\beta_1)}^{j_1}\beta_1 \otimes ... \otimes a_{s(\beta_n)}^{j_n}\beta_n a_{t(\beta_n)}^{j_{n+1}}, \end{aligned}$$

concluindo que cada $k_{a_{s(\beta_1)}^{j_1}\beta_1...a_{s(\beta_n)}^{j_n}\beta_n a_{t(\beta_n)}^{j_{n+1}}} = 0$, portanto $\varphi$ é um monomorfismo.

**Definição 1.4.** *Sejam $\Delta$ uma aljava e $\mathcal{A}$ uma família de $K$-álgebras $\{A_i\}_{i\in\Delta_0}$.*

($a$) *Dizemos que um caminho $(i \mid \beta_1...\beta_n \mid j)$, $n \geq 1$, em $\Delta$ é **regular** se não é um subcaminho de um ciclo orientado em $\Delta$.*

($b$) *Seja $(i \mid \beta_1...\beta_n \mid j)$ um caminho regular em $\Delta$. Então um $\mathcal{A}$-caminho $a\beta_1...\beta_n b$, com $a \in A_{s(\beta_1)}$ e $b \in A_{t(\beta_n)}$, é chamado regular. Caso não exista um ciclo orientado passando pelo vértice $i$, os elementos de $\mathrm{rad}A_i$ são os $\mathcal{A}$-caminhos regulares de comprimento nulo.*

O próximo resultado nos dá uma caracterização para o radical de uma álgebra de caminhos generalizada.

**Proposição 1.5.** *([7], Teorema 1.3, pág.57). Seja $R = K(\Delta, \mathcal{A})$ a álgebra de $\mathcal{A}$-caminhos de $\Delta$. Então o radical de Jacobson de $R$, $\mathrm{J}(R)$, é justamente o $K$-subespaço de $R$ gerado por todos os caminhos regulares de $R$.*

*Demonstração.* Considere $M$ como sendo o $K$-subespaço de $R$ gerado por todos os $\mathcal{A}$-caminhos regulares de $R$.

Seja $p$ um $\mathcal{A}$-caminho regular de comprimento maior ou igual a 1. Para cada $\mathcal{A}$-caminho $q$, temos que $qp - qp + qpqp = 0$, caso contrário, $p$ estaria contido em um ciclo orientado. Logo $Rp$ é um ideal quase-regular à esquerda, portanto $p \in \mathrm{J}(R)$ pelo item $(b)$ do Corolário (2.12) do Capítulo 1.

Seja $a_i \in \mathrm{J}(A_i)$ um $\mathcal{A}$-caminho regular de comprimento nulo . Temos que $Ra_i$ são todos os $\mathcal{A}$-caminhos que terminam no vértice $i$. Para cada $\mathcal{A}$- caminho $p$ de comprimento maior ou igual a 1, temos que $pa - pa + (pa)^2 = 0$, caso contrário teríamos que existiria ciclo orientado passando pelo vértice $i$. Seja $p$ um $\mathcal{A}$-caminho de comprimento 0, então $p = \sum_{j \in \Delta_0} p_j$, com $p_i \in A_i$. Como $pa_i = p_i a_i \in \mathrm{J}(A_i)$, segue que $p_i a_i$ é quase-regular em $A_i$, portanto quase-regular em $R$. Portanto todo $\mathcal{A}$-caminho regular está contido em $\mathrm{J}(R)$, ou seja, $M \subseteq \mathrm{J}(R)$.

Suponha que $M \neq \mathrm{rad}R$. Existe elemento não nulo $x = \displaystyle\sum_i p_i \in \mathrm{rad}R \backslash M$. Para algum $i$, $p_i$ está contido em algum ciclo orientado, caso contrário, teríamos que $x \in M$, portanto podemos tomar $x = \sum p_i$, onde cada $p_i$ é um subcaminho de um ciclo orientado.

Existem $l, m$ tais que $0 \neq e_l x e_m \in \mathrm{J}(R)$, onde $e_l, e_m$ são as identidades de $A_l$ e $A_m$, respectivamente. Como cada $p_i$ é um subcaminho de um ciclo orientado, existe um caminho $q$ indo de $m$ a $l$. Sem perda de generalidade, podemos tomar $x$ como somatório de ciclos orientados indo de $l$ a $l$, ou seja, $x = \sum p_i$, com $p_i = a_{i_1}\alpha_{i_1}a_{i_2}\alpha_{i_2}...a_{i_n}\alpha_{i_n}$, onde $\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}...\alpha_{i_n}$ é um ciclo orientado indo de $l$ a $l$, $a_{i_1} \in A_{s(\alpha_{i_1})}$ e $a_{i_j} \in A_{s(\alpha_{i_j})}$, para cada $2 \leq j \leq n$.

Como $x \in \mathrm{J}(R)$, $x$ é um elemento quase-regular, existe $y \in R$ tal que

$$x + y + xy = 0. \tag{1}$$

Multiplicando de ambos os lados por $e_l$, obtemos que $e_l x e_l + e_l y e_l + e_l x y e_l = 0$. Suponha que $y$ tenha comprimento nulo, então comprimento de $x + xy$ é maior do que $y$, portanto $y = 0$, concluindo que $x = 0$. Se $e_l y = 0$, teríamos que $xy = (xe_l)y = x(ely) = 0$, obtendo que $0 = e_l x = x$, contradizendo o fato de $x$ ser não nulo. De maneira análoga concluímos que $ye_l \neq 0$, portanto $y$ é um $\mathcal{A}$-caminho de comprimento maior ou igual a 1 indo de $l$ a $l$. Como o comprimento de $0 \neq xy$ é maior do que $x + y$, seque que $x + y + xy \neq 0$.

$\square$

**Definição 1.6.** *Seja $\Delta$ uma aljava. Um vértice $i \in \Delta_0$ é dito **isolado** sempre que não há caminhos passando pelo vértice.*

**Corolário 1.7.** *Seja $R = K(\Delta, \mathcal{A})$ a álgebra de $\mathcal{A}$-caminhos de $\Delta$. $R$ é semissimples se, e somente se, $\Delta$ não possui caminhos regulares e $\mathrm{J}(A_i) = 0$, sempre que $i$ é um vértice isolado.*

*Demonstração.* $R$ é semissimples se, e somente se, $\mathrm{J}(R) = 0$ se, e somente se, cada $\mathcal{A}$-caminho de comprimento maior ou igual a 1 está contido em um ciclo orientado e $\mathrm{J}(A_i) = 0$, sempre que $i$ é um vértice isolado. $\square$

**Definição 1.8.** *Diremos que uma aljava $\Delta$ é conexa orientável se para cada par de vértices distintos $i$ e $j$, existir um caminho em $\Delta$ indo de $i$ a $j$.*

**Definição 1.9.** *Um anel $R$ é primo se para cada dois ideais $I$ e $J$ tais que $IJ = 0$, então $I = 0$ ou $J = 0$.*

**Teorema 1.10.** *([7], Teorema 2.1, pág.58). Seja $R = K(\Delta, \mathcal{A})$ a álgebra de $\mathcal{A}$-caminhos de $\Delta$. Assuma que $\Delta$ seja uma aljava conexa com dois ou mais vértices. As seguintes afirmações são equivalentes:*

*(a) $R$ é primo;*

*(b) $\Delta$ é conexo orientável;*

*(c) Não há $\mathcal{A}$-caminhos regulares.*

*Demonstração.* $(a) \Rightarrow (b)$. Suponha que $\Delta$ não seja conexa orientável. Existem dois vértices distintos, $i$ e $j$, tais que não existe um caminho indo de $i$ a $j$. Considere $I = e_iR$ e $J = e_jR$ ideais à direita de $R$ não nulos. Temos que $e_iRe_j = 0$, já que não existe caminhos indo de $i$ a $j$.

Suponha $0 \neq \gamma \in IJ$. Como $\gamma = \sum_{t=1}^{n} p_tq_t$, onde $p_1, ..., p_n \in I$ e $q_t \in J$. Já que a soma é não-nula, então $0 \neq p_t \in I$, para algum $t$. Temos que $p_t$ é um $\mathcal{A}$-caminho começando em $i$ e terminando em $j$, portanto um $\mathcal{A}$-caminho indo de $i$ a $j$, contrariando nossa afirmação inicial. Portanto $IJ = 0$, logo $R$ não é primo.

$(b) \Rightarrow (a)$. Sejam $I$ e $J$ dois ideais não nulos de $R$. Uma vez que $I$ e $J$ são não nulos, existem $i, j, l$ e $m$ tais que $e_iIe_j \neq 0$ e $e_lJe_m \neq 0$. Assuma que $\Delta$ é conexo orientável, existe um caminho $\gamma \in \Delta$ indo de $j$ a $l$. Como $e_iIe_je_lJe_m \neq 0$, concluímos que $R$ é um anel primo.

$(b) \Rightarrow (c)$. Seja $(i \mid \alpha_1...\alpha_n \mid j)$ um caminho em $\Delta$, com $i \neq j$. Já que $\Delta$ é conexo orientável, existe caminho $(j \mid \beta_1...\beta_m \mid i)$, logo $(i \mid \alpha_1...\alpha_n\beta 1...\beta_m \mid i)$ é um ciclo. Repetindo o mesmo argumento para cada vértice, concluímos que cada vértice está contido em um ciclo orientado.

$(c) \Rightarrow (b)$. Denote por $\ell = \ell(i, j)$ o passeio de menor comprimento entre $i$ e $j$. Queremos mostrar que sempre existe um caminho indo de $i$ a $j$. Iremos fazer indução sobre o comprimento do passeio.

Suponha que $l = 1$, isto é, existe um flecha $\alpha : i \to j$ ou $\beta : j \to i$, não há nada a fazer no primeiro caso. Sabemos que $j$ está contido em ciclo orientado, ou seja, existe um $A$-caminho $(j \mid \beta_1...\beta_m \mid j)$, logo $(i \mid \beta\beta_1...\beta_m \mid j)$ é um $\mathcal{A}$-caminho indo de $i$ a $j$.

Agora suponha que $l > 1$. Existe um passeio $(i \mid \overline{\alpha_1}...\overline{\alpha_l} \mid j)$ ,de comprimento $l$ , indo de $i$ a $j$. Se $s(\gamma_1) = i$, existe um passeio $(e(\gamma_1) \mid \overline{\alpha_2}...\overline{\alpha_n} \mid j)$ de comprimento $l - 1$. Pela hipótese de indução, existe um caminho de $e(\gamma_1)$ a $j$. Realizando a composição à esquerda com $\gamma_1$, ganhamos um caminho indo de $i$ a $j$.

Se $e(\gamma_1) = i$, existe passeio $(s(\gamma_1) \mid \overline{\alpha_2}...\overline{\alpha_n} \mid j)$ de comprimento $l - 1$. Pela hipótese de indução, existe um caminho de $s(\gamma_1)$ a $j$, logo um caminho indo de $e(\gamma_1)$ a $i$. Como esse caminho está contido em um ciclo orientado de $(e(\gamma_1) \mid \gamma_1\beta_1...\beta_m \mid e(\gamma_1))$ , temo que $(i \mid \beta_1...\beta_m \mid e(\gamma_1))$ é um caminho indo de $i$ a $e(\gamma_1)$. Compondo os caminho, obtemos o caminho desejado.

□

O próximo resultado nos dá um críterio para estudar quando a álgebra de caminhos generalizada $R = K(\Delta, \mathcal{A})$ será Noetheriano à direita ou à esquerda em termos da aljava $\Delta$ e da família $\mathcal{A}$.

**Teorema 1.11.** *([7], Teorema 2.2, pág.59). Seja $R = K(\Delta, \mathcal{A})$ a álgebra de $\mathcal{A}$-caminhos de $\Delta$. A álgebra $R$ é Noetheriana à direita se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

(a) *$\Delta$ é finito;*

(b) *Existe uma única flecha começando em um vértice pertencendo a algum ciclo orientado em $\Delta$;*

(c) *Se $i \in \Delta_0$ é um vértice pertencendo a um ciclo orientado, então $A_i$ é unidimensional.*

(d) *Se não há flechas começando no vértice $j$, então a álgebra $A_j$ é Noetheriana à direita. Se há flechas começando no vértice $j$, então $A_j$ possui dimensão finita.*

*Demonstração.* Assumamos que $R$ seja Noetheriano à direita. Suponha que $\Delta_0$ não seja finito, teríamos uma cadeia ascendente não estacionária

$$\langle e_0 \rangle \subset \langle e_0, e_1 \rangle \subset ...\langle e_0, e_1, ..., e_m \rangle \subset ...,$$

Assuma que $\Delta_1$ não seja finito. Então a cadeia ascendente direita

$$\langle \alpha_0 \rangle \subset \langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle \subset ...\langle \alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_m \rangle \subset ...$$

é não estacionária.

Assuma que $\Delta$ possui um ciclo $\gamma$ começando e terminando em $i$ e que exista uma flecha $\alpha : i \to j$ que não esteja em $\gamma$. A seguinte cadeia ascendente de ideais à direita distintos

$$\langle \gamma\alpha \rangle \subset \langle \gamma\alpha, \gamma^2\alpha \rangle \subset \langle \gamma\alpha, \gamma^2\alpha, \gamma^3\alpha \rangle \subset ...$$

é não estacionária.

Considere $\gamma = \omega_1 ... \omega_{n-1}$ um ciclo orientando em $\Delta$ passando pelo vértice $i$. Sejam $\alpha$ e $\beta$ as flechas tais que $s(\alpha) = i$ e $t(\beta) = i$. Se $A_i$ não é unidimensional, existem dois elementos $K$-linearmente-independentes $a$ e $b$ em $A_i$. Considere $x = a\alpha a_1 \omega_1 ... \omega_{n-1} a_n \beta e_i$ e $y = b\alpha a_1 \omega_1 ... \omega_{n-1} a_n \beta e_i$. Então,

$$\langle xy \rangle \subset \langle xy, x^2y \rangle \subset \langle xy, x^2y, x^3y \rangle \subset ...$$

é um cadeia ascendente não estacionária de ideais à direita.

Assuma que não há flechas saindo do vértice $j$, então cada ideal de $A_j$ é um ideal de $R$, assim $A_j$ também será Noetheriano à direita. Suponha que tenha uma flecha saindo do vértice $j$. Seja $\alpha$ a flecha indo de $j$ a $l$. Se $A_j$ possui dimensão infinita, considere $\{a_i : i \in N\}$ um conjunto infinito de elementos linearmente independentes de $A_i$. Então,

$$\langle a_1\alpha \rangle \subset \langle a_1\alpha, a_2\alpha \rangle \subset \langle a_1\alpha, a_2\alpha, a_3\alpha \rangle \subset ...$$

é uma cadeia não estacionária.

Suponha que $(\Delta, \mathcal{A})$ satisfaça $(a) - (d)$. Seja

$$I_1 \subset I_2 \subset ... \subset I_n \subset ...$$

uma cadeia ascendente de ideais à direita de $R$. Como $\Delta_0$ é finito, suponha $|\Delta_0| = m$, será suficiente mostrar que

$$e_i I_1 e_j \subset e_i I_2 e_j \subset ... \subset e_i I_n e_j \subset ... \tag{2}$$

é estacionária para cada $(i, j)$. Para cada $n$, temos que $e_i I_n e_j \subset e_i R e_j$.

Seja $\gamma$ um caminho em $e_i R e_j$. Assuma que $\gamma$ não pertença a um ciclo orientado. Pelo item $(b)$, $\gamma$ não possui subcaminhos que são ciclos orientados.Se há flechas começando em $j$, então $A_j$ é uma $K$-álgebra de dimensão finita. Existem finitos caminhos indo de $i$ a $j$ e nenhum deles é um ciclo orientado e, para cada vértice em $e_i R e_j$, a álgebra associada a cada vértice possui dimensão finita, segue que $e_i R e_j$ é um subespaço de dimensão finita.

Assuma que não há flechas saindo do vértice $j$, então $e_i R e_j$ é um $A_j$-módulo à direita. Como existem finitos caminhos indo de $i$ a $j$ e cada vértice em $e_i R e_j$, diferente de $j$, está associada a uma álgebra de dimensão finita, segue que $e_i R e_j$ é um $A_j$-módulo à direita finitamente gerado. Pelo Corolário (3.10) do Capítulo 1, segue que $e_i R e_j$ é Noetheriano à direita.

Assuma que exista ciclo orientado passando por $j$. Pelo item $(b)$, existe um único ciclo orientado $\theta$ passando por $j$. Os vértices finais de caminhos começando em $j$ pertencem a $\theta$. Pelo item $(c)$, para cada vértice $l$ no ciclo orientado, a $K$-álgebra $A_l$ é unidimensional, ou seja, cada $a_l \in A_l$ é da forma $\lambda_l e_l$, com $\lambda_l \in K$ e $e_l$ a identidade de $A_l$.

Como todos os $\mathcal{A}$-caminhos indo de $j$ a $j$ são combinações $K$-lineares de potências de $\theta$, segue que $e_i R e_j$ é um $K[\theta]$-módulo à direita. Já que existem finitos $\mathcal{A}$-caminhos indo de $i$ a $j$ e, para cada vértice em $e_i R e_j$, as álgebras associadas ou são unidimensionais ou de dimensão finita, temos que $e_i R e_j$ é um $K[\theta]$-módulo à direita finitamente gerado. Como $K[\theta]$ é Noetheriano à direita, segue do Corolário (3.10 do Capítulo 1, que $e_i R e_j$ é Noetheriano à direita.

□

**Teorema 1.12.** *Seja $R = K(\Delta, \mathcal{A})$ uma álgebra de $\mathcal{A}$-caminho de $\Delta$. A álgebra $R$ é Noetheriana à esquerda se, e somente se, as seguintes condições são satisfeita:*

$(a')$ *$\Delta$ é finito;*

$(b')$ *Existe uma única flecha terminando em cada vértice em um ciclo orientado de $\Delta$;*

$(c')$ *Se o vértice $i$ pertence a algum ciclo orientado, então a $K$-álgebra $A_i$ é unidimensional;*

$(d')$ *Se não flechas há terminando no vértice $j$, então a álgebra $A_j$ é Noetheriana à esquerda. Se há flechas chegando no vértice $j$, então $A_j$ possui dimensão finita.*

O resultado é demonstrado de forma análago ao anterior. Como consequência direta dos dois teoremas anteriores segue o seguinte resultado.

**Corolário 1.13.** ([7], *Teorema* 2.2, *pág.*62). *Seja $R = K(\Delta, \mathcal{A})$ uma álgebra de $\mathcal{A}$-caminhos. Então $R$ é Notheriana se, e somente se, $\Delta$ é finito e, para cada componente conexa $\Gamma$ de $\Delta$, um dos seguintes fatos acontece:*

($a''$) *$\Gamma = \{i\}$ é um vértice isolado e $A_i$ é Noetheriano;*

($b''$) *$\Gamma$ não possui ciclos orientados e $A_i$ possui dimensão finita para cada vértice $i$;*

($c''$) *$\Gamma$ é uma componente com somente um ciclo orientado e $A_i$ é unidimensional para cada vértice $i \in \Gamma$.*

*Demonstração.* $R$ é Noetheriano, ou seja, $R$ é Noetheriano à esquerda e à direita. Temos que $\Delta$ é finito. Se $i$ um vértice isolado de $\Delta$, não existe flechas começando ou terminando no vértice $i$, usando o item ($d$) e ($d'$), concluímos que a álgebra $A_i$ é Noetheriana à direita e à esquerda, portanto Noetheriana.

Seja $\Gamma$ uma componente sem ciclos orientados. Para cada vértice em $\Gamma$, ou existe uma flecha começando ou terminando no vértice, segue dos itens ($d$) e ($d'$), que as álgebras associadas possuem dimensão finita.

Suponha que exista ciclo orientado na componente conexa $\Gamma$. Pelos itens ($b$) e ($b'$) temos que existe apenas uma flecha ligando cada vértice no ciclo, ou seja, $\Gamma$ é um ciclo básico. Pelos itens ($c$) e ($c'$), concluímos que cada álgebra $A_i$ é unidimensional.

Sejam $\Delta$ uma aljava finita e $\Gamma$ uma componente conexa de $\Delta$ satisfazendo as condições ($a''$), ($b''$) e ($c''$). Como $\Delta$ é uma aljava finita, as condições ($a$) e ($a'$) são satisfeitas.

Seja $\Gamma$ satisfazendo ($c''$), existe apenas uma flecha terminando e começando em cada vértice desse ciclo. Para cada vértice no ciclo, a álgebra associada é unidimensional, logo ($b$), ($b'$), ($c$) e ($c'$) são satisfeitas. Para cada vértice isolado, a álgebra associada é Noetheriana, segue as primeiras condições dos itens ($d$) e ($d'$).

Seja $\Gamma$ satisfazendo ($b''$). Cada álgebra associada aos vértices na componente $\Gamma$ possui dimensão finita, portanto Noetheriano à direita e à esquerda, satisfazendo as condições ($d$) e ($d'$).

**Definição 1.14.** *O **ideal de flechas**, denotado por $J_R$, é o ideal de $R = K(\Delta, \mathcal{A})$ gerado por todos os $\mathcal{A}$-caminhos de comprimento 1.*

□

## 2 Representação para álgebras de dimensão finita

Nesta seção queremos fazer algo similar ao que foi feito na Seção 3 do Capítulo 2.

Dada uma $K$-álgebra $A$ de dimensão finita, associaremos a ela uma aljava, $Q_A$, e uma família de $K$-álgebras, $\mathcal{A}_A$, obtendo uma álgebra de caminhos generalizada para $A$, $K(\Delta_A, \mathcal{A}_A)$. Iremos garantir a existência de um ideal de $K(\Delta_A, \mathcal{A}_A)$ "bem comportado" de modo que o quociente da álgebra de caminhos generalizada pelo ideal seja isomorfo a álgebra $A$.

Seja $A$ uma $K$-álgebra de dimensão finita. Como $A/J(A)$ é uma álgebra semissimples, segue que $A/J(A) \cong \prod_{i=1}^{n} \mathbb{M}_{n_i}(K)$. Tome $\mathcal{A}_A = \{\mathbb{M}_{n_i}(K) : 1 \leq i \leq n\}$. Seja $Q_A$ a aljava de $A$ definida do seguinte modo:

$a$) o número de vértices é $n$;

$b$) sejam $i$ e $j$ dois vértices, o número de flechas entre $i$ e $j$ é o posto do $\mathbb{M}_{n_i}$-$\mathbb{M}_{n_j}$-bimódulo $\mathbb{M}_{n_i}J(A)/J(A)^2\mathbb{M}_{n_j}$.

Deste modo, obteríamos a álgebra de caminhos generalizada associada a $A$, $K(Q_A, \mathcal{A}_A)$. Um pequeno problema surge, nem sempre o núcleo do homomorfismo de $K(Q_A, \mathcal{A}_A)$ é um ideal admissível. Observe o exemplo abaixo:

**Exemplo 2.1.** *Considere a seguinte $K$-álgebra* $A = \begin{bmatrix} K & K & 0 & 0 \\ K & K & 0 & 0 \\ K & K & K & K \\ K & K & K & K \end{bmatrix}$. *Temos que* $\mathrm{J}(R) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K & K & 0 & 0 \\ K & K & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

*Temos que a álgebra de caminhos generalizada associada a $A$ é $K(\Delta, \mathcal{A})$, onde $\Delta$ é a aljava* $1 \xleftarrow{\alpha} 2$ *e $\mathcal{A} = \{\mathbb{M}_2(K), \mathbb{M}_2(K)\}$ é a família de $K$-álgebras indexada por cada vértice.*

*O núcleo do homomorfismo sobrejetivo de álgebras $f : K(\Delta, \mathcal{A}) \to A$ seria o núcleo do homomorfismo do $\mathbb{M}_2(K)$-$\mathbb{M}_2(K)$-bimódulo livre gerado por $\alpha$, de dimensão 16, a $I$, de dimensão 4. Logo o núcleo de $f$ não estaria contido em $J_R^2$, ou seja, não seria um ideal admissível.*

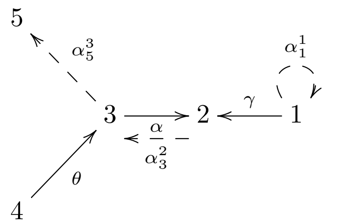
*Para contornarmos o problema, iremos introduzir generalizações para os conceitos de aljava associada a uma álgebra e para ideal admissível de forma que a interseção núcleo do homomorfismo de $K$-álgebras com $J_R$ seja exatamente um ideal gerado por um tipo específico de "flechas especiais ".*

**Definição 2.2.** *Uma* ***aljava especial*** $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, s, t)$ *é uma quíntupla, onde os conjuntos* $\Delta_0$ *e* $\Delta_1$ *e as funções* $s$ *e* $t$ *são como na definição anterior de aljava. O conjunto* $\Delta_2$ *consiste de flechas pontilhadas com a seguinte propriedade:*

*Para cada par de vértices* $a$ *e* $b$*, teremos no máximo uma flecha pontilhada indo de* $a$ *a* $b$*.*

*Cada flecha pontilhada indo de* $a$ *a* $b$ *será chamada de flecha especial indo de* $a$ *a* $b$*, denotada por* $\alpha_b^a$*.*

**Exemplo 2.3.** *Seja* $\Delta$ *aljava especial*




*temos que* $\alpha_1^1, \alpha_3^2$ *e* $\alpha_5^3 \in \Delta_2$ *e* $\alpha, \gamma$ *e* $\theta \in \Delta_1$*.*

Quando construímos a álgebra de caminhos generalizada a partir de uma aljava especial, vamos tratar as flechas especiais em $\Delta_2$ como flechas em $\Delta_1$. A utilidade das flechas especiais é que vamos definir nossa generalização do ideal admissível em termos delas:

**Definição 2.4.** *Sejam* $\Delta$ *uma aljava especial,* $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_s\}$ *uma família de* $K$*-álgebras. Considere* $\Sigma = A_1 \times ... \times A_s$*. Um ideal* $I$ *de* $R = K(\Delta, \mathcal{A})$ *é dito* ***ideal admissível generalizado*** *se:*

(a) $J_R^m \subseteq I$*, para algum inteiro positivo* $m$*;*

(b) *a interseção de* $I$ *com o* $\Sigma$*-bimódulo livre* $M^*$*, com base formada por todas as flechas em* $\Delta_1$*, é* $0$*;*

(c) *o* $\Sigma$*-bimódulo livre* $M^{**}$*, com base formada por todas as flecha em* $\Delta_2$*, possui a seguinte propriedade:* $0 \subsetneq M^{**} \cap I \subsetneq M^{**}$*.*

Um ideal admissível generalizado não está necessariamente contido completamente em $J_R^2$, mas a interseção com $J_R$ está propriamente contida no bimódulo gerado pelas flechas especiais. Nesse sentido, um ideal admissível generalizado é "quase-admissível".

Dada uma $K$-álgebra com identidade de dimensão finita $A$, queremos construir uma aljava especial para a álgebra $A$.

Seja $A$ uma $K$-álgebra com identidade de dimensão finita, pelo Teorema de Wedderburn-Artin existem inteiros positivos $n_1, ..., n_s$ tais que $A/\mathrm{J}(A) = \mathbb{M}_{n_1}(K) \times ... \times \mathbb{M}_{n_s}(K)$.

Como $\mathrm{J}(A)/\mathrm{J}(A)^2$ é um $A/\mathrm{J}(A)$-bimódulo. Considere o seguinte $\mathbb{M}_{n_a}(K)$-$\mathbb{M}_{n_b}(K)$-bimódulo

$$_aX_b = \mathbb{M}_{n_a}(K)(\mathrm{J}(A)/\mathrm{J}(A)^2)\mathbb{M}_{n_b}(K),$$

com $a, b \in \{1, ..., s\}$.

Pela proposição (6.7), do Capítulo 1, um $\mathbb{M}_{n_a}(K)$-$\mathbb{M}_{n_b}(K)$-bimódulo pode ser visto como um $\mathbb{M}_{n_a n_b}(K)$-módulo à esquerda. Os $\mathbb{M}_{n_a n_b}(K)$-módulos simples são isomorfos às colunas de $\mathbb{M}_{n_a n_b}(K)$.

Decompondo um $\mathbb{M}_{n_a n_b}(K)$-módulo à esquerda como soma de módulos simples, ou seja, como soma direta de colunas de dimensão $n_a n_b$, temos que um $\mathbb{M}_{n_a n_b}(K)$- módulo livre é a soma direta de $r_{ab} n_a n_b$ módulos simples, ou seja, um módulo de dimensão $r_{ab}(n_a n_b)^2$. Decompondo o $\mathbb{M}_{n_a}(K)$-$\mathbb{M}_{n_b}(K)$-bimódulo $_aX_b$ como soma de simples, obtemos:

$$_aX_b = F_{ab}^{r_{ab}} \oplus S_{ab},$$

onde

- $F_{ab}$ é um $\mathbb{M}_{n_a}(K)$-$\mathbb{M}_{n_b}(K)$-bimódulo livre de dimensão $(n_a n_b)^2$ e $r_{ab} \geq 0$;
- $S_{ab}$ é a soma direta de $s_{ab}$ cópias de $\mathbb{M}_{n_a}(K)$-$\mathbb{M}_{n_b}(K)$-bimódulos simples, com $0 \leq s_{ab} < n_a n_b$.

Seja $\varphi : (F_{ab})^{r_{ab}} \oplus F_{ab} \to {}_aX_b$ um homomorfismo de $\mathbb{M}_{n_a}(K)$-$\mathbb{M}_{n_b}(K)$-bimódulo definido do seguinte modo:

- $\varphi|_{F_{ab}^{r_{ab}}} = F_{ab}^{r_{ab}}$;
- como $(n_an_b)^2 = \dim F_{ab} > \dim S_{ab} = s_{ab}n_an_b$, mapeie $s_{ab}n_an_b$ elementos de uma base de $F_{ab}$ de modo que forme uma base para $S_{ab}$ e os demais elementos da base de $F_{ab}$ são mapeados para 0.

**Definição 2.5.** *Seja $A$ uma $K$-álgebra de dimensão finita tal que $A/\mathrm{J}(A) = \mathbb{M}_{n_1}(K) \times ... \times \mathbb{M}_{n_s}(K)$. A **aljava especial da álgebra** $A$, denotada por $\Delta_A$, é definida como*

(a) *os vértices de $\Delta_A$, $(\Delta_A)_0$, são determinados pelos números $1, ..., s$ que aparecem na decomposição de $A/\mathrm{J}(A)$;*

(b) *dados dois vértices $a, b \in (\Delta_A)_0$:*

   i) *Se ${}_aX_b$ é um $\mathbb{M}_{n_a}$-$\mathbb{M}_{n_b}$-bimódulo livre isomorfo a $r_{ab}$ cópias do bimódulo livre $F_{ab}$ de dimensão $(n_an_b)^2$, então a quantidade de flechas entre os vértices $a$ e $b$ é exatamente $r_{ab}$;*

   ii) *Caso ${}_aX_b$ não seja um bimódulo livre, então ${}_aX_b \cong F_{ab}^{r_{ab}} \oplus S_{ab}$, como anteriormente, então a quantidade de flechas indo de $a$ a $b$ é $r_{ab} + 1$, onde uma delas é a flecha especial.*

**Definição 2.6.** *Seja $A$ uma álgebra como na definição acima. A **álgebra de caminhos generalizada de** $A$ é a álgebra $R_A = K(\Delta_A, \mathcal{A}_A)$, onde $\Delta_A$ é a aljava especial de $A$ e $\mathcal{A}_A = \{\mathbb{M}_{n_1}(K), ...., \mathbb{M}_{n_s}(K)\}$ é família de $K$-álgebras indexada por cada vértice.*

**Exemplo 2.7.** *Considere a seguinte $K$-álgebra $A = \begin{bmatrix} K[x]/\langle x^2\rangle & K[x]/\langle x^2\rangle & 0 & 0 \\ K[x]/\langle x^2\rangle & K[x]/\langle x^2\rangle & 0 & 0 \\ K[x]/\langle x^2\rangle & K[x]/\langle x^2\rangle & K & K \\ K[x]/\langle x^2\rangle & K[x]/\langle x^2\rangle & K & K \end{bmatrix}$. Como $I = \begin{bmatrix} \langle x\rangle/\langle x^2\rangle & \langle x\rangle/\langle x^2\rangle & 0 & 0 \\ \langle x\rangle/\langle x^2\rangle & \langle x\rangle/\langle x^2\rangle & 0 & 0 \\ K[x]/\langle x^2\rangle & K[x]/\langle x^2\rangle & 0 & 0 \\ K[x]/\langle x^2\rangle & K[x]/\langle x^2\rangle & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é nilpotente, já que $I^3 = 0$, e $A/I \cong \begin{bmatrix} K & K & 0 & 0 \\ K & K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K & K \\ 0 & 0 & K & K \end{bmatrix} \cong \mathbb{M}_2(K) \times \mathbb{M}_2(K)$, segue que $\mathrm{J}(A) = I$.*

*Já que $I^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \langle x\rangle/\langle x^2\rangle & \langle x\rangle/\langle x^2\rangle & 0 & 0 \\ \langle x\rangle/\langle x^2\rangle & \langle x\rangle/\langle x^2\rangle & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $I/I^2 = \begin{bmatrix} \langle x\rangle/\langle x^2\rangle & \langle x\rangle/\langle x^2\rangle & 0 & 0 \\ \langle x\rangle/\langle x^2\rangle & \langle x\rangle/\langle x^2\rangle & 0 & 0 \\ K & K & 0 & 0 \\ K & K & 0 & 0 \end{bmatrix}$, então aljava especial terá dois vértices, $\{1, 2\}$. Como ${}_2X_2 = {}_1X_2 = 0$, segue que não existem flechas indo de 1 a 2 e de 2 a 2. Temos que ${}_2X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K[x]/\langle x^2\rangle & K[x]/\langle x^2\rangle & 0 & 0 \\ K[x]/\langle x^2\rangle & K[x]/\langle x^2\rangle & 0 & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} K & K \\ K & K \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} K & K \\ K & K \end{bmatrix} \cong S_{21}$ e ${}_1X_1 = \begin{bmatrix} \langle x\rangle/\langle x^2\rangle & \langle x\rangle/\langle x^2\rangle & 0 & 0 \\ \langle x\rangle/\langle x^2\rangle & \langle x\rangle/\langle x^2\rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} K & K \\ K & K \end{bmatrix} \cong S_{11}$.*

*Como ${}_2X_1$ não é um bimódulo livre, já que dimensão de ${}_2X_1$ é menor que 16, portanto existe uma flecha especial começando em 2 e terminando em 1. Do mesmo modo, existe uma flecha especial começando e terminando em 1.*

*Portanto a aljava especial de $A$ é*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop above, dashed, "\alpha_1^1"] & 2 \arrow[l, dashed, "\alpha_1^2"'] \end{tikzcd}$$

*e a álgebra de caminhos generalizada de $A$ é $K(\Delta_A, \mathcal{A}_A)$, onde $\mathcal{A} = \{\mathbb{M}_2(K), \mathbb{M}_2(K)\}$.*

**Exemplo 2.8.** *Considere a seguinte $K$-álgebra $A = \begin{bmatrix} K & K & 0 & 0 \\ K & K & 0 & 0 \\ K^{15} & K^{15} & K & K \\ K^{15} & K^{15} & K & K \end{bmatrix}$ com multiplicação de matrizes usual, onde $K^{15}$ é considerado como um $K$-$K$-bimódulo da maneira usual. Como $J(A) =$*

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K^{15} & K^{15} & 0 & 0 \\ K^{15} & K^{15} & 0 & 0 \end{bmatrix}$, *segue que a aljava especial associada a $A$ possui dois vértices, $\{1,2\}$. Temos que* ${}_1X_1 = {}_2X_2 = {}_1X_2 = 0$ *e*

$$\begin{aligned} 2X_1 = I &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K^{15} & K^{15} & 0 & 0 \\ K^{15} & K^{15} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\cong \begin{bmatrix} K & K \\ K & K \end{bmatrix}^{15} \\ &\cong \begin{bmatrix} K & K \\ K & K \end{bmatrix}^{4} \oplus \begin{bmatrix} K & K \\ K & K \end{bmatrix}^{4} \oplus \begin{bmatrix} K & K \\ K & K \end{bmatrix}^{4} \oplus \begin{bmatrix} K & K \\ K & K \end{bmatrix}^{3} \\ &\cong F_{21} \oplus F_{21} \oplus F_{21} \oplus S_{21} \\ &\cong F_{21}^3 \oplus S_{21}, \end{aligned}$$

*então há 4 flechas começando em 2 e terminado em 1, com uma delas sendo a flecha especial. A aljava especial de $A$ é*

$$\begin{tikzcd} 1 & 2 \arrow[l, dashed, "\alpha_1^2"'] \arrow[l, shift left=2, "\alpha"'] \arrow[l, shift left=4, "\gamma"'] \arrow[l, shift left=6, "\beta"'] \end{tikzcd} .$$

*A álgebra de caminhos generalizada de $A$ é $K(\Delta_A, \mathcal{A}_A)$, onde $\mathcal{A}_A = \{\mathbb{M}_2(K), \mathbb{M}_2(K)\}$.*

**Exemplo 2.9.** *Considere a $K$-álgebra* $\begin{bmatrix} K & K & 0 & 0 & 0 \\ K & K & 0 & 0 & 0 \\ K^8 & K^8 & K & K & K \\ K^8 & K^8 & K & K & K \\ K^8 & K^8 & K & K & K \end{bmatrix}$ *com multiplicação de matrizes usual.*

*Temos que* $J(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K^8 & K^8 & 0 & 0 & 0 \\ K^8 & K^8 & 0 & 0 & 0 \\ K^8 & K^8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. *Segue aljava especial tem dois vértices $\{1,2\}$. Já que* ${}_1X_1 = {}_2X_2 = {}_1X_2 = 0$, *segue que não há flechas indo de 1 a 2, de 1 a 1 e de 2 a 2.*

*Como*

$$\begin{aligned} {}_2X_1 = I &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K^8 & K^8 & 0 & 0 & 0 \\ K^8 & K^8 & 0 & 0 & 0 \\ K^8 & K^8 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\cong \begin{bmatrix} K & K \\ K & K \\ K & K \end{bmatrix}^{2} \oplus \begin{bmatrix} K & K \\ K & K \\ K & K \end{bmatrix}^{6} \\ &\cong S_{21} \oplus F_{21}. \end{aligned}$$

${}_2X_1$ *é isomorfo a soma direta de $S_{21}$ com $F_{21}$, onde $S_{21}$ é um bimódulo de dimensão 12 e $F_{21}$ é um bimódulo livre de dimensão 36. Portanto existirá uma flecha normal e uma flecha especial indo do vértice 2 a 1. Então a aljava especial de $A$ é*

$$\begin{tikzcd} 1 & 2 \arrow[l, "\alpha"] \arrow[l, dashed, shift right=3, "\alpha_1^2"'] \end{tikzcd} .$$

*Portanto a álgebra de caminhos generalizadas de $A$ é $K(\Delta, \mathcal{A})$, onde $\mathcal{A}_A = \{\mathbb{M}_2(K), \mathbb{M}_3(K)\}$. O núcleo do homomorfismo sobrejetivo de álgebras $f : K(\Delta_A, \mathcal{A}_A) \to A$ é o núcleo do homomorfismo do $\mathbb{M}_2(K)$-$\mathbb{M}_3(K)$-bimódulo livre gerado livremente por $\alpha$ e $\alpha_1^2$, de dimensão 72, a $I$, de dimensão 48. Associando o* *bimódulo gerado por $\alpha$ de forma bijetiva a $F_{21}$ e associando de modo sobrejetivo o bímodulo livre gerado por $\alpha_1^2$ a $S_{21}$, teremos que* $\mathrm{Ker}f$ *possui interseção com $J_R$, propriamente contida no bimódulo gerado pelas flecha especial $\alpha_1^2$.*

**Teorema 2.10.** *Seja $A$ uma $K$-álgebra dimensão finita. Existe um ideal admissível generalizado $I$ de $R_A = K(\Delta_A, \mathcal{A}_A)$ tal que $R_A/I \cong A$.*

*Demonstração.* Como $A/\mathrm{J}(A) = \mathbb{M}_{n_1}(K) \times ... \times \mathbb{M}_{n_s}(K)$. Defina $\Sigma = \mathbb{M}_{n_1}(K) \times ... \times \mathbb{M}_{n_s}(K)$.

Considere ${}_iM_j{}^*$ como sendo bimódulo livre gerado livremente por todas as flechas de $i$ a $j$ em $K(\Delta_A, \mathcal{A})$, excluindo a flecha especial, caso exista. Para cada flecha especial indo de $a$ a $b$, considere ${}_aM_b^{**}$ o bimódulo livre gerado livremente pela flecha especial $\alpha_b^a$.

Queremos construir $f : \Sigma \oplus M \to A$, onde $M$ é o bimódulo livre gerado livremente por todas as flechas.

Pelo Teorema (4.20) do Capítulo 1, $\Sigma$ é uma subálgebra de $A$ tal que o mapa sobrejetivo $\pi : A \to A/\mathrm{J}(A)$ restrito ao mapa $\Sigma$ é o mapa identidade, defina $f|_\Sigma : \Sigma \hookrightarrow A$ o mapa inclusão.

Como rank( ${}_iM_j^*$) $= r_{ij}$, para cada $\alpha \in {}_iM_j^*$, associe de forma bijetiva $x_\alpha \in \mathrm{J}(A)$ tal que $\{x_\alpha + \mathrm{J}(A)^2\}$ é uma base para o bimódulo livre $F_{ij}^{r_{ij}}$. Para cada flecha especial $\alpha_b^a$, associe $x_{\alpha_b^a}$ de tal forma que $\{x_{\alpha_b^a} + \mathrm{J}(A)^2\}$ gere o bimódulo $S_{ab}$.

Pela propriedade universal da álgebra tensorial, (6.9) do Capítulo 1, existe um homomorfismo $\varphi : T(\Sigma, M) \to A$ tal que $\varphi|_{\Sigma \oplus M} = f$.

Temos que $A$ é uma álgebra finitamente gerada. Pela construção do nosso homomorfismo, $\mathrm{Im}\varphi + \mathrm{J}(A)^2 = A$, pelo Colorário (4.19) do Capítulo 1, concluímos que $\mathrm{Im}\varphi = A$, ou seja, $\varphi$ é sobrejetiva.

Queremos concluir que o núcleo é um ideal admissível generalizado. Como $\varphi(J_{R_A}) \subseteq \mathrm{J}(A)$. Pelo Lema (4.2) do Capítulo 1, $\mathrm{J}(A)$ é nilpotente, existe um inteiro positivo $m$ tal que $\mathrm{J}(A)^m = 0$, portanto $J_{R_A}^m \subseteq \ker\varphi$.

Para cada $i, j$, pela construção do nosso homomorfismo, ${}_iM_j{}^* \cap \ker\varphi = 0$, portanto $M^* \cap \ker\varphi = 0$.

Assuma que exista flecha especial indo de $a$ a $b$. Suponha que ${}_aM_b^{**} \cap I = 0$, teríamos que $S_{ab}$ seria um $\mathbb{M}_{n_a}$-$\mathbb{M}_{n_b}$-bimódulo livre. Portanto $0 \subsetneq {}_aM_b^{**} \cap \ker\varphi$. Como $S_{ab}$ não é um $\mathbb{M}_{n_a}$-$\mathbb{M}_{n_b}$-bimódulo nulo, então ${}_aM_b^{**} \cap \ker\varphi \subsetneq {}_aM_b^{**}$. Portanto $R_A/\ker\varphi \cong A$, onde $\ker\varphi$ é um ideal admissível generalizado. $\square$

Voltemos ao exemplo inicial da seção. A aljava especial associada a álgebra $A$ é $1 \overset{\alpha_1^2}{\dashleftarrow} 2$ e $\mathcal{A}_A = \{\mathbb{M}_2(K), \mathbb{M}_2(K)\}$ é a família de $K$-álgebras associada a cada vértice. Temos o homomorfismo sobrejetivo induzido $f : K(\Delta_A, \mathcal{A}_A) \to A$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned} e_{ij} &\mapsto E_{ij} \\ f_{ij} &\mapsto E_{i+2\ j+2} \\ \alpha_1^2 &\mapsto E_{31}; \end{aligned}$$

onde $\{e_{ij}\}$ é uma base para a álgebra do vértice 1, $\{f_{ij}\}$ é uma base para a álgebra do vértice 2 e $\{E_{ij}\}$ é uma base para a álgebra $A$.

Temos qye $\mathrm{Ker}f = \langle {}_{11}\alpha_1^2 e_{21}, f_{11}\alpha_1^2 e_{22}, f_{12}\alpha_1^2 e_{ij}, f_{21}\alpha_1^2 e_{11}, f_{21}\alpha_1^2 e_{12}, f_{22}\alpha_1^2 e_{ij} | 1 \leq i, j \leq 2\rangle$, portanto um ideal admissível.

**Corolário 2.11.** *Seja $A = K(\Delta, \mathcal{A})$ uma álgebra de $\mathcal{A}$-caminhos, onde $\mathcal{A} = \{\mathbb{M}_{n_1}(K), ..., \mathbb{M}_{n_s}(K)\}$ e $\Delta$ é uma aljava finita, sem ciclos orientados e sem flechas especiais. A representação da álgebra de caminhos $A = K(\Delta, \mathcal{A})$ é um isomorfismo.*

*Demonstração.* Comom $\Delta$ não possui ciclos orientados, todo caminho em $\Delta$ é regular. Como $\mathrm{J}(\mathbb{M}_i(K)) = 0$, temos que $\mathrm{J}(A)$ é justamente o $K$-subespaço gerado por todos os $\mathcal{A}$-caminhos de comprimento positivo de $A$.

$A/\mathrm{J}(A)$ é justamente todos os $\mathcal{A}$-caminhos de comprimento nulo de $A$, então $A/\mathrm{J}(A) \cong \prod_{i=1}^{s} \mathbb{M}_i(K)$.

A aljava especial possui exatamente $s$ vértices e $\mathcal{A} = \{\mathbb{M}_{n_1}(K), ..., \mathbb{M}_{n_s}(K)\}$ é a família de $K$-álgebras indexadas por cada vétice.

Temos que $\mathrm{J}(A)/\mathrm{J}(A)^2$ é justamente todos os $\mathcal{A}$-caminhos de comprimento 1. Para cada par de vértices $i$ e $j$, ${}_iX_j$ é um $\mathbb{M}_{n_i}(K)$-$\mathbb{M}_{n_j}(K)$-bimódulo livre de dimensão $(n_in_j)^2 r_{ij}$, onde $r_{ij}$ é quantidade de flechas indo de $i$ a $j$ na aljava $\Delta$. Portanto quantidade de flechas indo de $i$ a $j$ na aljava especial $\Delta_A$ é exatamente $r_{ij}$. Segue que $A \cong R_A$.

$\square$

# BIBLIOGRAFIA

[1] Ibrahim Assem, Daniel Simson e Andrzej Skowroński: *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras, Volume 1, Techniques of Representation Theory.* London Mathematical Society Student Texts 65, 2006.

[2] Thomas W. Hungerford: *Algebra.* Graduate Texts in Mathematics, No. 73, Springer-Verlang, 1974.

[3] Ibrahim Assem: *Algèbres et modules.* Cours et exercices-Dunod, 1997.

[4] D. J. Benson: *Representations and Cohomology I.* Cambridge Studies In Advanced Mathematics 30.

[5] Yurij A. Drozd, Vladimir V. Kirichenk: *Finite Dimensional Algebras.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg,1994.

[6] Joseph J. Rotman: *Advanced Modern Algebra.* Prentice Hall, 2003.

[7] Flavio Ulhoa Coelho, Shao-Xue Liu: *Generalized path algebras.* Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics. v. unico, p. 53-66.

[8] Tsit Yuen Lam: *A First Course in Noncommutative Rings.* AGraduate Texts in Mathematics, No. 121, Springer-Verlag New York, 1991.