UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICEx
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA

Matemática Financeira
Abordagem Histórica e Contemporânea para o Ensino

Ariadne Beatriz Medina Lopes Martins

Orientador: Prof. Alberto Berly Sarmiento Vera, Dr.

Belo Horizonte, Junho de 2021

Monografia

Matemática Financeira
Abordagem Histórica e Contemporânea para o Ensino

Monografia submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Curso de Especialização em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para aprovação na disciplina trabalho de conclusão de curso.

Belo Horizonte, Junho de 2021

Martins, Ariadne Beatriz Medina Lopes

M386m Matemática financeira [manuscrito]: abordagem histórica e contemporânea para o ensino. / Ariadne Beatriz Medina Lopes Martins — 2021.
71.f. il.

Orientador: Alberto Berly Sarmiento Vera
Monografia (especialização) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: 69-71.

1. Matemática . 2. Matemática financeira. 3. Finaças.4. Fractais I. Sarmiento Vera, Alberto Berly. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III.Título.

CDU 51 (043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende Costa CRB 6ª Região nº 1510

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA - ICEX

ATA DE DEFESA DE MONOGRAFIA

Aos vinte e quatro dias do mês de junho de 2021, às 10h00, em reunião pública virtual na Plataforma Google Meet: https://meet.google.com/eug-mcen-boo (conforme mensagem eletrônica da Pró-Reitoria de Pós-Graduação de 26/03/2020, com orientações para a atividade de defesa de dissertação durante a vigência da Portaria nº 1819), reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pela Coordenação do curso de Especialização em Matemática, para julgar a defesa de monografia da aluna **Ariadne Beatriz Medina Lopes Martins**, intitulada: "*Matemática financeira: abordagem histórica e contemporânea para o ensino*", requisito final para obtenção do Grau de especialista em Matemática. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Alberto Berly Sarmiento Vera, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares do trabalho final, passou a palavra à aluna para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa da aluna. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se reservadamente sem a presença da aluna e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: a aluna foi considerada aprovada sem ressalvas e por unanimidade, com nota 92 e conceito A. O resultado final foi comunicado publicamente à aluna pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 24 de junho de 2021.

Assinatura dos membros da banca examinadora:

***PROF. DR. ALBERTO BERLY SARMIENTO VERA* -** Orientador (UFMG)

***PROFA. DRA. ANIURA MILANÉS BARRIENTOS* -** Examinador (UFMG)

***PROF. DR. PAULO ANTÔNIO FONSECA MACHADO* -** Examinador (UFMG)

***PROF. DR. SEME GEBARA NETO* -** Examinador (UFMG)

Documento assinado eletronicamente por **Alberto Berly Sarmiento Vera**, **Coordenador(a)**, em 01/07/2021, às 15:00, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Seme Gebara Neto**, **Professor do Magistério Superior**, em 01/07/2021, às 15:28, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Aniura Milanes Barrientos**, **Professora do Magistério**

Superior, em 02/07/2021, às 11:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Paulo Antonio Fonseca Machado**, **Professor do Magistério Superior**, em 04/07/2021, às 10:49, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0815155** e o código CRC **EC8141B1**.

Referência: Processo nº 23072.233963/2021-82 SEI nº 0815155

Agradecimentos

Agradeço a esta universidade por ter me dado a oportunidade de fazer a especialização e adquirir conhecimento específico e para a vida.

Agradeço a todos os meus professores que, ao longo da minha formação, foram fontes de inspiração e incentivo.

Ao meu orientador, o professor Dr. Alberto Berly Sarmiento Vera pela oportunidade, paciência e apoio na elaboração deste trabalho. Agradeço enormemente pelas críticas, sugestões e disponibilidade sempre revelada.

A minha pequena família, pelo amor, carinho, amizade, e incentivo oferecido ao longo de toda minha vida. Agradeço principalmente pela partilha da vida.

Aos meus amigos, que na ausência da minha família, muitas vezes se fizeram pai, mãe, irmãos e tornaram a caminhada muito mais significativa. Agradeço imensamente pela amizade e pela acolhida.

A todos que de alguma maneira contribuíram para a minha formação, o meu muito obrigada!

Resumo

O presente trabalho apresenta aspectos históricos e contemporâneos da matemática financeira, com vistas a servir de subsídio para professores de matemática do ensino básico na abordagem desse conteúdo em sala de aula. Apresentaremos o conceito, as funções e as características da moeda, bem como sua origem e evolução histórica, desde os primórdios até os dias atuais. Por ser o juro, a ideia fundamental na qual se baseia a matemática financeira, também abordamos seu surgimento, seu conceito e cálculo em diferentes etapas de desenvolvimento do sistema econômico. Mostramos como a matemática financeira se relaciona com as funções logarítmica e exponencial. Destacamos as razões que aproximam a matemática da Teoria de Finanças, bem como o uso de modelos matemáticos para o estudo do comportamento do mercado financeiro. Para uma boa compreensão do movimento financeiro, o uso de ferramentas matemáticas avançadas torna-se inevitável. Uma das possibilidades é a inserção da teoria dos fractais associada aos conceitos de caos, complexidade e não-linearidade neste campo de pesquisa. Assim, também apresentamos as Teorias de Fractais e do Caos e, mostramos como estas mudam a noção de previsibilidade do comportamento do mercado financeiro. Por fim, discutimos quais estratégias, metodologias de ensino e recursos didáticos favorecem o processo de aprendizagem nos dias atuais. A partir da discussão, propomos uma possibilidade de criação de recurso educacional para uso em sala de aula, com vistas a favorecer a apreensão dos conteúdos relativos ao campo das finanças.

Palavras-chave: Matemática Financeira; Juros; Moeda; Teoria de Finanças; Fractais; Caos; Gameficação.

Abstract

This work presents historical and contemporary aspects of financial mathematics, with a view to serving as a basis for basic mathematics teachers in the approach of this content in the classroom. We will present the concept, functions and characteristics of the currency, as well as its origin and historical evolution, from the beginning to the present day. Since interest is the fundamental idea on which financial mathematics is based, we also approach its emergence, its concept and calculation in different stages of economic system development. We show how financial mathematics relates to logarithmic and exponential functions. We highlight the reasons that bring mathematics to Finance Theory, as well as the use of mathematical models to study the financial market behavior. For a good understanding of the financial movement, the use of advanced mathematical tools becomes inevitable. One of the possibilities is the insertion of the fractal theory associated with the concepts of chaos, complexity and non-linearity in this field of research. Thus, we also present the Theories of Fractals and Chaos and show how this last one changes the notion of predictability of the financial market behavior. Finally, we discuss which strategies, teaching methodologies and didactic resources favor the current learning process. Based on the discussion, we propose the possibility of creating an educational resource for use in the classroom, with a view to promoting the apprehension of the contents related to the finance field.

Keywords: Financial Mathematics; Fees; Currency; Finance Theory; Fractals; Chaos; Gamefication.

Lista de ilustrações

Lista de quadros

Sumário

Introdução

Este trabalho tem por finalidade apresentar e discutir aspectos históricos e contemporâneos da Matemática Financeira, tendo como ponto de partida o interesse em contribuir para que as escolas básicas, por meio dos professores de matemática, possam ter subsídios na abordagem desse assunto em sala de aula.

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017), institui que a partir de 2020 a Educação Financeira deve ser abordada de forma transversal no ensino básico, tornando-se obrigatória em todas as escolas do Brasil. Com isso, as crianças e os adolescentes passarão a ter aulas nas quais irão aprender sobre finanças, trabalho e consumo. A partir desses conhecimentos o indivíduo consegue se posicionar de forma consciente e pró ativa em relação aos problemas de cunhos sociais, políticos, ambientais e, em particular nos que dizem respeito às finanças.

De modo a garantir que a implementação da Educação Financeira tenha êxito, por melhor estruturado que seja o programa a ser utilizado nas escolas, ainda será necessário contar com professores bem preparados no tema. Infere-se que os preceitos de matemática financeira constituem, sob certo aspecto, em uma forma de letramento, na medida em que o professor que não domina seus conteúdos não consegue ter êxito em relação ao ensino e à aprendizagem da Educação Financeira. É a partir dessa premissa que surge a motivação para a escolha do presente tema de pesquisa.

A Educação Financeira, a partir da Matemática Financeira, tem um objetivo formativo, voltado para um compromisso educacional a serviço da sociedade, conforme destacam Lima e Sá (2010, p. 5).

> Ensinar matemática financeira para as crianças não é só ensiná-las a lidar com o dinheiro, mas sim fazer com que elas rejeitem a corrupção, façam negociações justas, cumpram prazos e valores combinados, tenham consciência ambiental usando sem desperdiçar os recursos naturais tendo um pensamento coletivo e humanitário e por fim que sejam responsáveis socialmente.

A Matemática Financeira tem sua evolução relacionada com a origem do dinheiro e seu desenvolvimento até os dias atuais. Ela compreende um conjunto de técnicas e formulações usadas para resolver problemas relativos ao campo das finanças. A ideia fundamental na qual se baseia são os juros, cujo conceito surgiu no momento em que o homem percebeu a existência de uma afinidade entre o dinheiro e o tempo. Desde então, tal conceito tem sido amplamente divulgado e utilizado ao longo da História. Assim, os juros se configuram como uma das mais antigas aplicações da matemática financeira e seu uso vem sendo aprimorado de acordo com o desenvolvimento do comércio e do sistema financeiro.

Uma vez que o sistema financeiro está intimamente ligado à Matemática Financeira, será oportuno descrever as etapas históricas pelas quais passou o dinheiro, até chegarmos aos aspectos principais da realidade monetária dos nossos dias. Os elementos históricos sobre o tema, desde a sua origem, por meio das primeiras trocas comerciais, passando pelo uso de equivalências nas permutas, a criação das moedas, até as formas contemporâneas de realizar pagamentos permitirão uma melhor compreensão dos aspectos históricos da Matemática Financeira.

O trabalho está estruturado em quatro capítulos. No capítulo 1, apresentaremos o conceito, as funções e as características da moeda, bem como sua origem e evolução histórica, desde os primórdios até os dias atuais. No capítulo 2, abordaremos o conceito, o cálculo e o entendimento de juros, buscando justificar o seu surgimento e sua cobrança já nas primeiras civilizações até a contemporaneidade. Apresentaremos também a relação entre a matemática financeira e as funções logarítmica e exponencial, evidenciando como tais funções mudam qualitativamente o estudo das finanças. No capítulo 3, apresentamos os fatores que promovem a aproximação da Matemática com a Teoria das Finanças, mostramos alguns dos desenvolvimentos teóricos que mais contribuíram para a evolução da Teoria Financeira ao longo do século XX, e também abordamos a não previsibilidade do comportamento do mercado a luz da Teoria do Caos. No capítulo 4, discutimos quais estratégias, metodologias de ensino e recursos didáticos favorecem o processo de aprendizagem nos dias atuais, para assim, propomos uma possibilidade de criação de recurso educacional para uso em sala de aula, capaz de favorecer a apreensão dos temas abordados neste trabalho.

1 Elementos Históricos da Matemática Financeira

Pensar na história da matemática financeira significa levar em conta a longa experiência financeira do homem no decorrer de seu processo civilizatório, com diversas formas de moedas. Neste sentido, o presente capítulo abordará inicialmente os conceitos e a evolução histórica das moedas, mostrando suas principais fases e marcos importantes. Buscará também, evidenciar suas principais funções e características, e mostrar o que diferem as moedas de outros mecanismos de troca.

1.1 Conceito de Moeda, Funções e Características

A moeda, como hoje conhecemos, é o resultado de uma longa evolução. De uma simples troca de mercadoria para a economia global atual, o significado do dinheiro e o que valorizamos muda à medida que a civilização evolui. Sua evolução ao longo do tempo serve de base para afirmar a função e as características necessárias para que um instrumento monetário desempenhe bem o seu papel.

Em termos econômicos, moeda é um estoque de ativos[1] que podem ser prontamente utilizados para realizar transações (MANKIW, 2011, p. 64). De acordo com esta definição, qualquer coisa pode ser moeda, desde que aceita como forma de pagamento. Podemos destacar três principais funções para a moeda: meio de troca, unidade de conta e reserva de valor.

Um objeto funciona como um meio de troca quando é aceito como pagamento por outros bens e serviços. A função de intermediária de trocas é o principal papel que a moeda cumpre no sistema econômico. Desde os primórdios, as mais variadas formas de moeda vêm desempenhando essa função. A existência de um meio de troca é vantajosa por simplificar e facilitar as transações no comércio. Uma vez que, por definição, é o meio de troca, a moeda é o ativo que tem maior liquidez[2]

A segunda função é ser uma unidade de conta, ou seja, servir como base para mensuração do valor dos demais bens e serviços. Isso permite que coisas diferentes sejam comparadas entre si; por exemplo, bens, serviços, trabalho, despesas, etc. Essa função torna possível a padronização dos preços dos bens segundo um denominador comum.

---

1 Ativos são comumente conhecidos como qualquer coisa com um valor que represente recursos econômicos ou posse, que possa ser convertido em algo de valor, como dinheiro. Fonte: Corretora Forex Online. Disponível em: <https://ptfbs.com/glossary/financial-asset-29>. Acesso em 05 jan. 2021.

2 A facilidade com que um determinado ativo pode ser convertido em um meio de troca, e utilizado para adquirir outras coisas — bens e serviços. (MANKIW, 2011, p. 64)

Por fim, a função de reserva de valor diz respeito à capacidade que certos bens possuem de preservar poder de compra com o passar do tempo. Isso significa que a moeda deve permitir guardar e transferir riqueza no tempo.

Para cumprir as suas três funções essenciais numa economia, as moedas devem reunir algumas características fundamentais: durabilidade, divisibilidade, facilidade no manuseio e transporte, transferibilidade, homogeneidade e oferta limitada. Essas características são o reflexo do desenvolvimento econômico e da sociedade. Ao longo das diferentes etapas da evolução do sistema econômico, as moedas foram incorporando características conforme as necessidades dos agentes econômicos.

Uma moeda deve ser suficientemente durável, uma vez que as pessoas não aceitarão como dinheiro algo que se deteriora em pouco tempo. Somente resistindo às inúmeras relações de troca a que estiver sujeita é que poderá desempenhar o seu papel de reserva de valor numa economia. A divisibilidade tem por objetivo permitir que transações de grandes e de pequenos valores sejam facilmente realizadas. O bem escolhido deve apresentar a possibilidade de ser subdividido em múltiplos e submúltiplos para permitir trocas que requerem um grau maior de precisão. Nesse sentido, é essencial que uma moeda seja divisível, quer para atuar como unidade de conta, quer como meio de troca. Para ser um meio eficiente de troca, uma moeda precisa ser facilmente transportável. Essa condição evita que a sua utilização seja dificultada e que, consequentemente, ela seja descartada. A transferibilidade da moeda diz respeito à facilidade com que deve processar-se sua transferência, de um possuidor para outro, em inúmeras vezes, sem perder suas características. Para facilitar as trocas e atuar como unidade de conta é importante que as moedas sejam homogêneas, isto é, qualquer unidade da mercadoria eleita como moeda deve ser rigorosamente igual às outras unidades dessa mercadoria. Por fim, quaisquer bens que não tenham uma oferta limitada não terão valor econômico.

A moeda evoluiu de formas primárias para as formas mais complexas, se ajustando conforme às necessidades estabelecidas pelos sistemas econômicos. Sua evolução somente ocorreu devido a busca da manutenção das características citadas anteriormente, caso contrário, os sistemas monetários não seriam capazes de cumprir com suas funções essenciais.

1.2 A Origem e Evolução da Moeda

A origem e a evolução da moeda podem ser seccionadas em sete fases distintas:

- Era da troca direta de mercadorias;
- Era da mercadoria moeda;
- Era da moeda metálica;
- Era da moeda papel;

- Era da moeda fiduciária ou papel-moeda;
- Era da moeda bancária ou moeda escritural e
- Era da moeda virtual.

1.2.1 Era da troca direta de mercadorias

Durante muito tempo a humanidade não teve o conceito de dinheiro. As moedas e as notas usadas para realizar compras, vendas, pagamentos e recebimentos no dia a dia são uma invenção recente na história da humanidade para facilitar as atividades comerciais, até então baseadas no sistema de trocas. A origem da moeda, em grande parte, se explica pela dificuldade em generalizar as trocas sem dinheiro. Para que haja a troca direta, é preciso um encontro de necessidades coincidentes, o que não é fácil de ocorrer.

Até chegar à forma que conhecemos hoje, o dinheiro passou por muitas modificações. Nas civilizações primitivas, com economia igualmente primitiva, as trocas comerciais praticamente não ocorriam. Tudo que era necessário à sobrevivência, era provido de forma autossuficiente pelo grupo.

Mais tarde, com o aumento do número de pessoas nos grupos, além da caça e da pesca, alguns membros passaram a se dedicar à agricultura e a produção de ferramentas, armas e utensílios domésticos. Assim, a produção das pequenas comunidades passou a exceder as necessidades individuais ou ajustadas ao grupo de convívio, resultando em itens sobressalentes. A geração de excedentes, deste modo, possibilitou a troca desses bens por outros tipos de mercadorias de interesse útil, mediante coincidência de desejos. Por conseguinte, foi criado o escambo, a primeira forma de comércio entre as sociedades - a troca direta de mercadorias, em princípio sem a preocupação de sua equivalência de valor, conforme descreve Ifrah (1997):

> O primeiro tipo de troca comercial foi o escambo, fórmula segundo a qual se trocam diretamente (e, portanto sem a intervenção de uma "moeda"no sentido moderno da palavra) gêneros e mercadorias correspondentes a matérias primas ou a objetos de grande necessidade.(IFRAH, 1997, p. 145)

Nas mais primitivas das culturas, portanto, a economia funcionava à base de escambo, a troca pura e simples de mercadorias. O escambo, no entanto, apresentava alguns problemas no que se refere ao desenvolvimento das atividades econômicas de modo geral. Com o crescente número de produtos disponíveis nos mercados, surge a inconveniência de se manter a prática rudimentar do escambo, não só pela dificuldade cada vez maior de se estabelecerem relações justas de troca, como também pela dificuldade de se encontrar parceiros cujos desejos e disponibilidades fossem duplamente coincidentes.

1.2.2 Era da mercadoria moeda

À medida que ocorria a prática da permuta de mercadorias, começaram a surgir dificuldades nas trocas, por não haver uma medida comum de valor entre os produtos a serem trocados. Os indivíduos, então, passam a eleger um único produto como referencial de trocas: uma mercadoria que tivesse algum valor e que fosse aceita por todos.

> Houve, portanto, a necessidade de um sistema relativamente estável de avaliações de equivalências, fundado num princípio (vizinho daquele da base de um sistema de numeração) dando a definição de algumas unidades ou padrões fixos. Nesse sistema é sempre possível estimar tal ou qual valor, não somente para as operações de caráter econômico, mas também (e talvez, sobretudo) para a regulamentação de problemas jurídicos importantes como o preço da noiva, o preço do roubo ou o preço do sangue (estimação de bens de consumo de uma "mulher a tomar", do delito do roubo ou do delito de golpes e ferimentos que tenham engendrado a morte de um indivíduo). (IFRAH, 1997, p. 145)

A partir de então, alguns bens são eleitos como intermediários de trocas, exercendo, portanto, função de moeda. São então chamadas de moeda-mercadoria. Cabe destacar que para que isso ocorresse, a mercadoria eleita como moeda deveria atender a uma necessidade comum e ser rara o bastante para que tivesse valor.

A ampla aceitação por diferentes grupos, somada principalmente ao valor a elas atribuída, dada a demanda, a raridade etc, permitiu a determinadas mercadorias ganharem maior importância em relação aos outros. São exemplos: gado, cereais, peles, pedras, tecidos, sal, metais etc.

> a primeira unidade de escambo admitida na Grécia pré-helênica foi o boi. No século VIII a.C., na Ilíada de Homero (XXIII, 705, 749-751 e VI, 236), uma mulher hábil para mil trabalhos é assim avaliada em 4 bois, a armadura em bronze de Glauco em 9 bois e a de Diomedes (que era de ouro) em 100 bois; ademais, numa lista de recompensas, vêm-se suceder-se, na ordem dos valores decrescentes, uma copa de prata cinzelada, um boi e um meio talento de ouro. (IFRAH, 1997, p. 146)

Estas moedas eram diferentes de acordo com a época e a região do mundo, mas sempre estavam sob influência dos usos e costumes dos grupos sociais em que circulavam. A Figura 1 nos apresenta as mais diferentes mercadorias utilizadas como moeda, nos diferentes períodos da humanidade.

Figura 1 – Principais mercadorias utilizadas como moeda.

Regiões	Mercadorias-Moeda
Antigüidade (Até 410 d.C.)	
Egito	Cobre
Babilônia, Assíria	Cobre, prata, cevada
Pérsia	Gado
Bretanha	Barras de ferro, escravos
Índia	Animais, domésticos, arroz, metais
China	Conchas, seda, sal, cereais
Idade Média (410 a 1453 d. C.)	
Ilhas Britânicas	Moedas de couro, gado, ouro, prata
Alemanha	Gado, cereais, mel
Islândia	Gado, tecidos, bacalhau
Noruega	Gado, escravos, tecidos
Rússia	Gado, prata
China	Arroz, chá, sal, estanho, prata
Japão	Anéis de cobre, pérolas, arroz
Idade Moderna (1453 a 1789 d. C.)	
Estados Unidos	Fumo, cereais, madeira, gado
Austrália	Rum, trigo, carne
Canadá	Peles, cereais
França	Metais preciosos, cereais
Japão	Arroz

Fonte: (NOGAMI, 2012)

O gado, como padrão de equivalência, tinha a vantagem de multiplicar-se entre uma troca e outra. No entanto é de difícil transporte, divisão ou manuseio.

> Quando o gado servia de moeda, ele só podia ser utilizado para transações mais ou menos valiosas, pois uma vaca ou um boi tem bastante valor, nunca foi barato. Para transações de pouco valor esse meio de troca não serve, pois não haveria troco. Uma boa moeda-mercadoria é, portanto, aquela que seja não-perecível, durável, que seja divisível homogeneamente, e além disso, de fácil transporte. (SINGER, 1983, p. 43)

A importância do gado como instrumento de troca e de reserva de valor transparece em termos usados atualmente, como "pecúnia" do latim "pecus", que significa rebanho (gado) e "pecúlio" relativo ao gado miúdo (ovelha ou cabrito).

O sal também foi usado como padrão de avaliação nas trocas comerciais em determinada época da história, pois, além de escasso, era utilizado para conservar os alimentos e para cicatrizar feridas. Os soldados romanos eram pagos em sal, o qual usavam na troca por roupas e outros alimentos, satisfazendo assim suas necessidades. Esse sistema de troca, que durou por vários séculos, deu origem ao surgimento do vocábulo "salário", o pagamento feito através de certa quantidade de sal.

A moeda-mercadoria foi utilizada em várias partes do mundo como meio de troca de produtos e nas diferentes civilizações utilizaram-se os mais diversos objetos ou produtos, que serviam como critério de valor e meio de troca comercial.

> Na América Central, os maias usavam algodão, cacau, cerâmicas; os astecas, pedaços de tecido, semente de cacau. Na China, nos séculos XVI – XI a.C., trocavam-se mercadorias por dentes ou chifres de animais, carapaças de tartarugas, couros, peles, etc. No Egito, na época dos faraós, as mercadorias eram pagas com metais como cobre, bronze e, por vezes, ouro e prata, divididos em pepitas ou palhetas, cujo valor era determinado pelo peso. (IFRAH, 1997)

A especialização de uma mercadoria para servir de meio de troca facilita enormemente a generalização das trocas em qualquer economia de mercado. A moeda-mercadoria resolveu o problema da dificuldade de se realizarem trocas diretas. Por outro lado, tal modelo apresentava sérias dificuldades de aplicação, ressaltando a necessidade de se encontrar uma forma mais simples que facilitasse as transações comerciais. Nesse momento passamos para a era da moeda metálica.

1.2.3 Era da moeda metálica

Com o desenvolvimento contínuo da produção, somado a ampliação do leque de bens criados pelo homem, as moedas-mercadorias foram sendo descartadas, uma vez que elas não atendiam a todos os requisitos necessários a um instrumento monetário no desempenho de suas funções - não eram homogêneas e muitas vezes eram de difícil transporte e também de divisão. Além disso, a característica **valor de uso** e **valor de troca** tornava o novo sistema muito semelhante ao escambo e suas limitações intrínsecas.

> A ausência ou o preenchimento insatisfatório dessas características comprometia sua aceitação geral. Perdia-se a confiança em mercadorias não homogêneas ou naquelas em que a ação do tempo pudesse destruir ou alterar caracteres intrínsecos. Outras não eram facilmente divisíveis ou transferíveis. E a maior parte era de manuseio e/ou de transporte difíceis (LOPES; ROSSETI, 2005).

Os motivos citados acima pelos autores fizeram com que as populações procurassem mercadorias que minimizassem esses efeitos. Os metais foram os que melhor se adequaram. Os primeiros a serem utilizados foram o cobre, bronze e o ferro, porém, a abundância desses materiais impossibilitava o cumprimento de uma função essencial da moeda que é servir como reserva de valor.

Decorrente deste motivo, metais preciosos, basicamente a prata e o ouro passaram a substituir os primeiros. Esses dois metais são definidos como metais monetários por excelência, uma vez que suas características se ajustam adequadamente àquelas que a moeda deve ter. Além das vantagens que apresentavam nas transações comerciais, as moedas metálicas permitiam ainda às pessoas guardá-las, esperando a melhor oportunidade para trocá-las por alguma mercadoria. Apesar disso, havia o problema da pesagem e do risco de assalto a que estavam sujeitos os comerciantes durante suas viagens. Estes viajavam carregando sacos de ouro e prata e algumas balanças, com as quais pesavam a quantidade necessária de metal para comprar ou vender mercadorias.

Esse problema foi resolvido com a cunhagem[3], quando cada peça de metal era marcada com o valor correspondente ao seu peso. Esse processo acabou assegurando as funções monetárias que não estavam presentes nas moedas-mercadorias, permitiu sua divisibilidade, homogeneidade e mobilidade.

Essas moedas, onde eram inscritos seu peso e seu valor, eram marcadas, também, com os nomes, desenhos ou legendas de uma autoridade pública, a única que podia certificar o bom preço e o bom quilate.

A invenção desse sistema ideal de troca comercial, segundo a opinião da maioria dos especialistas, foi atribuída à Grécia da Ásia (ou Ásia Menor) e à Lídia, no século VII antes da era cristã. Em razão das múltiplas vantagens que comportava, seu uso teria se espalhado rapidamente por Grécia, Fenícia, Roma e entre inúmeros outros povos (IFRAH, 1997, p. 152).

1.2.4 Era da moeda-papel

As moedas metálicas, utilizadas em grande escala como intermediários de trocas, apesar de apresentarem grandes vantagens, não conseguiram eliminar as dificuldades que os comerciantes enfrentavam em seus deslocamentos pelas regiões europeias: o custo do transporte e o risco de roubos. Sendo assim, foi necessário evoluir o instrumento monetário vigente para um novo tipo: a moeda-papel. Esta, por sua vez, era emitida em decorrência do depósito de ouro ou prata nas chamadas casas de custódia - instituições que guardavam sob garantia moedas metálicas com a posterior emissão de um certificado de depósito. Tais certificados ficaram conhecidos como moeda representativa, cuja característica é ser integralmente lastreada e, por isso, poderia ser convertida em metal precioso a qualquer momento, e sem aviso prévio, nas casas de custódia.

1.2.5 Era da moeda fiduciária ou papel-moeda

Na medida em que o uso da moeda-papel foi se generalizando cada vez mais, o lastro metálico integral mostrou-se desnecessário quando dirigentes das casas de custódia perceberam que a reconversão da moeda-papel em metais não ocorriam todas ao mesmo tempo. Além disso, novos depósitos eram sempre realizados. Esse descompasso entre os saques e os depósitos de metais monetários possibilitou, progressivamente, a emissão de certificados que não eram

[3] Cunhagem é o processo pelo qual as moedas passam para serem gravadas. Consiste em promover a estampagem de um desenho em uma, ou ambas, as faces de uma moeda, utilizando para tanto um cunho.

integralmente lastreados. A confiança dos comerciantes e da comunidade nos dirigentes das casas de custódia abriu caminho para um novo tipo de moeda, o papel-moeda (ou moeda fiduciária). Junto com o papel-moeda nascia, também, a atividade bancária, pois o dinheiro das pessoas, das empresas, do Estado era guardado (em forma de mercadoria) e posteriormente esse dinheiro era emprestado. Em um primeiro momento, o papel-moeda apresentava as seguintes características:

- lastro inferior a 100%;
- menor garantia de conversibilidade e
- emissão feita por particulares.

A emissão descontrolada de papel-moeda por particulares, entretanto, acabou por conduzir esse sistema à ruína. Tal fato levou os Estados Nacionais a controlarem o mecanismo das emissões e a exercer seu monopólio. No início, as emissões eram lastreadas em ouro (padrão-ouro). De acordo com o mecanismo do padrão-ouro, a emissão de moeda estava atrelada à quantidade de ouro existente em cada país.

Após o uso, não satisfatório, de diversos sistemas de conversão, quase todos os países adotaram o sistema fiduciário que, atualmente contempla as seguintes características:

- monopólio estatal das emissões; ;
- inconversibilidade absoluta e
- inexistência de lastro metálico

1.2.6 Era da moeda bancária ou escritural

Além da moeda fiduciária emitida pelos bancos centrais, os bancos comerciais criaram o que chamamos de moeda bancária ou moeda escritural - nome dado ao uso dos depósitos bancários como meio de pagamento. É representada pelos depósitos à vista nas instituições financeiras, e que se encontram à livre disposição dos seus depositantes. Sua movimentação é feita por cheques ou por ordens de pagamento. Pelo fato de não haver existência física ela é denominada como moeda invisível, e é escritural, por corresponder aos lançamentos de crédito e débito registrados nas contas bancárias. Fazem parte dos meios de pagamento da economia e permitem a realização de transações sem necessidade da utilização de moeda (papel-moeda ou moeda papel). Com o desenvolvimento da informática, outras formas de pagamento passaram a ser usadas, como o pagamento eletrônico, feito também com cartão ou por computador.

Assim como os ourives faziam quando emitiam mais certificados do que o ouro que mantinham em depósito, os bancos comerciais podem fazer promessas de pagar acima do que dispõem e, dessa forma, criar moeda em meio de pagamento, uma vez que é mínima a probabilidade de que todos os correntistas saquem ao mesmo tempo seus depósitos.

As moedas fiduciária e bancária, por serem totalmente desmaterializadas, não possuem nenhuma utilidade para a satisfação direta das pessoas, elas constituem apenas um valor de troca. Os serviços prestados por elas são inerentes à sua liquidez (LOPES; ROSSETI, 2005, p. 36). Elas adquiriram um papel muito importante para o estágio atual do desenvolvimento do sistema econômico. A moeda bancária, em especial, superou toda e qualquer característica que dificultava o desempenho das funções essenciais dos instrumentos monetários, ou seja, perdeu a justaposição de valor de uso e do valor de troca das moedas-mercadorias e eliminou as dificuldades de transporte e segurança das moedas metálicas. Por outro lado, existem alguns conflitos de interesse envolvendo moedas fiduciária e bancária.

1.2.7 Era da moeda virtual

Por fim, em sua última etapa evolutiva, a moeda assume sua forma digital ou virtual, impulsionada principalmente pelo avanço tecnológico dos meios de comunicação. Também conhecidas por criptomoedas, representam um novo marco nos meios de troca e de pagamentos. A maioria funciona de forma descentralizada, em um sistema com aplicação de ferramentas tecnológicas como o blockchain[4], a criptografia[5], o token de segurança, a mineração[6] e a própria Internet (INFOMONEY, 2018).

Segundo o portal Coinmarketcap[7] (2021), existiam cerca de 8727 moedas virtuais em 20/02/21, sendo o Bitcoin, a primeira a ser criada, responsável por cerca de 60% do mercado, conforme mostra a Figura 2.

Cada uma das criptomoedas nasceu com ideias e potenciais distintos, muitas vezes indo além da função de moeda. De acordo com o parecer da Autoridade Bancária Europeia - EBA[8],

> A moeda virtual é uma representação digital de valor que não é emitida por um banco central ou por uma autoridade pública, nem está necessariamente ligada à uma moeda fiduciária, utilizada por singulares ou pessoas coletivas como meio de pagamento, podendo ser transferida, armazenada e negociada eletronicamente.

---

[4] Blockchain é uma espécie de livro-razão público e distribuído. Livro-razão é o nome dado pelos profissionais de contabilidade ao agrupamento dos registros contábeis de uma empresa. Nele é possível visualizar todas as transações ocorridas em dado período de operação de uma empresa. Fonte: (ULRICH, 2017, p. 18).

[5] Um conjunto de técnicas pensadas para proteger uma informação de modo que apenas emissor e receptor consigam compreendê-la.

[6] Processo de adicionar registros de transações ao livro razão público do Bitcoin.

[7] Coinmarketcap fornece informações sobre todas as criptomoedas que são negociadas em pelo menos uma bolsa pública e têm um volume de negociação maior que zero. Disponível em:<https://coinmarketcap.com/pt-br/all/views/all/>. Acesso em 20 fev 2021.

[8] AUTORIDADE BANCÁRIA EUROPEIA. EBA Opinion On ‘Virtual Currencies’. Disponível em: <https://eba.europa.eu/documents/10180/657547/EBA-Op-2014-08+Opinion+on+Virtual+Currencies.pdf>. Acesso em 20 fev. 2021.

Figura 2 – Dominância de mercado pelo BitCoin.

Fonte: Adaptado de https://coinmarketcap.com/pt-br/currencies/bitcoin/. Acesso em: 09/02/2021.

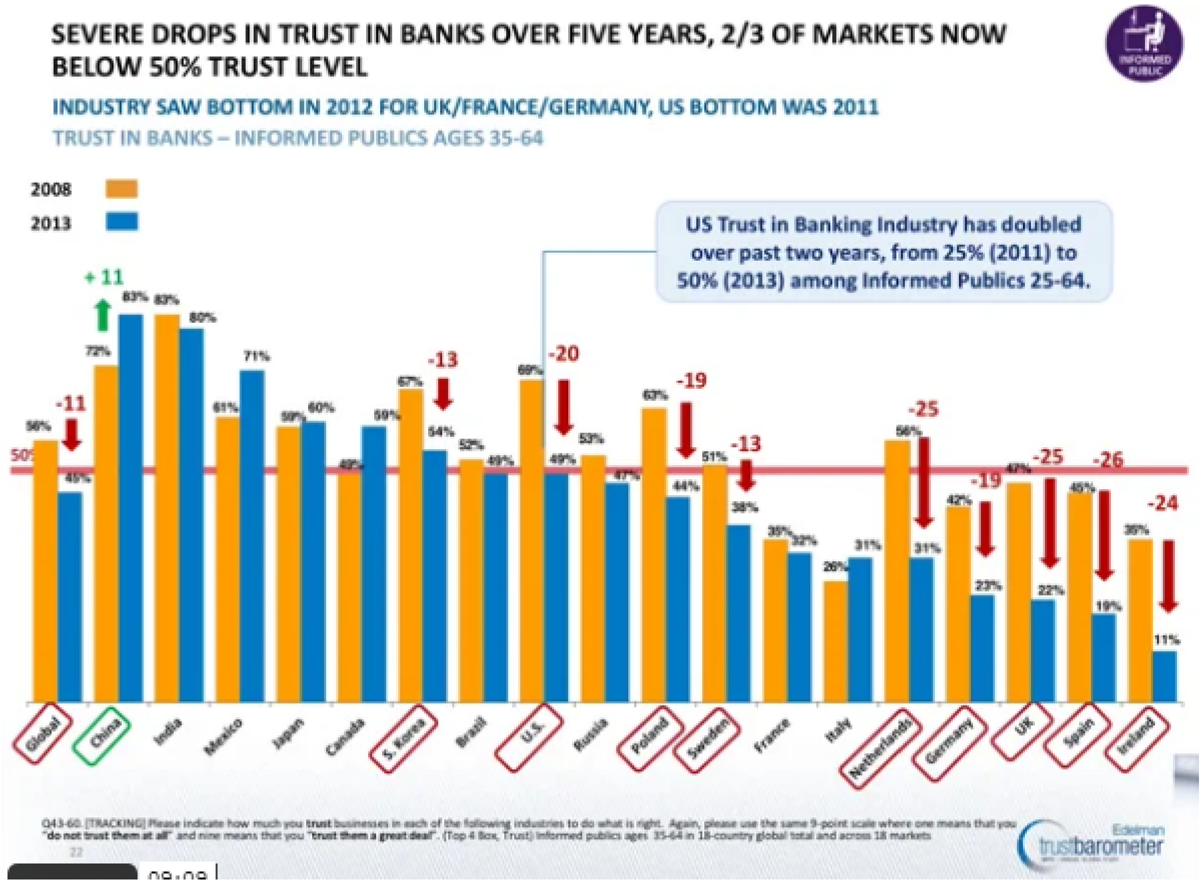
A problemática central envolvendo as moedas comumente utilizadas (papel-moeda e moeda bancária) é o controle estatal. Nesse sentido, o Bitcoin apareceu como uma alternativa viável para aqueles que desejavam uma moeda independente. Desenvolvido em 2008 e implantado em 2009 por Satoshi Nakamoto, o Bitcoin é a criptomoeda mais conhecida do mundo. Para Ulrich (2017, p. 15).

> Em poucas palavras, o Bitcoin é uma forma de dinheiro, assim como o real, o dólar ou o euro, com a diferença de ser puramente digital e não ser emitido por nenhum governo. O seu valor é determinado livremente pelos indivíduos no mercado. Para transações online, é a forma ideal de pagamento, pois é rápido, barato e seguro.

A instabilidade financeira e o desenvolvimento tecnológico são alguns dos fatores que impulsionaram e antecederam o surgimento dessa criptomoeda.

O primeiro fator é marcado pela crise financeira de 2008, conhecida como a crise do subprime, quando o sistema financeiro dos Estados Unidos colapsou em virtude de políticas de crédito hipotecário de alto risco. Após tal crise a confiança que as pessoas depositavam no sistema financeiro tradicional sofreu queda acentuada, conforme mostra o gráfico representado na Figura 3.

Figura 3 – Queda acentuada da confiança nos bancos (2008-2013).



Fonte: https://blockchainacademy.com.br/bitcoin-historico-o-que-e-quem-criou/. Acesso em: 09/02/2021.

Dentro desse contexto, no final de 2008, Satoshi Nakamoto publicava o seu white-paper[9], “Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic Cash System[10]”. A ideia central descrita no documento é de um “dinheiro eletrônico totalmente descentralizado e ponto a ponto, isto é, sem a necessidade de um terceiro fiduciário”. Embora a forte coincidência temporal, o Bitcoin não surgiu em resposta direta à crise do subprime, pois a ideia já vinha sendo trabalhada e aprimorada há um tempo, conforme destaca Ulrich (2017, p. 44).

> A ideia em si não era nova. Na verdade ela já havia sido brevemente explicitada por Wei Dai, membro da lista de discussão cypherpunk, em 1998. Em seu texto, Wei Dai expunha as principais características do protocolo de uma criptomoeda e como ela poderia funcionar na prática.

Todavia, apesar de ser antiga a ideia acerca de uma criptomoeda, faltava a comunhão com a tecnologia para nascer uma alternativa prática à moeda fiduciária, já que uma tecnologia

[9] White paper é um documento informativo que apresenta dados aprofundados sobre determinado tema.
[10] NAKAMOTO, Satoshi. Bitcoin: a Peer-to-Peer Electronic Cash System, 2008. Disponível em: <https://bitcoin.org/pt_BR/bitcoin-paper> . Acesso em: 10 fev. 2021.

como a internet não estava disponível e madura como se encontra nos dias atuais. De fato, a rede mundial de computadores foi o que viabilizou a criação do Bitcoin.

Assim, no dia 3 de janeiro de 2009, nasce oficialmente o Bitcoin, que é a junção de duas tecnologias: a distribuição de um banco de dados por meio de uma rede peer-to-peer[11] e a criptografia (ULRICH, 2017, p. 44).

Apesar de ser a mais conhecida e amplamente aclamada no mundo da internet, o Bitcoin não é a única criptomoeda existente. Os destaques da concorrência vão para o Litecoin e o Ethereum, mas nenhum deles possui a representatividade do Bitcoin, a principal moeda virtual do mundo atualmente. Na Figura 4 temos a representação simbólica das três moedas.

Figura 4 – Simbologias das três principais criptomoedas.

Fonte: <https://cutt.ly/RzWfcpW>. Acesso em 15 fev. 2021

Sabe-se que a China é o maior concorrente dos EUA na disputa pelo posto de maior economia do mundo. Para atingir tal objetivo, é de grande ajuda se sua moeda for dominante em todas as formas de negociação. Posto isso, o país acredita que a forma de afetar o monopólio global do dólar é a partir da criação de um produto melhor. Nesse contexto, a criação de uma moeda digital enquanto o dólar ainda opera no modo tradicional, ganha grande importância. Um termo muito comum no universo de criptomoedas é a sigla CBDC ("moedas digitais emitidas por banco centrais"), que são criptomoedas emitidas e controladas por governos, consideradas como complementos, e não substituições, às moedas fiduciárias.

[11] rede que não possui um servidor centralizado. Consiste em uma série de computadores e servidores que dividem tarefas, sendo que todos são iguais e possuem os mesmos poderes.

Com o intuito de proteger a soberania monetária e o status legal da moeda, em abril de 2020, o Banco do Povo da China (BPC), equivalente ao Banco Central do país, anunciou que já testa uma criptomoeda soberana, o “Digital Renminbi”, nome da moeda local. O país iniciou o desenvolvimento dessa moeda em 2014, visando reduzir os gastos com circulação de papel moeda tradicional, melhorar o controle das finanças do país, trazer maior segurança e rapidez às transações, e prevenir a lavagem de dinheiro (REUTERS, 2019).

A referida moeda funciona como o Bitcoin, porém de forma centralizada e com lastro em moeda fiduciária emitida pelo BPC. Assim, verifica-se que a moeda virtual da China não terá todas as características comuns das criptomoedas.

Além dos já mencionados, existem outros motivos que justificam o avanço acentuado no lançamento de uma moeda digital pelo país.

Da perspectiva governamental, a capacidade de injetar dinheiro em populações específicas tem seus benefícios e em geral, a moeda digital deve dar aos chineses um controle preciso sobre sua política monetária. Outra motivação é retomar parte do controle do duopólio do WeChat Pay e AliPay — os principais meios de pagamento na China (MONEYTIMES, 2020) .

Além disso, a moeda será acessível a qualquer um que baixar a carteira digital do governo, superando assim, as limitações dos dois principais meios de pagamentos do país. Isso deve tornar o dinheiro chinês mais acessível a estrangeiros, algo que é de grande interesse da China.

Outros países têm dado passos importantes na regulamentação do uso de criptomoedas, uma vez que isso poderá permitir a entrada de investidores institucionais e de grandes bancos, bem como restringir a atuação daquelas empresas que não estão sustentadas por boas práticas.

É necessário salientar, que o estágio atual da moeda não é estático, principalmente pelo rápido desenvolvimento de novas tecnologias que poderão num futuro próximo eliminar por completo o uso do papel-moeda como o conhecemos.

2 O VALOR DO DINHEIRO AO LONGO DO TEMPO

A expressão “valor do dinheiro ao longo do tempo” significa que o dinheiro atual, seja dado em dólares, euros, reais ou qualquer outra, vale mais ou tem maior valor de compra do que em uma data futura. Neste caso, as taxas de juros desempenham um fator elementar, pois podem ser usadas para relacionar um valor presente e futuro, e desta forma expressar o valor do dinheiro em relação ao tempo. Para tal é necessário fazer uso da Matemática Financeira para realizar operações que permitam uma melhor tomada de decisão.

Historicamente, a Matemática Financeira sempre esteve ligada ao desenvolvimento do comércio. Embora alguns autores sustentem que ela se origina com o surgimento de empréstimos e encargos de juros durante a Europa Medieval, registros históricos apontam que civilizações mais antigas já faziam uso desse conceito. Nesse contexto, é importante percorrer a linha de evolução do método desenvolvido para tal cobrança, compreender o surgimento, suas transformações ao longo dos tempos até os dias atuais.

2.1 O Conceito de Juros e Sua Cobrança Nos Tempos Primórdios

Em qualquer análise que façamos sobre questões financeiras, encontraremos o conceito de juros ou valor pago pelo empréstimo. Muito do que se escreveu sobre a matemática ao longo dos tempos tem lidado com questões relacionadas a juros.

O conceito, o cálculo e o entendimento de juros são antigos, de acordo com os registros históricos. Segundo estudos arqueológicos, nas sociedades primitivas, o hábito de pagar dívidas existia antes mesmo do hábito das trocas.

Por volta de 2000 a.C. havia a prática comercial usual do empréstimo e devolução de sementes ou outros produtos agrícolas entre os sumérios. Ao efetuar o pagamento do empréstimo, o produtor pagava com uma parte a mais da colheita. Porém, na ausência desta, o pagamento se dava através de outros itens. Nessas condições os juros eram pagos com bens. Levando-se em conta que as sementes eram emprestadas para a semeadura de uma certa área, era lógico esperar o pagamento na próxima colheita – no prazo de um ano. Assim, o cálculo de juros, numa base anual, era mais razoável. Fica evidente, assim, que muitas das práticas atuais tiveram origem nos antigos costumes do povo sumério.

A concepção de juros encontrava-se tão bem empregada que já existia uma firma de banqueiros internacionais, por volta de 575 a.C., com os escritórios centrais na Babilônia. A renda desta firma era proveniente das altas taxas de juros cobradas pelo uso do dinheiro para o financiamento do comércio internacional (JÚNIOR; SCHIMIGUEL, 2009, p. 2).

A evolução da moeda, especialmente a partir da criação da moeda metálica facilitou muito as transações comerciais de produtos e serviços, propiciando um sistema claro de preços. A partir desse momento as pessoas passaram a ter como opção consumir imediatamente ou poupar seus recursos para consumo futuro.

O comércio, impulsionado a partir do uso da moeda, foi se desenvolvendo inicialmente nas regiões da Grécia, depois no Império Romano e posteriormente, na Idade Média, nas cidades da Itália que já faziam transações com o Oriente. Pela mesma razão, a partir do século XV muitos países europeus como Holanda, Espanha, Portugal e Inglaterra também se fortaleceram nessa área e assumiram a liderança mundial do comércio (GRANDO; SCHNEIDER, 2010). Esses intensificaram o transporte marítimo para suas mercadorias, por oferecer maior segurança do que por terra firme, que com frequência mercadores eram saqueados.

Como cada país tinha sua moeda própria, devido ao progresso das navegações existiam muitas moedas em circulação. Com a figura do mercador, iniciou-se uma atividade nova: o comércio do próprio dinheiro, na época, o ouro e a prata.

Com as relações entre países aumentando cada vez mais, surge a questão que hoje chamamos de taxa de câmbio: como estabelecer a relação entre os valores das moedas nas relações internacionais?

Definiu-se, então, o primeiro critério para determinar a equivalência entre moedas, o qual se baseou na quantidade de ouro em poder de cada país – o chamado "padrão ouro".

Alguns comerciantes, conhecendo muito essas moedas estrangeiras, começaram a interessar-se por acumular grandes quantidades e as emprestavam por determinado tempo a quem precisasse e a eles eram devolvidas a quantidade emprestada mais uma certa quantia combinada. Assim,

> num espaço de tempo relativamente curto, acumularam-se fantásticas somas em dinheiro nas mãos dos cambistas. Paulatinamente, foram se ocupando de uma nova atividade: guardar e emprestar dinheiro. Imaginemos um cambista qualquer que tenha acumulado, desta forma, em seus cofres, imensa quantidade de dinheiro. Era natural que a seguinte ideia lhe ocorresse: porque estas grandes somas de dinheiro haverão de permanecer em nosso poder sem qualquer lucro para mim? [...] emprestarei parte deste dinheiro a quem pedir, sob a condição de que seja devolvido num prazo determinado. E como meu devedor empregará o dinheiro como quiser durante este período – talvez em transações comerciais -, é natural que eu obtenha alguma vantagem. Por isso, além do dinheiro emprestado, deverá entregar-me, no vencimento do prazo estipulado, uma soma adicional. (ROBERT, 1989 apud GRANDO; SCHNEIDER, 2010)

A partir desse procedimento, isto é, da cobrança de uma soma adicional, evidencia-se o lucro, o ganho ou, então, os juros.

> Os juros eram pagos pelo usufruto do dinheiro recebido ou, mais propriamente,

> era a "compensação pelo temor"de quem dava dinheiro emprestado e assim se expunha a um grande risco. Entretanto estes juros alcançaram, em alguns casos, quantias incríveis: na antiga Roma os usuários exigiam de 50 a 100 por cento e na Idade. Média, de 100 a 200 por cento, às vezes mais, em relação direta com a necessidade do solicitante ou do montante da soma. (CHENÇO, 2009, p. 33)

Assim, ficaram caracterizadas, ainda que de uma forma bastante rudimentar, o que seriam as primeiras operações de crédito.

A palavra **banco** no sentido que conhecemos hoje surgiu, pois esses cambistas trabalhavam em espaço público, sentados em um banco de madeira, e começaram a ser chamados de banqueiros.

Em algumas civilizações, era usual o costume de os cidadãos mais abastados confiarem a custódia das moedas que possuíam aos sacerdotes. Dessa forma, os primeiros bancos propriamente ditos foram fundados por sacerdotes, pois emprestavam, por meio de suas organizações, como os templos, quantias que depois de certo tempo eram devolvidas com juros, em ouro e prata.

No decorrer da evolução dos sistemas comerciais foi crescendo a necessidade de cálculos mais precisos de valores das transações. Por causa dessa necessidade foram escritos os primeiros textos sobre aritmética na Europa antes do século XVII. Esses textos eram escritos por professores práticos interessados em preparar jovens para carreiras comerciais. A aritmética de Treviso foi considerado o primeiro registro impresso de matemática financeira em 1478, quando apresentou aplicações envolvendo sociedades e escambo.

> A mais antiga aritmética impressa é a anônima e hoje extremamente rara Aritmética de Treviso, publicada em 1478 na cidade de Treviso. Trata-se de uma aritmética amplamente comercial, dedicada a explicar a escrita dos números, a efetuar cálculos com eles e que contém aplicações envolvendo sociedades e escambo. Como os 'algoritmos' iniciais do século XIV, ela também inclui questões recreativas. Foi o primeiro livro de matemática a ser impresso no mundo ocidental. Bem mais influente na Itália que a Aritmética de Treviso foi a aritmética comercial escrita por Piero Borghi. Esse trabalho altamente útil foi publicado em Veneza, em 1484, e alcançou pelo menos dezessete edições, a última de 1557. (TEIXEIRA et al., 2015, p. 23)

A partir desse escrito surgiram diversas outras obras sobre aritmética que tiveram muita influência no desenvolvimento da matemática. Posteriormente, no século XVI, foram publicadas as aritméticas de Tonstall e de Recorde, este último, segundo Eves (2004, p. 300) citado pode Schneider (2008), "o mais influente autor inglês de textos escolares", deu início ao simbolismo algébrico e escreveu textos sobre álgebra, geometria e astronomia.

Sendo assim, a aritmética foi a precursora nos cálculos dos problemas nas relações comerciais de vários povos, evoluindo mais tarde para o uso da álgebra e teve importante contribuição na forma como hoje são resolvidas as questões da matemática financeira.

2.2 Contextualização Contemporânea da Matemática Financeira

Ao realizarmos operações como compra ou venda de produtos e serviços, aplicações e empréstimos bancários, pagamento de impostos, cálculo de prestações, entre outros, estamos lidando com elementos da Matemática Financeira.

Se o pagamento de um produto comprado em uma loja, por exemplo, for à vista, geralmente nos é oferecido um desconto, porém, se o pagamento for a prazo, pode ocorrer um acréscimo denominado juros.

A Matemática Financeira é um conjunto de métodos, técnicas e procedimentos para realizar cálculos relacionados a taxa de juros de um empréstimo ou investimento, a análise de vantagens e desvantagens em relação a compras à vista ou a prazo, a financiamentos, etc. Sendo assim ela se configura como uma ferramenta que nos auxilia a tomar decisões financeiras.

A partir das colocações acima, trazem-se algumas definições atuais sobre a Matemática Financeira. Segundo Neto (2009, p. 1), "a Matemática Financeira trata, em essência, do estudo do valor do dinheiro ao longo do tempo. O seu objetivo básico é o de efetuar análises e comparações dos vários fluxos de entrada e saída de dinheiro de caixa verificados em diferentes momentos". Por outro lado, Laureano e Leite (1987, p. 3) formulam um conceito mais amplo, referindo-se ao desenvolvimento e ao domínio deste ramo da matemática:

> A matemática financeira desenvolveu-se pari passu com o sistema econômico, conhecido por Economia de Mercado. Dominá-la, por conseguinte, tornou-se como que impositivo, quer pelas implicações do trabalho assalariado, quer pelas operações de compra e venda, quer pelos investimentos de capital.

Puccini (1977, p. 12), por sua vez, diz que:

> A matemática financeira é um corpo de conhecimento que estuda a mudança de valor do dinheiro com o decurso de tempo [...], para iniciar o seu estudo é necessário que se estabeleça uma linguagem própria para designar os diversos elementos que serão estudados e que esses elementos sejam contextualizados com precisão.

Em consonância com as considerações acima, aprender matemática financeira hoje é uma necessidade. Dessa forma, é muito importante a inserção dos conceitos financeiros na vida dos jovens e crianças, para que eles se sintam preparados para lidar com dinheiro, ou para que saibam o quanto estão pagando de juros como consumidores ou ainda para que possam planejar suas vidas, sabendo a influência da inflação na sociedade em que vivem, do valor do dinheiro no tempo.

Antigamente, determinadas habilidades como comprar barato, preservar o poder de compra da família, realizar investimentos etc, eram adquiridas apenas por grupos específicos.

Uma mudança que vem ocorrendo nos nossos dias é que, a matemática financeira não tem sido de uso exclusivo de administradores, contadores e economistas e dos que trabalham nessa área, apesar de servir essencialmente a esse grupo. Assim como o campo do comércio passou de uma simples troca de mercadorias, para uma rede mundial de importações e compras, esse sistema também precisou se reorganizar e ser aprimorado. As aplicações da matemática financeira estão se tornando mais comuns no cotidiano de todas as pessoas, em todas as áreas de atuação, o que vem contribuindo para o pleno exercício da cidadania. Nesse contexto, é esperado que o professor de matemática tenha condições de trabalhar objetivamente conceitos de matemática financeira, com vistas a promover mudança comportamental em relação às finanças, inicialmente nos alunos e destes para as respectivas famílias. Por serem os juros, a ideia fundamental na qual se baseia a matemática financeira, iremos abordar seu conceito e cálculo nos dias atuais.

2.2.1 O conceito contemporâneo de juros

Conforme exposto na seção anterior, até a Idade Média, a igreja católica, em algumas regiões, condenava os empréstimos a juros, dando-lhe denominação de usura. Apresentaram o argumento de que dinheiro não gera dinheiro, fato a ser levado em sentido contrário ao seu uso. A partir disso, conclui-se que, cobrar determinada remuneração por uma quantia emprestada era tirar vantagem da penúria de alguém. Quando o progresso tecnológico possibilitou a aplicação do dinheiro na produção, o conceito que se tinha dos juros mudou. Novas teorias explicativas tiveram início fazendo uso de conceitos mais técnicos a respeito.

Atualmente, levamos em conta os juros quando efetuamos uma compra a prazo, quando tomamos dinheiro emprestado ou mesmo quando investimos nosso dinheiro. Seu conceito está intimamente relacionado ao tempo necessário para efetuarmos uma dada operação financeira. Ele existe porque a maioria das pessoas prefere o consumo imediato, e está disposta a pagar um preço por isso. Por outro lado, quem for capaz de esperar até possuir a quantia suficiente para realizar seu desejo, e neste intervalo de tempo estiver disposto a emprestar esta quantia a alguém, menos paciente, deve ser recompensado por esta abstinência na proporção do **tempo e risco**, que a operação envolve.

Desse modo, definimos os juros como sendo a compensação financeira paga a alguém ou a alguma instituição ou ainda empresa pelo uso do seu capital por um determinado período de tempo, a uma determinada taxa. Podemos ainda, de forma simplificada, definir juros como sendo o aluguel pago pelo uso do dinheiro.

Entende-se por Capital, qualquer valor expresso em moeda e disponível no momento presente, ou seja, momento em que se faz uma aplicação, momento em que se contrata um empréstimo ou o momento em que se adquire uma mercadoria. O Capital também é chamado de Principal em muitos textos financeiros.

Antes de fornecermos de forma mais técnica o conceito de juros, vamos analisar dois termos de suma importância para tal: valor presente e valor futuro.

2.2.1.1 Valor presente e valor futuro

Partimos da premissa de que existem inúmeros investimentos disponíveis (poupança, renda fixa, ações) que podem ser realizados por qualquer investidor que disponha de capital. Sabemos, ainda, que todo o capital aplicado recebe uma remuneração que pode ser maior ou menor, dependendo do tipo de investimento feito.

Em princípio, estamos todos no tempo presente. Quando recebemos ou aplicamos algum valor hoje, agora, neste instante, esse valor é um **valor presente (P)**.

Quando vamos receber, pagar ou aplicar algum valor no futuro, no mês que vem, no ano que vem, esse valor é um **valor futuro (F)**.

Com o discutido acima, podemos agora introduzir a expressão matemática que estabelece o conceito de juros, sendo este o valor adicional ao valor presente, denominado pela letra J.

$$F = P + J \tag{2.1}$$

Manipulando, algebricamente, a equação 2.1, podemos concluir o seguinte:

$$J = F - P \tag{2.2}$$

Ou seja, a diferença entre valor futuro e valor presente é igual aos juros da operação.

2.2.1.2 Juros e taxas de juros

Para calcularmos os juros, precisamos da taxa de juros pactuada entre as partes, do valor da operação e do prazo. Essa taxa é uma razão entre os juros pagos (ou recebidos) e o capital negociado.

Expressando os juros em sua forma percentual, isto é, dividindo a equação 2.1 por P, obtemos a expressão para a taxa de juros.

$$\frac{F}{P} = 1 + \frac{J}{P} \tag{2.3}$$

$$\frac{F}{P} = 1 + r \tag{2.4}$$

onde definimos a taxa de juros:

$$r := \frac{J}{P} \tag{2.5}$$

Portanto:

$$F = P(1 + r). \tag{2.6}$$

Esta última equação (2.6), demonstra então, qual será o valor futuro de uma aplicação em um dado período. A taxa de juros indica qual remuneração será paga ao dinheiro emprestado, para um determinado período. Ela vem normalmente expressa da forma percentual, seguida da especificação do período de tempo a que se refere, que pode ser ao dia, ao mês, ao ano, etc. A este período de tempo a que a taxa de juros está relacionada, damos o nome de período de capitalização ou período financeiro.

2.2.2 Classificação dos juros

Os critérios de capitalização demonstram como os juros são formados e sucessivamente incorporados ao capital no decorrer do tempo. Nesse contexto, a capitalização pode ocorrer em tempos discretos (ao dia, ao mês, ao bimestre, ao ano, etc) ou em tempos contínuos. Quando ocorre em tempos discretos, é subdividido entre regime simples ou composto.

2.2.2.1 Juros simples

No caso dos juros simples, a taxa é aplicada sobre o valor inicial de forma linear em todos os períodos, ou seja, não considera que o valor sobre o qual incidem juros muda ao longo do tempo. O valor dos juros a serem pagos é definido no início da operação financeira – tomada de empréstimo ou aplicação e esse valor é calculado, uma única vez, sobre a quantia inicial no início da operação financeira.

Enquanto durar a operação financeira, os juros permanecem constantes e não são recalculados, independentemente de o montante da operação aumentar ou diminuir ao longo do tempo. Logo, como consequência, o crescimento do montante é linear, o que implica em uma progressão aritmética. Assim, temos que os juros J_1, em 1 período é dado pelo produto do valor presente P pela taxa de juros r.

$$J_1 = P \cdot r \tag{2.7}$$

Após dois períodos,

$$\begin{aligned} J_2 &= P \cdot r + P \cdot r \\ &= 2 \cdot P \cdot r \end{aligned} \tag{2.8}$$

Após n períodos, tem-se

$$\begin{aligned} J_n &= \overbrace{P \cdot r + P \cdot r + P \cdot r + \ldots + P \cdot r}^{n \text{ vezes}} \\ &= n \cdot P \cdot r \end{aligned} \tag{2.9}$$

Logo, pode-se calcular o total acumulado ao final de n períodos, ou seja, o Valor Futuro

F_n, é obtido através da soma do valor presente P com os juros gerado:

$$\begin{aligned} F_n &= P + J_n \\ &= P + n \cdot P \cdot r \\ &= P \cdot (1 + n \cdot r) \end{aligned} \tag{2.10}$$

A aplicação do regime de juros simples é muito limitada e pouco aplicável, pois é pouco lucrativa. Emprega-se esse regime de juros apenas em casos de transações financeiras a curto prazo, no processo de desconto simples e/ou quando se atrasa o pagamento de uma prestação ou outras coisas.

2.2.2.2 Juros compostos

Em se tratando de juros compostos, o cálculo é diferente, pois os juros de cada período são somados ao valor acumulado para o cálculo de novos juros nos períodos seguintes. Isso quer dizer que o valor aplicado se altera a cada período.

Podemos calcular o valor futuro F ou o montante obtido ao aplicar um determinado valor a juros compostos como segue:

- Após um período:

$$F_1 = P \cdot (1 + r) \tag{2.11}$$

Assim, $P_2 = F_1$ é o valor a ser aplicado no período seguinte.

- Após dois períodos:

$$\begin{aligned} F_2 &= P_2 \cdot (1 + r) \\ &= P \cdot (1 + r)^2 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Do mesmo modo, $P_3 = F_2$ será a quantia a ser aplicada no terceiro período. Logo,

- Após três períodos:

$$\begin{aligned} F_3 &= P_3 \cdot (1 + r) \\ &= P \cdot (1 + r)^3 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Nesse sentido, para um período n, o valor futuro será dado por:

$$F_n = P \cdot (1 + r)^n \tag{2.14}$$

Este regime de juros compostos mostra um comportamento diferente da capitalização simples no que se refere ao crescimento do valor aplicado. Como a incorporação dos juros ao capital gera nova base de cálculo para o próximo período, o montante aumenta em progressão geométrica.

Apresenta-se, no Quadro 1 uma tabela comparativa entre juros simples e compostos. O exemplo considera um capital de R$1000,00 aplicado, a uma taxa de 20% ao ano, por quatro períodos consecutivos, mostrando a forma de acumulação dos juros nos dois regimes de capitalização.

Quadro 1 – Tabela comparativo juros simples/compostos.

n	**Juros Simples**		**Juros Compostos**	
	Juros por período	Montante	Juros por período	Montante
1	1000 x 0,20 = 200	1200,00	1000 x 0,20 = 200	1200,00
2	1000 x 0,20 = 200	1400,00	1200 x 0,20 = 240	1440,00
3	1000 x 0,20 = 200	1600,00	1440 x 0,20 = 288	1728,00
4	1000 x 0,20 = 200	1800,00	1728 x 0,20 = 346	2074,00

Fonte: Elaborada pela autora.

Uma vez apresentado o regime de capitalização em tempos discretos n, na próxima seção abordaremos, a capitalização contínua, onde os valores monetários fluem contínua e uniformemente ao longo do tempo.

2.2.3 Capitalização contínua

A capitalização contínua se processa em intervalos de tempo bastante reduzidos, caracteristicamente em intervalo de tempo infinitesimal, promovendo grande frequência de capitalização. Sendo assim, os períodos de capitalização são considerados instantâneos. Deste modo, a taxa de juros é chamada de taxa instantânea de juros.

Conforme evidenciado na seção anterior, o cálculo do valor futuro (F) ou o montante em função do valor presente (P) ou capital inicial, aplicado a uma taxa de juros compostos (r), durante uma unidade de tempo (t) é dada pela equação (2.14).

Em geral, a taxa de juros não é dada no mesmo período que o tempo de aplicação. Assim, para igualar o intervalo de tempo, digamos em n períodos, encontramos um divisor de ambos estes valores, de modo que a taxa de juros fica: r/n e o tempo de aplicação $n \cdot t$.

Existe um certo caso particular que associa o número de Euler (e), ao cálculo de juros compostos. Este número, segundo Maor (2006), era conhecido, de modo implícito e não intencional, por meio de situações de ordem prática, antes de qualquer estudo teórico. De acordo com o autor, é provável que as origens do número recuem até o início do século XVII, no estudo desenvolvido por Napier, com relação aos logaritmos. Porém, Jacob Bernoulli (1655-1705) teria sido responsável pela primeira indicação desse número, na altura que desenvolvia cálculos de juros compostos. O matemático interessou-se por descobrir o valor máximo de juros pagos nessa modalidade. Para tal, buscava responder ao seguinte questionamento:

"Como investir $1,00 com taxa nominal de 100% ao ano?"

Na prática, Bernoulli queria saber o que era mais vantajoso: cobrar juros uma vez ao ano ou em mais vezes? Nesta perspectiva, para uma abordagem inicial do número e, consideremos o cenário em que um capital inicial de $1,00 é investido a uma taxa de juros anual de 100%.

Se capitalizado anualmente, isto é, para $n = 1$ e $r = 100\%$, pela equação (2.14), ao fim do primeiro ano, o montante será dado por:

$$M = 1 \cdot (1 + 1)^1 = \$2,00 \tag{2.15}$$

Caso a capitalização fosse realizada semestralmente, teríamos uma taxa de juros por semestre, $r = 50\%$ e $n = 2$. O valor acumulado passaria a ser

$$M = 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 = \$2,25 \tag{2.16}$$

Considerando agora a capitalização mensal, isto é, $n = 12$ períodos, a taxa de juros por mês a ser usada é $\frac{100\%}{12}$, donde se obtém o montante dado por:

$$M = 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} = \$2,6034 \tag{2.17}$$

Do mesmo modo, se considerarmos a taxa de juros por minuto, teríamos $\frac{100\%}{360 \cdot 24 \cdot 60}$ ao minuto. Nesse caso, o montante seria de:

$$M = \left(1 + \frac{1}{360 \cdot 24 \cdot 60}\right)^{360 \cdot 24 \cdot 60} = 2,7182618 \tag{2.18}$$

De maneira geral, realizando a capitalização n vezes em um ano, obteríamos

$$M = 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \tag{2.19}$$

É esta última equação (2.19) que relaciona Matemática Financeira ao Número de Euler.

Cada vez que a divisão de tempo aumenta e o intervalo de tempo se torna mais diminuto, isto é, quando o tempo de composição dos juros tende a zero, o resultado da capitalização parece convergir para certo número.

Na hipótese de considerarmos a taxa sendo cobrada instantaneamente, o período considerado para a correção deve ser suficientemente grande, isto é, n deve tender ao infinito, donde $\frac{1}{n}$

tenderá a zero. Daí, podemos escrever:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2,718281828\ldots = e \tag{2.20}$$

A partir do resultado acima, conclui-se que ao adicionar os juros acumulados tanto quanto possível à quantia inicial depositada, é possível maximizar seu ganho até um certo limite. Em outras palavras, o montante de uma aplicação se estagna na medida em que a frequência de cálculo de juros aumenta.

O processo de verificação do comportamento da função que representa o montante a medida que n cresce conduziu o matemático Jacob Bernoulli ao encontro do número e. Desse modo, o primeiro uso do número e, embora não tenha sido realmente teorizado, foi o de buscar o máximo de ganho, aumentando a frequência de cálculo das taxas de juros de um empréstimo.

Generalizando este problema, se é aplicado um valor inicial C_0 a uma taxa percentual r, transcorridos t períodos de tempo, um investidor deverá receber de volta uma quantia C dada equação 2.21:

$$C = C_0 \cdot \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{r\cdot t} = C_0 \cdot e^{r\cdot t} \tag{2.21}$$

A partir do conceito de juros contínuos, apresentado acima, pode-se estabelecer a relação com as funções exponenciais. A aplicação de funções logarítmicas e exponenciais à matemática financeira é um importante instrumento e facilitador de situações cotidianas sem o qual muitos cálculos seriam longos e complicados.

Em seguida, serão apresentados alguns exemplos, que foram retirados do livro *Logaritmos* (LIMA, 1991), com intuito de possibilitar a verificação da facilidade que o uso de logaritmos traz ao cálculo de juros compostos.

Exemplo 1: Juros contínuos

Empregando-se um capital C a juros contínuos de 20% ao ano, em quanto tempo esse capital dobra?

Solução:
Neste caso $r = \dfrac{20}{100} = 0,2$. Devemos achar o número t de anos, isto é,

$C_0 \cdot e^{0,2\cdot t} = 2 \cdot C_0$

$e^{0,2\cdot t} = 2 \Longrightarrow 0,2 \cdot t = \ln 2 \Longrightarrow t = \dfrac{\ln 2}{0,2} = \dfrac{0,693}{0,2} = 3,46$

Assim, o tempo necessário para dobrar o capital é de 3,46 anos, ou seja, aproximadamente 3 anos e meio. Note-se que este tempo não depende do capital inicial. Fixada a taxa de juros, leva-se o mesmo tempo para dobrar um capital grande ou um capital pequeno.

De um modo geral, o mesmo raciocínio serve para mostrar que, se a taxa de juros contínuos é k% ao ano e $r = \frac{k}{100}$, então um capital qualquer leva $t = \frac{s}{r}$ anos para tornar-se s vezes o seu valor inicial.

Exemplo 2: Perdas contínuas

Existem bons negócios e maus negócios. Suponhamos que um capital C_0 é empregado num negócio que (a posteriori, digamos) se revelou mau. Mais exatamente, ele dá um prejuízo de k% ao ano. Pondo $r = \frac{k}{100}$, como antes, se o prejuízo fosse brusco, no fim do ano o capital estaria reduzido a $C_0 - r \cdot C_0 = C_0 \cdot (1 - r)$. Mas, se a perda é contínua e tem igual intensidade durante o ano inteiro (isto é, em vez de concentrar-se em certos períodos, ela se espalha homogeneamente), então é natural concluir que, durante cada fração $1/n$ do ano, a perda sofrida pelo capital C_0 o reduz a $C_0 \cdot (1 - \frac{r}{n})$. Assim sendo, pelo mesmo raciocínio utilizado no caso de juros contínuos, concluiremos que um capital C_0, sujeito a um prejuízo contínuo de k% ao ano, no fim de t anos fica reduzido a

$$C_0 \cdot \left[\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^{r \cdot t} = C_0 \cdot e^{-r \cdot t} \tag{2.22}$$

Em particular, este capital estará reduzido à metade num tempo tal que $e^{-r \cdot t} = \frac{1}{2}$, isto é,

$$t = \frac{\ln 2}{r} = \frac{69,3}{k} \; anos. \tag{2.23}$$

Exemplo 2: Perdas contínuas

Uma pessoa toma emprestado \$100 ($C_0 = 100$), com taxa de juros continuamente composta de 10% ao mês, ($r = 0,1$) . Depois de 2 meses, ($t = 2$), quanto essa pessoa irá pagar?

$$\begin{aligned} C &= 100 \cdot e^{0,1 \cdot 2} \\ &= 100 \cdot 1,2212 \\ &= 122,14 \end{aligned}$$

Portanto, tomando um empréstimo de \$100, essa pessoa deverá, ao final de dois meses, pagar a quantia equivalente a \$122,14.

A capitalização contínua, na prática, pode ser entendida em todo o fluxo monetário distribuído ao longo do tempo e não somente em um único instante. Por exemplo, o faturamento de um supermercado, os projetos de investimento, a geração de lucros da empresa, o desgaste de equipamentos etc. são capitalizações que se formam continuamente, e não somente ao final de um único período (mês, ano). Tal regime encontra dificuldades em aplicações práticas, sendo pouco utilizado.

O valor do dinheiro no tempo e a existência dos juros são elementos fundamentais e inter-relacionados, indispensáveis ao estudo da matemática financeira. Esse comportamento também está relacionado aos conceitos de inflação e poder de compra. Abordaremos, brevemente tais conceitos, para maior apropriação ao tema proposto neste estudo.

2.3 Inflação e Deflação

Inflação e deflação são conceitos aparentemente semelhantes, usados para mapear a atividade econômica de um país, mas se reportam a realidades distintas. Antes de tratarmos da diferenciação entre os dois conceitos, é importante entender o que é o Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA), elaborado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

2.3.1 Índice de Preços ao Consumidor Amplo - IPCA

Trata-se de um indicador que calcula a variação de preços da cesta de bens e serviços consumidos pelas famílias brasileiras que recebem de 1 a 40 salários mínimos[1]. Essa cesta consiste no conjunto dos principais produtos consumidos por essas famílias e está sempre sujeita a alteração, uma vez que sempre existem novos bens na economia. Do mesmo modo, existem bens que não são mais comercializados ou que deixam de ter relevância. Esse índice considera gastos como alimentação e bebidas, artigos de residência, comunicação, despesas pessoais, educação, habitação, saúde e cuidados pessoais. A partir dele, temos o cálculo das taxas de inflação, deflação e desinflação.

2.3.2 Inflação

Inflação é o aumento dos preços de bens e serviços. Ela implica diminuição do poder de compra da moeda. É calculada pelos índices de preços, comumente chamados de índices de inflação. O IBGE produz dois dos mais importantes índices de preços: o IPCA, considerado o oficial pelo governo federal, e o INPC. O propósito de ambos é o mesmo: medir a variação de preços de uma cesta de produtos e serviços consumida pela população. O resultado mostra se os preços aumentaram ou diminuíram de um mês para o outro.

A inflação gera incertezas importantes na economia, desestimulando o investimento e, assim, prejudicando o crescimento econômico. As pessoas e as empresas perdem noção dos preços relativos e, assim, fica difícil avaliar se algo está barato ou caro. A inflação afeta

1 Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/explica/inflacao.php>. Acesso em 25 fev. 2021.

particularmente as camadas menos favorecidas da população, pois essas têm menos acesso a instrumentos financeiros para se defender da inflação.

Sua alta também aumenta o custo da dívida pública, pois as taxas de juros da dívida pública têm de compensar não só o efeito da inflação mas também têm de incluir um prêmio de risco para compensar as incertezas associadas com a inflação mais alta.

2.3.3 Deflação

A deflação ocorre quando os preços gerais dos produtos caem. Trata-se, portanto, do contrário da inflação. Ao contrário do que possa parecer, preços em queda podem ser prejudiciais para o bom funcionamento da economia. Um comerciante poderá ter prejuízo se ganhar menos amanhã pelo estoque que fez hoje. As famílias e as empresas poderão adiar suas decisões de consumo e investimento se houver a perspectiva de que os preços serão mais baixos amanhã, o que pode reduzir a atividade econômica.

Se acontecer isoladamente, a deflação pode ser uma mera correção dos preços – como resposta a um aumento muito alto no passado. Contudo, quando ela é prolongada, a economia se contrai, podendo levar ao aumento de desemprego e ao prejuízo das empresas. As consequências mais duradouras podem comprometer a capacidade de investimento e de recuperação do país.

2.3.4 O cálculo da inflação

A taxa de inflação, expressa a variação de um número-índice e pode ser calculada com metodologias diferentes. O governo federal usa o IPCA como o índice oficial de inflação do Brasil. Portanto, ele serve de referência para as metas de inflação e para as alterações na taxa de juros.[2]

O IBGE faz um levantamento mensal, em 13 áreas urbanas do País, de, aproximadamente, 430 mil preços em 30 mil locais. Todos esses preços são comparados com os preços do mês anterior, resultando num único valor que reflete a variação geral de preços ao consumidor no período. Esses índices são calculados por meio de médias ponderadas (aritmética, geométrica e harmônica).

[2] Fonte: <https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/oqueinflacao>. Acesso em: 05 abr 2021.

3 A MATEMÁTICA CONTEMPORÂNEA E A ANÁLISE FINANCEIRA

Nos últimos 50 anos, a dinâmica e estrutura dos mercados financeiros, sofreram consideráveis transformações. Em grande parte, essas mudanças foram impulsionadas pelos grandes desequilíbrios da economia mundial no início da década de 1970: crise do petróleo, endividamentos, inflação acentuada e as variações das taxas de juros e do câmbio. Além disso, o colapso do sistema Bretton-Woods[1], isto é, o fim do padrão dólar-ouro, que levou a grandes mudanças na paridade das moedas, o que acarretou, por sua vez, fortes oscilações nas taxas de juros.

Paralelamente acontecia a revolução técnico científico informacional ou Terceira Revolução Industrial, onde a pesquisa tecnológica, indústria e mercado se unem para criar um novo modelo de produção, muito mais eficiente e competitivo a nível mundial. Isso viria a permitir um maior fluxo de informação ao redor do mundo. No mercado financeiro, por exemplo, um maior número de transações passou a ser realizado em cada vez menos tempo. A interligação internacional de computadores possibilitou a movimentação quase instantânea de grandes volumes de capitais, onde as transações são feitas simultaneamente, e em tempo real nas principais bolsas de valores do mundo. Com isso, o setor financeiro passou a ter mais importância e autonomia. Se por um lado o estabelecimento de mercados financeiros altamente ativos, competitivos e com grande liquidez, envolvendo a participação de diversos agentes, criou grandes oportunidades de investimento, por outro trouxe também grande incerteza devido à natureza extremamente volátil destes mercados (VOLCHAN, 1999). Nesse contexto, o risco é considerado um aspecto inevitável ao jogo econômico. Consequentemente, o gerenciamento destes tornou-se vital para agentes econômicos.

Acontece que fazer esse gerenciamento exige ideias e técnicas matemáticas avançadas, indo além da matemática tradicionalmente empregada nos problemas clássicos de finanças. Até meados do século passado a Teoria de Finanças utilizava a matemática adequada aos problemas de atuária e contabilidade, tais como cálculo de juros, pensões e anuidades. As ferramentas se limitavam ao conhecimento de cálculo diferencial e integral e estatística básica. Em linhas gerais, na segunda metade daquele século ocorreram desenvolvimentos em duas vertentes principais,

[1] O Acordo de Bretton Woods foi assinado em 1944, na cidade de Bretton Woods, estado de New Hampshire, nos Estados Unidos, por 44 nações aliadas, onde foram acertadas as bases que regeriam a política econômica internacional após a Segunda Guerra Mundial. Definiu-se que cada país seria obrigado a manter a taxa de câmbio de sua moeda "congelada"ao dólar, com margem de manobra de cerca de 1%. A moeda norte-americana, por sua vez, estaria ligada ao valor do ouro em uma base fixa, com cada dólar equivalendo a 35 gramas de ouro. O Acordo durou até 15 de agosto de 1971, quando os Estados Unidos, unilateralmente, acabaram com a convertibilidade do dólar em ouro, o que efetivamente levou o sistema de Bretton Woods ao colapso. Na medida que o capitalismo se desenvolvia, a moeda dos Estados Unidos tornou-se o dinheiro hegemônico nas reservas mundiais e a referência de todo o sistema financeiro mundial. Disponível em: <https://www.ipea.gov.br/desafios/index.php?option=com_content&id=2247:catid=28&Itemid=23>. Acesso em 30 jun. 2021.

dependendo de o modelo econômico envolver ou não condições de incerteza. Isto é, envolvendo ou não técnicas probabilísticas. Dessa forma, é cada vez maior a demanda de matemáticos, físicos e engenheiros na formulação e desenvolvimento de modelos e técnicas em finanças.

Para compreender a economia, os economistas usam modelos — teorias que simplificam a realidade, com o objetivo de revelar de que maneira as variáveis econômicas se comportam. Eles são úteis porque nos ajudam a deixar de lado detalhes irrelevantes para que nos concentremos em relações importantes. Os modelos matemáticos são frequentemente divididos em dois grandes grupos: modelos determinísticos e modelos estocásticos.

O primeiro grupo caracteriza-se pela utilização de equações determinísticas, ou seja, que não envolvem variáveis aleatórias. Por outro lado, um modelo estocástico representa uma situação em que a incerteza está presente, ou seja, é um modelo para um processo aleatório.

Durante os últimos anos houve grande esforço de matemáticos e físicos em desenvolver um modelo confiável, com o qual fosse possível descrever o movimento do mercado financeiro. Esse campo tornou-se tão complexo que, para uma boa compreensão de seu comportamento, o uso de ferramentas matemáticas avançadas tornou-se inevitável. Uma das possibilidades é a inserção da teoria dos fractais associada aos conceitos de caos, complexidade e não-linearidade neste campo de pesquisa. Essa teoria vai de encontro aos conceitos estabelecidos pela moderna teoria de finanças, sobretudo os preconizados pela Hipótese de Eficiência dos Mercados[2]

Para entender como a teoria dos fractais é aplicada nesse campo, é imprescindível formar uma ideia geral das teorias financeiras tradicionais e os impactos destas linhas de pensamento na análise do comportamento de preços de ativos financeiros.

3.1 Pressupostos da Moderna Teoria de Finanças

A Moderna Teoria Financeira se fundamenta na suposição de que os preços de ativos financeiros não são previsíveis, mas suas flutuações podem ser descritas por leis matemáticas da probabilidade e, sendo assim, o risco seria mensurável e gerenciável. O problema reside no fato de que esta suposição considera que a curva normal seria capaz de descrever com perfeição o comportamento das variações dos preços nos mercados financeiros, e que estas variações seriam independentes umas das outras.

[2] A Hipótese do Mercado Eficiente foi proposto pelo economista norte-americano Eugene Fama em 1970 e afirma que mercados financeiros são "eficientes em relação à informação". O mercado seria considerado eficiente se refletisse rapidamente qualquer informação disponível nos preços dos ativos, impossibilitando ganhos anormais. De acordo com Fama (1970), os preços representam um sinal preciso do verdadeiro valor dos ativos, e os seus retornos devem apresentar independência serial, ou seja, as mudanças dos preços devem ser linearmente independentes, com correlação serial igual a zero. Dessa forma, é impossível, para qualquer investidor, usar estratégias ou informações diferenciadas para obter vantagens no mercado de capitais antes dos demais investidores, mesmo que estas informações sejam de caráter privado da empresa emitente do título. Fonte: FORTI, Cristiano Augusto Borges; PEIXOTO, Fernanda Maciel; DE PAULO SANTIAGO, Wagner. Hipótese da eficiência de mercado: um estudo exploratório no mercado de capitais brasileiro. Gestão e Regionalidade, v. 25, n. 75, 2009.

A teoria das finanças evoluiu ao longo do século XX, com Eugene Fama[3], um dos principais estudiosos do assunto, ganhou a hipótese dos mercados eficientes, a qual norteia toda a linha das chamadas finanças tradicionais.

Essa hipótese preconiza que num dado instante, o movimento seguinte dos preços depende somente do preço neste instante e não da história prévia das variações de preço. Em outras palavras, somente o valor presente do ativo tem importância para sua evolução futura. A interpretação econômica é de que um mercado eficiente reage imediatamente a novas informações, ajustando-se às novas realidades independentemente do que aconteceu no passado.

3.2 Fractais: Definição e Características

O termo fractal foi usado pela primeira vez no ano de 1975 por Benoit Mandelbrot. Matemáticos como George Cantor, Giuseppe Peano, Helge Von Koch e Waclaw Sierpinski já haviam criado figuras que atendiam às propriedades de objetos fractais, sem no entanto, assim os nomear. Esses objetos matemáticos, apresentavam características especiais, uma vez que desafiavam as noções comuns de infinito e para os quais não havia uma explicação objetiva. Por essa razão foram durante muito tempo, considerados como "monstros matemáticos". Assim, Mandelbrot usava pela primeira vez a palavra fractal para nomear tais objetos.

Uma primeira definição matemática dada por Mandelbrot é: "um fractal é, por definição, um conjunto para o qual a dimensão de Hausdorff Besicovitch excede a dimensão topológica. Todo conjunto com dimensão fracionária é um fractal". Diferentes definições surgiram com o aprimoramento de sua teoria, mas a noção que serve como ideia básica foi introduzida por Mandelbrot através do neologismo "Fractal", que surgiu da palavra fractus, que significa quebrado, irregular (no sentido de não diferenciável).

A análise do conceito fractal envolve a compreensão de outros conceitos, como a diferenciabilidade de funções contínuas, a autossemelhança, a complexidade infinita, a dimensão de Hausdorff, escala e iteração. Por ser um tema que envolve muitos termos e conceitos acadêmicos, não comuns ao mundo escolar, buscamos desenvolver neste texto uma abordagem acessível do conceito fractal a professores e alunos da Educação Básica.

3.2.1 Fractais Regulares por Contração Uniforme

Tecnicamente, um fractal é um objeto que apresenta invariância na sua forma à medida em que a escala, sob a qual o mesmo é analisado, é alterada, mantendo-se a sua estrutura idên-

[3] Eugene Francis Fama (Boston, 14 de fevereiro de 1939) é um economista norte-americano, professor da Universidade de Chicago, conselheiro de investimentos na Dimensional Funds Advisors e vencedor do Prêmio Nobel de Economia de 2013, juntamente com Robert Schiller e Lars Peter Hansen. Os seus estudos contribuíram para a Hipótese do Mercado Eficiente, que tenta identificar tendências para explicar a formação do preço dos ativos no mercado financeiro. Disponível em: <https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/2013/fama/biographical/>. Acesso em: 30 jun. 2021

tica à original. Os fractais determinísticos, também conhecidos como fractais geométricos, são subconjuntos gerados por transformações geométricas simples do próprio objeto nele mesmo, possuem uma regra fixa de substituição geométrica, aplicadas a cada iteração. Para melhor compreensão da ideia acima, serão descritos alguns fractais geométricos.

Curva de Koch

O matemático polonês Helge Von Koch (1870-1924), foi o criador da curva que leva seu nome, Curva de Koch, que veio posteriormente a dar origem a "Ilha de Koch" que também é chamada de "Floco de Neve". A construção do referido fractal, Figura 5, ocorre da seguinte maneira:

(a) Iniciamos com um segmento de reta delimitado pelo intervalo $I = [0, 1]$.
Nesse primeiro momento, tendo-se apenas um segmento de reta, o comprimento deste (l_0), coincide com o comprimento total da curva (L_0), ou seja, $L_0 = l_0 = 1,0$.

(b) Em seguida, dividimos este segmento em três partes iguais e retiramos a parte do meio. Cada um desses segmentos (l_1) terá comprimento igual a um terço do original, ou seja, $l_1 = \frac{1}{3}$

(c) Construímos então, na parte central retirada, um triângulo equilátero, retirando-lhe a base. Com isso, teremos quatro novos segmentos com comprimento l_1 e assim, o comprimento total da curva, l_1 é:

$$l_1 = \frac{1}{3} \longrightarrow L_1 = 4 \cdot l_1 \longrightarrow L_1 = \frac{4}{3} \tag{3.1}$$

Após esta etapa, repetimos o processo descrito acima nos quatro segmentos restantes, de onde se obtém, em cada um, quatro novos segmentos com o comprimento de um terço do original. Isso permite um total de 16 segmentos com comprimento (l_2) de um terço do original. Nesta etapa, o comprimento total da curva, L_2 é:

$$l_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \longrightarrow L_2 = 4 \cdot (4 \cdot l_2) \longrightarrow L_2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \tag{3.2}$$

Em mais uma iteração obtém-se 64 segmentos com o comprimento de um terço do original. Da mesma forma, calculamos o comprimento total da curva, o qual segue:

$$l_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \longrightarrow L_3 = 4 \cdot [4 \cdot (4 \cdot l_2)] \longrightarrow L_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \tag{3.3}$$

Generalizando, na n-ésima iteração, o comprimento de cada segmento será $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ e o comprimento total da curva será $\left(\frac{4}{3}\right)^n$. A curva de Koch é o limite para o qual tende esta construção, repetindo as operações referidas, sucessivamente, para cada segmento. O limite de uma sucessão geométrica de razão 4/3 é infinito, o que significa que a figura final, isto é, aquela para a qual tende a sucessão descrita, terá um comprimento infinito.

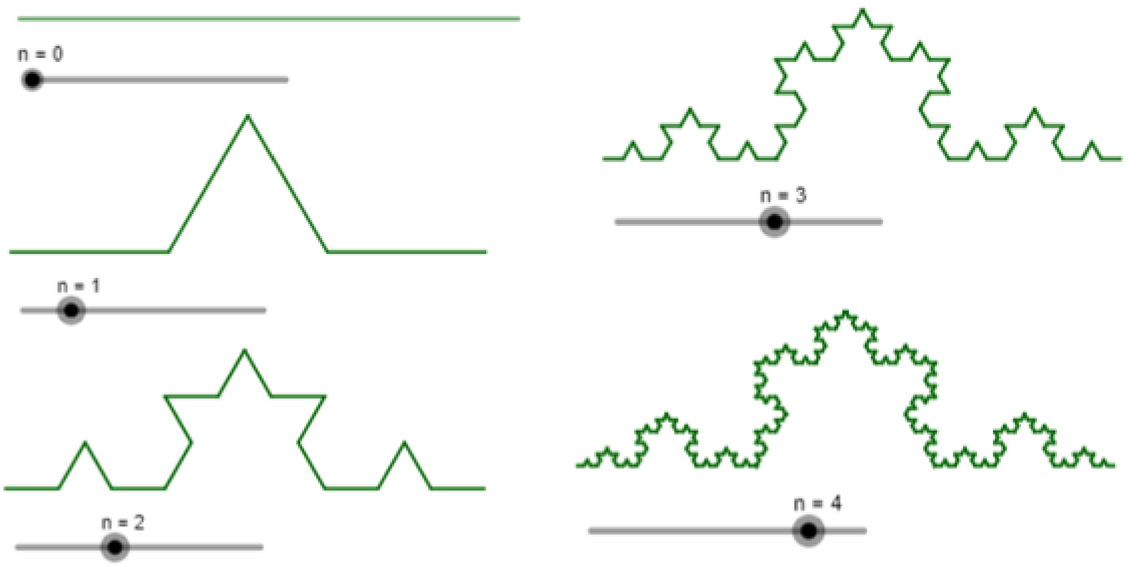
Na n-ésima iteração, o comprimento da curva de Koch será dado por:

$$S_n = S_{n-1} + \frac{S_n}{3} = \left(\frac{4}{3}\right)^n \tag{3.4}$$

Assim, no limite de um número infinito de iterações, tem-se o seguinte resultado:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \tag{3.5}$$

Figura 5 – As quatro primeiras iterações para a construção da Curva de Koch.



Fonte: Elaborado pela autora

O fractal é o resultado de um número infinito de iterações, ou seja, temos o fractal quando $n \to \infty$. Com isso, podemos obter algumas propriedades, tais como:

- O número de segmentos tende para infinito:

$$\lim_{n\to\infty} 4^n = \infty \tag{3.6}$$

- O comprimento de cada segmento tende para zero:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 0 \tag{3.7}$$

Portanto, a curva de Koch não contém segmentos. Trata-se de uma curva contínua que em cada ponto possui uma quina. Sendo assim, fornece um exemplo de curva contínua sem derivada em cada um de seus pontos. Essa propriedade caracteriza alta irregularidade na curva. Abordamos esse tema na próxima seção.

É possível encontrar, em cada iteração da curva de Koch, quatro cópias da figura na iteração anterior, em tamanho reduzido, sendo que, para cada uma dessas quatro partes ocorre o mesmo. Deste modo vemos que a autossemelhança é encontrada em cada parte da figura não importando qual está sendo observada.

Chamamos atenção para o fato de que a observação da característica de autossemelhança em um conjunto, não torna este um fractal.

3.2.2 Dimensão fracionária

Associamos à curva de Koch um número, o qual chamamos de dimensão fractal (da curva de Koch). Intuitivamente, temos usado o fato de que uma reta (ou um intervalo) é um conjunto de dimensão 1; o plano (ou uma região do plano) tem dimensão 2, assim como o espaço tem dimensão 3.

Uma forma de associar o número d (dimensão) à curva de Koch, é criar um mecanismo que quando restrito à reta, ao plano ou ao espaço, tenhamos $d = 1$, $d = 2$ ou $d = 3$, respectivamente. Para tal, vamos aproveitar a propriedade de autossemelhança da reta (plano ou espaço).

Consideremos o intervalo $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, denotamos por $N(\varepsilon)$, o número mínimo de intervalos de comprimento ε que cobre I.

Calculando $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^d$, temos:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon^d = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{d-1} = \begin{cases} 0, & \text{se } \forall\ d > 1\ (d-1 > 0); \\ \infty, & \text{se } \forall\ 0 < d < 1\ (d-1 < 0). \end{cases} \tag{3.8}$$

Quando $d = 1$, tem-se

$$\lim_{\varepsilon \to 0} N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^1 = 1, \tag{3.9}$$

Assim, para o intervalo, temos que o único número positivo no qual existe o limite é $d = 1$.

Da mesma forma, seja $Q = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$. Dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, $N(\varepsilon)$ denota o número mínimo de quadrados necessários para cobrir Q. Procuramos d, tal que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^d = 1, \tag{3.10}$$

Nesta situação, para o número mínimo de quadrados $N(\varepsilon) \approx \frac{1}{\varepsilon^2}$, tem-se:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \varepsilon^d = \begin{cases} 0, & \text{se } \forall\ d > 2\ ; \\ \infty, & \text{se } \forall\ 0 < d < 2\ . \end{cases} \tag{3.11}$$

Quando $d = 2$, tem-se

$$\lim_{\varepsilon \to 0} N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^2 = 1, \tag{3.12}$$

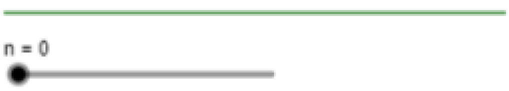
Assim, para o plano, temos que o único número positivo no qual existe o limite é $d = 2$.

Do mesmo modo, temos que para o cubo $C = [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^3$, se $d = 3$.

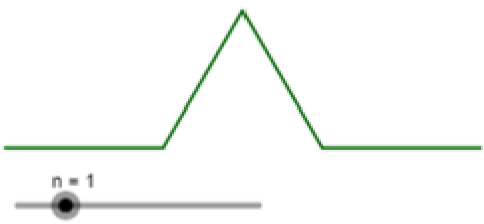
$$\lim_{\varepsilon \to 0} N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^d = 1, \tag{3.13}$$

$N(\varepsilon) \approx \frac{1}{\varepsilon^3}$ e realizando as mesmas operações tem-se que $d = 3$ é o único número positivo tal que $\lim_{\varepsilon \to 0} N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^3 = 1$.

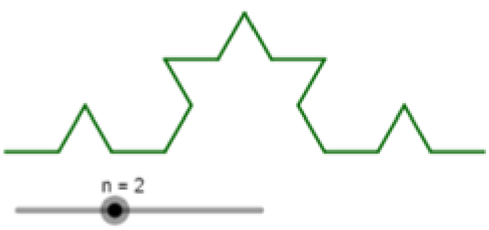
Após a exposição acima, iremos aplicar a referida ferramenta à curva de Koch. Assim, dado um $\varepsilon > 0$ arbitrário, será calculado o número de intervalos $N(\varepsilon)$, de tamanho ε que cobrem a curva.



$\varepsilon = 1, \quad N(\varepsilon) = 1$



$\varepsilon = \frac{1}{3}, \quad N(\varepsilon) = 4$



$\varepsilon = \frac{1}{9}, \quad N(\varepsilon) = 4^2$

Na k-ésima iteração, isto é, quando $n = k$

$$\varepsilon_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k, \; N(\varepsilon) = 4^k \tag{3.14}$$

Note que $k \to \infty$ e $\varepsilon_k \to 0$. Logo,

$$\lim_{k \to \infty} N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^d = \lim_{k \to \infty} 4^k \cdot \left(\left(\frac{1}{3}\right)^k\right)^d = \begin{cases} 0, & \text{se } d > \frac{\ln 4}{\ln 3}\,; \\ \infty, & \text{se } d < \frac{\ln 4}{\ln 3}\,. \end{cases} \tag{3.15}$$

Apenas para $d = \frac{\ln 4}{\ln 3}$ temos

$$\lim_{\varepsilon \to 0} N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^d = 1. \tag{3.16}$$

Logo, a dimensão da curva de Koch é

$$\frac{\ln 4}{\ln 3} \tag{3.17}$$

Triângulo de Sierpinski

O Triângulo de Sierpinski leva este nome em homenagem a Waclaw Sierpinski (1882 - 1969), matemático polonês que o definiu. É obtido por meio de um processo iterativo de divisão de um triângulo equilátero em quatro triângulos semelhantes. Sua construção básica começa com um triângulo equilátero, totalmente preenchido, vide Figura 6 - (n = 0).

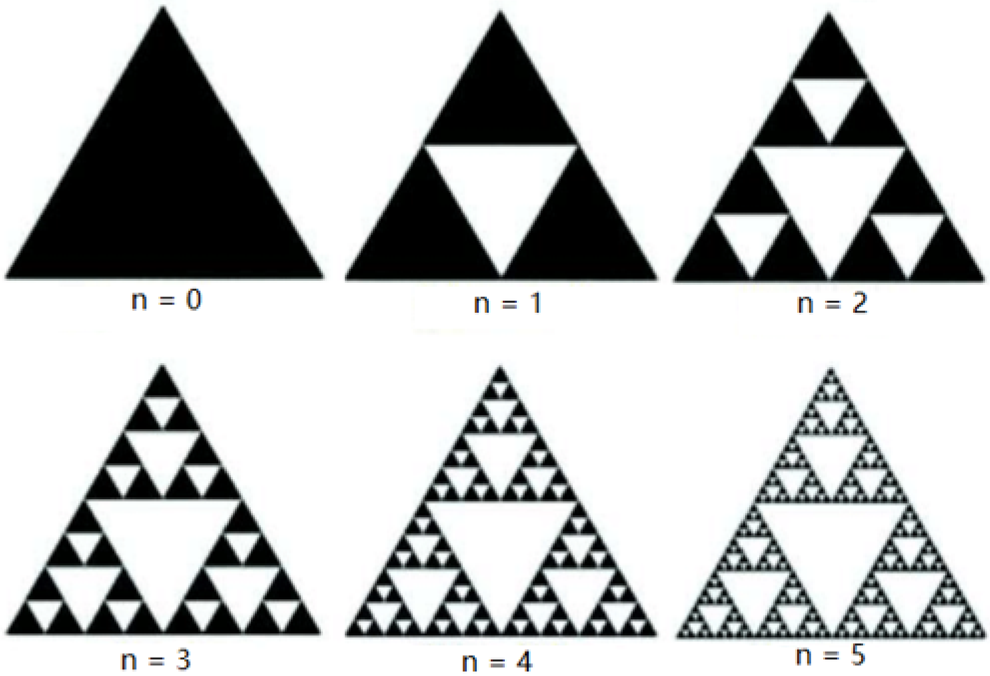
(a) Inicialmente toma-se os pontos médios dos três segmentos que delimitam o triângulo;

(b) ligam-se esses três pontos médios e obtém-se quatro triângulos, cujo lado é a metade do lado do triângulo inicial e a área é $1/4$ da área do triângulo original;

(c) Em seguida, retira-se o triângulo central, concluindo-se assim a primeira iterada do processo básico de construção.

Repete-se, com cada um destes três triângulos, o procedimento anteriormente descrito. Desta maneira, começando-se com um único triângulo, geram-se, sequencialmente, $3, 9, 27, 81, \ldots$ triângulos, correspondentes aos níveis $1, 2, 3, 4, \ldots$ respectivamente, conforme mostra a Figura 6. A continuidade da construção da curva, fazendo-se n tender a infinito, resultará no triângulo de Sierpinski, que é um fractal.

Figura 6 – Figura inicial e primeiras cinco iterações da construção do Triângulo de Sierpinski.



Fonte: Elaborado pela autora

O triângulo de Sierpinski, por ter auto-similaridade, pode ter sua dimensão fractal calculada tal como foi feito na curva de Koch. Tem-se que o coeficiente de redução $\varepsilon = 1/2$, pois o comprimento do lado de cada triângulo é reduzido, em cada nível, à metade. O número de elementos gerados em cada iteração é $N = 3$, uma vez que o número de triângulos é triplicado de um nível para outro. Assim, calculamos a dimensão fractal do triângulo de Sierpinski como segue:

$$1 = 3^k \cdot \left(\frac{1}{2^k}\right)^d \longrightarrow d = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,5849\ldots \tag{3.18}$$

A dimensão calculada, $d \approx 1,58$, indica que o triângulo de Sierpinski ocupa mais espaço que uma curva e menos espaço que uma figura bidimensional convencional, como um triângulo cheio.

Quando o fractal não apresenta auto-similaridade estrita, torna-se difícil ou muitas vezes impossível o cálculo de sua dimensão através do procedimento descrito acima, devido às irregularidades que um fractal comumente apresenta. Nesse caso, outros métodos tais como o de Contagem de Caixas ou de Hausdorff-Besicovitch se tornam alternativas viáveis.

Fractais constituem padrões ou formas cujas partes ressoam no todo. Podem ser representados por objetos geométricos divisíveis em partes que, por sua vez, são similares ao formato original. Possuem detalhamento infinito, pois cada uma das partes pode ser dividida em sub-partes que mantêm a geometria inicial. Assim, os fractais podem ser obtidos por meio da repetição de um padrão geométrico, mediante um processo iterativo.

Os fractais podem apresentar uma infinidade de formas diferentes, não existindo uma aparência consensual. Contudo, as principais propriedades que caracterizam e permitem definir os conjuntos fractais são: a autossemelhança, a complexidade infinita, e a sua dimensão fracionária.

A autossemelhança é identificada quando uma porção, de uma figura ou de um contorno, pode ser vista como uma réplica do todo, a qualquer escala que seja ampliada ou reduzida, isto é, o objeto permanece invariante sob transformações de escala. Informalmente, dizemos que uma figura é autossemelhante se partes dessa figura são semelhantes à figura vista como um todo.

A complexidade infinita refere-se ao fato de que o processo de geração de uma figura ser recursivo. Isso significa que nunca conseguiremos representá-los completamente, uma vez que a quantidade de detalhes é infinita. Sempre existirão reentrâncias e saliências cada vez menores, conforme se observa na Figura 6.

Em se tratando de objetos fractais, nem comprimento nem área servem para medir seus tamanhos. Os fractais são "mais" do que linhas, e "menos" do que superfícies. O que podemos medir é um número que caracteriza o grau de desordem de um fractal, conhecido como dimensão fractal. Nesse caso, trata-se de uma quantidade que pode ser fracionária, representando o grau de ocupação da estrutura no espaço que a contém.

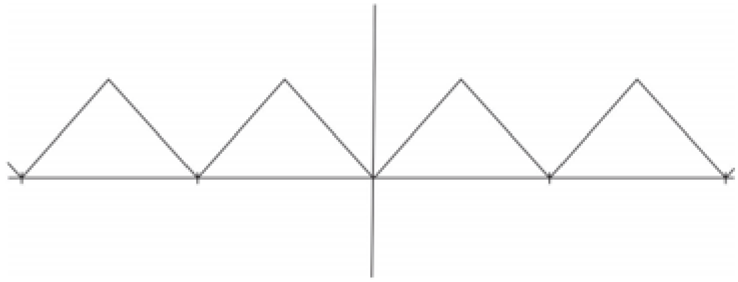
3.2.3 Funções contínuas não-diferenciáveis

O conceito de função contínua foi formalizado pelo matemático frânces Augustin Cauchy (1821). Ele definiu que uma função $f(x)$ é contínua se um acréscimo infinitamente pequeno da variável x resultar num crescimento infinitamente pequeno da própria função.

No estudo de derivada, a noção de continuidade estará sempre presente. Efetivamente, o fato de uma função ter derivada num ponto implicará na continuidade dela nesse ponto. No entanto, a continuidade não implicará em diferenciabilidade.

Intuitivamente, em $\mathbb{R}$ uma função contínua é derivável em um ponto se existir uma única reta tangente ao gráfico da mesma no ponto. No entanto, é possível construirmos uma função contínua que não admite derivada em um determinado ponto. Mais, ainda é possível construir uma função contínua que admite um número finito de pontos sem derivadas, vide Figura 7.

Figura 7 – Exemplo de função não diferenciável em alguns pontos.



Fonte: Acervo da autora

Nesse contexto, uma questão natural é a seguinte:

"Existe uma função contínua sem derivada em todos os pontos?"

Alguns matemáticos como A. M. Àmpere (1806), Duhamel (1856) e J. Bertrand (1864), acreditando que as funções contínuas tinham derivadas num número significativo de pontos, chegaram a dar justificativas teóricas deste fato, certamente erradas.

Em 1872, Karl Weierstrass (1815-1897) relata em um artigo que o matemático alemão Riemann (1826-1866), em 1861, havia introduzido a função contínua

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2} \tag{3.19}$$

como um exemplo de uma função contínua que não possui derivada em ponto algum. Não tendo conseguido demonstrar este fato, Weierstrass construiu o seu próprio exemplo:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x) \tag{3.20}$$

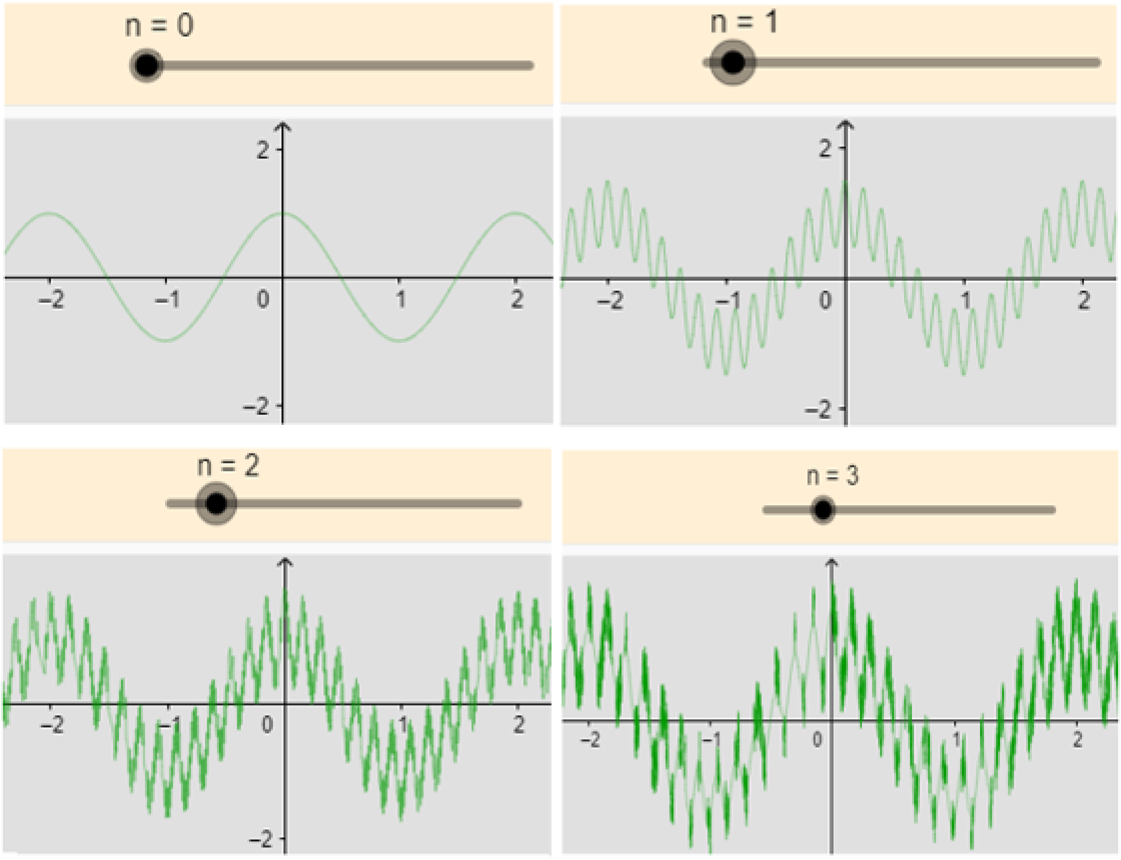
onde, $a \in (0, 1)$, b é um inteiro ímpar com $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$.

As funções de Weierstrass e Riemann são de caráter analítico, ou seja, existe uma fórmula explícita para cada uma delas. Essas fórmulas são definidas por séries infinitas de funções, o que torna difícil compreender geometricamente as razões pelas quais os gráficos não têm tangente em todos os pontos. Observando o gráfico mostrado na Figura 7 podemos notar que os pontos onde f não é derivável, são justamente os pontos no qual o gráfico apresenta "bicos", já que neles é impossível traçar uma reta tangente. Logo, construir funções contínuas não deriváveis em nenhum de seus pontos é construir funções cujo gráficos possuem "bicos" em todos os pontos.

Observe tal fato nos gráficos das somas parciais da função de Weierstrass, para $a = \left(\frac{1}{2}\right)$ e $b = 15$, Figura 8.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos(15^n \pi x) \tag{3.21}$$

Figura 8 – Gráficos das somas parciais da função de Weierstrass, para $a = (1/2)$ e $b = 15$



.

Fonte: Acervo da autora

Note que o gráfico dessa função a cada soma parcial apresenta mais pontos onde f não é derivável. Ao passar o limite quando $n \to \infty$, f não vai possuir derivada em nenhum ponto.

Apesar de nunca ser diferenciável, a função é contínua. Considerando que $a \in (0, 1)$, então

$$|f(x)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a^n| \cdot |\cos(b^n \pi x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \tag{3.22}$$

Logo, como cada termo $a^n \cos(b^n \pi x)$ é contínua em x e a série é majorada por $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$. Ela converge uniformemente e por isso é contínua.

O gráfico da função de Weierstrass foi um dos primeiros fractais estudados, embora esse termo só tenha sido usado muito mais tarde. Como outros fractais, a função exibe auto-similaridade. Se fizermos uma transformação de escala $x \to bx$, teremos:

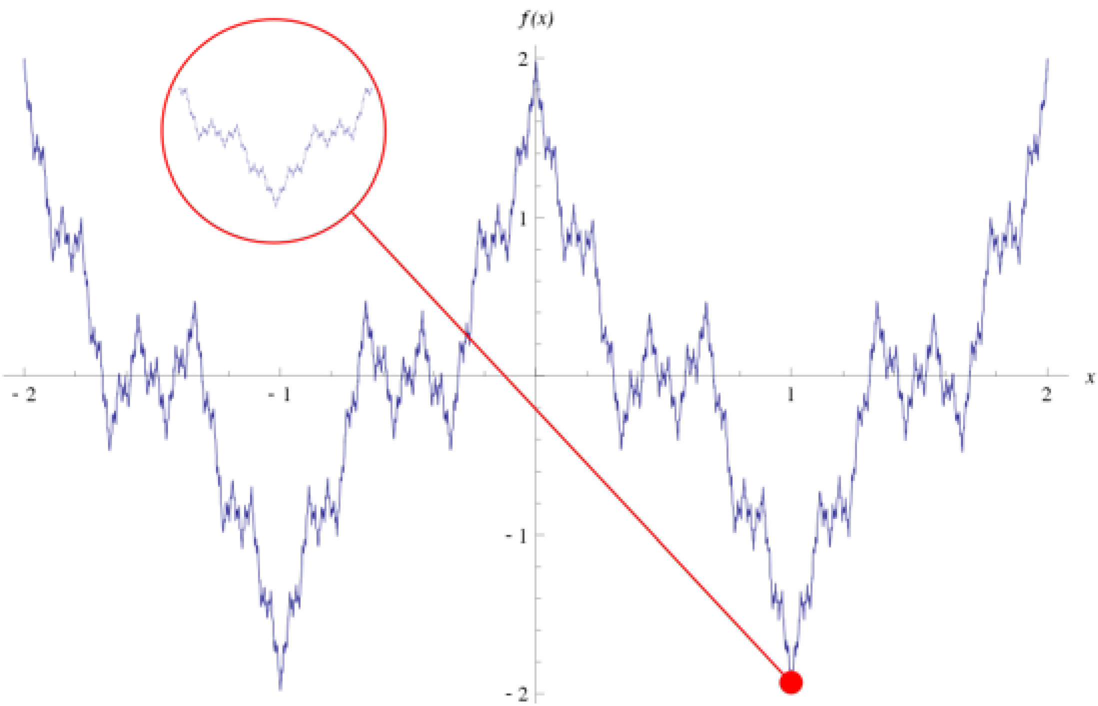
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1} \cos(b^{n+1}\pi x) = \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x) \\ &= \frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x) - \frac{\cos(\pi x)}{a} \end{aligned} \tag{3.23}$$

Portanto,

$$f(bx) = \frac{f(x)}{a} - \frac{\cos(\pi x)}{a} \tag{3.24}$$

Após esta transformação, pode-se ver que o gráfico da função difere do gráfico original por uma função contínua $\left(\frac{\cos(\pi x)}{a}\right)$ e por um coeficiente de redução $\frac{1}{a}$. Como consequência, o gráfico de $f(x)$ é auto-similar, tendo assim, um comportamento fractal. A função tem detalhes em todos os níveis. Pode-se observar no gráfico de f repetições de padrões, o que o caracteriza como uma estrutura fractal. Ampliando uma parte da curva, fica claro que ela está ficando cada vez mais perto de uma linha reta. Em vez disso, entre dois pontos quaisquer, não importa o quão próximos, a função é semelhante ao gráfico global, veja Figura 9.

Figura 9 – Autossimilaridade do gráfico da função de Weierstrass



.

Fonte: <https://en.wikipedia.org/wiki/File:WeierstrassFunction.svg>. Acesso em 03 jun 2021.

3.3 Teoria do Caos

Um dos desenvolvimentos mais importantes das últimas décadas foi a descoberta e estudo do chamado **comportamento caótico de sistemas dinâmicos não lineares**. Segundo Gleick e Berry (1987), Caos é o estudo de sistemas dinâmicos não-lineares complexos. O termo complexo deriva do comportamento não-linear que exige sofisticados recursos matemáticos para sua avaliação, e dinâmico, implica na existência de um sistema não constante e não periódico, ou seja, um sistema em constante evolução. Mais precisamente, sistemas caóticos, são sistemas no qual uma pequena perturbação na sua condição inicial, não importando quão pequena seja, levará rapidamente a uma grande diferença no estado final, fazendo com que a previsão do futuro torne-se muito difícil. Porém, compreendendo o comportamento caótico, muitas vezes é possível entender como o sistema irá se comportar como um todo ao longo do tempo. Essa teoria enfatiza que sistemas não-lineares complexos são praticamente imprevisíveis através de equações exatas, mas possíveis através de representações do comportamento do sistema como um todo.

Como a não-linearidade pressupõe um comportamento altamente complexo, constatou-se que modelos de natureza linear não têm capacidade de estudar, segundo Santos et al. (2005), as incertezas presentes nas séries financeiras. Por esse motivo, estudiosos começaram a utilizar metodologias não-lineares de previsão quando o assunto for mercado financeiro. Dessa forma é possível descrever, com maior exatidão, o comportamento das séries financeiras.

Prigogine e Ferreira (2002), associa o caos à instabilidade dos fenômenos da natureza. As leis da natureza, diante da teoria do caos, se tornam essencialmente probabilísticas, eliminando a necessidade de tentar associá-las invariavelmente a um sistema determinista. Essa seria a razão para que o estudo do caos se fizesse interessante: a possibilidade de identificar, e explicar, flutuações nos mercados que parecem ser aletórios.

Diz-se que um sistema determinístico apresenta comportamento caótico se aparentemente apresentar comportamento aleatório. Assim, a previsão do estado futuro no longo prazo é praticamente impossível, porém, o mesmo não se pode dizer para o curto prazo. Para Stacey (2016), um sistema caótico não é sinônimo de desordem absoluta, mas, sim, significa que é um sistema guiado por certos tipos de leis ordenadas que apresentam a propriedade de se comportarem de maneira aleatória, o que torna um sistema caótico completamente imprevisível no longo prazo.

Outra característica dos sistemas caóticos é a presença de atratores estranhos. Um atrator de um sistema dinâmico é uma situação para a qual muitos de seus possíveis estados iniciais tendem, após um tempo suficientemente longo. Em um atrator estranho, pontos inicialmente próximos se separarão exponencialmente depois de um intervalo de tempo suficientemente longo. Alguns atratores estranhos possuem estrutura fractal.

De acordo com Gleiser (2002) os termos Caos e Complexidade são fenômenos interconectados, contudo distintos. A Complexidade compreende o estudo de como um sistema de equações muito complicadas pode gerar padrões de comportamento relativamente simples para determinados valores dos parâmetros. Por sua vez, a Teoria do Caos estuda como equações não-lineares simples podem gerar um comportamento complexo. Dessa forma, verifica-se que o Caos não é equivalente à Complexidade.

Lorenz (1996, p. 209) referenciado por Matias (2006) argumenta que os fractais têm pouco a ver com a teoria do caos, sob o ponto de vista da aleatoriedade. Por outro lado, a geometria fractal foi amplamente adotada como ferramenta matemática pela teoria do caos a partir da década de 1980 (MANDELBROT, 1997 apud MATIAS, 2006).

Percebe-se então uma forte associação entre os conceitos de fractalidade, de caos, de complexidade e de não-linearidade. Diante de uma série temporal de preços, pode-se evidenciar, portanto, padrões não-lineares de comportamento com características fractais, na qual a identificação de atratores estranhos (razões diferentes de mudanças de escalas no tempo) é necessária para a compreensão do padrão fractal e para a realização de projeções, as quais poderão ser modeladas a partir da geração de equações matemáticas complexas.

A Teoria do Caos tem demonstrado que sistemas de grande interesse como a economia são caóticos em sua essência.

3.4 Evidências da Fractalidade em Informações Financeiras

Na década de 1960, acadêmicos ligados à área de Finanças, após vários estudos, chegaram à conclusão de que as flutuações no mercado eram regidas por processos puramente aleatórios. A partir daí, foi gerado um grande número de modelos baseados na chamada "Hipótese de Mercado Eficiente", cujas premissas já foram abordadas. Diversas instabilidades observadas no mercado financeiro levaram ao questionamento de tal paradigma. Segundo Santos et al. (2005) o conceito de mercado eficiente é fundamental no que tange ao debate relacionado à previsão do mercado, porque, caso não exista padrão na formação dos valores, ou seja, se o mercado é eficiente na sua formação de preço, não é possível prevê-lo.

Estudos recentes têm levado em consideração as relações não lineares entre as variáveis financeiras e os complexos mecanismos de realimentação do sistema. De acordo com estes estudos, as séries temporais[4] de valores de ações têm componentes tanto deterministas - gerados por leis caóticas vindas da infra-estrutura do mercado - quanto componentes randômicos, ligados à constante chegada de informações aos agentes.

Savit (1989), acredita que muitas sequências de dados financeiros podem ser melhor compreendidas com técnicas de análise não linear, inclusive Teoria do Caos, e que estas técnicas podem melhorar as previsões de curto prazo e as estratégias de análise de investimento.

Larrain (1991) trabalhou com os conceitos de fractais, caos, não-linearidade e complexidade. O autor estudou o comportamento dos títulos do tesouro norte-americano, concluindo que a ideia de Caos não é a única resposta para a volatilidade dos mercados financeiros, mas também não pode ser descartada. O trabalho sugere que, na prática, coexistem estruturas não lineares com estruturas macroeconômicas bem comportadas. Na medida em que as características não-lineares se sobrepõem sobre a influência dos fatores fundamentais, a estrutura dinâmica fica mais predisposta a oscilações e mudanças abruptas de preços. Concluiu que esses fatores

[4] Uma série temporal é uma sequência de observações em intervalos de tempo regularmente espaçados. Podendo ser diariamente (preço de ações, relatórios meteorológicos), mensalmente (taxa de desemprego, IPC), trimestralmente (PIB), etc. As observações vizinhas são dependentes e o interesse é analisar e modelar tal dependência.

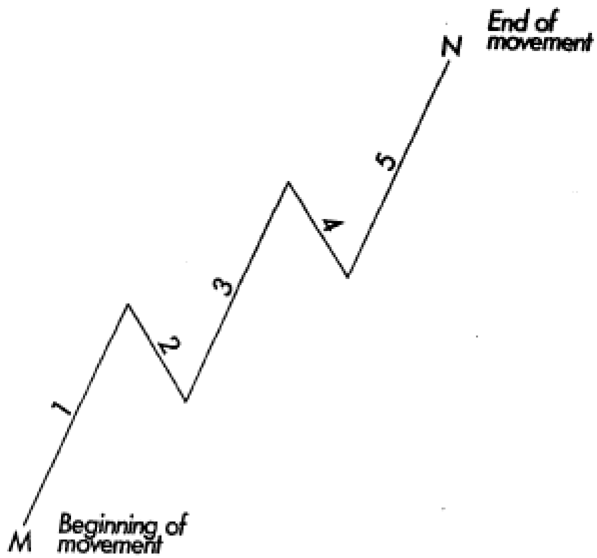
(não-linearidades) são necessários, porém não suficientes para afirmar que a estrutura seja caótica ou fractal.

De acordo com Matias (2006), Müller et al. (1993) encontraram propriedades fractais em séries temporais de taxas de câmbio, inclusive identificando o fator de escala seguido pelos preços, a partir da análise dos intervalos de tempo desde poucos minutos até um ano. Os autores verificaram que as mudanças no comportamento dos preços se assemelham mais ao modelo fractal.

Os fractais podem representar graficamente o comportamento do preço de ativos financeiros ao longo do tempo. Dessa forma, as flutuações de preços de ativos poderiam ser modeladas pelos fractais, que, por meio do processo iterativo, conseguiriam simular situações extremamente turbulentas do mercado, dificilmente projetadas pela teoria tradicional de finanças.

Ralph Elliott[5], publicou em 1938 um ensaio denominado “The Wave Principle” (O Princípio da Onda), no qual destacava que o comportamento de preços das ações se dava em grandes ciclos atrelados ao tempo, nos quais era possível distinguir cinco movimentos básicos (Figura 10). Identificou que, no transcorrer de um ciclo, os cinco padrões principais se repetiam em escalas cada vez menores (Figura 11), apresentando padrões de auto-similaridade característicos das figuras fractais.

Figura 10 – Movimento completo de cinco ondas descrito por Elliott.

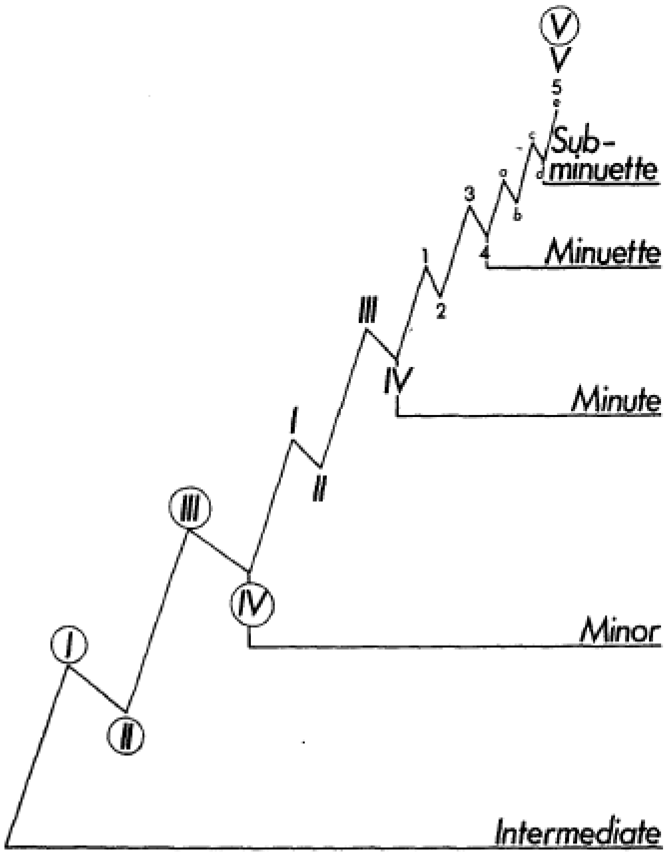


Fonte: PRECHTER, R. R. The major works of R. N. Elliott. 1990.

Corazza, Malliaris e Nardelli (1997) pesquisaram preços de futuros de commodities negociados na bolsa de Chicago. Os autores aplicaram alguns testes, cujo resultado indica que a

[5] Ralph Nelson Elliott era um contador americano, cujo estudo dos dados do mercado de ações o levou a desenvolver o Wave Principle, uma forma de análise técnica que identifica tendências nos mercados financeiros.

Figura 11 – Característica fractal do comportamento de preços.



Fonte: PRECHTER, R. R. The major works of R. N. Elliott. 1990.

série histórica corresponde às propriedades fractais.

Barkoulas, Labys e Onochie (1997) analisaram séries temporais mensais do período entre 1960 e 1994 de 21 commodities, em busca de evidências de dependência e memória de longo-prazo. Os autores confirmaram a presença de fractalidade nas séries temporais e a indicação de processos não lineares, caracterizadas como flutuações cíclicas irregulares.

De acordo com Silva, Matias e Vieira (2010), Di Matteo et al (2005) estudaram empiricamente as propriedades de escala de 29 taxas de câmbio diárias, 32 índices do mercado financeiro e 28 instrumentos de renda fixa, pelo período aproximado de 10 anos. Partindo de estudos prévios que pressupõem a heterogeneidade dos mercados financeiros, os autores analisaram o grau de fractalidade de mercados desenvolvidos e emergentes para atestar se estes mercados apresentam diferenças. Concluíram que todos os mercados financeiros mundiais apresentam simetria de escala, com características fractais que os distinguem.

Todas essas evidências sugerem o debate sobre a eficiência dos preços e a racionalidade do mercado. As Teorias do Caos e da Complexidade, associada às Finanças Comportamentais, têm muito a contribuir para a evolução do consenso vigente nos Mercados Financeiros, auxiliando em sua compreensão e até mesmo na predição de seu comportamento.

3.5 Teoria do Caos e a Previsibilidade do Mercado de Capitais

A partir da década de 1990, graças aos conceitos retirados da Teoria do Caos, uma parcela considerável dos trabalhos relacionados à previsibilidade do mercado de capitais tomou novo rumo. Tais conceitos, como dependência sensível das condições iniciais, sistemas dinâmicos não-lineares, atratores e bifurcações, começaram a ser utilizados para explicar a dinâmica deste mercado, tendo em vista a não linearidade encontrada em séries temporais referentes ao mercado financeiro nos estudos já realizados sobre este assunto. Contrária a Hipótese de Mercado Eficiente, a teoria dos fractais pressupõe que o mercado possui memória de curto e longo prazo (MANDELBROT, 1997) e que experiências anteriores exercem significativa influência sobre a tomada de decisão presente e sobre as expectativas futuras em relação ao risco e ao retorno de ativos financeiros.

Se os investidores reagissem imediatamente às novas informações com que se deparassem, os preços refletiriam imediatamente essas informações, de forma que os eventos passados não teriam influência sobre os futuros. Porém, se os investidores esperarem que essas informações se transformem em tendências de mercado, ou seja, se eles esperarem para descobrir o que os demais investidores farão diante dessas informações, elas passam a ter um período de memória, demorando um tempo para perder efeito. Este tempo de espera é o que causa erro sistemático no suposto passeio aleatório, fazendo com que a ocorrência passada acabe influenciando os acontecimentos futuros. Isso significa que um modelo estocástico estacionário, nos quais sempre as mesmas variáveis são relevantes, não traduzem a melhor forma de se modelar o mercado.

Apesar de tantas afirmações que indicam os modelos não lineares como os mais adequados no estudo do mercado de valores, é preciso salientar que, de acordo com Santos et al. (2005), apesar da clara evidência de não linearidade nos dados que fazem parte da amostra, a utilização deste tipo de modelos não possibilita previsões mais apuradas com relação aos dados de fora da amostra.

Outro ponto que merece destaque é o fato de que, segundo Ramsey (1996), a utilização das metodologias não lineares leva a um bom ajustamento da série temporal, porém este nem sempre caracteriza uma boa previsão. Esta afirmação implica que os modelos não lineares podem levar a grandes erros de previsão causados por sua sobre-especialização, ou sobre-ajustamento em relação à série temporal, ou ainda, em consequência da sua enorme sensibilidade em relação a valores iniciais.

A Teoria do Caos pode significar uma importante quebra de paradigma na evolução do pensamento científico. Ela, quando aplicada ao campo das finanças, revela-se muito mais como uma forma de colocar em xeque as teorias existentes e lançar um novo olhar sobre a realidade do que como uma ferramenta de previsão. Assim, o valor da Teoria do Caos não é a capacidade de previsão, mas a possibilidade de melhor entender a complexidade do sistema.

4 ABORDAGEM EM SALA DE AULA

Conforme mencionado, este trabalho tem por finalidade apresentar e discutir aspectos históricos e modernos da Matemática Financeira, tendo como ponto de partida o interesse em contribuir para que as escolas básicas, por meio dos Professores de matemática, possam ter subsídios na abordagem desse assunto em sala de aula. Sabemos que a partir de 2020 todas as escolas deverão, obrigatoriamente, trabalhar conceitos de educação financeira. Por outro lado, para que a implementação dessa temática seja bem sucedida, será necessário ter uma boa base nos conceitos que dizem respeito à matemática financeira.

A atuação como docente me permitiu verificar uma série de desafios por trás da implantação dessa proposta de ensino, tais como a capacitação dos professores e criação de recursos didáticos. Nós só podemos ensinar aquilo que sabemos e o segundo desafio pode ser mitigado perante a proposição de material de apoio que possibilite abordar a temática de forma lúdica e contextualizada à realidade do estudante.

Pretende-se neste capítulo, discutir algumas estratégias, metodologias de ensino e recursos didáticos podem favorecer o processo de aprendizagem nos dias atuais. A partir da discussão, propor uma possibilidade de criação de recurso educacional para uso em sala de aula.

4.1 Contextualização à Realidade do Estudante

O termo **contextualização** se refere a tornar o ensino adequado à realidade em que os alunos estão inseridos, propõe relacionar os conteúdos escolares a diferentes contextos de sua produção, apropriação e utilização, (KATO; KAWASAKI, 2011, p. 36)

Os alunos de hoje são nativos da linguagem digital dos computadores, videogames e Internet. Eles nunca experimentaram um mundo sem Internet, celulares, tablets, smartphones, redes sociais e plataformas digitais. Levando-se em conta tal condição, faz-se necessário que professores incorporem, na sua atividade docente, práticas que incluam o ambiente digital como meio alternativo/complementar para trabalhar com seus alunos. Sendo assim, o grande desafio do docente passa a ser organizar os processos de forma que seus alunos adquiram as competências necessárias para viver e trabalhar na sociedade baseada numa nova cultura de aprendizagem.

Segundo Thomas e Brown (2011) referenciados por Giraffa (2013), a nova cultura de aprendizagem mediada pelas tecnologias digitais incorpora no processo de ensinar e de aprender um novo e importante componente: o ambiente digital. Baseado nessa concepção, começaram a surgir iniciativas governamentais para favorecer o uso das tecnologias nas escolas brasileiras. Diversos programas foram criados com o intuito de capacitar professores para trabalhar com informática educacional.

> Em nível nacional, uma das primeiras ações no sentido de estimular e promover a implementação do uso de tecnologia informática nas escolas brasileiras ocorreu em 1981 com a realização do I Seminário Nacional de Informática Educativa, onde estiveram presentes educadores de diversos estados brasileiros. Foi a partir desse evento que surgiram projetos como: Educom, Formar e Proninfe. (BORBA; PENTEADO, 2001, p. 19)

Posteriormente, outros programas foram criados, objetivando promover a inclusão digital pedagógica: Programa um computador por aluno (PROUCA)[1] e Programa Nacional de Tecnologia Educacional (Proinfo)[2] Conforme o site do FNDE[3], em 2013 uma ação promovida pelo programa Proinfo Integrado foi a distribuição do tablet educacional. Esses tablets foram entregues nas escolas públicas para alunos e professores, trazendo conteúdos educativos pré-instalados, tais como: conteúdo Portal do Professor MEC, Portal Domínio Público, Khan Academy, Projetos de Aprendizagem Educacionais (Banco Internacional de Objetos Educacionais – MEC) e Coleção Educadores.

Diante do apresentado, entende-se que essas ações aconteceram porque as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) estão presentes em diversos setores da sociedade, cada vez mais veloz, contribuindo para as mudanças no comportamento das pessoas, em especial dos jovens, atuais alunos da educação básica.

A tecnologia é citada ao longo da BNCC diversas vezes, mostrando-se presente nas mais diversas disciplinas. Os professores são estimulados a utilizá-la de maneira a incentivar a criatividade, o pensamento lógico, a cooperação, a linguagem e o pensamento crítico. Por outro lado, os alunos que frequentam escolas públicas e privadas cada vez mais possuem acesso à Internet e, por consequência, acesso a diferentes serviços associados à grande rede.

Um dos princípios que favorece a implementação da tecnologia em sala de aula é a chamada metodologia ativa. Com técnicas como o ensino híbrido, a gamificação e a sala de aula invertida.

4.1.1 Gamificação na educação

A gamificação não é um conceito novo. Muito difundida atualmente, ela tem se tornado uma ferramenta de aprendizagem e treinamento cada vez mais utilizada.

Por definição, é a utilização de elementos de jogos e game design fora do contexto de jogos (GRIFFIN, Daniel, 2014). São utilizados componentes de jogos (como promover disputas com pontos, rankings, prêmios e qualquer elemento da mecânica de jogo) para diferentes atividades, tornando-as mais divertidas e promovendo o engajamento. Além disso, encoraja

[1] Disponível em: <https://www.fnde.gov.br/index.php/programas/proinfo/eixos-de-atuacao/programa-um-computador-por-aluno-prouca>. Acesso em 17 mar. 2021.

[2] Disponível em:<https://www.fnde.gov.br/programas/proinfo>. Acesso em 17 mar. 2021.

[3] Disponível em: <https://www.fnde.gov.br/index.php/acesso-a-informacao/institucional/area-de-imprensa/noticias/item/3917-ministro-entrega-tablets-e-tem-in%C3%ADcio-a-forma%C3%A7%C3%A3o-de-coordenadores> Acesso em 17 mar. 2021.

outros atributos que são considerados importantes dentro do processo de ensino e aprendizagem, como a competitividade, colaboração, possibilidade de aprender com as próprias escolhas, entre outros.

Na educação, o potencial da gamificação é imenso: ela funciona para despertar interesse, aumentar a participação, desenvolver criatividade e autonomia, promover diálogo e resolver situações-problema. O uso de tal metodologia promove entusiasmo, concentração, motivação e implica na melhoria da construção do conhecimento, motivando o processo de ensino e aprendizagem.

Contudo, acerca das possibilidades, existem vários gêneros, que especificam como será a interação do jogador com o jogo, podendo ser classificados como: ação, adivinhação, aventura, corrida, estratégia, quiz game, simulação, entre outros.

4.2 Proposta de Material Didático

Diante do exposto na seção anterior, propõe-se a criação de um quiz game como recurso educacional na abordagem dos assuntos suscitados neste trabalho, com intuito de auxiliar no processo de aprendizagem.

4.2.1 Quiz game

Um quiz game é um jogo interativo composto por perguntas e múltiplas respostas com tempo determinado para ser feita a resolução. Esse tipo de jogo possibilita uma experiência divertida por meio da competição e estimula a construção de conhecimento colaborativo, de forma que é possível avaliar a aprendizagem do conteúdo transmitido de maneira lúdica. Além de ser uma atividade benéfica, eficaz e motivadora, possibilita a participação ativa dos alunos.

Com base nisso, optamos pela ferramenta Kahoot! para construção de um quiz game contendo perguntas correspondentes aos assuntos desenvolvidos neste trabalho, ou seja, aspectos históricos e modernos da matemática financeira.

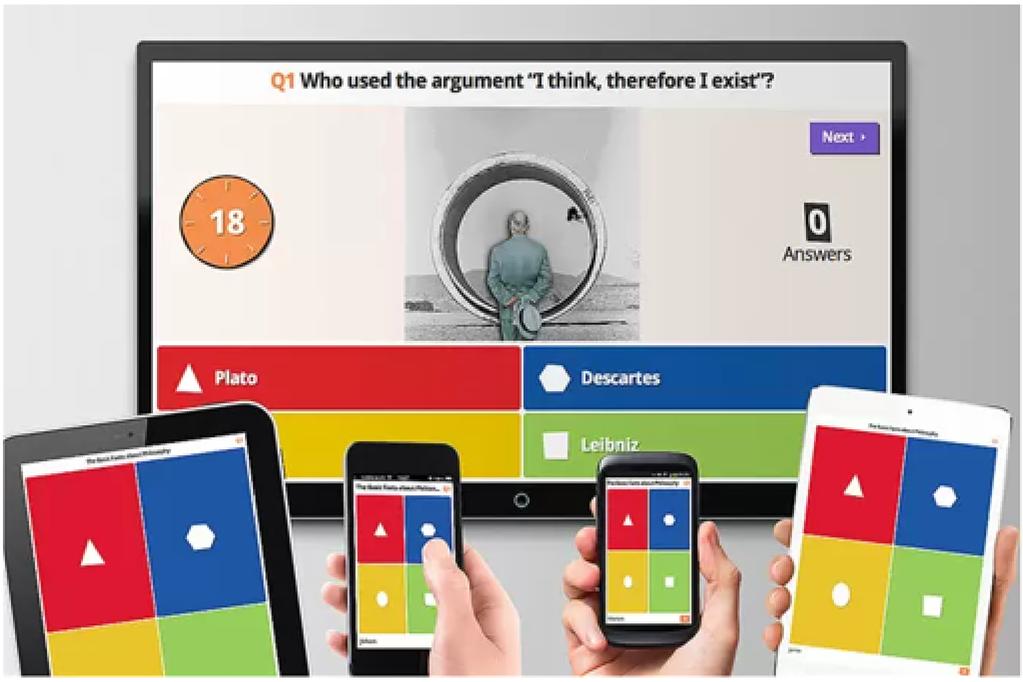
O Kahoot! é uma plataforma online desenvolvida no ano de 2012, que possibilita implementar atividades interativas entre o criador da atividade e pessoas que venham a acessá-la. É geralmente utilizado como recurso didático em escolas para revisar o conhecimento dos alunos, para avaliação formativa ou como uma pausa das atividades tradicionais da sala de aula. A ferramenta é gratuita para usuários comuns, estudantes e professores, e a partir do ano de 2020, passou a contar com versão em português para dispositivos móveis, aumentando, assim, a adesão de usuários ao redor do mundo.

O aplicativo foi projetado para aprendizado social, com alunos reunidos em torno de uma tela comum, como um quadro interativo, projetor ou monitor de computador. Pode também ser usado por meio de plataformas de videoconferência, tais como Zoom, Google Meet, Microsoft

Teams, e outros com a capacidade de compartilhamento de tela. Assim, podemos afirmar que o Kahoot propicia ao professor flexibilidade de utilização, podendo ser explorada tanto no ensino presencial, quanto no remoto.

O criador do jogo prepara seu quiz game contendo perguntas de determinado assunto escolhido e libera um código de acesso, denominado Game PIN ou um link, para que os jogadores possam se conectar ao ambiente de jogo. A pergunta e as alternativas são exibidas na tela do projetor e os alunos precisam escolher a resposta correta em seus smartphones, tablets ou computadores e geralmente têm um tempo limite para fazer isso. São contabilizados pontos para cada resposta correta e pontos extras para quem clicar mais rápido na resposta, (Figura 12).

Figura 12 – Exibição de questões do Kahoot



Fonte: <https://airmore.com/pt/aplicativos-educacionais-de-2017.html>. Acesso: 20 mar 2021

Durante a execução, ouve-se um som de contagem regressiva divertido, parecido com os sons de jogos de videogame. Quando o tempo proposto para resolução acaba, ouve-se som de gongo e é mostrado na tela o número de respostas certas e erradas dos jogadores. Em seguida é exibido um ranking de posições, listando o nome e os pontos obtidos pelos jogadores ou grupos.

A essência do Kahoot é ser um jogo de disputa saudável, que permite que os alunos não se intimidem em mostrar as suas dificuldades e que aprendam com a correção coletiva. Apresentamos, a seguir, um pequeno guia para uso do Kahoot! como possibilidade de recurso didático.

4.2.2 Recurso Didático

Antes de iniciar a construção do jogo, é necessário a elaboração de questões fundamentadas no assunto abordado. No Quadro 2 encontra-se uma pequena lista de questões elaboradas como exemplo. Posteriormente a escolha das questões, passa-se a etapa de inserção dessas na plataforma Kahoot.

Quadro 2 – Questões elaboradas para a construção do Quiz game.

Nº	**Questões**
01	Qualquer coisa pode ser moeda, desde que aceita como forma de pagamento?
02	As moedas e as notas usadas para realizar compras sempre existiram?
03	Quando ainda não existia dinheiro, como os homens faziam para adquirir produtos e mercadorias?
04	O nome da prática utilizada na antiguidade para comprar as coisas é:
05	Antes do dinheiro ser como o conhecemos, alguns diferentes materiais já foram considerados dinheiro na antiguidade. São eles:
06	O sal e o boi já foram usados como moedas de troca?
07	o custo do transporte e o risco de roubos eram problemas apresentados pela moeda metal?
08	Na Roma Antiga os soldados eram pagos através de uma quantidade de...
09	O valor do dinheiro muda de acordo com a época e com o país em que estamos?
10	Quem fabrica o dinheiro?
11	Também é considerado dinheiro na atualidade...
12	A moeda mais usada no mundo é:
13	Atualmente, Existem mais de 5000 moedas virtuais?
...	...

Fonte: Elaborada pela autora.

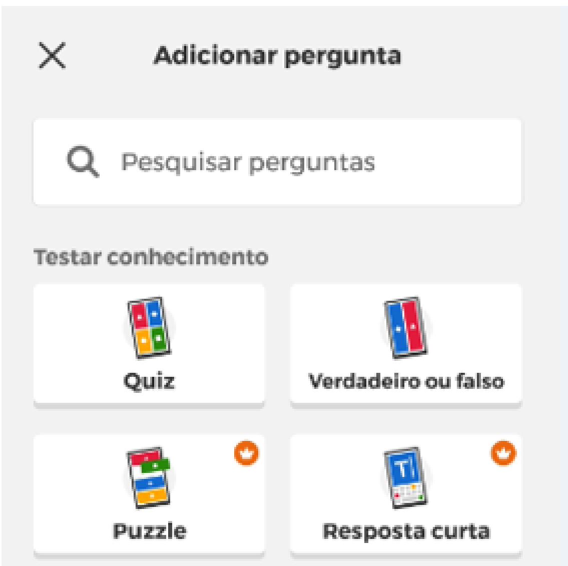
A construção do jogo é feita acessando a ferramenta em qualquer dispositivo eletrônico: celular, tablet ou computador. Para realizar o download acesse a loja de aplicativos oficial do seu celular. O kahoot está disponível para IOS e Android. Outra possibilidade é acessar e construir o que precisa através do site <https://kahoot.com/>. Para iniciar os trabalhos será preciso preencher um cadastro para utilizar algumas ferramentas gratuitas, conforme mostra a Figura 13.

Figura 13 – Acessando e criando conta

Fonte: Adaptado de <https://create.kahoot.it/>

Após o cadastro deve-se fazer o login na plataforma, o que possibilita escolha do tipo de questões a serem criadas. Você pode criar quiz, questões do tipo verdadeiro ou falso, puzzle (todo tipo de quebra-cabeças), resposta dissertativa curta e nuvem de palavras, como pode ser observado na Figura 14.

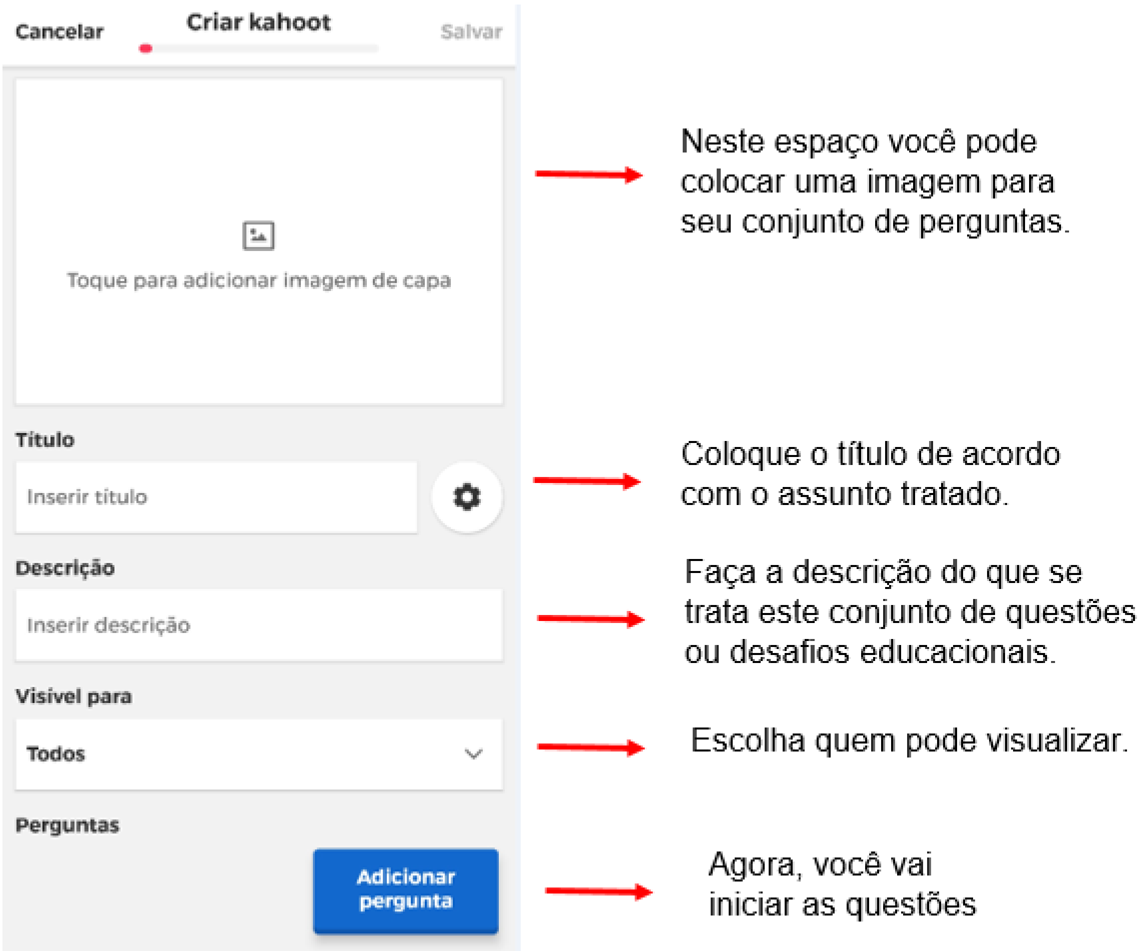
Figura 14 – Tipos de perguntas.



Fonte: Adaptado de <https://create.kahoot.it/>

Antes da criação do jogo, é necessário inserir as informações iniciais do quiz game, tais como o título, uma breve descrição do conteúdo abordado, uma imagem correspondente, o tipo de visualização, se todos podem ver ou somente o criador do quiz. Somente após essa configuração inicial será possível inserir as questões, conforme mostra a Figura 15

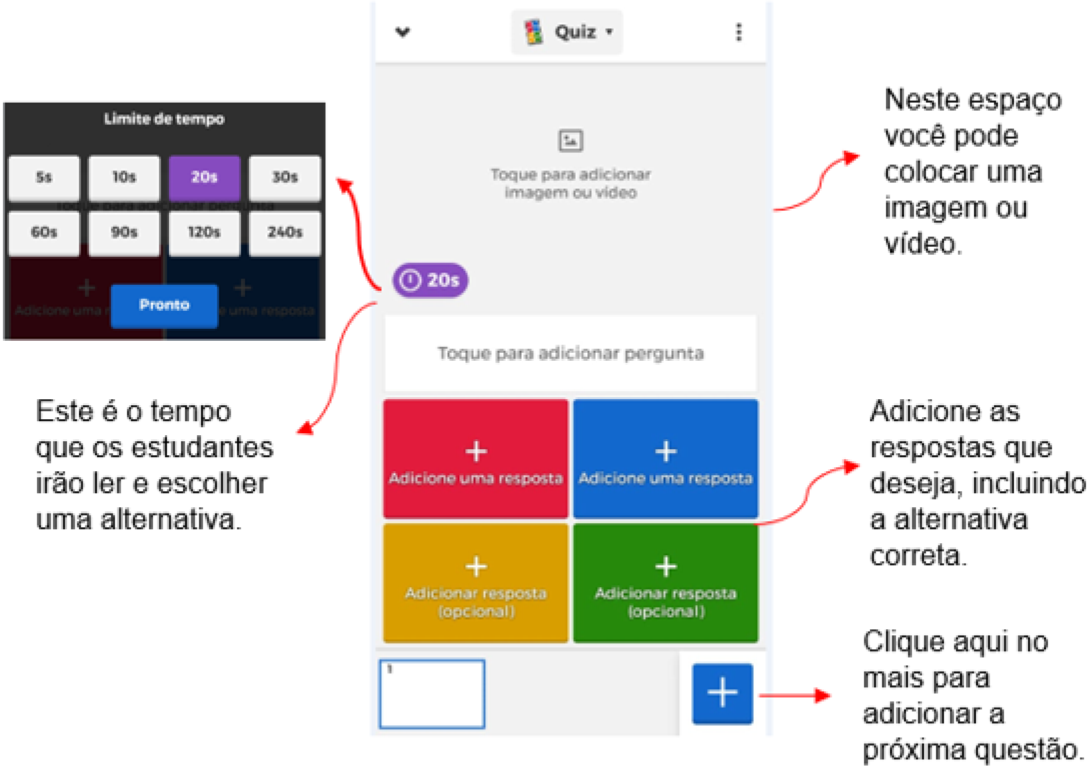
Figura 15 – Configuração inicial do quiz game.



Fonte: Adaptado de <https://create.kahoot.it/>

Ao clicar em adicionar pergunta, direciona-se para uma próxima tela onde serão inseridas as informações referentes à primeira questão, tais como o texto da pergunta, uma imagem ou vídeo correspondente, o tempo limite de resposta, se a pergunta irá valer pontos no jogo, as alternativas de respostas, identificando a alternativa correta e opcionalmente podem-se inserir informações correspondentes aos créditos da questão, podendo ser observado na Figura 16. Ao completar as informações, clica-se no sinal de mais, para inserir uma nova questão.

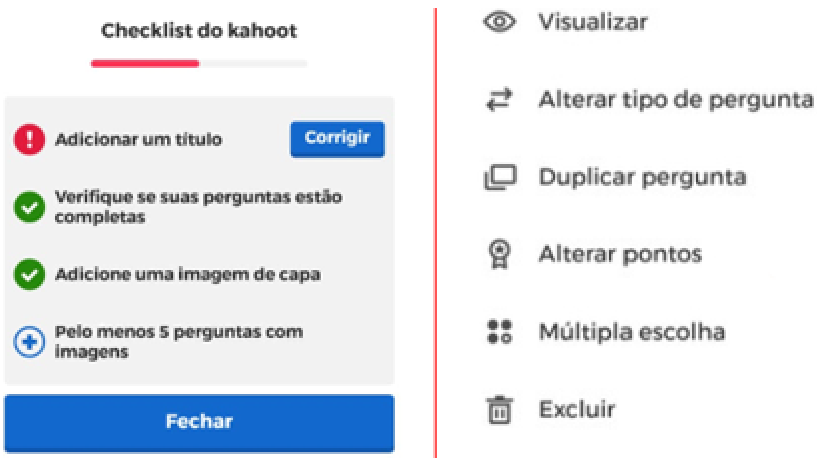
Figura 16 – Elaboração das questões.



Fonte: Adaptado de <https://create.kahoot.it/>

Depois de inseridas todas as questões que compõem o quiz game, pode-se salvar e finalizar a criação do questionário, passando para a parte de check list, como pode ser visto na Figura 17. Essa etapa é importante para certificar se tudo está certo antes de gerar o link que será compartilhado para os estudantes.

Figura 17 – Check List do questionário.



Fonte: Adaptado de <https://create.kahoot.it/>

Após realizar os ajustes finais, pode salvar e gerar o link para compartilhar o quiz, através de canais de comunicação, tais como e-mail e redes sociais.

O kahoot funciona como a gamificação da sua aula, dependerá da sua criatividade, empenho em envolver o lúdico no momento da interação e promover mais hipóteses no momento em que todos estão resolvendo os questionamentos. Para as aulas remotas pode ser transmitido online através do link que será compartilhado com a turma, esse link pode ser compartilhado individualmente, em grupo ou trabalhos em pares.

Referências

BARKOULAS, J.; LABYS, W. C.; ONOCHIE, J. Fractional dynamics in international commodity prices. *The Journal of Futures Markets (1986-1998)*, Wiley Periodicals Inc., v. 17, n. 2, p. 161, 1997. Citado na página 58.

BORBA, M. D. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e educação matemática*. [S.l.]: Autêntica Editora, 2001. Citado na página 61.

CHENÇO, E. C. *Fundamentos em finanças*. [S.l.]: IESDE BRASIL SA, 2009. Citado na página 30.

CORAZZA, M.; MALLIARIS, A.; NARDELLI, C. Searching for fractal structure in agricultural futures markets. *The Journal of Futures Markets (1986-1998)*, Wiley Periodicals Inc., v. 17, n. 4, p. 433, 1997. Citado na página 57.

GIRAFFA, L. M. Jornada nas escol@ s: A nova geração de professores e alunos. *Tecnologias, sociedade e conhecimento*, v. 1, n. 1, p. 100–118, 2013. Citado na página 60.

GLEICK, J.; BERRY, M. Chaos-making a new science. *Nature*, v. 330, p. 293, 1987. Citado na página 54.

GLEISER, I. *Caos e complexidade: a evolução do pensamento econômico*. [S.l.]: Campus, 2002. Citado na página 55.

GRANDO, N. I.; SCHNEIDER, I. J. Matemática financeira: alguns elementos históricos e contemporâneos. *Zetetiké*, v. 18, n. 1, 2010. Citado na página 29.

GRIFFIN, Daniel. *Gamification in E-Learning*. 2014. Disponível em: Gamification in E-Learning. Ashridge Business School, 2014. <http://www.ashridge.org.uk/Website/Content.nsf/wELNVLR/Resources:+Gamification+in+e-Learning?opendocument> Acesso em: 05 jan. 2021. Citado na página 61.

IFRAH, G. *História universal dos algarismos: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo*. [S.l.]: Nova Fronteira, 1997. Citado 4 vezes nas páginas 17, 18, 20 e 21.

INFOMONEY. *O Novo Mundo das Criptomoedas*. 2018. Disponível em: <https://www.infomoney.com.br/colunistas/painel-contabil/o-novo-mundo-das-criptomoedas/>. Acesso em: 05 jan. 2021. Citado na página 23.

JÚNIOR, H. R.; SCHIMIGUEL, J. Educação matemática financeira: conhecimentos financeiros para a cidadania e inclusão. *InterSciencePlace*, n. 9, 2009. Citado na página 29.

KATO, D. S.; KAWASAKI, C. S. As concepções de contextualização do ensino em documentos curriculares oficiais e de professores de ciências. *Ciência & Educação (Bauru)*, SciELO Brasil, v. 17, n. 1, p. 35–50, 2011. Citado na página 60.

LARRAIN, M. Testing chaos and nonlinearities in t-bill rates. *Financial Analysts Journal*, Taylor & Francis, v. 47, n. 5, p. 51–62, 1991. Citado na página 56.

LAUREANO, J. L. T.; LEITE, O. R. V. *Os segredos da matemática financeira*. [S.l.]: Ática, 1987. Citado na página 31.

LIMA, C. B.; SÁ, I. P. de. Matemática financeira no ensino fundamental. *Revista Eletrônica TECCEN*, v. 3, n. 1, p. 34–43, 2010. Citado na página 13.

LIMA, E. L. *Logaritmos*. [S.l.: s.n.], 1991. Citado na página 38.

LOPES, J. d. C.; ROSSETI, J. P. *Economia Monetária*. [S.l.]: Atlas, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 23.

LORENZ, E. N. *A Essência do Caos*. [S.l.]: Universidade de Brasília, 1996. Citado na página 55.

MANDELBROT, B. B. The variation of certain speculative prices. In: *Fractals and scaling in finance*. [S.l.]: Springer, 1997. p. 371–418. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 59.

MANKIW, N. G. Macroeconomia. 6ª edição. *Rio de Janeiro: LTC*, 2011. Citado na página 15.

MAOR, E. *e: historia de um número*. [S.l.]: Libraria, 2006. Citado na página 36.

MATIAS, M. A. Análise do comportamento de preços da commodity cobre: uma abordagem sob a ótica da teoria dos fractais. 2006. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 57.

MONEYTIMES. *Como a China planeja impulsionar seu yuan digital?* 2020. Disponível em: <https://www.moneytimes.com.br/como-a-china-planeja-impulsionar-seu-yuan-digital/>. Acesso em: 05 jan. 2021. Citado na página 27.

MÜLLER, U. A. et al. Fractals and intrinsic time: A challenge to econometricians. *Unpublished manuscript, Olsen & Associates, Zürich*, p. 130, 1993. Citado na página 57.

NETO, A. A. Matemática financeira e suas aplicações. *São Paulo: Atlas*, 2009. Citado na página 31.

NOGAMI, O. *Economia*. [S.l.]: IESDE BRASIL SA, 2012. Citado na página 19.

PRIGOGINE, I.; FERREIRA, R. L. *As leis do caos*. [S.l.]: Unesp, 2002. Citado na página 55.

PUCCINI, A. d. L. *Matemática financeira: objetiva e aplicada*. [S.l.]: Saraiva Educação SA, 1977. Citado na página 31.

ROBERT, J. *A origem do dinheiro*. [S.l.]: Global,, 1989. Citado na página 29.

SANTOS, A. A. P. et al. Previsão não-linear da taxa de câmbio real/dólar utilizando redes neurais e sistemas nebulosos. Florianópolis, SC, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 55, 56 e 59.

SAVIT, R. Nonlinearities and chaotic effects in options prices. *The Journal of Futures Markets (1986-1998)*, Wiley Periodicals Inc., v. 9, n. 6, p. 507, 1989. Citado na página 56.

SCHNEIDER, I. J. *Matemática Financeira: um conhecimento importante e necessário para a vida das pessoas. 2008*. Tese (Doutorado) — Dissertação de Mestrado em Educação. Universidade de Passo Fundo, Rio Grande . . . , 2008. Citado na página 30.

SILVA, C. A. T.; MATIAS, M. A.; VIEIRA, L. A inserção da teoria dos fractais na contabilidade financeira: evidências teórico-empíricas. 2010. Citado na página 58.

SINGER, P. Aprender economia, 2ª edição. *São Paulo: Editora Brasiliense*, 1983. Citado na página 19.

STACEY, R. D. *The chaos frontier: creative strategic control for business*. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2016. Citado na página 55.

TEIXEIRA, J. et al. Um estudo diagnóstico sobre a percepção da relação entre educação financeira e matemática financeira. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2015. Citado na página 30.

ULRICH, F. *Bitcoin: a moeda na era digital*. [S.l.]: LVM Editora, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 23, 24, 25 e 26.

VOLCHAN, S. B. Modelos matemáticos em finanças: avaliação de opções. *Revista Matemática Universitária*, v. 26, n. 27, p. 67–121, 1999. Citado na página 42.