

Universidade Federal de Minas Gerais  
Instituto de Ciências Exatas  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

# O teorema adiabático para sistemas quânticos de muitos corpos

Ronaldo Lessa Barros

Orientador: Prof. Raphael Campos Drumond

Belo Horizonte - MG

2020

Universidade Federal de Minas Gerais  
Instituto de Ciências Exatas  
Programa de Pós-Graduação em Matemática

# O teorema adiabático para sistemas quânticos de muitos corpos

Ronaldo Lessa Barros

Orientador: Prof. Raphael Campos Drumond

Dissertação submetida à banca examinadora,  
designada pelo Programa de Pós-Graduação em  
Matemática do Instituto de Ciências Exatas-  
ICEX da Universidade Federal de Minas Gerais,  
como requisito parcial para obtenção do título  
de Mestre em Matemática.

Belo Horizonte - MG

2020

Barros, Ronaldo Lessa

B277t O teorema adiabático para sistemas quânticos de muitos corpos [manuscrito] / Ronaldo Lessa Barros – 2020.  
81 f. il.

Orientador: Raphael Campos Drumond  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.

Referências: f.79-81.

1. Matemática – Teses. 2. Sistemas dinâmicos – Teses. 3. Física matemática – Teses. I. Drumond, Raphael Campos. II. Universidade Federal de Minas Gerais; Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51(043)



## FOLHA DE APROVAÇÃO

*O teorema adiabático para sistemas quânticos de muitos corpos*

**RONALDO LESSA BARROS**

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

---

Prof. Raphael Campos Drumond  
UFMG

---

Prof. Gastão de Almeida Braga  
UFMG

---

Prof. Gustavo Barbagallo de Oliveira  
UFMG

Belo Horizonte, 27 de outubro de 2020.

# Agradecimentos

Agradeço à minha família que é, sem dúvida, a minha maior sorte.

Agradeço a todos meus amigos que são como irmãos para mim.

Agradeço a todos os meus professores e colegas que foram importantes para o meu crescimento como matemático.

Agradeço ao meu orientador Raphael que foi paciente ao tirar as minhas dúvidas e que me ensinou muito com a sua orientação.

Agradeço ao programa de Pós-Graduação da Matemática pela oportunidade e a Capes pelo apoio financeiro.

# Resumo

A formulação original do Teorema Adiabático para a mecânica quântica foi feita em 1928 pelo físico e matemático Max Born e pelo físico Valdimir Fock. Fisicamente, podemos entender esse teorema da seguinte maneira: se um sistema quântico sofre perturbações suficientemente lentas, então, ao longo do tempo, a configuração do sistema se mantém próxima do ponto fixo instantâneo da perturbação. O objetivo principal desta dissertação é apresentar a formulação e demonstração do teorema adiabático para sistemas quânticos de muitos corpos, provado pelos físicos matemáticos Sven Bachmann, Wojciech De Roeck e Martin Fraas.

**Palavras-chave:** Teorema Adiabático, sistemas quânticos de spins, sistemas quânticos de muitos corpos.

# Abstract

The original formulation of the Adiabatic Theorem for quantum mechanics was made in 1928 by physicist and mathematician Max Born and physicist Valdimir Fock. Physically, we can understand this theorem this way: if a quantum system undergoes sufficiently slow perturbations, then, over time, the configuration of the system remains close to the instantaneous fixed point of the perturbation. The main objective of this dissertation is to present the formulation and proof of the adiabatic theorem for extended quantum systems, proven by mathematical physicists Sven Bachmann, Wojciech De Roeck and Martin Fraas.

**Keywords:** Adiabatic theorem, spin quantum systems, many-body quantum systems.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Preâmbulo</b>	<b>9</b>
1.1	Espaço de Hilbert	9
1.2	Aplicações lineares	10
1.3	Produto tensorial	11
1.4	C*-álgebra	12
1.5	Espectro, operadores positivos e estado fundamental	13
1.6	Medidas com valor de projeção	14
1.7	Funcionais lineares e estados	15
1.7.1	Estados de uma C*-álgebra	16
1.7.2	Automorfismo e Dinâmica	16
<b>2</b>	<b>Teorema adiabático e Mecânica quântica</b>	<b>18</b>
2.1	Sistemas quânticos de spins	18
2.2	Teoremas adiabáticos	19
2.2.1	Exemplo	20
2.3	Sistemas estendidos	22
2.4	Teoria da resposta linear	23
<b>3</b>	<b>Definições e Configurações do Sistema</b>	<b>24</b>
3.1	O sistema quântico	24
3.2	Decaimento espacial em $\Gamma$	25
3.3	Interações	26
3.4	Hamiltonianos Locais	27
3.5	Exemplo	27
3.6	Comutadores	28
3.7	Dinâmica e Cotas de Lieb-Robinson	28
3.8	Aplicação $\mathcal{I}_s$	29
<b>4</b>	<b>O Teorema adiabático e a Teoria da resposta linear</b>	<b>30</b>
4.1	Suposições	30
4.2	O Teorema Adiabático	31
4.3	Exemplos	32

4.3.1	Spins sem interação . . . . .	33
4.3.2	Perturbações de sistemas com gap . . . . .	33
4.4	A evolução adiabática do projetor $P_0$ . . . . .	34
4.5	Conexão com o fluxo quase-adiabático . . . . .	35
4.6	Idéia principal da prova do Teorema adiabático . . . . .	35
4.7	Teoria da resposta linear . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Provas</b>	<b>38</b>
5.1	Lemas Técnicos . . . . .	38
5.2	Prova do Teorema Principal . . . . .	49
5.3	Solução da Equação (4.5) . . . . .	64
5.4	Prova da Teoria da resposta linear . . . . .	66
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>71</b>
<b>7</b>	<b>Apêndice</b>	<b>72</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>79</b>

# Introdução

A formulação original do Teorema Adiabático para a mecânica quântica foi feita em 1928 pelo físico e matemático Max Born e pelo físico Valdimir Fock. Fisicamente, podemos entender esse teorema da seguinte maneira: se um sistema quântico sofre perturbações suficientemente lentas, então, ao longo do tempo, a configuração do sistema se mantém próxima do ponto fixo instantâneo da perturbação. Ao longo dos anos foram feitos muitos trabalhos provando esse princípio. Resultados mais recentes com foco em mecânica quântica podem ser encontrados em [28], [29], [30], [31], [32]. Além desses resultados, existe o teorema adiabático para sistemas de muitos corpos [14] que foi provado pelos físicos matemáticos Sven Bachmann, Wojciech De Roeck e Martin Fraas. Nessa dissertação, apresentaremos a formulação e demonstração desse teorema.

Depois que apresentarmos a demonstração do teorema adiabático [14], iremos exibir uma prova para a validade da teoria da resposta linear. Desenvolvida inicialmente por Kubo em [7], a teoria mais geral formulada lida com a resposta de um sistema físico depois de sofrer uma perturbação controlada. Em um contexto típico, uma perturbação controlada (por exemplo, uma força eletromotriz) é ligada adiabaticamente do passado infinito para atingir uma intensidade  $\alpha > 0$  no tempo  $t = 0$ , onde se calcula a resposta induzida (neste caso, o valor de uma corrente elétrica) para a primeira ordem em  $\alpha$ . Isso cria uma relação entre a resposta e a perturbação, com uma constante de proporcionalidade dada pela fórmula de Kubo.

Para compreensão do contexto dessa dissertação, apresentaremos no Capítulo (1) definições e resultados que estão relacionados com o conteúdo principal desse texto. No Capítulo (2), utilizaremos exemplos para a melhor compreensão sobre o que é um sistema quântico de spins, um teorema adiabático e a teoria da resposta linear. Além disso, explicaremos porque é importante um teorema adiabático para sistemas estendidos. No Capítulo (3), definiremos toda a estrutura do sistema quântico de spins com o qual iremos trabalhar. No Capítulo (4), explicaremos detalhadamente sobre o Teorema Adiabático e a Teoria da resposta linear. No Capítulo (5), provaremos o Teorema Adiabático e a teoria da resposta linear.

# Capítulo 1

## Preâmbulo

Nesse capítulo vamos apresentar algumas definições e resultados que podem ser encontrados com mais detalhes em [1]. O leitor que possui um conhecimento avançado de mecânica quântica pode pular esse capítulo.

### 1.1 Espaço de Hilbert

Seja  $\mathcal{H}$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{C}$ . Um produto interno em  $\mathcal{H}$  é uma função  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que as seguintes condições são satisfeitas:

1.  $\langle \eta, \psi \rangle = \overline{\langle \psi, \eta \rangle}$  para todo  $\eta, \psi \in \mathcal{H}$ ;
2.  $\langle \lambda\eta + \xi, \psi \rangle = \lambda \langle \eta, \psi \rangle + \langle \xi, \psi \rangle$  para todo  $\psi, \eta, \xi \in \mathcal{H}$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$ ;
3.  $\langle \psi, \psi \rangle \geq 0$  para todo  $\psi \in \mathcal{H}$ , e  $\langle \psi, \psi \rangle = 0$  se e somente se  $\psi = 0$ .

Observe que pelas condições 1 e 2 temos que  $\langle \psi, \lambda\eta \rangle = \bar{\lambda} \langle \psi, \eta \rangle$ .

Vamos definir a seguinte **norma** :  $\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}$ . Através da norma definimos **distância** (ou **métrica**) por  $d(\psi, \xi) := \|\psi - \xi\|$ . Um **espaço métrico** é um conjunto que possui uma métrica. Uma sequência  $(\psi_n)_n$  em um espaço métrico é uma **sequência de Cauchy** se para cada  $\epsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $d(\psi_n, \psi_m) < \epsilon$  para todos  $n, m \geq N$ .

Não é difícil mostrar que se uma sequência converge em um espaço métrico, então essa sequência é uma sequência de Cauchy. Um espaço métrico tal que todas as sequências de Cauchy convergem é dito **completo**.

**Definição 1.1.** Um **espaço de Banach** é um espaço vetorial normado que é completo com respeito a norma.

Na mecânica quântica normalmente é utilizado o espaço de Hilbert, que é definido da seguinte maneira:

**Definição 1.2.** Um **espaço de Hilbert**  $\mathcal{H}$  é um espaço de Banach sobre  $\mathbb{C}$  tal que a sua norma é induzida pelo produto interno.

Fisicamente, o vetor  $\psi \in \mathcal{H}$  representa um estado em que um sistema físico pode se encontrar. Em mecânica quântica, esse vetor representa um **estado quântico**, ou seja, um estado de um sistema quântico.

## 1.2 Aplicações lineares

Sejam  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  espaços de Hilbert. Dizemos que  $L : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  é uma aplicação linear se para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$  e para todo  $\xi, \eta \in \mathcal{H}_1$  tem-se que

$$L(\lambda\xi) = \lambda L(\xi) \text{ e } L(\xi + \eta) = L(\xi) + L(\eta).$$

A partir de agora vamos omitir os parênteses, ou seja, vamos denotar  $L(\xi)$  por  $L\xi$ .

Uma aplicação limitada é uma aplicação  $L$  tal que existe uma constante  $M > 0$  tal que  $\|L\xi\| \leq M\|\xi\|$  para todos vetores  $\xi$ .

**Proposição 1.1.** Seja  $L : V \rightarrow W$  uma aplicação linear entre dois espaços vetoriais normados. Então são equivalentes:

1.  $L$  é contínua com respeito a norma topológica ( $\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}$ );
2.  $L$  é limitada.

**Definição 1.3.** Sejam  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  espaços de Hilbert. Denotamos por  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  para o conjunto das aplicações lineares limitadas  $L : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ . Além disso, denotamos  $\mathcal{B}(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$  tal que os elementos de  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  são denominados **operadores**.

Se  $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  é uma aplicação linear limitada, então a **adjunto**  $A^*$  de  $A$  é a única aplicação linear  $A^* : \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$  tal que

$$\langle \psi, A^*\eta \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle A\psi, \eta \rangle_{\mathcal{H}_2}, \quad \text{para todos } \psi \in \mathcal{H}_1, \eta \in \mathcal{H}_2.$$

Não vamos provar a existência e a unicidade da aplicação  $A^*$ . Algumas propriedades elementares da adjunta são:

1.  $(A^*)^* = A$  para qualquer aplicação linear limitada  $A$ ;
2.  $(\lambda A + B)^* = \bar{\lambda}A^* + B^*$ , com  $\lambda \in \mathbb{C}$ ;
3.  $(AB)^* = B^*A^*$ .

Um operador  $A$  é dito **auto-adjunto** se  $A = A^*$  e **normal** se  $AA^* = A^*A$ . Além disso, é dito uma **isometria** se  $A^*A = I$ , onde  $I$  é o operador identidade. O nome “isometria” vem do seguinte fato:

$$\|A\psi\|^2 = \langle A\psi, A\psi \rangle = \langle \psi, A^*A\psi \rangle = \langle \psi, \psi \rangle = \|\psi\|^2.$$

Observe que uma isometria é sempre injetiva. Uma **projeção**  $P$  é um operador tal que  $P^2 = P^* = P$ . As projeções projetam sobre subespaços fechados do espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  em que elas estão definidas. Se  $A$  é uma isometria, então é fácil verificar que  $AA^*$  é uma projeção. Um **isomorfismo** entre espaços de Hilbert  $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  é uma isometria cuja inversa  $U^{-1}$  existe.

**Teorema 1.1.** Seja  $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  uma aplicação linear limitada entre dois espaços de Hilbert. Então são equivalentes:

1.  $U$  é um isomorfismo de espaços de Hilbert;
2.  $U$  é sobrejetivo e  $\langle U\xi, U\eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle$  para todo  $\eta, \xi \in \mathcal{H}_1$ ;
3.  $U^*U = I_{\mathcal{H}_1}$  e  $UU^* = I_{\mathcal{H}_2}$ .

Uma aplicação linear limitada é dita **unitária** se é uma isomorfismo de um espaço de Hilbert em si mesmo.

Em mecânica quântica os operadores auto-adjunto representam as grandezas físicas ( como a energia, momento linear, posição, etc.) que podem ser medidas em um sistema. Para o caso particular da energia, o operador auto-adjunto associado é denominado **Hamiltoniano**. As aplicações unitárias também tem papel importante, ao descrever a dinâmica entre dois instantes de tempo, assim como operações de simetria.

### 1.3 Produto tensorial

Vamos descrever uma forma de construir o produto tensorial. Primeiro tome o espaço vetorial  $V$  consistindo de combinações lineares finitas de elementos da forma  $\xi \otimes \eta$  para algum  $\xi \in \mathcal{H}_1$  e  $\eta \in \mathcal{H}_2$ . Portanto, um elemento de  $V$  é da forma  $\sum_{i=1}^n \lambda_i \xi_i \otimes \eta_i$ . Então impomos algumas relações, ou seja, identificamos elementos que satisfazem:

$$\begin{aligned} \lambda(\xi \otimes \eta) &= (\lambda\xi) \otimes \eta = \xi \otimes (\lambda\eta); \\ (\xi_1 + \xi_2) \otimes \eta &= \xi_1 \otimes \eta + \xi_2 \otimes \eta; \\ \xi \otimes (\eta_1 + \eta_2) &= \xi \otimes \eta_1 + \xi \otimes \eta_2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Se “quocientizarmos” o espaço  $V$  por essas relações, nós obtemos um espaço vetorial  $\mathbb{H}$ . A imagem de  $\xi \otimes \eta$  nesse espaço quociente também será denotada por  $\xi \otimes \eta$ . O espaço vetorial  $\mathbb{H}$  pode ser construído como um espaço pre-Hilbert, basta definirmos

$$\langle \xi_1 \otimes \eta_1, \xi_2 \otimes \eta_2 \rangle_{\mathbb{H}} = \langle \xi_1, \eta_1 \rangle_{\mathcal{H}_1} \langle \xi_2, \eta_2 \rangle_{\mathcal{H}_2}$$

e estendermos por linearidade. Isso induz uma norma em  $\mathbb{H}$ , mas em geral  $\mathbb{H}$  não é um espaço de Hilbert, pois  $\mathbb{H}$  não necessariamente é completo sob essa norma. Contudo, podemos completar  $\mathbb{H}$  para obter um espaço de Hilbert  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  (ver Seção 2.1.3 de [1]).

Suponha que  $L_i : \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{K}_i$  são aplicações lineares limitadas. Podemos definir uma aplicação  $L_1 \otimes L_2 : \mathbb{H} \rightarrow \mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2$  por

$$(L_1 \otimes L_2)(\xi \otimes \eta) = L_1\xi \otimes L_2\eta.$$

Isso está bem definido, pois  $L_i$  é linear, e assim essa definição é compatível com as relações em (1.1). Como  $L_1$  e  $L_2$  são limitadas, então  $L_1 \otimes L_2$  é limitada no subespaço  $\mathbb{H}$ . Para definir  $L_1 \otimes L_2$  em todo  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  nós utilizamos o fato de  $\mathbb{H}$  ser denso no produto tensorial junto com a Proposição (1.1). Como  $\mathbb{H}$  é denso em  $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ , então definimos

$$(L_1 \otimes L_2)\xi := \lim_{n \rightarrow \infty} (L_1 \otimes L_2)\xi_n.$$

Como  $L_1 \otimes L_2$  é limitado, então a imagem de uma sequência de Cauchy é também é uma sequência de Cauchy. Segue que  $(L_1 \otimes L_2)\xi_n$  converge no espaço de Hilbert  $\mathcal{K}_1 \otimes \mathcal{K}_2$ . Isso define  $L_1 \otimes L_2$  em todo  $\mathcal{H}$ .

Não é difícil verificar que a adjunta do produto tensorial de aplicações lineares é dada por  $(L_1 \otimes L_2)^* = L_1^* \otimes L_2^*$ .

O produto tensorial de dois espaços de Hilbert possui uma interpretação física: se dois sistemas quânticos são descritos por seus respectivos espaços de Hilbert, então o produto tensorial descreve o sistema composto por este par de sistemas. Isto é, sejam  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  espaços de Hilbert tais que o sistema quântico 1 é representado pelo  $\mathcal{H}_1$  e o sistema quântico 2 é representado pelo  $\mathcal{H}_2$ . A combinação desses dois sistemas é um novo sistema que é denotado por  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ . Em particular, sejam  $\psi_1 \in \mathcal{H}_1, \psi_2 \in \mathcal{H}_2$  estados do sistema 1 e do sistema 2, respectivamente. Então  $\psi_1 \otimes \psi_2$  representa um possível estado do sistema composto.

Além disso, se  $A : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$  é um operador autoadjunto que descreve uma grandeza mensurável no sistema 1 então, quando o sistema 1 é considerado conjuntamente com o sistema 2, o operador associado à mesma grandeza será  $A \otimes I_{\mathcal{H}_2}$ , onde  $I_{\mathcal{H}_2}$  é o operador identidade em  $\mathcal{H}_2$ .

## 1.4 C\*-álgebra

Uma **álgebra**  $\mathcal{A}$  é um espaço vetorial que possui uma operação de multiplicação. Essa multiplicação deve satisfazer

$$A(B + C) = AB + AC \text{ e } (B + C)A = BA + CA, \text{ para todo } A, B, C \in \mathcal{A}.$$

Mais ainda, a multiplicação por escalar no sentido comum também é definida, ou seja, dados  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ , ela satisfaz

$$\lambda_1(B + C) = \lambda_1B + \lambda_2C \text{ e } (\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1A + \lambda_2A, \text{ para todo } A, B, C \in \mathcal{A}.$$

Uma **\*-álgebra** é uma álgebra em que uma **involução**  $*$  é definida, ou seja, existe uma

aplicação  $*$  :  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  que satisfaz as seguintes propriedades:

1.  $(A^*)^* = A$  para todo  $A \in \mathcal{A}$ ;
2.  $(AB)^* = B^*A^*$  para  $A, B \in \mathcal{A}$ ;
3.  $(\lambda A + B)^* = \bar{\lambda}A^* + B^*$  para  $A, B \in \mathcal{A}$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Um exemplo familiar de  $*$ -álgebra são as matrizes  $n \times n$  onde a  $*$ -operação é dada pelo adjunto da matriz.

**Definição 1.4.** Uma **álgebra de Banach**  $\mathcal{A}$  é uma álgebra que é completa com respeito a uma norma  $\|\cdot\|$ . Mais ainda, a norma deve satisfazer  $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ . Uma  **$*$ -álgebra de Banach** é uma álgebra de Banach que é uma  $*$ -álgebra tal que  $\|A\| = \|A^*\|$  para todo  $A \in \mathcal{A}$ .

Uma **unidade** é um elemento  $I$  tal que  $IA = AI = A$  para todo  $A \in \mathcal{A}$ . Se  $\mathcal{A}$  tem uma unidade  $I$ , então a unidade é única e  $\|I\| \geq 1$ .

**Definição 1.5.** Uma  **$C^*$ -álgebra**  $\mathcal{A}$  é uma  $*$ -álgebra de Banach tal que a norma satisfaz a propriedade  $C^*$  :  $\|A^*A\| = \|A\|^2$  para todo  $A \in \mathcal{A}$ .

Se uma  $C^*$ -álgebra possui uma unidade  $I$ , então segue que  $\|I\| = 1$ .

No conteúdo principal desse texto, vamos trabalhar com  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Não iremos provar, mas é importante saber que  $\mathcal{B}(\mathcal{H})$  é uma  $C^*$ -álgebra onde a operação  $*$  é a adjunta de aplicações lineares definidas no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ .

## 1.5 Espectro, operadores positivos e estado fundamental

**Definição 1.6.** Sejam  $\mathcal{A}$  uma  $C^*$ -álgebra com unidade e  $A \in \mathcal{A}$ . Então o **espectro** de  $A$  é definido por

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \text{ não é invertível}\}.$$

Definimos o **raio espectral** por

$$r(A) := \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

**Proposição 1.2.** Sejam  $\mathcal{A}$  um  $C^*$ -álgebra e  $A \in \mathcal{A}$ . Então  $r(A) \leq \|A\|$  e  $\sigma(A)$  é compacto. Se  $A = A^*$ , ou seja, se  $A$  é auto-adjunto, então  $\sigma(A)$  está contido na reta real.

Considere agora  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ . Para cada  $\psi \in \mathcal{H}$  temos

$$\langle \psi, A^*A\psi \rangle = \langle A\psi, A\psi \rangle = \|A\psi\|^2 \geq 0.$$

Dizemos que  $A^*A$  é um **operador positivo**. Generalizando para qualquer  $C^*$ -álgebra  $\mathcal{A}$ : dizemos que  $A \in \mathcal{A}$  é um **operador positivo** se existe  $B \in \mathcal{A}$  tal que  $A = B^*B$ .

**Teorema 1.2.** Sejam  $\mathcal{A}$  uma  $C^*$ -álgebra e  $A \in \mathcal{A}$ . Então são equivalentes:

1.  $A$  é positivo, ou seja, existe  $B \in \mathcal{A}$  tal que  $A = B^*B$ ;
2.  $\sigma(A) \subset [0, \infty)$  e  $A$  é auto-adjunto;
3.  $A = H^2$  para algum  $H \in \mathcal{A}$  tal que  $H = H^*$ .

**Definição 1.7.** Dado um Hamiltoniano  $H \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  tal que  $\sigma(A)$  é limitado inferiormente, então dizemos que um autovetor unitário do menor autovalor de  $H$  é um **estado fundamental** de  $H$ .

## 1.6 Medidas com valor de projeção

Seja  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dado por  $p(x) = \sum_{i=1}^n c_i x^i$  e seja  $A \in \mathcal{A}$  onde  $\mathcal{A}$  é uma  $C^*$ -álgebra. Então é natural definirmos um elemento da álgebra  $p(A)$  por  $p(A) = \sum_{i=1}^n c_i A^i$ . Vamos discutir brevemente que essa definição pode ser estendida para qualquer função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  desde que  $A$  seja um operador normal.

Suponha que  $A \in M_n(\mathbb{C})$ . Então o espectro  $\sigma(A)$  é o conjunto de autovalores de  $A$ . Suponha também que  $A$  está atuando em um espaço de Hilbert de dimensão finita e que  $A$  é auto-adjunto. Então temos pela álgebra linear que  $A$  é diagonalizável.

**Definição 1.8.** Seja  $A$  como no parágrafo anterior e seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função qualquer. Então definimos  $f(A) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} f(\lambda) P_\lambda$ , onde  $P_\lambda$  é a projeção no autoespaço com autovalor  $\lambda$ .

Essa definição não pode ser generalizada de maneira direta para qualquer elemento de uma álgebra- $C^*$ . Para tanto, vamos primeiro entender a definição de  $f(A)$ , sendo  $A$  matriz auto-adjunta, de uma outra forma. Podemos considerar o espectro  $\sigma(A)$  como um espaço mensurável, onde cada subconjunto é mensurável. Em outras palavras, nós induzimos em  $\sigma(A)$  uma medida discreta. Para cada  $\Lambda \subset \sigma(A)$  nós associamos o operador

$$\mu(\Lambda) := \sum_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda,$$

onde  $P_\lambda$  é novamente a projeção no autoespaço do autovalor  $\lambda$ . Observe que  $\mu(\sigma(A)) = I$  e que  $\mu(\Lambda_1 \cup \Lambda_2) = \mu(\Lambda_1) + \mu(\Lambda_2)$  se  $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$ . Além disso, cada  $\mu(\Lambda)$  pode ser visto facilmente como uma projeção. Assim, podemos interpretar  $\mu$  como uma medida em  $\sigma(A)$  que possui valor de projeção. Esse é um exemplo de **medida com valor de projeção**.

O cálculo funcional nos dá ferramentas para definir **projeções espectrais**. Essas projeções são generalizações das projeções  $P_\lambda$  definidas anteriormente. Para defini-las, tome um subconjunto de Borel  $\Lambda \subset \sigma(A)$ . Então a função indicadora  $\chi_\Lambda$  é Borel mensurável. Seja  $\psi$  um autovetor de  $A$ . Então  $A\psi = \lambda\psi$ . Assim, definimos  $\chi_\Lambda(A)\psi = \chi_\Lambda(\lambda)\psi$ . Observemos que podemos denotar  $P_\Lambda := \chi_\Lambda(A)$ . Portanto, definimos uma medida com valor de projeção  $\mu(\Lambda) = P_\Lambda$  para cada subconjunto Borel mensurável  $\Lambda$  do espectro  $\sigma(A)$ .

As definições acima podem ser estendidas para operadores limitados e auto-adjuntos de espaços de Hilbert.

**Teorema 1.3 (Teorema espectral).** Seja  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  um operador auto-adjunto atuando em algum espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Então existe uma medida com valor de projeção  $\mu$  tal que  $\mu(\Lambda) = \chi_\Lambda(A)$  tal que  $A = \int \lambda d\mu(\lambda)$ . Mais ainda, para qualquer função Borel mensurável limitada  $f$  do espectro, existe um único operador  $\int_{\sigma(A)} f(\lambda) d\mu(\lambda)$  tal que

$$\langle \psi, \int_{\sigma(A)} f(\lambda) d\mu(\lambda) \psi \rangle = \mu_\psi(f) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda) d\mu_\psi(\lambda),$$

para todo  $\psi \in \mathcal{H}$ .

Portanto, o Teorema espectral nos garante que qualquer operador auto-adjunto pode ser escrito em termos de uma medida com valor de projeção. Além disso, ele nos garante a existência de uma medida de probabilidade  $\mu_\psi$ . Na mecânica quântica, dado  $\Lambda \subset \sigma(A)$  um subconjunto Borel mensurável, a medida  $\mu_\psi$  serve para calcularmos a probabilidade da grandeza (associada ao operador  $A$ ) estar no conjunto  $\Lambda$ , quando o sistema está no estado  $\psi$ . O valor dessa probabilidade é dado por

$$\mu_\psi(\chi_\Lambda) = \langle \psi, \int_{\sigma(A)} \chi_\Lambda(\lambda) d\mu(\lambda) \psi \rangle = \langle \psi, \mu(\Lambda) \psi \rangle = \langle \psi, P_\Lambda \psi \rangle = \langle \psi, \chi_\Lambda(A) \psi \rangle.$$

## 1.7 Funcionais lineares e estados

**Definição 1.9.** Um **funcional linear** em uma  $*$ -álgebra de Banach  $\mathcal{A}$  é uma aplicação linear  $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ . O funcional é dito **positivo** se  $\omega(A^*A) \geq 0$  para todo  $A \in \mathcal{A}$ , isto é, se o funcional possui valor positivo para operadores positivos.

Um funcional linear  $\omega$  é contínuo se, e somente se,  $\omega$  é limitado. Podemos definir a norma de um funcional linear por

$$\|\omega\| := \sup_{A \in \mathcal{A}, \|A\|=1} |\omega(A)|.$$

O conjunto dos funcionais lineares em uma  $*$ -álgebra de Banach  $\mathcal{A}$  vai ser identificado por  $\mathcal{B}(\mathcal{A}, \mathbb{C})$ .

**Teorema 1.4.** Seja  $\omega$  um funcional linear em uma  $C^*$ -álgebra  $\mathcal{A}$  com unidade. Então são equivalentes:

1.  $\omega$  é uma aplicação linear positiva;
2.  $\omega$  é contínuo e  $\|\omega\| = |\omega(I)|$ .

Se um dos itens anteriores é satisfeito, então temos as seguintes propriedades:

1.  $|\omega(A)|^2 \leq \omega(A^*A)\|\omega\|$ ;
2.  $|\omega(A^*BA)| \leq \omega(B^*B)\|B\|$ .

para todo  $A, B \in \mathcal{A}$ .

### 1.7.1 Estados de uma $C^*$ -álgebra

Seja  $\mathcal{A}$  uma  $C^*$ -álgebra. Um **estado** em  $\mathcal{A}$  é um funcional linear positivo  $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  de norma um (se  $\mathcal{A}$  possui unidade, então  $\|\omega(I)\| = 1$ ). Vamos denotar o conjunto dos estados por  $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ . Se  $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$  e  $\psi \in \mathcal{H}$  tal que  $\|\psi\| = 1$ , então a aplicação  $A \mapsto \langle \psi, A\psi \rangle$  é um estado. Se  $A$  é um observável da mecânica quântica, então dizemos que  $\langle \psi, A\psi \rangle$  é o **valor esperado** de  $A$ .

Observe que  $\mathcal{S}(\mathcal{A})$  é um espaço métrico onde a métrica é induzida pela norma dos funcionais lineares.

**Definição 1.10.** Seja  $\varphi_n$  uma sequência de estados em alguma  $C^*$ -álgebra  $\mathcal{A}$ . Dizemos que  $\varphi_n$  **converge em norma** para um estado  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$  se  $\|\varphi_n - \varphi\| \rightarrow 0$ , onde a norma é a norma que definimos para funcionais lineares. Dizemos que  $\varphi_n$  converge para  $\varphi$  na **topologia fraca-\*** se para cada  $A \in \mathcal{A}$  tivermos que  $|\varphi_n(A) - \varphi(A)| \rightarrow 0$ .

**Proposição 1.3.** Seja  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$  e  $\varphi_n$  uma sequência em  $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ . Então  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  na norma topológica implica que  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  na topologia fraca-\*

**Proposição 1.4.** Seja  $\mathcal{A} = M_d(\mathbb{C})$  para algum  $d \in \mathbb{N} - \{0\}$ . Uma **matriz densidade**  $\rho$  é uma matriz tal que  $\rho^* = \rho$ ,  $\rho$  é positivo (ou seja, todos os autovalores são maiores ou igual a zero) e o traço de  $\rho$  é igual a 1 ( $\text{Tr}(\rho) = 1$ ). Os estados  $\omega$  em  $\mathcal{A}$  são um a um correspondentes com matrizes densidades  $\rho$  tal que  $\omega(A) = \text{Tr}(\rho A)$  para todo  $A$ .

**Definição 1.11.** Dado  $\Lambda$  um conjunto finito, definimos  $\mathcal{H}_\Lambda = \otimes_{x \in \Lambda} \mathcal{H}_x$ , sendo  $\mathcal{H}_x$  espaço de Hilbert de dimensão finita para todo  $x \in \Lambda$ .

**Definição 1.12.** Sejam  $Z \subset \Lambda$  e  $O \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\Lambda)$  tal que  $O = A \otimes B$ , com  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_Z)$ ,  $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\Lambda \setminus Z})$  e  $\Lambda$  finito. Definimos o **traço parcial de  $O$  sobre  $\Lambda \setminus Z$**  por

$$\text{Tr}_{\Lambda \setminus Z}(O) = \text{Tr}(B)A.$$

**Definição 1.13.** Sejam  $O \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_\Lambda)$  e  $Z \subset \Lambda$  tal que  $\Lambda$  é finito. Definimos o **traço parcial de  $O$**  por

$$\Pi^Z(O) = \frac{1}{\text{Tr}(I_{\Lambda \setminus Z})} \text{Tr}_{\Lambda \setminus Z}(O).$$

### 1.7.2 Automorfismo e Dinâmica

Um **morfismo**  $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  entre duas  $C^*$ -álgebras é uma aplicação linear tal que  $\alpha(AB) = \alpha(A)\alpha(B)$  e  $\alpha(A^*) = \alpha(A)^*$  para todo  $A, B \in \mathcal{A}$ .

**Definição 1.14.** Um **automorfismo**  $\alpha$  de uma  $C^*$ -álgebra  $\mathcal{A}$  é um morfismo  $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  que é invertível tal que  $\alpha^{-1}$  também é um morfismo.

**Definição 1.15.** Um **semigrupo fortemente contínuo** em um espaço de Banach  $\mathcal{H}$  é uma aplicação  $T : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$  que satisfaz

1.  $T(0) = I$ ;

2.  $T(t+s) = T(t)T(s), \forall t, s \geq 0;$
3.  $\lim_{t \rightarrow 0} \|T(t)x_0 - x_0\| \rightarrow 0, \forall x_0 \in \mathcal{H}.$

Agora, tomemos  $t \mapsto U(t)$  um semigrupo fortemente contínuo de unitárias tal que  $\psi(t) = U(t)\psi_0$  seja solução do seguinte PVI:

$$i \frac{d}{dt} \psi(t) = H_t \psi(t), \quad \psi(0) = \psi_0,$$

onde  $H_t$  é uma família suave de operadores auto-adjuntos e  $\|\psi_0\| = 1$ .

Dado um observável  $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ , podemos construir um grupo de automorfismos  $t \mapsto \tau_t(A) = U^*(t)AU(t)$ , onde  $\tau_t$  é denominado **dinâmica**. Calculando o valor esperado do observável  $A$  no estado  $\psi(t)$ , então temos

$$\langle A \rangle_t = \langle \psi(t), A\psi(t) \rangle = \langle U(t)\psi_0, AU(t)\psi_0 \rangle = \langle \psi_0, U^*(t)AU(t)\psi_0 \rangle = \langle \psi_0, \tau_t(A)\psi_0 \rangle.$$

## Capítulo 2

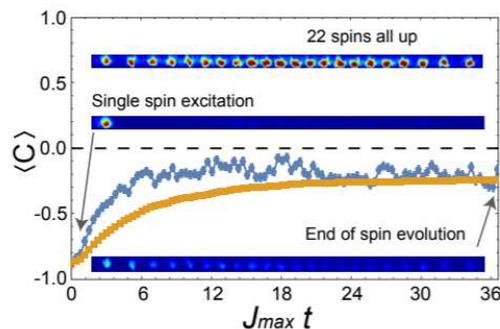
# Teorema adiabático e Mecânica quântica

### 2.1 Sistemas quânticos de spins

Estritamente falando, para a física, o **spin** é um momento angular intrínseco de partículas como elétrons, prótons e nêutrons. Já na literatura de física-matemática, por **sistema quântico de spins** normalmente se entende qualquer sistema quântico composto por muitos subsistemas, cada um deles descrito por um espaço de Hilbert de dimensão finita.

Em [2], podemos encontrar um experimento envolvendo uma cadeia de 22 íons. O experimento é elaborado de forma a garantir que um íon pode ocupar apenas dois dos seus (infinitos) níveis de energia. Assim, restrito a esses dois níveis, cada íon pode ser descrito por um espaço de Hilbert de dimensão dois. Portanto, essa cadeia é um exemplo de sistema quântico de spins. Além disso, a ocupação dos dois níveis de energia pode ser aplicada pela matriz de Pauli  $\sigma_z$  (ver Capítulo 3). O autovalor 1 da matriz corresponde ao nível "excitado" (o maior dos níveis de energia), enquanto o autovalor  $-1$  corresponde ao menor deles.

Nesse experimento os pesquisadores mediram o valor esperado de um observável  $C$  ao longo do tempo  $t$ . Devido a forma como foi construído, o observável  $C$  depende das matrizes de Pauli  $\sigma_i^z, \forall i \in \{1, \dots, 22\}$  e ele dá uma estimativa da localização espacial das excitações na cadeia.



Na figura acima, podemos observar que existem três faixas azuis. Na primeira faixa, temos 22

pontos coloridos representando a cadeia de íons. A disposição desses pontos na faixa representa a disposição real dos íons. Além disso, a cor do  $i$ -ésimo ponto representa o valor esperado  $\langle \sigma_i^z \rangle$ . Ou seja, quando o valor de  $\langle \sigma_i^z \rangle$  está mais próximo de 1, então a cor do  $i$ -ésimo ponto está mais próxima do vermelho; e quando o valor de  $\langle \sigma_i^z \rangle$  está mais próximo de  $-1$ , então a cor do  $i$ -ésimo ponto está mais próxima do azul.

Na segunda faixa, temos que o primeiro ponto está totalmente vermelho e os demais estão totalmente azuis. Isso significa que  $\langle \sigma_1^z \rangle = 1$  e  $\langle \sigma_i^z \rangle = -1, \forall i \in \{2, \dots, 22\}$ .

Na terceira faixa, podemos observar que nenhum ponto está totalmente azul e nem totalmente vermelho. Além disso, os pontos da esquerda estão mais vermelhos do que os pontos da direita.

Além das faixas azuis, a figura acima possui também um gráfico azul. Esse gráfico representa o valor esperado  $\langle C \rangle_t$  ao longo do tempo  $t$ . No tempo  $t = 0$ , o sistema está no estado dado pela segunda faixa. No final da evolução, ou seja, quando  $J_{max}t = 36$  ( $J_{max}$  é um dos parâmetros do Hamiltoniano que descreve esta cadeia), então o sistema está no estado dado pela terceira faixa. Analisando o gráfico, podemos concluir que o valor de  $\langle C \rangle$  aumenta ao longo da evolução.

## 2.2 Teoremas adiabáticos

Um **teorema adiabático** se aplica a EDO's que contém um parâmetro dependente do tempo e cuja a variação é suficientemente lenta. Assumindo que para cada valor fixado do parâmetro a dinâmica correspondente possui um único ponto fixo e, além disso, assumindo outras hipóteses adequadas, a solução da equação, ao longo do tempo, fica próximo de um ponto fixo instantâneo. O foco desta dissertação, no entanto, são os teoremas adiabáticos no contexto da mecânica quântica, primeiramente formulados por Born, Fock e Kato [4], [5], [6]. Vamos expor nesta seção uma formulação no mesmo espírito dos trabalhos originais, que pode ser encontrada em [3].

Seja

$$i \frac{d}{dt} \varphi(t) = H_t \varphi(t)$$

a equação de Schrödinger, onde  $t$  é uma variável real,  $H_t$  é um Hamiltoniano (operador linear auto-adjunto) para todo  $t$  e  $\varphi(t) \in \mathcal{H}$  tal que  $\mathcal{H}$  é um espaço de Hilbert cuja a dimensão é finita. Vamos assumir uma condição inicial

$$\varphi(0) = \varphi_0$$

tal que  $\|\varphi_0\| = 1$ .

Suponhamos que  $t \in [0, T]$ . Tomando um parâmetro  $\epsilon > 0$  vamos reescalar o tempo de maneira que  $s = \epsilon t$ , onde  $s \in [0, 1]$ . Logo, podemos reescrever a equação de Schrödinger da seguinte maneira

$$i\epsilon \frac{d}{ds} \varphi(s) = H_s \varphi(s). \quad (2.1)$$

Seja  $\{b_k(s)\}_{1 \leq k \leq N}$  uma base ortonormal de autovetores de  $H_s$  e  $E_k(s)$  o autovalor de  $H_s$  correspondente ao autovetor  $b_k(s)$ . Além disso, defina

$$D_n = \{j \in \mathbb{N} : E_j(s) = E_n(s)\},$$

tal que  $1 \leq n \leq N$ .

Tem-se então [3]:

**Teorema 2.1.** Sejam o Hamiltoniano  $H_s$ , os autovetores  $b_k(s)$  e o autovalores  $E_k(s)$  suficientemente suaves no intervalo  $s \in [0, 1]$ . Suponha que o número de estados degenerados é constante ao longo do tempo, ou seja, suponha que o número de estados  $b_j(s)$  com o mesmo nível de energia  $E_n(s)$  não varia ao longo do tempo. Suponha que  $\inf\{\min_j |E_j(s) - E_n(s)|, s \in [0, 1]\} > 0$ . Se  $\varphi_{(n)}(s)$  é solução da equação de Schrödinger tal que  $\varphi_{(n)}(0) = b_n(0)$ , então temos

$$\|(I - \sum_{j \in D_n} P_{j,s})\varphi_{(n)}(s)\| \leq C\epsilon \quad \forall s \in [0, 1], \quad (2.2)$$

onde  $P_{j,s}$  é a projeção no autoespaço gerado pelo autovalor  $E_j(s)$ .

Ou seja, o teorema garante que, se o estado inicial pertence a um autoespaço de  $H_0$ , de autovalor  $E_n(0)$ , para algum  $n$ , então a solução da equação de Schrodinger permanece, aproximadamente, no autoespaço de  $H_s$ , com energia  $E_n(s)$ , desde que a variação do Hamiltoniano seja suficientemente lenta ( $\epsilon$  seja pequeno) e separação entre os autovalores seja não nula

Aproveitamos para observar, e usaremos isso na formulação do teorema adiabático para sistemas estendidos, que podemos assumir, sem perda de generalidade, que  $E_n(s) = 0$  para todo  $s$ . De fato, se  $\phi(s)$  é uma solução da Equação (2.1), então

$$\tilde{\phi}(s) = e^{\frac{i}{\epsilon} \int_0^s E_n(s) du} \phi(s)$$

soluciona

$$\epsilon \frac{d}{ds} \tilde{\phi}(s) = -i \tilde{H}_s \tilde{\phi}(s), \quad (2.3)$$

com  $\tilde{H}_s = H_s - E_n(s)$ . A Equação (2.3) reduz o problema da evolução dos autovetores de  $E_n(s)$ , para o problema da evolução dos vetores do núcleo de  $\tilde{H}_\alpha$ .

### 2.2.1 Exemplo

Esse exemplo pode ser encontrado com mais detalhes em [3].

Tomemos a equação de Schrödinger

$$i \frac{d}{dt} \psi(t) = H_t \psi(t) \quad (2.4)$$

com a seguinte condição inicial  $\psi(0) = \psi_0$ , onde  $\psi(t)$  pertence a um espaço de Hilbert de dimensão dois. Nesse caso, estamos tomando  $H_t = S(t)H_D(t)S^{-1}(t)$ , onde

$$H_D(t) = \begin{pmatrix} E_1(t) & 0 \\ 0 & E_2(t) \end{pmatrix}, \quad S(t) = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\alpha(t)}{2}) & i \operatorname{sen}(\frac{\alpha(t)}{2}) \\ i \operatorname{sen}(\frac{\alpha(t)}{2}) & \cos(\frac{\alpha(t)}{2}) \end{pmatrix},$$

onde  $E_1(t), E_2(t), \alpha(t)$  são funções suaves. Para simplificar a notação, vamos denotar  $H = SH_D S^{-1}$ .

Através de uma mudança de base, podemos escrever  $H$  da seguinte maneira

$$H' = S^{-1}HS - iS^{-1}\dot{S},$$

onde  $\dot{S} = \frac{d}{dt}S$ . A explicação dessa mudança de base está bem detalhada em [3]. Logo,

$$H'(t) = \begin{pmatrix} E_1(t) & \frac{\dot{\alpha}(t)}{2} \\ \frac{\dot{\alpha}(t)}{2} & E_2(t) \end{pmatrix}.$$

A partir de agora, podemos escrever a Equação de Schrödinger (2.4) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} i\dot{\psi}'(t) &= H'\psi'(t), \\ \psi'(0) &= \psi'_0. \end{aligned}$$

A solução dessa equação é dada por

$$\psi'(t) = \begin{pmatrix} \phi(t)e^{-i\int_0^t E_1(s)ds} \\ \chi(t)e^{-i\int_0^t E_2(s)ds} \end{pmatrix},$$

onde  $\phi(t), \chi(t)$  são funções desconhecidas. Utilizando a expressão acima na Equação de Schrödinger, temos

$$i\dot{\phi}(t) = \frac{\dot{\alpha}(t)}{2}\chi(t)e^{-i\int_0^t E_2(s)-E_1(s)ds}, \quad (2.5)$$

$$i\dot{\chi}(t) = \frac{\dot{\alpha}(t)}{2}\phi(t)e^{-i\int_0^t E_2(s)-E_1(s)ds}. \quad (2.6)$$

Para  $\dot{\alpha} \neq 0$ , temos

$$\chi = \frac{2i}{\dot{\alpha}} \exp\left(i\int_0^t E_2(s) - E_1(s)ds\right) \dot{\phi} \quad (2.7)$$

como consequência da Equação (2.5). Se derivarmos a Equação (2.7) e substituirmos a sua derivada na Equação (2.6), então obtemos

$$\ddot{\phi} + \left(i(E_2 - E_1) - \frac{\ddot{\alpha}}{\dot{\alpha}}\right) \dot{\phi} + \left(\frac{\dot{\alpha}}{2}\right)^2 \phi = 0 \quad (2.8)$$

Vamos definir

$$\begin{aligned} E_1 &= E_1^{(0)} + \epsilon t, & E_1^{(0)} &= \text{const.}; \\ E_2 &= E_2^{(0)} + \epsilon t, & E_2^{(0)} &= \text{const.}; \\ \alpha &= 2\epsilon t. \end{aligned}$$

Logo, a Equação (2.8) assume a seguinte forma

$$\ddot{\phi} + i\Delta E\dot{\phi} + \epsilon^2\phi = 0, \quad (2.9)$$

onde  $\Delta E = E_2^{(0)} - E_1^{(0)}$  é a diferença dos níveis de energia. A solução geral dessa equação depende de duas constantes  $C_1, C_2$

$$\phi = e^{-it\Delta E}(C_1e^{i\omega_\epsilon t} + C_2e^{-i\omega_\epsilon t}),$$

onde

$$\omega_\epsilon = \sqrt{(\Delta E)^2 + \epsilon^2}.$$

A componente  $\chi$  é dada pela Equação (2.7). Suponhamos que a energia inicial do sistema é  $E_1$ , ou seja,

$$\phi(0) = 1, \quad \chi(0) = 0.$$

As soluções dos problemas de Cauchy (2.5), (2.6) são

$$\begin{aligned} \phi &= e^{-it\Delta E} \left[ \cos(\omega_\epsilon t) + \frac{i\Delta E}{\omega_\epsilon} \text{sen}(\omega_\epsilon t) \right], \\ \chi &= e^{it\Delta E} \left[ -\frac{i\epsilon}{\omega_\epsilon} \text{sen}(\omega_\epsilon t) \right]. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável  $v = \epsilon t$ , então temos que as componentes do vetor  $\psi'$  são

$$\begin{aligned} \psi'_1(v) &= e^{-i\left(\frac{v^2}{2\epsilon} + E_1^{(0)}\frac{v}{\epsilon} - \Delta E\frac{v}{\epsilon}\right)} \left[ \cos\left(\frac{\omega_\epsilon v}{\epsilon}\right) + \frac{i\Delta E}{\omega_\epsilon} \text{sen}\left(\frac{\omega_\epsilon v}{\epsilon}\right) \right], \\ \psi'_2(v) &= e^{-i\left(\frac{v^2}{2\epsilon} + E_2^{(0)}\frac{v}{\epsilon} - \Delta E\frac{v}{\epsilon}\right)} \left[ -\frac{i\epsilon}{\omega_\epsilon} \text{sen}\left(\frac{\omega_\epsilon v}{\epsilon}\right) \right]. \end{aligned}$$

Seja  $P_v$  o projetor no autoespaço de  $E_1(v)$ . Daí,  $P_v(\psi'(v)) = (\psi'_1(v), 0)$ . Logo,

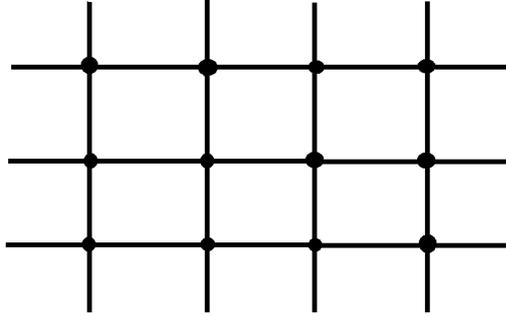
$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|P_v(\psi'(v)) - \psi'(v)\| = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} |\psi'_2(v)| = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{\omega_\epsilon} = 0.$$

Portanto, o teorema adiabático é válido.

## 2.3 Sistemas estendidos

Um parâmetro chave para qualquer sistema dinâmico é o **número  $N$  de subsistemas** que o sistema possui, pois um ponto importante é o entendimento da extensão espacial do sistema físico e da sua localidade. Para entender a ideia de subsistema, vamos considerar que o sistema é representado pelo  $\mathbb{Z}^2$ . Na figura abaixo podemos observar que existem vértices e arestas. Os vértices representam os subsistemas (esses subsistemas também são denominados **spins**). As

arestas representam as interações, ou seja, se dois vértices são conectados por uma aresta, então eles interagem; caso contrário, então eles não interagem.



O teorema adiabático sofre um problema quando o número de subsistemas é grande, pois a constante  $C$  na Equação (2.2) cresce com  $N$ . Essa divergência é inevitável, pois o teorema adiabático com  $C$   $N$ -independente está errado (mais detalhes na Seção (4.3.1)).

Muitas aplicações físicas envolvem sistemas macroscópicos, onde  $N \sim 10^{23}$ . A termodinâmica sempre assume que o sistema dinâmico é macroscópico, ou seja, podemos tomar o “limite termodinâmico”  $N \rightarrow \infty$ . Na dinâmica quântica, muitas considerações envolvendo o teorema adiabático estão de acordo com as redes estendidas de spins. Logo, existe uma necessidade prática e fundamental para encontrar uma forma do teorema adiabático que é aplicável para sistemas grandes.

## 2.4 Teoria da resposta linear

Desenvolvida inicialmente por Kubo em [7], a teoria mais geral formulada lida com a resposta de um sistema físico depois de sofrer uma perturbação controlada. Em um contexto típico, uma perturbação controlada (por exemplo, uma força eletromotriz) é ligada adiabaticamente do passado infinito para atingir uma intensidade  $\alpha > 0$  no tempo  $t = 0$ , onde se calcula a resposta induzida (nesse caso, o valor de uma corrente elétrica) para a primeira ordem em  $\alpha$ . Isso cria uma relação entre a resposta e a perturbação, com uma constante de proporcionalidade dada pela fórmula de Kubo. No exemplo considerado, a teoria da resposta linear estabelece então uma relação de proporcionalidade entre a força eletromotriz e a corrente induzida por ela, ou seja, ela resgata a Lei de Ohm, sendo a constante de proporcionalidade a condutividade do material.

A teoria é bem estabelecida para sistemas pequenos considerando que, para sistemas macroscópicos, uma prova de sua validade é considerada de interesse fundamental, ver [8]. Uma questão crucial é a ordem dos limites. No caso de sistemas estendidos, primeiro devemos tomar o limite macroscópico  $N \rightarrow \infty$ , depois o limite adiabático  $\epsilon \rightarrow 0$ , e por último o limite da resposta linear  $\alpha \rightarrow 0$ . Os autores do artigo [14] provam que esses limites existem nessa ordem, e explicitam uma fórmula para o coeficiente da resposta linear (igual a fórmula de Kubo, mas rigorosamente bem definida).

## Capítulo 3

# Definições e Configurações do Sistema

Neste capítulo vamos formular todas as definições e notação que serão necessárias para formular o teorema adiabático para sistemas de spin e a teoria da resposta linear.

### 3.1 O sistema quântico

Primeiramente, vamos definir a classe de modelos que será abordada nesta dissertação. Seja  $\Gamma$  um grafo contável onde denotamos a métrica do grafo por  $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ . Assumimos que  $\Gamma$  é  **$d$ -dimensional**, ou seja, existe  $\kappa > 0$  tal que

$$\sup_{y \in \Gamma} |\{x \in \Gamma : \text{dist}(x, y) \leq r\}| \leq \kappa r^d, \quad (3.1)$$

para todo  $r > 0$ , onde  $|X|$  denota a **cardinalidade** (ou o **volume**) de  $X \subset \Gamma$ . Para cada vértice  $x \in \Gamma$ , nós associamos um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_x$ , onde  $\sup\{\dim(\mathcal{H}_x) : x \in \Gamma\} < \infty$ . Denotamos o conjunto dos subconjuntos finitos de pontos do grafo  $\Gamma$  por  $\mathcal{F}(\Gamma)$ . Além disso, definimos o **diâmetro de  $\Lambda$**  por  $\text{diam}(\Lambda) = \max_{x, y \in \Lambda} \{\text{dist}(x, y)\}$ . Definimos o espaço de Hilbert e a álgebra de observáveis, ambos dependendo de  $\Lambda$ , por  $\mathcal{H}^\Lambda := \otimes_{x \in \Lambda} \mathcal{H}_x$  e  $\mathcal{A}^\Lambda := \mathcal{L}(\mathcal{H}^\Lambda)$ , respectivamente.

Para cada  $\Lambda' \subset \Lambda$ ,  $\mathcal{A}^{\Lambda'}$  é isomorfo a uma sub-álgebra de  $\mathcal{A}^\Lambda$ , dada por  $\mathcal{A}^{\Lambda'} \otimes 1_{\Lambda \setminus \Lambda'}$ . Para qualquer operador  $O \in \mathcal{A}^\Lambda$ , denotamos por  $\text{supp}(O)$  o menor  $X \subset \Lambda$  tal que  $O \in \mathcal{A}^X \otimes 1_{\Lambda/X}$  (ou seja, se  $O = O^X \otimes 1_{\Lambda/X}$  para algum  $O^X \in \mathcal{A}^X$ ). Dado que há uma identificação natural entre  $\mathcal{A}^X$  e  $\mathcal{A}^X \otimes 1_{\Lambda/X}$ , escreveremos simplesmente  $O \in \mathcal{A}^X$ . Cada  $\mathcal{A}^\Lambda$  possui um **traço**  $\text{Tr}_\Lambda : \mathcal{A}^\Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ .

Sendo  $\Gamma$  infinito, pode-se definir a denominada **álgebra quase local** por

$$\mathcal{A} = \overline{\bigcup_{\Lambda \in \mathcal{F}(\Gamma)} \mathcal{A}^\Lambda}^{\|\cdot\|},$$

onde  $\mathcal{F}(\Gamma)$  é o conjunto dos subconjuntos finitos de  $\Gamma$ . A barra significa que é tomado o completamento com respeito a norma para obter-se uma álgebra- $C^*$ .

Na mecânica quântica a rede  $\Gamma$  representa um sistema quântico onde cada  $x \in \Gamma$  representa (tipicamente) a localização espacial de um subsistema desse sistema quântico. Os espaços de Hilbert  $\mathcal{H}_x$  descrevem (também tipicamente) algum grau interno de liberdade de cada um desses

subsistemas. Os elementos autoadjuntos de uma álgebra  $\mathcal{A}^X$  descrevem a todas as grandezas físicas que podem ser medidas no subconjunto de subsistemas  $X$ . Como exemplo, podemos olhar  $\Gamma$  como uma estrutura cristalina onde cada  $x \in \Gamma$  representa um átomo dessa estrutura. Nesse caso, o espaço  $\mathcal{H}_x$  pode descrever, por exemplo, níveis eletrônicos de cada átomo. Um exemplo ainda mais concreto é o do experimento discutido na Seção (2.1). A posição fixa de cada íon seria dada pelos pontos de  $\Gamma$ , enquanto os espaços de Hilbert descrevem dois dos seus níveis de energia.

Uma **interação**  $\Phi_t$  é uma aplicação que associa qualquer  $X \in \mathcal{F}(\Gamma)$  e qualquer  $t \in \mathbb{R}$  a um operador auto-adjunto  $\Phi_t(X) \in \mathcal{A}^X$ . Dado  $\Lambda \in \mathcal{F}(\Gamma)$ , definimos, através das interações, um Hamiltoniano  $H_t^\Lambda \in \mathcal{A}^\Lambda$  dado por

$$H_t^\Lambda := \sum_{X \subset \Lambda} \Phi_t(X).$$

Como foi discutido no Capítulo (2), vamos considerar a interação em termos da reescala temporal  $s = \epsilon t$ ,  $s \in [0, 1]$ , ou seja, escrevemos  $\Phi_s$ . Logo, o Hamiltoniano associado à essa interação é dado por  $H_s^\Lambda := \sum_{X \subset \Lambda} \Phi_s(X)$ . A variação do estado quântico do sistema físico é descrita pela equação de Schrödinger

$$i\epsilon \frac{d}{ds} \psi_\epsilon(s) = H_s^\Lambda \psi_\epsilon(s), \quad (3.2)$$

onde  $\psi_\epsilon(s) \in \mathcal{H}$ , sendo  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert.

Pela Seção (1.7.2) sabemos que, dada uma condição inicial para a equação de Schrödinger, então podemos construir uma **dinâmica**  $\tau_t^\Lambda$ . Para  $t$  fixado e  $\Lambda$  finito, temos que  $\tau_t^\Lambda : \mathcal{A}^\Lambda \rightarrow \mathcal{A}^\Lambda$  é uma automorfismo.

Para o sistema como um todo, e sob algumas hipóteses sobre a interação, é possível definir, para  $t$  fixado, um limite

$$\lim_{\Lambda \uparrow \Gamma} \tau_t^\Lambda = \tau_t,$$

de maneira que  $\tau_t : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  seja uma dinâmica na álgebra quase-local  $\mathcal{A}$  (ver [9]).

As definições acima caracterizam o que se entende por um sistema quântico de spins (ver Seção 6.2 de [9]).

## 3.2 Decaimento espacial em $\Gamma$

Dado um grafo contável  $\Gamma$ , seja

$$F(r) = (1 + r)^{-(d+1)},$$

onde  $r \geq 0$  e  $d$  é a dimensão de  $\Gamma$  (ver Equação (3.1)). Usaremos a letra  $F$  para denotar essa função até o restante do texto. Essa função possui propriedades importantes [11] como:

i) a existência de uma constante  $C_F < \infty$  tal que

$$\sum_{z \in \Gamma} F(d(x, z))F(d(z, y)) \leq C_F F(d(x, y)),$$

$\forall x, y \in \Gamma$ ; e

ii)

$$\|F\|_1 := \sup_{x \in \Gamma} \sum_{z \in \Gamma} F(d(x, z)) < \infty. \quad (3.3)$$

Para qualquer função limitada, não crescente, positiva  $\zeta : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  e que é superaditiva logaritmicamente, ou seja,  $\zeta(r + s) \geq \zeta(r)\zeta(s)$ , nós denotamos  $F_\zeta(r) := \zeta(r)F(r)$ . Vale que  $F_\zeta$  possui as duas propriedades anteriores com  $C_{F_\zeta} \leq C_F$ .

Essas funções serão usadas para impor o qual rápido as interações  $(\Phi_t(X))$  decaem com a distância entre subsistemas  $(d(x, y))$ , com  $x, y \in X$ .

### 3.3 Interações

Uma família de interações  $\{\Phi_t(Z) : Z \in \mathcal{F}(\Gamma), t \in \mathbb{R}\}$  define uma família de Hamiltonianos  $\{H_t^\Lambda : \Lambda \in \mathcal{F}(\Gamma), t \in \mathbb{R}\}$  e, conseqüentemente, uma família de dinâmicas.

Para as provas que virão, iremos trabalhar com famílias de interações  $\Lambda$ -dependentes  $\{\Phi_t^\Lambda : \Lambda \in \mathcal{F}(\Gamma), t \in \mathbb{R}\}$  tal que  $\Phi_t^\Lambda(X) = 0, \forall t$ , a menos que  $X \subset \Lambda$ . Denotamos  $\{\Phi_t^\Lambda : \Lambda \in \mathcal{F}(\Gamma), t \in \mathbb{R}\} = \Phi$  e chamamos  $\Phi$  de **interação**.

Para  $n \in \mathbb{Z}$  e  $\zeta$ , definimos uma norma para as interações  $\Phi$ :

$$\|\Phi\|_{\zeta, n} := \sup_{\Lambda \in \mathcal{F}(\Gamma)} \sup_{x, y \in \Gamma} \sum_{Z \ni \{x, y\}} \sup_{t \in \mathbb{R}} |Z|^n \frac{\|\Phi_t^\Lambda(Z)\|}{F_\zeta(d(x, y))}.$$

O conjunto  $\mathcal{B}_{\zeta, n}$  destas interações é então um espaço de Banach segundo essa norma. Observe que  $\mathcal{B}_{\zeta, n} \subset \mathcal{B}_{\zeta, m}$  quando  $n > m$ .

Vamos trabalhar com duas classes de funções  $\zeta$ . A primeira classe é a classe das exponenciais  $\zeta(r) = \exp(-\mu r)$ , onde  $\mu > 0$ . A segunda classe é a classe das funções que decrescem mais rápido do que qualquer potência inversa,

$\mathcal{S} := \{\zeta : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty) : \zeta \text{ limitado, não crescente, super aditivo logaritmicamente e}$

$$\sup\{r^n \zeta(r) : r \in [0, \infty)\} < \infty, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Na sequência, a taxa de decaimento da exponencial, ou de uma função em  $\mathcal{S}$ , será irrelevante; mas será necessário, muitas vezes, tomar  $n$  suficientemente grande. Definimos novas classes de interações por

$$\mathcal{B}_{\varepsilon, n} = \cup_{\mu > 0} \mathcal{B}_{\exp(-\mu \cdot), n}, \quad \mathcal{B}_{\mathcal{S}, n} = \cup_{\zeta \in \mathcal{S}} \mathcal{B}_{\zeta, n},$$

e

$$\mathcal{B}_{\varepsilon,\infty} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_{\varepsilon,n}, \quad \mathcal{B}_{\mathcal{S},\infty} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_{\mathcal{S},n},$$

onde podemos observar que  $\mathcal{B}_{\varepsilon,n} \subset \mathcal{B}_{\mathcal{S},n}$

### 3.4 Hamiltonianos Locais

Dado  $\Lambda \in \mathcal{F}(\Gamma)$  e  $t \in \mathbb{R}$ , construímos, através das interações, um Hamiltoniano dependente de  $\Lambda$  e  $t$

$$H_t^\Lambda = \sum_{Z \in \mathcal{F}(\Gamma)} \Phi_t^\Lambda(Z) = \sum_{Z \subset \Lambda} \Phi_t^\Lambda(Z) \quad (3.4)$$

Dizemos que uma família de operadores  $H = \{H_t^\Lambda : \Lambda \in \mathcal{F}(\Gamma), t \in \mathbb{R}\}$  é um **Hamiltoniano local** se existe um interação  $\Phi_H$  tal que seja satisfeita a Equação (3.4). Dizemos que  $\Phi_H$  é uma **interação associada ao  $H$** , mas não é a única, pois a decomposição (Equação (3.4)) não é única. Denotamos  $\mathcal{L}_{\varepsilon,n}, \mathcal{L}_{\mathcal{S},n}, \mathcal{L}_{\varepsilon,\infty}, \mathcal{L}_{\mathcal{S},\infty}$ , os conjuntos de Hamiltonianos locais  $H$  que possuem uma interação  $\Phi_H$  em  $\mathcal{B}_{\varepsilon,n}, \mathcal{B}_{\mathcal{S},n}, \mathcal{B}_{\varepsilon,\infty}, \mathcal{B}_{\mathcal{S},\infty}$ , respectivamente.

Dizemos que  $H \in \mathcal{C}^k$  se a  $j$ -ésima derivada  $H^{(j)}$  de um Hamiltoniano existe para todo  $1 \leq j \leq k$ . Observemos que mesmo se  $H$  pertencer a alguma classe  $\mathcal{L}$ , a derivada de  $H$  não necessariamente pertence à  $\mathcal{L}$ . No nosso contexto, a Suposição (4.2) nos garante que, para o Hamiltoniano que iremos trabalhar, vale  $H^{(j)} \in \mathcal{L}_{\varepsilon,\infty}$ , para todo  $1 \leq j \leq d+k$ .

### 3.5 Exemplo

Um exemplo de sistema de spin é o modelo de Ising transversal unidimensional [10]. A rede  $\Gamma$  pode ser tomada como o conjunto dos números inteiros,  $\mathbb{Z}$ . Para cada  $i \in \Gamma$  associamos o espaço  $\mathbb{C}_i^2$  (a ideia é que cada sistema é um spin- $\frac{1}{2}$ ). Em  $\mathbb{C}_i^2$  definimos os operadores  $\sigma_i^x$  e  $\sigma_i^z$  pelas suas matrizes na base canônica:

$$\sigma_i^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_i^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

As interações (independentes do tempo) são definidas por:  $\Phi^\Lambda(X) = g\sigma_i^z \otimes I_{\Lambda/\{i\}}$  (que escreveremos, por simplicidade, como  $g\sigma_i^z$ ), quando  $X = \{i\} \subset \Lambda$ ,  $\Phi^\Lambda(X) = -\sigma_i^x \otimes \sigma_{i+1}^x \otimes I_{\Lambda/\{i,i+1\}}$  (que escreveremos, por simplicidade, como  $-\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x$ ), quando  $X = \{i, i+1\} \subset \Lambda$  e  $\Phi^\Lambda(X) = 0$  para todos os demais  $X$ .

Para  $\Lambda = \{-N, \dots, N\}$ , onde  $N \in \mathbb{N}$  (esses seriam os subconjuntos de maior interesse físico, aonde há uma “cadeia” contígua de sistemas), o Hamiltoniano é então dado por

$$H_\Lambda = - \sum_{i=-N}^{N-1} (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + g\sigma_i^z) - g\sigma_N^z.$$

Neste modelo,  $g$  representa um campo magnético que é aplicado no sistema. O termo  $\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x$  é denominado interação de troca. Além disso, o termo  $g\sigma_i^z$  representa a energia de interação do  $i$ -ésimo sistema com o campo magnético.

### 3.6 Comutadores

Sejam  $H, G \in \mathcal{L}_{\mathcal{S},n}$  Hamiltonianos locais tais que  $\Phi_H$  e  $\Phi_G$ , respectivamente, são as suas interações associadas. Definimos o comutador de  $H$  e  $G$  como um Hamiltoniano local  $J$  tal que

$$J^\Lambda = [H^\Lambda, G^\Lambda], \quad \Lambda \in \mathcal{F}(\Gamma).$$

Observemos que  $J \in \mathcal{L}_{\mathcal{S},n-1}$ . De fato, uma família de interações  $\Phi_J^\Lambda$  para  $J$  é dada por

$$\Phi_J^\Lambda(Z) = \sum_{\substack{X, Y \subset \Lambda: \\ X \cup Y = Z, X \cap Y = \emptyset}} [\Phi_H^\Lambda(X), \Phi_G^\Lambda(Y)]. \quad (3.5)$$

Pelo Lema (5.1) (ii), temos que  $\|\Phi_J\|_{\mathcal{S},n-1} < \infty$ .

### 3.7 Dinâmica e Cotas de Lieb-Robinson

Um Hamiltoniano local gera uma dinâmica  $\tau_{t,t_0}^\Lambda$  em  $\mathcal{A}^\Lambda$ , isto é, uma família de automorfismos  $\mathcal{A}^\Lambda \mapsto \mathcal{A}^\Lambda$  tal que

$$-i \frac{d}{dt} \tau_{t,t_0}^\Lambda(O) = [H_t^\Lambda, \tau_{t,t_0}^\Lambda(O)], \quad \tau_{t_0,t_0}^\Lambda(O) = O.$$

Essa dinâmica satisfaz uma cota de Lieb-Robinson [11], [12] se  $\Phi_H \in \mathcal{B}_{\zeta,n}$  para algum  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  e  $\zeta \in \mathcal{S}$ . Ou seja, existe uma constante  $C_\zeta$  tal que

$$\|[\tau_{t,t_0}^\Lambda(B), D]\| \leq \frac{2\|B\|\|D\|}{C_\zeta} e^{2C_\zeta\|\Phi\|_{\zeta,0}|t-t_0|} \sum_{x \in X, y \in Y} F_\zeta(d(x, y)) \quad (3.6)$$

para todo  $B \in \mathcal{A}^X$ ,  $D \in \mathcal{A}^Y$ , com  $X, Y \subset \Lambda$ . Se  $d(X, Y) > 0$ , então

$$\sum_{x \in X, y \in Y} F_\zeta(d(x, y)) \leq \|F\|_1 \min\{|X|, |Y|\} \zeta(d(X, Y)).$$

Em particular, no caso  $\zeta(r) = e^{-\mu r}$ , defini-se a **velocidade de Lieb-Robinson**

$$v := \frac{2C_\zeta\|\Phi\|_{\zeta,0}}{\mu}. \quad (3.7)$$

### 3.8 Aplicação $\mathcal{I}_s$

Agora, vamos apresentar uma ferramenta que será importante para a demonstração do teorema principal (Teorema (4.1)).

Seja  $H_s^\Lambda \in \mathcal{L}_{\varepsilon, \infty}$  tal que a Suposição (4.1) é satisfeita. Primeiramente, tomemos  $\tau_t^{s, \Lambda}$  a dinâmica gerada por esse Hamiltoniano local tal que  $\tau_t^{s, \Lambda}(A) = e^{itH_s^\Lambda} A e^{-itH_s^\Lambda}$  com  $s$  fixo. Seja  $W_\gamma \in L^1(\mathbb{R})$  uma função limitada tal que  $\sup\{|t|^n |W_\gamma(t)| : |t| > 1\} < \infty, \forall n \in \mathbb{N}$ , e tal que sua transformada de Fourier satisfaz

$$\widehat{W}_\gamma(\zeta) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi\zeta}}, \quad \text{se } |\zeta| \geq \gamma.$$

Um exemplo dessa função pode ser encontrado em [13].

Com isso, definimos a aplicação  $\mathcal{I}_s^\Lambda : \mathcal{A}^\Lambda \rightarrow \mathcal{A}^\Lambda$  por

$$\mathcal{I}_s^\Lambda(A) := \int_{\mathbb{R}} W_\gamma(t) \tau_t^{s, \Lambda}(A) dt. \quad (3.8)$$

Agora, tomemos  $A = G^\Lambda$ , a versão finita de um Hamiltoniano local  $G \in \mathcal{L}_{\mathcal{S}, n}$ , com interação associada  $\Phi_G$ . Definimos  $\mathcal{I}_s$ , uma aplicação entre Hamiltonianos locais, por

$$\mathcal{I}_s(G) := \{\mathcal{I}_s^\Lambda(G^\Lambda) : \Lambda \in \mathcal{F}(\Gamma)\}.$$

O Lema (5.3)(i) mostra que  $\mathcal{I}_s(G) \in \mathcal{L}_{\mathcal{S}, n-1}$ .

Como uma aplicação dessa construção, tomemos  $G = \dot{H}_s = \frac{d}{ds}H$ , onde  $H_s$  é o mesmo Hamiltoniano, no tempo fixo  $s$ , gerando a dinâmica  $\tau_t^{s, \Lambda}$ . Então

$$K_s = \mathcal{I}_s(\dot{H}_s),$$

é o gerador do fluxo espectral (ver Corolário (5.1)).

## Capítulo 4

# O Teorema adiabático e a Teoria da resposta linear

### 4.1 Suposições

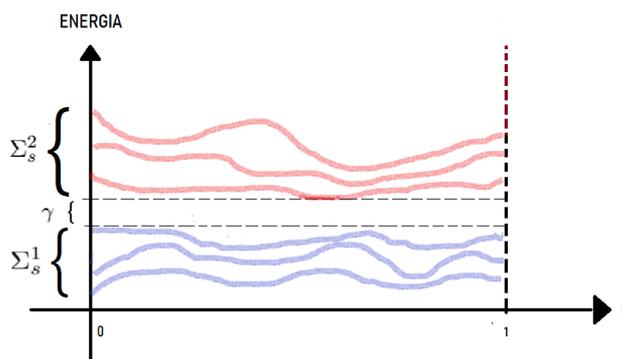
Para provar o Teorema Adiabático (4.1), é necessário fazer duas suposições.

**Suposição 4.1.** Para qualquer  $s \in [0, 1]$ , seja  $\Sigma_s$  o espectro do Hamiltoniano  $H_s^\Lambda$ . Existe uma divisão  $\Sigma_s = \Sigma_s^1 \cup \Sigma_s^2$ , tal que  $[\min \Sigma_s^1, \max \Sigma_s^1] \cap \Sigma_s^2 = \emptyset$  e

$$\gamma := \inf\{\text{dist}(\Sigma_s^1, \Sigma_s^2) : s \in [0, 1]\} > 0,$$

onde  $\gamma$  independe de  $\Lambda$ .

A figura abaixo é uma representação gráfica da Suposição (4.1).



Sempre que a Suposição (4.1) acontecer, definimos  $P_s$  como a **projeção espectral do Hamiltoniano**  $H_s$  associada ao  $\Sigma_s^1$ , ou seja,  $P_s$  é a projeção no espaço que é a soma direta dos auto espaços associados aos autovalores que pertencem ao fragmento  $\Sigma_s^1$ .

A suposição a seguir é estabelecida em termos da classe  $\mathcal{B}_{\varepsilon, \infty}$ . A classe  $\mathcal{B}_{\varepsilon, \infty}$  garante um decaimento “rápido” de  $\|\Phi_s(X)\|$  na medida que  $\text{diam}(X)$  aumenta,  $\forall s \in [0, 1]$ . Essa é uma

hipótese natural em muitos contextos, dado que a interação entre sistemas físicos tende a decair com a distância entre eles.

**Suposição 4.2.** Seja  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $m \geq 1$ . Para qualquer  $X \in \mathcal{F}(\Gamma)$ , a função  $s \mapsto \Phi_s(X)$  é  $(d + m)$  - vezes continuamente diferenciável. As suas derivadas definem interações dependentes do tempo  $\{\Phi_s^{(k)}(X) : X \in \mathcal{F}(\Gamma)\}$  tal que  $\Phi_s^{(k)} \in \mathcal{B}_{\varepsilon, \infty}$  para  $0 \leq k \leq d + m$ , onde  $\Phi_s^{(0)} = \Phi_s$ .

Para simplificar a ideia, o leitor pode manter em mente as **interações de alcance finito**: existe  $R > 0$  tal que  $\Phi_s(X) = 0$  a menos que  $\text{diam}(X) \leq R$ . Nesse caso, a afirmação  $\Phi^{(k)} \in \mathcal{B}_{\varepsilon, \infty}$ , na Suposição (4.2), é equivalente a dizer que:

$$\sup\{\|\Phi_s^{(k)}(X)\| : X \in \mathcal{F}(\Gamma), s \in [0, 1]\} < \infty.$$

## 4.2 O Teorema Adiabático

Vamos considerar  $\psi_\epsilon(s)$  uma solução normalizada da Equação (3.2), tal que a condição inicial  $\psi_\epsilon(0)$  pertença ao fragmento espectral  $\Sigma_0^1$ , isto é,

$$P_0\psi_\epsilon(0) = \psi_\epsilon(0), \quad \|\psi_\epsilon(0)\| = 1. \quad (4.1)$$

O teorema adiabático a seguir, enunciado e demonstrado em [14], é o principal teorema que queremos apresentar nesta dissertação.

**Teorema 4.1.** Assuma que a **Suposição (4.1)** é válida.

(i) Se a **Suposição (4.2)** é satisfeita para  $m = 1$ , e se  $\Phi_s^{(k)}(X)|_{s=0} = 0$ ,  $\forall X \in \mathcal{F}(\Gamma)$  e  $1 \leq k \leq d + 1$ , então existe um vetor  $\tilde{\psi}_\epsilon(s) \in \text{Im}(P_s)$  com  $\|\tilde{\psi}_\epsilon(s)\| = 1$  e existe  $C_1 < \infty$ , que é independente de  $\Lambda$  e  $\epsilon$ , tal que

$$\sup_{s \in [0, 1]} \{|\langle \psi_\epsilon(s), O\psi_\epsilon(s) \rangle - \langle \tilde{\psi}_\epsilon(s), O\tilde{\psi}_\epsilon(s) \rangle|\} \leq C_1 |\text{supp}(O)|^2 \|O\| \epsilon \quad (4.2)$$

para qualquer  $O$  com  $\text{supp}(O) \subset \Lambda$ .

(ii) Se a **Suposição (4.2)** é satisfeita para  $m > 1$ , e se  $\Phi_s^{(k)}(X)|_{s=0} = \Phi_s^{(k)}(X)|_{s=1} = 0$ ,  $\forall X \in \mathcal{F}(\Gamma)$  e  $1 \leq k \leq d + m$ , então

$$|\langle \psi_\epsilon(1), O\psi_\epsilon(1) \rangle - \langle \tilde{\psi}_\epsilon(1), O\tilde{\psi}_\epsilon(1) \rangle| \leq C_m |\text{supp}(O)|^2 \|O\| \epsilon^m \quad (4.3)$$

Para comparar esse resultado com a Equação (2.2), é conveniente considerar o caso especial em que  $\Sigma_s^1 = \{0\}$  para todo  $s$ . Então o Teorema (4.1), no caso  $m = 1$ , é a afirmação dada pela Equação (2.2), exceto pelo fato da proximidade de  $\psi_\epsilon(s)$  ao subespaço espectral instantâneo  $P_s$  ser expressa por uma topologia mais grossa. A presença do **gap** (Suposição (4.1)) permite que  $\Sigma_s^1$  contenha mais de um ponto.

Uma questão natural, que não é explicitada pelo teorema, é entender quais são os vetores  $\tilde{\psi}_\epsilon(s) \in \text{Im}(P_s)$ . Em geral não é possível dizer muito sobre isso, mas um caso especial surge se for assumido que o fragmento espectral  $\Sigma_s^1$  é (quase) degenerado. Mais especificamente, sendo

$$\delta = \sup_{s \in [0,1]} (\max \Sigma_s^1 - \min \Sigma_s^1),$$

os autores de [14] assumem a **quase degenerescência** na forma

$$\delta \leq C \min\{\epsilon^2, \frac{\epsilon}{|\Lambda|}\} \quad (4.4)$$

Muitos modelos de sistemas de spin satisfazem a Equação (4.4), como o modelo de Ising Transverso [10]. Neste modelo (na verdade, para uma versão com condições periódicas de contorno do exemplo que apresentamos na seção (3.5)), temos que

$$\delta \leq C|g|^N, \text{ para } |g| < 1,$$

onde  $N$  é o número de spins do sistema,  $g$  é o campo magnético e  $C$  é uma constante. Além disso, é possível mostrar que existe uma constante  $C_1$  tal que

$$\gamma \geq C_1|g - 1|, \text{ para } |g| > 1.$$

Nesse caso,  $\Sigma_s^1$  possui dois pontos. Também é possível mostrar que existe uma constante  $C_2$  tal que

$$\gamma \geq C_2|g - 1|, \text{ para } |g| < 1.$$

Nesse caso,  $\Sigma_s^1$  possui apenas um ponto.

A expansão que iremos apresentar mostra que se a Equação (4.4) é satisfeita, então  $\tilde{\psi}_\epsilon(s)$  (satisfazendo o Teorema (4.1) (i)) pode simplesmente ser escolhido como uma solução da equação

$$i \frac{d}{ds} \Omega(s) = -i[P_s, \dot{P}_s] \Omega(s), \quad \Omega(0) = \psi_0, \quad (4.5)$$

apesar de  $[P_s, \dot{P}_s]$  não ser um Hamiltoniano local. É importante destacar que a solução  $\Omega(s)$  está na imagem de  $P_s$ , ou seja,  $P_s \Omega(s) = \Omega(s)$ .

### 4.3 Exemplos

Agora, vamos apresentar alguns exemplos envolvendo o teorema principal.

### 4.3.1 Spins sem interação

Seja  $\Phi_s$  uma interação tal que  $\Phi_s(X) = 0$  quando  $|X| > 1$ . Vamos denotar  $h_{x,s} = \Phi_s(\{x\})$ . Assim nós temos

$$H_s^\Lambda = \sum_{x \in \Lambda} h_{x,s}.$$

Então  $\otimes_{x \in \Lambda} \psi_{x,\epsilon}(s)$  é uma solução da equação de Schrodinger para  $H_s^\Lambda$  desde que, para cada  $x$ ,  $\psi_{x,\epsilon}(s)$  seja solução da equação de Schrödinger

$$i\epsilon \frac{d}{ds} \psi_{x,\epsilon}(s) = h_{x,s} \psi_{x,\epsilon}(s).$$

Vamos assumir que  $h_{x,s}$  possui o autovalor 0 na parte inferior do seu espectro, e seja  $P_{x,s}$  a projeção associada a esse autovalor. Assumindo que a condição inicial  $\otimes_x \psi_{x,\epsilon}(0)$  satisfaz a Equação (4.1), isto é,  $P_{x,0} \psi_{x,\epsilon}(0) = \psi_{x,\epsilon}(0)$  e  $\|\psi_{x,\epsilon}(0)\| = 1$ , denotando  $P_s = \otimes_{x \in \Lambda} P_{x,s}$ , temos que

$$\|(1 - P_s) \otimes_{x \in \Lambda} \psi_{x,\epsilon}(s)\|^2 = 1 - \Pi_{x \in \Lambda} \|P_{x,s} \psi_{x,\epsilon}(s)\|^2. \quad (4.6)$$

Assumindo que para cada sítio  $x$  o teorema adiabático é satisfeito na forma da Equação (2.2), então temos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|(1 - P_s) \otimes_{x \in \Lambda} \psi_{x,\epsilon}(s)\| = 0.$$

Por outro lado, deve-se esperar que  $\sup_x \|P_{x,s} \psi_{x,\epsilon}(s)\| \leq 1 - c\epsilon$ , para algum  $c > 0$ , isto é, o erro não desaparece por completo. Nesse caso, temos que

$$\Pi_{x \in \Lambda} \|P_{x,s} \psi_{x,\epsilon}(s)\|^2 \leq (1 - c\epsilon)^{2|\Lambda|}.$$

Logo, aumentando o volume  $|\Lambda|$ , temos

$$\lim_{|\Lambda| \rightarrow \infty} \|(1 - P_s) \otimes_{x \in \Lambda} \psi_{x,\epsilon}(s)\| = 1$$

Isso nos mostra que o teorema adiabático não funciona na forma da Equação (2.2) quando a constante  $C$  depende do volume de  $\Lambda$ .

### 4.3.2 Perturbações de sistemas com gap

Exemplos triviais e não triviais para a aplicação do teorema principal, surgem de perturbações de sistemas simples de spins com gap.

A única suposição do teorema principal que não pode ser facilmente checada é a presença de um gap espectral separando o fragmento espectral  $\Sigma_s^1$  do resto do espectro. A situação mais natural acontece quando o segmento está na parte inferior do espectro. Nesse caso, podemos chamar o fragmento  $\Sigma_s^1$  de **espaço do estado fundamental**. Em muitos casos, a dimensão do espaço do estado fundamental permanece limitada e a largura da “faixa” do estado fundamental diminui para zero quando o volume aumenta. Não existe uma conjectura precisamente formulada

que afirma que um Hamiltoniano local genérico possui um único estado fundamental separado por um gap. Recentemente foi provado que o problema para definir se um Hamiltoniano possui um gap (ou não) é indecidível [15]. Uma das ferramentas rigorosas para provar a existência de gaps acima do espaço do estado fundamental se encontra em [16].

Nas possíveis escolhas do Hamiltoniano  $H_0$  que não sofre perturbação, podemos incluir exemplos não interativos (ver Seção (4.3.1)) e outros exemplos que podem ser encontrados em [17],[18], [19], [20], [21], [22]. O Hamiltoniano completo é da forma

$$H_s = H_0 + \alpha G_s, \quad s \in [0, 1], \alpha \in \mathbb{R}, \quad (4.7)$$

sendo  $G_s$  um Hamiltoniano satisfazendo a Suposição (4.2), e  $\alpha$  pequeno. Assim, nesses casos, todas as suposições do Teorema (4.1) podem ser verificadas.

Podemos encontrar exemplos interessantes na forma da Equação (4.7) onde o fragmento espectral  $\Sigma_s^1$  não está na parte inferior do espectro. Em [17], onde  $H_0$  descreve spins independentes, e em [19], onde  $H_0$  é o modelo denominado “código tórico”.

#### 4.4 A evolução adiabática do projetor $P_0$

O Teorema (4.1) garante que a solução  $\psi_\epsilon(s)$  da Equação (3.2), que inicialmente está no fragmento espectral  $\Sigma_0^1$  (ou seja,  $\psi_\epsilon(0) \in \Sigma_0^1$ ), evolui no fragmento espectral  $\Sigma_s^1$  a menos de erros diabáticos  $\epsilon$  muito pequenos. O método usado para provar esse teorema pode ser adaptado para trabalharmos com o projetor espectral associado ao fragmento completo. Essa versão será particularmente usada para discutir a relação do Teorema (4.1) com os resultados da evolução quase-adiabática que iremos apresentar daqui a pouco.

Tomemos a equação de von Neumann para operadores de traço 1 não-negativos

$$i\epsilon \frac{d}{ds} \rho_\epsilon(s) = [H_s^\Lambda, \rho_\epsilon(s)]. \quad (4.8)$$

A solução dessa equação preserva a positividade, preserva o traço, e se a condição inicial for uma projeção, então a solução é uma projeção para todo  $s$  (ver [23]). Consideraremos  $P_0$  a condição inicial e denotaremos a solução da equação por  $P_\epsilon(s)$ , ou seja,

$$P_\epsilon(s) = P_\epsilon^*(s) = (P_\epsilon(s))^2$$

é a solução da equação

$$i\epsilon \frac{d}{ds} P_\epsilon(s) = [H_s^\Lambda, P_\epsilon], \quad P_\epsilon(0) = P_0. \quad (4.9)$$

O teorema adiabático sugere então que  $P_\epsilon(s)$  permanece perto de  $P_s$  para  $s \in [0, 1]$ , e de fato vale o seguinte: sob as condições do Teorema (4.1)(i),

$$\sup_{s \in [0,1]} \left| \frac{\text{Tr}(P_\epsilon(s)O)}{\text{Tr}(P_\epsilon(s))} - \frac{\text{Tr}(P_s O)}{\text{Tr}(P_s)} \right| \leq C |\text{supp}(O)|^2 \|O\| \epsilon \quad (4.10)$$

uniformemente no volume  $|\Lambda|$ . Além disso, similarmente ao Teorema (4.1)(ii), temos que

$$\left| \frac{\text{Tr}(P_\epsilon(1)O)}{\text{Tr}(P_\epsilon(1))} - \frac{\text{Tr}(P_1O)}{\text{Tr}(P_1)} \right| \leq C_m |\text{supp}(O)|^2 \|O\| \epsilon^m,$$

onde  $m$  é o grau da suavidade do Hamiltoniano  $H_s^\Lambda$ .

## 4.5 Conexão com o fluxo quase-adiabático

Pelo o que foi discutido acima, os autores criaram uma versão do Teorema (4.1) de maneira que essa nova versão afirme que o fluxo  $s \mapsto P_\epsilon(s)$  é relativamente próximo da aplicação  $s \mapsto P_s$ .

Um ponto importante na prova desse teorema é a possibilidade de construirmos  $s \mapsto P_s$  como um fluxo que é gerado por um Hamiltoniano local diferente de  $H_s^\Lambda$ . Mais precisamente, existe  $K_s \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}, \infty}$  tal que

$$\dot{P}_s = i[K_s, P_s]. \quad (4.11)$$

O Corolário (5.1) faz uma breve prova sobre essa existência. A prova original pode ser encontrada em [13], [24]. Normalmente,  $K_s$  é denominado como 'evolução quase-adiabática' ou 'evolução adiabática', mas nós iremos chamá-lo de **gerador do fluxo espectral**.

## 4.6 Idéia principal da prova do Teorema adiabático

Os autores definem uma sequência de Hamiltonianos locais  $\{A_\alpha : 1 \leq \alpha \leq n\}$  gerando uma sequência de **transformações “vestidas” unitárias locais** de ordem  $n$

$$U_{n,\epsilon}(s) := \exp(iS_{n,\epsilon}(s)), \quad S_{n,\epsilon}(s) := \sum_{\alpha=1}^n \epsilon^\alpha A_\alpha(s), \quad (4.12)$$

que satisfazem a seguinte equação de Schrödinger

$$i\epsilon \frac{d}{ds} U_{n,\epsilon}(s) = (H_s + R_{n,\epsilon}(s)) U_{n,\epsilon}(s),$$

onde  $R_{n,\epsilon}(s)$  é um Hamiltoniano local de ordem  $\epsilon^{n+1}$ . Cada Hamiltoniano local  $A_\alpha(s)$  é uma função polinomial de todos operadores anteriores e suas derivadas, ou seja, de todos operadores  $A_w(s)$ ,  $\dot{A}_w(s)$ ,  $\forall w \in \mathbb{N}$  tal que  $1 \leq w \leq \alpha - 1$ .

A diferença entre a projeção vestida  $\Pi_{n,\epsilon}(s) := U_{n,\epsilon}(s) P_s U_{n,\epsilon}^*$  e a solução  $\rho_\epsilon(s)$  da Equação(4.8), é localmente de ordem  $\epsilon^{n+1-d}$ . Por construção,  $S_{n,\epsilon}(s)$  é de ordem  $\epsilon$ . Logo, a diferença entre o estado fundamental vestido e o próprio estado fundamental é de ordem  $\epsilon$ .

Mais ainda, os Hamiltonianos  $A_\alpha(s)$  e suas derivadas se anulam quando  $s = 0$  e  $s = 1$ . Logo,  $S_{n,\epsilon}(s)$  também se anula e a transformação vestida se torna trivial. Isso permite melhorar a cota quando  $s$  está fixo.

## 4.7 Teoria da resposta linear

Os autores do artigo [14] adaptaram a fórmula de Kubo [7] (a respeito da teoria da resposta linear) para o contexto dos sistemas quânticos de spin. Seja  $H_{\text{inicial}}$  o Hamiltoniano não perturbado no passado infinito, sobre o qual uma perturbação  $V$  é feita lentamente para alcançar uma perturbação de ordem  $\alpha$  em  $t = 0$ . O Hamiltoniano completo seria então da forma

$$H_{\epsilon t, \alpha} = H_{\text{inicial}} + e^{\epsilon t} \alpha V, \quad t \in (-\infty, 0].$$

Seja  $P_\alpha$  a projeção no espaço do estado fundamental de  $H_{0, \alpha}$ . Observe que  $P_0$  é a projeção no espaço do estado fundamental de  $H_{\text{inicial}}$ . Como na Seção (4.4),  $P_{\epsilon, \alpha}(t)$  representa a solução da equação de Schrödinger gerada por  $H_{\epsilon t, \alpha}$  com a condição inicial  $P_{\epsilon, \alpha}(-\infty) = P_0$ . No volume finito essas projeções podem ser interpretadas como matrizes densidade. Adotando a perspectiva de estados como funcionais em observáveis, definimos

$$\omega_{\epsilon, \alpha; t}(O) = \frac{\text{Tr}(OP_{\epsilon, \alpha}(t))}{\text{Tr}(P_{\epsilon, \alpha})}, \quad \omega_\alpha(O) = \frac{\text{Tr}(OP_\alpha)}{\text{Tr}(P_\alpha)},$$

para qualquer observável local  $O$ , tendo em mente que que todos esse objetos são dependentes do volume. Os denominadores são constantes nos parâmetros  $\epsilon, \alpha, t$ , mas, genericamente, eles mudam com o volume.

O coeficiente de resposta é associado a um observável local  $J$ . Formalmente, o coeficiente de resposta  $f_{J, V}$  é dado como a resposta linear em  $\alpha$  para a perturbação  $V$  no seguinte limite adiabático:

$$\omega_{\epsilon, \alpha; 0}(J) - \omega_\alpha(J) - \alpha f_{J, V} = o(\alpha), \quad \text{quando } \alpha \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow 0. \quad (4.13)$$

O que torna a afirmação da validade da resposta linear verdadeira é o fato do limite  $\epsilon \rightarrow 0$  ser tomado primeiro e o fato da cota  $o(\alpha)$  ser uniforme no volume. Em particular, se  $o(\alpha)$  depender do volume  $\Lambda$ , então a afirmação resultante poderá não ter sentido físico, como é argumentado em [25].

Agora, vamos ver como as configurações acima se conectam à teoria adiabática. Como a dependência do tempo é lenta no limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , então pode-se aproximar a projeção evoluída  $P_{\epsilon, \alpha}$  pela projeção instantânea do estado fundamental  $P_\alpha$ , e assim o estado evoluído  $\omega_{\epsilon, \alpha; 0}$  pelo estado instantâneo  $\omega_\alpha$ . Mais ainda, a substituição pode ser feita uniformemente no volume, desde que o observável  $J$  seja um observável local fixo. Para obtermos uma expressão para o coeficiente de resposta  $f_{J, V}$ , temos então que expandir  $\omega_\alpha(J)$  em  $\alpha$ . Enquanto existir o gap para os Hamiltonianos, o termo de primeira ordem é obtido usando o gerador do fluxo espectral  $K_\alpha$ , ver Equação (4.11). Utilizando a ciclicidade do traço em  $\alpha = 0$ , obtemos

$$\omega_\alpha(J) = \omega_0(J) - i\alpha\omega_0([K_0, J]) + o(\alpha),$$

identificando  $f_{J, V} = -i\omega_0([K_0, J])$ .

Mais precisamente, para garantirmos a teoria da resposta linear, os autores provam o seguinte teorema

**Teorema 4.2.** Suponha que as **Suposições** (4.1), (4.2) são satisfeitas para a família de Hamiltonianos  $H_{\text{inicial}} + \sigma\alpha V$ , para algum  $\alpha > 0$  fixo e  $\sigma \in [0, 1]$ . Seja  $J \in \mathcal{A}^X$  um observável, com  $X \subset \Lambda$ , e seja  $f_{J,V} = -i\omega_0([K_0, J])$ . Então a expressão

$$\alpha^{-1}(\omega_{\epsilon, \alpha; 0}(J) - \omega_0(J) - \alpha f_{J,V}) \quad (4.14)$$

converge para 0, uniformemente no volume, tomando primeiro o limite  $\epsilon \rightarrow 0$  e depois o limite  $\alpha \rightarrow 0$ .

A convergência funciona para o limite  $(\alpha, \epsilon) \rightarrow (0, 0)$ , mas é preciso ordenar os limites ( $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\alpha \rightarrow 0$ ) para que o teorema tenha sentido físico. A expressão dada no teorema para  $f_{J,V}$ , não é muito familiar na literatura da física. Uma expressão comumente usada é dada por

$$f_{J,V} = i \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-\delta t} \omega_0([\tau_{-t}(V), J]) dt, \quad (4.15)$$

onde  $\tau_t(V) = e^{itH_{\text{inicial}}} V e^{-itH_{\text{inicial}}}$ . No Capítulo (5), iremos provar que essa expressão coincide com a expressão dada pelo Teorema (4.2).

Para o caso de volume infinito, uma formulação pode ser sugerida. Seja  $\mathcal{O}$  um observável na álgebra quase local  $\mathcal{A}$ , sendo

$$\mathcal{A} = \overline{\bigcup_{\Lambda \in \mathcal{F}(\Gamma)} \mathcal{A}^\Lambda}^{\|\cdot\|},$$

onde  $\mathcal{F}(\Gamma)$  é o conjunto dos subconjuntos finitos de  $\Gamma$ . Seja  $\mathcal{S}(\mathcal{A})$  o conjunto dos estados  $\omega$  em  $\mathcal{A}$ , ou seja, funcionais lineares  $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ , positivos ( $\omega(O^*O) \geq 0$ ,  $\forall O \in \mathcal{A}$ ) e cuja norma é um (ver Seção (1.7)). Na topologia fraca-\* (weak\*-topology), a família de estados fundamentais  $\{\omega_\alpha^\Lambda : \Lambda \in \mathcal{F}(\Gamma)\}$  possui pontos de acumulação em  $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ . Vamos assumir, para simplificar, que existe um único limite

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \Gamma} \omega_\alpha^\Lambda(O) = \bar{\omega}_\alpha(O),$$

$\forall O \in \mathcal{A}$ , sendo  $\bar{\omega}_\alpha$  um estado. Nesse caso, segue que os estados dinamicamente definidos  $\omega_{\epsilon, \alpha; t}^\Lambda$  possuem limites  $\bar{\omega}_{\epsilon, \alpha; t}$ , e o teorema anterior pode ser reformulado da seguinte maneira

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \alpha^{-1}(\bar{\omega}_{\epsilon, \alpha; 0}(J) - \bar{\omega}_0(J)) = -i\bar{\omega}_0([K_0, J]), \quad (4.16)$$

onde  $[K_0, J] = \lim_{\Lambda \rightarrow \Gamma} [K_0^\Lambda, J]$ .

# Capítulo 5

## Provas

Diminuímos o máximo possível, sem causar prejuízo no entendimento do conteúdo, o uso do sobrescrito  $\Lambda$  em  $H^\Lambda$  e  $\Phi^\Lambda$ . Devemos alertar que, a partir de agora,  $H$  representa um elemento qualquer da família de Hamiltonianos locais  $\{H^\Lambda : \Lambda \in \mathcal{F}(\Gamma)\}$ . Isso é válido para qualquer Hamiltoniano local, por exemplo: se dizemos que  $G$  é um Hamiltoniano local, então  $G$  representa um elemento da família  $\{G^\Lambda : \Lambda \in \mathcal{F}(\Gamma)\}$ .

A notação  $H$  se refere especificamente ao Hamiltoniano do Teorema (4.1) e que satisfaz as Suposições (4.1) e (4.2). Além disso, vamos omitir o sobrescrito  $s$  para os operadores que dependem de  $s$ . No entanto, os operadores  $O$  não dependem de  $s$ . Quando o assunto for diferenciabilidade, vamos denotar  $\dot{A} = \frac{d}{ds}A$ .

### 5.1 Lemas Técnicos

Agora, vamos apresentar lemas técnicos que serão utilizados para a construção da prova do Teorema principal. Fica a critério do leitor ler, ou não ler, as demonstrações desses lemas.

**Lema 5.1.** Pela definição da interação associada com um comutador de Hamiltonianos locais (Seção (3.4)), segue que:

(i) Se  $H \in \mathcal{L}_{\zeta,0}$ , então para qualquer  $O$  com  $\text{supp}(O) \subset \Lambda$ ,

$$\|[H, O]\| \leq 2\|O\|\|\text{supp}(O)\|F_\zeta\|_1\|\Phi_H\|_{\zeta,0}.$$

(ii) Sejam  $n, k \in \mathbb{N}$  e  $A_0, \dots, A_k \in \mathcal{L}_{\zeta, n+k}$ . Então  $ad_{A_k} \dots ad_{A_1}(A_0) \in \mathcal{L}_{\zeta, n}$  e existe  $C > 0$  que depende de  $\zeta$ , mas não depende de  $n$  e  $k$ , tal que

$$\|\Phi_{ad_{A_k} \dots ad_{A_1}(A_0)}\|_{\zeta, n} \leq C^k 2^{k(n+k)} \|\Phi_{A_k}\|_{\zeta, n+k} \dots \|\Phi_{A_1}\|_{\zeta, n+k} \|\Phi_{A_0}\|_{\zeta, n+k}.$$

(iii) Se  $A_0, \dots, A_k \in \mathcal{L}_{\zeta, \infty}$ , então  $ad_{A_k} \dots ad_{A_1}(A_0) \in \mathcal{L}_{\zeta, \infty}$ .

*Demonstração.* (i)

$$\begin{aligned} \|[H, O]\| &= \left\| \left[ \sum_{X \subset \Lambda} \Phi_H^\Lambda(X), O \right] \right\| = \left\| \left[ \sum_{\substack{X \subset \Lambda: \\ X \cap \text{supp}(O) \neq \emptyset}} \Phi_H^\Lambda(X), O \right] \right\| \\ &\leq 2\|O\| \sum_{\substack{X \subset \Lambda: \\ X \cap \text{supp}(O) \neq \emptyset}} \|\Phi_H^\Lambda(X)\|. \end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{X \subset \Lambda: \\ X \cap \text{supp}(O) \neq \emptyset}} \|\Phi_H^\Lambda(X)\| &\leq \sum_{x \in \text{supp} O} \sum_{\substack{X \subset \Lambda: \\ x \in X}} \|\Phi_H^\Lambda(X)\| \\ &\leq \sup_{\Lambda \in \mathcal{F}(\Gamma)} \sum_{x \in \text{supp} O} \sum_{y \in \Lambda} \sum_{\substack{X \subset \Lambda: \\ x, y \in X}} \frac{\|\Phi_H^\Lambda(X)\|}{F_\zeta(d(x, y))} F_\zeta(d(x, y)). \end{aligned}$$

Pelas duas equações acima, temos

$$\begin{aligned} \|[H, O]\| &\leq 2\|O\| \sup_{\Lambda \in \mathcal{F}(\Gamma)} \sum_{x \in \text{supp} O} \sum_{y \in \Lambda} \sum_{\substack{X \subset \Lambda: \\ x, y \in X}} \frac{\|\Phi_H^\Lambda(X)\|}{F_\zeta(d(x, y))} F_\zeta(d(x, y)) \\ &\leq 2\|O\| \|\Phi_H\|_{\zeta, 0} \sup_{\Lambda \in \mathcal{F}(\Gamma)} \sum_{x \in \text{supp}(O)} \sum_{y \in \Lambda} F_\zeta(d(x, y)) \end{aligned}$$

Pela Equação (3.3), obtemos

$$\begin{aligned} \|[H, O]\| &\leq 2\|O\| \|\Phi_H\|_{\zeta, 0} \|F_\zeta\|_1 \sup_{\Lambda \in \mathcal{F}(\Gamma)} \sum_{x \in \text{supp}(O)} 1 \\ &= 2\|O\| \|\Phi_H\|_{\zeta, 0} \|F_\zeta\|_1 |\text{supp}(O)| \end{aligned}$$

(ii) Detonando  $G = [A_1, A_0]$ , então, pela Seção (3.5), temos que

$$\Phi_G^\Lambda(Z) = \sum_{\substack{X_0, X_1 \subset \Lambda: \\ X_0 \cup X_1 = Z, X_0 \cap X_1 \neq \emptyset}} [\Phi_{A_1}^\Lambda(X_1), \Phi_{A_0}^\Lambda(X_0)].$$

Como  $Z = X_0 \cup X_1$ , então temos

$$|Z|^n \leq (|X_0| + |X_1|)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |X_0|^k |X_1|^{n-k},$$

Vamos cotar a soma

$$\sum_{Z \ni \{x, y\}} \frac{|Z|^n \|\Phi_G^\Lambda(Z)\|}{F_\zeta(d(x, y))}$$

para dois casos: ou  $x, y \in X_0$  ou  $x \in X_0, y \in X_1 \setminus X_0$ . Os casos  $x, y \in X_1$  e  $x \in X_1, y \in X_0 \setminus X_1$ , são cotados de maneira análoga. No caso em que  $x, y \in X_0$ , temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{Z \ni \{x,y\}} \frac{|Z|^n \|\Phi_G^\Lambda(Z)\|}{F_\zeta(d(x,y))} &\leq \sum_{Z \ni \{x,y\}} \sum_{\substack{X_0, X_1 \subset \Lambda: \\ X_0 \cup X_1 = Z, X_0 \cap X_1 \neq \emptyset}} \frac{2|Z|^n}{F_\zeta(d(x,y))} \|\Phi_{A_0}^\Lambda(X_0)\| \|\Phi_{A_1}^\Lambda(X_1)\| \\
&\leq 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{Z \ni \{x,y\}} \sum_{\substack{X_0, X_1 \subset \Lambda: \\ X_0 \cup X_1 = Z, X_0 \cap X_1 \neq \emptyset}} \frac{|X_0|^k |X_1|^{n-k}}{F_\zeta(d(x,y))} \|\Phi_{A_0}^\Lambda(X_0)\| \|\Phi_{A_1}^\Lambda(X_1)\|.
\end{aligned}$$

Pela equação anterior e pelo Apêndice (7.7), temos

$$\begin{aligned}
&\sum_{Z \ni \{x,y\}} \frac{|Z|^n \|\Phi_G^\Lambda(Z)\|}{F_\zeta(d(x,y))} \\
&\leq 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{X_0 \ni \{x,y\}} |X_0|^k \frac{\|\Phi_{A_0}^\Lambda(X_0)\|}{F_\zeta(d(x,y))} \sum_{z_0 \in X_0} \sum_{z_1 \in \Lambda} \sum_{X_1 \ni \{z_0, z_1\}} |X_1|^{n-k} \frac{\|\Phi_{A_1}^\Lambda(X_1)\|}{F_\zeta(d(z_0, z_1))} F_\zeta(d(z_0, z_1)) \\
&\leq 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \|\Phi_{A_1}\|_{\zeta, n-k} \sum_{X_0 \ni \{x,y\}} |X_0|^k \frac{\|\Phi_{A_0}^\Lambda(X_0)\|}{F_\zeta(d(x,y))} \sum_{z_0 \in X_0} \sum_{z_1 \in \Lambda} F_\zeta(d(z_0, z_1)).
\end{aligned}$$

Pela equação anterior e pela Equação (3.3), temos

$$\begin{aligned}
\sum_{Z \ni \{x,y\}} \frac{|Z|^n \|\Phi_G^\Lambda(Z)\|}{F_\zeta(d(x,y))} &\leq 2 \|F_\zeta\|_1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \|\Phi_{A_1}\|_{\zeta, n-k} \sum_{X_0 \ni \{x,y\}} |X_0|^k \frac{\|\Phi_{A_0}^\Lambda(X_0)\|}{F_\zeta(d(x,y))} \sum_{z_0 \in X_0} 1 \\
&= 2 \|F_\zeta\|_1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \|\Phi_{A_1}\|_{\zeta, n-k} \sum_{X_0 \ni \{x,y\}} |X_0|^{k+1} \frac{\|\Phi_{A_0}^\Lambda(X_0)\|}{F_\zeta(d(x,y))} \\
&\leq 2 \|F_\zeta\|_1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \|\Phi_{A_0}\|_{\zeta, k+1} \|\Phi_{A_1}\|_{\zeta, n-k}.
\end{aligned}$$

No caso em que  $x \in X_0, y \in X_1 \setminus X_0$ , temos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{Z \ni \{x,y\}} \frac{|Z|^n \|\Phi_G^\Lambda(Z)\|}{F_\zeta(d(x,y))} &\leq \sum_{Z \ni \{x,y\}} \sum_{\substack{X_0, X_1 \subset \Lambda: \\ X_0 \cup X_1 = Z, X_0 \cap X_1 \neq \emptyset}} \frac{2|Z|^n}{F_\zeta(d(x,y))} \|\Phi_{A_0}^\Lambda(X_0)\| \|\Phi_{A_1}^\Lambda(X_1)\| \\
&\leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{Z \ni \{x,y\}} \sum_{\substack{X_0, X_1 \subset \Lambda: \\ X_0 \cup X_1 = Z, X_0 \cap X_1 \neq \emptyset}} \frac{2|X_0|^k |X_1|^{n-k}}{F_\zeta(d(x,y))} \|\Phi_{A_0}^\Lambda(X_0)\| \|\Phi_{A_1}^\Lambda(X_1)\|.
\end{aligned}$$

Pela mesma idéia encontrada no Apêndice (7.7), temos

$$\begin{aligned}
&\sum_{Z \ni \{x,y\}} \frac{|Z|^n \|\Phi_G^\Lambda(Z)\|}{F_\zeta(d(x,y))} \\
&\leq 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{z \in \Lambda} \frac{F_\zeta(d(z,y)) F_\zeta(d(x,z))}{F_\zeta(d(x,y))} \sum_{X_0 \ni \{x,z\}} |X_0|^k \frac{\|\Phi_{A_0}^\Lambda(X_0)\|}{F_\zeta(d(x,z))} \sum_{X_1 \ni \{z,y\}} |X_1|^{n-k} \frac{\|\Phi_{A_1}^\Lambda(X_1)\|}{F_\zeta(d(z,y))} \\
&\leq 2C_\zeta \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \|\Phi_{A_0}\|_{\zeta,k} \|\Phi_{A_1}\|_{\zeta,n-k}.
\end{aligned}$$

Portanto, definindo  $C = \max\{C_\zeta, \|F_\zeta\|_1\}$  e utilizando o fato de que  $\|\Phi\|_{\zeta,n} \leq \|\Phi\|_{\zeta,m}$ , sempre que  $n \leq m$ , então concluímos que

$$\|\Phi_{[A_1, A_0]}\|_{\zeta,n} \leq C2^{n+1} \|\Phi_{A_1}\|_{\zeta,n+1} \|\Phi_{A_0}\|_{\zeta,n+1}.$$

Logo, se  $A_0, A_1 \in \mathcal{L}_{\zeta,n+1}$ , então  $[A_1, A_0] \in \mathcal{L}_{\zeta,n}$ . O resultado segue por indução na variável  $k$ .

(iii) Consequência imediata do item (ii). De fato, como  $A_0, \dots, A_k \in \mathcal{L}_{\zeta,\infty}$ , então  $A_0, \dots, A_k \in \mathcal{L}_{\zeta,n}, \forall n \in \mathbb{N}$ . Logo, pelo item (ii) do lema temos que  $ad_{A_k} \dots ad_{A_1}(A_0) \in \mathcal{L}_{\zeta,n}, \forall n \in \mathbb{N}$ . Portanto,  $ad_{A_k} \dots ad_{A_1}(A_0) \in \mathcal{L}_{\zeta,\infty}$ . □

**Lema 5.2.** Seja  $H \in \mathcal{L}_{\varepsilon,0}$  tal que  $H$  gera a dinâmica  $\tau_{t,t'}$ , e seja  $v$  a velocidade de Lieb-Robinson (Equação (3.7)) correspondente. Sendo  $\Lambda$  finito, então para qualquer  $O$  tal que  $\text{supp}(O) \subset \Lambda$  e  $A \in \mathcal{L}_{\zeta,0}$ , então existe  $C > 0$  tal que

$$\|[A, \tau_{t,t'}(O)]\| \leq C \|O\| \|\Phi_A\|_{\zeta,0} |\text{supp}(O)|^2 |t - t'|^d,$$

sempre que  $|t - t'| \geq v^{-1}$ . No caso em que  $|t - t'| \leq v^{-1}$ , então

$$\|[A, \tau_{t,t'}(O)]\| \leq C \|O\| \|\Phi_A\|_{\zeta,0} |\text{supp}(O)|^2.$$

*Demonstração.* Para qualquer  $Y \subset \Gamma$  e  $n \geq 0$ , denotamos

$$Y_n := \{z \in \Gamma : d(z, Y) \leq n\}$$

o “engordamento” do conjunto  $Y$  por  $n$ . Se  $O \in \mathcal{A}^X$  e  $X \subset \Lambda$ , então definimos

$$O^0 := \Pi^{X_{v\delta_t}}(\tau_{t,t'}(O)),$$

onde  $\delta_t = |t - t'|$  e  $\Pi^Y : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^Y$  é o traço parcial (Definição (1.13)), onde  $\mathcal{A}$  é a álgebra quase local (definida na Seção (4.7)). Para qualquer  $k \geq 1$ ,

$$O^k := \Pi^{X_{v\delta_t+k}}(\tau_{t,t'}(O)) - \Pi^{X_{v\delta_t+(k-1)}}(\tau_{t,t'}(O)).$$

Por construção,  $\tau_{t,t'}(O) = \sum_{k=0}^{\infty} O^k$ , onde a soma é finita pelo fato de  $\Lambda$  ser finito. Como  $O^k$  é estritamente local, então o Lema (5.1)(i) nos garante que

$$\|[A, O^k]\| \leq C_1 \|\Phi_A\|_{\zeta,0} \|O^k\| |\text{supp}(O^k)|,$$

onde  $C_1 = 2\|F_\zeta\|$ . Observemos que

$$X_{v\delta_t+k} \subset \bigcup_{x \in X} \{z \in \Gamma : d(z, x) \leq v\delta_t + k\}.$$

Utilizando a Equação (3.1) temos que

$$|X_{v\delta_t+k}| \leq \sum_{x \in X} |\{z \in \Gamma : d(z, x) \leq v\delta_t + k\}| \leq \sum_{x \in X} \kappa(v\delta_t + k)^d \leq |X| \kappa(v\delta_t + k)^d.$$

Mais ainda, quando  $1 \leq k$ , então, utilizando o fato de que  $1 \leq v\delta_t$ , temos que  $v\delta_t \leq kv\delta_t$  e que  $k \leq kv\delta_t$ . Logo, temos

$$|X_{v\delta_t+k}| \leq |X| \kappa(2kv\delta_t)^d.$$

Como  $\text{supp}(O^k) \subset X_{v\delta_t+k}$ , então temos que  $|\text{supp}(O^k)| \leq |X_{v\delta_t+k}|$ . Vamos cotar  $\|[A, O^k]\|$  da seguinte maneira: se  $k = 0$ , então

$$\begin{aligned} \|[A, O^0]\| &\leq C_2 \|\Phi_A\|_{\zeta,0} \|O^0\| |X| \delta_t^d \\ &\leq C_2 \|\Phi_A\|_{\zeta,0} \|\tau_{t,t'}(O)\| |X| \delta_t^d \\ &\leq C_2 \|\Phi_A\|_{\zeta,0} \|O\| |X| \delta_t^d \end{aligned}$$

onde  $C_2 = C_1 \kappa v^d$ ; e se  $1 \leq k$ , então

$$\|[A, O^k]\| \leq C_3 \|\Phi_A\|_{\zeta,0} \|O^k\| |X| \delta_t^d k^d,$$

onde  $C_3 = C_1 \kappa (2v)^d$ .

Com o objetivo de cotar a norma de  $O^k$ , vamos subtrair e adicionar identidades e utilizar que

$$\|(\Pi^{X_{v\delta_t+k}} - I)(\tau_{t,t'}(O))\| \leq C_4 \|O\| |X| e^{-\mu k}, \quad \forall k,$$

onde  $C_4$  é uma constante e  $\mu > 0$ . Ver [26] para entender essa inequação.

Observemos que

$$\|[A, \tau_{t,t'}(O)]\| = \|[A, \sum_{k=0}^{\infty} O^k]\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|[A, O^k]\|$$

Utilizando que  $\|[A, O^k]\| \leq C_3 \|\Phi_A\|_{\zeta,0} \|O^k\| |X| \delta_t^d k^d$ , então temos que

$$\begin{aligned} \|[A, \tau_{t,t'}(O)]\| &\leq C_2 \|\Phi_A\|_{\zeta,0} \|O\| |X| \delta_t^d + \sum_{k=1}^{\infty} C_3 \|\Phi_A\|_{\zeta,0} \|O^k\| |X| \delta_t^d k^d \\ &\leq C_2 \|\Phi_A\|_{\zeta,0} \|O\| |X| \delta_t^d + C_3 \|\Phi_A\|_{\zeta,0} |X| \delta_t^d \sum_{k=1}^{\infty} \|O^k\| k^d. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Como

$$\|O^k\| \leq \|(\Pi^{X_{v\delta_t+k}} - Id)(\tau_{t,t'}(O))\| + \|(Id - \Pi^{X_{v\delta_t+k-1}})(\tau_{t,t'}(O))\|$$

e

$$\|(\Pi^{X_{v\delta_t+k}} - I)(\tau_{t,t'}(O))\| \leq C_4 \|O\| |X| e^{-\mu k},$$

então temos

$$\begin{aligned} \|O^k\| &\leq C_4 \|O\| |X| e^{-\mu k} + C_4 \|O\| |X| e^{-\mu(k-1)} \\ &\leq 2e^\mu C_4 \|O\| |X| e^{-\mu k}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Utilizando as Equações (5.1), (5.2), então obtemos

$$\|[A, \tau_{t,t'}(O)]\| \leq C_2 \|\Phi_A\|_{\zeta,0} \|O\| |X| \delta_t^d + 2e^\mu C_3 C_4 \|O\| \|\Phi_A\|_{\zeta,0} |X|^2 \delta_t^d \sum_{k=1}^{\infty} k^d e^{-\mu k}.$$

Pelo teste da razão, podemos afirmar que a série  $\sum_{k=1}^{\infty} k^d e^{-\mu k}$  converge. Definindo  $C_X = \frac{C_2}{|X|} + 2e^\mu C_3 C_4 \sum_{k=1}^{\infty} k^d e^{-\mu k}$ , então temos

$$\begin{aligned} \|[A, \tau_{t,t'}(O)]\| &\leq C_2 \|\Phi_A\|_{\zeta,0} \|O\| |X| \delta_t^d + 2e^\mu C_3 C_4 \|O\| \|\Phi_A\|_{\zeta,0} |X|^2 \delta_t^d \sum_{k=1}^{\infty} k^d e^{-\mu k} \\ &= C_X \|O\| \|\Phi_A\|_{\zeta,0} |X|^2 \delta_t^d \\ &\leq C \|O\| \|\Phi_A\|_{\zeta,0} |X|^2 \delta_t^d, \end{aligned}$$

onde  $C = C_2 + 2e^\mu C_3 C_4 \sum_{k=1}^{\infty} k^d e^{-\mu k}$ . Vamos tomar  $X = \text{supp}(O)$ . Como  $X = \text{supp}(O)$  e  $\delta_t = |t - t'|$ , então temos

$$\|[A, \tau_{t,t'}(O)]\| \leq C \|O\| \|\Phi_A\|_{\zeta,0} |\text{supp}(O)|^2 |t - t'|^d.$$

A prova para o caso em que  $1 \geq v\delta_t$ , a prova é análoga. Basta observarmos que

$$|X_{v\delta_t+k}| \leq |X_{1+k}|.$$

Nesse caso, obtemos

$$\|[A, \tau_{t,t'}(O)]\| \leq C \|O\| \|\Phi_A\|_{\zeta,0} |\text{supp}(O)|^2.$$

□

**Lema 5.3.** Se a Suposição (4.2) acontece, então

- (i) Se  $B \in \mathcal{L}_{\mathcal{S},k+1}$ , então  $\mathcal{I}(B) \in \mathcal{L}_{\mathcal{S},k}$ , e em particular  $B \in \mathcal{L}_{\mathcal{S},\infty}$  implica que  $\mathcal{I}(B) \in \mathcal{L}_{\mathcal{S},\infty}$
- (ii) O gerador  $K$  do fluxo espectral pertence ao  $\mathcal{L}_{\mathcal{S},\infty}$ .

*Demonstração.* (i) Primeiro, observemos que para qualquer  $O \in \mathcal{A}$  existem operadores  $\Delta_n(O)$  tal que  $\text{supp}(\Delta_n(O)) \subset X_n \cap \Lambda$  e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau_t^\Lambda(O) W_\gamma(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta_n(O), \quad (5.3)$$

e existe uma função  $\tilde{\zeta} \in \mathcal{S}$ , independente de  $\Lambda$  e  $s$ , tal que

$$\|\Delta_n^\Lambda(O)\| \leq \|O\| |\text{supp}(O)| \tilde{\zeta}(n). \quad (5.4)$$

De fato, sabemos que  $\tau_t^\Lambda(O) = \sum_{n=0}^{\infty} O_{\Lambda,t}^n$ , onde  $O_{\Lambda,t}^0 = \Pi^{X_0}(\tau_t^\Lambda(O)) = \Pi^X(\tau_t^\Lambda(O))$  e  $O_{\Lambda,t}^n = \Pi^{X_n}(\tau_t^\Lambda(O)) - \Pi^{X_{n-1}}(\tau_t^\Lambda(O))$  para  $n \geq 1$ . Daí,  $\text{supp}(O_{\Lambda,t}^n) \subset X_n \cap \Lambda$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}$ . Definindo  $\Delta_n^\Lambda(O) = \int_{-\infty}^{+\infty} O_{\Lambda,t}^n W_\gamma(t) dt$ , temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tau_t^\Lambda(O) W_\gamma(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta_n^\Lambda(O)$$

tal que  $\text{supp}(\Delta_n^\Lambda(O)) \subset X_n \cap \Lambda$ .

Por [26], vale que

$$\|\Pi^{X_n}(\tau_t^\Lambda(O)) - \tau_t^\Lambda(O)\| \leq C \|O\| \|X\| e^{\mu(vt-n)}, \quad (5.5)$$

onde  $C$  é uma constante. Calculando, temos que

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} W_\gamma(t) (\Pi^{X_n}(\tau_t^\Lambda(O)) - \tau_t^\Lambda(O)) dt \right\| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |W_\gamma(t)| \|\Pi^{X_n}(\tau_t^\Lambda(O)) - \tau_t^\Lambda(O)\| dt \\ & \leq \int_{v|t| \leq \frac{n}{2}} |W_\gamma(t)| \|\Pi^{X_n}(\tau_t^\Lambda(O)) - \tau_t^\Lambda(O)\| dt + \int_{v|t| \geq \frac{n}{2}} |W_\gamma(t)| \|\Pi^{X_n}(\tau_t^\Lambda(O)) - \tau_t^\Lambda(O)\| dt. \end{aligned}$$

Utilizando a Equação (5.5), então obtemos

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} W_\gamma(t) (\Pi^{X_n}(\tau_t^\Lambda(O)) - \tau_t^\Lambda(O)) dt \right\| \\ & \leq \int_{v|t| \leq \frac{n}{2}} |W_\gamma(t)| C \|O\| |X| e^{\mu(vt-n)} dt + \int_{v|t| \geq \frac{n}{2}} |W_\gamma(t)| \|\Pi^{X_n}(\tau_t^\Lambda(O)) - \tau_t^\Lambda(O)\| dt \\ & \leq \widetilde{W}_\gamma C \|O\| |X| \frac{ne^{\frac{\mu n}{2}}}{v} + 2 \|O\| \int_{|t| \geq \frac{n}{2v}} |W_\gamma(t)| dt, \end{aligned}$$

onde  $\widetilde{W}_\gamma = \sup_{t \in \mathbb{R}} |W_\gamma(t)|$

Como  $\sup\{|t|^n |W_\gamma(t)| : |t| > 1\} < \infty, \forall n \in \mathbb{N}$ , então vale  $\sup\{x^n \int_{|t| \geq x} |W_\gamma(t)| dt : x > 1\} < \infty, \forall n \in \mathbb{N}$  ( ver Apêndice (7.2) ). Definindo

$$g(x) = \int_{|t| \geq x} |W_\gamma(t)| dt,$$

então existe  $g_1 \in \mathcal{S}$  tal que  $g \leq g_1$ . A existência dessa função é garantida pelo Lema (5.4), basta tomarmos  $f = -\log(g)$  e  $g_1 = \exp(-\widehat{f})$ . Logo,

$$\begin{aligned} \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} W_\gamma(t) (\Pi^{X_n}(\tau_t^\Lambda(O)) - \tau_t^\Lambda(O)) dt \right\| & \leq \widetilde{W}_\gamma C \|O\| |X| \frac{ne^{\frac{\mu n}{2}}}{v} + 2 \|O\| \int_{|t| \geq \frac{n}{2v}} |W_\gamma(t)| dt \\ & \leq \widetilde{W}_\gamma C \|O\| |X| \frac{ne^{\frac{\mu n}{2}}}{v} + 2 \|O\| g_1(n/2v) \\ & = \|O\| |X| \left[ \widetilde{W}_\gamma C \frac{ne^{\frac{\mu n}{2}}}{v} + \frac{2}{|X|} g_1(n/2v) \right] \\ & = \|O\| |X| g_2(n), \end{aligned}$$

onde  $g_2(n) = \widetilde{W}_\gamma C \frac{ne^{\frac{\mu n}{2}}}{v} + \frac{2}{|X|} g_1(n/2v)$  e  $g_2 \in \mathcal{S}$ . Definindo  $\widetilde{\zeta}(n) = g_2(n) + g_2(n-1)$  e tomando  $X = \text{supp}(O)$ , então temos

$$\begin{aligned} \|\Delta_n^\Lambda(O)\| & = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} W_\gamma(t) (\Pi^{X_n}(\tau_t^\Lambda(O)) - \tau_t^\Lambda(O) + \tau_t^\Lambda(O) - \Pi^{X_{n-1}}(\tau_t^\Lambda(O))) dt \right\| \\ & \leq \|O\| |X| g_2(n) + \|O\| |X| g_2(n-1) \\ & = \|O\| |\text{supp}(O)| \widetilde{\zeta}(n). \end{aligned}$$

Portanto,  $\|\Delta_n^\Lambda(O)\| \leq \|O\| |\text{supp}(O)| \widetilde{\zeta}(n)$ , onde  $\widetilde{\zeta} \in \mathcal{S}$ .

Agora, seja  $B \in \mathcal{L}_{\mathcal{S},k+1}$  associado com a interação  $\Phi_B \in \mathcal{B}_{\zeta,k+1}$  para um  $\zeta \in \mathcal{S}$  e tomemos

$$\mathcal{I}^\Lambda(B^\Lambda) = \sum_{Z \subset \Lambda} \int_{-\infty}^{\infty} W_\gamma(t) \tau_t^\Lambda (\Phi_B^\Lambda(Z)) dt.$$

Na notação acima, definimos uma interação para  $\mathcal{I}(B)$  por

$$\Phi_{\mathcal{I}(B)}^\Lambda(Z) := \sum_{n \geq 0} \Delta_n^\Lambda (\Phi_B^\Lambda(Z)), \quad (5.6)$$

que satisfaz  $\mathcal{I}^\Lambda(B^\Lambda) = \sum_{Z \subset \Lambda} \Phi_{\mathcal{I}(B)}^\Lambda(Z)$  pela Equação (5.3), e  $\Phi_{\mathcal{I}(B)}^\Lambda(Z) \in \mathcal{A}^Z$  por construção. Vamos checar a condição do decaimento. Pela Equação (5.6), temos que

$$\sum_{\substack{Z \subset \Lambda: \\ x,y \in Z}} |Z|^k \|\Phi_{\mathcal{I}(B)}^\Lambda(Z)\| \leq \sum_{\substack{Z \subset \Lambda: \\ x,y \in Z}} \sum_{n \geq 0} |Z|^k \|\Delta_n^\Lambda (\Phi_B^\Lambda(Z))\|.$$

Como

$$\|\Delta_n^\Lambda (\Phi_B^\Lambda(Z))\| \leq \sum_{\substack{Y \subset \Lambda: n \geq 0, \\ Y_n = Z}} \|\Delta_n^\Lambda (\Phi_B^\Lambda(Y))\|,$$

então

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{Z \subset \Lambda: \\ x,y \in Z}} |Z|^k \|\Phi_{\mathcal{I}(B)}^\Lambda(Z)\| &\leq \sum_{\substack{Z \subset \Lambda: \\ x,y \in Z}} \sum_{\substack{Y \subset \Lambda: n \geq 0, \\ Y_n = Z}} |Z|^k \|\Delta_n^\Lambda (\Phi_B^\Lambda(Y))\| \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{Z \subset \Lambda} \sum_{Y \subset \Lambda} \chi(x, y \in Z) \chi(Y_n = Z) |Z|^k \|\Delta_n^\Lambda (\Phi_B^\Lambda(Y))\| \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{Y \subset \Lambda} \chi(x, y \in Y_n) |Y_n|^k \|\Delta_n^\Lambda (\Phi_B^\Lambda(Y))\| \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde  $\chi$  é a função indicadora. Da mesma forma que foi mostrado no lema anterior, temos que para uma rede  $d$ -dimensional

$$|Y_n| \leq |Y| \kappa n^d. \quad (5.8)$$

Devemos observar que

$$\{Y \subset \Lambda\} = \{Y \subset \Lambda : x, y \in Y\} \cup \left( \bigcup_{m=1}^{\infty} \{Y \subset \Lambda : x, y \in Y_m \text{ e } \{x, y\} \cap Y_{m-1}^c \neq \emptyset\} \right), \quad (5.9)$$

tal que a união é uma união de conjuntos dois a dois disjuntos.

Pela Equação (5.7), temos

$$\sum_{\substack{Z \subset \Lambda: \\ x,y \in Z}} |Z|^k \|\Phi_{\mathcal{I}(B)}^\Lambda(Z)\| \leq \sum_{n \geq 0} \sum_{Y \subset \Lambda} \chi(x, y \in Y_n) |Y_n|^k \|\Delta_n^\Lambda (\Phi_B^\Lambda(Y))\|.$$

Pela equação anterior e pelas Equações (5.8), (5.9), obtemos

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{Z \subset \Lambda: \\ x, y \in Z}} |Z|^k \|\Phi_{\mathcal{I}(B)}^\Lambda(Z)\| &\leq \kappa^k \sum_{n \geq 0} \sum_{Y \subset \Lambda} \chi(x, y \in Y_n) |Y|^k n^{dk} \|\Delta_n^\Lambda(\Phi_B^\Lambda(Y))\| \\
&= \kappa^k \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{Y \subset \Lambda: \\ x, y \in Y}} \chi(x, y \in Y_n) |Y|^k n^{dk} \|\Delta_n^\Lambda(\Phi_B^\Lambda(Y))\| \\
&+ \kappa^k \sum_{n \geq 0} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{Y \subset \Lambda: \\ x, y \in Y_m, \\ \{x, y\} \cap Y_{m-1}^c \neq \emptyset}} \chi(x, y \in Y_n) |Y|^k n^{dk} \|\Delta_n^\Lambda(\Phi_B^\Lambda(Y))\| \\
&= \kappa^k \sum_{n \geq 0} \sum_{\substack{Y \subset \Lambda: \\ x, y \in Y}} |Y|^k n^{dk} \|\Delta_n^\Lambda(\Phi_B^\Lambda(Y))\| \\
&+ \kappa^k \sum_{n \geq 0} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{Y \subset \Lambda: \\ x, y \in Y_m}} \chi(\{x, y\} \cap Y_{m-1}^c \neq \emptyset) \chi(x, y \in Y_n) |Y|^k n^{dk} \|\Delta_n^\Lambda(\Phi_B^\Lambda(Y))\| \\
&= \kappa^k \sum_{\substack{Y \subset \Lambda: \\ x, y \in Y}} |Y|^k \sum_{n \geq 0} n^{dk} \|\Delta_n^\Lambda(\Phi_B^\Lambda(Y))\| \\
&+ \kappa^k \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{Y \subset \Lambda: \\ x, y \in Y_m}} \chi(\{x, y\} \cap Y_{m-1}^c \neq \emptyset) |Y|^k \sum_{n \geq m} n^{dk} \|\Delta_n^\Lambda(\Phi_B^\Lambda(Y))\| = S_1 + S_2
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Agora, utilizando a Equação (5.4) temos que

$$S_1 \leq \kappa^k \sum_{n \geq 0} n^{kd} \tilde{\zeta}(n) \sum_{\substack{Y \subset \Lambda: \\ x, y \in Y}} |Y|^{k+1} \|\Phi_B^\Lambda(Y)\| \leq C \|\Phi_B\|_{\zeta, k+1} F_\zeta(d(x, y)).$$

Devemos observar que se  $x \in Y_m$ , então existe  $z_1 \in Y$  tal que  $z_1 \in B_m(x)$ . Logo,

$$x \in Y_m \Rightarrow d(x, Y) \leq m \Rightarrow \exists z_1 \in Y \text{ tal que } d(x, z_1) \leq m \Rightarrow \exists z_1 \in Y \text{ tal que } z_1 \in B_m(x).$$

Logo,

$$\chi(x \in Y_m) \leq \sum_{z_1 \in B_m(x)} \chi(z_1 \in Y).$$

Para  $S_2$ , observemos que

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{Y \subset \Lambda: \\ x, y \in Y}} \chi(\{x, y\} \cap Y_{m-1}^c \neq \emptyset) \leq \sum_{\substack{Y \subset \Lambda: \\ x, y \in Y}} 1 = \sum_{Y \subset \Lambda} \chi(x, y \in Y_m) \\
&= \sum_{Y \subset \Lambda} \chi(x \in Y_m) \chi(y \in Y_m) \leq \sum_{Y \subset \Lambda} \sum_{z_1 \in B_m(x)} \chi(z_1 \in Y) \sum_{z_2 \in B_m(y)} \chi(z_2 \in Y) \\
&= \sum_{Y \subset \Lambda} \sum_{z_1 \in B_m(x)} \sum_{z_2 \in B_m(y)} \chi(z_1 \in Y) \chi(z_2 \in Y) = \sum_{Y \subset \Lambda} \sum_{z_1 \in B_m(x)} \sum_{z_2 \in B_m(y)} \chi(z_1, z_2 \in Y) \\
&= \sum_{z_1 \in B_m(x)} \sum_{z_2 \in B_m(y)} \sum_{\substack{Y \subset \Lambda: \\ z_1, z_2 \in Y}} 1. \tag{5.11}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{\substack{Y \subset \Lambda: \\ x, y \in Y}} \chi(\{x, y\} \cap Y_{m-1}^c \neq \emptyset) \leq \sum_{z_1 \in B_m(x)} \sum_{z_2 \in B_m(y)} \sum_{\substack{Y \subset \Lambda: \\ z_1, z_2 \in Y}} 1.$$

Pela equação anterior e pela Equação (5.4) temos

$$\begin{aligned}
S_2 &\leq \kappa^k \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{z_1 \in B_m(x)} \sum_{z_2 \in B_m(y)} \sum_{\substack{Y \subset \Lambda: \\ z_1, z_2 \in Y}} |Y|^{k+1} \|\Phi_B^\Lambda(Y)\| \sum_{n \geq m} n^{kd} \tilde{\zeta}(n) \\
&\leq \kappa^k \|\Phi_B\|_{\zeta, k+1} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \sum_{n \geq m} n^{kd} \tilde{\zeta}(n) \right) \sum_{z_1 \in B_m(x)} \sum_{z_2 \in B_m(y)} F_\zeta(d(z_1, z_2)).
\end{aligned}$$

Seja  $m_0 = d(x, y)/4$ . Como  $z_1 \in B_m(x)$ ,  $z_2 \in B_m(y)$ , então para  $m \leq m_0$  temos

$$\begin{aligned}
d(x, y) &\leq d(x, z_1) + d(z_1, z_2) + d(z_2, y) \leq 2m + d(z_1, z_2) \\
&\leq 2m_0 + d(z_1, z_2) = \frac{d(x, y)}{2} + d(z_1, z_2).
\end{aligned}$$

Portanto,  $d(x, y)/2 \leq d(z_1, z_2)$ . Utilizando isso, separamos sobre  $m_0$  o somatório  $\sum_{m=1}^{\infty}$  da cota de  $S_2$  e assim obtemos

$$S_2 \leq C_1 \|\Phi_B\|_{\zeta, k+1} F_\zeta(d(x, y)/2) \sum_{m=1}^{m_1} m^{2d} + C_2 \|\Phi_B\|_{\zeta, k+1} \sum_{m > m_0} m^{2d} \left( \sum_{n \geq m} n^{kd} \tilde{\zeta}(n) \right),$$

onde  $C_1$  e  $C_2$  são coeficientes que não dependem de  $d(x, y)$  (ou  $\Lambda$ ). Usamos que  $F_\zeta$  é uma função decrescente. Além disso, para garantir a convergência da série

$$\sum_{m > m_0} m^{2d} \left( \sum_{n \geq m} n^{kd} \tilde{\zeta}(n) \right),$$

usamos que  $\tilde{\zeta}$  decai mais rápido do que qualquer polinomial (ver Apêndice (7.3)). Pelas cotas de

$S_1, S_2$  e utilizando o decaimento rápido de  $\zeta$ , nós temos que

$$\sum_{\substack{Z \subset \Lambda: \\ x, y \in Z}} |Z|^k \|\Phi_{\mathcal{I}(B)}^\Lambda(Z)\| \leq S_1 + S_2 \leq C \|\Phi_B\|_{\zeta, k+1} F(d(x, y)) h(d(x, y)),$$

onde  $h$  é limitado, não crescente, decai mais rápido que qualquer potência inversa e pode ser escolhido tal que  $h < 1$  ( basta ajustar  $C$  ). Resta encontrar  $\xi' \in \mathcal{S}$  tal que  $h \leq \xi'$  para concluir a prova. A existência dessa função é garantida pelo Lema (5.4) abaixo. Basta tomarmos  $f = -\log(h)$  e  $\xi' = \exp(-\hat{f})$ .

Calculando, obtemos

$$\|\Phi_{\mathcal{I}(B)}\|_{\xi', k} \leq C \|\Phi_B\|_{\zeta, k+1}.$$

Portanto, como  $B \in \mathcal{L}_{\mathcal{S}, k+1}$ , então  $\mathcal{I}(B) \in \mathcal{L}_{\mathcal{S}, k}$ .

(ii) Segue imediatamente de (i) visto que  $K = \mathcal{I}(\dot{H})$  e  $\dot{H} \in \mathcal{L}_{\varepsilon, \infty}$  por suposição. □

Uma função  $g$  definida em  $\mathbb{R}^+$  é dita subaditiva se  $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$ , para todo  $x, y$ . A prova acima requer o seguinte lema.

**Lema 5.4.** Dado uma função não-decrescente  $f$ , cujo o domínio é  $\mathbb{R}^+$  e  $f(0) > 0$ , existe uma função  $\hat{f}$  positiva e subaditiva tal que

$$\hat{f} \leq f.$$

Mais ainda, se  $f$  tem a propriedade  $f(x) - m \log(x) \rightarrow +\infty, \forall m > 0$ , então  $\hat{f}$  tem essa propriedade.

*Demonstração.* Ver Lema 4.9 em [14]. □

## 5.2 Prova do Teorema Principal

Primeiramente, vamos apresentar algumas propriedades da aplicação  $\mathcal{I}$ .

**Proposição 5.1.** Seja  $H$  Hamiltoniano local satisfazendo as Suposições (4.1) e (4.2). A projeção  $P$  é a projeção no fragmento espectral  $\Sigma^1$ .

(i) Se um operador  $A$  satisfaz a condição

$$A = PA(1 - P) + (1 - P)AP, \tag{5.12}$$

então

$$A = -i[H, \mathcal{I}(A)].$$

(ii) Para qualquer operador  $L$ ,

$$[L, P] - i[[\mathcal{I}(L), H], P] = 0.$$

(iii) Se  $H \in \mathcal{L}_{\varepsilon, \infty}$  e  $G \in \mathcal{L}_{\mathcal{S}, \infty}$ , então  $\mathcal{I}(G) \in \mathcal{L}_{\mathcal{S}, \infty}$ .

(iv) Seja  $G$  Hamiltoniano local satisfazendo a Suposição (4.2). Se  $H, G$  dependem de um parâmetro  $s$ , com  $H, G \in \mathcal{C}^k$  e  $H^{(j)} \in \mathcal{L}_{\varepsilon, \infty}$ ,  $G^{(j)} \in \mathcal{L}_{\mathcal{S}, \infty}$  para  $0 \leq j \leq k$ , então  $\mathcal{I}(G) \in \mathcal{C}^k$  com  $\mathcal{I}(G)^{(j)} \in \mathcal{L}_{\mathcal{S}, \infty}$  para  $1 \leq j \leq k$ .

*Demonstração.* (i) Como nas Suposições (4.1), (4.2) temos que  $H \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  e  $H$  é um Hamiltoniano (ou seja, um operador auto-adjunto), então pelo Teorema Espectral (1.3) temos  $H = \int \lambda dE(\lambda)$  a decomposição espectral de  $H$ , onde  $E$  é uma medida com valor de projeção. Pela definição de  $\mathcal{I}$ , temos que

$$-i[H, \mathcal{I}(A)] = -i \left( \int_{\mathbb{R}} W_{\gamma}(t) H e^{itH} A e^{-itH} dt - \int_{\mathbb{R}} W_{\gamma}(t) e^{itH} A e^{-itH} H dt \right).$$

Utilizando o Teorema Espectral (1.3), mais especificamente, utilizando que

$$H e^{itH} = \int \lambda e^{it\lambda} dE(\lambda), \quad e^{itH} H = \int e^{it\lambda} \lambda dE(\lambda), \quad H = \int \lambda dE(\lambda),$$

então temos que

$$\begin{aligned} -i[H, \mathcal{I}(A)] &= -i \left( \int_{\mathbb{R}} W_{\gamma}(t) \int \lambda e^{it\lambda} dE(\lambda) A e^{-itH} dt - \int_{\mathbb{R}} W_{\gamma}(t) e^{itH} A \int e^{-it\mu} \mu dE(\mu) dt \right) \\ &= -i \left( \int_{\mathbb{R}} W_{\gamma}(t) \int \lambda e^{it\lambda} dE(\lambda) A \int e^{-it\mu} dE(\mu) dt - \int_{\mathbb{R}} W_{\gamma}(t) \int e^{it\lambda} dE(\lambda) A \int e^{-it\mu} \mu dE(\mu) dt \right) \\ &= -i \int \int \int_{\mathbb{R}} W_{\gamma}(t) e^{-it(\mu-\lambda)} dt (\lambda - \mu) dE(\lambda) A dE(\mu). \end{aligned}$$

Denotando

$$\widehat{W}_{\gamma}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} W_{\gamma}(t) e^{-it\zeta} dt,$$

então temos

$$-i[H, \mathcal{I}(A)] = \sqrt{2\pi} \int \int i \widehat{W}_{\gamma}(\mu - \lambda) (\mu - \lambda) dE(\lambda) A dE(\mu).$$

Como  $A = PA(1 - P) + (1 - P)AP$ , então

$$\begin{aligned} -i[H, \mathcal{I}(A)] &= \sqrt{2\pi} \int \int i \widehat{W}_{\gamma}(\mu - \lambda) (\mu - \lambda) dE(\lambda) (PA(1 - P) + (1 - P)AP) dE(\mu) \\ &= \sqrt{2\pi} \int \int i \widehat{W}_{\gamma}(\mu - \lambda) (\mu - \lambda) dE(\lambda) PA(1 - P) dE(\mu) \\ &+ \sqrt{2\pi} \int \int i \widehat{W}_{\gamma}(\mu - \lambda) (\mu - \lambda) dE(\lambda) (1 - P)AP dE(\mu) \\ &= \sqrt{2\pi} \int_{\Sigma^2} \int_{\Sigma^1} i \widehat{W}_{\gamma}(\mu - \lambda) (\mu - \lambda) dE(\lambda) A dE(\mu) + \sqrt{2\pi} \int_{\Sigma^1} \int_{\Sigma^2} i \widehat{W}_{\gamma}(\mu - \lambda) (\mu - \lambda) dE(\lambda) A dE(\mu). \end{aligned}$$

Utilizando o fato de  $\widehat{W}_\gamma(\zeta) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}\zeta}$  quando  $|\zeta| \geq \gamma$ , temos

$$\begin{aligned}
-i[H, \mathcal{I}(A)] &= \sqrt{2\pi} \int_{\Sigma^2} \int_{\Sigma^1} \frac{i(-i)(\mu - \lambda)}{\sqrt{2\pi}(\mu - \lambda)} dE(\lambda) AdE(\mu) + \sqrt{2\pi} \int_{\Sigma^1} \int_{\Sigma^2} \frac{i(-i)(\mu - \lambda)}{\sqrt{2\pi}(\mu - \lambda)} dE(\lambda) AdE(\mu) \\
&= \int_{\Sigma^2} \int_{\Sigma^1} 1 dE(\lambda) AdE(\mu) + \int_{\Sigma^1} \int_{\Sigma^2} 1 dE(\lambda) AdE(\mu) \\
&= \int_{\Sigma^2} P AdE(\mu) + \int_{\Sigma^1} (1 - P) AdE(\mu) \\
&= PA \int_{\Sigma^2} dE(\mu) + (1 - P)A \int_{\Sigma^1} dE(\mu) \\
&= PA(1 - P) + (1 - P)AP = A.
\end{aligned}$$

(ii) Para qualquer operador  $L$ , o operador  $A = [L, P]$  satisfaz a Equação (5.12). De fato,

$$\begin{aligned}
PA(1 - P) + (1 - P)AP &= P[L, P](1 - P) + (1 - P)[L, P]P = \\
&= P(LP - PL)(1 - P) + (1 - P)(LP - PL)P = 0 - PL(1 - P) + (1 - P)LP - 0 = \\
&= -PL + PLP + LP - PLP = LP - PL = [L, P] = A
\end{aligned}$$

Logo, por (i), temos que

$$[L, P] + i[H, \mathcal{I}([L, P])] = 0 \quad (5.13)$$

Observemos que  $[H, P] = 0$ . De fato, como  $H \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^\Lambda)$ , onde  $\Lambda$  é finito, e como  $H$  é auto-adjunto, então, pelo Teorema Espectral, temos que  $H$  é diagonalizável. Logo, o espectro de  $H$  ( $\sigma(H)$ ) é um conjunto finito que é igual ao conjunto dos autovalores de  $H$ . Daí,  $\Sigma^1$  é formado por autovalores de  $H$ . Logo, dado  $\phi \in \mathcal{H}^\Lambda$ , podemos escrever  $\phi = \phi_1 + \phi_2$ , onde  $\phi_1 \in \text{Aut}(\Sigma^1)$ ,  $\phi_2 \in \text{Aut}(\sigma(H) - \Sigma^1)$ . É fácil ver que  $H(\phi_1) \in \text{Aut}(\Sigma^1)$ ,  $H(\phi_2) \in \text{Aut}(\sigma(H) - \Sigma^1)$ . Lembrando que  $P := P_{\Sigma^1}$ , então temos

$$\begin{aligned}
[H, P](\phi) &= HP(\phi_1 + \phi_2) - PH(\phi_1 + \phi_2) = H(\phi_1) - P(H(\phi_1) + H(\phi_2)) = \\
&= H(\phi_1) - P(H(\phi_1)) + P(H(\phi_2)) = H(\phi_1) - H(\phi_1) + 0 = 0, \quad \forall \phi \in \mathcal{H}^\Lambda
\end{aligned}$$

Portanto,  $[H, P] = 0$ .

Para simplificar, vamos denotar a Equação (3.8) por  $\mathcal{I}(A) := \int_{\mathbb{R}} W(t)\tau_t(A)dt$ . Pelo fato de

$W(t) \in \mathbb{R}$  (pois  $W \in L^1(\mathbb{R})$ ) e pelo fato de  $[H, P] = 0$  (ou seja,  $HP = PH$ ), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}([L, P]) &= \int_{\mathbb{R}} W(t) \tau_t([L, P]) dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}} W(t) e^{itH} L P e^{-itH} dt - \int_{\mathbb{R}} W(t) e^{itH} P L e^{-itH} dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}} W(t) e^{itH} L e^{-itH} P dt - \int_{\mathbb{R}} W(t) P e^{itH} L e^{-itH} dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}} W(t) e^{itH} L e^{-itH} dt P - P \int_{\mathbb{R}} W(t) e^{itH} L e^{-itH} dt = \\ &= \mathcal{I}(L)P - P\mathcal{I}(L) = [\mathcal{I}(L), P] \end{aligned}$$

Portanto,  $\mathcal{I}([L, P]) = [\mathcal{I}(L), P]$ . Logo, a Equação (5.13) pode ser escrita da seguinte maneira

$$[L, P] + i[H, [\mathcal{I}(L), P]] = 0 \quad (5.14)$$

Pela identidade de Jacobi

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, \quad \forall X, Y, Z,$$

e pelo fato de  $[H, P] = 0$ , então temos

$$\begin{aligned} [\mathcal{I}(L), [P, H]] + [P, [H, \mathcal{I}(L)]] + [H, [\mathcal{I}(L), P]] &= 0 \Rightarrow \\ 0 + [P, [H, \mathcal{I}(L)]] + [H, [\mathcal{I}(L), P]] &= 0 \Rightarrow \\ -[P, [H, \mathcal{I}(L)]] &= [H, [\mathcal{I}(L), P]] \end{aligned}$$

Como  $[H, [\mathcal{I}(L), P]] = -[P, [H, \mathcal{I}(L)]]$ , então podemos escrever a Equação (5.14) da seguinte maneira

$$[L, P] - i[P, [H, \mathcal{I}(L)]] = 0 \Leftrightarrow [L, P] - i[[\mathcal{I}(L), H], P] = 0.$$

(iii)  $\mathcal{I}(G) \in \mathcal{L}_{\mathcal{S}, \infty}$  é um caso especial do Lema (5.3) (i).

(iv) Sabemos por [27] que

$$\frac{d}{d\lambda} e^{A(\lambda)} = \int_0^1 e^{(1-s)A(\lambda)} A'(\lambda) e^{sA(\lambda)} ds = \int_0^1 e^{sA(\lambda)} A'(\lambda) e^{(1-s)A(\lambda)} ds, \quad (5.15)$$

sendo  $A(\lambda)$  uma aplicação, então temos que

$$\frac{d}{ds} \mathcal{I}(G) = \mathcal{I}(G_1), \quad (5.16)$$

onde

$$G_1 = \dot{G} + i \left[ \int_0^t \tau_{-u}(\dot{H}) du, G \right].$$

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathcal{I}(G) &= \frac{d}{ds} \left( \int_{\mathbb{R}} W_{\gamma}(t) \tau_t^s(G) dt \right) = \frac{d}{ds} \left( \int_{\mathbb{R}} W_{\gamma}(t) e^{itH} G e^{-itH} dt \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} W_{\gamma}(t) \left( \int_0^1 ite^{(1-v)itH} \dot{H} e^{vitH} dv G e^{-itH} + e^{itH} \dot{G} e^{-itH} + e^{itH} G \int_0^1 (-it) e^{-vitH} \dot{H} e^{(v-1)itH} dv \right) dt \end{aligned}$$

tomando  $u = tv \Rightarrow du = t dv$ , temos

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}} W_{\gamma}(t) e^{itH} \left( \dot{G} + i \left( \int_0^t e^{-uiH} \dot{H} e^{uiH} du G - G \int_0^t e^{-uiH} \dot{H} e^{uiH} du \right) \right) e^{-itH} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} W_{\gamma}(t) e^{itH} \left( \dot{G} + i \left[ \int_0^t \tau_{-u}(\dot{H}) du, G \right] \right) e^{-itH} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} W_{\gamma}(t) \tau_t \left( \dot{G} + i \left[ \int_0^t \tau_{-u}(\dot{H}) du, G \right] \right) dt = \mathcal{I}(G_1). \end{aligned}$$

Se  $G, H \in \mathcal{C}^k$ , então  $G_1 \in \mathcal{C}^{k-1}$ . Utilizando os Lemas (5.3)(i) e (5.1)(iii), e utilizando a suposição sobre as derivadas de  $G$  e  $H$ , então temos que  $\mathcal{I}(G_1) \in \mathcal{L}_{\mathcal{S}, \infty}$ . Por indução, temos que  $\mathcal{I}(G^{(j)}) = \mathcal{I}(G_j)$ , onde  $G_j \in \mathcal{C}^{(k-j)}$  e  $\mathcal{I}(G_j) \in \mathcal{L}_{\mathcal{S}, \infty}$ , provando assim o que queríamos.  $\square$

Essa proposição é fundamental para provar que  $K = \mathcal{I}(\dot{H})$  é um gerador local do fluxo espectral (Equação (4.11)).

**Corolário 5.1.** Se as Suposições (4.1) e (4.2) acontecem, então  $\dot{P} = i[\mathcal{I}(\dot{H}), P]$ .

*Demonstração.* Primeiramente, vamos mostrar que  $\dot{P}$  satisfaz a Equação (5.12). De fato,

$$P = P^2 \Rightarrow \dot{P} = \dot{P}P + P\dot{P}. \quad (5.17)$$

Logo, multiplicando a equação anterior por  $(1 - P)$ , temos

$$\dot{P}(1 - P) = P\dot{P}(1 - P) \quad \text{e} \quad (1 - P)\dot{P} = (1 - P)\dot{P}P. \quad (5.18)$$

Daí, utilizando as Equações (5.18) e a Equação (5.17), temos

$$P\dot{P}(1 - P) + (1 - P)\dot{P}P = \dot{P}(1 - P) + (1 - P)\dot{P} = \dot{P} - (\dot{P}P + P\dot{P}) = 2\dot{P} - \dot{P} = \dot{P}.$$

Portanto,  $\dot{P}$  satisfaz a Equação (5.12). Logo, pela Proposição (5.1)(i),  $\dot{P} = -i[H, \mathcal{I}(\dot{P})]$ .

Observemos que  $\mathcal{I}([H, \dot{P}]) = [H, \mathcal{I}(\dot{P})]$ . De fato, como  $W(t) \in \mathbb{R}$ , então temos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}([H, \dot{P}]) &= \int_{\mathbb{R}} W(t) \tau_t([H, \dot{P}]) dt = \\ &= \int_{\mathbb{R}} W(t) e^{-itH} H \dot{P} e^{itH} dt - \int_{\mathbb{R}} W(t) e^{-itH} \dot{P} H e^{itH} dt = \\ &= H \int_{\mathbb{R}} W(t) e^{-itH} \dot{P} e^{itH} dt - \int_{\mathbb{R}} W(t) e^{-itH} \dot{P} e^{itH} dt H = \\ &= H \mathcal{I}(\dot{P}) - \mathcal{I}(\dot{P}) H = [H, \mathcal{I}(\dot{P})] \end{aligned}$$

Além disso, observemos que

$$\begin{aligned} [H, P] = 0 &\Rightarrow ([H, P])' = 0 \Rightarrow \\ \dot{H}P + H\dot{P} - \dot{P}H - P\dot{H} &= 0 \Rightarrow \\ \dot{H}P - P\dot{H} &= -H\dot{P} + \dot{P}H \Rightarrow \\ [\dot{H}, P] &= -[H, \dot{P}] \end{aligned}$$

Como

$$\dot{P} = -i[H, \mathcal{I}(\dot{P})], \quad \mathcal{I}([H, \dot{P}]) = [H, \mathcal{I}(\dot{P})] \quad \text{e} \quad [\dot{H}, P] = -[H, \dot{P}],$$

então

$$\dot{P} = -i[H, \mathcal{I}(\dot{P})] = -i\mathcal{I}([H, \dot{P}]) = i\mathcal{I}([\dot{H}, P]) = i[\mathcal{I}(\dot{H}), P].$$

□

No lema à seguir, nós construímos a condução contra-diabática.

**Lema 5.5.** Considere que as Suposições (4.1) e (4.2) acontecem para algum  $m \in \mathbb{N}$ . Para qualquer  $n \leq \tilde{m} = d + m$ , existe  $\{A_\alpha : 1 \leq \alpha \leq n, \quad \alpha \in \mathbb{N}\}$  com  $A_\alpha \in \mathcal{L}_{\mathcal{S}, \infty}$  tal que o projetor

$$\Pi_{n, \epsilon} := U_{n, \epsilon} P U_{n, \epsilon}^*, \quad \text{com} \quad U_{n, \epsilon} = \exp\left(i \sum_{\alpha=1}^n \epsilon^\alpha A_\alpha\right)$$

soluciona

$$i\epsilon \dot{\Pi}_{n, \epsilon} = [H + R_{n, \epsilon}, \Pi_{n, \epsilon}] \quad (5.19)$$

onde  $H \in \mathcal{L}_{\epsilon, \infty}$ , e  $R_{n, \epsilon} \in \mathcal{L}_{\mathcal{S}, \infty}$  com o potencial associado  $\Phi_{n, \epsilon}$  satisfazendo  $\|\Phi_{n, \epsilon}\|_{\mathcal{S}, k} \leq r_{n, k}(s)\epsilon^{n+1}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ , onde  $r_{n, k}(s)$  é independente de  $\epsilon$ . Mais ainda,  $A_\alpha \in \mathcal{C}^{(\tilde{m}-\alpha)}$ , com  $A_\alpha^{(j)} \in \mathcal{L}_{\mathcal{S}, \infty}$ , para todo  $1 \leq j \leq \tilde{m} - \alpha$ .

*Demonstração.* Para facilitar a notação, vamos omitir todos os índices  $\epsilon$ .

Primeiramente, observemos que  $U_n \dot{U}_n^* = -\dot{U}_n U_n^*$ . De fato,

$$U_n U_n^* = I \Rightarrow (U_n U_n^*)' = 0 \Rightarrow U_n \dot{U}_n^* = -\dot{U}_n U_n^*.$$

Pela Equação (4.11) e pelo fato de  $[H, P] = 0$ , temos

$$\begin{aligned} i\epsilon \dot{\Pi}_n &= i\epsilon(\dot{U}_n P U_n^* + U_n P \dot{U}_n^* + U_n \dot{P} U_n^*) \\ &= i\epsilon(\dot{U}_n P U_n^* + U_n P \dot{U}_n^* + U_n(i[K, P])U_n^*) \\ &= [H, \Pi_n] - [H, \Pi_n] + U_n[H, P]U_n^* + i\epsilon \dot{U}_n P U_n^* + i\epsilon U_n P \dot{U}_n^* - \epsilon U_n([K, P])U_n^*. \end{aligned}$$

Como  $U_n^* U_n = I$  e  $\Pi_{n, \epsilon} := U_{n, \epsilon} P U_{n, \epsilon}^*$ , então

$$i\epsilon \dot{\Pi}_n = [H, \Pi_n] + [-H, \Pi_n] + [U_n H U_n^*, \Pi_n] + (i\epsilon \dot{U}_n U_n^* U_n P U_n^* + i\epsilon U_n P U_n^* U_n \dot{U}_n^*) + [-\epsilon U_n K U_n^*, \Pi_n].$$

Utilizando  $U_n \dot{U}_n^* = -\dot{U}_n U_n^*$ , então

$$\begin{aligned}
i\epsilon \dot{\Pi}_n &= [H, \Pi_n] + [-H, \Pi_n] + [U_n H U_n^*, \Pi_n] + (i\epsilon \dot{U}_n U_n^* U_n P U_n^* - i\epsilon U_n P U_n^* \dot{U}_n U_n^*) + [-\epsilon U_n K U_n^*, \Pi_n] \\
&= [H, \Pi_n] + [-H, \Pi_n] + [U_n H U_n^*, \Pi_n] + [i\epsilon \dot{U}_n U_n^*, \Pi_n] + [-\epsilon U_n K U_n^*, \Pi_n] \\
&= [H, \Pi_n] + [i\epsilon \dot{U}_n U_n^* - \epsilon U_n K U_n^* + (U_n H U_n^* - H), \Pi_n],
\end{aligned} \tag{5.20}$$

onde  $H \in \mathcal{L}_{\varepsilon, \infty}$ .

Vamos escrever o segundo comutador da Equação (5.20) da seguinte maneira

$$[i\epsilon \dot{U}_n U_n^* - \epsilon U_n K U_n^* + (U_n H U_n^* - H), \Pi_n] = U_n [i\epsilon U_n^* \dot{U}_n - \epsilon K + H - U_n^* H U_n, P] U_n^*.$$

Seja  $S_n = \sum_{\alpha=1}^n \epsilon^\alpha A_\alpha$ . Como pode ser visto no Apêndice (7.4), temos

$$U_n^* H U_n = e^{-iS_n} H e^{iS_n} = \sum_{k=0}^n \frac{(-i)^k}{k!} \left( \sum_{\alpha=1}^n \epsilon^\alpha \text{ad}_{A_\alpha} \right)^k (H) + \mathcal{O}(\epsilon^{n+1}) = e^{-i \text{ad}_{S_n}} (H), \tag{5.21}$$

onde  $\text{ad}_G(\cdot) = [G, \cdot]$  e

$$\mathcal{O}(\epsilon^{n+1}) = (-i)^{n+1} \int_{\Sigma_{n+1}} e^{-iu_{n+1} S_n} \text{ad}_{S_n}^{n+1} (H) e^{iu_{n+1} S_n} d\mathbf{u}.$$

Defina  $U_n^* H U_n := \sum_{\alpha=0}^n \epsilon^\alpha H_\alpha + \epsilon^{n+1} h_n(\epsilon)$  tal que

$$H_\alpha = \sum_{\mathbf{j}: s(\mathbf{j})=\alpha} \frac{(-i)^k}{k!} \text{ad}_{A_{j_k}} \cdots \text{ad}_{A_{j_1}} (H), \tag{5.22}$$

onde  $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_k)$ , e  $s(\mathbf{j}) = j_1 + \dots + j_k$ . As três primeiras ordens são dadas por

$$H_0 = H, \quad H_1 = -i[A_1, H], \quad H_2 = -i[A_2, H] - \frac{1}{2}[A_1, [A_1, H]].$$

De maneira análoga ao que foi feito na Equação (5.21), a fórmula de Duhamel abaixo (ver Equação (5.15) para entendê-la)

$$iU_n^* \dot{U}_n = - \int_0^1 e^{-i\lambda S_n} \dot{S}_n e^{i\lambda S_n} d\lambda \tag{5.23}$$

pode ser expandida da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
iU_n^* \dot{U}_n &= - \int_0^1 \sum_{k=0}^n \frac{(-i\lambda)^k}{k!} \left( \sum_{\alpha=1}^n \epsilon^\alpha \text{ad}_{A_\alpha} \right)^k (\dot{S}_n) + \mathcal{O}(\epsilon^{n+1}) d\lambda \\
&= - \sum_{k=0}^n \int_0^1 \frac{(-i\lambda)^k}{k!} d\lambda \left( \sum_{\alpha=1}^n \epsilon^\alpha \text{ad}_{A_\alpha} \right)^k (\dot{S}_n) + \mathcal{O}(\epsilon^{n+1}).
\end{aligned}$$

Calculando a integral e utilizando o fato de  $\dot{S}_n = \sum_{j=1}^n \epsilon^j \dot{A}_j$ , então temos

$$\begin{aligned}
iU_n^* \dot{U}_n &= \sum_{j=1}^n \epsilon^j \sum_{k=0}^n i^k \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \left( \sum_{\alpha=1}^n \epsilon^\alpha \text{ad}_{A_\alpha} \right)^k (\dot{A}_j) + \mathcal{O}(\epsilon^{n+1}) \\
&= \sum_{j=1}^n \epsilon^j (-i) \sum_{k=0}^n \frac{(-i)^{k+1}}{(k+1)!} \left( \sum_{\alpha=1}^n \epsilon^\alpha \text{ad}_{A_\alpha} \right)^k (\dot{A}_j) + \mathcal{O}(\epsilon^{n+1}) \\
&= \sum_{j=1}^n \epsilon^j (-i) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-i)^k}{k!} \left( \sum_{\alpha=1}^n \epsilon^\alpha \text{ad}_{A_\alpha} \right)^{k-1} (\dot{A}_j) + \mathcal{O}(\epsilon^{n+1}) \\
&:= \sum_{\alpha=1}^{n-1} \epsilon^\alpha Q_\alpha + \epsilon^n q_{n-1}(\epsilon),
\end{aligned}$$

onde

$$Q_\alpha = -i \sum_{\mathbf{j}:s(\mathbf{j})=\alpha} \frac{(-i)^k}{k!} \text{ad}_{A_{j_k}} \cdots \text{ad}_{A_{j_2}} (\dot{A}_{j_1}), \quad (5.24)$$

tal que

$$Q_1 = -\dot{A}_1, \quad Q_2 = -\dot{A}_2 + \frac{i}{2} [A_1, \dot{A}_1].$$

Vamos definir  $Q_0 = -K$ . Daí, temos

$$i\epsilon U_n^* \dot{U}_n - \epsilon K + H - U_n^* H U_n = \sum_{\alpha=1}^n \epsilon^\alpha (Q_{\alpha-1} - H_\alpha) + \epsilon^{n+1} (q_{n-1}(\epsilon) - h_n(\epsilon)). \quad (5.25)$$

Para  $1 \leq \alpha \leq n$ , podemos observar que  $H_\alpha$  depende apenas de  $\{A_j : 1 \leq j \leq \alpha\}$ , e que  $Q_\alpha$  depende de  $\{A_j : 1 \leq j \leq \alpha - 1\}$  e  $\{\dot{A}_j : 1 \leq j \leq \alpha\}$ .

Vamos agora construir indutivamente Hamiltonianos locais suaves  $\{A_1, \dots, A_n\}$  tal que  $A_\alpha \in \mathcal{L}_{\mathcal{S}, \infty}$  e  $A_\alpha^{(\tilde{m}-\alpha)} \in \mathcal{L}_{\mathcal{S}, \infty}$ , e tal que

$$[Q_{\alpha-1} - H_\alpha, P] = 0, \quad (5.26)$$

para  $1 \leq \alpha \leq n$ . Definindo  $R_n := \epsilon^{n+1} U_n (q_{n-1}(\epsilon) - h_n(\epsilon)) U_n^*$ , então a Equação (5.20) se reduz à  $i\epsilon \dot{\Pi}_n = [H + R_n, \Pi_n]$ . De fato,

$$\begin{aligned}
i\epsilon \dot{\Pi}_n &= [H, \Pi_n] + U_n [i\epsilon U_n^* \dot{U}_n - \epsilon K + H - U_n^* H U_n, P] U_n^* \\
&= [H, \Pi_n] + U_n \left[ \sum_{\alpha=1}^n \epsilon^\alpha (Q_{\alpha-1} - H_\alpha) + \epsilon^{n+1} (q_{n-1}(\epsilon) - h_n(\epsilon)), P \right] U_n^* \\
&= [H, \Pi_n] + \epsilon^{n+1} U_n [q_{n-1}(\epsilon) - h_n(\epsilon), P] U_n^* \\
&= [H, \Pi_n] + [R_n, \Pi_n] = [H + R_n, \Pi_n].
\end{aligned} \quad (5.27)$$

No caso  $\alpha = 1$ , temos que a Equação (5.26) é dada por

$$[K - i[A_1, H], P] = 0, \quad (5.28)$$

onde  $A_1 \in \mathcal{L}_{\mathcal{S},\infty}$ . Pela Proposição (5.1) (ii) temos que  $A_1 = \mathcal{I}(K)$ . Mais ainda, pela Suposição (4.2) e pela Proposição (5.1)(iii, iv), temos primeiro que  $K = \mathcal{I}(\dot{H}) \in \mathcal{C}^{(\tilde{m}-1)}$  implica que  $A_1 \in \mathcal{C}^{(\tilde{m}-1)}$ , e segundo que todas derivadas de  $K$  definem Hamiltonianos locais e, conseqüentemente, todas as derivadas de  $A_1$  também definem Hamiltonianos locais.

Indução. Seja  $\alpha > 1$  e suponhamos que a afirmação (Equação (5.26)) seja válida para todo  $1 \leq \beta < \alpha$ . Isolando a dependência de  $A_\alpha$ , podemos escrever a Equação (5.22) da seguinte maneira

$$H_\alpha = -i[A_\alpha, H] + L_\alpha, \quad (5.29)$$

onde, como podemos observar na Equação (5.22),  $L_\alpha$  é uma combinação linear de multicomutadores que envolvem apenas  $H$  e  $\{A_\beta : 1 \leq \beta \leq \alpha - 1\}$ . Logo, a Equação (5.26) pode ser escrita da seguinte maneira

$$[Q_{\alpha-1} - L_\alpha, P] + i[[A_\alpha, H], P] = 0. \quad (5.30)$$

Pela hipótese de indução,  $L_\alpha \in \mathcal{C}^{(\tilde{m}-\alpha+1)}$  com todas derivadas definindo Hamiltonianos locais, e  $L_\alpha \in \mathcal{L}_{\mathcal{S},\infty}$  (Lema (5.1)).

Tomemos

$$A_\alpha = \mathcal{I}(L_\alpha - Q_{\alpha-1}), \quad (5.31)$$

solução da Equação (5.30) (ver Equação (5.1)(ii)). Pela definição de  $Q_\alpha$ , pela hipótese de indução e pelo Lema (5.1)(iii), podemos concluir que  $Q_{\alpha-1} \in \mathcal{L}_{\mathcal{S},\infty}$  e que  $Q_\alpha \in \mathcal{C}^{\tilde{m}-\alpha-1}$ . Como  $Q_{\alpha-1}, L_\alpha \in \mathcal{L}_{\mathcal{S},\infty}$ , então, pela Proposição (5.1)(iii), podemos afirmar que  $A_\alpha \in \mathcal{L}_{\mathcal{S},\infty}$ . Finalmente, como  $Q_\alpha \in \mathcal{C}^{(\tilde{m}-\alpha-1)}$  e  $L_\alpha \in \mathcal{C}^{(\tilde{m}-\alpha+1)}$ , então  $A_\alpha \in \mathcal{C}^{(\tilde{m}-\alpha)}$  (ver Proposição (5.1)(iv)).

Resta provar as estimativas locais sobre  $R_n$ . Primeiro de tudo,

$$\epsilon^{n+1} h_n(\epsilon) = \sum_{\substack{\mathbf{j}: s(\mathbf{j}) > n \\ j_i \leq n, k \leq n}} \frac{(-i)^k}{k!} \epsilon^{s(\mathbf{j})} ad_{A_{j_k}} \cdots ad_{A_{j_1}}(H) + (-i)^{n+1} \int_{\Sigma_{n+1}} e^{-iu_{n+1}S_n} ad_{S_n}^{n+1}(H) e^{iu_{n+1}S_n} d\mathbf{u},$$

onde  $\Sigma_{n+1} = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_{n+1} \leq 1\}$ . Observe que o somatório possui um número finito de termos.

Os multicomutadores podem ser estimados pelo Lema (5.1)(ii). Já a integral  $\int_{\Sigma_{n+1}}$ , é estimada por uma versão mais simples do Lema (5.3)(i) onde  $W_\gamma$  é substituído pela função indicadora  $\chi_{[u_n, 0]}$  e  $\tau_t(O)$  é substituído por  $e^{-iu_{n+1}S_n} ad_{S_n}^{n+1}(H) e^{iu_{n+1}S_n}$ . Mais especificamente, ao invés de calcularmos a cota para a interação de  $\mathcal{I}(B)$  (como foi feito no Lema (5.3)(i)), devemos calcular a cota para a norma da interação da seguinte integração

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[u_n, 0]}(u_{n+1}) e^{-iu_{n+1}S_n} ad_{S_n}^{n+1}(H) e^{iu_{n+1}S_n} du_{n+1} = \int_0^{u_n} e^{-iu_{n+1}S_n} ad_{S_n}^{n+1}(H) e^{iu_{n+1}S_n} du_{n+1}.$$

Denotando

$$B_1 = e^{-iu_{n+1}S_n} \text{ad}_{S_n}^{n+1}(H) e^{iu_{n+1}S_n}$$

e

$$\mathcal{I}_1(B_1) = \int_0^{u_n} e^{-iu_{n+1}S_n} \text{ad}_{S_n}^{n+1}(H) e^{iu_{n+1}S_n} du_{n+1},$$

então, analogamente ao que foi feito no Lema (5.3)(i), temos que

$$\|\Phi_{\mathcal{I}_1(B_1)}\|_{\mathcal{S},l} \leq c_n C_0 \|\Phi_{B_1}\|_{\mathcal{S},l+1}.$$

Utilizando o Lema (5.1)(ii), obtemos

$$\begin{aligned} \|\Phi_{\mathcal{I}_1(B_1)}\|_{\mathcal{S},l} &\leq c_n C_0 C_1^{n+1} 2^{(n+1)(l+n+2)} \|\Phi_{S_n}\|_{\mathcal{S},l+n+2}^{n+1} \|\Phi_H\|_{\mathcal{S},l+n+2}^{n+1} \\ &= c_n C^{n+1} 2^{(n+1)(l+n+2)} \|\Phi_{S_n}\|_{\mathcal{S},l+n+2}^{n+1} \|\Phi_H\|_{\mathcal{S},l+n+2}^{n+1}, \end{aligned}$$

onde  $C^{n+1} = C_0 C_1^{n+1}$ .

Calculando, obtemos

$$\begin{aligned} \epsilon^{n+1} \|\Phi_{h_n}\|_{\mathcal{S},l} &\leq \sum_{\substack{\mathbf{j}:s(\mathbf{j})>n \\ j_i \leq n, k \leq n}} \frac{\epsilon^{s(\mathbf{j})}}{k!} C^k 2^{k(l+k)} \|\Phi_{A_{j_k}}\|_{\mathcal{S},l+k} \cdots \|\Phi_{A_{j_1}}\|_{\mathcal{S},l+k} \|\Phi_H\|_{\mathcal{S},l+k} \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} C^{n+1} 2^{(n+1)(l+n+2)} \|\Phi_{S_n}\|_{\mathcal{S},l+n+2}^{n+1} \|\Phi_H\|_{\mathcal{S},l+n+2}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

para qualquer  $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Tomando  $\epsilon$  tal que  $0 < \epsilon \leq 1$ , então, pelo fato de  $s(\mathbf{j}) \geq n+1$ , temos que  $\epsilon^{s(\mathbf{j})} \leq \epsilon^{n+1}$ . Além disso, pelo Apêndice (7.5), temos que  $\|\Phi_{S_n(s)}\|_{\mathcal{S},l+n+2} \leq g_{n,l}(s)\epsilon$ , onde  $g_{n,l}(s)$  é uma função contínua. Logo, pelo Apêndice (7.6), obtemos

$$\epsilon^{n+1} \|\Phi_{h_n(s)}\|_{\mathcal{S},l} \leq \epsilon^{n+1} p_{n,l}(s),$$

onde  $p_{n,l}$  é uma função contínua.

Uma cota similar existe para  $q_{n-1}$ . De maneira análoga ao que foi feito para  $h_n$ , temos

$$\epsilon^n q_{n-1}(\epsilon) = -i \sum_{\substack{\mathbf{j}:s(\mathbf{j}) \geq n \\ j_i \leq n, k \leq n+1}} \frac{(-i)^k}{k!} \epsilon^{s(\mathbf{j})} \text{ad}_{A_{j_k}} \cdots \text{ad}_{A_{j_2}}(\dot{A}_{j_1}) + (-i)^{n+1} \int_{\Sigma_{n+1}} e^{-iu_{n+1}S_n} \text{ad}_{S_n}^{n+1}(\dot{S}_n) e^{iu_{n+1}S_n} d\mathbf{u}$$

Analogamente ao que foi feito para  $\epsilon^{n+1} \|\Phi_{h_n(s)}\|_{\mathcal{S},l}$ , obtemos

$$\epsilon^{n+1} \|\Phi_{q_{n-1}(s)}\|_{\mathcal{S},l} \leq \epsilon^{n+1} \tilde{p}_{n,l}(s),$$

onde  $\tilde{p}_{n,l}$  é uma função contínua.

Pela definição de  $R_n$  e pelo fato de  $\Phi_{n,\epsilon}$  ser a interação de  $R_{n,\epsilon}$ , então

$$\begin{aligned}
\|\Phi_{n,\epsilon}\|_{\mathcal{S},l} &\leq \epsilon^{n+1}\|\Phi_{h_n}\|_{\mathcal{S},l} + \epsilon^{n+1}\|\Phi_{q_{n-1}}\|_{\mathcal{S},l} \\
&\leq \epsilon^{n+1}p_{n,l} + \epsilon^{n+1}\tilde{p}_{n,l} \\
&= \epsilon^{n+1}r_{n,l},
\end{aligned}$$

onde  $r_{n,l} = p_{n,l} + \tilde{p}_{n,l}$ . Pela continuidade de  $\tilde{p}_{n,l}$  e de  $p_{n,l}$ , então  $r_{n,l}$  é contínua. Dessa forma, concluímos a demonstração.  $\square$

**Lema 5.6.** Sob as condições do Lema (5.5), se existir  $s_0 \in [1, 0]$  tal que  $H_{s_0}^{(\alpha)} = 0$  para todo  $1 \leq \alpha \leq k \leq d + m$ , então  $A_\alpha^{(\alpha_1 - \alpha)}(s_0) = 0$  para todo  $\alpha$  tal que  $1 \leq \alpha \leq k$  e para todo  $\alpha_1$  tal que  $\alpha \leq \alpha_1 \leq k$ .

*Demonstração.* Como  $\dot{H}_{s_0} = 0$ , então segue da Equação (5.16) que  $\frac{d}{ds}\mathcal{I}_s(G_s)|_{s=s_0} = \mathcal{I}_{s_0}(\dot{G}_{s_0})$  para todo  $G_s$  diferenciável. Como  $K_s = \mathcal{I}_s(\dot{H}_s)$ , então  $K_{s_0}^{(\alpha-1)} = \mathcal{I}_{s_0}(H_{s_0}^{(\alpha)})$ . Daí, pelo fato de  $H_{s_0}^{(\alpha)} = 0$ , então temos que  $K_{s_0}^{(\alpha-1)} = 0, \forall 1 \leq \alpha \leq k$ . Como  $A_1(s) = \mathcal{I}_s(K_s)$ , então

$$A_1^{(\alpha-1)}(s_0) = \mathcal{I}_{s_0}(K_{s_0}^{(\alpha-1)}) = \mathcal{I}_{s_0}(0) = 0,$$

$\forall 1 \leq \alpha \leq k$ .

Observemos que para  $j \in \mathbb{N}$ , tal que  $1 < j \leq k$ , também temos que  $A_j^{(\alpha-j)}(s_0) = 0, \forall \alpha$  tal que  $j \leq \alpha \leq k$ . De fato, suponhamos que para todo  $\beta$  tal que  $1 \leq \beta \leq j-1$  temos que  $A_\beta^{(\alpha-\beta)}(s_0) = 0, \forall \alpha$  tal que  $\beta \leq \alpha \leq k$ . Vamos mostrar que é válido que  $A_j^{(\alpha_1-j)}(s_0) = 0, \forall \alpha_1$  tal que  $j \leq \alpha_1 \leq k$ .

Pela Equação (5.29), temos que

$$H_j(s) = -i[A_j(s), H_s] + L_j(s).$$

Comparando essa equação com a Equação (5.22), percebemos que  $L_j(s)$  depende de  $\{A_\beta(s) : 1 \leq \beta \leq j-1\}$ . Pelo fato de  $A_\beta(s_0) = 0, \forall 1 \leq \beta \leq j-1$ , então podemos concluir que  $L_j(s_0) = 0$ . Mais ainda,  $L_j^{(\alpha_1-j)}(s)$  depende de

$$\bigcup_{\beta=1}^{j-1} \{A_\beta^{(\alpha-j)}(s) : j \leq \alpha \leq \alpha_1\},$$

para todo  $\alpha_1$  tal que  $j \leq \alpha_1 \leq k$ . Pela suposição, temos que  $A_\beta^{(\alpha-j)}(s_0) = 0$ , para todo  $\beta$  tal que  $1 \leq \beta \leq j-1$ , e para todo  $\alpha$  tal que  $j \leq \alpha \leq \alpha_1$ . Logo,  $L_j^{(\alpha_1-j)}(s_0) = 0, \forall \alpha_1$  tal que  $j \leq \alpha_1 \leq k$ .

Como  $Q_j(s)$  depende apenas de  $\{A_\beta(s) : 1 \leq \beta \leq j-1\}$  e de  $\{\dot{A}_\beta(s) : 1 \leq \beta \leq j\}$  (lembrando que  $Q_1(s)$  depende apenas de  $\dot{A}_1(s)$ ), então, pela suposição, podemos concluir que  $Q_{j-1}(s_0) = 0$ ,

lembrando que  $1 < j \leq k$ . Mais ainda,  $Q_j^{(\alpha_1-(j+1))}(s)$  depende apenas de

$$\bigcup_{\beta=1}^{j-1} \{A_\beta^{(\alpha-(j+1))}(s) : j+1 \leq \alpha \leq \alpha_1\} \text{ e de } \bigcup_{\beta=1}^j \{A_\beta^{(\alpha-(j+1))}(s) : j+1 \leq \alpha \leq \alpha_1\},$$

ou seja, depende apenas de

$$\bigcup_{\beta=1}^{j-1} \{A_\beta^{(\alpha-(j+1))}(s) : j+1 \leq \alpha \leq \alpha_1 + 1\} \text{ e de } \{A_j^{(\alpha-j)}(s) : j+1 \leq \alpha \leq \alpha_1\}.$$

Observemos que  $Q_1^{(\alpha_1-1)}$  depende apenas de  $\{A_1^{(\alpha)}(s) : 1 \leq \alpha \leq \alpha_1\}$ . Daí, temos que  $Q_{j-1}^{(\alpha_1-j)}(s)$  depende apenas de

$$\bigcup_{\beta=1}^{j-2} \{A_\beta^{(\alpha-j)}(s) : j \leq \alpha \leq \alpha_1 + 1\} \text{ e de } \{A_{j-1}^{(\alpha-j+1)}(s) : j \leq \alpha \leq \alpha_1\},$$

lembrando que  $1 < j \leq k$ . Pela suposição, temos que  $A_\beta^{(\alpha-j)}(s_0) = 0, \forall \alpha, \beta$  tal que  $1 \leq \beta \leq j-2$  e  $j \leq \alpha \leq \alpha_1$ , e temos que  $A_{j-1}^{(\alpha-j+1)}(s_0) = 0, \forall \alpha$  tal que  $j \leq \alpha \leq \alpha_1$ . Logo,  $Q_{j-1}^{(\alpha_1-j)}(s_0) = 0, \forall \alpha_1$  tal que  $j \leq \alpha_1 \leq k$ .

Como  $A_j(s) = \mathcal{I}_s(L_j(s) - Q_{j-1}(s))$ , então

$$A_j^{(\alpha_1-j)}(s_0) = \mathcal{I}_{s_0}(L_j^{(\alpha_1-j)}(s_0) - Q_{j-1}^{(\alpha_1-j)}(s_0)) = \mathcal{I}_{s_0}(0) = 0.$$

Portanto, para todo  $j$  tal que  $1 \leq j \leq k$ , concluímos que  $A_j^{(\alpha_1-j)}(s_0) = 0, \forall \alpha_1$  tal que  $j \leq \alpha_1 \leq k$ . □

Agora, vamos provar o Teorema (4.1).

**Teorema 5.1 (Teorema (4.1)).** Assuma que a Suposição (4.1) acontece.

(i) Se a Suposição (4.2) é satisfeita para  $m = 1$ , e se  $\Phi_s^{(k)}(X)|_{s=0} = 0, \forall X \in \mathcal{F}(\Gamma)$  e  $1 \leq k \leq d+1$ , então existe um vetor  $\tilde{\psi}_\epsilon(s) \in \text{Im}(P_s)$  com  $\|\tilde{\psi}_\epsilon(s)\| = 1$  e existe  $C_1 < \infty$ , que é independente de  $\Lambda$  e  $\epsilon$ , tal que

$$\sup_{s \in [0,1]} \{|\langle \psi_\epsilon(s), O\psi_\epsilon(s) \rangle - \langle \tilde{\psi}_\epsilon(s), O\tilde{\psi}_\epsilon(s) \rangle|\} \leq C_1 |\text{supp}(O)|^2 \|O\| \epsilon \quad (5.33)$$

para qualquer  $O$  com  $\text{supp}(O) \subset \Lambda$ .

(ii) Se a Suposição (4.2) é satisfeita para  $m > 1$ , e se  $\Phi_s^{(k)}(X)|_{s=0} = \Phi_s^{(k)}(X)|_{s=1} = 0, \forall X \in \mathcal{F}(\Gamma)$  e  $1 \leq k \leq d+m$ , então

$$|\langle \psi_\epsilon(1), O\psi_\epsilon(1) \rangle - \langle \tilde{\psi}_\epsilon(1), O\tilde{\psi}_\epsilon(1) \rangle| \leq C_m |\text{supp}(O)|^2 \|O\| \epsilon^m \quad (5.34)$$

*Demonstração* . Nessa demonstração, vamos restabelecer a dependência de  $s$  e utilizar as convenções da Seção (3.1). Primeiramente, pelas hipóteses do Teorema (4.1) e pelo Lema (5.6), temos que  $U_{n,\epsilon}(0) = I$  ( lembrando que  $U_{n,\epsilon}(s) = \exp(i \sum_{\alpha=1}^n \epsilon^\alpha A_\alpha(s))$ ). Seja  $V_{n,\epsilon}(s, s')$  solução de

$$i\epsilon \frac{d}{ds} V_{n,\epsilon}(s, s') = (H_s + R_{n,\epsilon}(s))V_{n,\epsilon}(s, s'), \quad V_{n,\epsilon}(s', s') = I.$$

Utilizando o fato de que  $\frac{d}{ds}(V_{n,\epsilon}^*(s, s')) = (\frac{d}{ds}V_{n,\epsilon}(s, s'))^*$ , temos pela equação anterior a seguinte equação

$$-i\epsilon \frac{d}{ds} V_{n,\epsilon}^*(s, s') = V_{n,\epsilon}^*(s, s')(H_s + R_{n,\epsilon}(s)), \quad V_{n,\epsilon}^*(s', s') = I.$$

Através das duas equações anteriores, temos que  $V_{n,\epsilon}(s, 0)P_0V_{n,\epsilon}^*(s, 0)$  é solução da Equação (5.19). Sob a mesma condição inicial, temos que

$$V_{n,\epsilon}(s, 0)P_0V_{n,\epsilon}^*(s, 0) = \Pi_{n,\epsilon}(s) = U_{n,\epsilon}(s)P_sU_{n,\epsilon}^*(s), \quad \forall s \in [1, 0]. \quad (5.35)$$

Seja a equação de Schrödinger

$$i\epsilon \frac{d}{ds} U_\epsilon(s, s') = H_s U_\epsilon(s, s'), \quad U_\epsilon(s', s') = I.$$

Utilizando o fato de que  $\frac{d}{ds}(U_\epsilon^*(s, s')) = (\frac{d}{ds}U_\epsilon(s, s'))^*$ , temos que

$$-i\epsilon \frac{d}{ds} U_\epsilon^*(s, s') = U_\epsilon^*(s, s')H_s, \quad U_\epsilon^*(s', s') = I.$$

Para comparar  $V_{n,\epsilon}(s, s')$  com  $U_\epsilon(s, s')$ , observemos que, para qualquer operador  $O$ , temos

$$\begin{aligned} & V_{n,\epsilon}^*(s, s')OV_{n,\epsilon}(s, s') - U_\epsilon^*(s, s')OU_\epsilon(s, s') \\ &= V_{n,\epsilon}^*(r, s')U_\epsilon^*(s, r)OU_\epsilon(s, r)V_{n,\epsilon}(r, s') \Big|_{r=s'}^{r=s} \\ &= \int_{s'}^s \frac{d}{dr} (V_{n,\epsilon}^*(r, s')U_\epsilon^*(s, r)OU_\epsilon(s, r)V_{n,\epsilon}(r, s')) dr \\ &= \int_{s'}^s \left( \frac{d}{dr} V_{n,\epsilon}^*(r, s') \right) U_\epsilon(r, s) O U_\epsilon^*(r, s) V_{n,\epsilon}(r, s') dr \\ &+ \int_{s'}^s V_{n,\epsilon}^*(r, s') \left( \frac{d}{dr} U_\epsilon(r, s) \right) O U_\epsilon^*(r, s) V_{n,\epsilon}(r, s') dr \\ &+ \int_{s'}^s V_{n,\epsilon}^*(r, s') U_\epsilon(r, s) O \left( \frac{d}{dr} U_\epsilon^*(r, s) \right) V_{n,\epsilon}(r, s') dr \\ &+ \int_{s'}^s V_{n,\epsilon}^*(r, s') U_\epsilon(r, s) O U_\epsilon^*(r, s) \left( \frac{d}{dr} V_{n,\epsilon}(r, s') \right) dr. \end{aligned}$$

Utilizando as Equações de Schrödinger anteriores e o fato de  $U(s, s') = U^*(s', s)$ , então temos

$$\begin{aligned}
& V_{n,\epsilon}^*(s, s') O V_{n,\epsilon}(s, s') - U_\epsilon^*(s, s') O U_\epsilon(s, s') \\
= & \int_{s'}^s \frac{d}{dr} (V_{n,\epsilon}^*(r, s') U_\epsilon(r, s) O U_\epsilon^*(r, s) V_{n,\epsilon}(r, s')) dr \\
= & \int_{s'}^s \frac{i}{\epsilon} V_{n,\epsilon}^*(r, s') (H_r + R_{n,\epsilon}(r)) U_\epsilon(r, s) O U_\epsilon^*(r, s) V_{n,\epsilon}(r, s') \\
& + \frac{-i}{\epsilon} V_{n,\epsilon}^*(r, s') H_r U_\epsilon(r, s) O U_\epsilon^*(r, s) V_{n,\epsilon}(r, s') \\
& + \frac{i}{\epsilon} V_{n,\epsilon}^*(r, s') U_\epsilon(r, s) O U_\epsilon^*(r, s) H_r V_{n,\epsilon}(r, s') \\
& + \frac{-i}{\epsilon} V_{n,\epsilon}^*(r, s') U_\epsilon(r, s) O U_\epsilon^*(r, s) (H_r + R_{n,\epsilon}(r)) V_{n,\epsilon}(r, s') dr \\
= & \int_{s'}^s \frac{i}{\epsilon} V_{n,\epsilon}^*(r, s') R_{n,\epsilon}(r) U_\epsilon(r, s) O U_\epsilon^*(r, s) V_{n,\epsilon}(r, s') \\
& + \frac{-i}{\epsilon} V_{n,\epsilon}^*(r, s') U_\epsilon(r, s) O U_\epsilon^*(r, s) R_{n,\epsilon}(r) V_{n,\epsilon}(r, s') dr \\
= & \frac{i}{\epsilon} \int_{s'}^s V_{n,\epsilon}^*(r, s') [R_{n,\epsilon}(r), U_\epsilon^*(s, r) O U_\epsilon(s, r)] V_{n,\epsilon}(r, s') dr \tag{5.36}
\end{aligned}$$

A igualdade  $U(s, s') = U^*(s', s)$  está provada no Apêndice (7.1).

Seja  $\psi_\epsilon(s)$  a solução normalizada da equação de Schrödinger tal que

$$\psi_\epsilon(s) = U_\epsilon(s, 0)\psi_0,$$

com a condição inicial  $\psi_0$  na imagem de  $P_0$ , ver Equação (4.1). Seja  $\phi_{n,\epsilon}(s)$  a solução da equação de Schrödinger com a condução contra-diabática  $(V_{n,\epsilon}(s, s'))$  para a mesma condição inicial,

$$\phi_{n,\epsilon}(s) = V_{n,\epsilon}(s, 0)\psi_0.$$

Então, pela Equação (5.36),

$$\begin{aligned}
& \langle \psi_\epsilon(s), O \psi_\epsilon(s) \rangle - \langle \phi_{n,\epsilon}(s), O \phi_{n,\epsilon}(s) \rangle \\
= & \langle \psi_0, U_\epsilon^*(s, 0) O U_\epsilon(s, 0) \psi_0 \rangle - \langle \psi_0, V_{n,\epsilon}^*(s, 0) O V_{n,\epsilon}(s, 0) \psi_0 \rangle \\
= & \langle \psi_0, (U_\epsilon^*(r, 0) O U_\epsilon(r, 0) - V_{n,\epsilon}^*(r, 0) O V_{n,\epsilon}(r, 0)) \psi_0 \rangle \\
= & -\frac{i}{\epsilon} \int_0^s \langle \phi_{n,\epsilon}(r), [R_{n,\epsilon}(r), U_\epsilon^*(s, r) O U_\epsilon(s, r)] \phi_{n,\epsilon}(r) \rangle dr. \tag{5.37}
\end{aligned}$$

Agora, pelo Lema (5.5), temos que  $R_{n,\epsilon}(r)$  é um Hamiltoniano local de ordem  $\epsilon^{n+1}$ . Mais ainda, o comutador  $[R_{n,\epsilon}(r), U_\epsilon^*(s, r) O U_\epsilon(s, r)]$  envolvido por um tempo  $|\epsilon^{-1}s - \epsilon^{-1}r|$  e pode ser controlado usando o Lema (5.2), produzindo

$$|\langle \phi_{n,\epsilon}(r), [R_{n,\epsilon}(r), U_\epsilon^*(s, r) O U_\epsilon(s, r)] \phi_{n,\epsilon}(r) \rangle| \leq C r_{n,0}(r) |\text{supp}(O)|^2 \|O\| \epsilon^{n+1-d}. \tag{5.38}$$

Pela Equação (5.35) e pelo fato de  $V_{n,\epsilon}(s, s')$  ser unitário, temos que  $V_{n,\epsilon}(s, 0)P_0 =$

$\Pi_{n,\epsilon}(s)V_{n,\epsilon}(s,0)$ . Logo,

$$\phi_{n,\epsilon}(s) = V_{n,\epsilon}(s,0)\psi_0 \in \text{Im}(\Pi_{n,\epsilon}(s)) = \text{Im}(U_{n,\epsilon}(s)P_sU_{n,\epsilon}^*(s)),$$

o que nos garante a existência de  $\tilde{\psi}_{n,\epsilon}(s) \in \text{Im}(P_s)$  tal que  $\phi_{n,\epsilon}(s) = U_{n,\epsilon}(s)\tilde{\psi}_{n,\epsilon}(s)$ . Logo, temos

$$\langle \phi_{n,\epsilon}(s), O\phi_{n,\epsilon}(s) \rangle - \langle \tilde{\psi}_{n,\epsilon}(s), O\tilde{\psi}_{n,\epsilon}(s) \rangle = \langle \tilde{\psi}_{n,\epsilon}(s), (U_{n,\epsilon}^*OU_{n,\epsilon}(s) - O)\tilde{\psi}_{n,\epsilon}(s) \rangle.$$

Pela fórmula de Duhamel (5.23) e pela Equação (5.15), temos

$$\begin{aligned} U_{n,\epsilon}^*(s)OU_{n,\epsilon}(s) - O &= U_{n,\epsilon}^*(s')OU_{n,\epsilon}(s')\Big|_{s'=0}^{s'=s} = \int_0^s \frac{d}{ds'} (U_{n,\epsilon}^*(s')OU_{n,\epsilon}(s')) ds' \\ &= \int_0^s \int_0^1 \left( -ie^{(1-u)(-i)S_n(s')} \dot{S}_n(s') e^{u(-i)S_n(s')} O e^{iS_n(s')} + ie^{-iS_n(s')} O e^{(1-u)iS_n(s')} \dot{S}_n(s') e^{uiS_n(s')} \right) duds' \\ &= i \int_0^s \int_0^1 \left[ e^{-iS_n(s')} O e^{iS_n(s')}, e^{-iuS_n(s')} \dot{S}_n(s') e^{iuS_n(s')} \right] duds'. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Pela equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned} |U_{n,\epsilon}^*(s)OU_{n,\epsilon}(s) - O| &\leq \int_0^s \int_0^1 \left\| \left[ e^{-iS_n(s')} O e^{iS_n(s')}, e^{-iuS_n(s')} \dot{S}_n(s') e^{iuS_n(s')} \right] \right\| duds' \\ &\leq \int_0^s \int_0^1 \left\| e^{-iuS_n(s')} \left[ e^{-i(1-u)S_n(s')} O e^{i(1-u)S_n(s')}, \dot{S}_n(s') \right] e^{iuS_n(s')} \right\| duds' \\ &\leq \int_0^s \int_0^1 \left\| \left[ e^{-i(1-u)S_n(s')} O e^{i(1-u)S_n(s')}, \dot{S}_n(s') \right] \right\| duds' \end{aligned}$$

Utilizando o Lema (5.2) e o fato de  $\dot{S}_n(s) = \sum_{k=1}^n \epsilon^k \dot{A}_k(s)$ , então temos

$$\begin{aligned} |U_{n,\epsilon}^*(s)OU_{n,\epsilon}(s) - O| &\leq \sum_{k=1}^n \epsilon^k \int_0^s \int_0^1 \left\| \left[ e^{-i(1-u)S_n(s')} O e^{i(1-u)S_n(s')}, \dot{A}_k(s') \right] \right\| duds' \\ &\leq \sum_{k=1}^n \epsilon^k \int_0^s \int_0^1 C(k) \|\Phi_{\dot{A}_k}\| \|O\| |\text{supp}(O)|^2 |u-1|^d duds'. \end{aligned}$$

onde  $C(k)$  são constantes para todo  $k$ . Observemos que  $|u-1| \leq 1$ . Logo,

$$|U_{n,\epsilon}^*(s)OU_{n,\epsilon}(s) - O| \leq \sum_{k=1}^n \epsilon^k \int_0^s \int_0^1 C(k) \|\Phi_{\dot{A}_k}\| \|O\| |\text{supp}(O)|^2 duds'.$$

Tomando  $\epsilon$  tal que  $0 < \epsilon \leq 1$ , então  $\epsilon^k \leq \epsilon$  para todo  $k$ . Pelo fato da norma  $\|\Phi_{\dot{A}_k}\|$  ser contínua, então temos que  $\|\Phi_{\dot{A}_k}\|$  é integrável. Dessa, forma a equação acima pode ser escrita da seguinte maneira

$$|U_{n,\epsilon}^*(s)OU_{n,\epsilon}(s) - O| \leq C_0 \|O\| |\text{supp}(O)|^2 \epsilon. \quad (5.40)$$

onde  $C_0$  é uma constante. Logo,

$$\sup_{s \in [0,1]} |\langle \psi_\epsilon(s), O\psi_\epsilon(s) \rangle - \langle \tilde{\psi}_{n,\epsilon}(s), O\tilde{\psi}_{n,\epsilon}(s) \rangle| \leq \epsilon \|O\| |\text{supp}(O)|^2 (C_1 \epsilon^{n-(d+1)} + C_0), \quad (5.41)$$

onde  $C_1, C_0$  são constantes. Tomando  $n \geq d+1$ , então provamos o item (i).

Pela Suposição (4.2), podemos tomar  $n = d + m$ . Logo, a equação (5.37) possui ordem  $\epsilon^m$ . Como por hipótese  $\Phi_1^{(k)}(X) = 0$ , então pelo Lema (5.6) temos que  $A_\alpha(1) = 0$  para  $1 \leq \alpha \leq m+d$ . Assim,  $S_{m+d,\epsilon}(1) = 0$  e o item (ii) é provado tomando  $\tilde{\psi}_{n,\epsilon} = \phi_{n,\epsilon}$ .  $\square$

### 5.3 Solução da Equação (4.5)

Vamos discutir mais explicitamente a possibilidade de escolher o vetor  $\tilde{\psi}_{n,\epsilon}(s)$  (ver Seção (4.2)) como solução da Equação (4.5). Na demonstração do Teorema Principal (5.1), temos

$$\tilde{\psi}_{n,\epsilon}(s) = U_{n,\epsilon}^*(s) \phi_{n,\epsilon}(s) = U_{n,\epsilon}^*(s) V_{n,\epsilon}(s, 0) \psi_0.$$

Assim,  $\tilde{\psi}_{n,\epsilon}(s)$  é uma solução da equação diferencial

$$i \frac{d}{ds} \tilde{\psi}_{n,\epsilon}(s) = \tilde{K}_{n,\epsilon}(s) \tilde{\psi}_{n,\epsilon}(s), \quad \tilde{\psi}_{n,\epsilon}(0) = \psi_0, \quad (5.42)$$

onde

$$\tilde{K}_{n,\epsilon}(s) = i \dot{U}_{n,\epsilon}^*(s) U_{n,\epsilon}(s) + \epsilon^{-1} U_{n,\epsilon}^*(s) (H_s + R_{n,\epsilon}(s)) U_{n,\epsilon}(s). \quad (5.43)$$

Observando que  $i \dot{U}_{n,\epsilon}^*(s) U_{n,\epsilon}(s) = -i U_{n,\epsilon}^*(s) \dot{U}_{n,\epsilon}(s)$  (ver Equação (5.23)) e expandindo  $\tilde{K}_{n,\epsilon}(s)$  na potência de  $\epsilon$  (ver Equação (5.25)), temos que

$$\tilde{K}_{n,\epsilon}(s) = \epsilon^{-1} H_s - i[A_1(s), H_s] + B(s),$$

onde  $B \in \mathcal{L}_{\mathcal{S},\infty}$  é de ordem  $\epsilon$ . Essa expansão pode parecer inútil visto que  $\epsilon^{-1} H_s$  é simplesmente o gerador da equação de Schrödinger original. Contudo, podemos utilizar o fato de  $\tilde{\psi}_{n,\epsilon}(s) = P_s \tilde{\psi}_{n,\epsilon}(s)$  (pois  $\tilde{\psi}_{n,\epsilon}(s) \in \text{Im}(P_s)$ ) para multiplicar  $P_s$  em qualquer termo de  $\tilde{K}_{n,\epsilon}(s)$ . Para simplificar, vamos assumir a degeneração exata em  $\Sigma_s^1$ , isto é,  $\delta = 0$ , e estabelecer, sem perda de generalidade,  $H_s P_s = 0$  (consequentemente, como  $[H_s, P_s] = 0$  e  $H_s P_s = 0$ , então  $P_s H_s = 0$ ). Então, quando aplicamos  $P_s$ , temos que

$$\epsilon^{-1} H_s P_s = 0,$$

enquanto o termo  $\epsilon$ -independente fica

$$i[A_1(s), H_s] P_s = [i[A_1(s), H_s], P_s] P_s. \quad (5.44)$$

Esse último termo também é igual à  $[K_s, P_s]P_s$  (ver Equação (5.28)). Além disso, temos que  $-i\dot{P}_s P_s = i[P_s, \dot{P}_s]P_s$ . De fato,

$$\begin{aligned} iP_s = iP_s^2 &\Rightarrow i\dot{P}_s = i\dot{P}_s P_s + iP_s \dot{P}_s \Rightarrow i\dot{P}_s P_s = i\dot{P}_s P_s P_s + iP_s \dot{P}_s P_s \\ &\Rightarrow -i\dot{P}_s P_s P_s = -i\dot{P}_s P_s + iP_s \dot{P}_s P_s \Rightarrow -i\dot{P}_s P_s = -i\dot{P}_s P_s^2 + iP_s \dot{P}_s P_s \\ &\Rightarrow -i\dot{P}_s P_s = i[P_s, \dot{P}_s]P_s. \end{aligned}$$

Lembrando que  $K = \mathcal{I}(\dot{H})$ , então temos pelo Corolário (5.1) que

$$\dot{P}_s = i[K, P_s].$$

Logo,

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{n,\epsilon}(s)P_s - i[P_s, \dot{P}_s]P_s &= [K, P_s]P_s + B(s)P_s + i\dot{P}_s P_s \\ &= [K, P_s]P_s + B(s)P_s + i(i[K, P_s])P_s \\ &= [K, P_s]P_s + B(s)P_s - [K, P_s]P_s = B(s)P_s. \end{aligned}$$

Como  $\tilde{K}_{n,\epsilon}(s)$  e  $i[P_s, \dot{P}_s]$  diferem por um Hamiltoniano local  $B(s)$  de ordem  $\epsilon$  na norma local quando está atuando na imagem de  $P_s$ , e ambos geram uma dinâmica dentro da imagem de  $P_s$ , então, pela mesma idéia da prova do Teorema Adiabático, temos

$$\sup_{s \in [0,1]} |\langle \tilde{\psi}_{n,\epsilon}(s), O\tilde{\psi}_{n,\epsilon}(s) \rangle - \langle \Omega(s), O\Omega(s) \rangle| \leq C(O)\epsilon$$

onde  $C(O)$  é uma constante que depende da escolha do operador  $O$  e  $\Omega(s)$  é a solução da Equação (4.5).

Resta explicar que essa conclusão continua válida quando a degenerescência estrita é dada pela Equação (4.4). Sem perda de generalidade, vamos considerar que  $\min \Sigma_s^1 = 0$ . Observemos que

$$[i[A_1(s), H_s], P_s]P_s = i([A_1(s), H_s]P_s - P_s[A_1(s), H_s])P_s = i[A_1(s), H_s]P_s - iP_s[A_1(s), H_s]P_s.$$

Portanto,

$$i[A_1(s), H_s]P_s = [i[A_1(s), H_s], P_s]P_s + iP_s[A_1(s), H_s]P_s.$$

Nesse caso,  $\tilde{K}_{n,\epsilon}(s)P_s$  é expandido da seguinte maneira

$$\tilde{K}_{n,\epsilon}(s)P_s = \epsilon^{-1}H_s P_s - [i[A_1(s), H_s], P_s]P_s - iP_s[A_1(s), H_s]P_s + B(s)P_s$$

Em norma, o termo  $\epsilon^{-1}H_s P_s$  é cotado por  $\epsilon^{-1}\delta$  e o termo  $iP_s[A_1(s), H_s]P_s$  é cotado por  $C\delta|\Lambda|$ . O termo  $|\Lambda|$  vem da norma de  $A_1(s)$ . De fato, denotando  $c = \max_{x \in \Lambda} \left( \sum_{X \ni x} \|\dot{\Phi}_s(X)\| \right)$

e  $c_1 = \int_{\mathbb{R}} |W_\gamma(t)| dt$ , temos

$$\begin{aligned}
\|A_1(s)\| = \|\mathcal{I}_s^\Lambda(K_s^\Lambda)\| &\leq \|\tau_t^{s,\Lambda}(K_s^\Lambda)\| \int_{\mathbb{R}} |W_\gamma(t)| dt \\
&\leq \|\tau_t^{s,\Lambda}(K_s^\Lambda)\| c_1 \\
&\leq \|K_s^\Lambda\| c_1 = \|\mathcal{I}_s^\Lambda(\dot{H}_s^\Lambda)\| c_1 \\
&\leq \|\dot{H}_s^\Lambda\| (c_1)^2 = \left\| \sum_{X \subset \Lambda} \dot{\Phi}_s(X) \right\| (c_1)^2 \\
&\leq \sum_{X \subset \Lambda} \|\dot{\Phi}_s(X)\| (c_1)^2 \\
&\leq \sum_{x \in \Lambda} \sum_{\substack{X \ni x: \\ X \subset \Lambda}} \|\dot{\Phi}_s(X)\| (c_1)^2 \\
&\leq \sum_{x \in \Lambda} c(c_1)^2 \\
&\leq |\Lambda| c(c_1)^2 = |\Lambda| C.
\end{aligned}$$

Portanto, se a Equação (4.4) acontece, então ambos termos são cotados em norma por  $C\epsilon$  e o argumento continua válido.

## 5.4 Prova da Teoria da resposta linear

Agora vamos provar a Teoria da resposta linear.

**Teorema 5.2 (Teorema (4.2)).** Suponha que as Suposições (4.1), (4.2) são satisfeitas para a família de Hamiltonianos  $H_{\text{inicial}} + \sigma\alpha V$ , para algum  $\alpha > 0$  fixo e  $\sigma \in [0, 1]$ . Seja  $J \in \mathcal{A}^X$  um observável, com  $X \subset \Lambda$ , e seja  $f_{J,V} = -i\omega_0([K_0, J])$ . Então a expressão

$$\alpha^{-1}(\omega_{\epsilon,\alpha;0}(J) - \omega_0(J) - \alpha f_{J,V}) \quad (5.45)$$

converge para 0, uniformemente no volume, tomando primeiro o limite  $\epsilon \rightarrow 0$  e depois o limite  $\alpha \rightarrow 0$ .

*Demonstração.* Vamos denotar a família de Hamiltonianos  $H_{\text{inicial}} + \sigma\alpha V$  por  $H_{\text{inicial}} + e^s\alpha V$ , onde  $s \in [-\infty, 0]$ . Sejam  $H_{s,\alpha} = H_{\text{inicial}} + e^s\alpha V$  e  $P_{\epsilon,\alpha}(s)$  a solução da Equação (4.8) com a condição inicial  $P_{\epsilon,\alpha}(-\infty) = \lim_{s \rightarrow -\infty} P_{\epsilon,\alpha}(s) = P_\alpha$ . Devemos lembrar que  $P_\alpha$  é a projeção no patch espectral do Hamiltoniano  $H_{0,\alpha}$ . Pelo Corolário (5.1), temos que

$$\dot{P}_\alpha = \frac{d}{d\alpha}(P_\alpha) = i[\mathcal{I}\left(\frac{d}{d\alpha}(H_{0,\alpha})\right), P_\alpha] = i[\mathcal{I}(\dot{H}_{0,\alpha}), P_\alpha], \quad \forall \alpha \in [0, \infty),$$

onde  $K_\alpha = \mathcal{I}(\dot{H}_{0,\alpha})$ . Como  $\dot{H}_{0,\alpha} = \frac{d}{d\alpha}(H_{0,\alpha}) = V$ , então

$$K_\alpha = \mathcal{I}(V), \quad \forall \alpha \in [0, \infty).$$

Pelo fato de  $H_{s,\alpha}^{(k)} = e^s \alpha V$  para todo  $k \geq 1$ , então a prova do Lema (5.5) pode ser reproduzida de tal forma que  $r_{n,k}(s) = C_{n,k} \alpha e^s$ .

Utilizando a Proposição (1.4), obtemos das Equações (5.37) e (5.38) a seguinte equação

$$\left| \frac{\text{Tr}(P_{\epsilon,\alpha}(s)O)}{\text{Tr}(P_{\epsilon,\alpha}(s))} - \frac{\text{Tr}(\Pi_{n,\epsilon}(s)O)}{\text{Tr}(\Pi_{n,\epsilon}(s))} \right| \leq C_1 \alpha |\text{supp}(O)|^2 \|O\| \epsilon^{n-d} \lim_{s_0 \rightarrow -\infty} \int_{s_0}^s e^{s'} |s' - s_0|^d ds', \quad (5.46)$$

tal que o limite é finito devido ao fator exponencial e onde  $C_1$  é uma constante.

Pela Equação (5.35), sabemos que

$$\Pi_{n,\epsilon}(s) = V_{n,\epsilon}(s, 0) P_{\epsilon,\alpha}(0) V_{n,\epsilon}^*(s, 0) = V_{n,\epsilon}(s, 0) P_\alpha V_{n,\epsilon}^*(s, 0),$$

lembrando que  $P_{\epsilon,\alpha}(0) = P_\alpha$ . Observemos que

$$\text{Tr}(\Pi_{n,\epsilon}(s)) = \text{Tr}(V_{n,\epsilon}(s, 0) P_\alpha V_{n,\epsilon}^*(s, 0)) = \text{Tr}(P_\alpha V_{n,\epsilon}^*(s, 0) V_{n,\epsilon}(s, 0)) = \text{Tr}(P_\alpha).$$

Dessa forma temos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\text{Tr}(\Pi_{n,\epsilon}(s)O)}{\text{Tr}(\Pi_{n,\epsilon}(s))} - \frac{\text{Tr}(P_\alpha O)}{\text{Tr}(P_\alpha)} \right| &= \left| \frac{\text{Tr}(V_{n,\epsilon}(s, 0) P_\alpha V_{n,\epsilon}^*(s, 0) O)}{\text{Tr}(P_\alpha)} - \frac{\text{Tr}(P_\alpha O)}{\text{Tr}(P_\alpha)} \right| \\ &= \left| \frac{\text{Tr}(P_\alpha V_{n,\epsilon}^*(s, 0) O V_{n,\epsilon}(s, 0))}{\text{Tr}(P_\alpha)} - \frac{\text{Tr}(P_\alpha O)}{\text{Tr}(P_\alpha)} \right| \\ &= \left| \text{Tr} \left( \frac{P_\alpha}{\text{Tr}(P_\alpha)} (V_{n,\epsilon}^*(s, 0) O V_{n,\epsilon}(s, 0) - O) \right) \right| \\ &\leq \text{Tr} \left( \frac{P_\alpha}{\text{Tr}(P_\alpha)} \right) |V_{n,\epsilon}^*(s, 0) O V_{n,\epsilon}(s, 0) - O| \\ &= |V_{n,\epsilon}^*(s, 0) O V_{n,\epsilon}(s, 0) - O|. \end{aligned}$$

Utilizando um argumento similar ao argumento que utilizamos para a Equação (5.39), então obtemos uma equação similar a Equação (5.39), onde a norma de  $S_n$  proporciona o fator  $\alpha$ . Daí, obtemos

$$\left| \frac{\text{Tr}(\Pi_{n,\epsilon}(s)O)}{\text{Tr}(\Pi_{n,\epsilon}(s))} - \frac{\text{Tr}(P_\alpha O)}{\text{Tr}(P_\alpha)} \right| \leq C_0 \alpha \|O\| |\text{supp}(O)|^2 \epsilon. \quad (5.47)$$

Definindo,

$$\omega_{\epsilon,\alpha;\sigma}(O) = \frac{\text{Tr}(P_{\epsilon,\alpha}(s)O)}{\text{Tr}(P_{\epsilon,\alpha}(s))}, \quad \omega_\alpha(O) = \frac{\text{Tr}(P_\alpha O)}{\text{Tr}(P_\alpha)},$$

onde  $\sigma = e^s$ ; utilizando as Equações (5.46), (5.47) e tomando  $n = d + 1$ , então temos

$$|\omega_{\epsilon,\alpha;\sigma}(O) - \omega_\alpha(O)| \leq C \alpha |\text{supp}(O)|^2 \|O\| \epsilon,$$

uniformemente em  $\Lambda$  e em  $\sigma$ . Assim,

$$\alpha^{-1}|\omega_{\epsilon,\alpha;0}(J) - \omega_0(J) + i\alpha\omega_0([K_0, J])| \leq C|\text{supp}(J)|^2\|J\|\epsilon + |\alpha^{-1}(\omega_\alpha(J) - \omega_0(J)) + i\omega_0([K_0, J])|.$$

Pelo Corolário (5.1),

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha}\omega_\alpha(O) &= \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\text{Tr}(P_\alpha O)}{\text{Tr}(P_\alpha)} \right) = \frac{\text{Tr}(\dot{P}_\alpha O)\text{Tr}(P_\alpha) - \text{Tr}(\dot{P}_\alpha)\text{Tr}(P_\alpha O)}{(\text{Tr}(P_\alpha))^2} \\ &= \frac{i(\text{Tr}(K_\alpha P_\alpha O) - \text{Tr}(P_\alpha K_\alpha O))\text{Tr}(P_\alpha) - i(\text{Tr}(K_\alpha P_\alpha) - \text{Tr}(P_\alpha K_\alpha))\text{Tr}(P_\alpha O)}{(\text{Tr}(P_\alpha))^2} \\ &= \frac{i(\text{Tr}(OK_\alpha P_\alpha) - \text{Tr}(P_\alpha K_\alpha O))\text{Tr}(P_\alpha) - i(\text{Tr}(K_\alpha P_\alpha) - \text{Tr}(K_\alpha P_\alpha))\text{Tr}(P_\alpha O)}{(\text{Tr}(P_\alpha))^2} \\ &= \frac{i(\text{Tr}(P_\alpha OK_\alpha) - \text{Tr}(P_\alpha K_\alpha O))}{\text{Tr}(P_\alpha)} - 0 = -i\omega_\alpha([K_\alpha, O]) \end{aligned}$$

e pela Proposição (5.1)(iv), essa derivada é contínua em  $\alpha$ , uniformemente no volume. Segue que

$$\alpha^{-1}(\omega_\alpha(J) - \omega_0(J)) + i\omega_0([K_0, J]) \longrightarrow 0, \quad \alpha \rightarrow 0$$

uniformemente no volume. □

*Demonstração.* (Demonstração da Equação (4.15))

Abreviamos  $H_{\text{inicial}}$  por  $H$  e a projeção espectral correspondente  $P_0$  por  $P$ . Vamos manipular o lado direito da Equação (4.15). Primeiramente, podemos trocar  $V$  por  $\tilde{V} = PV(1 - P) + (1 - P)VP$  sem mudar o valor de  $f_{J,V}$ . De fato, como  $HP = PH$  e  $H(1 - P) = (1 - P)H$  (ver demonstração da Proposição (5.1)), então temos que

$$\tau_{-t}(PV(1 - P)) = P\tau_{-t}(V)(1 - P) \quad e \quad \tau_{-t}((1 - P)VP) = (1 - P)\tau_{-t}(V)P.$$

Utilizando as equações anteriores, temos

$$\begin{aligned} \omega_0([\tau_{-t}(\tilde{V}), J]) &= \omega_0([\tau_{-t}(PV(1 - P)) + \tau_{-t}((1 - P)VP), J]) \\ &= \omega_0([P\tau_{-t}(V)(1 - P) + (1 - P)\tau_{-t}(V)P, J]) \\ &= \frac{\text{Tr}(P\tau_{-t}(V)(1 - P)J) - \text{Tr}(J(1 - P)\tau_{-t}(V)P)}{\text{Tr}(P)} \\ &= \frac{\text{Tr}(P\tau_{-t}(V)J) - \text{Tr}(P\tau_{-t}(V)PJ) + \text{Tr}(JP\tau_{-t}(V)P) - \text{Tr}(J\tau_{-t}(V)P)}{\text{Tr}(P)} \\ &= \frac{\text{Tr}(P\tau_{-t}(V)J) - \text{Tr}(J\tau_{-t}(V)P)}{\text{Tr}(P)} = \omega_0([\tau_{-t}(V), J]). \end{aligned}$$

Portanto, trocar  $V$  por  $\tilde{V}$  não altera o valor de  $f_{J,V}$ , ou seja,  $f_{J,V} = f_{J,\tilde{V}}$ .

Observemos que  $\tilde{V} = P\tilde{V}(1 - P) + (1 - P)\tilde{V}P$ . De fato,

$$\begin{aligned} & P\tilde{V}(1 - P) + (1 - P)\tilde{V}P \\ &= P( PV(1 - P) + (1 - P)VP )(1 - P) + (1 - P)( PV(1 - P) + (1 - P)VP )P \\ &= PV(1 - P) + (1 - P)VP = \tilde{V}. \end{aligned}$$

Logo, pela Proposição (5.1), temos que

$$\tilde{V} = -i[H, \mathcal{I}(\tilde{V})]. \quad (5.48)$$

Não é difícil vermos que como  $\tilde{V} = P\tilde{V}(1 - P) + (1 - P)\tilde{V}P$ , então  $\mathcal{I}(\tilde{V}) = P\mathcal{I}(\tilde{V})(1 - P) + (1 - P)\mathcal{I}(\tilde{V})P$ . Observemos que

$$\begin{aligned} & i \int_0^\infty e^{-\delta t} \tau_{-t}([H, A]) dt = i \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-itH} (HA - AH) e^{itH} dt \\ &= i \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-itH} H A e^{itH} dt - i \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-itH} A H e^{itH} dt. \end{aligned}$$

Utilizando o Teorema espectral, ou seja, utilizando o fato de

$$H e^{itH} = \int \lambda e^{it\lambda} dE(\lambda), \quad e^{itH} H = \int e^{it\lambda} \lambda dE(\lambda) \quad \text{e} \quad H = \int \lambda dE(\lambda),$$

temos

$$\begin{aligned} & i \int_0^\infty e^{-\delta t} \tau_{-t}([H, A]) dt = i \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-itH} (HA - AH) e^{itH} dt \\ &= i \int_0^\infty e^{-\delta t} \int e^{-it\lambda} \lambda dE(\lambda) A \int e^{it\mu} dE(\mu) dt - i \int_0^\infty e^{-\delta t} \int e^{-it\lambda} dE(\lambda) A \int e^{it\mu} \mu dE(\mu) dt \\ &= - \int \int \int_0^\infty e^{t(i(\mu-\lambda)-\delta)} dt \, i(\mu - \lambda) \, dE(\lambda) A dE(\mu) \\ &= \int \int \frac{i(\mu - \lambda)}{i(\mu - \lambda) - \delta} dE(\lambda) A dE(\mu). \end{aligned}$$

Para qualquer  $A$  satisfazendo  $A = PA(1 - P) + (1 - P)AP$ , temos então que

$$\begin{aligned} & i \int_0^\infty e^{-\delta t} \tau_{-t}([H, A]) dt = \int \int \frac{i(\mu - \lambda)}{i(\mu - \lambda) - \delta} dE(\lambda) PA(1 - P) + (1 - P)AP dE(\mu) \\ &= \int \int \frac{i(\mu - \lambda)}{i(\mu - \lambda) - \delta} dE(\lambda) PA(1 - P) dE(\mu) + \int \int \frac{i(\mu - \lambda)}{i(\mu - \lambda) - \delta} dE(\lambda) (1 - P)AP dE(\mu) \\ &= \int_{\Sigma^2} \int_{\Sigma^1} \frac{i(\mu - \lambda)}{i(\mu - \lambda) - \delta} dE(\lambda) A dE(\mu) + \int_{\Sigma^1} \int_{\Sigma^2} \frac{i(\mu - \lambda)}{i(\mu - \lambda) - \delta} dE(\lambda) A dE(\mu). \end{aligned}$$

Traçando o limite  $\delta \rightarrow 0$  e utilizando a Suposição (4.1) ( $|\mu - \lambda| \geq \gamma > 0$ ), temos

$$\begin{aligned}
& \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Sigma^2} \int_{\Sigma^1} \frac{i(\mu - \lambda)}{i(\mu - \lambda) - \delta} dE(\lambda) AdE(\mu) + \int_{\Sigma^1} \int_{\Sigma^2} \frac{i(\mu - \lambda)}{i(\mu - \lambda) - \delta} dE(\lambda) AdE(\mu) \\
&= \int_{\Sigma^2} \int_{\Sigma^1} 1 dE(\lambda) AdE(\mu) + \int_{\Sigma^1} \int_{\Sigma^2} 1 dE(\lambda) AdE(\mu) \\
&= PA(1 - P) + (1 - P)AP = A
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} i \int_0^\infty e^{-\delta t} \tau_{-t}([H, A]) dt = A. \tag{5.49}$$

Tomando  $A = \mathcal{I}(\tilde{V})$  e utilizando as Equações (5.48) e (5.49), então temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(\tilde{V}) &= A = \lim_{\delta \rightarrow 0} i \int_0^\infty e^{-\delta t} \tau_{-t}([H, A]) dt \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} i \int_0^\infty e^{-\delta t} \tau_{-t}([H, \mathcal{I}(\tilde{V})]) dt \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} - \int_0^\infty e^{-\delta t} \tau_{-t}(-i[H, \mathcal{I}(\tilde{V})]) dt \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} - \int_0^\infty e^{-\delta t} \tau_{-t}(\tilde{V}) dt.
\end{aligned}$$

Utilizando a equação acima, temos

$$f_{J, \tilde{V}} = i \int \lim_{\delta \rightarrow 0} e^{-i\delta t} \omega_0([\tau_{-t}(\tilde{V}), J]) dt = -i\omega_0([\mathcal{I}(\tilde{V}), J])$$

Mudando  $\tilde{V}$  por  $V$ , obtemos

$$f_{J, V} = -i\omega_0([K_0, J]),$$

onde  $K_0 = \mathcal{I}(V)$ . □

## Capítulo 6

# Conclusão

Nesse trabalho, nós dissertamos sobre o artigo [14] desenvolvido pelos Físicos Matemáticos Sven Bachmann, Wojciech De Roeck e Martin Fraas. Nesse artigo, eles provam a validade de um Teorema Adiabático para sistemas que são muito grandes. Para a validade desse teorema, duas suposições foram essenciais: a suposição do gap espectral e a suposição da suavidade das interações. Como existe uma dificuldade para encontrar teoremas adiabáticos para sistemas muito grandes, então podemos afirmar que esse Teorema Adiabático é de grande importância.

Uma aplicação desse teorema que é apresentada pelo artigo, é a Teoria da resposta linear. Para o desenvolvimento dessa teoria, os autores adaptaram a estrutura de Kubo [7], a respeito da teoria da resposta linear, para a configuração dos sistemas quânticos de spin. Essa teoria nos permite calcular a alteração sofrida por um sistema, após esse sistema sofrer uma perturbação externa. É importante lembrar que essa perturbação é feita de maneira controlada, ou seja, essa perturbação é feita de maneira lenta e a sua intensidade deve ser pequena.

Um ponto que devemos destacar, é que o artigo trabalha com o conjunto dos operadores lineares limitados. Esse conjunto é uma  $C^*$ -álgebra. Portanto, o estudo que fizemos sobre a  $C^*$ -álgebra, antes de ler o artigo, foi de extrema importância. Além disso, foram necessários alguns exemplos “simples” de física para uma melhor compreensão do conteúdo apresentado pelo artigo, visto que algumas explicações podem ser confusas devido a complexidade do conteúdo apresentado.

# Capítulo 7

## Apêndice

**Apêndice 7.1.** Vamos provar que  $U(t, t') = U^*(t', t)$ .

Seja o PVI

$$\begin{cases} i\dot{\psi}(t) = H_t\psi(t) \\ \psi(t') = \psi_0 \end{cases}$$

tal que a sua solução é  $\psi(t) = U(t, t')\psi_0$  e  $t'$  está fixo. Fixando  $t$ , temos

$$\phi_0 = \psi(t) = U(t, t')\psi_0.$$

Logo, podemos observar que  $\psi(r) = U(r, t')\psi_0$  e  $\phi(r) = U(r, t)\phi_0$  são soluções do PVI

$$\begin{cases} i\dot{\psi}(r) = H_t\psi(r) \\ \psi(t) = \phi_0 \end{cases}.$$

Pela unicidade do PVI, então  $\phi(r) = \psi(r)$ ,  $\forall r$ . Daí,

$$\phi(t') = \psi(t') \Rightarrow U(t', t)U(t, t')\psi_0 = \psi_0.$$

Como isso é válido para qualquer  $\psi_0 \in \mathcal{H}$ , então  $U(t', t)U(t, t') = I$ . Como  $U(t', t)$  é uma aplicação unitária, ou seja,  $U^*(t', t)U(t', t) = I$ , então concluímos que  $U(t, t') = U^*(t', t)$ .

**Apêndice 7.2.** Vamos provar que se  $\sup\{|t|^n|W_\gamma(t)| : |t| > 1\} < \infty$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , então vale  $\sup\{x^n \int_{|t| \geq x} |W_\gamma(t)| dt : x > 1\} < \infty$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Defina  $c = \sup\{|t|^{2n+1}|W_\gamma(t)| : |t| > 1\}$ .

Vamos considerar  $x > 1$ . Daí,

$$\begin{aligned} |x|^n \int_{|t| \geq x} |W_\gamma(t)| dt &= |x|^n \int_{|t| \geq x} \frac{|t|^{2n+1} |W_\gamma(t)|}{|t|^{2n+1}} dt \\ &\leq c|x|^n \left( \int_x^\infty \frac{1}{t^{2n+1}} dt + (-1)^{2n+1} \int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{t^{2n+1}} dt \right) \\ &= \frac{2cx^n}{x^{2n}} = \frac{2c}{x^2} < 2c. \end{aligned}$$

Portanto,  $\sup\{x^n \int_{|t| \geq x} |W_\gamma(t)| dt : x > 1\} < \infty, \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Apêndice 7.3.** Como  $\tilde{\zeta}$  decai mais rápido do que qualquer polinomial, então podemos afirmar que existe uma constante  $C$  positiva tal que

$$\tilde{\zeta}(t) \leq \frac{C}{t^p}, \quad \forall t \geq 1, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Logo, temos

$$\begin{aligned} \sum_{m > m_0} m^{2d} \sum_{n \geq m} n^{kd} \tilde{\zeta}(n) &\leq \sum_{m > m_0} m^{2d} \sum_{n \geq m} n^{kd} \frac{C}{n^{2d+kd+4}} \\ &\leq C \sum_{m > m_0} m^{2d} \sum_{n \geq m} \frac{n^{kd}}{n^{kd+2}} \frac{1}{n^{2d+2}} \\ &\leq C \sum_{m > m_0} m^{2d} \sum_{n \geq m} \frac{n^{kd}}{n^{kd+2}} \frac{1}{m^{2d+2}} \\ &\leq C \sum_{m > m_0} \frac{m^{2d}}{m^{2d+2}} \sum_{n \geq m} \frac{n^{kd}}{n^{kd+2}} = C \sum_{m > m_0} \frac{1}{m^2} \sum_{n \geq m} \frac{1}{n^2} < \infty. \end{aligned}$$

**Apêndice 7.4.** Vamos demonstrar a Equação (5.21)

$$U_n^* H U_n = e^{-iS_n} H e^{iS_n} = \sum_{k=0}^n \frac{(-i)^k}{k!} \left( \sum_{\alpha=1}^n \epsilon^\alpha \text{ad}_{A_\alpha} \right)^k (H) + \mathcal{O}(\epsilon^{n+1}).$$

Primeiramente, vamos definir

$$f(t) = e^{-itS_n} H e^{itS_n}, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Daí, temos

$$f'(t) = -ie^{-itS_n} S_n H e^{itS_n} + ie^{-itS_n} H S_n e^{itS_n} = (-i)e^{-itS_n} [S_n, H] e^{itS_n} = (-i)e^{-itS_n} \text{ad}_{S_n}(H) e^{itS_n}.$$

Suponhamos que para  $m \in \mathbb{N}$  vale que

$$f^{(m)}(t) = (-i)^m e^{-itS_n} (\text{ad}_{S_n})^m(H) e^{itS_n}.$$

Vamos provar que para  $m + 1 \in \mathbb{N}$  também vale que

$$f^{(m+1)}(t) = (-i)^{m+1} e^{-itS_n} (ad_{S_n})^{m+1}(H) e^{itS_n}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} f^{(m+1)}(t) = (f^{(m)})'(t) &= (-i)^m (-ie^{-itS_n} S_n (ad_{S_n})^m(H) e^{itS_n} + ie^{-itS_n} (ad_{S_n})^m(H) S_n e^{itS_n}) \\ &= (-i)^{m+1} (e^{-itS_n} S_n (ad_{S_n})^m(H) e^{itS_n} - e^{-itS_n} (ad_{S_n})^m(H) S_n e^{itS_n}) \\ &= (-i)^{m+1} e^{-itS_n} [S_n, (ad_{S_n})^m(H)] e^{itS_n} \\ &= (-i)^{m+1} e^{-itS_n} (ad_{S_n})^{m+1}(H) e^{itS_n}. \end{aligned}$$

Portanto, por indução, temos que

$$f^{(m)}(t) = (-i)^m e^{-itS_n} (ad_{S_n})^m(H) e^{itS_n}, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (7.1)$$

Agora, vamos mostrar que para todo  $n \in \mathbb{N}$  vale

$$\begin{aligned} f(1) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \int_{\Sigma_{n+1}} f^{(n+1)}(u_{n+1}) d\mathbf{u} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + (-i)^{n+1} \int_{\Sigma_{n+1}} e^{-iu_{n+1}S_n} ad_{S_n}^{n+1}(H) e^{iu_{n+1}S_n} d\mathbf{u}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

onde

$$\int_{\Sigma_{n+1}} f^{(n+1)}(u_{n+1}) d\mathbf{u} = \int_0^1 \int_0^{u_1} \cdots \int_0^{u_n} f^{(n+1)}(u_{n+1}) du_{n+1} \cdots du_1.$$

De fato, observemos que

$$f(1) = f(0) + \int_0^1 f'(u_1) du_1.$$

Logo, a Equação (7.2) é válida para  $n = 0$ .

Suponhamos que a Equação (7.2) é válida para  $n = m$ . Vamos mostrar que essa equação é válida para  $n = m + 1$ . Temos que

$$f(1) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^1 \int_0^{u_1} \cdots \int_0^{u_m} f^{(m+1)}(u_{m+1}) du_{m+1} \cdots du_1.$$

Como

$$f^{(m+1)}(u_{m+1}) = f^{(m+1)}(0) + \int_0^{u_{m+1}} f^{((m+2))}(u_{m+2}) du_{m+2},$$

então temos

$$\begin{aligned}
f(1) &= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^1 \int_0^{u_1} \cdots \int_0^{u_m} f^{(m+1)}(0) + \int_0^{u_{m+1}} f^{((m+2))}(u_{m+2}) du_{m+2} du_{m+1} \cdots du_1 \\
&= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \frac{f^{(m+1)}(0)}{(m+1)!} + \int_0^1 \int_0^{u_1} \cdots \int_0^{u_m} \int_0^{u_{m+1}} f^{((m+2))}(u_{m+2}) du_{m+2} du_{m+1} \cdots du_1 \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^1 \int_0^{u_1} \cdots \int_0^{u_m} \int_0^{u_{m+1}} f^{((m+1)+1)}(u_{m+2}) du_{m+2} du_{m+1} \cdots du_1.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$f(1) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \int_{\Sigma_{n+1}} f^{(n+1)}(u_{n+1}) d\mathbf{u}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (7.3)$$

Pelas Equações (7.1) e (7.3), garantimos a validade da Equação (7.2) para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Dessa forma, denotando

$$\mathcal{O}(\epsilon^{n+1}) = \int_{\Sigma_{n+1}} f^{(n+1)}(u_{n+1}) d\mathbf{u},$$

então, pela equação anterior, temos que

$$e^{-iS_n} H e^{iS_n} = \sum_{k=0}^n \frac{(-i)^k}{k!} (ad_{S_n})^k (H) + \mathcal{O}(\epsilon^{n+1}).$$

Observemos que

$$ad_{S_n}(\cdot) = [S_n, \cdot] = \sum_{\alpha=1}^n \epsilon^\alpha [A_\alpha, \cdot] = \sum_{\alpha=1}^n \epsilon^\alpha ad_{A_\alpha}(\cdot) = \left( \sum_{\alpha=1}^n \epsilon^\alpha ad_{A_\alpha} \right) (\cdot).$$

Portanto,

$$U_n^* H U_n = e^{-iS_n} H e^{iS_n} = \sum_{k=0}^n \frac{(-i)^k}{k!} \left( \sum_{\alpha=1}^n \epsilon^\alpha ad_{A_\alpha} \right)^k (H) + \mathcal{O}(\epsilon^{n+1}).$$

**Apêndice 7.5.** Sabemos que

$$S_n(s) = \sum_{k=1}^n \epsilon^k A_k(s).$$

Daí, definimos

$$\Phi_{S_n(s)}(Z) = \sum_{k=1}^n \epsilon^k \Phi_{A_k(s)}(Z).$$

Como  $0 < \epsilon \leq 1$ , então  $\epsilon^k \leq \epsilon$  para todo  $k$ . Logo,

$$\|\Phi_{S_n(s)}\|_{\mathcal{S}, l+n+2} \leq \epsilon \sum_{k=1}^n \|\Phi_{A_k(s)}\|_{\mathcal{S}, l+n+2} = g_{n,l}(s)\epsilon,$$

onde  $g_{n,l}(s) = \sum_{k=1}^n \|\Phi_{A_k(s)}\|_{\mathcal{S},l+n+2}$ .

**Apêndice 7.6.** Sabemos que

$$\begin{aligned} \epsilon^{n+1} \|\Phi_{h_n(s)}\|_{\mathcal{S},l} &\leq \sum_{\substack{\mathbf{j}:s(\mathbf{j})>n \\ j_i \leq n, k \leq n}} \frac{\epsilon^{s(\mathbf{j})}}{k!} C^k 2^{k(l+k)} \|\Phi_{A_{j_k}(s)}\|_{\mathcal{S},l+k} \cdots \|\Phi_{A_{j_1}(s)}\|_{\mathcal{S},l+k} \|\Phi_{H(s)}\|_{\mathcal{S},l+k} \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} C^{n+1} 2^{(n+1)(l+n+2)} \|\Phi_{S_n(s)}\|_{\mathcal{S},l+n+2}^{n+1} \|\Phi_{H(s)}\|_{\mathcal{S},l+n+2}, \end{aligned}$$

e sabemos que

$$\|\Phi_{S_n(s)}\|_{\mathcal{S},l+n+2} \leq g_{n,l}(s)\epsilon.$$

Além disso, também temos que  $\epsilon^{s(\mathbf{j})} \leq \epsilon^{n+1}$ . Utilizando as equações anteriores, nós temos

$$\begin{aligned} \epsilon^{n+1} \|\Phi_{h_n(s)}\|_{\mathcal{S},l} &\leq \epsilon^{n+1} \sum_{\substack{\mathbf{j}:s(\mathbf{j})>n \\ j_i \leq n, k \leq n}} \frac{1}{k!} C^k 2^{k(l+k)} \|\Phi_{A_{j_k}(s)}\|_{\mathcal{S},l+k} \cdots \|\Phi_{A_{j_1}(s)}\|_{\mathcal{S},l+k} \|\Phi_{H(s)}\|_{\mathcal{S},l+k} \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} C^{n+1} 2^{(n+1)(l+n+2)} g_{n,l}^{n+1}(s) \epsilon^{n+1} \|\Phi_{H(s)}\|_{\mathcal{S},l+n+2} \\ &= \epsilon^{n+1} p_{n,l}(s), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} p_{n,l}(s) &= \sum_{\substack{\mathbf{j}:s(\mathbf{j})>n \\ j_i \leq n, k \leq n}} \frac{1}{k!} C^k 2^{k(l+k)} \|\Phi_{A_{j_k}(s)}\|_{\mathcal{S},l+k} \cdots \|\Phi_{A_{j_1}(s)}\|_{\mathcal{S},l+k} \|\Phi_{H(s)}\|_{\mathcal{S},l+k} \\ &+ \frac{1}{(n+1)!} C^{n+1} 2^{(n+1)(l+n+2)} g_{n,l}^{n+1}(s) \|\Phi_{H(s)}\|_{\mathcal{S},l+n+2}. \end{aligned}$$

**Apêndice 7.7.** Vamos provar que

$$\begin{aligned} &\sum_{Z \ni \{x,y\}} \sum_{\substack{X_0, X_1 \subset \Lambda: \\ X_0 \cup X_1 = Z, X_0 \cap X_1 \neq \emptyset}} \frac{|X_0|^k |X_1|^{n-k}}{F_\zeta(d(x,y))} \|\Phi_{A_0}^\Lambda(X_0)\| \|\Phi_{A_1}^\Lambda(X_1)\| \\ &\leq \sum_{X_0 \ni \{x,y\}} |X_0|^k \frac{\|\Phi_{A_0}^\Lambda(X_0)\|}{F_\zeta(d(x,y))} \sum_{z_0 \in X_0} \sum_{z_1 \in \Lambda} \sum_{X_1 \ni \{z_0, z_1\}} |X_1|^{n-k} \frac{\|\Phi_{A_1}^\Lambda(X_1)\|}{F_\zeta(d(z_0, z_1))} F_\zeta(d(z_0, z_1)), \end{aligned}$$

lembrando que neste caso nós temos  $x, y \in X_0$  e  $X_0, X_1 \subset \Lambda$ .

Para não deixar as contas carregadas, vamos denotar

$$B = \frac{|X_0|^k |X_1|^{n-k}}{F_\zeta(d(x,y))} \|\Phi_{A_0}^\Lambda(X_0)\| \|\Phi_{A_1}^\Lambda(X_1)\|.$$

Portanto, o nosso objetivo é provar que

$$\sum_{Z \ni \{x,y\}} \sum_{\substack{X_0, X_1 \subset \Lambda: \\ X_0 \cup X_1 = Z, X_0 \cap X_1 \neq \emptyset}} B \leq \sum_{X_0 \ni \{x,y\}} \sum_{z_0 \in X_0} \sum_{z_1 \in \Lambda} \sum_{X_1 \ni \{z_0, z_1\}} B.$$

Dessa forma, temos

$$\sum_{Z \ni \{x,y\}} \sum_{\substack{X_0, X_1 \subset \Lambda: \\ X_0 \cup X_1 = Z, X_0 \cap X_1 \neq \emptyset}} \frac{|X_0|^k |X_1|^{n-k}}{F_\zeta(d(x,y))} \|\Phi_{A_0}^\Lambda(X_0)\| \|\Phi_{A_1}^\Lambda(X_1)\| = \sum_{Z \ni \{x,y\}} \sum_{\substack{X_0, X_1 \subset \Lambda: \\ X_0 \cup X_1 = Z, X_0 \cap X_1 \neq \emptyset}} B.$$

Seja  $\chi$  a função característica. Observemos que

$$\sum_{Z \ni \{x,y\}} \sum_{\substack{X_0, X_1 \subset \Lambda: \\ X_0 \cup X_1 = Z, X_0 \cap X_1 \neq \emptyset}} B = \sum_{Z \ni \{x,y\}} \sum_{X_0 \subset \Lambda} \sum_{\substack{X_1 \subset \Lambda: \\ X_0 \cup X_1 = Z}} \chi(X_0 \cap X_1 \neq \emptyset) B. \quad (7.4)$$

Como

$$\{X_1 \subset \Lambda : X_1 \cap X_0 \neq \emptyset\} \subset \bigcup_{z_0 \in X_0} \bigcup_{z_1 \in \Lambda} \{X_1 \subset \Lambda : X_1 \ni \{z_0, z_1\}\},$$

então

$$\chi(X_1 \cap X_0 \neq \emptyset) \leq \sum_{z_0 \in X_0} \sum_{z_1 \in \Lambda} \chi(X_1 \ni \{z_0, z_1\}). \quad (7.5)$$

Pelas Equações (7.4), (7.5), temos

$$\begin{aligned} \sum_{Z \ni \{x,y\}} \sum_{\substack{X_0, X_1 \subset \Lambda: \\ X_0 \cup X_1 = Z, X_0 \cap X_1 \neq \emptyset}} B &\leq \sum_{Z \ni \{x,y\}} \sum_{X_0 \subset \Lambda} \sum_{\substack{X_1 \subset \Lambda: \\ X_0 \cup X_1 = Z}} \sum_{z_0 \in X_0} \sum_{z_1 \in \Lambda} \chi(X_1 \ni \{z_0, z_1\}) B \\ &= \sum_{X_1 \subset \Lambda} \sum_{Z \ni \{x,y\}} \sum_{X_0 \subset \Lambda} \chi(X_0 \cup X_1 = Z) \sum_{z_0 \in X_0} \sum_{z_1 \in \Lambda} \chi(X_1 \ni \{z_0, z_1\}) B. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Lembrando que nesse caso  $x, y \in X_0$  e  $X_1 \subset \Lambda$ , então podemos afirmar que

$$\bigcup_{Z \ni \{x,y\}} \{X_0 \subset \Lambda : X_0 \cup X_1 = Z\} \subset \{X_0 \subset \Lambda : X_0 \cup X_1 \subset \Lambda \text{ e } x, y \in X_0\}.$$

Pela equação anterior, obtemos

$$\sum_{Z \ni \{x,y\}} \sum_{X_0 \subset \Lambda} \chi(X_0 \cup X_1 = Z) \leq \sum_{\substack{X_0 \subset \Lambda: \\ X_0 \ni \{x,y\}}} \chi(X_0 \cup X_1 \subset \Lambda).$$

Mais ainda, obtemos que

$$\begin{aligned}
& \sum_{X_1 \subset \Lambda} \sum_{Z \ni \{x, y\}} \sum_{X_0 \subset \Lambda} \chi(X_0 \cup X_1 = Z) \sum_{z_0 \in X_0} \sum_{z_1 \in \Lambda} \chi(X_1 \ni \{z_0, z_1\}) B \\
\leq & \sum_{X_1 \subset \Lambda} \sum_{\substack{X_0 \subset \Lambda: \\ X_0 \ni \{x, y\}}} \chi(X_0 \cup X_1 \subset \Lambda) \sum_{z_0 \in X_0} \sum_{z_1 \in \Lambda} \chi(X_1 \ni \{z_0, z_1\}) B \\
= & \sum_{X_1 \subset \Lambda} \sum_{\substack{X_0 \subset \Lambda: \\ X_0 \ni \{x, y\}}} \sum_{z_0 \in X_0} \sum_{z_1 \in \Lambda} \chi(X_1 \ni \{z_0, z_1\}) B \\
\leq & \sum_{X_0 \ni \{x, y\}} \sum_{z_0 \in X_0} \sum_{z_1 \in \Lambda} \sum_{X_1 \ni \{z_0, z_1\}} B.
\end{aligned}$$

Pela Equação (7.6) e pela equação anterior, temos

$$\sum_{Z \ni \{x, y\}} \sum_{\substack{X_0, X_1 \subset \Lambda: \\ X_0 \cup X_1 = Z, X_0 \cap X_1 \neq \emptyset}} B \leq \sum_{X_0 \ni \{x, y\}} \sum_{z_0 \in X_0} \sum_{z_1 \in \Lambda} \sum_{X_1 \ni \{z_0, z_1\}} B.$$

# Referências Bibliográficas

- [1] Naaijkens, P. Quantum spin systems on infinite lattices, a concise introduction. Springer; Lecture Notes in Physics 933. (2017)
- [2] B. Neyenhuis, J. Smith, A. C. Lee, J. Zhang, P. Richerme, P. W. Hess, Z.-X. Gong, A. V. Gorshkov, C. Monroe. Observation of Prethermalization in Long-Range Interacting Spin Chains. *Science Advances* 25 Aug 2017: Vol. 3, no. 8, e1700672.
- [3] M. O. Katanaev. Adiabatic theorem for finite dimensional quantum mechanical systems. Steklov Mathematical Institute, ul. Gubkina, 8, Moscow, 119991, Russia. August 1, 2011.
- [4] Born M., Fock V.: Beweis des Adiabatenatzes. *Zeitschrift für Physik* 51(3–4), 165–180 (1928)
- [5] Kato T.: On the adiabatic theorem of quantum mechanics. *J. Phys. Soc. Jpn.* 5, 435–439 (1950)
- [6] Kasuga T.: On the adiabatic theorem for the Hamiltonian system of differential equations in the classical mechanics. I. *Proc. Jpn. Acad.* 37(7), 366–371 (1961)
- [7] Kubo R.: Statistical-mechanical theory of irreversible processes. I. General theory and simple applications to magnetic and conduction problems. *J. Phys. Soc. Jpn.* 12(6), 570–586 (1957)
- [8] Simon B.: Fifteen Problems in Mathematical Physics. *Perspectives in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel (1984)
- [9] Bratteli, O., Robinson, D.W.: *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 2: Equilibrium States. Models in Quantum Statistical Mechanics*, 2nd edn. Springer, Berlin (1997)
- [10] Bogdan Damski, Marek M. Rams. Exact results for fidelity susceptibility of the quantum Ising model: The interplay between parity, system size, and magnetic field. *J. Phys. A* 47, 025303 (2014)
- [11] Nachtergaele B., Ogata Y., Sims R.: Propagation of correlations in quantum lattice systems. *J. Stat. Phys.* 124(1), 1–13 (2006)
- [12] Lieb E.H., Robinson D.W.: The finite group velocity of quantum spin systems. *Commun. Math. Phys.* 28(3), 251–257 (1972)

- [13] Bachmann S., Michalakis S., Nachtergaele S., Sims R.: Automorphic equivalence within gapped phases of quantum lattice systems. *Commun. Math. Phys.* 309(3), 835–871 (2012)
- [14] S. Bachmann, W. D. Roeck, and M. Fraas. The adiabatic theorem and linear response theory for extended quantum systems. *Commun. Math. Phys.* 361, 997–1027 (2018);
- [15] Cubitt T.S., Pérez-García D., Wolf M.M.: Undecidability of the spectral gap. *Nature* 528(7581), 207–211 (2015)
- [16] Nachtergaele B.: The spectral gap for some spin chains with discrete symmetry breaking. *Commun. Math. Phys.* 175(3), 565–606 (1996)
- [17] Yarotsky D.A.: Perturbations of ground states in weakly interacting quantum spin systems. *J. Math. Phys.* 45(6), 2134–2152 (2004)
- [18] Affleck I., Kennedy T., Lieb E.H., Tasaki H.: Valence bond ground states in isotropic quantum antiferromagnets. *Commun. Math. Phys.* 115, 477–528 (1988)
- [19] Bravyi S., Hastings M.B.: A short proof of stability of topological order under local perturbations. *Commun. Math. Phys.* 307(3), 609–627 (2011)
- [20] Michalakis S., Zwolak J.P.: Stability of frustration-free Hamiltonians. *Commun. Math. Phys.* 322(2), 277–302 (2013)
- [21] Szechr O., Wolf M.M.: Perturbation theory for parent Hamiltonians of Matrix Product States. *J. Stat. Phys.* 159(4), 752–771 (2015)
- [22] Kitaev A.Y.: Fault-tolerant quantum computation by anyons. *Ann. Phys.* 303(1), 2–30 (2003)
- [23] Ballentine, Leslie E. *Quantum mechanics: a modern development.* World Scientific Publishing Company, 2014.
- [24] Hastings M.B., Wen X.-G.: Quasiadiabatic continuation of quantum states: The stability of topological ground-state degeneracy and emergent gauge invariance. *Phys. Rev. B* 72(4), 045141 (2005)
- [25] van Kampen, N.G.: The case against linear response theory. *Phys. Norv.* 5 (1971)
- [26] Carlos Humberto de Souza. *Cotas de Lieb-Robinson e suas Aplicações.* Universidade Federal de Minas Gerais. Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós Graduação em Matemática. Belo Horizonte-MG, 3 de Março de 2019.
- [27] João Carlos Alves Barata. *Notas de aula, Capítulo 10, Tópicos de Álgebra Linear II.*
- [28] Teufel S.: *Adiabatic Perturbation Theory in Quantum Dynamics.* Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin (2003)

- [29] Nenciu G.: On the adiabatic theorem of quantum mechanics. *J. Phys. A.* 13(2), L15 (1980)
- [30] Panati G., Spohn H., Teufel S.: Effective dynamics for Bloch electrons: Peierls substitution and beyond. *Commun. Math. Phys.* 242(3), 547–578 (2003)
- [31] Avron J.E., Elgart A.: Adiabatic theorem without a gap condition.. *Commun. Math. Phys.* 203, 445–463 (1999)
- [32] Jansen, S., Ruskai, M.-B., Seiler, R.: Bounds for the adiabatic approximation with applications to quantum computation. *J. Math. Phys.*, 48(10)(2007). <https://doi.org/10.1063/arXiv:quant-ph/0603175> (2006)