



Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Edson Martins Gagliardi

Sobre o Teorema de Max Noether para Curvas Singulares

Belo Horizonte

2021

Edson Martins Gagliardi

Sobre o Teorema de Max Noether para Curvas Singulares

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Renato Vidal da Silva Martins

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Belo Horizonte

2021

© 2021, Edson Martins Gagliardi.
Todos os direitos reservados

Gagliardi, Edson Martins.

G135s Sobre o teorema de Max Noether para curvas singulares /
Edson Martins Gagliardi– 2021.
46 f. il.

Orientador: Renato Vidal da Silva Martins.
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais,
Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f. 44-46.

1. Matemática – Teses. 2. Curvas algébricas – Teses. 3.
Curvas integrais – Teses. 4. Teorema de Noether – Teses. I.
Martins, Renato Vidal da Silva. II. Universidade Federal de
Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de
Matemática. III. Título.

CDU 51 (043)

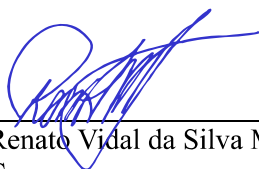
Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende Costa
CRB 6ª Região nº 1510

FOLHA DE APROVAÇÃO

Sobre o Teorema de Max Noether para Curvas Singulares

EDSON MARTINS GAGLIARDI

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:



Prof. Renato Vidal da Silva Martins
UFMG



Prof. André Luís Contiero
UFMG



Prof. Ethan Guy Cotterill
UFF



Profa. Lia Feital Fusaro Abrantes
UFV

MARCO PACINI
marcopacini@id.uff.br:06009238781

Firmato digitalmente da MARCO PACINI
marcopacini@id.uff.br:06009238781
Data: 2021.07.26 21:02:04 -03'00'

Prof. Marco Pacini
UFF



Prof. Maurício Barros Corrêa Júnior
UFMG

Belo Horizonte, 22 de julho de 2021.

Resumo

O Teorema de Max Noether afirma que se ω é o feixe dualizante de uma curva projetiva não singular e não hiperelíptica, então os morfismos naturais $\text{Sym}^n H^0(\omega) \rightarrow H^0(\omega^n)$ são sobrejetivos para todos os $n \geq 1$. O resultado foi estendido para as curvas Gorenstein por muitos autores diferentes de maneiras distintas. Mais recentemente, foi provado para curvas com modelos canônicos projetivamente normais e curvas cujos pontos não Gorenstein são no máximo birramificados. Com base nestes trabalhos, abordamos o caso geral e estendemos o resultado para curvas integrais. Também conectamos o problema com as estruturas locais da Álgebra Comutativa e derivamos diferentes caracterizações de não hiperelipticidade.

Palavras Chaves a Frases: Max Noether, Curvas Integrais, Curvas Singulares, Ideal Fracionário, Ideal Canônico, Semi Grupo de Valores, Sistema Linear, Morfismo Projetivo, Modelo Canônico, Maximal com Condutor Fixo, Gorenstein, Nearly Gorenstein, Quase Gorenstein, Kunz.

Abstract

Max Noether's Theorem asserts that if ω is the dualizing sheaf of a nonsingular nonhyperelliptic projective curve, then the natural morphisms $\text{Sym}^n H^0(\omega) \rightarrow H^0(\omega^n)$ are surjective for all $n \geq 1$. The result was extended for Gorenstein curves by many different authors in distinct ways. More recently, it was proved for curves with projectively normal canonical models, and curves whose non-Gorenstein points are bibranch at worse. Based on these works, we address the general case and extend the result for integral curves. We also connect the problem with Commutative Algebra local structures, and derive different characterizations of non-hyperellipticity.

Key-words and Phrases: Max Noether, Integral Curves, Singular Curves, Fractional Ideal, Canonical Ideal, Semigroup of Values, Linear System, Projective Morphism, Canonical Model, Maximal with Fixed Conductor Ring, Gorenstein, Nearly Gorenstein, Almost Gorenstein, Kunz.

Sumário

Introdução	7
1 Anéis e Semigrupos	10
1.1 Anéis	10
1.1.1 Ideais Fracionários e Canônicos	10
1.1.2 Anéis Gorenstein, Quase Gorenstein e Kunz	13
1.2 Semigrupos	13
1.2.1 Semigrupos Bons e Locais	15
1.2.2 Ideais Relativos e Canônicos	16
1.2.3 Semigrupos Simétricos e Quase Simétricos	16
1.3 Semigrupos de Anéis	17
2 Esquemas e Curvas	19
2.1 Esquemas Integrais, Regulares e Normalização	19
2.2 Curvas	21
3 Abordagem Extrínseca	24
3.1 O Modelo Canônico de Rosenlicht	24
3.2 Demonstração Extrínseca de Max Noether	25
3.3 Curvas Nearly Gorenstein	27
4 Abordagem Intrínseca	29
4.1 Resultados Auxiliares	29
4.2 Demonstração Intrínseca de Max Noether	32
5 Um Problema Combinatorial	34
5.1 Do Global ao Local	34
5.2 Do Local ao Combinatorial	34
5.3 Resolvendo o Problema	36
5.4 Completando a Demonstração	38
6 Maximalidade com Condutor Fixo	40
6.1 Demonstração	40
6.2 Equivalências	43
References	45

Introdução

Este trabalho trata de um dos vários resultados de Max Noether sobre curvas algébricas obtidos entre o final do século XIX e início do seguinte. Mais precisamente, em [32], ele estabelece que toda curva canônica é projetivamente normal. Como consequência, pode-se calcular a dimensão do espaço de quádricas que contêm a curva como sendo $(g-2)(g-3)/2$ onde g é seu gênero, que é uma das versões pelas quais o resultado é conhecido.

O teorema foi importante para trabalhos subsequentes de Enriques [16], sobre a relação de curvas canônicas com interseções de quádricas, também estudado por Babbage em [4]; para a descrição total do ideal canônico em termos de suas equações feita por Petri [33], e para vários artigos seguindo na mesma linha que vieram a posteriori, ver por exemplo Shokurov [40], Saint-Donat [37], Mumford [31], Arbarello–Sernesi [3], Stoehr–Viana [42], Contiero–Stoehr [12], entre outros.

Em [2, pag 117], o resultado de Noether, em linguagem mais atual, é enunciado da seguinte forma: se C é uma curva suave e projetiva, não hiperelíptica, com feixe dualizante ω então os mapas

$$\mathrm{Sym}^n H^0(C, \omega) \longrightarrow H^0(C, \omega^n) \quad (1)$$

são sobrejetivos para todo $n \geq 1$. Em sua prova [2, pag. 113-117], fica claro que o resultado é consequência de que as curvas canônicas são extremas, i.e., atingem a cota de Castelnuovo, e estas são projetivamente normais. Na verdade é possível estendê-lo para curvas singulares Gorenstein usando o mesmo tipo de raciocínio, como veremos abaixo.

Para curvas integrais arbitrárias, o problema é mais delicado já que a própria noção de curva canônica parece não ser tão clara. Em [36], Rosenlicht generaliza tal conceito da seguinte maneira. Para C como acima, mas possivelmente singular com normalização \bar{C} , considere o morfismo $\kappa : \bar{C} \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ induzido pelas seções globais de ω . A curva-imagem $C' := \kappa(\bar{C})$ é dita *modelo canônico* de C . No artigo ele prova que C' é isomorfa a C , se somente se, esta é não hiperelíptica e Gorenstein. Além disso, C' segue sendo extrema neste caso e o resultado de Max Noether vale para curvas Gorenstein não hiperelípticas. Por diferentes modos também chegaram ao mesmo resultado Deligne e Mumford [14] em 1969, Mumford e Saint-Donat [25] em 1973, Sakai [38] em 1977, Catanese [10] em 1982, Fujita [19] em 1983 e Hartshorne [22] em 1986.

O caso não-Gorenstein é ainda pouco estudado em geral. E quanto à afirmação de Noether, pode-se dizer que um passo no sentido de estendê-la é dado no próprio artigo de Rosenlicht. De fato, em seu teorema central, ele prova que sempre existe um morfismo birracional $C' \rightarrow C$. Tal idéia é bastante explorada em [27], onde se chega a uma caracterização das curvas C para as quais C' é projetivamente normal, ditas *nearly Gorenstein*. Curiosamente, tal propriedade, de cunho fortemente global, determina a espécie dos anéis locais possíveis para os pontos de tais curvas. Mais ainda, o assunto naturalmente se conecta com um ramo da álgebra comutativa

local que é o estudo de anéis ditos *quase Gorenstein*, tema recorrente em trabalhos de Barucci, D'Anna e Fröberg [7, 9], entre outros.

Baseado nos resultados de [27], em [29] estende-se o resultado de Noether para curvas *nearly Gorenstein* nos mesmos moldes anteriores, ou seja, relacionando curvas extremas e projetivamente normais. No mesmo artigo, começa-se também a tratar o problema de generalizar Noether para qualquer curva integral. A perspectiva passa então a ser mais intrínseca, de certa forma até reafirmando um ponto importante sobre o problema, ou seja, o fato de que a afirmação de Noether diz mais respeito à estrutura do feixe canônico, e portanto da própria curva, do que a uma geometria ambiente onde a mesma possa estar.

Neste sentido de estender o resultado, em [29], mostra-se a validade da propriedade de Max Noether para curvas cujos pontos não-Gorenstein são uniramificados, no pior dos casos. Feital em [17] e com Contiero e Martins em [11], entre vários resultados, estendem tal estudo para o caso de vários ramos, e provam que Noether segue verdadeiro para curvas cujos pontos não-Gorenstein são até birramificados.

Fortemente baseados nestes trabalhos, estudamos aqui o caso de um número arbitrário de ramos estendendo o resultado de Noether para curvas integrais no Teorema 4.2.1 a partir do Lema 4.1.2, que trata de sobrejeções locais, e que se baseia no Teorema 5.2.1 e no Lema 5.3.1, que são resultados combinatoriais. Da mesma forma, abordamos a possibilidade de se obter tal generalização nos valendo apenas da prova geométrica e delegando a parte local a resultados sabidos ou conjecturados da Álgebra Comutativa. Fazemos isto no Teorema 6.1.4 onde o que estudamos se conecta naturalmente ao tema da *maximalidade com condutor fixo* para anéis locais unidimensionais e Cohen-Macaulay. Por fim, no Teorema 6.2.1 estamos aptos a completar equivalências já estipuladas em [11] e que conectam o problema de Noether com o resultado de Rosenlicht e com a conjectura de Green em nível zero, para se obter uma caracterização multivalente de não-hipereliticidade.

E agora descrevemos o conteúdo do trabalho. Os Capítulos 1 e 2 são essencialmente preliminares. Neles estudamos em paralelo três assuntos distintos: anéis locais unidimensionais, semigrupos vetoriais e curvas integrais. Fazemos o link entre os dois primeiros na Seção 1.3 e entre estes e o terceiro no Capítulo 2 e demais capítulos. Entre os objetos de estudo estão desde a recapitulação de conceitos básicos como normalização e regularidade, como assuntos que dizem mais respeito ao tema do trabalho, por exemplo, a relação entre ideais fracionários e relativos, entre módulos e feixes canônicos; bem como a introdução de conceitos bem presentes no texto tais como anéis Gorenstein, quase Gorenstein, Kunz, etc.

No Capítulo 3 já entramos no tema específico deste trabalho onde levantamos os principais aspectos de uma prova extrínseca de Max Noether, como é feita em [29], e as dificuldades em estendê-la. Esperemos que boa parte do que foi dito no início desta introdução, fique ali mais clara. O Teorema 3.3.3 é o resultado do qual nos valem para buscar uma prova alternativa de Noether, como dissemos acima.

Os Capítulos 4 e 5 são bastante interdependentes e contêm a prova de Noether para um número arbitrário de ramos. Nosso objetivo também foi o de separar as etapas da demonstração

em seus aspectos globais, depois locais, e por fim combinatoriais. Combinatorial aqui é usado no sentido o mais amplo possível, ou seja, o de que o problema é transformado em algo de fácil intelecção e que não requer pressupostos. O trabalho principal foi o de generalizar, ou, no caso, reestruturar o Lema 3.2 de [11] de uma forma que não dependesse do Lema 3.1 do mesmo artigo, cuja demonstração é longa e de difícil adaptação ao caso geral. Além disso, também ajustamos vários detalhes de [29] para o caso multirramificado. Nesse sentido, trabalhando com o feixe canônico mergulhado, a notação aqui nos pareceu mais leve.

E, por fim, no Capítulo 6 mostramos a conexão existente entre nosso problema com a propriedade de maximalidade com condutor fixo, além de uma caracterização de não hipereliticidade, como dissemos acima.

Embora este trabalho se restrinja ao problema de Noether, acreditamos que suas técnicas são úteis para várias áreas ainda em aberto no estudo de curvas singulares, tais como a descrição de jacobianas via módulos locais, o estudo da conjectura de Green para curvas integrais, índices de Clifford para feixes livres de torção e sua relação com gonalidade, descrição de ideais de modelos canônicos via quádricas, entre outros.

1 Anéis e Semigrupos

1.1 Anéis

Neste capítulo inicial, estudaremos alguns conceitos e resultados importantes para o nosso trabalho, nomeadamente, anéis locais e ideais fracionários, semigrupos vetoriais e ideais relativos, objetivando estabelecer relações entre estes, além de descrições úteis do módulo canônico, que serão fundamentais nos Capítulos 4 e 5.

1.1.1 Ideais Fracionários e Canônicos

Começaremos com anéis, a princípio gerais, para, aos poucos, irmos restringindo ao que nos interessa.

Definição 1.1.1. *Seja A um domínio de integridade e I e J A -módulos no corpo de frações $K(A)$ de A .*

- (i) *Definimos o condutor de I para J em A como o A -módulo $I : J := \{a \in K(A) \mid aJ \subseteq I\}$;*
- (ii) *dizemos que I é um ideal invertível se existe um A -submódulo N de $K(A)$ tal que $IN = A$.*

Proposição 1.1.1. *Seja A um anel e B um subanel do anel de frações de A . Temos que $\text{Hom}_A(B, A)$ é isomorfo a $A : B$.*

Definição 1.1.2. *Seja A um anel e $K(A)$ seu anel de frações totais, um ideal fracionário de A é um A -módulo $I \subseteq K(A)$ tal que $aI \subset A$ para algum $a \in A \setminus \{0\}$ não divisor de zero. Observe que se I possui algum elemento não divisor de zero, então $IK(A) = K(A)$ e neste caso dizemos que ele é um ideal fracionário regular de A . Observe que podemos falar de ideal fracionário invertível em acordo com o segundo item da definição 1.1.1.*

Para I, J ideais fracionários $I : J$ não é necessariamente um ideal fracionário (observe que $I : 0 = K(A)$). A condição para que isso aconteça é que J seja regular.

Proposição 1.1.2. *Seja I um ideal fracionário de um domínio A , então são equivalentes as seguintes condições:*

- (i) *I é invertível;*
- (ii) *I é finitamente gerado e, para cada ideal primo $P \in \text{Spec}A$, temos que I_P é invertível;*
- (iii) *I é finitamente gerado e, para cada \mathfrak{m} ideal maximal de A , temos que $I_{\mathfrak{m}}$ é invertível.*

Demonstração. Ver [24].

□

A partir de agora nos voltaremos ao estudo de anéis que se relacionam mais diretamente com nosso trabalho. Então, para o que se segue A será sempre um anel local, com ideal maximal \mathfrak{m} , às vezes denotado (A, \mathfrak{m}) , Cohen-Macaulay (CM) unidimensional. Para os resultados que elencaremos, também serviria a hipótese de A ser analiticamente não ramificado com corpo residual $k(A) = A/\mathfrak{m}$ infinito. Na verdade, ainda faremos hipóteses alternativas para o anel, no Capítulo 6, onde o tomaremos como sendo um subanel de um corpo de funções algébricas em uma variável, pela sua relação com a geometria. E, para todos os efeitos, o que o leitor deve ter em mente é que o protótipo de A é o anel local de um ponto de uma curva.

Proposição 1.1.3. *Sejam I, I_1, I_2, J, J_1, J_2 ideais fracionários de A , então temos que:*

$$(i) \text{ Se } I_1 \subseteq I_2 \text{ então } (I_1 : J) \subseteq (I_2 : J);$$

$$(ii) \text{ se } J_1 \subseteq J_2 \text{ então } (I : J_1) \supseteq (I : J_2);$$

$$(iii) (I : A) = I;$$

$$(iv) ((I : J_1) : J_2) = (I : J_1 J_2) \text{ para } J_1, J_2 \text{ ideais fracionários quaisquer};$$

$$(v) J \subseteq (I : (I : J)).$$

Demonstração. Ver [39]. □

Definição 1.1.3. *Um ideal fracionário regular ω de A é chamado ideal fracionário canônico, ou ideal canônico se todo para ideal fracionário regular I temos que*

$$I = \omega : (\omega : I).$$

Em particular observe que $A = \omega : \omega$.

Em geral ideais canônicos não são únicos. Mesmo assim temos que todos eles são isomorfos como A -módulos, e dois ideais canônicos se relacionam de uma forma muito próxima.

Definição 1.1.4. *Seja A um anel. Para qualquer A -módulo M definimos o comprimento de M sobre A como*

$$l_A(M) = \sup\{n \mid \exists 0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M, M_i \neq M_{i+1} \text{ e } M_i \text{ submódulos de } M\}.$$

Lema 1.1.4. *Se*

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

é uma sequencia exata curta de A -módulos então $l_A(M) = l_A(M') + l_A(M'')$.

Ver [30]

Definição 1.1.5. *Definiremos o tipo de A como sendo:*

$$\text{type}(A) = \dim_k \text{Ext}_A^1(k, A).$$

Note que

$$\text{type}(A) = \dim_k \text{Ext}_A^1(k, A) = \dim_k \text{Hom}_{A/(a)}(k, A/(a))$$

para $a \in \mathfrak{m}$ não divisor de zero. Multiplicando por a obtemos

$$\text{type}(A) = l_A((A : \mathfrak{m})/A) = l_A(\omega/\mathfrak{m}\omega),$$

onde ω é um ideal fracionário canônico de A .

Proposição 1.1.5. *Seja ω um ideal canônico e J, I ideais fracionários regulares de A . Então:*

- (i) (Herzog) *todo ideal canônico é irredutível;*
- (ii) $l_A(\omega : \frac{\mathfrak{m}}{\omega}) = 1$;
- (iii) $I = J \Leftrightarrow (\omega : I) = (\omega : J)$;
- (iv) *para $J \subseteq I$ temos $l_A(I/J) = l_A((\omega : J)/(\omega : I))$;*
- (v) *se $a \in K(A)$ é uma unidade, então $a\omega$ é um ideal canônico de A ;*
- (vi) *se ω' é um ideal canônico de A , então existe uma unidade em $K(A)$ tal que $\omega' = a\omega$.*

Demonstração. A demonstração de todos os itens pode ser vista em [39]. Apesar disso vamos reproduzir aqui a demonstração do item (v).

Observe que $a\omega : I = a(\omega : I)$ e $(\omega : aI) = a^{-1}(\omega : I)$ logo $a\omega : (a\omega : I) = a(\omega : (a\omega : I)) = a(\omega : a(\omega : I)) = aa^{-1}(\omega : (\omega : I)) = I$.

□

Definição 1.1.6. *Chamaremos de normalização de A o fecho inteiro de A no seu corpo de frações $K(A)$. Denotamos a normalização de A por \bar{A} e se $A = \bar{A}$ dizemos que A é um anel normal.*

Teorema 1.1.6. *Um anel local Noetheriano de dimensão 1 é regular se, e somente se é normal.*

Teorema 1.1.7. *Existe um ideal canônico ω tal que $A \subseteq \omega \subseteq \bar{A}$.*

Demonstração. Ver [23].

□

Lema 1.1.8. *Seja ω como no Teorema 1.1.7 e B um overring ($A \subseteq B \subseteq \bar{A}$) de A com condutor $C_B = A : B$. Então:*

- (i) $l_A(B/A) \leq l_A(A/C_B) + l_A(\omega/A)$;
- (ii) $l_A(\bar{A}/A) = l_A(A/C_{\bar{A}}) + l_A(\omega/A)$;
- (iii) $l_A(\bar{A}/A) \geq l_A(A/C_{\bar{A}}) + \text{type}(A) - 1$.

Demonstração. Ver [9].

□

1.1.2 Anéis Gorenstein, Quase Gorenstein e Kunz

Nesta seção listaremos as condições pelas quais um anel é Gorenstein, quase Gorenstein ou Kunz.

Definição/Lema 1.1.9. *Seja ω um ideal canônico de A tal que $A \subseteq \omega \subseteq \bar{A}$.*

(I) *dizemos que A é quase Gorenstein se satisfaz as condições equivalentes:*

- (i) $l_A(\bar{A}/A) = l_A(A/(A : \bar{A})) + \text{type}(A) - 1$;
- (ii) $\text{type}(A) = l_A(\omega/A) + 1$;
- (iii) $\mathfrak{m}\omega = \mathfrak{m}$;
- (iv) $\omega \subset \mathfrak{m} : \mathfrak{m}$.

(II) *dizemos que um anel A é Gorenstein se satisfaz as condições equivalentes:*

- (i) $l_A(\bar{A}/A) = l_A(A/(A : \bar{A}))$;
- (ii) $\text{type}(A) = 1$;
- (iii) $l_A(\omega/A) = 0$;
- (iv) $A = \omega$.

(III) *dizemos que um anel A é Kunz se satisfaz as condições equivalentes:*

- (i) $l_A(\bar{A}/A) = l_A(A/(A : \bar{A})) + 1$;
- (ii) $\text{type}(A) = 2$ e A é quase-Gorenstein;
- (iii) $l_A(\omega/A) = 1$.

1.2 Semigrupos

Definição 1.2.1. *Um semigrupo é um par $(S, +)$ com S um conjunto não vazio e $+$ uma operação binária associativa definida em S . Um semigrupo que possui um elemento $0 \in S$ tal que $0 + a = a + 0 = a$ para todo $a \in S$ é chamado monoide. Para simplificar a notação sempre que falarmos semigrupos no restante do trabalho estaremos nos referindo a semigrupos comutativos. Um semigrupo S é dito cancelativo se $a + b = c + b$ para $a, b, c \in S$ implica que $a = c$. E um monoide onde todo elemento tem inverso é chamado de grupo.*

Além disso, um subconjunto $I \subseteq S$ de um semigrupo S que é fechado na operação de S é chamado *subsemigrupo* de S , é fácil ver que um subsemigrupo é ele mesmo um semigrupo. Observe que se S é um monoide, um subsemigrupo de S não precisa necessariamente conter o 0 de S , no caso disso acontecer dizemos que I é um *submonoide*. Observe que todo submonoide é ele mesmo um monoide. Além disso a interseção de uma família de subsemigrupos/submonoides é um subsemigrupo/submonoide.

Definição 1.2.2. *Dado $A \subseteq S$ para S um semigrupo, definimos o subsemigrupo gerado por A , denotado por $\langle A \rangle$, como o menor subsemigrupo de S que contém A .*

Agora seja S um semigrupo, considerando os pares $(n, a) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times S$ defina por recorrência na , como $1a = a$ e $(n+1)a = na + a$, neste caso, observe que $\langle A \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^r n_i a_i \mid r \in \mathbb{N} \text{ e } n_i \in \mathbb{N}, a_i \in A, \text{ para todo } 1 \leq i \leq r \right\}$. Se $S = \langle A \rangle$ dizemos que S é gerado por A , e se não existe subconjunto próprio de A que gera S dizemos que A é um *sistema minimal de geradores* de S .

Definição 1.2.3. *Seja S um semigrupo. Um ideal de S é um subconjunto não vazio de S , $I \subseteq S$, tal que $I + S \subseteq I$. Um ideal I de S é chamado ideal próprio se $I \neq S$ e ideal primo se para todo $x, y \in S$ tal que $x + y \in I$ tivermos que $x \in I$ ou $y \in I$.*

Definição 1.2.4. *Dizemos que um semigrupo S é livre de torção se para todo $a, b \in S$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tivermos que $na = nb$ implica $a = b$.*

A propriedade de ser livre de torção é herdada por submonoides. É interessante falarmos que a definição acima vem da propriedade de que para G o grupo quociente de um semigrupo cancelativo S ser livre de torção, isto é, G é abelino e $0 \in G$ é o único elemento de G de ordem finita, então S tem que ser livre de torção.

Definição 1.2.5. *Dados dois semigrupos S, S' um mapa $f : S \rightarrow S'$ é um morfismo de semigrupos se $f(a + b) = f(a) + f(b)$ para todo a, b de S . Caso S e S' forem monoides o mapa acima é chamado morfismo de monoides se $f(0) = 0$.*

Um morfismo de semigrupos é um *monomorfismo*, *epimorfismo* e *isomorfismo* se ele é injetor, sobrejetor ou bijetor respectivamente. As propriedades de ser cancelativo, livre de torção, grupo ou finitamente gerado é preservada por isomorfismo.

Definição 1.2.6. *Se S_1, \dots, S_s é uma sequência de monoides, podemos definir em $S_1 \times \dots \times S_s$ a operação $(a_1, \dots, a_s) + (b_1, \dots, b_s) = (a_1 + b_1, \dots, a_s + b_s)$. Temos que $(S_1 \times \dots \times S_s, +)$ é um semigrupo chamado produto direto de S_1, \dots, S_s .*

Temos que se todos os S_1, \dots, S_s são cancelativos ou grupos ou livres de torção ou finitamente gerados então $S_1 \times \dots \times S_s$ é, respectivamente, cancelativo ou grupo ou livre de torção ou finitamente gerado.

Teorema 1.2.1. *Se S é um monoide finitamente gerado por s elementos, então ele é isomorfo a um submonoide de \mathbb{N}^s ;*

Demonstração. Ver [35]. □

1.2.1 Semigrupos Bons e Locais

Definição 1.2.7. *Seja $S \subset \mathbb{N}^s$ um subsemigrupo. Se S satisfaz as seguintes condições:*

- (i) *se $a, b \in S$ então $\min(a, b) := (\min(a_1, b_1), \dots, \min(a_s, b_s)) \in S$;*
- (ii) *se $a, b \in S$ e $a_i = b_i$ então existe $\varepsilon \in S$ tal que $\varepsilon_i > a_i = b_i$ e $\varepsilon_j \geq \min(a_j, b_j)$ se $b_j \neq a_j$ vale a igualdade;*
- (iii) *existe β tal que $\beta + \mathbb{N}^s \subseteq S$;*

dizemos que S é um bom subsemigrupo.

Da propriedade (iii) de bons semigrupos definimos o *condutor do semigrupo* S como sendo o menor $\beta \in \mathbb{N}^s$ que a satisfaz considerando a ordenação parcial: $a \leq b$ se, e somente se, $a_i \leq b_i \forall i$ e $a < b$ se $a \leq b$ e $a \neq b$. Iremos denotar o condutor do semigrupo S por β daqui em diante.

Um bom semigrupo S onde o único elemento com alguma coordenada nula é o vetor nulo é chamado *bom semigrupo local*.

Teorema 1.2.2. *Todo bom semigrupo é o produto direto de bons semigrupos locais.*

Demonstração. Ver [7] □

Definição 1.2.8. *Chamamos $E \subseteq \mathbb{Z}^s$ de ideal relativo de S se $E + S \subseteq E$ e $\alpha + E \subseteq S$ para algum $\alpha \in S$. Ideais relativos que satisfazem as propriedades (i) e (ii) de bons semigrupos são chamados bons ideais relativos de S .*

Observe que um ideal relativo I não precisa satisfazer as condições (i) e (ii) de bons semigrupos, por isso a segunda parte da definição acima.

Vamos estabelecer algumas denotações. Dado qualquer ideal relativo $E \subseteq S$ e $I \subset \{1, \dots, s\}$ definimos:

$$\begin{aligned} \Delta_I^E(a) &:= \{b \in E \mid b_i = a_i \ \forall i \in I \ \text{e} \ b_j > a_j \ \forall j \notin I\}; \\ \Delta_i^E(a) &:= \{b \in E \mid b_i = a_i \ \text{e} \ b_j > a_j \ \text{se} \ j \neq i\}; \\ \Delta^E(a) &:= \{b \in E \mid b_i = a_i \ \text{para algum} \ i \ \text{e} \ b_j > a_j \ \text{se} \ j \neq i\} = \bigcup_{i=1}^s \Delta_i^E(a). \end{aligned}$$

Além disso, para E, F ideais relativos de S definimos $E - F = \{a \in \mathbb{Z}^s \mid a + F \subseteq E\}$ que é um ideal relativo de S . Note que E, F serem bons ideais relativos não garante que $E - F$ é um bom ideal relativo.

Considere agora um semigrupo numérico T , i.é, um subsemigrupo de \mathbb{N} com complementar finito, e um ideal relativo I do semigrupo T . Observe que $n \in T$ para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Denotaremos por:

$$g(I) = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \notin I\},$$

e chamaremos $g(T)$ de *número de Frobenius* de T .

Agora faremos o mesmo mas considerando um semigrupo qualquer com condutor β , então $\gamma = \beta + (1, \dots, 1)$ é o *vetor de Frobenios* de S .

Dado $a \in S$ com $a = (a_1, \dots, a_s) \in \mathbb{Z}^s$ denotaremos

$$|a| := a_1 + \dots + a_s$$

e para $\alpha := \min(S \setminus \{0\})$ chamamos $|\alpha|$ de multiplicidade do semigrupo.

1.2.2 Ideais Relativos e Canônicos

Vamos definir o *ideal canônico* de um semigrupo S como

$$K := K_P := \{a \in \mathbb{Z}^s \mid \Delta^S(\gamma - a) = \emptyset\}.$$

Proposição 1.2.3. *Seja S um bom semigrupo e K seu ideal canônico, temos que:*

- (i) K é um bom ideal relativo de S (como se espera);
- (ii) se S é local $\gamma \in K$;
- (iii) $\Delta^K(\gamma) = \emptyset$.

Demonstração. Ver [13]. □

1.2.3 Semigrupos Simétricos e Quase Simétricos

Definição 1.2.9. *Dado um ideal relativo E de um semigrupo S , e $a, b \in E$ com $a < b$, chamaremos uma cadeia $a = a^0 < \dots < a^n = b$ de saturada se ela não puder ser estendida a uma cadeia mais longa entre a e b em E .*

Proposição 1.2.4. *Se E é um bom ideal relativo e $a, b \in E$ com $a < b$, então toda cadeia saturada entre a e b em E possui o mesmo comprimento.*

Demonstração. Ver [8] □

A proposição acima motiva a seguinte construção que também está em [8]. Sejam E , a e b como acima, denotaremos por $d_E(a, b)$ o comprimento comum das sequências saturadas de a à b em E . Caso $a = b$, definiremos $d_E(a, b) = 0$. Agora considere $F \subseteq E$ ideais relativos e \mathfrak{m}_F e \mathfrak{m}_E elementos minimais dos respectivos ideais, então para qualquer $a \in F - \mathbb{N}^s$ definiremos $d(E, F) = d_E(\mathfrak{m}_E, a) - d_F(\mathfrak{m}_F, a)$. Esta definição é independente da escolha de a . Esta construção pode ser vista em [8].

Proposição 1.2.5. *Se $G \subseteq F \subseteq E$ são bons ideais relativos de S então*

- (i) $d(E, G) = d(E, F) + d(F, G)$;

(ii) $d(E, F) = 0$ se, e somente se, $E = F$.

Proposição 1.2.6. *Seja S um semigrupo e K seu ideal canônico. Então temos que $d(\mathbb{N}^s, S) \geq d(K, \beta)$.*

Corolário 1.2.7. *Seja S um semigrupo, então $d(\mathbb{N}^s, \beta) \geq 2d(S, \beta)$.*

Lema 1.2.8. *Para qualquer bom semigrupo local S temos que $S - S \setminus \{0\} \subseteq K \cup \Delta^{\mathbb{Z}^s}(\gamma)$.*

Definição 1.2.10. *Um bom semigrupo local S é chamado simétrico se $\forall s \in \mathbb{Z}^s$ temos que $s \in S$ se, e somente se, $\Delta^S(\gamma - s) = \emptyset$. Como $S \subseteq K$ isso é equivalente a dizer que $S = K$. E dizemos que ele é quase simétrico se $S \setminus \{0\} = K + S \setminus \{0\}$.*

Observe que todo semigrupo simétrico é quase simétrico.

Definição 1.2.11. *Seja S um bom semigrupo local. Neste caso definimos*

$$type(S) = d(S - S \setminus \{0\}, S)$$

Lema 1.2.9. *Para um bom semigrupo local S as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) S é quase simétrico;
- (ii) $S - S \setminus \{0\} = K \cup \Delta^{\mathbb{Z}^s}(\gamma)$;
- (iii) $type(S)$ é bem definido e $type(S) = d(K, S) + 1$.

Proposição 1.2.10. *Um semigrupo S é simétrico se S é quase simétrico e $type(S)=1$.*

1.3 Semigrupos de Anéis

Seja (A, \mathfrak{m}) como na Seção 1.1. Se A é normal, temos que $\mathfrak{m} = (t)$, por definição, neste caso chamamos t de *parâmetro uniformizante* de A . Para todo $a \in A$ existe um inteiro maximal n tal que $a \in \mathfrak{m}^n$, então $a = u.t^n$ com u uma unidade de A .

Vamos agora considerar o corpo de frações $K(A)$ de A . Observe que para $x \in K(A) \setminus \{0\}$ temos que $x = \frac{b}{c} = \frac{v.t^m}{s.t^l} = v.s^{-1}t^{m-n} = rt^l$ onde $r \in A \setminus \{0\}$ é uma unidade e $l \in \mathbb{Z}$. Observe que essa representação é única pois se $ut^n = u't^{n'}$ teríamos que $\frac{u}{u'} = t^{n-n'}$ é uma unidade de A , então $n = n'$ e $u = u'$.

Agora, para todo a no grupo multiplicativo $K(A) \setminus \{0\}$ considere a sua representação $a = ut^n$ e defina o mapa:

$$\begin{array}{ccc} v : K(A)^* & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ a & \longmapsto & n \end{array}$$

observe que v é um homomorfismo de grupos, além disso para todo $a, b \in K(A)$ temos que $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$. Um mapa v com estas propriedades é chamado *valorização discreta* e A de *Anel de Valorização Discreta* ou DVR (Discrete Valuation Ring). Observe que a partir da valorização discreta é possível recuperar o DVR correspondente que será $A = \{a \in K(A) | v(a) \geq 0\}$ e o seu maximal que será $\mathfrak{m} = \{a \in K(A) | v(a) > 0\}$.

Temos o seguinte resultado.

Proposição 1.3.1. *Todo DVR é um domínio de ideais principais.*

Agora considere que A não é necessariamente normal. Sejam A_1, \dots, A_s os DVR's de $K(A)$ que contêm A . Temos que

$$\bar{A} = A_1 \cap \dots \cap A_s$$

E, para cada i , seja $v_i : K(A_i)^* = K(A)^* \rightarrow \mathbb{Z}$ a valorização de A_i , definimos o *semigrupo de valores* de A como sendo

$$S := v(A) := (v_1(A), \dots, v_s(A))$$

que, neste caso, é um bom semigrupo local.

Proposição 1.3.2. *Sejam I, J ideais fracionário de A , ω um ideal canônico de A tal que $A \subseteq \omega \subseteq \bar{A}$ e $S = v(A)$ o semigrupo de valores de A , temos que*

- (i) $v(I)$ é um bom ideal relativo de $S = v(A)$;
- (ii) $v(\omega) = K$, para K o ideal relativo canônico de S .

Teorema 1.3.3. *Sejam $J \subseteq I$ ideais fracionários regulares de um anel A tais que α_I é o menor elemento não nulo de I , e β_J é o condutor de J . Seja $\mathcal{S}_{v(I)}(\alpha_I, \beta_J)$ uma sequência saturada em $v(I)$ de α_I até β_J . Suponha que $\mathcal{S} \cap v(J)$ é uma sequência saturada em $v(J)$, então existe uma base B de I/J tal que*

$$v(B) = \mathcal{S} \setminus v(J)$$

em particular

$$l_A(I/J) = d(v(I), v(J)).$$

Demonstração. Ver ([7, Prp. 2.11.(iii)]) e ([23]). □

Proposição 1.3.4. *Seja $S = v(A)$ e I, J , ideais fracionários regulares de A ,*

- (i) se $J \subseteq I$ então $l_A(I/J) = d(v(I), v(J))$;
- (ii) $\text{type}(A) \leq \text{type}(S)$.

Proposição 1.3.5. *Seja S o semigrupo de A . Temos o seguinte:*

- (i) A é quase Gorenstein se, e somente se, S é quase simétrico e $\text{type}(S) = \text{type}(A)$;
- (ii) Gorenstein se, e somente se, S é simétrico;
- (iii) Kunz se, e somente se, S é quase simétrico e $\text{type}(S) = 2$.

2 Esquemas e Curvas

2.1 Esquemas Integrais, Regulares e Normalização

Chamamos um esquema X de *integral* se para todo aberto U de X tivermos que $\mathcal{O}(U)$ é um domínio de integridade.

Proposição 2.1.1. *Um esquema X é integral se, e somente se, para todo aberto $U \subseteq X$ tivermos que $\mathcal{O}(U)$ não tem elementos nilpotentes e é irredutível (no sentido topológico).*

Observe que dado um morfismo dominante de esquemas integrais $f : X \rightarrow Y$ temos um homomorfismo canônico nos pontos genéricos $\eta \in X$, $\zeta \in Y$, $f^\# : \mathcal{O}_{Y,\zeta} \rightarrow \mathcal{O}_{X,\eta}$.

Definição 2.1.1. *Um esquema X é dito normal em um ponto $x \in X$ se o anel local $\mathcal{O}_{X,x}$ é um domínio normal. Dizemos que o esquema X é normal, se ele for normal em todos os seus pontos.*

Definição 2.1.2. *Seja X um esquema integral. Um morfismo $\pi : \bar{X} \rightarrow X$ é chamado morfismo de normalização se \bar{X} é normal e se todo morfismo dominante $f : Y \rightarrow X$, com Y normal, se fatora de forma única por π :*

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & \nearrow \pi & \\ \bar{X} & & \end{array}$$

Definição 2.1.3. *Sejam X e Y esquemas com uma quantidade finita de componentes irredutíveis. Um morfismo $f : X \rightarrow Y$ é dito birracional se:*

- (i) f induz uma bijeção entre o conjunto dos pontos genéricos de X com os de Y ;
- (ii) $\mathcal{O}_{Y,f(\xi)} \simeq \mathcal{O}_{X,\xi}$ para todo ponto genérico $\xi \in X$.

Se f é birracional então f é dominante. Se $\xi \in Y$ é um ponto genérico então $X \times_Y \text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,\xi}) \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{Y,\xi})$ é um isomorfismo. Se existe uma mapa birracional entre dois esquemas dizemos que eles são esquemas *birracionalmente equivalentes*.

Definição 2.1.4. *Dizemos que um morfismo de esquemas $f : X \rightarrow Y$ é inteiro se para todo U aberto afim de Y tivermos que $f^{-1}(U)$ é afim e o homomorfismo de anéis $\mathcal{O}_Y(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(U))$ é inteiro.*

Lema 2.1.2. *Seja A um domínio de integridade e \bar{A} sua normalização. Então o morfismo $\text{Spec}(\bar{A}) \rightarrow \text{Spec}(A)$ induzido por $A \hookrightarrow \bar{A}$ é um morfismo de normalização.*

Proposição 2.1.3. *Seja X um esquema integral, então existe um morfismo de normalização $\pi : \bar{X} \rightarrow X$ único a menos de isomorfismo de X -esquemas. Além disso um morfismo $\pi : Y \rightarrow X$ é o morfismo de normalização se, e somente se, Y é normal e π birracional e inteiro. Denotamos por \bar{X} a normalização do esquema X .*

Demonstração. Tome uma cobertura afim $\bigcup U_i$ de X e aplique o Lema 2.1.2 sobre cada U_i para colar os mapas $\bar{U}_i \rightarrow U_i$. □

Corolário 2.1.4. *Seja X um esquema Noetheriano. Então X é regular se, e somente se, é regular em seus pontos fechados.*

Demonstração. Ver [28, pag.130] □

O resultado acima nos dá condições para usar o critério Jacobiano para determinarmos a regularidade de um ponto de um esquema sobre um corpo algebricamente fechado.

Definição 2.1.5. *Um ponto $P \in X$ de um esquema X sobre um corpo algebricamente fechado é chamado ponto singular de X se o anel local correspondente \mathcal{O}_P não é regular. Um esquema X é chamado não singular se não possui pontos singulares.*

Dado um esquema(variedade) X dizemos que um esquema(variedade) Y não singular é um *modelo não singular projetivo* de X quando existe um mapa birracional próprio entre eles. Observe que isso nos fornece um esquema(variedade) não singular com o mesmo corpo de funções racionais, que foi a caracterização inicial de dessingularização. No caso de curvas esse modelo é único como será justificado mais para frente.

Definição 2.1.6. *Seja X um k -esquema próprio de dimensão n . Um feixe coerente ω com um morfismo de traço $t : H^n(X, \omega) \rightarrow k$ é chamado feixe dualizante de X se o mapa natural*

$$\text{Hom}(\mathcal{F}, \omega) \times H^n(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(X, \omega) \xrightarrow{t} k$$

é um emparelhamento perfeito para todo feixe coerente \mathcal{F} de X .

Para qualquer k -esquema próprio X o feixe dualizante existe e é único, uma prova pode ser vista em [21]. Partindo do fato de que se X é um sub-esquema fechado de codimensão r em \mathbb{P}^n então $\omega_X = \text{Ext}_{\mathbb{P}^n}^r(\mathcal{O}_X, \omega_{\mathbb{P}^n})$ é o duzlizante de X e para qualquer \mathcal{O}_X -módulo \mathcal{F} temos o isomorfismo funtorial

$$\text{Hom}_X(\mathcal{F}, \omega) \cong \text{Ext}_{\mathbb{P}^n}^r(\mathcal{F}, \omega_{\mathbb{P}^n}).$$

Teorema 2.1.5. *Seja X um sub-esquema de \mathbb{P}^N localmente de interseção completa de codimensão r e \mathcal{I} o feixe de ideais de X . Então $\omega_X \cong \omega_{\mathbb{P}^N} \otimes \wedge^r(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^\vee$. Em particular ω_X é um feixe invertível de X .*

Corolário 2.1.6. *Se X é uma variedade projetiva não singular sobre um corpo algebricamente fechado k , então o feixe dualizante e o feixe canônico de X coincidem.*

Seja X um esquema integral com ponto genérico ξ . Definimos o corpo de funções racionais de X como $K(X) = \mathcal{O}_{X,\xi}$. Agora considere uma vizinhança aberta $U = \text{Spec}A$ de ξ , temos que A é domínio e possui apenas um primo minimal (0) logo $K(X) \cong A_{(0)}$. Definimos o *feixe de funções racionais* de X como o feixe constante \mathcal{K} associado ao pré feixe que associa cada aberto de X ao seu corpo de funções racionais, i.e, $\mathcal{K}(U) = K(X)$. Observe que dado um ponto $P \in X$ e considerando uma vizinhança afim $U = \text{Spec}A$ de P temos $\mathcal{O}_{X,P} \cong A_P \hookrightarrow A_{(0)} \cong K(X)$. Então podemos ver \mathcal{O}_X como sub-feixe de \mathcal{K} via estas inclusões.

2.2 Curvas

Para o que se segue, C é um esquema unidimensional integral e completo, definido sobre um corpo algebricamente fechado. Vimos no Teorema 1.1.6 que em anéis locais de dimensão um ser domínio normal é equivalente a ser regular, além disso, C é birracionalmente equivalente a sua normalização \overline{C} , e o mapa de normalização é único. Além disso definimos o *gênero geométrico* de C como o gênero da sua normalização \overline{C} .

Definição 2.2.1. *Chamamos os \mathcal{O}_C -submódulos coerentes de \mathcal{K} de feixes de ideais fracionários.*

Dado um aberto $U = \text{Spec}A$ e \mathcal{M} um feixe de ideais fracionários, $\mathcal{M}(U)$ é um A -submódulo do corpo de frações $K(C)$ e como A é domínio temos que $\mathcal{M}(U)$ é um ideal fracionário regular de A , pela coerência de \mathcal{M} obtemos ainda que ele é invertível. Portanto um feixe de ideais fracionários é a feixificação do sub-feixe que associa cada ponto de C a um ideal fracionário regular e invertível de \mathcal{O}_P .

Definição 2.2.2. *Dada uma curva integral C e dois feixes de ideais fracionários \mathcal{F}, \mathcal{G} . O grau de um feixe de ideais fracionários é a relação com os naturais determinada pelas seguintes propriedades:*

$$(i) \deg \prod_{P \in C} \mathcal{O}_P = 0;$$

$$(ii) \text{ para } \mathcal{G} \text{ sub feixe de } \mathcal{F} \text{ temos } \deg \mathcal{F} - \deg \mathcal{G} = \sum_{P \in C} \dim_k \frac{\mathcal{F}_P}{\mathcal{G}_P}.$$

Agora considere uma curva integral C e seu gênero aritmético $g = h^1(\mathcal{O}_C) = \dim H^1(\mathcal{O}_C)$, neste caso temos Riemann Roch para curvas singulares e a cota superior de Castelnuovo para o gênero que serão enunciados a seguir.

Teorema 2.2.1 (Riemann-Roch para curvas singulares). *Para cada feixe \mathcal{F} de ideais fracionários de C temos que*

$$\mathcal{X}(\mathcal{F}) = \deg(\mathcal{F}) - g + 1.$$

Definição 2.2.3. *Chamamos de sistema linear $\mathcal{L}(\mathcal{F}, V)$ de dimensão n e grau d , a reunião de um feixe de ideais fracionários \mathcal{F} de grau d de C e um subespaço $V \subseteq H^0(\mathcal{F})$ de dimensão $r+1$. Caso $V = H^0(\mathcal{F})$ dizemos que o sistema é completo.*

Além disso dado \mathcal{F} um feixe de ideais fracionários de uma curva C , s_0, \dots, s_n seções que geram \mathcal{F} sem zeros em comum e \tilde{C} um modelo não singular de C podemos tomar $\tilde{C}_i = \{p \in \tilde{C} \mid s_i(p) \neq 0\}$. Considere o seguinte homomorfismo de anéis

$$\begin{aligned} A\left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right] &\longrightarrow \Gamma(\tilde{C}_i, \tilde{\mathcal{O}}\mathcal{F}|_{\tilde{C}_i}) \\ \frac{x_j}{x_i} &\longmapsto \frac{s_j}{s_i}|_{\tilde{C}_i} \end{aligned}$$

observe que o feixe \mathcal{F} pode ser visto como um feixe sobre o modelo não singular pois as duas curvas tem o mesmo feixe de funções racionais pelo morfismo birracional entre elas.

O homomorfismo de anéis induz um morfismo de esquema $\tilde{C}_i \rightarrow U_i$ onde $U_i = \text{Spec}(A[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}])$ é um aberto afim de \mathbb{P}^n . Temos que os \tilde{C}_i 's cobrem \tilde{C} pois \mathcal{F} é livre de pontos de base (em todo ponto pelo menos uma seção de \mathcal{F} se anula) sobre \tilde{C} . Colando estes morfismos obtemos o morfismo

$$f : \tilde{C} \rightarrow \mathbb{P}^n$$

além disso $\mathcal{F} = f^*(\mathcal{O}(1))$. A imagem deste mapa é uma curva projetiva, integral e não degenerada. Esta construção pode ser vista em [21, pag 150]. Uma construção usando a linguagem de fibrados em retas e sua trivialização pode ser encontrada em [43, pag 429].

No caso em que \mathcal{F} é inversível, estamos na situação standard e podemos construir um morfismo da mesma forma

$$f : C \rightarrow \mathbb{P}^n.$$

Observe que dado um morfismo dominante de esquemas integrais $f : X \rightarrow Y$ temos um homomorfismo canônico nos pontos genéricos $\eta \in X$, $\zeta \in Y$, $f^\# : \mathcal{O}_{Y,\zeta} \rightarrow \mathcal{O}_{X,\eta}$ e obtemos a inclusão $K(Y) \hookrightarrow K(X)$, que nos dá campo para a definição padrão $\text{deg } f = [K(X) : K(Y)]$. Se f é induzido por um sistema linear $\mathcal{L}(\mathcal{F}, V)$ em X de tal forma que $Y \subset \mathbb{P}^n$ temos a seguinte fórmula bastante útil

$$\text{deg}(\mathcal{F}) = \text{deg}(Y)[K(X) : K(Y)]$$

Definição 2.2.4. *Uma curva C é dita hiperelíptica se satisfaz as seguintes condições equivalentes:*

- (i) *Existe um morfismo de grau 2 de $C \rightarrow \mathbb{P}^1$;*
- (ii) *existe um feixe invertível \mathcal{F} tal que $\text{deg}\mathcal{F} = h^0(\mathcal{F}) = 2$.*

Se uma curva é hiperelíptica então ela é Gorenstein, basta usar Riemann-Roch sobre o morfismo de (i).

No caso de curvas integrais, a descrição do feixe dualizante é bastante explícita. Seguindo [15, p. 535] ou mesmo [34, p. 191 mid], pode-se usar a fórmula de resíduos para computá-lo. De fato, seja Ω_C o o espaço de diferenciais meromorfas de C . Fixe $\lambda \in \Omega_C$, então ω é o subfeixe do feixe constante de diferenciais cujo stalk em $P \in C$ correspondem a

$$\omega_P = W \lambda$$

e W é o maior entre os \mathcal{O}_P -ideais fracionários em $k(C)$ tal que

$$\text{Res}_{\overline{P}}(f\lambda) = 0 \text{ para todo } f \in W$$

A caracterização independe de λ , embora cada diferencial induz um mergulho de ω em \mathcal{K} .

Teorema 2.2.2 (Cota de Castelnuovo). *Agora considere uma curva C de grau d em \mathbb{P}^n e sejam $m = \frac{d-1}{n-1}$ e $\epsilon = d - m(n-1) - 1$, então*

$$g \leq \frac{m(m-1)}{2}(n-1) + m\epsilon.$$

Definição 2.2.5. *Uma curva $C \subset \mathbb{P}^n$ é l -normal ($l > 0$) se o morfismo canônico*

$$H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l)) \rightarrow H^0(C, \mathcal{O}_C(l))$$

é sobrejetivo. E dizemos que ela é projetivamente normal se é l -normal para todo $l > 0$ e normal.

Proposição 2.2.3. *Seja X uma variedade afim irredutível e $\pi : \overline{X} \rightarrow X$ seu mapa de normalização. Então $\mathcal{O}(\overline{X})$ é o fecho integral de $\mathcal{O}(X)$ sobre $K(X)$. Além disso, se $x \in X$ é normal, então a pre-imagem de x em \overline{X} possui apenas um ponto e o homomorfismo local $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathcal{O}_{\overline{X},\overline{x}}$ é um isomorfismo.*

Demonstração. Ver [26, pag. 382] □

Proposição 2.2.4. *Seja X uma variedade irredutível, $\pi : \overline{X} \rightarrow X$ seu mapa de normalização e $x \in X$. O conjunto das pré-imagens de x é finito e não vazio. Considere $\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n$ os pontos de \overline{X} sobre x então $\overline{\mathcal{O}_{X,x}} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{O}_{\overline{X},\overline{x}_i}$.*

Demonstração. Ver [26, pag. 382] □

Então considere uma curva C e $P \in C$ um ponto possivelmente singular, seja $\pi : \overline{C} \rightarrow C$ o mapa de normalização e $\overline{P}_1, \dots, \overline{P}_s$ a imagem inversa de P em \overline{C} . Os pontos \overline{P}_i são chamados *ramos* de C em P . Denotaremos $\overline{\mathcal{O}} := \pi_*(\mathcal{O}_{\overline{C}})$. Sendo assim temos que $\overline{\mathcal{O}}_P = \mathcal{O}_{\overline{C},\overline{P}_1} \cap \dots \cap \mathcal{O}_{\overline{C},\overline{P}_s}$.

Chamamos de *ordem* de f em P como sendo $v_P(f) = (v_{\overline{P}_1}(f), \dots, v_{\overline{P}_s}(f))$ onde $v_{\overline{P}_i}$ é a valoração do anel de valorização discreta $\mathcal{O}_{\overline{C},\overline{P}_i}$. Neste caso definiremos o *semigrupo de valores de P* como sendo o subsemigrupo (fechado na soma e contendo o zero) $S := (v_P(\mathcal{O}_P))$ de \mathbb{Z}^s . Além disso definimos $S_i = \pi_i(S) = v_i(\mathcal{O}_P/P_i)$ como a i -ésima projeção de S . Chamaremos de condutor de C o feixe $\mathcal{C} := \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\overline{\mathcal{O}}, \mathcal{O}_C) = \text{Ann}_{\mathcal{O}_C}(\overline{\mathcal{O}}/\mathcal{O}_C)$. Em [13] é mostrado que $\mathcal{C}_P = (t_1^{\beta_1} \dots t_s^{\beta_s})\overline{\mathcal{O}}_P$ para t_i um sistema de parâmetros de $\mathcal{O}_{\overline{C},\overline{P}_i}$. Sendo assim $v_P(\mathcal{C}_P) = \beta$, onde β é o condutor do semigrupo S de P .

Definição 2.2.6. *Definiremos um ponto P de um esquema C como, quase Gorenstein, Gorenstein e Kunz em acordo com o seu anel local \mathcal{O}_P . Um esquema Noetheriano X é dito Gorenstein se todos seus pontos são Gorenstein.*

3 Abordagem Extrínseca

Embora a afirmação do Teorema de Max Noether seja totalmente intrínseca, sua demonstração conhecida no caso suave é fortemente extrínseca. Neste capítulo revisitamos mais de perto a demonstração e como podemos generalizá-la para uma gama maior de curvas. Antes disso, estudamos um elemento essencial para toda a análise

Para o que se segue, seja C um esquema unidimensional integral e completo, definido sobre um corpo algebricamente fechado k . Seja g o gênero aritmético da curva C com feixe estrutural \mathcal{O}_C , ou simplesmente \mathcal{O} . Se $\pi : \bar{C} \rightarrow C$ e a normalização, seja $\bar{\mathcal{O}} := \pi_*(\mathcal{O}_{\bar{C}})$ e $\mathcal{C} := \mathcal{H}om(\bar{\mathcal{O}}, \mathcal{O})$, o condutor de $\bar{\mathcal{O}}$ em \mathcal{O} . Denotaremos por ω_C , ou simplesmente ω , o feixe dualizante de C .

3.1 O Modelo Canônico de Rosenlicht

Dado um esquema integral A , um mapa $f : A \rightarrow C$ e um feixe \mathcal{G} em C , defina

$$\mathcal{O}_A \mathcal{G} := f^* \mathcal{G} / \text{Torsion}(f^* \mathcal{G}).$$

e dado um feixe coerente \mathcal{F} em C defina

$$\mathcal{F}^n := \text{Sym}^n \mathcal{F} / \text{Torsion}(\text{Sym}^n \mathcal{F})$$

Se \mathcal{F} é inversível, então claramente $\mathcal{F}^n = \mathcal{F}^{\otimes n}$.

Em [36, p.188 top] Rosenlicht mostrou que o sistema linear $\mathcal{L}(\mathcal{O}_{\bar{C}} \omega, H^0(\omega))$ é livre de pontos de base. Ele então considerou o morfismo $\kappa : \bar{C} \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ induzido por \mathcal{L} e definiu $C' := \kappa(C)$, como sendo o *modelo canônico* de C . Em [36, Thm 17], prova-se que se C é não hiperelítica, o mapa de normalização $\bar{\kappa} : \bar{C} \rightarrow C$ se fatora por um mapa $\kappa' : C' \rightarrow C$. Ou seja, temos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \bar{C} & \xrightarrow{\kappa} & C' \\ \bar{\kappa} \downarrow & \searrow \kappa' & \\ C & & \end{array} .$$

comutativo.

Em [27] encontra-se uma outra caracterização de C' que é a seguinte. Defina $\hat{C} := \text{Proj}(\oplus \omega^n)$, o qual chamaremos aqui *blowup canônico* de C . Ou seja, \hat{C} é o blowup de C ao longo de seu feixe dualizante ω . Devido ao Teorema de Rosenlicht temos então a seguinte sequência de morfismos birracionais

$$\bar{C} \rightarrow \hat{C} \rightarrow C' \rightarrow C \tag{3.1}$$

Mas como ω é gerado por seções globais, temos então que $C' \cong \widehat{C}$. A seguir faremos a análise local do que foi dito acima.

Defina $\overline{\mathcal{O}}\omega := \overline{\kappa}_*(\mathcal{O}_{\overline{C}}\omega)$ e tome $\lambda \in H^0(\omega)$ tal que $(\overline{\mathcal{O}}\omega)_P = \overline{\mathcal{O}}_P\lambda$ para todo ponto singular $P \in C$. Tal diferencial existe porque $H^0(\omega)$ gera $\overline{\mathcal{O}}\omega$ como provado em [36, p. 188 top], e porque há um número finito de pontos singulares de C e k é algebricamente fechado. Se mergulhamos ω no feixe constante de funções racionais \mathcal{K} via esta diferencial, isto é, se trocamos ω por ω/λ , então para cada ponto singular $P \in C$ temos

$$\mathcal{C}_P \subset \mathcal{O}_P \subset \omega_P \subset \widehat{\mathcal{O}}_P = \mathcal{O}'_P \subset \overline{\mathcal{O}}_P \quad (3.2)$$

onde $\widehat{\mathcal{O}}$, \mathcal{O}' e $\overline{\mathcal{O}}$ denotam as imagens diretas em C dos feixes estruturais de \overline{C} , \widehat{C} e C' respectivamente. Note que (3.2) é a contrapartida local de (3.1). Por um lado, $\widehat{\mathcal{O}}_P$ corresponde ao menor anel de $\overline{\mathcal{O}}_P$ que contem ω_P . Por outro, \mathcal{O}'_P é a interseção de localizações de $k[H^0(\omega)]$ em primos que projetam sobre P , onde aqui, pelo mergulho de ω , vemos $k \subset H^0(\omega) \subset k(C)$. A igualdade entre ambos os anéis é o resultado de Rosenlicht rephraseado em termos algébricos.

Um importante invariante local de P , com consequências globais, como veremos na sequência, é a seguinte colargura de \mathcal{O}_P -módulos,

$$\eta_P := \dim(\omega_P/\mathcal{O}_P). \quad (3.3)$$

E definimos $\eta := \sum_{P \in C_{\text{sing}}} \eta_P$ que chamamos de multiplicidade da curva. Temos que P é Gorenstein se, e somente se, $\eta_P = 0$.

3.2 Demonstração Extrínseca de Max Noether

Agora começaremos a revisitar a demonstração do Teorema de Max Noether no caso suave. Vemos que é comum mencioná-la logo após a cota de Castelnuovo para o gênero de uma curva. Aqui a pomos de uma forma mais detalhada em que alguns aspectos são tidos como que por pressuposto.

Então seja uma C uma curva suave integral e completa. Como C é suave, seu feixe dualizante é inversível. Logo, o par $\mathcal{L}(\omega, H^0(\omega))$ induz um morfismo

$$\varphi : C \longrightarrow C' \subset \mathbb{P}^{g-1} \quad (3.4)$$

cuja imagem é precisamente o modelo canônico de C , que acabamos de estudar. Associado ao morfismo acima temos a sequência de aplicações

$$\text{Sym}^n H^0(\omega) \xrightarrow{\alpha_n} H^0(\mathcal{O}_{C'}(n)) \xrightarrow{\beta_n} H^0(\omega^n) \quad \text{para todo } n \geq 1 \quad (3.5)$$

A sobrejetividade dos morfismos α_n diz respeito à *projetividade normal* de C' em \mathbb{P}^{g-1} , isto é, se o sistema linear de hipersuperfícies de grau n em C' é completo para todo n . Por outro lado, a sobrejetividade dos aplicações β_n diz respeito a se o morfismo φ é na verdade um mergulho.

É bem sabido que se C é suave não-hiperelítica, então φ é um isomorfismo sobre sua imagem. Além disso toda curva de Castelnuovo, isto é, de gênero máximo entre as de mesmo

grau, é projetivamente normal. Mas também é bem sabido que C' é de Castelnuovo, e a prova se completa.

Na verdade, a teoria de Castelnuovo pode ser usada na prova de ambas as sobrejetividades, ver por exemplo [27, Rem. 5.6]. Mais ainda, a mesma prova se aplica verbatim no caso Gorenstein.

Porém o problema no caso não-Gorenstein já aparece logo de imediato, uma vez que ω sequer é um fibrado. Em [29], há uma tentativa de estender a demonstração acima, mas a gama de curvas à qual ela se aplica é bem mais restrita. Na verdade, chega a parecer que só mesmo nestes casos é possível uma prova realmente geométrica, mas isto é um problema em aberto. A partir de agora veremos os pontos principais desta abordagem, cujo resultado será muito útil no último capítulo.

Se C é não-Gorenstein, seguindo [29], para se definir o morfismo φ como acima, troca-se C por \widehat{C} . De [27, Prop. 5.2] temos que $\mathcal{O}_{\widehat{C}}\omega$ é um feixe inversível e muito amplo. Então podemos considerar o morfismo definido pelo sistema linear $\mathcal{L} = | \mathcal{O}_{\widehat{C}}\omega |$

$$\varphi : \widehat{C} \rightarrow C^* \subset \mathbb{P}^r$$

onde $r := h^0(\mathcal{O}_{\widehat{C}}\omega) - 1$ e $C^* := \phi(\widehat{C})$, que generaliza o morfismo (3.4) para o caso não-Gorenstein. Ele induz os morfismos lineares abaixo, como em (3.5)

$$\mathrm{Sym}^n H^0(\mathcal{O}_{\widehat{C}}\omega) \xrightarrow{\alpha_n} H^0(\mathcal{O}_{C^*}(n)) \xrightarrow{\beta_n} H^0((\mathcal{O}_{\widehat{C}}\omega)^{\otimes n}),$$

Mas $\mathcal{O}_{\widehat{C}}\omega$ é muito amplo, portanto φ é um isomorfismo, e os β_n 's são sobrejetivos.

Para a sobrejetividade dos α_n usa-se o resultado geral abaixo, provado em [29]. Para tal, diz-se que uma curva é *linearmente normal* se, e somente se, o sistema linear de hiperplanos é completo. Ou seja, é a condição de projetivamente normal citada acima válida apenas para $n = 1$.

Lema 3.2.1. *Seja C uma curva não-degenerada de grau d em \mathbb{P}^r . Se $d < 2r$ então C é linearmente normal se, e somente se, é projetivamente normal.*

O próximo passo é então mostrar que o grau de C^* satisfaz a desigualdade acima. Segue de [27, Prop. 5.2] que $h^1(\mathcal{O}_{\widehat{C}}\omega) = 0$. Então, por Riemann-Roch, temos

$$\mathrm{deg}(C^*) = \mathrm{deg}_{\widehat{C}}(\mathcal{O}_{\widehat{C}}\omega) = h^0(\mathcal{O}_{\widehat{C}}\omega) + \widehat{g} - 1 = r + \widehat{g}$$

Por outro lado, como $\omega_P \subsetneq \widehat{\mathcal{O}}_P$, temos que $\widehat{g} \leq g - 2$ e portanto

$$\begin{aligned} r + \widehat{g} &\leq r + g - 2 = r + h^0(\omega) - 2 \\ &\leq r + h^0(\mathcal{O}_{\widehat{C}}\omega) - 2 \\ &= r + (r + 1) - 2 < 2r. \end{aligned}$$

e segue a desigualdade desejada. Como φ foi definido por um sistema linear completo, temos que C^* é linearmente normal e, portanto, projetivamente normal. Consequentemente os α 's são sobrejetivos.

E agora passamos à curva C . Para se enunciar o resultado de Noether no caso em que C é não-Gorenstein, necessitamos da seguinte convenção: dado um feixe coerente \mathcal{F} em C seja

$$\mathcal{F}^n := \text{Sym}^n \mathcal{F} / \text{Torsion}(\text{Sym}^n \mathcal{F}). \quad (3.6)$$

Isto posto, repare que temos um diagrama natural

$$\begin{array}{ccc} \text{Sym}^n H^0(\mathcal{O}_{\hat{C}}\omega) & \longrightarrow & H^0((\mathcal{O}_{\hat{C}}\omega)^{\otimes n}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Sym}^n H^0(\omega^n) & \longrightarrow & H^0(\omega^n) \end{array}$$

onde os mapas ascendentes são injetivos. Então basta que $H^0(\omega) = H^0(\mathcal{O}_{\hat{C}}\omega)$ e temos uma prova de Max Noether para curvas não-Gorenstein. Note que esta igualdade equivale a dizer que o modelo canônico é linearmente normal. Isto porque o morfismo $\hat{C} \rightarrow C'$ é definido por pelo sistema linear $\mathcal{L}(\mathcal{O}_{\hat{C}}\omega, H^0(\omega))$. O problema é saber quais curvas satisfazem esta propriedade, que é justamente o assunto da próxima seção.

3.3 Curvas Nearly Gorenstein

Nesta seção estudaremos as curvas para as quais se aplica a prova apresentada anteriormente. Começamos introduzindo o conceito abaixo que corresponde ao lado algébrico das propriedades geométricas que as caracterizam.

Definição 3.3.1. *Chame C de Nearly Gorenstein se C possui apenas um ponto P não Gorenstein tal que o anel local \mathcal{O}_P é quase gorenstein, isto é*

$$\eta_P := \dim(\overline{\mathcal{O}}_P/\mathcal{O}_P) - \dim(\mathcal{O}_P/\mathcal{C}_P) = \dim(\text{Ext}^1(k, \mathcal{O}_P)) - 1$$

onde k é o corpo base algebricamente fechado.

O interessante é que as curvas nearly Gorenstein se conectam naturalmente com o que estudamos no Capítulo 2 sobre anéis quase-Gorenstein e suas caracterizações. O ponto chave que conecta tais curvas com o que vimos na seção anterior é o seguinte resultado.

Lema 3.3.1. *Assuma C não Gorenstein. Então são equivalentes as seguintes condições:*

- (i) $h^0(\mathcal{O}_{\hat{C}}\omega) = g$;
- (ii) $H^0(\omega) = H^0(\mathcal{O}_{\hat{C}}\omega)$;
- (iii) C é nearly Gorenstein.

A equivalência acima permite uma caracterização bem mais completa sobre curvas com modelo canônico linearmente normal, e que enunciamos na sequência. Antes disso, convencionamos a notação abaixo para o feixe definido pela sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}_{\{P\}} \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow \mathcal{O}_P/\mathfrak{m}_P \longrightarrow 0$$

O resultado abaixo corresponde a [27, Thm. 6.5].

Teorema 3.3.2. *Se C é não-Gorenstein, então são equivalentes:*

- (i) C' é projetivamente normal;
- (ii) C' é linearmente normal;
- (iii) C' é de Castelnuovo;
- (iv) $\deg(C') = g + \bar{g} - 1$;
- (v) C é nearly Gorenstein;
- (vi) $C' = \text{Spec}(\text{Hom}(\mathcal{M}_{\{P\}}, \mathcal{M}_{\{P\}}))$ para algum ponto P não-Gorenstein.

Se (v)-(vi) vale, então C é de dimensão máxima de mergulho em P se, e somente se, C' é Gorenstein. Mais ainda, se (v)-(vi) vale, então C' é interseção de quádricas e cúbicas; quádricas basta se $\eta \geq 2$, onde η é o invariante definido em (3.3).

Por tudo o que vimos neste capítulo, fica provado o resultado que segue, crucial para o resultado do último capítulo.

Teorema 3.3.3. *Se C é um curva nearly Gorenstein então os mapas*

$$\text{Sym}^n H^0(C, \omega) \longrightarrow H^0(C, \omega^n),$$

são sobrejetivos para todo $n \geq 1$.

4 Abordagem Intrínseca

Neste capítulo veremos um caminho para generalizar o resultado de Noether com argumentos intrínsecos. Ou seja, estudaremos a curva em questão sem o uso de um feixe muito amplo, seja na curva ou qualquer outra relacionada a ela, como fizemos no capítulo anterior.

Na ausência de uma geometria ambiente, veremos que os aspectos locais terão um peso maior. O que faremos neste capítulo é justamente provar o teorema em sua generalidade máxima a menos de "sobrejeções locais", por assim dizer, que serão vistas no próximo capítulo onde o problema é posto em termos puramente combinatoriais.

Mais precisamente, o desenvolvimento dos trabalhos [27], [29] e [11] caminham para uma generalização da propriedade de Max Noether para curvas integrais. Porém o entrave era justamente a análise mais delicada de como as seções globais do dualizante interagem com cada singularidade. Neste sentido, [29] resolve tal problema quando tais singularidades são unirramificadas, ao passo que [11] estende a análise para o caso até birramificado.

Porém, achamos que é um exercício interessante desenvolver uma prova em que os tais problemas locais são tratados separadamente. Ou, em outras palavras, tentar exibir o que [29] e [11] têm em comum. Com isso esperamos esclarecer ao leitor qual o ponto central a ser endereçado em uma demonstração do teorema de Noether que possa valer a qualquer curva integral.

4.1 Resultados Auxiliares

Agora enunciaremos e comentaremos os resultados que municiam a prova da próxima seção. Aqui e nas demais seções, salvo menção contrária, mergulharemos o feixe dualizante ω no feixe constante de funções racionais \mathcal{K} via a diferencial λ descrita na seção anterior de forma que vale a sequência de inclusões (3.2). Isto deixa mais leve as passagens, e altera alguns resultados aqui descritos se comparados com os artigos supracitados.

Seja $P \in C$ um ponto singular e sejam $\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_s \in \bar{C}$ os pontos que projetam sobre P . Para cada $f \in k(C)^*$ defina

$$v_P(f) := (v_{\bar{P}_1}(f), \dots, v_{\bar{P}_s}(f)) \in \mathbb{N}^s.$$

Sejam $m, h \in k(C)^*$ tais que $\mathfrak{m}_P \bar{\mathcal{O}}_P = m \bar{\mathcal{O}}_P$ e $\mathcal{C}_P = h \bar{\mathcal{O}}_P$. Tome

$$\alpha := v_P(m) \quad \text{e} \quad \beta := v_P(h).$$

Ao longo do texto será comum encontrar abusos como $v(\mathfrak{m}_P)$, $v(\mathcal{C}_P)$, $v(\omega_P)$ onde se trata na verdade da valorização do mergulho no corpo de funções racionais. Por fim, para $t_{\bar{P}_1}, \dots, t_{\bar{P}_s}$ parâmetros locais nestes pontos usaremos, por simplicidade, a seguinte convenção: para $a = (a_1, \dots, a_s) \in \mathbb{Z}^s$

$$t_P^a := t_{\bar{P}_1}^{a_1} \dots t_{\bar{P}_s}^{a_s} \in k(C).$$

Além disso, denotamos $|a| = a_1 + \dots + a_s$.

Dado $P \in C$ um ponto singular definimos $\tilde{C} = \tilde{C}_P$ como sendo a curva obtida resolvendo a singularidade P de C . Denotaremos por \tilde{g} o seu gênero e para $\tilde{\kappa} : \tilde{C} \rightarrow C$ o morfismo natural tome $\tilde{\omega} := \phi_*(\omega_{\tilde{C}})$.

Lema 4.1.1. *Seja $P \in C$ um ponto singular, então:*

- (i) se $\tilde{g} \geq 1$ então existe $f \in H^0(\omega)$ com $v_P(f) = \beta$;
- (ii) se \tilde{C} é não hiperelíptica então existe $f \in H^0(\omega)$ com $v_P(f) = \beta + u$ com $|u| = 1$;
- (iii) se \tilde{C} é hiperelíptica e $\tilde{g} \geq 2$ então existe $f \in H^0(\omega)$ com $v_P(f) = \beta + u$ com $|u| = 1$ ou 2

Demonstração. Seja \bar{P} um ponto de \tilde{C} que está sobre P . Por [29, Lem 3.3] encontramos uma diferencial $\mu \in H^0(\tilde{\omega}) \subset H^0(\omega)$ tal que $v_{\bar{P}}(\mu) = 0$, $v_{\bar{P}}(\mu) = 1$ e $v_{\bar{P}}(\mu) = 1$ ou 2, se, respectivamente, as condições (i), (ii) ou (iii) se aplicam. Então escreva $\mu = f\lambda$, como $v_P(\lambda) = -\beta$, por construção, segue o resultado. \square

Para o que segue se \mathcal{F} é um feixe coerente em C e se $\phi : \text{Sym}^n H^0(\mathcal{F}) \rightarrow H^0(\mathcal{F}^n)$ é o morfismo natural, denotaremos então

$$H^0(\mathcal{F})^n := \phi(\text{Sym}^n H^0(\mathcal{F})). \quad (4.1)$$

Isto posto, estendemos abaixo o Lema 3.2 de [29], que trata do caso unirramificado, para um número arbitrário de ramos. Na verdade apenas enunciaremos o resultado e deixaremos sua prova para o próximo capítulo. Este lema corresponde a parte mais árdua da prova, e nos possibilita levar o nosso estudo para o campo local em um primeiro momento e, a posteriori, transformar afirmação de Noether em problema totalmente combinatorial como será mostrado no próximo capítulo.

Lema 4.1.2. *Seja $P \in C$ um ponto singular, então o mapa*

$$H^0(\omega)^n \longrightarrow \frac{\omega_P^n}{t_P^\epsilon \mathcal{C}_P^n}$$

é sobrejetivo para todo $n \geq 2$ nos seguintes casos:

- (i) $|\epsilon| = 2n - 1$;
- (ii) $|\epsilon| = 1$ se existe $f_0 \in H^0(\omega)$ com $v_P(f_0) = \beta$;
- (iii) $|\epsilon| = 0$ se existem $f_0, f_1 \in H^0(\omega)$ com $v_P(f_0) = \beta$ e $v_P(f_1) = \beta + u$ com $|u| = 1$ ou 2.

Um outro resultado a ser usado adiante é o seguinte.

Lema 4.1.3. *Seja $P \in C$ um ponto de multiplicidade pelo menos 3. Se \tilde{C} é hiperelíptica e $\tilde{g} \geq 2$, então*

$$\text{Sym}^n H^0(C, \omega) \longrightarrow H^0(C, \tilde{\omega}^n)$$

são sobrejetivos para $n \geq 1$.

Demonstração. Basta observar que a demonstração de [29, Lema 3.6], que é um pouco técnica, não depende essencialmente de P ser unirramificado, mas apenas de ser um ponto ao menos triplo. \square

Agora considere um feixe livre de torção \mathcal{F} de posto 1 em C . Note que se $\chi(\mathcal{F}) \geq g$ então $h^1(\mathcal{F}) = 0$ do contrário, por dualidade, temos uma injeção $\mathcal{F} \hookrightarrow \omega$ e portanto $\chi(\mathcal{F}) \leq \chi(\omega)$.

Seja G o lugar Gorenstein de C ou, equivalentemente, o maior subesquema ao qual a restrição de ω é localmente livre. Vale a fórmula:

$$\deg_G(\omega^n) = n(2g - 2 - \eta) \quad \text{para todo } n \geq 1 \quad (4.2)$$

onde η foi definido em (3.3). De fato, a igualdade para $n = 1$ vem da própria definição de η , ao passo que para $n \geq 2$ é decorrente do feixe restrito ser um fibrado. Portanto

$$\begin{aligned} \deg_G(\omega^n) - \deg_G(\omega) &\geq (n - 1)(2g - 2 - \eta) \\ &= (n - 1)((g - 2) + (g - \eta)). \end{aligned}$$

Por outro lado, pela prova de [9, Prp. 28], temos que $g > \eta$. Logo se $g \geq 2$ então $\chi(\omega^n) > \chi(\omega) = g - 1$ e seguem, do que dissemos acima, as seguintes igualdades

$$h^1(\omega^n) = 0 \quad \text{para todo } n \geq 2 \quad (4.3)$$

que serão muito úteis no decorrer do capítulo.

Para os próximos resultados mergulharemos $\tilde{\omega}$ em \mathcal{K} via λ . Por [27, Lem 2.8] temos

$$\tilde{\omega}_P = \mathcal{C}_P \subset \omega_P.$$

Além disso $\tilde{\omega}_Q = \omega_Q$ para todo $Q \neq P$, qualquer que seja o mergulho comum de ω e $\tilde{\omega}$, posto que tais stalks coincidem por construção.

Lema 4.1.4. *Se $\tilde{g} \geq 2$ então os morfismos*

$$\text{Sym}^n H^0(C, \omega) \longrightarrow H^0(C, \omega^n) / H^0(C, \tilde{\omega}^n)$$

são sobrejetivos para $n \geq 1$.

Demonstração. Forme a sequência exata longa

$$0 \rightarrow H^0(\tilde{\omega}^n) \rightarrow H^0(\omega^n) \xrightarrow{u} H^0(\omega^n / \tilde{\omega}^n) \rightarrow H^1(\tilde{\omega}^n) \rightarrow H^1(\omega^n).$$

Temos que $h^1(\omega) = h^1(\tilde{\omega}) = 1$ pois tratam-se de feixes dualizantes em C e (a menos de imagem direta) em \tilde{C} . Por outro lado $g > \tilde{g} \geq 2$, logo aplicando (4.3) a C e \tilde{C} temos $h^1(\omega^n) = h^1(\tilde{\omega}^n) = 0$ para todo $n \geq 2$. Portanto u é sobrejetiva e segue que

$$H^0(\omega^n) / H^0(\tilde{\omega}^n) = H^0(\omega^n / \tilde{\omega}^n) = \omega_P^n / \tilde{\omega}_P^n$$

Então basta mostrar que $\text{Sym}^n H^0(\omega) \rightarrow \omega_P^n / \tilde{\omega}_P^n$ são sobrejetivas, mas como visto acima $\tilde{\omega}_P = \mathcal{C}_P$ e $\text{Sym}^n H^0(\omega) \rightarrow H^0(\omega)^n$ são sobrejetivas por definição, então basta mostrar que $H^0(\omega)^n \rightarrow \omega_P^n / \mathcal{C}_P^n$ são sobrejetivas para $n \geq 1$. Uma vez que $\tilde{g} \geq 2$ temos que o Lema 4.1.1.(i),(iii) nos propicia usar o Lema 4.1.2.(iii) e segue o resultado. \square

4.2 Demonstração Intrínseca de Max Noether

E agora provamos a afirmação de Noether em sua máxima generalidade, a menos da prova do Lema 4.1.2 que faremos no capítulo seguinte.

Teorema 4.2.1. *Seja C uma curva integral, não hiperelíptica, completa sobre um corpo algebricamente fechado. Então os morfismos naturais*

$$\mathrm{Sym}^n H^0(C, \omega) \longrightarrow H^0(C, \omega^n)$$

são sobrejetivos para $n \geq 1$.

Demonstração. Se C é Gorenstein já vimos no capítulo anterior que o resultado vale, do contrário fazemos indução sobre o número de pontos não-Gorenstein. Suponha que C possui apenas um ponto não Gorenstein P e seja \tilde{C} a curva que ele define como antes.

Se $\tilde{g} = 0$ então $h^0(\tilde{\omega}^n) = 0$ para $n \geq 1$. E, como $g \geq 2$ pois C é não Gorenstein, temos $h^1(\omega^n) = 0$ para $n \geq 2$ por (4.3). Por outro lado $\dim(H^0(\omega^n)) \geq \dim(\omega_P^n/t_P^{-(2n-1)}\mathcal{C}_P^n)$ para $n \geq 2$ e, pelo Lema 4.1.2.(i), segue que para $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \dim(H^0(\omega^n)) &= h^0(\omega^n) = h^0(\omega^n) - h^0(\tilde{\omega}^n) \\ &= \deg(\omega^n) - \deg(\tilde{\omega}^n) - h^1(\tilde{\omega}^n) \\ &= \dim(\omega_P^n/\tilde{\omega}_P^n) - (2n - 1) \\ &= \dim(\omega_P^n/\mathcal{C}_P^n) - (2n - 1) \\ &= \dim(\omega_P^n/t_P^{-(2n-1)}\mathcal{C}_P^n) \\ &\leq \dim(H^0(\omega^n)) \end{aligned}$$

e obtemos assim o resultado para $\tilde{g} = 0$.

Se $\tilde{g} = 1$ então $\omega_{\tilde{C}} \cong \mathcal{O}_{\tilde{C}}$ e, em particular, $H^0(\tilde{\omega})^n = H^0(\tilde{\omega}^n)$. Por outro lado se $\tilde{g} = 1$, pelos Lemas 4.1.1.(i) e 4.1.2.(ii), temos que o mapa $H^0(\omega)^n \rightarrow \omega_P^n/t_P^{-1}\mathcal{C}_P^n$ é sobrejetivo. Como $H^0(\tilde{\omega}) = H^0(\omega) \cap \tilde{\omega}_P = H^0(\omega) \cap \mathcal{C}_P$ segue que $H^0(\omega)^n/H^0(\tilde{\omega})^n \rightarrow \omega_P^n/t_P^{-1}\mathcal{C}_P^n$ é sobrejetivo o que nos leva a

$$\begin{aligned} \dim(H^0(\omega^n)/H^0(\tilde{\omega})^n) &= \dim(H^0(\omega^n)/H^0(\tilde{\omega}^n)) \\ &= h_0(\omega^n) - h_0(\tilde{\omega}^n) \\ &= \deg(\omega^n) - \deg(\tilde{\omega}^n) - h^1(\tilde{\omega}^n) \\ &= \dim(\omega_P^n/\tilde{\omega}_P^n) - 1 \\ &= \dim(\omega_P^n/\mathcal{C}_P^n) - 1 \\ &= \dim(\omega_P^n/t_P^{-1}\mathcal{C}_P^n) \\ &\leq \dim(H^0(\omega)^n/H^0(\tilde{\omega})^n). \end{aligned}$$

logo $\dim(H^0(\omega^n)) \leq \dim(H^0(\omega)^n)$ e segue o resultado se $\tilde{g} = 1$.

Agora assumamos que $\tilde{g} \geq 2$, como P é não Gorenstein então tem multiplicidade pelo menos 3. Logo se \tilde{C} é hiperelíptica, pelo Lema 4.1.3, o mapa $\mathrm{Sym}^n H^0(C, \omega) \rightarrow H^0(C, \tilde{\omega}^n)$ é sobrejetivo. Se \tilde{C} é não hiperelíptica segue $\mathrm{Sym}^n H^0(C, \tilde{\omega}) \rightarrow H^0(C, \tilde{\omega}^n)$ é sobrejetivo pois \tilde{C} é

Gorenstein dado que P é o único ponto não Gorenstein de C e, já vimos no capítulo anterior, as sobrejeções de Noether valem no caso Gorenstein. Por fim, pelo Lema 4.1.4, temos que a aplicação $\text{Sym}^n H^0(C, \omega) \rightarrow H^0(C, \omega^n)/H^0(C, \tilde{\omega}^n)$ é sobrejetiva se $\tilde{g} \geq 2$, então o Teorema é válido para C com apenas um ponto não Gorenstein.

Se C tiver mais de um ponto não Gorenstein defina \tilde{C} resolvendo algum destes pontos. Então, por indução, o mapa $\text{Sym}^n H^0(C, \tilde{\omega}) \rightarrow H^0(C, \tilde{\omega}^n)$ é sobrejetivo para $n \geq 1$ e, pelo Lema 4.1.4, temos que $\text{Sym}^n H^0(C, \omega) \rightarrow H^0(C, \omega^n)/H^0(C, \tilde{\omega}^n)$ é sobrejetiva, pois \tilde{C} é não-Gorenstein, portanto $\tilde{g} \geq 2$ e segue o resultado. \square

5 Um Problema Combinatorial

Como dissemos antes, a partir de agora começamos a adentrar na parte local de nosso estudo tendo como objetivo transformá-lo em um problema totalmente combinatorial, como indica o título deste capítulo. A tarefa é provar o Lema 4.1.2 que é o que falta para completar a demonstração do Teorema 4.2.1. Toda a notação aqui usada foi herdada dos dois capítulos anteriores.

5.1 Do Global ao Local

O ponto chave que conecta a análise que fizemos até aqui – toda ela global – com a estrutura local da singularidade é a equação a seguir cuja prova pode ser encontrada em [27, Lem. 6.1] e é uma releitura de [41, p. 117 bot]

$$\omega_P = H^0(\omega) + \mathcal{C}_P. \quad (5.1)$$

Esta igualdade já pressupõe as convenções que fizemos com relação ao mergulho de ω . Em particular temos que $H^0(\omega) \subset \overline{\mathcal{O}}_P$ pois $\omega_P \subset \overline{\mathcal{O}}_P$, e daí decorre que

$$\omega_P^n = H^0(\omega)^n + \mathcal{C}_P. \quad (5.2)$$

Portanto a inclusão $H^0(\omega) \subset \omega_P$ induz morfismos lineares sobrejetivos

$$H^0(\omega)^n \rightarrow \omega_P^n / \mathcal{C}_P. \quad (5.3)$$

Então basta mostrar que para todo $n \geq 2$ temos a igualdade

$$\mathcal{C}_P / t_P^{-\epsilon} \mathcal{C}_P^n = \overline{H^0(\omega)^n \cap \mathcal{C}_P} \quad (5.4)$$

onde ϵ é o mesmo do enunciado do Lema 4.1.2 e a barra denota classe módulo $t_P^{-\epsilon} \mathcal{C}_P^n$.

Temos a seguinte sequência de inclusões:

$$\mathcal{C}_P \supset t_P^{-\epsilon} \mathcal{C}_P^2 \supset t_P^{-\epsilon} \mathcal{C}_P^3 \supset \dots \supset t_P^{-\epsilon} \mathcal{C}_P^n.$$

A nossa estratégia será provar a igualdade (5.4) para $n = 2$ e, a partir dela, mostrar que $t_P^{-\epsilon} \mathcal{C}_P^{n-1} / t_P^{-\epsilon} \mathcal{C}_P^n = \overline{H^0(\omega)^n \cap \mathcal{C}_P}$ para todo $n \geq 3$. Faremos isto de uma forma totalmente combinatorial como veremos a seguir.

5.2 Do Local ao Combinatorial

A partir de agora começaremos a evocar algumas definições e resultados da Seção 1.2 que tornarão possível transformar o nosso estudo em problema vetorial em \mathbb{N}^s . A primeira delas

é perceber que, se $P \in C$ é um ponto singular então $S := v_P(\mathcal{O}_P)$ é um semigrupo local em \mathbb{N}^s pela Proposição 1.2.7. Note que aqui os invariantes que introduzimos no capítulo anterior podem ser vistos como invariantes do semigrupo. De fato, α é o menor elemento não nulo de S e β é seu condutor.

Além disso, temos ω satisfazendo as inclusões (3.2) para todo ponto singular e, em particular,

$$\mathcal{O}_P \subset \omega_P \subset \overline{\mathcal{O}_P}. \quad (5.5)$$

Esta “normalização” de ω_P nos permite obter a seguinte igualdade, essencial para tudo o que se segue,

$$v_P(\omega_P) = K \quad (5.6)$$

Este resultado pode aqui ser obtido de dois modos a saber: por um lado podemos combinar [41, Thm. 2.8] com o fato de que $v_P(\lambda) = -\beta$ e por outro usar a *lei de reciprocidade* provada em [41, Thm. 1.7], com ela temos que ω_P é um ideal canônico no sentido da Seção 1.1.1, mais ainda o encaixe (5.5) implica (5.6) pela Proposição 1.3.2.

E, por fim, usaremos o Teorema 1.3.3 para transformar o que queremos demonstrar em um problema de encontrar “sequências contínuas em \mathbb{N}^s ”. Na verdade provaremos que

$$\mathcal{C}_P/t^{\beta-\alpha}\mathcal{C}_P = \overline{H^0(\omega)^2 \cap \mathcal{C}_P}. \quad (5.7)$$

Este é o ponto chave da demonstração, o restante, como veremos no final, é consequência imediata disto.

Agora apresentamos a versão combinatorial de (5.7):

Teorema 5.2.1. *Seja S um semigrupo bom e local e com ideal relativo canônico K . Sejam α e β seu menor elemento e condutor respectivamente e seja $K^\circ := \{a \in K \mid 0 \leq a < \beta\}$. Então existe uma sequência em \mathbb{N}^s*

$$a_1 = \beta < a_2 < a_3 < \dots < a_{|\beta-\alpha|} < 2\beta - \alpha \quad (5.8)$$

tal que

$$a_i \in K^\circ + K^\circ := \{a + b \mid a, b \in K^\circ\}$$

para todo $i \in \{1, \dots, |\beta - \alpha|\}$.

De fato, se $a \in K^\circ$ então existe $f \in H^0(\omega)$ tal que $v_P(f) = a$ por (5.1). Por outro lado, uma sequência como (5.8) implica na existência de $|\beta - \alpha|$ elementos em $H^0(\omega)^2 \cap \mathcal{C}_P$ que são linearmente independentes mod $t^{\beta-\alpha}\mathcal{C}_P$ pelo Teorema 1.3.3, mas $|\beta - \alpha|$ corresponde a dimensão de $\mathcal{C}_P/t^{\beta-\alpha}\mathcal{C}_P$.

Para o que se segue fixaremos as seguintes notações:

$$\alpha^i := \min(i\alpha, \beta);$$

$$m = \text{o maior inteiro tal que } \alpha^{m+1} = (m+1)\alpha;$$

$$= \text{o maior inteiro tal que } (m+1)\alpha \leq \beta;$$

$$r = \text{o menor inteiro tal que } (r+2)\alpha > \beta.$$

5.3 Resolvendo o Problema

Vamos demonstrar o Teorema 5.2.1 em três passos a saber: A menos de soma com β iremos de 0 a $m\alpha$, deste a $\alpha^{r+1} - \alpha$ e por fim chegamos a $\beta - \alpha$ como mostra a figura abaixo.

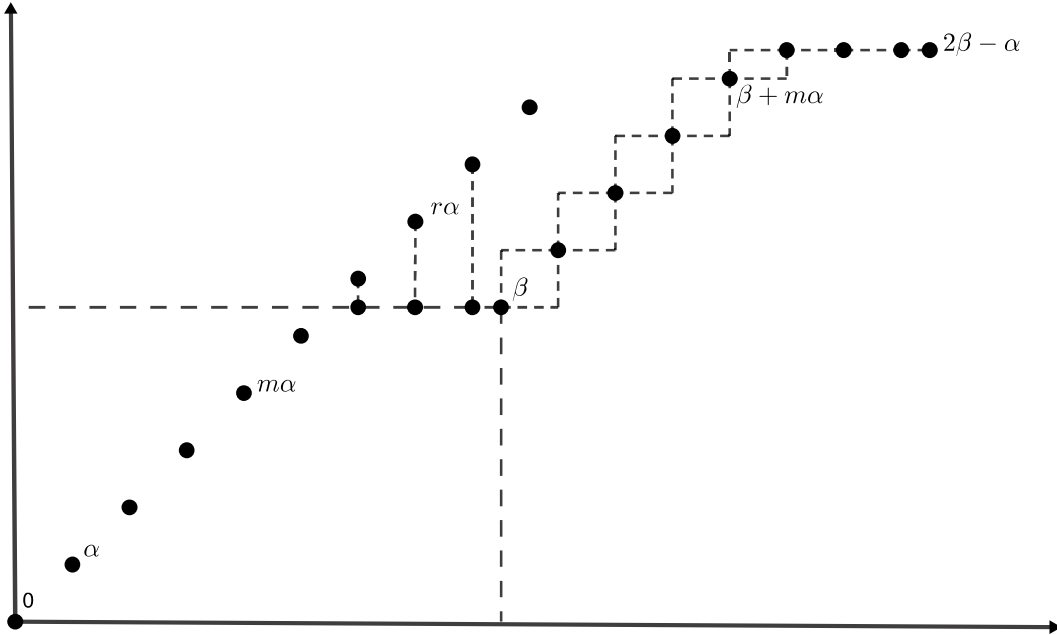


Figura 1 – Sequência saturada de β a $2\beta - \alpha$ nas hipóteses do Teorema 5.2.1

A parte mais delicada é a primeira e a enunciaremos como um resultado independente a seguir. O motivo é que esta é justamente uma abordagem alternativa, e um pouco mais geral, para o Lema 3.1 de [11] que é ponto central da demonstração lá encontrada.

Lema 5.3.1. *Existe uma sequência*

$$\beta = c_0 < c_1 < \dots < c_i < \dots < c_{m|\alpha|-1} < \beta + m\alpha \tag{5.9}$$

tal que $c_i \in K^\circ + K^\circ$ para todo $i \in \{0, \dots, m|\alpha| - 1\}$.

Demonstração. Para todo $i \in \mathbb{N}^*$ defina

$$R_i := \{a \in \mathbb{N}^s \mid (i - 1)\alpha < a < i\alpha\}$$

e seja n o menor inteiro tal que $R_n \cap S \neq \emptyset$.

Pela definição de K é imediato observar as seguintes inclusões

$$A_l := \{\beta - l\alpha + b \mid 0 \leq b < \alpha \text{ com } |\alpha - b| \geq 2\} \subset K^\circ \tag{5.10}$$

para todo $1 \leq l \leq n - 1$. Então temos que

$$A_1 + j\alpha \subset K^\circ + K^\circ \text{ for } 1 \leq j \leq m.$$

E toda sequência como (5.9) tal que $c_{i|\alpha|} = \beta + i\alpha$ está contida em $K^\circ + K^\circ$, a menos dos pontos $c_{i|\alpha|-1}$ que têm de ser da forma $\beta + i\alpha - e_j$ para algum j .

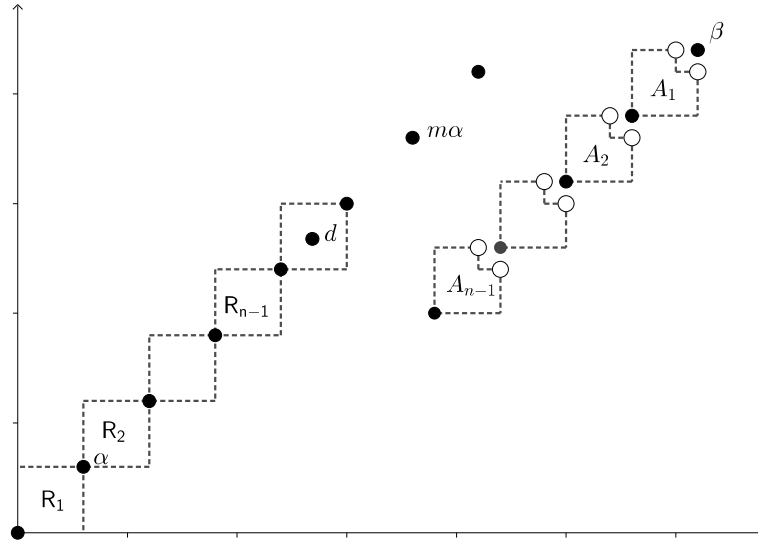


Figura 2 – Correspondência das regiões R_i s com os respectivos A_i s.

Seja $d \in R_n \cap S$ temos que

$$d + k\alpha \in K^\circ \tag{5.11}$$

para $0 \leq k \leq m - n + 1$ e, além disso,

$$\beta + i\alpha - e_j \in A_l + d + k\alpha \quad \text{para } i = n - l + k \text{ e algum } j. \tag{5.12}$$

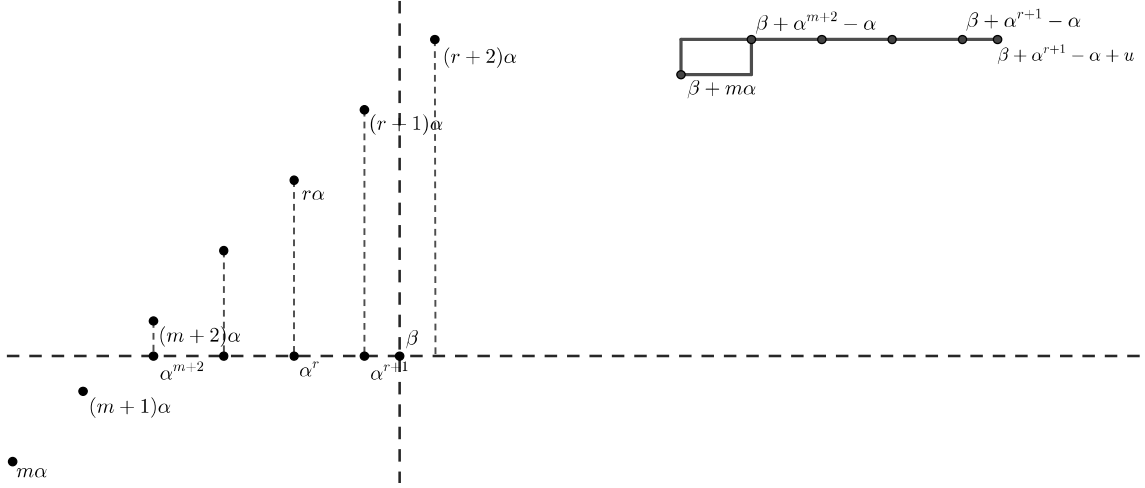
De fato, um elemento genérico de $A_l + d + k\alpha$ pode ser escrito como $\beta + (n - l + k - 1)\alpha + u + b$ onde $d = (n - 1)\alpha + u$, tome $b := (\alpha - u) - e_j$ tal que $b \geq 0$ e a afirmação segue.

Para encontrar os desejados $c_{i|\alpha|_1}$'s, devido a (5.10), (5.11) e (5.12), basta mostrar que para todo $i \in \{1, \dots, m\}$ podemos encontrar $k \in \{0, \dots, m - n + 1\}$ e $\ell \in \{1, \dots, n - 1\}$ tais que $i = n - l + k$, mas isto é imediato da variação destes índices, logo tomando $c_{i|\alpha|_1} = \beta + i\alpha - e_j$ para todo $1 \leq i \leq m$ segue o resultado. \square

Para irmos de $\beta + m\alpha$ a $\beta + \alpha^{r+1} - \alpha$ considere os elementos

$$a = \beta + \alpha^{i+1} - \alpha + v_{ij}$$

para $m \leq i < r$ e $0 = v_{i0} < v_{i1} < \dots < v_{i|\alpha^{i+2} - \alpha^{i+1}|} < \alpha^{i+2} - \alpha^{i+1}$. Para vermos que estão em $K^\circ + K^\circ$ note que se $m \leq i < r$ então $0 < \alpha^{i+2} - \alpha^{i+1} < \alpha$ portanto $\beta - \alpha + v_{ij} \in A_1 \subset K^\circ$ e, como $\alpha^{i+1} \in S^\circ \subset K^\circ$, segue a afirmação.


 Figura 3 – Caminho de $\beta + m\alpha$ a $\beta + \alpha^{r+1} - \alpha + u$

Para irmos de $\beta + \alpha^{r+1} - \alpha$ a $2\beta - \alpha$ primeiro escreva $\beta = \alpha^{r+1} + u$, observe que $0 \leq u < \alpha$, e considere

$$a = \beta + \alpha^{r+1} - \alpha + u_j$$

para $0 = u_0 < u_1 < \dots < u_{|u|-1} < u$. O raciocínio é semelhante ao anterior para que estejam em $K^\circ + K^\circ$ e, com isso, fica demonstrado o Teorema 5.2.1.

5.4 Completando a Demonstração

O fim da demonstração do Lema 4.1.2, e portanto do Teorema 4.2.1, segue essencialmente combinatorial embora ainda vamos estar fazendo a ponte entre o anel e o semigrupo.

Primeiro denote por e_ℓ o vetor unitário encontrado no Lema 5.3.1 tal que $c_{|\alpha|-1} = \beta + \alpha - e_\ell$ e tome $\sigma := \beta - e_\ell - e_\kappa$ de modo que $\sigma > \beta - \alpha$ e $\delta := \beta - \sigma + e_\ell$. Note que $|\delta| = 3$. Vamos mostrar que

$$t^{-\alpha}\mathcal{C}_P^2/t^{-\delta}\mathcal{C}_P^2 = \overline{H^0(\omega)^2 \cap t^{-\alpha}\mathcal{C}_P^2}. \quad (5.13)$$

È imediato que $2\beta - \delta = 2\sigma + e_\kappa$. Considere então o conjunto

$$B_1 := \{a \in \mathbb{N}^s \mid 2\beta - \alpha \leq a \leq 2\sigma\},$$

temos que

$$B_1 \subset A_1 + A_1,$$

logo vale (5.13) e obtemos o item (i) do Lema 4.1.2 para $n = 2$.

Agora mostraremos que se (ii) ou (iii) vale então

$$t^{-\delta}\mathcal{C}_P^2/t^{-\epsilon}\mathcal{C}_P^2 = \overline{H^0(\omega)^2 \cap t^{-\alpha}\mathcal{C}_P^2}. \quad (5.14)$$

Se vale (ii) então temos que $\beta \in v_P(H^0(\omega))$. Considere então o conjunto

$$B_2 := \{a \in \mathbb{N}^s \mid 2\beta - \delta \leq a < 2\beta \text{ and } |2\beta - a| > 1\},$$

como $B_2 \subset A_1 + \beta$ segue que (5.14) vale se (ii) valer.

Se (iii) vale, ou seja, se $\beta + \nu \in v_P(H^0(\omega))$ com $|\nu| = 1$ or 2 então mostra-se que

$$\{a \in \mathbb{N}^s \mid 2\beta - \alpha \leq a < 2\beta \text{ and } 0 < |2\beta - a| \leq 1\} \subset A_1 + \beta + \nu$$

e temos (5.14) em ambos os casos pois, similarmente ao caso anterior, $\beta + \nu \in v_P(H^0(\omega))$. E obtemos o Lema 4.1.2 para $n = 2$ por meio de (5.7), (5.13) e (5.14).

Vamos mostrar agora para $n = 3$. Tome a sequencia

$$\beta = b_{|\beta|} < b_{|\beta|+1} < \dots < b_{2|\beta|-5} < b_{2|\beta|-4} = 2\sigma \quad (5.15)$$

tal que $|b_i| = i$ e note que toda ela está em $K^\circ + K^\circ$. Então a sequência

$$2\sigma + e_\kappa = \beta - e_\ell + \sigma < b_{|\beta|} + \sigma < b_{|\beta|+1} + \sigma < \dots < b_{2|\beta|-4} + \sigma = 3\sigma \quad (5.16)$$

está contida em $K^\circ + K^\circ + K^\circ$ pois σ e $\beta - e_\ell$ estão em K° . Denote por $\delta' = 2(\beta - \sigma) + e_\ell$, temos que

$$3\beta - \delta' = 3\sigma + e_\kappa.$$

A união das sequencias (5.15) e (5.16) nos dá $\mathcal{C}_P/t^{-\delta'}\mathcal{C}_P^3 = \overline{H^0(\omega)^3} \cap \mathcal{C}_P$. Além disso,

$$|\delta'| = 2|\beta - \sigma| + |e_\ell| = 2 \times 2 + 1 = 5$$

e portanto (i) está provado para $n = 3$.

Para provar (i) no caso de um n qualquer assumamos que podemos obter uma sequencia

$$\beta = b_{|\beta|} < b_{|\beta|+1} < \dots < b_{(n-1)|\beta|-(2(n-1)-1)-1} = (n-1)\sigma \quad (5.17)$$

tal que $|b_i| = i$ e $b_i \in (n-1)K^\circ$. Agora, se $n \geq 4$ adicione σ aos últimos $|\beta| - 2$ elementos de (5.17) e tome a união desta sequencia com (5.17) formando uma nova sequencia ligando β a $n\sigma$. Como $\sigma \in K^\circ$ todos os elementos estão em nK° e então provamos por indução que $\mathcal{C}_P/t^{-\epsilon}\mathcal{C}_P^n = \overline{H^0(\omega)^n} \cap \mathcal{C}_P$ para $\epsilon = (n-1)(\beta - \sigma) + e_\ell$. Como

$$|\epsilon| = (n-1)|\beta - \sigma| + |e_\ell| = (n-1) \times 2 + 1 = 2n - 1$$

temos o Lema 4.1.2.(i) para todo n . Para obtermos (ii) e (iii) o argumento é similar trocando σ por β .

6 Maximalidade com Condutor Fixo

Neste capítulo apresentaremos uma demonstração alternativa do Teorema de Max Noether. Ela valerá para toda curva cujos pontos não-Gorenstein ou são quase-Gorenstein ou são birramificados no pior dos casos. O capítulo mescla a abordagem extrínseca com características locais que os pontos possam ter. O ganho seria uma prova mais simples, a menos de resultados herdados da Álgebra Comutativa. E o interesse, mais do que a prova em si, é o link do resultado de Noether com uma propriedade conhecida, e desejável, da teoria de anéis locais unidimensionais, a saber, a *maximalidade com condutor fixo* como veremos na sequência.

Na verdade, não é propriamente que a prova só vale no caso até birramificado, mas sim que ela depende de um resultado já provado neste caso e aberto em geral. E aqui até enfraquecemos as hipóteses de uma possível generalização que nos possa ser útil.

6.1 Demonstração

Esta seção se baseia fortemente em [7] e [8] que tratam de anéis unidimensionais reduzidos e analiticamente não ramificados com (possivelmente) vários primos minimais o que, claramente, foge ao nosso interesse, mas o leitor habituado verá que em tudo o que se refere a dimensões relativas e propriedades inerentes de anéis, módulos e ideais fracionários, que é o caso aqui, nada se perde se adotamos a convenção a seguir. Desta forma todo o material desenvolvido no Capítulo 1 se aplica perfeitamente neste.

Convenção 6.1.1. *Para o que se segue, um anel local A é um domínio local cujo corpo de frações $K(A)$ é um corpo de funções algébricas em uma variável sobre um corpo de escalares k . O exemplo típico é o anel local de uma curva integral que é o nosso caso.*

Começamos introduzindo o conceito principal do capítulo.

Definição 6.1.1. *Seja A um anel local e $K(A)$ seu corpo de frações. E seja também \bar{A} o fecho inteiro de A em $K(A)$. Dizemos que A é maximal com condutor fixo se para todo anel T tal que $A \subsetneq T \subset \bar{A}$, dito um sobreanel de A , temos que a seguinte inclusão de condutores é estrita*

$$(T : \bar{A}) \subsetneq (A : \bar{A}).$$

Para as definições de condutor e resultados correlatos ver a Seção 1.1.1.

Abaixo apresentamos o resultado que nos possibilita conectar o tema central deste trabalho com um campo de pesquisa da Álgebra Comutativa. Sua prova pode ser encontrada em [8, Thm. 4.6, Cor 4.7]. Para enunciá-lo, e adaptando a linguagem para o nosso caso, definimos como *ramo* de um anel local A (o ideal primo de) um anel local R que seja regular (ou equivalentemente normal) tal que $A \subset R \subset K(A)$. A linguagem é herdada da geometria de curvas

algebróides singulares onde os ramos correspondem a suas componentes irredutíveis. No nosso caso de uma curva irredutível C singular em P , os ramos de seu anel local são os primos correspondentes aos pontos de \overline{C} que projetam sobre P . Pedimos ao leitor que também recorde as definições e resultados da Seção 1.1.2.

Teorema 6.1.2 (Barucci, D’Anna, Fröberg). *Seja A um anel local com ideal maximal \mathfrak{m} tal que A/\mathfrak{m} é algebricamente fechado. Suponha que A possui no máximo dois ramos. Então A é maximal com condutor fixo se, e somente se, A é Gorenstein ou Kunz.*

O que nos permite ir adiante é que, pela Definição/Lema 1.1.9.3.(ii), temos que todo anel Kunz é quase-Gorenstein. Por outro lado, já vimos pelo Teorema 3.3.3 que, é possível obter uma prova geométrica da afirmação de Noether para toda curva com no máximo um ponto não-Gorenstein cujo anel local é quase-Gorenstein, que são as curvas nearly Gorenstein. Mesclando estes dois fatos com o resultado acima, pode-se pensar em uma prova independente no caso até birramificado que é o que faremos a seguir, para tal usamos o seguinte lema.

Lema 6.1.3. *Seja A um anel local e K o ideal canônico de $v(A)$. Seja também T um anel tal que $A \subsetneq T \subset \overline{A}$. Então*

$$v(T) \subset K \iff (A : \overline{A}) = (T : \overline{A})$$

Demonstração. Ver [8, Lem 4.1.]

□

E agora estamos aptos a provar o seguinte resultado.

Teorema 6.1.4. *Suponha que maximal com condutor fixo implica quase-Gorenstein para anéis locais com até s ramos. Então vale a afirmação de Noether para curvas cujos pontos não-Gorenstein têm até s ramos. Em particular esta é válida para $s \leq 2$.*

Demonstração. Começamos comentando o enunciado, o “em particular” segue do Teorema 6.1.2 provado apenas para $s \leq 2$ pois, neste caso, Kunz implica quase-Gorenstein. Pelo que sabemos o resultado geral para s arbitrário está em aberto. Por outro lado, repare que exigimos menos de sua generalização para obter o que queremos pois, como vimos, Kunz é mais forte que quase-Gorenstein.

E agora provamos o resultado. Seja C uma curva, $P \in C$ um ponto não-Gorenstein e \mathcal{O}_P o seu anel local. Se \mathcal{O}_P é maximal com condutor fixo então, por hipótese, é quase Gorenstein.

Considere então a curva $C^\#$ obtida resolvendo todas as singularidades não Gorenstein distintas de P . Por construção temos um morfismo birracional $C^\# \rightarrow C$, então podemos identificar $k(C^\#) = k(C)$ e tomarmos

$$H^0(\omega^\#) \subset H^0(\omega) \tag{6.1}$$

onde $\omega^\#$ é o dualizante de $C^\#$.

Agora utilize a mesma diferencial λ , usada para C até aqui, para mergulhar $\omega^\#$ em \mathcal{K} . Por [27, Lems. 2.8 e 6.1], temos que $\omega_P^\#$ é determinado pelo condutor do anel local, mas $\mathcal{O}_{C^\#,P} = \mathcal{O}_{C,P}$ por construção, logo

$$\omega_P^\# = \omega_P. \quad (6.2)$$

Por outro lado, $C^\#$ tem apenas um ponto não-Gorenstein e que é quase-Gorenstein. Segue que $C^\#$ é nearly Gorenstein e satisfaz a afirmação de Noether pelo Teorema 3.3.3. Agora, repare o leitor que pela demonstração do Teorema 4.2.1, pode-se ver que o Lema 4.1.2 não é apenas suficiente para se obter a igualdade $H^0(\omega)^\# = H^0(\omega^\#)$ (que prova o teorema); ele é também necessário. Logo o lema é válido para $C^\#$ e temos, por (6.1) e (6.2), a seguinte relação

$$H^0(\omega)^\# \supset H^0(\omega^\#) \longrightarrow (\omega_P^\#)^n / t^{-\epsilon} \mathcal{C}_P^n = \omega_P^n / t^{-\epsilon} \mathcal{C}_P^n \quad (6.3)$$

onde a aplicação do meio é sobrejetiva, pois $C^\#$ satisfaz Noether, e onde ϵ é como no Lema 4.1.2.

Então vamos à prova. Tome $P \in C$ não-Gorenstein, se \mathcal{O}_P é maximal com condutor fixo, pelo que foi dito acima, temos (6.3) que é o que queremos. Do contrário existe, \mathcal{O}_P^* tal que

$$\mathcal{O}_P \subsetneq \mathcal{O}_P^* \subset \overline{\mathcal{O}}_P$$

e, por outro lado,

$$\mathcal{C}_P^* := (\mathcal{O}_P^* : \overline{\mathcal{O}}_P) = (\mathcal{O}_P : \overline{\mathcal{O}}_P) = \mathcal{C}_P$$

Então podem acontecer três coisas:

- (I) \mathcal{O}_P^* é local e maximal com condutor fixo;
- (II) \mathcal{O}_P^* é semilocal;
- (III) \mathcal{O}_P^* é local, mas não é maximal com condutor fixo.

Se vale (I) então considere a, única a menos de isomorfismo, dessingularização parcial C^* de C com morfismo $\phi^* : C^* \rightarrow C$ satisfazendo as seguintes propriedades:

- (i) existe um único ponto $P^* \in C^*$ com $\phi^*(P^*) = P$;
- (ii) $\mathcal{O}_{C^*,P^*} = \mathcal{O}_P^*$;
- (iii) $C^* \setminus \{P^*\} \cong C \setminus \{P\}$.

Como $\mathcal{C}_{P^*} = \mathcal{C}_P^* = \mathcal{C}_P$ aplica-se o mesmo raciocínio inicial trocando C por C^* até chegarmos em (6.3).

Se vale (II), do Lema 6.1.3, temos que $v_P(\mathcal{O}_P^*) \subset \mathbb{K}$, mas se \mathcal{O}_P^* não é local temos que $v_P(\mathcal{O}_P^*)$ tem algum elemento com componente nula, em particular \mathbb{K} tem algum elemento com componente nula, mas a obtenção dos mapas sobrejetivos que queremos é imediata neste caso, como observado em um comentário que aparece na prova de [11, Lema 3.1].

E, por fim, se vale (III) considere C^* e P^* como definidos em (I). Troque C por C^* e P por P^* e recomece o processo, que naturalmente termina pois $\dim(\overline{\mathcal{O}}_P/\mathcal{O}_P) < \infty$. \square

6.2 Equivalências

Terminamos o trabalho apresentando uma caracterização, no fundo, de hipereliticidade, que já aparece em [11], e cuja prova depende da generalização de Max Noether. Para tal, recordamos os conceitos de índice de Clifford e cohomologia de Koszul.

Seja \mathcal{F} um feixe livre de torção de posto 1 em C . De acordo com [5, p. 363 Dfn. 2.2 (7)], introduzimos o índice de Clifford de C como:

$$\text{Cliff}(C) = \min\{\deg \mathcal{F} - 2(h^0(\mathcal{F}) - 1); h^0(\mathcal{F}) \geq 2 \text{ e } h^1(\mathcal{F}) \geq 2\}.$$

De acordo com [1, 20], considere o complexo

$$\wedge^{p+1} H^0(\mathcal{F}) \otimes H^0(\mathcal{F}^{q-1}) \xrightarrow{\phi_{p,q}^1} \wedge^p H^0(\mathcal{F}) \otimes H^0(\mathcal{F}^q) \xrightarrow{\phi_{p,q}^2} \wedge^{p-1} H^0(\mathcal{F}) \otimes H^0(\mathcal{F}^{q+1}). \quad (6.4)$$

O quociente

$$K_{p,q}(C, \mathcal{F}) := \ker(\phi_{p,q}^2) / \text{im}(\phi_{p,q}^1)$$

é a (p, q) -ésima cohomologia de Koszul de \mathcal{F} .

Relembremos a conjectura de Green para curvas suaves [20]:

$$K_{p,2}(C, \omega) = 0 \Leftrightarrow p < \text{Cliff}(C).$$

Ela foi provada para curvas regulares em geral por C. Voisin em [44, 45] e também para uma classe de curvas singulares como pode ser visto em [6, 18].

O interessante é que se costuma dizer, no caso suave, que a conjectura para $p = 0$ corresponde precisamente ao resultado de Noether. Na verdade isto pode ser estendido até o caso Gorenstein, no máximo, como veremos.

De fato, tomando $p = 0$, $q = 2$ e $\mathcal{F} = \omega$ em (6.4) temos

$$H^0(\omega) \otimes H^0(\omega) \xrightarrow{\phi_{0,2}^1} H^0(\omega^2) \longrightarrow 0$$

Dizer que $K_{0,2} = 0$ equivale então a dizer que $\phi_{0,2}^1$ é sobrejetiva, ou seja, Noether para $n = 2$. Mas vimos no capítulo anterior que se temos a afirmação para $n = 2$ deduz-se desta as sobrejetividades de ordem superior imediatamente.

Por outro lado, em [15, App] prova-se que $\text{Cliff}(C) = 0$ se, e somente se, C é hiperelítica ou tem um único ponto singular e ideal maximal coincide com o condutor e, além disso, é racional. Tais curvas (mesmo não-rationais) com esta propriedade aparecem muito na literatura. Há quem as chame de “curvas de Serre”, que as tratava por “curvas definidas por um módulo”. Em [27, Thm. 3.4] são ditas *nearly normals* e caracterizadas geometricamente no caso em que são racionais. Como tais curvas são necessariamente não-Gorenstein, temos de incluí-las na equivalência se quisermos generalizar a conjectura de Green para $p = 0$ e C integral. Na verdade podemos ampliar as equivalências, como no resultado abaixo que fecha este trabalho, e completa as que ainda dependiam de birramificidade. A primeira delas (i) \Leftrightarrow (ii) corresponde ao resultado de Rosenlicht [36, Thm. 17]; as outras foram comentadas acima.

Teorema 6.2.1. *São equivalentes:*

- (i) C é não hiperelíptica;
- (ii) Existe um morfismo birracional $C' \rightarrow C$;
- (iii) Os mapas $\text{Sym}^n H^0(\omega) \rightarrow H^0(\omega^n)$ são sobrejetivos;
- (iv) $K_{0,2}(C, \omega) = 0$;
- (v) $\text{Cliff}(C) > 0$ ou C é racional nearly normal.

References

- [1] M. Aprodu and G. Farkas. Koszul cohomology and applications to moduli. *Clay Math. Proc.*, 14:25–50, 2011.
- [2] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths, and J. Harris. *Geometry of Algebraic Curves*. Number v. 1 in Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer New York, 2013.
- [3] E. Arbarello and E. Sernesi. Petri’s approach to the study of the ideal associated to a special divisor. *Inventiones mathematicae*, 49(2):99–119, 1978.
- [4] D. Babbage. A note on the quadrics through a canonical curve. *Journal of the London Mathematical Society*, 1(4):310–315, 1939.
- [5] E. Ballico. Brill–noether theory for rank 1 torsion free sheaves on singular projective curves. *J. Korean Math. Soc.*, 37:359–369, 2000.
- [6] E. Ballico, C. Fontanari, and L. Tasin. Koszul cohomology and singular curves. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 59(1):121–125, 2010.
- [7] V. Barucci, M. D’Anna, and R. Fröberg. Analytically unramified one-dimensional semilocal rings and their value semigroups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 147(3):215–254, 2000.
- [8] V. Barucci, M. D’Anna, and R. Fröberg. The semigroup of values of a one-dimensional local ring with two minimal primes. *Communications in Algebra*, 28(8):3607–3633, 2000.
- [9] V. Barucci and R. Fröberg. One-dimensional almost gorenstein rings. *Journal of Algebra*, 188(2):418–442, 1997.
- [10] F. Catanese. Pluricanonical—gorenstein—curves. In *Enumerative geometry and classical algebraic geometry*, pages 51–95. Springer, 1982.
- [11] A. Contiero, L. Feital, and R. V. Martins. Max noether’s theorem for integral curves. *Journal of Algebra*, 494:111–136, 2018.
- [12] A. Contiero and K.-O. Stöhr. Upper bounds for the dimension of moduli spaces of curves with symmetric weierstrass semigroups. *Journal of the London Mathematical Society*, 88(2):580–598, 2013.
- [13] M. D’Anna. The canonical module of a one-dimensional reduced local ring. *Communications in Algebra*, 25(9):2939–2965, 1997.

-
- [14] P. Deligne and D. Mumford. The irreducibility of the space of curves of given genus. *Publications Mathématiques de l'IHES*, 36:75–109, 1969.
- [15] D. Eisenbud, J. Koh, and M. Stillman. Determinantal equations for curves of high degree. *American Journal of Mathematics*, 110(3):513–539, 1988.
- [16] F. Enriques. Sulle curve canoniche di genere p dello spazio $ap-1$ dimensioni. *Rend. Accad. Sci. Ist. Bologna*, 23:80–82, 1919.
- [17] L. Feital. *Gonalidade e o teorema de Max Noether para curvas não-Gorenstein*. PhD thesis, UFMG, 2013.
- [18] M. Franciosi and E. Tenni. Green's conjecture for binary curves. *arXiv preprint arXiv:1402.5780*, 2014.
- [19] T. Fujita. On hyperelliptic polarized varieties. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 35(1):1–44, 1983.
- [20] M. Green. Koszul cohomology and the geometry of projective varieties. *J. Differential Geometry*, 19:125–171, 1984.
- [21] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2000.
- [22] R. Hartshorne et al. Generalized divisors on gorenstein curves and a theorem of noether. *J. Math. Kyoto Univ*, 26(3):375–386, 1986.
- [23] J. Herzog and E. Kunz. *Der kanonische modul eines Cohen-Macaulay-rings*, volume 238. Springer-Verlag, 2006.
- [24] M. A. I.G. Macdonald. *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company.
- [25] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, and B. Saint-Donat. *Toroidal embeddings 1*, volume 339. Springer, 2006.
- [26] K. Kiyek and J. L. Vicente. *Resolution of curve and surface singularities in characteristic zero*, volume 4. Springer Science & Business Media, 2012.
- [27] S. L. Kleiman and R. V. Martins. The canonical model of a singular curve. *Geometriae Dedicata*, 139(1):139–166, 2009.
- [28] Q. Liu. *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*. Oxford University Press, 2002.
- [29] R. Martins. A generalization of max noether's theorem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 140(2):377–391, 2012.
- [30] H. Matsumura. *Commutative ring theory*. Number 8. Cambridge university press, 1989.
- [31] D. Mumford. *Curves and their Jacobians*. University of Michigan Press, c1975, 1975.

-
- [32] M. Noether. Ueber die invariante darstellung algebraischer functionen. *Mathematische Annalen*, 17(2):263–284, 1880.
- [33] K. Petri. Über die invariante darstellung algebraischer funktionen einer veränderlichen. *Mathematische Annalen*, 88(3-4):242–289, 1923.
- [34] R. Rosa and K.-O. Stöhr. Trigonal gorenstein curves. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 174(2):187–205, 2002.
- [35] J. C. Rosales and P. A. García-Sánchez. *Finitely generated commutative monoids*. Nova Publishers, 1999.
- [36] M. Rosenlicht. Equivalence relations on algebraic curves. *Annals of Mathematics*, pages 169–191, 1952.
- [37] B. Saint-Donat. On petri’s analysis of the linear system of quadrics through a canonical curve. *Mathematische Annalen*, 206(2):157–175, 1973.
- [38] F. Sakai. Canonical models of complements of stable curves. In *Proc. int. Symp. on algebraic geometry, Kyoto*, pages 643–661, 1977.
- [39] I. C. Serban. One-dimensional local rings and canonical ideals. *PhD thesis, Universita di Roma “La Sapienza”, Dip. di Matematica*, 2006.
- [40] V. V. Shokurov. The noether–enriques theorem on canonical curves. *Matematicheskii Sbornik*, 128(3):367–408, 1971.
- [41] K.-O. Stöhr. On the poles of regular differentials of singular curves. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática*, 24(1):105–136, 1993.
- [42] K.-O. Stöhr and P. Viana. A variant of petri’s analysis of the canonical ideal of an algebraic curve. *manuscripta mathematica*, 61(2):223–248, 1988.
- [43] R. Vakil. The rising sea: Foundations of algebraic geometry. *preprint*, 2017.
- [44] C. Voisin. Green’s generic syzygy conjecture for curves of even genus lying on a k3 surface. *Journal of the European Mathematical Society*, 4(4):363–404, 2002.
- [45] C. Voisin. Green’s canonical syzygy conjecture for generic curves of odd genus. *Compositio Mathematica*, 141(5):1163–1190, 2005.