

# Gonalidade e Modelos Canônicos de Curvas Racionais Unicuspidais

Naamã Galdino da Silva Neris

Belo Horizonte, Julho de 2021

Universidade Federal de Minas Gerais  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

Gonalidade e Modelos Canônicos de  
Curvas Racionais Unicuspidais

por

Naamã Galdino da Silva Neris

Orientador: Prof. Dr. Renato Vidal da Silva Martins

Belo Horizonte 2021

Este exemplar corresponde à redação final  
da tese defendida por **Naamã Galdino da Silva Neris**.

Belo Horizonte, Julho de 2021.

**Prof. Dr. Renato Vidal da Silva Martins.**

*Orientador*

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Arturo Fernandez Perez - UFMG.
- Prof. Dr. Cícero Fernandes de Carvalho - UFF.
- Profa. Dra. Danielle Franco Nicolau - UFV.
- Prof. Dr. Ethan Guy Cotterill - UFF.
- Prof. Dr. Marcelo Escudeiro Hernandes - UEM.
- Prof. Dr. Renato Vidal Martins - UFMG.

Tese apresentada ao  
Instituto de Ciências Exatas, **ICEx**,  
como requisito parcial para obtenção do título de  
**Doutor em Matemática.**

Neris, Naamã Galdino da Silva.

N446g      Gonalidade e modelos canônicos de curvas racionais unicuspiais [manuscrito] / Naamã Galdino da Silva Neris – 2021.  
v, 57 f. il.

Orientador: Renato Vidal da Silva Martins.  
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.  
Referências: f.55-57

1. Matemática – Teses. 2. Modelo canônico – Teses.  
3. Geometria algébrica Teses. I. Vidal da Silva. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51 (043)

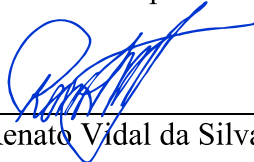



FOLHA DE APROVAÇÃO

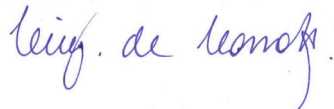
*Gonalidade e Modelos Canônicos de Curvas  
Racionais Unicuspidais*


**NAAMÃ GALDINO DA SILVA NERIS**

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

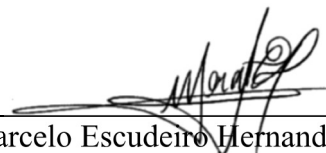
  
\_\_\_\_\_  
Prof. Renato Vidal da Silva Martins  
UFMG

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Arturo Ulises Fernandez Perez  
UFMG

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Cícero Carvalho  
UFF

  
\_\_\_\_\_  
Profa. Danielle Franco Nicolau  
UFV

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Ethan Cotterill  
UFF

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Marcelo Escudeiro Hernandez  
UEM

Belo Horizonte, 29 de julho de 2021.

À minha família.

# Agradecimentos

À Deus, em primeiro lugar, por fazer de um sonho se tornar realidade. Desde muito novo, sabia que era isso que eu queria, mas achava que era impossível. Por isso, todo o meu agradecimento à Deus, pois sem a sua ajuda, nada disso seria possível;

Aos meus pais, Nalberto e Márcia, pelo carinho, confiança, apoio e inúmeras orações endereçadas a mim;

Aos meus irmãos, Naara e Naason, pelas orações e apoio incondicional;

Aos meus familiares que me apoiaram, oraram e torceram por mim;

Às irmãs de fé, Alice e Eliana Meireles, pela amizade, orações e pelas palavras de conforto nos momentos difíceis;

Aos irmãos de fé tanto da minha cidade, Americano do Brasil, quanto de Juiz de fora, bairro Sts Dumond, e de Belo Horizonte, bairro Serrano, e as irmãs do grupo de oração, agradeço à todos pelas orações.

Aos colegas e amigos de doutorado, pela amizade, conhecimento compartilhado e companheirismo nessa jornada. Em especial, à Sarah Mazzini, Edson Gagliardi e Gilson Filho;

À minha amiga Giovanna Arelis e seu esposo Cristian Loli pela ajuda na construção das superfícies a qual enriqueceram esse trabalho;

Ao meu orientador Renato Vidal da Silva Martins, por ter me orientado e por compartilhar comigo um pouco dos seus conhecimentos. Sou grato, pela sua atenção e comprometimento com esse trabalho;

Aos professores Arturo Perez, Cícero Carvalho, Danielle Nicolau, Ethan Cotterill e Marcelo Hernandez, pela participação na banca. Agradeço pela leitura minuciosa, pelas sugestões e comentários;

Aos Professores e Funcionários do Departamento de Matemática da UFMG, pela forma competente e dedicada com que atuaram;

À Capes, pelo apoio financeiro.

# Resumo

O objetivo principal desse trabalho é o estudo da gonalidade de uma curva  $C$ . Primeiro, no caso em que  $C$  não é isomorfa a seu modelo canônico  $C'$ , ou equivalentemente, seu feixe dualizante é apenas livre de torção. Trata-se do caso, dito não Gorenstein, onde  $C'$  faz o papel de curva canônica. Classificamos tais curvas até gênero 5, a partir de famílias mais gerais de curvas de gênero arbitrário. No caso acima, também estudamos seu modelo canônico. Na sequência, descrevemos curvas racionais unicuspidais de gênero 5 com singularidades hiperelíticas, em termos de sua gonalidade. Por fim, analisamos uma cota superior deste invariante para curvas unicuspidais Gorenstein.

**Palavras-chave:** gonalidade, modelo canônico, curva não Gorenstein, curva Gorenstein.



# Abstract

The main goal of this work is the study of the gonality of a curve  $C$ . First, in the case where  $C$  is not isomorphic to its canonical model  $C'$ , or equivalently, its dualizing sheaf is just torsion free. This is the case said non Gorenstein, where  $C'$  plays the role of a canonical curve. We classify such curves up to genus 5 by means of more general families of curves of arbitrary genus. In the case above, we also study its canonical model. Afterwards, we describe unicuspidal rational curves of genus 5 with hyperelliptic singularities in terms of its gonality. In conclusion, we analyze an upper bound for this invariant for Gorenstein unicuspidal curves.

**Keywords:** gonality, canonical model, non-Gorenstein curve, Gorenstein curve.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>4</b>
1.1 Sistemas Lineares e Gonalidade . . . . .	5
1.2 Modelo Canônico . . . . .	6
1.3 Semigrupo de Valores . . . . .	8
1.4 Scrolls . . . . .	9
<b>2 Certas Famílias de Curvas Racionais</b>	<b>12</b>
2.1 Singularidades com um bloco de valores . . . . .	12
2.2 Certas singularidades com dois blocos de valores . . . . .	28
<b>3 Gonalidade de Curvas com Singularidades Hiperelíticas</b>	<b>37</b>
3.1 Gonalidade de Curvas de Gênero 5 . . . . .	38
3.2 Gonalidade de Curvas Gorenstein . . . . .	43
3.3 Curvas Bielíticas de Gênero 6 . . . . .	46
<b>4 Curvas Unicuspidais de Gênero até 6</b>	<b>48</b>
4.1 Classificação . . . . .	48
4.2 Modelos Canônicos . . . . .	51
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>54</b>

# Introdução

Além do gênero, a gonalidade é um dos principais invariantes de uma curva. Retas projetivas são caracterizadas por terem gonalidade 1. Curvas hiperelíticas, que constituem um largo ramo de estudo, são aquelas de gonalidade 2. As curvas faltantes na descrição de Enriques e Babbage [4, 14] sobre as que se realizam como interseções de quádricas, são precisamente as trigonais. E a forte relação entre gonalidade e índice de Clifford, por exemplo, conecta o tema com assunto de vasta produção recente, a Conjectura de Green: se  $C$  é uma curva complexa genérica de gênero aritmético  $p_a(C)$ , então

$$\mathcal{K}_{p,1}(C, K_C) = 0 \iff p \geq \frac{p_a(C) - 1}{2},$$

onde  $\mathcal{K}_{p,1}(C, K_C)$  denota o  $(p,1)$ -grupo de cohomologia de Koszul do divisor canônico  $K_C$ . Mais detalhes ver ([2, 16, 36, 37]).

A definição usual, ao menos no caso suave, é a seguinte: a gonalidade de uma curva  $C$  é o menor inteiro  $d$  para o qual existe um recobrimento  $d \rightarrow 1$  de  $C \rightarrow \mathbb{P}^1$ . Alternativamente, usando-se a linguagem de sistemas lineares, gonalidade é o menor  $d$  para o qual  $C$  admite um pencil de grau  $d$ . As definições se equivalem mas frisam aspectos diferentes que, se levados a uma gama mais ampla de curvas, podem divergir consideravelmente, como veremos na sequência.

Quando passamos o tema ao estudo de curvas singulares, as definições começam a variar. Uma dentre as tantas opções é, de certa forma, “herdar” o conceito que já se tem. Por exemplo, em [7], diz-se que uma curva singular é  $d$ -gonal se é limite de curvas suaves que o são. Por outro lado, em [18], a gonalidade de uma curva é definida como sendo a mesma de sua normalização.

Em uma linha oposta, pode-se também aplicar ao caso singular definição semelhante à usada para curvas suaves. Porém, se tal, a equivalência mencionada acima deixa de

existir. De fato, em Coppens [8], mostra-se que sistemas lineares podem admitir pontos de base *não-removíveis*, e logo, nem todo  $g_d^1$  mínimo está associado necessariamente a morfismo. Por exemplo, Rosa e Stöhr em [28] mostram que a regra de um cone corta sempre um  $g_3^1$  em qualquer curva canônica Gorenstein que passe pelo vértice. Porém, não há como removê-lo, do contrário a curva seria hiperelítica (e portanto não canônica).

A razão intrínseca deste fato é a de que a gonalidade-morfismo é realizada por fibrados de linha, ao passo que a gonalidade-pencil por feixes livres de torção de posto 1, conceitos não-equivalentes no caso singular. E é justamente entre as curvas não Gorenstein mais simples, ditas aqui *curvas de Serre*, que vemos o tanto que tais conceitos podem desafinar. Com efeito, tais curvas possuem sempre um  $g_2^1$ , mas o menor grau de recobrimento a  $\mathbb{P}^1$  é  $g + 1$ . Elas aparecem na literatura motivadas por diferentes razões, e portanto, nomes: são ditas *definidas por um módulo* em Serre [29], *particionais* em Behnke-Christophersen [6], *universais* em Steven [30], *nearly normais* em Kleiman-Martins [19] e correspondem às curvas com feixes não-standard realizando a igualdade de Clifford em Eisenbud-Harris-Koh-Stillman [12]. Suas singularidades são as mais triviais, onde ideal maximal e condutor coincidem.

Gonalidade de curvas não Gorenstein mais complexas é assunto ainda pouco explorado na literatura. Em [15], faz-se um estudo de curvas até gênero 5 a partir de uma análise sistemática de todos os semigrupos possíveis para tais singularidades. E esta é a primeira motivação deste trabalho. Se restringirmos os ramos a um único, e a normalização a  $\mathbb{P}^1$ , ou seja, curvas racionais, então fica viável identificar não apenas os semigrupos, mas todas as curvas de gênero fixo a menos de isomorfismo e classificá-las por gonalidade. Fazemos isto para gênero até 6 no Teorema 4.1.1. Na verdade, tal resultado acaba sendo consequência imediata do estudo de dois tipos de famílias de curvas realizados nos Teoremas 2.1.1 e 2.2.1 e, que tomam uma parte considerável deste texto.

Além de gonalidade, também nos interessa a descrição explícita de modelos canônicos em todos os casos, e que aparecem em todos os teoremas supracitados. Isto porque, para uma curva não Gorenstein, são estes os que mais se assemelham à noção de *curva canônica*, ponto fundamental no estudo de pencils. Foram introduzidos por Rosenlicht em [26], e sua conexão com gonalidade é evidente: uma curva é  $d$ -gonal se e somente se seu modelo canônico vive em um scroll  $(d - 1)$ -dimensional. Tal resultado é bastante esmiuçado em Andreotti-Mayer [1], Schreyer [33] e Eisenbud-Harris [13] no caso suave.

Para curvas singulares, Rosa, Stöhr e Viana lidam com o caso Gorenstein e  $d = 3$  em [28, 34], e Nicolau, Marchesi, Martins e Souza com o caso não-Gorenstein em [20, 21].

A segunda motivação deste trabalho é o estudo de singularidades hiperelíticas. Nos baseamos em artigos de Cotterill e Martins, com Feital em [9, 10], e com Lara em [11] que, entre vários assuntos, estudam gonalidade de curvas racionais unicuspidais com singularidades hiperelíticas de gênero 3 e 4. No Teorema 3.1.1, fazemos a análise do caso em que o gênero é 5, no qual nos valemos também da técnica de [11] para a obtenção de condições além da ramificação. Classificamos tais curvas via o morfismo canônico, posto que são Gorenstein, descrevendo à parte o *lugar hiperelítico*. Obtemos que todas as curvas são trigonais computadas por sistema linear livre de pontos de base.

E o terceiro e último objetivo destas páginas é a análise de uma cota para a gonalidade de uma curva em função de seu gênero  $g$ . Do estudo de variedades de sistemas lineares completos em curvas suaves, e o número de Brill-Noether para a sua dimensão esperada, chega-se facilmente a que toda curva regular admite um  $g_d^1$  para  $d \geq g/2 + 1$ . Portanto esta é uma cota superior para a gonalidade. No caso singular, sabe-se pouco sobre tal limite, qualquer que seja a definição adotada. Aqui, observando a prova do Teorema 3.1.1, vemos que a mesma sugere uma cota superior não apenas para curvas com singularidades hiperelíticas de gênero arbitrário, mas sim para toda curva racional Gorenstein unicuspidal. Fazemos tal análise na Seção 3.2. Ela é escrita de forma apenas conjectural e não contém propriamente resultados, mas esperamos que motive estudos futuros sobre o assunto.

Por fim descrevemos brevemente o conteúdo deste trabalho. O Capítulo 1 é todo ele de preliminares, recordando conceitos a serem usados. No Capítulo 2 provamos os Teoremas 2.1.1 e 2.2.1; a demonstração do primeiro é feita de forma discursiva, comentando os obstáculos a medida que aparecem. No Capítulo 3 prova-se o Teorema 3.1.1 e discute-se um limite superior como dito acima. E no Capítulo 4 elencamos uma tabela classificatória à modo de teorema, para todas as curvas possíveis de gênero até 6. Fechamos o trabalho exibindo algumas equações e esboços de superfícies contendo os modelos canônicos de algumas curvas.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos algumas definições e resultados que serão usados ao longo do texto. Inicialmente, seja  $C$  um esquema unidimensional integral e completo, definido sobre um corpo algebricamente fechado  $k$ .

Seja  $g$  o gênero aritmético da curva  $C$  com feixe estrutural  $\mathcal{O}_C$ , ou simplesmente  $\mathcal{O}$ . Se  $\pi : \bar{C} \rightarrow C$  é a normalização, seja  $\bar{\mathcal{O}} := \pi_*(\mathcal{O}_{\bar{C}})$  e  $\mathcal{C} := \mathcal{H}om(\bar{\mathcal{O}}, \mathcal{O})$ , o condutor de  $\bar{\mathcal{O}}$  em  $\mathcal{O}$ . Denotaremos por  $\omega_C$ , ou simplesmente  $\omega$ , o feixe dualizante de  $C$ .

**Definição 1.** Dizemos que uma curva  $C$  de gênero  $g$  é *Gorenstein* se satisfaz as seguintes condições equivalentes:

- (i)  $\dim \bar{\mathcal{O}}_P/\mathcal{O}_P = \dim \mathcal{O}_P/\mathcal{C}_P$  para todo  $P \in C$ ;
- (ii)  $\omega$  é invertível, isto é,  $\omega_P \cong \mathcal{O}_P$  para todo  $P \in C$ ;
- (iii)  $g = 0$  ou existe o morfismo  $\varphi_\omega : C \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ .

Às curvas que não forem Gorenstein nos referimos simplesmente por *não Gorenstein*, o mesmo valendo para os pontos que não satisfazem às igualdades dos itens (i) e (ii).

**Definição 2.** Uma curva  $C$  é dita *hiperelítica* se satisfaz as seguintes condições equivalentes:

- (i) Existe um morfismo de grau 2 de  $C \rightarrow \mathbb{P}^1$ ;
- (ii) Existe um feixe invertível  $\mathcal{F}$  tal que  $\deg \mathcal{F} = h^0(\mathcal{F}) = 2$ .

Curvas hiperelíticas são Gorenstein, como verificado em [26, Teo 17].

## 1.1 Sistemas Lineares e Gonalidade

Nesta seção, abordaremos um dos conceitos mais importantes desse trabalho, que é a definição de gonalidade.

**Definição 3.** Um *sistema linear de dimensão  $r$  em  $C$*  é um conjunto da forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{F}, V) := \{x^{-1}\mathcal{F} \mid x \in V \setminus 0\}$$

em que  $\mathcal{F}$  é um feixe coerente de ideais fracionários em  $C$  e  $V$  é um subespaço vetorial de  $H^0(\mathcal{F})$  de dimensão  $r + 1$ . O *grau* de um sistema linear é o inteiro

$$d := \deg \mathcal{F} := \chi(\mathcal{F}) - \chi(\mathcal{O}).$$

Note, em particular, que se  $\mathcal{O} \subset \mathcal{F}$  então

$$\deg \mathcal{F} = \sum_{P \in C} \dim(\mathcal{F}_P / \mathcal{O}_P).$$

Usaremos a notação  $g_d^r$  para representar um “sistema linear de grau  $d$  e dimensão  $r$ ”. O sistema linear é dito *completo* se  $V = H^0(\mathcal{F})$ , neste caso escrevemos simplesmente  $\mathcal{L} = |\mathcal{F}|$ . Finalmente, a *gonalidade* de  $C$  é o menor  $d$  para o qual existe um  $g_d^1$  em  $C$ , ou equivalentemente, um feixe livre de torção  $\mathcal{F}$  de posto 1 em  $C$  com grau  $d$  e  $h^0(\mathcal{F}) \geq 2$ . Um ponto  $P \in C$  é dito um *ponto de base de  $\mathcal{L}$*  se  $x\mathcal{O}_P \subsetneq \mathcal{F}_P$  para todo  $x \in V$ . Um ponto de base é dito *removível* se  $\mathcal{L}(\mathcal{O}\langle V \rangle, V)$  não possui ponto de base, onde  $\mathcal{O}\langle V \rangle$  é o subfeixe do feixe constante das funções racionais gerado por todas seções de  $V \subset k(C)$ . Então,  $P$  é um ponto de base não removível de  $\mathcal{L}$  se  $\mathcal{F}_P$  não é um  $\mathcal{O}_P$ -módulo livre; em particular,  $P$  é singular no caso afirmativo.

Esta definição difere da definição usual de sistema linear já que se troca feixe invertíveis por feixe livre de torção de posto 1. Esta alteração é necessária por trabalharmos com curvas singulares que podem admitir ponto de base *não-removíveis* (para maiores detalhes ver M. Coppens [8]). Isto foi feito com sucesso por R. Rosa and K.-O. Stöhr em [28] obtendo resultados geométricos para curvas trigonais Gorenstein que se encaixariam perfeitamente com os resultados conhecidos no caso de curvas suaves. À seguir, o exemplo mais simples de uma curva não Gorenstein.

**Exemplo 1.1.1.** Considere a curva  $C := \overline{(t^3, t^4, t^5)} \subset \mathbb{P}^3$ , isto é, a curva dada pelo fecho projetivo de  $\text{Spec } k[t^3, t^4, t^5]$ . Observe que  $C$  está contida no cone

$$S := \{(x : y : z : w) \in \mathbb{P}^3 \mid xz = y^2\}.$$

Considere os pontos  $P := (0 : 0 : 0 : 1)$  e  $Q := (0 : 0 : 1 : 0)$  e as retas em  $S$  dadas por  $L_t := \{(1 : t : t^2 : u) \mid u \in k\} \cup \{P\}$  e  $L_\infty := \{(0 : 0 : 1 : u) \mid u \in k\} \cup \{P\}$ . Temos que  $L_t$  encontra  $C$  em  $P$  e  $P_t = (t^3, t^4, t^5)$  e  $L_\infty$  encontra  $C$  em  $P$  e  $Q$ . Geometricamente, isto é um  $g_2^1$  com ponto de base não-removível. Escreva  $k(C) = k(t)$  e considere o feixe  $\mathcal{F} := \mathcal{O}_C\langle 1, t \rangle$  gerado pelas seções 1 e  $t$ , como um subfeixe do feixe constante de funções racionais  $\mathcal{K}$ . Claramente,  $\mathcal{F}$  é livre de torsão de posto 1, mas não é invertível, pois  $\mathcal{O}_P = k \oplus t^3 \overline{\mathcal{O}}_P$  e  $\mathcal{F}_P = \mathcal{O}_P + t\mathcal{O}_P = k \oplus kt \oplus t^3 \overline{\mathcal{O}}_P$ , que não é um  $\mathcal{O}_P$ -módulo livre. Além disso, afirmamos que o sistema linear  $|\mathcal{O}_C\langle 1, t \rangle|$  é naturalmente associado ao anterior. De fato, temos que

$$\deg_R((t-c)^{-1}\mathcal{F}) = \begin{cases} 1 & \text{se } R = P \\ 1 & \text{se } R = P_c \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \deg_R(\mathcal{F}) = \begin{cases} 1 & \text{se } R = P \\ 1 & \text{se } R = Q \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Logo,  $(t-c)^{-1}\mathcal{F}$  e  $\mathcal{F}$  estão naturalmente associados à  $L_c \cap C$  e  $L_\infty \cap C$  respectivamente. Observe que  $C$  tem gênero 2 e  $\deg(\mathcal{F}) = 2$ . Além disso,  $H^0(\mathcal{F}) = \langle 1, t \rangle$  implica que  $h^0(\mathcal{F}) = 2$ . Em outras palavras,  $\mathcal{F}$  é um mergulho do feixe dualizante  $\omega_C$  em  $\mathcal{K}$  e, portanto, a regra do cone induz justamente o sistema linear canônico de  $C$ . Como  $\mathcal{F}$  não é localmente livre, portanto, não é invertível, então  $C$  é não Gorenstein. De acordo com nossa definição,  $C$  tem gonalidade 2.

## 1.2 Modelo Canônico

Dados um esquema integral  $A$ , uma aplicação  $\varphi : A \rightarrow C$  e um feixe  $\mathcal{G}$  em  $C$ , seja

$$\mathcal{O}_A \mathcal{G} := \varphi^* \mathcal{G} / \text{Torsion}(\varphi^* \mathcal{G}).$$

Dado um feixe coerente  $\mathcal{F}$  em  $C$  seja  $\mathcal{F}^n := \text{Sym}^n \mathcal{F} / \text{Torsion}(\text{Sym}^n \mathcal{F})$ . Se  $\mathcal{F}$  é inver-



tível, então  $\mathcal{F}^n = \mathcal{F}^{\otimes n}$ .

**Definição 4.** Em [26, p 188 top] Rosenlicht mostrou que o sistema linear  $\mathcal{L}(\mathcal{O}_{\overline{C}}\omega, H^0(\omega))$  é livre de pontos de base. Ele considerou então o morfismo  $\kappa : \overline{C} \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$  definido por  $\mathcal{L}$  e chamou  $C' := \kappa(\overline{C})$  o *modelo canônico* de  $C$ . Ele também provou em [26, Teo 17] que se  $C$  é não hiperelítica, o mapa  $\pi : \overline{C} \rightarrow C$  se fatora por  $\pi' : C' \rightarrow C$ .

Em [19, Dfn 4.9] pode-se encontrar outra caracterização de  $C'$ . Seja  $\widehat{C} := \text{Proj}(\oplus \omega^n)$  o blowup de  $C$  ao longo de  $\omega$ . De acordo com o Teorema de Rosenlicht, temos a seguinte sequência de morfismos birracionais

$$\overline{C} \longrightarrow \widehat{C} \longrightarrow C' \longrightarrow C. \quad (1.1)$$

Mas como  $\omega$  é gerado por seções globais, temos que  $C' \cong \widehat{C}$ . Essa caracterização também pode ser vista extrinsecamente. De fato, se  $\widehat{\pi} : \widehat{C} \rightarrow C$  é o morfismo natural, seja  $\widehat{\mathcal{O}} = \widehat{\pi}_*(\mathcal{O}_{\widehat{C}})$  e  $\widehat{\mathcal{O}}\omega := \widehat{\pi}_*(\mathcal{O}_{\widehat{C}}\omega)$ . Então,  $C'$  é a imagem do morfismo  $\widehat{\kappa} : \widehat{C} \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$  definido pelo sistema linear  $\widehat{\mathcal{L}}(\mathcal{O}_{\widehat{C}}\omega, H^0(\omega))$ .

Relacionada às afirmações de Rosenlicht está a afirmação do conhecido Teorema de Max Noether:

$$\varphi : \text{Sym}^n H^0(C, \omega) \rightarrow H^0(C, \omega^n) \quad \text{para } n \geq 1.$$

**Definição 5.** Um ponto  $P \in C$  é chamado *unirramificado* se  $\varphi^{-1}(P)$  consiste em apenas um ponto.

Para uso posterior, enunciamos o seguinte resultado:

**Lema 1.2.1.** *Seja  $P \in C$  um ponto singular unirramificado. Então existe  $\lambda \in H^0(\omega)$  tal que:*

$$(i) \quad \omega_P/\lambda = H^0(\omega)/\lambda + \mathcal{C}_P;$$

$$(ii) \quad v_{\overline{P}}(\lambda) = -\beta.$$

*Demonstração.* O item (i) segue do último parágrafo da prova de [19, Lem. 6.1], enquanto o item (ii) segue de [19, Lem. 2.8].  $\square$

Agora defina  $\overline{\mathcal{O}}\omega := \pi_*(\mathcal{O}_{\overline{C}}\omega)$ . Mergulhe  $\omega$  no feixe constante de funções racionais em  $C$  por meio do  $\lambda$  acima, ou seja, substitua  $\omega$  por  $\omega/\lambda$ . Esse mergulho fornece a seguinte

sequência de inclusões

$$\mathcal{C}_P \subset \mathcal{O}_P \subset \omega_P \subset \widehat{\mathcal{O}}_P = \mathcal{O}'_P \subset \overline{\mathcal{O}}_P \quad (1.2)$$

para todo ponto singular  $P \in C$ , onde  $\mathcal{O}' := \pi'_*(\mathcal{O}_{C'})$ . Observe que (parte de) (1.2) representa uma contraparte local de (1.1).

### 1.3 Semigrupo de Valores

Dado um ponto unirramificado  $P \in C$  e uma função  $x \in k(C)^*$ , seja

$$v_P(x) := v_{\overline{P}}(x) \in \mathbb{Z}$$

em que  $\overline{P}$  são os pontos de  $\overline{C}$  sobre  $P$ . O *semigrupo de valores* de  $P$  é

$$S = S_P := v_{\overline{P}}(\mathcal{O}_P).$$

Como  $\mathcal{O}_P$  é um anel,  $S$  satisfaz as propriedades de semigrupo de valores, a saber:

- (i) se  $a, b \in S$  então  $a + b \in S$
- (ii)  $0 \in S$
- (iii)  $\mathbb{N} \setminus S$  é finito.

Apresentamos também dois elementos de  $S$ , a saber:

$$\alpha = \alpha_P := \min(S \setminus \{0\}) \quad \text{e} \quad \beta = \beta_P := \min(v_{\overline{P}}(\mathcal{C}_P)). \quad (1.3)$$

Para uso posterior vamos definir  $S^* = S^*_P := \{a \in S \mid a \leq \beta\}$ , e  $\delta = \delta_P := \mathbb{N} \setminus S$  que coincide com o grau de singularidade  $P$ , isto é,  $\delta = \dim(\overline{\mathcal{O}}_P/\mathcal{O}_P)$ .

O *número Frobenius* de  $S$  é  $\gamma := \beta - 1$  e um conjunto, cuja importância irá aparecer mais tarde, é definido por

$$K = K_P := \{a \in \mathbb{Z} \mid \gamma - a \notin S\}. \quad (1.4)$$

Definimos também,  $K^\circ = K^\circ_P := \{a \in K \mid a < \beta\}$  e  $S^\circ = S \cap K^\circ$ .

**Definição 6.** Seja  $P \in C$ . Definimos a *multiplicidade* de  $P$  por

$$m_C(P) = \dim(\overline{\mathcal{O}}_P / \mathfrak{m}_P \overline{\mathcal{O}}_P),$$

então  $P$  é singular se sua multiplicidade é pelo menos 2. Dizemos que um ponto  $P$  unirramificado é *monomial* se  $\widehat{\mathcal{O}}_P = k[[t^{n_1}, \dots, t^{n_r}]]$ , onde  $t$  é o parâmetro local em  $\overline{P}$ .

**Exemplo 1.3.1.** Seja  $k$  um corpo de característica zero e

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}^1 &\rightarrow \mathbb{P}^4 \\ (X : Y) &\mapsto (X^4 Y^6 : X^7 Y^3 : X^9 Y : X^{10} : Y^{10}) \end{aligned}$$

e  $C = \varphi(\mathbb{P}^1)$ .  $C$  é uma curva algébrica integral e completa, possui uma única singularidade em  $P = (0 : 0 : 0 : 0 : 1)$  e tem gênero aritmético 5. Tome  $\overline{P} = (0 : 1)$  a pré imagem de  $P$ . Considerando  $x = X/Y$ , temos  $k(\mathbb{P}^1) = k(x)$  e  $\mathcal{O}_{\overline{P}, \mathbb{P}^1} = k[x]_{(x)}$  e como  $\varphi = (x^4 : x^7 : x^9 : x^{10} : 1)$  e, vendo  $k(C)$  em  $k(\mathbb{P}^1)$  segue que

$$\mathcal{O}_{P,C} = k[x^4, x^7, x^9, x^{10}]_{(x^4, x^7, x^9, x^{10})}$$

e que

$$\widehat{\mathcal{O}}_P = k + kx^4 + kx^7 + kx^8 + kx^9 + kx^{10} + kx^{11} + \dots$$

Temos  $g = \delta_P = \dim(\overline{\mathcal{O}}_P / \mathcal{O}_P) = \dim(k[[x]], \mathcal{O}_P) = 5$ . E,

$$S = S_P = v_{\overline{P}}(\mathcal{O}_P) = v_{\overline{P}}(\widehat{\mathcal{O}}_P) \{0, 4, 7, \rightarrow\}$$

Temos  $\alpha = 4$ ,  $\gamma = 6$  e  $K = K_P = \{0, 1, 3, 4, 5, 7, \rightarrow\}$ .

## 1.4 Scrolls

Um *scroll racional normal*  $S := S_{m_1, \dots, m_d} \subset \mathbb{P}^N$  com  $m_1 \leq \dots \leq m_d$ , é uma variedade projetiva de dimensão  $d$  que, depois de uma mudança de coordenadas adequada, é o

conjunto dos pontos  $(x_0 : \dots : x_N) \subset \mathbb{P}^N$  tais que o posto da matriz

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc|ccc} x_0 & x_1 & \dots & x_{m_1-1} & x_{m_1+1} & \dots & x_{m_1+m_2} & \dots & \dots & x_{N-1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{m_1} & x_{m_1+2} & \dots & x_{m_1+m_2+1} & \dots & \dots & x_N \end{array} \right) \quad (1.5)$$

é menor do que 2. Então, em particular,

$$N = e + d - 1 \quad (1.6)$$

onde  $e := m_1 + \dots + m_d$

Note que  $S$  é a união disjunta de  $(d-1)$ -planos determinados por uma escolha (parametrizada) de um ponto em cada uma das  $d$  curvas racionais normais de grau  $m_d$  contidas em espaços complementares em  $\mathbb{P}^N$ . Vamos nos referir a cada um destes  $(d-1)$ -planos como uma *fibra*. Então  $S$  é suave se  $m_1 > 0$ . Através desta descrição geométrica podemos ver que

$$\deg(S) = e \quad (1.7)$$

O scroll  $S$  pode também ser visto naturalmente como a imagem de um fibrado projetivo. De fato, tomando  $\mathcal{E} := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m_d)$ , que tem um morfismo birracional

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow S \subset \mathbb{P}^N$$

definido por  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$ . O morfismo é tal que qualquer fibra de  $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{P}^1$  é levada a uma fibra de  $S$ . O morfismo é um isomorfismo quando  $S$  é suave. Podemos usar, por exemplo, [13, 27] para mais detalhes.

Neste caso, vamos descrever o grupo de Picard do scroll como

$$\text{Pic}(S) = \mathbb{Z}H \oplus \mathbb{Z}F$$

Onde  $F$  é a classe da fibra, e  $H$  é a classe hiperplana. Podemos também computar o anel de Chow como

$$A(S) = \frac{\mathbb{Z}[H, F]}{(F^2, H^{d+1}, H^d F, H^d - eH^{d-1}F)} \quad (1.8)$$

De (1.7) temos as relações

$$H^d = e \quad \text{and} \quad H^{d-1}F = 1 \quad (1.9)$$

A classe canônica em  $S$  é dada por

$$K_S = -dH + (e - 2)F \quad (1.10)$$

De [25, Lem. 3.1, Cor. 3.2], temos também a fórmula

$$h^0(\mathcal{O}_S(aH + bF)) = \begin{cases} (b+1) \binom{a+d-1}{d-1} + e \binom{a+d-1}{d} & \text{se } a \geq 0 \text{ e } b \geq -am_1 \\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases} \quad (1.11)$$

e

$$h^i(\mathcal{O}_S(aH + bF)) = 0 \quad \text{se } i \geq 1, a \geq 0 \text{ e } b \geq -(am_1 + 1) \quad (1.12)$$

# Capítulo 2

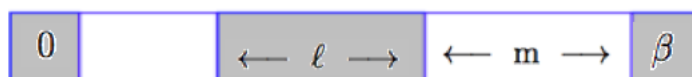
## Certas Famílias de Curvas Racionais

Neste capítulo, provamos alguns resultados relativos a curvas cujas singularidades são de dois tipos prescritos. Elas serão úteis para descrever todas as curvas racionais de gênero no máximo 6 com um único ponto singular não ramificado, o que faremos no último capítulo.

### 2.1 Singularidades com um bloco de valores

Estudaremos agora curvas com singularidades que têm apenas um bloco de valores (consecutivos) em seu semigrupo, além do 0 e do ideal condutor, e não possuem outros valores além destes. Por simplicidade adotaremos a seguinte notação, se  $v = (v_1, \dots, v_r)$  então  $t^v := (t^{v_1} : \dots : t^{v_r})$ .

**Teorema 2.1.1.** *Seja  $C$  uma curva racional com uma única singularidade que é unirramificada com semigrupo  $S^* = \{0, \alpha, \alpha + 1, \dots, \alpha + \ell - 1, \alpha + \ell + m\}$  como descrito abaixo*



Então  $C$  é isomorfa a uma curva da forma:

$$C = \left( F_0 : F_\alpha : \dots : F_{\alpha+\ell-2} : t^{\alpha+\ell-1} : t^v \right) \subset \mathbb{P}^N \quad (2.1)$$

onde

$$F_0 = 1 + a_1 t + \cdots + a_{\ell+m-1} t^{\ell+m-1}$$

$$F_i = t^i + \sum_{j=1}^{m-1} a_{\ell+(i-\alpha+1)(m-1)+j} t^{\alpha+\ell+j-1} \quad \text{para } \alpha \leq i \leq \alpha + \ell - 2$$

$v = (\beta, \dots, 2\alpha - 1, 2\alpha + 2\ell - 1, \dots, \beta + \alpha - 1)$  e  $N = \alpha - \ell + 1$  se  $\ell \leq m$ ,

$v = (\beta, \dots, 2\alpha - 1)$  e  $N = \alpha - m$  se  $\ell > m$ .

Além disso, o modelo canônico de  $C$  dado em termos de seus coeficientes é:

(i) Se  $m = 1$ , então

$$C' = \left( 1 + \sum_{i=1}^{\ell} a_i t^i : t^{\ell+1} : \cdots : t^{\alpha+\ell-1} \right) \subset \mathbb{P}^{g-1}.$$

(ii) Se  $\ell = 1$ , então

$$C' = \left( 1 + \sum_{i=1}^m a_i t^i : h_1 : \cdots : h_{m-1} : t^{m+1} : \cdots : t^{\alpha+m-1} \right) \subset \mathbb{P}^{g-1}$$

onde

$$h_i = \sum_{j=0}^{m-i} a_j t^{i+j} \quad \text{para } 1 \leq i \leq m - 1.$$

(iii) Se  $m = 2$ , então

$$C' = \left( 1 + \sum_{i=1}^{\ell+1} a_i t^i : t + \sum_{i=1}^{\ell} b_{2(\ell-i)+1} t^{i+1} : h_{\ell+2} : \cdots : h_{\alpha+\ell} \right) \subset \mathbb{P}^{g-1}$$

onde

$$h_i = \begin{cases} t^i & \text{para } \ell + 2 \leq i \leq \alpha - 1 \text{ e } i = \alpha + \ell - 1, \alpha + \ell \\ F_i & \text{para } \alpha \leq i \leq \alpha + \ell - 2 \end{cases}$$

e

$$b_{2i-1} = - \sum_{j=0}^{\ell-i} a_j (d_{\ell-i-j+1} + a_{\ell+i+j+1}).$$

com  $d_0 = 1$  e  $d_i = - \sum_{j=1}^i a_j d_{i-j}$ .

Ademais, nos casos (i) e (ii) acima  $C$  é trigonal computada por um  $g_3^1$  com pontos de base, e isso também vale para (iii) se, e somente se,

$$a_{\ell+i} = 0 \quad \text{para } 2 \leq i \leq \ell.$$

Caso contrário,  $C$  é tetragonal computada por um  $g_4^1$  com pontos de base. Ainda, em todos os casos acima, o menor  $d$  para o qual  $C$  admite um  $g_d^1$  livre de pontos de base é  $d = \alpha$ .

*Demonstração.* Começaremos descrevendo a singularidade e então passaremos para uma parametrização global. Seja  $P \in C$  o único ponto singular. Claramente, seu anel local é

$$\mathcal{O}_P = k \oplus kf_1(t) \oplus \cdots \oplus kf_\ell(t) \oplus t^\beta \overline{\mathcal{O}}_P$$

onde  $\beta = \alpha + \ell + m$  é o condutor e  $f_i(t) \in k(t) = k(C)$  são funções racionais tendo ordens em  $S^\circ \setminus \{0\}$ . Este é apenas o fato numérico de que o co-gênero  $\text{lenght}(\overline{\mathcal{O}}_P/\mathcal{O}_P)$  coincide com o número de lacunas do semigrupo. Por outro lado, podemos considerar as séries de potências de cada  $f_i$  e apenas desconsiderar sua parte no ideal do condutor. Após a normalização padrão, obtemos

$$\begin{aligned} f_1(t) &= t^\alpha + b_{1,1}t^{\alpha+\ell} + \cdots + b_{1,m}t^{\beta-1} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ f_\ell(t) &= t^{\alpha+\ell-1} + b_{\ell,1}t^{\alpha+\ell} + \cdots + b_{\ell,m}t^{\beta-1}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Logo, o número de coeficientes livres necessários para descrever a singularidade corresponde ao peso do semigrupo  $w(S) = \sum_{i=1}^g \ell_i - i$ , onde os  $\ell_i$ 's são as lacunas. Aqui, esse número é  $n := \ell m$ .

Para obter uma parametrização global para  $C$ , faremos agora uma breve digressão em nossa estratégia, visando colocar nosso problema em uma estrutura mais ampla. Primeiro, lembre-se de que qualquer curva racional projetiva corresponde à imagem de um morfismo  $\varphi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^N$  de grau, digamos  $d$ , que coincide com o grau da curva no espaço ambiente. Por outro lado, tal morfismo é descrito por um subespaço  $N$ -dimensional das seções globais  $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d))$ . Portanto, uma curva racional pode ser vista como um elemento da Grassmaniana  $\mathbb{G}(N, d)$ . Para obter isto em nosso caso específico, devemos adicionar um



polinômio genérico  $f_0$  de grau  $\beta - 1$  à (2.2). Após nova normalização, obtemos a seguinte matriz de coeficientes

$$\begin{pmatrix} 1 & b_{0,1} & \dots & b_{0,\alpha-1} & 0 & \dots & 0 & b_{0,\alpha+\ell} & \dots & b_{0,\beta-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & b_{1,1} & \dots & b_{1,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & b_{\ell,1} & \dots & b_{\ell,m} \end{pmatrix}$$

Claramente, corresponde a uma célula de Schubert, digamos  $W := W_{S^\circ}$  em  $\mathbb{G}(\ell, \beta - 1)$ . Os pontos de  $W$  são então naturalmente vistos como curvas racionais de grau  $\beta - 1$  em  $\mathbb{P}^\ell$  tendo perfil de ramificação  $\mathbf{k} = (0, \alpha, \dots, \alpha + m - 1)$  no ponto  $P := \varphi(0 : 1)$ , que é singular. Ainda temos, pelo menos, quatro problemas pela frente: (a) uma curva genérica em  $W$  tem gênero maior que o que queremos, ou seja, o co-gênero em  $P$ ; (b) as curvas em  $W$  podem ter outros pontos singulares; (c) gostaríamos de ter tantos parâmetros para descrever  $C$  quanto fazemos para  $P$ ; (d) mesmo assim, a parametrização pode não ser útil para computar gonalidade ou modelos canônicos, como desejamos. Por exemplo, o modelo canônico  $C'$  é uma curva de grau  $\beta - 2$  em  $\mathbb{P}^{g-1}$ , portanto, ficará claro que é melhor se livrar de potências como  $t^{\beta-1}$  na parametrização. Além disso, estamos lidando com curvas não Gorenstein, que não são mergulhadas canonicamente em lugar algum. Em outras palavras, considerar pontos em  $\mathbb{G}(\ell, \beta - 2)$  - o que faremos para curvas (Gorenstein) com singularidades hiperelíticas no capítulo 3 - não é particularmente útil aqui.

A maneira como tratamos os primeiros dois itens é bastante simples. Apenas adicionamos o vetor  $v$ , que aparece no enunciado do teorema, ao perfil de ramificação  $\mathbf{k}$  de  $P$ . Deixamos ao leitor verificar que isso resolve (a) e (b). Em relação à (c), observe que se descartarmos os coeficientes na primeira linha da matriz acima, então os pontos restantes de  $W$  são suficientes para obter todas as curvas tendo uma única singularidade  $P$  com  $\mathcal{O}_P$  como seu anel local. Em outras palavras, qualquer curva no enunciado do teorema é isomorfa à outra da forma

$$C = (1 : f_1 : \dots : f_\ell : t^v). \quad (2.3)$$

Assim, uma curva dessa forma é nosso ponto de partida para abordar (d), o que faremos agora. Para nossos objetivos, é melhor concentrar os coeficientes na primeira componente da curva. Por exemplo, as curvas planas  $(1 + t^3 : t^2 : t^4)$  e  $(1 : t^2 + t^5 : t^4)$  são claramente

isomorfas, mas é um pouco mais fácil de ver que é trigonal no primeiro caso, tomando a seção local  $1/1+t^3$  que produz um divisor cartier de grau 3 no ponto no infinito  $\varphi(0:1)$ . Quanto mais complicada é a curva, mais a diferença é notada. Por outro lado, se desperdiçarmos todos os nossos coeficientes na primeira componente, podemos esquecer algumas das curvas como (2.3) acima. O que faremos é um equilíbrio entre essas duas políticas. Na verdade, esta é a motivação por trás da parametrização que consideramos no teorema. Então, vamos provar que qualquer escolha dos  $a_j$ , como no enunciado do teorema, produz uma curva como (2.3) e, reciprocamente, os  $b_{i,j}$  determinam uma curva como (2.1). Em primeiro lugar, observe que as dimensões do espaço de parâmetros coincidem. De fato, em (2.1) temos  $(\ell + m - 1) + (\ell - 1)(m - 1) = \ell m$  coeficientes livres como desejados. Então, defina

$$f_i^* := \frac{F_{\alpha-i}}{F_0} = \frac{t^{\alpha+i-1} + \sum_{j=1}^{m-1} a_{\ell+i(m-1)+j} t^{\alpha+\ell+j-1}}{1 + a_1 t + \cdots + a_{\ell+m-1} t^{\ell+m-1}} \quad \text{para } 1 \leq i \leq \ell - 1 \quad (2.4)$$

e  $f_\ell^* := t^{\alpha+\ell-1}/F_0$ . Escreva  $1/F_0 = \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k$  com  $d_0 = 1$ ,  $d_j = -\sum_{k=1}^j a_k d_{j-k}$  e  $a_i = 0$  para  $i \geq \ell + m$ . Substituindo em (2.4) e desenvolvendo, obtemos

$$f_i^* = \sum_{k=0}^{\ell-i} d_k t^{\alpha+i+k-1} + \sum_{r=0}^{m-2} \left( d_{\ell-i+r+1} + \sum_{k=0}^r d_k a_{\ell+i(m-1)+r-k+1} \right) t^{\alpha+\ell+r} \quad (2.5)$$

$$+ \left( d_{\ell+m-i} + \sum_{k=1}^{m-1} d_k a_{\ell+i(m-1)+m-k} \right) t^{\beta-1} + t^\beta h_i$$

e  $f_\ell^* = t^{\alpha+\ell-1} + \sum_{k=1}^m d_k t^{\alpha+\ell+k-1} + t^\beta h_\ell$ . Definindo  $\bar{f}_i := f_i^* + \sum_{s=1}^{\ell-i} a_s f_{i+s}^*$  temos

$$\bar{f}_i = f_i^* + \sum_{s=1}^{\ell-i} \sum_{k=0}^{\ell-i-s} a_s d_k t^{\alpha+i+s+k-1}$$

$$+ \sum_{r=0}^{m-2} \left( \sum_{s=1}^{\ell-i} a_s \left( d_{\ell-(i+s)+r+1} + \sum_{k=0}^r d_k a_{\ell+(i+s)(m-1)+r-k+1} \right) \right) t^{\alpha+\ell+r}$$

$$+ \left( \sum_{s=1}^{\ell-i} a_s \left( d_{\ell+m-(i+s)} + \sum_{k=1}^{m-1} d_k a_{\ell+(i+s)(m-1)+m-k} \right) \right) t^{\beta-1} + t^\beta g_i$$

onde  $g_i \in \bar{\mathcal{O}}_P$ . Agora, note que

$$\sum_{k=0}^{\ell-i} d_k t^{\alpha+i+k-1} + \sum_{s=1}^{\ell-i} \sum_{k=0}^{\ell-i-s} a_s d_k t^{\alpha+i+s+k-1} = t^{\alpha+i-1}$$

que nos dá

$$\begin{aligned} \bar{f}_i = t^{\alpha+i-1} + \sum_{r=0}^{m-2} \left( \sum_{s=0}^{\ell-i} a_s \left( d_{\ell-(i+s)+r+1} + \sum_{k=0}^r d_k a_{\ell+(i+s)(m-1)+r-k+1} \right) \right) t^{\alpha+\ell+r} \\ + \left( \sum_{s=0}^{\ell-i} a_s \left( d_{\ell+m-(i+s)} + \sum_{k=1}^{m-1} d_k a_{\ell+(i+s)(m-1)+m-k} \right) \right) t^{\beta-1} + t^\beta h_i \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde  $h_i \in \overline{\mathcal{O}}_P$ . Então, iniciando dos  $f_i^*$ 's, que descrevem o anel local, obtemos os  $\bar{f}_i$ 's  $\in \mathcal{O}_P$ , que agora estão na mesma forma dos  $f_i$ 's. Logo, comparando (2.2) e (2.6), podemos tomar

$$\begin{aligned} b_{i,j} &= \sum_{s=0}^{\ell-i} a_s \left( d_{\ell-i+j-s} + \sum_{k=0}^{j-1} d_k a_{\ell+(i+s)(m-1)+j-k} \right) \quad \text{para } 1 \leq i \leq \ell-1, 1 \leq j \leq m-1 \\ b_{i,m} &= \sum_{s=0}^{\ell-i} a_s \left( d_{\ell+m-i-s} + \sum_{k=1}^{m-1} d_k a_{\ell+(i+s)(m-1)+m-k} \right) \quad \text{para } 1 \leq i \leq \ell-1 \\ b_{\ell,j} &= d_j \quad \text{para } 1 \leq j \leq m \end{aligned}$$

Mostraremos que os  $a_k$ 's são unicamente determinados em termos dos  $b_{i,j}$ 's, de forma que nossa escolha de parametrização contemple todas as curvas possíveis que satisfaçam o enunciado do teorema. De fato, procedendo por indução em  $j$  nas equações envolvendo  $b_{\ell,j}$ , obtemos  $a_j = -\sum_{k=1}^{j-1} a_k d_{jk} - b_{\ell,j}$ , para  $1 \leq j \leq m$ . Similarmente, um pouco mais complicado, para qualquer  $i$  fixo, pode-se usar indução em  $j$  no par de igualdades envolvendo  $b_{i,j}$  afim de obter, para  $1 \leq j \leq m$ ,

$$\begin{aligned} a_{\ell+i(m-1)+j} &= b_{i,j} - d_{\ell-i+j} - \sum_{k=1}^{j-1} d_k a_{\ell+i(m-1)+j-k} \\ &\quad - \sum_{s=1}^{\ell-i} a_s \left( d_{\ell-i+j-s} - \sum_{k=0}^{j-1} d_k a_{\ell+(i+s)(m-1)+j-k} \right) \\ a_{\ell+m-i} &= -b_{i,m} - \sum_{k=1}^{\ell+m-i-1} a_k d_{\ell+m-i-k} + \sum_{k=1}^{m-1} d_k a_{\ell+i(m-1)+m-k} \\ &\quad + \sum_{s=1}^{\ell-i} a_s \left( d_{\ell+m-i-s} + \sum_{k=1}^{m-1} d_k a_{\ell+(i+s)(m-1)+m-k} \right) \end{aligned}$$

e terminamos com a descrição da curva.

Já estamos prontos para discutir a gonalidade da curva, que é o objetivo principal deste trabalho, pois tal análise, embora relacionada, não depende das equações do modelo

canônico. Para começar, fixamos a notação. Para o restante,  $P$  será sempre o único ponto singular de  $C$ . Denotamos  $\bar{P} \in \bar{C} = \mathbb{P}^1$  a pré-imagem de  $P$  sob o mapa de normalização  $\pi : \mathbb{P}^1 \rightarrow C$ . Escreva  $k(C) = k(t)$  e  $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  de modo que  $t$  seja a função identidade à uma distância finita e  $\bar{P} = 0$ . Em particular,  $t$  é um parâmetro local em  $\bar{P}$ . Isso dá uma descrição totalmente intrínseca de  $C$  que bate perfeitamente com aquela enunciada no teorema, no sentido de que o parâmetro  $t$  é o mesmo, ou seja, o anel local "abstrato" do ponto singular se lê

$$\mathcal{O}_P = k \oplus k \frac{F_\alpha(t)}{F_0(t)} \oplus \cdots \oplus k \frac{F_{\alpha+\ell-2}(t)}{F_0(t)} \oplus k \frac{t^{\alpha+\ell-1}}{F_0(t)} \oplus t^\beta \bar{\mathcal{O}}_P.$$

Também fazemos a convenção de que  $Q$  sempre denotará o ponto de  $C$  no "infinito", ou seja,  $Q := \pi(\infty)$  de acordo com a nossa convenção. Apenas alertamos o leitor para não fazer confusão com os pontos de  $C$  que se encontram no "hiperplano no infinito" em  $\mathbb{P}^N$ , ou seja, as imagens sob  $\varphi$  das raízes de  $F_0$ .

Agora, seja  $\mathcal{K}$  o feixe constante de funções racionais de  $C$  e  $\mathcal{F}$  um feixe tal que

$$\mathcal{O}_C \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{K} \tag{2.7}$$

onde as inclusões são lidas como subfeixes. Claramente,  $\mathcal{F}$  é um feixe livre de torção de posto 1 em  $C$ , e reciprocamente, qualquer feixe  $\mathcal{F}$  pode ser mergulhado em  $\mathcal{K}$  como em (2.7). Além disso, qualquer feixe de  $C$  elegível para computar sua gonalidade deve ser gerado por seções globais. Portanto, adotamos a seguinte notação: dado um conjunto finito de funções racionais  $f_1(t), \dots, f_s(t) \in k(t) = k(C)$ , o feixe  $\mathcal{F} = \mathcal{O}_C \langle f_1, \dots, f_s \rangle$  representa o subfeixe de  $\mathcal{K}$  gerado pelas seções globais  $f_i$ , ou seja, o stalk em cada  $R \in C$  é  $\mathcal{F}_R := f_1(t)\mathcal{O}_R + \cdots + f_s(t)\mathcal{O}_R$ .

Além de ser gerado globalmente, qualquer pencil que computa a gonalidade de uma curva também deve ser completo. De fato, seja  $\mathcal{F}$  um feixe que define um tal, digamos, pencil de grau  $d$ . Escolha qualquer ponto regular  $R \in C$  e considere a sequência

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(-R) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}/\mathcal{F}(-R) \longrightarrow 0.$$

Tomando característica de Euler temos

$$(h^0(\mathcal{F}) - h^0(\mathcal{F}(-R))) + (h^1(\mathcal{F}(-R)) - h^1(\mathcal{F})) = 1.$$

Agora, as duas parcelas são não negativas; além disso,  $h^0(\mathcal{F}) \geq 2$  e também temos que  $h^0(\mathcal{F}(-R)) \leq 1$  porque este feixe é de grau  $d - 1$  e a gonalidade de  $C$  é  $d$ . Assim,  $h^0(\mathcal{F}) = 2$  como desejado.

Portanto, se  $\mathcal{F}$  computa gonalidade, então ele tem pelo menos duas seções globais independentes que devem gerá-la. Então, podemos escrever  $\mathcal{F} = \mathcal{O}_C\langle 1, z \rangle$  onde  $z = t^r f/h$  e  $f, h \in k[t]$  sem fatores em comum e não tendo zero como raiz. Primeiro, podemos assumir que  $r \geq 0$ , ou seja,  $z$  não tem polo em  $P$ . De fato, como nossa preocupação é gonalidade, estamos principalmente interessados em  $\deg(\mathcal{F})$ . Mas note que  $\deg(x\mathcal{F}) = \deg(\mathcal{F})$  para qualquer  $x \in k(C)$ , portanto, podemos passar para  $z^{-1}\mathcal{F} = \mathcal{O}_C\langle 1, z^{-1} \rangle$  se  $r < 0$ . Podemos ainda assumir  $r > 0$  apenas substituindo  $z$  por  $z - z(0)$  se necessário.

O próximo passo é ver como computar o grau de tal feixe. Como visto anteriormente,  $\deg(\mathcal{F}) = \sum_{R \in C} \text{length}(\mathcal{F}_R/\mathcal{O}_R)$ . Mas o comprimento local pode ser computado da seguinte forma

$$\deg_R(\mathcal{F}) := \text{length}(\mathcal{F}_R/\mathcal{O}_R) = \dim_k((\mathcal{O}_R + f/h \cdot \mathcal{O}_R)/\mathcal{O}_R).$$

Primeiro, cuidamos dos pontos regulares. Escrevendo  $h = (t - c_1)^{m_1} \dots (t - c_l)^{m_l}$  temos

$$\deg_R(\mathcal{F}) = \begin{cases} m_i & \text{se } R = \pi(c_i) \\ 0 & \text{se } R \in C \setminus \{P, \pi(c_1), \dots, \pi(c_l)\} \\ \max\{0, r + \deg(f) - \deg(h)\} & \text{se } R = Q \end{cases}$$

Então, temos a seguinte fórmula

$$\deg_{C \setminus P}(\mathcal{F}) = \deg(h) + \max\{0, r + \deg(f) - \deg(h)\}. \quad (2.8)$$

Em relação ao ponto singular, definindo  $D := v_{\bar{P}}(\mathcal{F}_P) \setminus S$  temos

$$\deg_P(\mathcal{F}) = \#D. \quad (2.9)$$

Desse modo, estudemos nossos casos (i), (ii) e (iii), onde  $m = 1$ ,  $\ell = 1$  e  $m = 2$ , respectivamente. Começamos pelo último, que é um pouco mais difícil, pois não temos um candidato natural e teremos que analisar todos os feixes elegíveis possíveis para computar a gonalidade. Também começamos por sistemas lineares com um ponto de base removível ou, equivalentemente, por feixes que não são localmente livres. Então, suponha que  $\deg(\mathcal{F}) = 3$  e  $\mathcal{F}$  não seja um fibrado. Assim  $\deg_P(\mathcal{F}) \geq 1$  pois, caso contrário,  $\mathcal{F}_P = \mathcal{O}_P$  e  $\mathcal{F}$  estaria livre. Logo, temos que  $\deg_{C \setminus P}(\mathcal{F}) \leq 2$ . Daí,  $r + \deg(f) \leq 2$  devido à (2.8) e, por isso,  $r \leq 2$ . Se  $r = 2$  note que  $\{2, \beta - 1\} \in D$  desde que  $m = 2$ , então  $\deg_P(\mathcal{F}) \geq 2$ . Portanto,  $\deg_{C \setminus P}(\mathcal{F}) \leq 1$  e todas as possibilidades são excluídas por (2.8).

Se  $r = 1$ , então  $\deg_P(\mathcal{F}) \geq 2$ , assim  $\deg_{C \setminus P}(\mathcal{F}) \leq 1$ . De (2.8) obtemos  $\deg(f) = 0$ ,  $\deg(h) \leq 1$  e  $\deg_{C \setminus P} \mathcal{F} = 1$ . Portanto,  $\deg_P(\mathcal{F}) = 2$ . Agora,  $\{1, \beta - 2\} \subset D$  se  $r = 1$  e vale a igualdade se, e somente se,  $\beta - 1 = \alpha + \ell + 1 \notin D$ . Então, temos que analisar quando essa propriedade é válida. Para verificar isso, escreva  $z = t/(at + b)$  com  $b \neq 0$ . Nesse caso, um elemento geral em  $\mathcal{F}_P$  é da forma

$$f = \sum_{i \in S^\circ} \left( c_i + d_i \frac{t}{at + b} \right) \begin{pmatrix} f_i \\ f_0 \end{pmatrix} + t^\beta u$$

onde  $u \in \overline{\mathcal{O}}_P$ . Definindo  $p(t) := 1/(at + b)f_0$  e lembrando que  $m = 2$  podemos escrever

$$\begin{aligned} f = p(t) & \left[ c_0 b + \sum_{i=1}^{\ell+1} \left( c_0 (a a_{i-1} + b a_i) + a_{i-1} c_1 \right) t^i \right. \\ & + a_{\ell+1} (a c_0 + c_1) t^{\ell+2} + b c_\alpha t^\alpha + \sum_{i=\alpha+1}^{\alpha+\ell-1} \left( d_{i-1} + b c_i + a c_{i-1} \right) t^i \\ & + \left( d_{\alpha+\ell-1} + a c_{\alpha+\ell-1} + \sum_{i=\alpha}^{\alpha+\ell-2} \left( b a_{\ell+i-\alpha+2} c_i \right) \right) t^{\alpha+\ell} \\ & \left. + \left( \sum_{i=\alpha}^{\alpha+\ell-2} a_{\ell+i-\alpha+2} (d_i + a c_i) \right) t^{\alpha+\ell+1} \right] + t^\beta q(t). \end{aligned}$$

Agora, suponha que  $v_{\overline{P}}(f) = \alpha + \ell + 1$ . Como  $v_{\overline{P}}(p) = 0$ , devemos eliminar todos os coeficientes acima, exceto o último. Do anulamento de todos os coeficientes até  $t^{\alpha+\ell-1}$  obtemos  $c_0 = c_1 = c_\alpha = 0$ ,  $d_\alpha = -b c_{\alpha+1}$  e

$$d_{\alpha+i-1} = -b c_{\alpha+i} - a c_{\alpha+i-1} \quad \text{para } 2 \leq i \leq \ell - 1. \quad (2.10)$$

Eliminando  $t^{\alpha+\ell}$  temos

$$d_{\alpha+\ell-1} = -ac_{\alpha+\ell-1} - \sum_{i=\alpha}^{\alpha+\ell-2} ba_{\ell+i-\alpha+2}c_i. \quad (2.11)$$

Então, agora

$$f = \left( \sum_{i=\alpha}^{\alpha+\ell-2} a_{\ell+i-\alpha+2}(d_i + ac_i) \right) t^{\alpha+\ell+1} + \dots = \left( - \sum_{i=\alpha+1}^{\alpha+\ell-1} ba_{\ell+i-\alpha+1}c_i \right) t^{\alpha+\ell+1} + \dots$$

onde a segunda igualdade vem de (2.10) e (2.11). Como  $b \neq 0$  e os  $c_i$ 's são arbitrários, vemos que  $\alpha + \ell + 1 \notin D$  se, e somente se,

$$a_{\ell+i-\alpha+1} = 0 \quad \text{para } \alpha + 1 \leq i \leq \alpha + \ell - 1. \quad (2.12)$$

Portanto, apenas neste caso  $\mathcal{F}$  tem realmente grau 3 e  $C$  é trigonal computado por um  $g_3^1$  com pontos de base. Caso contrário,  $C$  é tetragonal computado pelo mesmo feixe.

Agora, vamos abordar a gonalidade nos casos (i) e (ii). Construa o feixe  $\mathcal{F} := \mathcal{O}_C\langle 1, t \rangle$ . Claramente,  $\{1, \alpha + \ell\} \subset D$ . Afirmamos que a inclusão é uma igualdade em ambos os casos. De fato, isso é imediato se  $m = 1$ . Por outro lado, se  $\ell = 1$ , escreva um elemento geral de  $\mathcal{F}_P$  como

$$f = c_0 + c_1t + c_2 \frac{f_\alpha}{f_0} + c_3 \frac{tf_\alpha}{f_0} + t^\beta h$$

onde  $h \in \overline{\mathcal{O}}_P$ . Se também escrevermos  $f_\alpha/f_0 = t^\alpha + dt^{\alpha+1} + \dots$ , obtemos

$$f = c_0 + c_1t + c_2t^\alpha + (c_2d + c_3)t^{\alpha+1} + \dots$$

Se  $v_{\overline{P}}(f) \geq \alpha + 2$ , então  $c_0 = c_1 = c_2 = c_3 = 0$  e assim,  $v_{\overline{P}}(f) \geq \beta$ . Logo,  $D = \{1, \alpha + 1\}$  como desejado. Portanto, em ambos os casos,  $\deg_P(\mathcal{F}) = \#D = 2$ . Agora,  $\mathcal{F}$  tem grau 1 em  $Q$  e 0 no conjunto aberto  $U := C \setminus \{P, Q\}$ , então seu grau total é 3. Assim,  $C$  é trigonal computado por um  $g_3^1$  com pontos de base se as condições de (i) ou (ii) se aplicarem.

Finalmente, estudamos a gonalidade relativa apenas à pencil livre de pontos de base ou, equivalentemente, feixes localmente livres. Afirmamos que qualquer  $C$  conforme

enunciado no teorema, sempre admite um  $g_\alpha^1$  livre de pontos de base. De fato, defina

$$f(t) := \frac{t^\alpha}{h(t)} := \frac{t^\alpha}{b_0 + b_1 t + \cdots + b_{\ell+m-1} t^{\ell+m-1}}$$

com

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{para } i = 0 \\ a_i & \text{para } 1 \leq i \leq \ell - 1 \\ a_i - \sum_{j=\ell}^i a_{m+j} b_{i-j} & \text{para } \ell \leq i \leq \ell + m - 2 \\ a_i - \sum_{j=1}^{m-1} a_{j+\ell+m-1} b_{m-j} & \text{para } i = \ell + m - 1 \end{cases}$$

Pode-se verificar que

$$f(t) = \frac{t^\alpha + \sum_{j=1}^{m-1} a_{j+\ell+m-1} t^{\alpha+j+\ell-1}}{1 + a_1 t + \cdots + a_{\ell+m-1} t^{\ell+m-1}} + t^\beta q(t) = \frac{F_\alpha}{F_0} + t^\beta q(t) \in \mathcal{O}_P$$

onde  $q(t) \in \overline{\mathcal{O}}_P$ . Agora, defina  $\mathcal{F} := \mathcal{O}_C \langle 1, f(t) \rangle$ . Note que  $\deg_P(\mathcal{F}) = 0$  pois  $f(t) \in \mathcal{O}_P$ . Por outro lado,  $\ell + m - 1 \leq \alpha$ , caso contrário, encontra-se  $s$  e  $\beta - s - 1$  ambos em  $S$  o que nunca acontece. Portanto,  $\deg(h(t)) \leq \alpha$ . Usando (2.8) obtemos

$$\deg_{C \setminus P} = \deg(h(t)) + \max\{0, \alpha - \deg(h(t))\} = \alpha.$$

Por construção,  $\mathcal{F}$  é localmente livre, então induz um  $g_\alpha^1$  livre de pontos de base em  $C$ .

Agora, provamos que  $\alpha$  é o menor  $d$  para o qual  $C$  admite um  $g_d^1$  livre de pontos de base. Então, suponha que  $d$  seja o menor grau tal que exista um fibrado de linha  $\mathcal{F}$  tal que  $h^0(\mathcal{F}) \geq 2$ . Podemos fazer três suposições em  $\mathcal{F}$ . Primeiro,  $\mathcal{F}$  é gerado globalmente, pois o feixe gerado por suas seções globais também é localmente livre. Além disso,  $h^0(\mathcal{F}) = 2$  porque podemos usar aqui o mesmo argumento acima que mostra que um pencil que computa gonalgidade é completo, apenas observando que se  $\mathcal{F}$  é um fibrado, então  $\mathcal{F}(-R)$  também é. E, finalmente, podemos ainda assumir que  $\mathcal{F}_P = \mathcal{O}_P$ . De fato, como  $\mathcal{F}$  é localmente livre, então  $\mathcal{F}_P = w\mathcal{O}_P$  para algum  $w \in k(C)$ ; daí, substitui-se  $\mathcal{F}$  por  $w^{-1}\mathcal{F}$  se necessário. Portanto, podemos escrever  $\mathcal{F} = \mathcal{O}_C \langle 1, z \rangle$  com todas as nossas convenções



acima relativas à  $z$  e, também, tal que  $z \in \mathcal{O}_P$  e  $r \geq \alpha$ . Assim, (2.8) e (2.9) nos dá

$$d = \deg(h) + \max\{0, r + \deg(f) - \deg(h)\}. \quad (2.13)$$

Se  $r + \deg(f) - \deg(h) \leq 0$ , então  $d = \deg(h) \geq r + \deg(f) \geq \alpha$ . Caso contrário, temos que  $d = r + \deg(f) \geq \alpha$  e segue a afirmação.

Agora, computemos o modelo canônico de  $C$ . Como visto anteriormente, é a imagem do morfismo  $\kappa : \bar{C} \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$  induzido pela série linear  $\mathcal{L}(\mathcal{O}_{\bar{C}}\omega, H^0(\omega))$ . Mas, no nosso caso, temos que  $\bar{C} = \mathbb{P}^1$ . Assim, mergulhando  $\omega$  em  $\mathcal{K}$  e selecionando  $g$  seções globais independentes, digamos  $\{f_i\}_{i=0}^{g-1} \subset k(t)$ , o modelo canônico se transforma na curva parametrizada  $C' = (f_0 : \cdots : f_{g-1})$ . Nosso trabalho aqui será essencialmente encontrar essas seções.

Primeiro observe que  $\omega$  é caracterizado por ser um feixe livre de torção de posto 1 e grau  $2g - 2$  com pelo menos  $g$  seções globais independentes. De fato, se  $\mathcal{F}$  é um feixe assim, então  $\chi(\mathcal{F}) = g - 1$  já que  $\deg(\mathcal{F}) = 2g - 2$  e portanto,  $h^1(\mathcal{F}) \geq 1$  desde que  $h^0(\mathcal{F}) \geq g$ . Mas, o não anulamento de  $H^1(\mathcal{F})$  fornece uma inclusão  $\mathcal{F} \hookrightarrow \omega$  e esses feixes devem coincidir pois são de mesmo grau.

Agora, veremos como  $\omega$  se comporta localmente. Por [31, Thm. 2.11] existe  $\mu \in \omega_P$  com  $v_{\bar{P}}(\mu) = -p$  se, e somente se,  $p - 1 \notin S$ . Então, mergulhe  $\omega$  em  $\mathcal{K}$  via  $\lambda$  como no Lemma 1.2.1. Como  $v_{\bar{P}}(\lambda) = -\beta$  obtemos

$$v_{\bar{P}}(\omega_P) = \mathbb{K}. \quad (2.14)$$

Por outro lado, pelo Lema 1.2.1.(i) temos

$$\omega_P = H^0(\omega) + \mathcal{C}_P. \quad (2.15)$$

Combinando (2.14) e (2.15) obtemos em nosso caso

$$v_{\bar{P}}(H^0(\omega)) = \mathbb{K}^\circ$$

o que nos dá uma dica de como  $\omega$  deveria ser. Verificaremos  $\mathbb{K}^\circ$  nos três casos.

Para demonstrar (i), sendo  $m = 1$  obtemos

$$K^\circ = \{0, \ell + 1, \dots, \alpha + \ell - 1\}.$$

Com base nisso, considere o espaço vetorial

$$V := \left\langle 1, \frac{t^{\ell+1}}{h_0}, \dots, \frac{t^{\alpha+\ell-1}}{h_0} \right\rangle \subset k(t)$$

onde

$$h_0 = 1 + a_1 t + \dots + a_\ell t^\ell.$$

Queremos que  $V$  coincida com  $H^0(\omega)$ . Então, considere o feixe  $\mathcal{F} := \mathcal{O}_C\langle V \rangle$ . Afirmamos que  $\deg(\mathcal{F}) = 2g - 2$ . De fato, como  $h^0(\mathcal{F}) \geq \dim(V) = \#K^\circ = g$  então  $\mathcal{F} = \omega$  e  $V = H^0(\omega)$  como desejado.

Como  $\ell < \alpha$ , temos que  $\deg_Q(\mathcal{F}) = \alpha + \ell - 1 - \deg(h_0)$ . Por outro lado, temos  $\deg_U(\mathcal{F}) = \deg(h_0)$ . Portanto,  $\deg_{C \setminus \{P\}}(\mathcal{F}) = \alpha + \ell - 1$ . Finalmente, computemos o grau em  $P$ . Para simplificar, dado  $T \subset \mathbb{N}$  defina  $T' := T \cap (0, \beta)$ . Então, escreva

$$\mathcal{O}_P = k \oplus \left( \bigoplus_{i \in S'} k \frac{t^i}{h_0} \right) \oplus \mathcal{C}_P.$$

Como  $\mathcal{F}_P = \mathcal{O}_P\langle V \rangle$  e  $i + j \geq \beta$  para cada  $i \in S'$  e  $j \in K'$  obtemos

$$\mathcal{F}_P = k \oplus \left( \bigoplus_{i \in K'} k \frac{t^i}{h_0} \right) \oplus \mathcal{C}_P.$$

Portanto,  $\deg_P(\mathcal{F}) = \#(K \setminus S) = \alpha - \ell - 1$ . Resumindo, temos

$$\deg(\mathcal{F}) = (\alpha - \ell - 1) + (\alpha + \ell - 1) = 2\alpha - 2.$$

Agora,  $g$  é igual o número de lacunas de  $S$ , que é  $\alpha$ . Portanto,  $\deg(\mathcal{F}) = 2g - 2$  como afirmamos e,  $V = H^0(\omega)$ . Então, obtemos  $C'$  como enunciado em (i).

Para provar (ii), sendo  $\ell = 1$  temos

$$K^\circ = \{0, 1, \dots, m - 1, m + 1, \dots, \alpha + m - 1\}.$$

Com base nisso, considere as funções

$$h_i = \begin{cases} \sum_{j=0}^{m-i} a_j t^{i+j} & \text{para } 0 \leq i \leq m-1 \\ t^i & \text{para } m+1 \leq i \leq \alpha+m-1 \end{cases}$$

e o feixe

$$\mathcal{F} := \mathcal{O}_C \left\langle 1, \frac{h_1}{h_0}, \dots, \frac{h_{m-1}}{h_0}, \frac{t^{m+1}}{h_0}, \dots, \frac{t^{\alpha+m-1}}{h_0} \right\rangle.$$

Como antes, mostraremos que  $\deg(\mathcal{F}) = 2g - 2$ . Por argumentos semelhantes ao caso anterior, obtemos que  $\deg_{C \setminus \{P\}}(\mathcal{F}) = \alpha + m - 1$ . Para calcular o grau em  $P$  escreva

$$\mathcal{F}_P = \left( \bigoplus_{i \in K \cap [0, \alpha]} k \frac{h_i}{h_0} \right) \oplus \left( \sum_{i=\alpha+1}^{\alpha+m-1} k \frac{h_i}{h_0} + \sum_{i=1}^{m-1} k \frac{h_i h_\alpha}{h_0^2} \right) \oplus \mathcal{C}_P \quad (2.16)$$

Agora lembre-se de que se definirmos  $D := v_{\overline{P}}(\mathcal{F}_P) \setminus S$  então o grau local é  $\deg_P(\mathcal{F}) = \#D$ .

Define  $E := K \setminus S = \{1, \dots, \alpha + m - 1\} \setminus \{m, \alpha\}$ . A decomposição acima nos dá

$$E \subset D \subset E \cup \{\alpha + m\}.$$

Afirmamos que  $\alpha + m \notin D$ . De fato, escreva um elemento da segunda parcela acima com ordem menor que  $\beta$  como

$$f = \sum_{i=\alpha+1}^{\alpha+m-1} c_i \frac{t^i}{h_0} + \sum_{i=1}^{m-1} b_i \frac{h_i h_\alpha}{h_0^2} \quad (2.17)$$

e também  $1/h_0^2 = \sum_{j=0}^{\infty} p_j t^j$  com  $p_0 = 1$  e  $p_j = d_j - \sum_{k=1}^j a_k p_{j-k}$ . Então, obtemos

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=\alpha+1}^{\alpha+m-1} \left( \sum_{j=0}^{i-\alpha-1} \left( d_j c_{i-j} + \sum_{k=0}^j a_k p_{j-k} b_{i-j-\alpha} \right) \right) t^i \\ &\quad + \left( \sum_{i=1}^{m-1} \left( d_i c_{\alpha+m-i} + \sum_{j=0}^i a_j p_{i-j} b_{m-i} \right) \right) t^{\alpha+m} + t^\beta h \end{aligned}$$

com  $h \in \overline{\mathcal{O}}_P$ . Eliminando os coeficientes de  $t^{\alpha+i}$  vemos que

$$c_{\alpha+i} = -b_i \quad \text{para } 1 \leq i \leq m-1. \quad (2.18)$$

Usando (2.18) temos que o coeficiente de  $t^{\alpha+m}$  também se anula. Isso implica que  $\alpha + m \notin D$ . Logo,  $E = D$  e assim  $\deg_P(\mathcal{F}) = \alpha + m - 3$  e então

$$\deg(\mathcal{F}) = (\alpha + m - 3) + (\alpha + m - 1) = 2(\alpha + m - 1) - 2.$$

Agora,  $g$  é igual o número de lacunas de  $S$ , que é  $\alpha + m - 1$ . Portanto,  $\deg(\mathcal{F}) = 2g - 2$  como afirmamos. Então, obtemos  $C'$  como enunciado em (ii).

Por fim, para provar (iii), se  $m = 2$  temos

$$K^\circ = \{0, 1, \ell + 2, \dots, \alpha + \ell\}.$$

Com base nisso, considere as funções

$$\begin{aligned} h_0 &= 1 + a_1 t + \dots + a_{\ell+1} t^{\ell+1} \\ h_1 &= t + b_{n-1} t^2 + b_{n-3} t^3 + \dots + b_1 t^{\ell+1} \\ h_i &= \begin{cases} t^i & \text{para } \ell + 2 \leq i \leq \alpha - 1 \text{ e } i = \alpha + \ell - 1, \alpha + \ell \\ F_i & \text{para } \alpha \leq i \leq \alpha + \ell - 2 \end{cases} \end{aligned}$$

onde

$$b_{2i-1} = - \sum_{j=0}^{\ell-i} a_j \left( d_{\ell-i-j+1} + a_{\ell+i+j+1} \right)$$

e o feixe

$$\mathcal{F} := \mathcal{O}_C \left\langle 1, \frac{h_1}{h_0}, \frac{t^{\ell+2}}{h_0}, \dots, \frac{t^{\alpha-1}}{h_0}, \frac{F_\alpha}{h_0}, \dots, \frac{F_{\alpha+\ell-2}}{h_0}, \frac{t^{\alpha+\ell-1}}{h_0}, \frac{t^{\alpha+\ell}}{h_0} \right\rangle.$$

Novamente, mostraremos que  $\deg(\mathcal{F}) = 2g - 2$ . Temos  $\deg_{C \setminus \{P\}}(\mathcal{F}) = \alpha + \ell$  e afirmamos que  $\deg_P(\mathcal{F}) = \alpha - \ell$ . Para calcular o grau em  $P$  escreva

$$\mathcal{F}_P = \left( \bigoplus_{i \in K \cap [0, \alpha]} k \frac{h_i}{h_0} \right) \oplus \left( \sum_{i=\alpha+1}^{\alpha+\ell} k \frac{h_i}{h_0} + \sum_{i=\alpha}^{\alpha+\ell-1} k \frac{h_1 h_i}{h_0^2} \right) \oplus \mathcal{C}_P \quad (2.19)$$

Aqui  $E = \{1\} \cup \{\ell + 2, \dots, \alpha - 1\} \cup \{\alpha + \ell\}$ . A decomposição (2.19) nos dá

$$E \subset D \subset E \cup \{\alpha + \ell + 1\}.$$

Afirmamos  $\alpha + \ell + 1 \notin D$ . De fato, escreva um elemento da segunda parcela acima

com ordem menor que  $\beta$  como

$$f = \sum_{i=\alpha+1}^{\alpha+\ell} c_i \frac{h_i}{h_0} + \sum_{i=\alpha}^{\alpha+\ell-1} b_i \frac{h_1 h_i}{h_0^2} \quad (2.20)$$

e obtemos

$$\begin{aligned} f = & \sum_{i=\alpha+1}^{\alpha+\ell-1} \left( \sum_{j=0}^{i-\alpha-1} \left( d_j c_{i-j} + B_j b_{i-j-1} \right) \right) t^i + \sum_{j=0}^{\ell-1} \left( B_j b_{\alpha+\ell-j-1} + (d_j + a_{2(\ell+1)-j}) c_{\alpha+\ell-j} \right) t^{\alpha+\ell} \\ & + \left( \sum_{j=0}^{\ell-1} \left( B_{j+1} + a_{2\ell-j+1} \right) b_{\alpha+\ell-j-1} + \left( d_{j+1} + d_1 a_{2(\ell+1)-j} \right) c_{\alpha+\ell-j} \right) t^{\alpha+\ell+1} + t^\beta h \end{aligned}$$

com  $h \in \overline{\mathcal{O}}_P$ ,  $B_i = \sum_{j=0}^i p_j b_{2(\ell-i+j)+1}$  e  $b_{2\ell+1} = 1$ .

Note que, para  $f$  tem ordem  $\alpha + \ell + 1$  devemos ter primeiro

$$c_{\alpha+1} = -b_\alpha. \quad (2.21)$$

Continuando com esse processo, vemos que

$$c_{\alpha+i} = -b_{\alpha+i-1} + \sum_{j=1}^{i-2} a_{2\ell-j+1} b_{\alpha+i-j-2} \quad \text{para } 2 \leq i \leq \ell - 1. \quad (2.22)$$

Agora, assumindo o anulamento do coeficiente de  $t^{\alpha+\ell}$  obtemos

$$c_{\alpha+\ell} = -b_{\alpha+\ell-1} - \sum_{j=1}^{\ell-1} \left( B_j b_{\alpha+\ell-j-1} + (d_j + a_{2(\ell+1)-j}) c_{\alpha+\ell-j} \right).$$

Usando (2.21) e (2.22) temos

$$\sum_{j=1}^{\ell-1} \left( B_j b_{\alpha+\ell-j-1} + d_j c_{\alpha+\ell-j} \right) = - \sum_{j=2}^{\ell-1} \left( a_{2(\ell+1)-j} b_{\alpha+\ell-j-1} \right)$$

que nos dá

$$c_{\alpha+\ell} = -b_{\alpha+\ell-1} + \sum_{j=2}^{\ell-1} \left( a_{2(\ell+1)-j} b_{\alpha+\ell-j-1} - a_{2(\ell+1)-j} c_{\alpha+\ell-j} \right). \quad (2.23)$$

Assumindo o anulamento do coeficiente de  $t^{\alpha+\ell+1}$  temos

$$d_1 c_{\alpha+\ell} = -B_1 b_{\alpha+\ell-1} - \sum_{j=1}^{\ell-1} \left( \left( B_{j+1} + a_{2\ell-j+1} \right) b_{\alpha+\ell-j-1} + \left( d_{j+1} + d_1 a_{2(\ell+1)-j} \right) c_{\alpha+\ell-j} \right).$$

Note que

$$\sum_{j=1}^{\ell-1} \left( B_{j+1} b_{\alpha+\ell-j-1} + d_{j+1} c_{\alpha+\ell-j} \right) = - \sum_{j=1}^{\ell-1} \left( a_{2\ell-j+1} b_{\alpha+\ell-j-1} + d_1 a_{2(\ell+1)-j} b_{\alpha+\ell-j-1} \right)$$

que nos fornece

$$d_1 c_{\alpha+\ell} = -B_1 b_{\alpha+\ell-1} + \sum_{j=2}^{\ell-1} d_1 \left( a_{2(\ell+1)-j} b_{\alpha+\ell-j-1} - a_{2(\ell+1)-j} c_{\alpha+\ell-j} \right). \quad (2.24)$$

Finalmente, usando (2.23) em (2.24) concluímos que o coeficiente de  $t^{\alpha+\ell+1}$  se anula. Isso implica que  $\alpha + \ell + 1 \notin D$ . Logo,  $E = D$  e assim  $\deg_P(\mathcal{F}) = \alpha - \ell$  e então

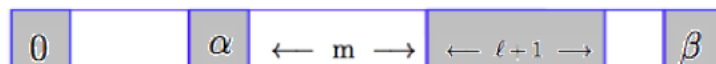
$$\deg(\mathcal{F}) = (\alpha - \ell) + (\alpha + \ell) = 2\alpha.$$

Agora,  $g$  é igual o número de lacunas de  $S$ , que é  $\alpha + 1$ . Portanto,  $\deg(\mathcal{F}) = 2g - 2$  como afirmamos. Então, obtemos  $C'$  como enunciado em (iii).

## 2.2 Certas singularidades com dois blocos de valores

Agora analisamos outra família de curvas singulares e provamos um resultado semelhante ao Teorema 2.1.1. A prova aqui será mais direta pois os argumentos se assemelham. Estudaremos singularidades com dois blocos de valores, mas não todos, apenas aquelas cujo primeiro bloco é um único valor.

**Teorema 2.2.1.** *Seja  $C$  uma curva racional com uma única singularidade que é unirramificada com semigrupo  $S^* = \{0, \alpha, \alpha + m + 1, \dots, \alpha + m + \ell - 1, \alpha + m + \ell + 1\}$  como descrito abaixo*



Então  $C$  é isomorfa a uma curva da forma:

$$C = \left( F_0 : F_\alpha : t^{\alpha+m+1} : \dots : t^{\beta-2} : t^v \right) \subset \mathbb{P}^N \quad (2.25)$$

onde

$$F_0 = 1 + \sum_{i=1}^u a_i t^i \quad e \quad F_\alpha = t^\alpha + \sum_{i=1}^v a_{u+i} t^{\alpha+i}$$

ou

$$F_0 = 1 + \sum_{i=1}^{u-1} a_i t^i + a_u t^n \quad e \quad F_\alpha = t^\alpha + \sum_{i=1}^{v-1} a_{u+i} t^{\alpha+i} + \left( a_v + \sum_{j=1}^{v-1} \left( a_j d_{v-j} - d_j a_{n-j} \right) \right) t^{\alpha+v}$$

com

$$u := \max\{\ell, m+1\}, \quad v := \min\{\ell-1, m\}, \quad n := \ell + m,$$

$$v := (\beta, \dots, 2\alpha + m, 2\alpha + n, \dots, 2(\alpha + m) + 1) \quad e \quad N = \alpha + m - \ell + 2 \quad se \quad \ell \leq m + 1,$$

$$v := (\beta, \dots, 2\alpha + m) \quad e \quad N = \alpha \quad se \quad \ell \geq m + 2.$$

Além disso, o modelo canônico de  $C$  dado em termos de seus coeficientes é:

$$C' = \left( h_0 : h_{n-m} : \dots : h_{n-1} : t^{n+1} : t^{n+2} : \dots : t^{\alpha+n-1} \right) \subset \mathbb{P}^{g-1}$$

onde

$$h_0 = 1 + \sum_{i=1}^u a_i t^i \quad e \quad h_\alpha = t^\alpha + \sum_{i=1}^v a_{u+i} t^{\alpha+i}$$

ou

$$h_0 = 1 + \sum_{i=1}^{u-1} a_i t^i + a_u t^n \quad e \quad h_\alpha = t^\alpha + \sum_{i=1}^{v-1} a_{u+i} t^{\alpha+i} + \left( a_v + \sum_{j=1}^{v-1} \left( a_j d_{v-j} - d_j a_{n-j} \right) \right) t^{\alpha+v}$$

e mais

$$h_i = t^i + \sum_{j=1}^{n-i} e_j t^{i+j} \quad para \quad n - m \leq i \leq n - 1 \setminus \{\alpha\}$$

com

$$e_i = a_i - \sum_{j=1}^v a_{u+j} e_{i-j}.$$

Ainda,  $C$  é trigonal computada por um  $g_3^1$  com pontos de base se, e somente se, o semi-

grupo for da forma  $S^* = \{0, \alpha, \alpha + 2, \alpha + 4\}$ . Caso contrário,  $C$  é tetragonal computada por um  $g_4^1$  com pontos de base. Ademais, o menor  $d$  para o qual  $C$  admite um  $g_4^1$  livre de pontos de base é  $d = \alpha$ .

*Demonstração.* Como feito anteriormente, começamos escrevendo o anel local em  $P$  como

$$\mathcal{O}_P = k \oplus kf_1(t) \oplus \cdots \oplus kf_\ell(t) \oplus t^\beta \overline{\mathcal{O}}_P.$$

Mas, como visto antes, podemos escrever

$$\begin{aligned} f_1(t) &= t^\alpha + b_1 t^{\alpha+1} + \cdots + b_m t^{\alpha+m} + b_{m+1} t^{\beta-1} \\ f_2(t) &= t^{\alpha+m+1} + b_{m+2} t^{\beta-1} \\ &\vdots \\ f_\ell(t) &= t^{\alpha+m+\ell-1} + b_{m+\ell} t^{\beta-1}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Afirmamos que se  $b_v \neq 0$  podemos tomar

$$f_1^* := \frac{F_\alpha}{F_0} = \frac{t^\alpha + \sum_{i=1}^v a_{u+i} t^{\alpha+i}}{1 + a_1 t + \cdots + a_u t^u} \tag{2.27}$$

$$f_i^* := \frac{F_{\alpha+i+m-1}}{F_0} = \frac{t^{\alpha+m+i-1}}{1 + a_1 t + \cdots + a_u t^u} \quad \text{for } 2 \leq i \leq \ell$$

onde  $u = \max\{\ell, m+1\}$  e  $v = \min\{\ell-1, m\}$ . De fato, primeiro observe que o número de coeficientes livres em ambos (2.26) e (2.27) é  $n := m+\ell$ . Agora, escreva  $1/F_0 = \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k$  com  $d_0 = 1$ ,  $d_j = -\sum_{k=1}^j a_k d_{j-k}$  e  $a_i = 0$  para  $i > u$ . Logo, obtemos

$$f_1^* = t^\alpha + \sum_{i=1}^v \left( d_i + \sum_{j=0}^{i-1} d_j a_{u+i-j} \right) t^{\alpha+i} + \sum_{i=v+1}^n \left( d_i + \sum_{j=i-v}^{i-1} d_j a_{u+i-j} \right) t^{\alpha+i} + t^\beta h_1$$

e  $f_i^* = \sum_{j=0}^{\ell-i+1} d_j t^{\alpha+m+i+j-1} + t^\beta h_i$  para  $2 \leq i \leq \ell$  onde  $h_1, h_i \in \overline{\mathcal{O}}_P$ . Escreva

$$f_1^* = t^\alpha + \sum_{i=1}^n A_i t^{\alpha+i} + t^\beta h_1.$$

Definindo  $\bar{f}_1 := f_1^* - \sum_{i=1}^{\ell-1} B_i f_{i+1}^*$  com as seguintes convenções:  $B_1 = A_{m+1}$  e também



$B_i = A_{m+i} - \sum_{j=1}^{i-1} B_j d_{i-j}$  para  $2 \leq i \leq \ell - 1$  temos

$$\bar{f}_1 = t^\alpha + \sum_{i=1}^m A_i t^{\alpha+i} - \sum_{j=\ell}^u a_j A_{n-j} t^{\alpha+n} + t^\beta g_1 \quad (2.28)$$

onde  $g_1 \in \bar{\mathcal{O}}_P$ . Ainda, definindo  $\bar{f}_i := f_i^* + \sum_{j=1}^{\ell-i} a_j f_{i+j}^*$  para  $2 \leq i \leq \ell - 1$  temos

$$\bar{f}_i = t^{\alpha+m+i-1} - a_{\ell-i+1} t^{\alpha+n} + t^\beta g_i, \quad (2.29)$$

onde  $g_i \in \bar{\mathcal{O}}_P$ . Novamente, partindo dos  $f_i^*$ 's, que descrevem o anel local, obtemos os  $\bar{f}_i$ 's  $\in \mathcal{O}_P$ , que agora estão na mesma forma dos  $f_i$ 's. Então, comparando (2.26), (2.28) e (2.29) podemos tomar

$$b_i = \begin{cases} A_i & \text{para } 1 \leq i \leq m \\ -\sum_{j=\ell}^u a_j A_{n-j} & \text{para } i = m+1 \\ -a_{n-i+1} & \text{para } m+2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Note que os  $a_i$ 's são unicamente determinados em termos dos  $b_j$ 's. De fato, temos que

$$a_i = \begin{cases} -b_{n-i+1} & \text{para } 1 \leq i \leq \ell - 1 \\ -b_i + a_{u+i} + \sum_{j=1}^{i-1} (d_j a_{u+i-j} - a_j d_{i-j}) & \text{para } \ell \leq i \leq u - 1 \\ -(b_{m+1} + \sum_{j=\ell}^{u-1} a_j A_{n-j})/b_v & \text{para } i = u \\ b_{i-u} - d_{i-u} - \sum_{j=1}^{i-u-1} d_j a_{i-j} & \text{para } u+1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Observe que se  $n > \alpha$ , então pode existir no máximo uma relação entre os coeficientes além das que vêm do perfil de ramificação da singularidade. Assim, terminamos com a descrição da curva para o caso  $b_v \neq 0$ .

Agora, se  $b_v = 0$  afirmamos que

$$f_1^* := \frac{F_\alpha}{F_0} = \frac{t^\alpha + \sum_{i=1}^v a_{u+i} t^{\alpha+i}}{1 + a_1 t + \cdots + a_{u-1} t^{u-1} + a_u t^n} \quad (2.30)$$

$$f_i^* := \frac{F_{\alpha+i+m-1}}{F_0} = \frac{t^{\alpha+m+i-1}}{1 + a_1 t + \cdots + a_{u-1} t^{u-1} + a_u t^n} \quad \text{para } 2 \leq i \leq \ell.$$

De fato, podemos tomar

$$f_1^* = t^\alpha + \sum_{i=1}^v \left( d_i + \sum_{j=0}^{i-1} d_j a_{u+i-j} \right) t^{\alpha+i} + \sum_{i=v+1}^{n-1} \left( d_i + \sum_{j=i-v}^{i-1} d_j a_{u+i-j} \right) t^{\alpha+i} \\ + \left( d_n + \sum_{i=u}^{n-1} d_j a_{u+n-i} - a_u \right) t^{\beta-1} + t^\beta h_1$$

e  $f_i^* = \sum_{j=0}^{\ell-i+1} d_j t^{\alpha+m+i+j-1} + t^\beta h_i$  para  $2 \leq i \leq \ell$  com  $h_1, h_i \in \overline{\mathcal{O}}_P$ . Escreva

$$f_1^* = t^\alpha + \sum_{i=1}^n A_i t^{\alpha+i} + t^\beta h_1.$$

Definindo  $\bar{f}_1 := f_1^* - \sum_{i=1}^{\ell-1} B_i f_{i+1}^*$  com as mesmas convenções do caso anterior obtemos

$$\bar{f}_1 = t^\alpha + \sum_{i=1}^m A_i t^{\alpha+i} - \left( \sum_{j=n-m}^{u-1} a_j A_{n-j} + a_u \right) t^{\beta-1} + t^\beta g_1 \quad (2.31)$$

onde  $g_1 \in \overline{\mathcal{O}}_P$ . Note que,

$$b_v = d_v + \sum_{j=0}^{v-1} d_j a_{u+v-j} = a_n - a_v + \sum_{j=1}^{v-1} (d_j a_{u+v-j} - a_j d_{v-j}).$$

Como  $b_v = 0$ , então

$$a_n = a_v + \sum_{j=1}^{v-1} (a_j d_{v-j} - d_j a_{n-j}). \quad (2.32)$$

Assim, comparando (2.26), (2.29) e (2.31) podemos tomar

$$b_i = \begin{cases} A_i & \text{para } i = \{1, \dots, m\} \setminus \{v\} \\ -a_u - \sum_{j=n-m}^{u-1} a_j A_{n-j} & \text{para } i = m+1 \\ -a_{n-i+1} & \text{para } m+2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Além disso, determinamos unicamente os  $a_i$ 's em termos dos  $b_j$ 's. De fato, temos

$$a_i = \begin{cases} -b_{n-i+1} & \text{para } 1 \leq i \leq \ell - 1 \\ -b_i + a_{u+i} + \sum_{j=1}^{i-1} (d_j a_{u+i-j} - a_j d_{i-j}) & \text{para } \ell \leq i \leq u - 1 \\ -b_{m+1} - \sum_{j=\ell}^{u-1} a_j A_{n-j} & \text{para } i = u \\ b_{i-u} - d_{i-u} - \sum_{j=1}^{i-u-1} d_j a_{i-j} & \text{para } u + 1 \leq i \leq n - 1 \end{cases}$$

e terminamos com a descrição da curva para o caso  $b_v = 0$ .

Agora, computemos a gonalidade de  $C$  se  $b_v \neq 0$ . Como na prova do teorema anterior, escreva um feixe livre de torção geral de posto 1 como  $\mathcal{F} = \mathcal{O}_C\langle 1, z \rangle$  onde  $z = t^r f/h$ , com  $f, h \in k[t]$  sem raízes em comum e nenhuma delas sendo zero. Além disso, podemos tomar  $r \neq 0$ , e ainda, assumir  $r > 0$ , uma vez que o grau é invariante pela multiplicação por uma função.

Suponha que  $\mathcal{F}$  não é um feixe localmente livre e  $\deg(\mathcal{F}) = 3$ . Então  $\deg_P(\mathcal{F}) \geq 1$  e  $\deg_{C \setminus P}(\mathcal{F}) \leq 2$ . Assim,  $r + \deg(f) \leq 2$  devido à (2.8) e, portanto,  $r \leq 2$ .

Se  $r = 1$  então  $\{1, \alpha + 1, \beta - 1\} \subset D$  que implica  $\deg_P(\mathcal{F}) \geq 3$ . Daí,  $\deg_{C \setminus P}(\mathcal{F}) = 0$  e (2.8) impede este caso.

Se  $r = 2$  e  $\deg_P(\mathcal{F}) \geq 2$ , então  $\deg_{C \setminus P}(\mathcal{F}) \leq 1$  o que não é possível por (2.8).

Se  $r = 2$  e  $\deg_P(\mathcal{F}) = 1$ , o semigrupo deve ser  $S^* = \{0, \alpha, \alpha + 2, \alpha + 4\}$  e

$$C = \left( 1 + a_1 t + a_2 t^2 : t^\alpha + a_3 t^{\alpha+1} : t^{\alpha+2} : t^{\alpha+4} : \dots : t^{2\alpha+3} \right) \subset \mathbb{P}^{\alpha+1}.$$

Afirmamos que tal  $C$  é trigonal. De fato, consideremos o feixe  $\mathcal{F} := \mathcal{O}_C\langle 1, z \rangle$  com  $z = t^2/t^2 + a_3 t + 1$ . Um elemento geral em  $\mathcal{F}_P$  é da forma

$$\begin{aligned} f(t) = & c_0 + c_1 \frac{t^2}{t^2 + a_3 t + 1} + c_2 \frac{t^\alpha + a_3 t^{\alpha+1}}{1 + a_1 t + a_2 t^2} + c_3 \frac{t^{\alpha+2}}{1 + a_1 t + a_2 t^2} \\ & + c_4 \frac{t^{\alpha+2} + a_3 t^{\alpha+3}}{(1 + a_1 t + a_2 t^2)(t^2 + a_3 t + 1)} + t^{\alpha+4} h(t) \end{aligned}$$

com  $h \in \overline{\mathcal{O}}_P$ . Definindo  $p(t) := (1 + a_1t + a_2t^2)(t^2 + a_3t + 1)$ , obtemos

$$\begin{aligned} pf &= c_0 + (a_1 + a_3)c_0t + (c_1 + (a_2 + a_1a_3 + 1)c_0)t^2 \\ &\quad + (a_1c_1 + (a_2a_3 + a_1)c_0)t^3 + (a_2c_1 + a_2c_0)t^4 \\ &\quad + c_2t^\alpha + 2a_3c_2t^{\alpha+1} + (c_4 + c_3 + (a_3^2 + a_3 + 1)c_2)t^{\alpha+2} \\ &\quad + (a_3c_4 + a_3c_3 + a_3c_2)t^{\alpha+3} + t^{\alpha+4}h. \end{aligned}$$

Como  $v_P(1/p) = 0$  podemos nos concentrar no lado direito da igualdade acima para estudar as possíveis ordens de  $f$ . Temos que os valores são  $0, 2, \alpha$  e  $\alpha + 2$  tomando sucessivamente  $c_0 = 0, c_1 = 0, c_2 = 0$  e  $c_4 = -c_3$ . Logo,  $D = \{2\}$  e  $\deg_P(\mathcal{F}) = |D| = 1$ . Por outro lado,  $\deg_{C \setminus P}(\mathcal{F}) = \deg(t^2) = 2$  e então  $\deg(\mathcal{F}) = 3$ . Portanto,  $C$  admite um  $g_3^1$  com pontos de base e é trigonal, pois não é hiperelítico e também quase normal.

Agora se o semigrupo não for da forma  $S^* = \{0, \alpha, \alpha + 2, \alpha + 4\}$  então  $C$  é tetragonal computada por um  $g_4^1$  com pontos de base. Considere  $\mathcal{F} := \mathcal{O}_C\langle 1, t \rangle$ . Note que  $\mathcal{F}$  tem grau 1 em  $Q$ , 0 em  $U$  e afirmamos que tem grau 3 em  $P$ . De fato, é fácil ver que  $v_{\overline{P}}(\mathcal{F}_P) = \{0, 1, \alpha, \alpha + 1, \alpha + m + 1 \rightarrow\}$  e assim  $v_{\overline{P}}(\mathcal{F}_P) \setminus S = \{1, \alpha + 1, \beta - 1\}$  e segue a afirmação. Portanto, nesse caso  $C$  é tetragonal.

Para provar a última afirmação, afirmamos que qualquer  $C$  conforme enunciado no teorema, sempre admite um  $g_\alpha^1$  livre de pontos de base. De fato, defina

$$f(t) := \frac{t^\alpha}{h(t)} := \frac{t^\alpha}{b_0 + b_1t + \dots + b_ut^u}$$

com

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{para } i = 0 \\ a_i - \sum_{j=1}^i a_{u+j}b_{i-j} & \text{para } 1 \leq i \leq v \\ a_i - \sum_{j=1}^v a_{u+j}b_{i-j} & \text{para } v + 1 \leq i \leq u \end{cases}$$

Pode-se verificar que

$$f(t) = \frac{t^\alpha + \sum_{i=1}^v a_{u+i}t^{\alpha+i}}{1 + a_1t + \dots + a_ut^u} + t^\beta q \in \mathcal{O}_P$$

onde  $q \in \overline{\mathcal{O}}_P$ . Agora, defina  $\mathcal{F} := \mathcal{O}_C\langle 1, f(t) \rangle$ . Note que  $\deg_P(\mathcal{F}) = 0$  pois  $f(t) \in \mathcal{O}_P$ .

Por outro lado, como  $m + 1, \ell \leq \alpha$  temos  $u \leq \alpha$  e então  $\deg(h(t)) \leq \alpha$ . Portanto

$$\deg_{C \setminus P} = \deg(h(t)) + \max\{0, \alpha - \deg(h(t))\} = \alpha.$$

Por construção,  $\mathcal{F}$  é localmente livre, então induz um  $g_\alpha^1$  livre de pontos de base em  $C$  e este é o menor  $d$  para o qual  $C$  admite um  $g_\alpha^1$  livre de pontos de base devido à (2.13).

Finalmente, computemos o modelo canônico de  $C$ . Observe que

$$K^\circ = \{0, \ell, \dots, n-1, n+1, \dots, \beta-2\}.$$

Com base nisso, considere as funções se  $b_v \neq 0$ :

$$h_0 = 1 + a_1 t + \dots + a_u t^u$$

$$h_i = \begin{cases} F_\alpha & \text{para } i = \alpha \\ t^i + \sum_{j=1}^{n-i} e_j t^{i+j} & \text{para } i = \{\ell, \dots, n-1\} \setminus \{\alpha\} \\ t^i & \text{para } i = \{n+1, \dots, \beta-2\} \setminus \{\alpha\} \end{cases}$$

onde

$$e_i = a_i - \sum_{j=1}^v a_{u+j} e_{i-j}$$

com  $e_0 = 1$ ,  $e_j = 0$  if  $j < 0$  e o feixe

$$\mathcal{F} := \mathcal{O}_C \left\langle 1, \frac{h_\ell}{h_0}, \dots, \frac{h_{n-1}}{h_0}, \frac{h_{n+1}}{h_0}, \dots, \frac{h_{\beta-2}}{h_0} \right\rangle.$$

Afirmamos  $\deg(\mathcal{F}) = 2g - 2$ . De fato, temos que  $\deg_Q(\mathcal{F}) + \deg_U(\mathcal{F}) = \beta - 2$ ; e afirmamos ainda que  $\deg_P(\mathcal{F}) = \alpha + 2m - n - 1$ . Para calcular o grau em  $P$  escreva

$$\mathcal{F}_P = \left( \bigoplus_{i \in K \cap [0, \alpha]} k \frac{h_i}{h_0} \right) \oplus \left( \sum_{i=n+1}^{\beta-2} k \frac{h_i}{h_0} + \sum_{i=\ell}^{n-1} k \frac{h_i h_\alpha}{h_0^2} \right) \oplus \mathcal{C}_P \quad (2.33)$$

Agora lembre-se de que se definirmos  $D := v_{\overline{P}}(\mathcal{F}) \setminus S$  então o grau local é  $\deg_P(\mathcal{F}) = \#D$ .

Defina  $E = \{\ell, \dots, n-1, n+1, \dots, \beta-3\} \setminus \{\alpha\}$ . A decomposição acima nos dá

$$E \subset D \subset E \cup \{\alpha + n\}.$$

Afirmamos que  $\alpha + n \notin D$ . De fato, escreva um elemento da segunda parcela acima com uma ordem menor que  $\beta$  como

$$f = \sum_{i=n+1}^{\beta-2} c_i \frac{h_i}{h_0} + \sum_{i=\ell}^{n-1} b_i \frac{h_i h_\alpha}{h_0^2} \quad (2.34)$$

e também  $1/h_0^2 = \sum_{j=0}^{\infty} p_j t^j$  com  $p_0 = 1$  e  $p_j = d_j - \sum_{k=1}^j a_k p_{j-k}$ . Então, obtemos

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=n+1}^{\beta-1} \left( \sum_{j=0}^{i-n-1} d_j c_{i-j} \right) t^i + b_\ell t^{\alpha+\ell} + \sum_{i=\ell+1}^{n-1} \left( b_i + \sum_{j=1}^{i-\ell} \left( \sum_{k=0}^j p_k a_{j-k} \right) b_{i-j} \right) t^{\alpha+i} \\ &+ \left( \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=0}^i p_j a_{i-j} \right) b_{n-i} \right) t^{\beta-1} + t^\beta h \end{aligned}$$

com  $h \in \overline{\mathcal{O}}_P$ . Agora, eliminando os coeficientes de  $t^i$  onde  $n+1 \leq i \leq \beta-2$  e  $\ell \leq j \leq n-1$  temos que

$$c_i = \begin{cases} -b_j & \text{se } i = \alpha + j \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.35)$$

Finalmente, usando (2.35) temos que os coeficientes de  $t^{\alpha+n}$  também se anulam. Isso implica que  $\alpha + n \notin D$ . Logo,  $E = D$  e assim  $\deg_P(\mathcal{F}) = \alpha + 2m - n - 1$ . Então,

$$\deg(\mathcal{F}) = (\alpha + n - 1) + (\alpha + 2m - n - 1) = 2(\alpha + m - 1).$$

Portanto,  $\deg(\mathcal{F}) = 2g - 2$  pois  $g = \alpha + m$ , e obtemos  $C'$  como enunciado no teorema.

Agora, se  $b_v = 0$  então toda a análise feita no caso anterior tanto para o cômputo do modelo canônico quanto para a gonalidade é análoga. Basta ver que

$$F_0 = 1 + \sum_{i=1}^{u-1} a_i t^i + a_u t^u \quad \text{e} \quad F_\alpha = t^\alpha + \sum_{i=1}^{v-1} a_{u+i} t^{\alpha+i} + \left( a_v + \sum_{j=1}^{v-1} \left( a_j d_{v-j} - d_j a_{n-j} \right) \right) t^{\alpha+v}$$

e segue o resultado. □

## Capítulo 3

# Gonalidade de Curvas com Singularidades Hiperelíticas

Neste capítulo, estudamos a gonalidade de curvas racionais com singularidades hiperelíticas. Conseguimos a estratificação completa por gonalidade do espaço de curvas racionais com cúspides hiperelíticas de gênero 5.

A fim de investigarmos as curvas racionais unicuspidais, nas quais o semigrupo de valores  $S$  é  $\gamma$ -hiperelítico temos a seguinte definição baseada em ([35]):

**Definição 7.** *Seja  $\gamma \geq 0$  um inteiro. Dizemos que  $S$  é  $\gamma$ -hiperelítico se satisfaz as seguintes condições:*

1.  *$S$  tem  $\gamma$  elementos pares em  $[2, 4\gamma]$ ;*
2. *O  $(\gamma + 1)$  elemento positivo de  $S$  é  $4\gamma + 2$ .*

Dizemos que  $S$  é *hiperelítico* se é *0-hiperelítico*, isto é,  $2 \in S$ . Ainda, dizemos que  $S$  é *bielítico* se é *1-hiperelítico*, isto é, 4 e 6 são os primeiros inteiros positivos de  $S$ . E dizemos que uma singularidade é  $\gamma$ -hiperelítica se o seu semigrupo o for. Um fato importante é que todo semigrupo numérico é  $\gamma$ -hiperelítico para um valor único de  $\gamma$ , ou seja, semigrupos numéricos são estratificados naturalmente de acordo com *seu grau de hipereliticidade*.

Agora, denotemos por  $\mathcal{V}_g$  a subvariedade de  $M_{n,d}$  composta de curvas racionais de gênero  $g$  com uma singularidade (única) que é uma cúspide hiperelítica. Vamos estudar como  $\mathcal{V}_g$  é estratificado de acordo com a gonalidade. Consequentemente, seja  $\mathcal{V}_g^i$  a subvariedade de curvas racionais cuspidais com gênero  $g$  e gonalidade  $i$ .

### 3.1 Gonalidade de Curvas de Gênero 5

O resultado a seguir é uma continuação natural de [10, Prop. 3.2] e [11, Teo. 4.3] que estudam curvas racionais unicuspidais com singularidades hiperelíticas de gênero 3 e 4. Aqui fazemos o mesmo para gênero 5.

**Teorema 3.1.1.** *Toda curva racional não hiperelítica de gênero 5 com um único ponto singular que é cuspidal e hiperelítico é isomorfa a uma curva em  $\mathbb{P}^4$  com parametrização*

$$C = \left( 1 + at + bt^3 + ct^5 + dt^7 : t^2 + et^3 + ft^5 + gt^7 : t^4 + ht^5 + it^7 : t^6 + jt^7 : t^8 \right)$$

com as seguintes relações

$$\begin{aligned} a &= 2h & e &= 3h/2 & f &= 13h^3/24 + 2b/3 \\ g &= c/2 + 11(bh^2 + h^5)/24 & i &= b/3 + 11h^3/24 & j &= h/2 \end{aligned}$$

Em particular, cada curva corresponde a um ponto  $(b, c, d, h) \in \mathbb{A}^4$ . Temos o seguinte:

(i) o lugar das curvas hiperelíticas corresponde à curva parametrizada dada por

$$\mathcal{V}_5^2 = \left\{ (-7h^3/4, 7h^5/8, -17h^7/128, h) \in \mathbb{A}^4 \mid h \neq 0 \right\}.$$

(ii) Todas as demais curvas, i.e., os pontos de  $\mathbb{A}^4 \setminus \mathcal{V}_5^2$ , são trigonais com gonalidade computada por um  $g_3^1$  livre de pontos de base.

*Demonstração.* Antes de demonstrar o resultado, apenas notamos ao leitor que nem todas as parametrizações descritas acima correspondem a curvas não hiperelíticas, o que justifica o item (i).

Então assumamos agora que  $C$  é não-hiperelítica. Seja  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\omega_C, H^0(\omega_C))$  a série linear canônica em  $C$ . Observe que  $C$  é Gorenstein, pois o único ponto singular de  $C$  é duplo. Como  $C$  também é não hiperelítica,  $\mathcal{L}$  define um mergulho  $\varphi : C \hookrightarrow \mathbb{P}^4$  e  $C' := \varphi(C)$  é o modelo canônico de  $C$ . Seja  $\pi : \bar{C} \rightarrow C$  o mapa de normalização; então  $\varphi \circ \pi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^4$  é uma parametrização do modelo canônico, que denotamos por  $C' = (f_0 : f_1 : f_2 : f_3 : f_4)$ .

Pela teoria geral (ver, e.g., [31, Thm 2.8, Cor. 2.9]), existe uma base de  $H^0(\omega_C)$  cujos geradores anulam às ordens  $\{0, 2, 4, 6, 8\}$  em  $P$ . Mais precisamente,  $\omega_C$  pode ser mergulhado no feixe constante de funções meromorfas de modo que  $H^0(\omega_C) = \langle 1, x, y, z, w \rangle$  onde



$x := f_1/f_0$ ,  $y := f_2/f_0$ ,  $z := f_3/f_0$  e  $w := f_4/f_0$  são coordenadas afins em torno do ponto singular  $P = (1 : 0 : 0 : 0 : 0)$ . Agora, como  $\deg \varphi \circ \pi = \deg(\omega_C) = 2g - 2$ , afirmamos que após substituirmos  $f_i$ ,  $0 \leq i \leq 4$  por combinações lineares apropriadamente escolhidas, obtemos:

$$(f_0 : f_1 : f_2 : f_3 : f_4) = (1 + at + bt^3 + ct^5 + dt^7 : t^2 + et^3 + ft^5 + gt^7 : t^4 + ht^5 + it^7 : t^6 + jt^7 : t^8)$$

E a partir de agora seguimos os métodos de [11] para deduzir relações entre os coeficientes além das que vêm do perfil de ramificação da singularidade. Temos que o número destas condições é

$$b_P = \sum_{i=2}^{g-1} \left( g - \frac{k_i}{2} \right).$$

No nosso caso, de  $g = 5$  e  $(k_1, k_2, k_3, k_4) = (2, 4, 6, 8)$  temos  $b_P = 6$ . Para calculá-las, seguimos também a receita de [11].

Afirmamos que  $a = 2h$ ,  $e = 3h/2$  e  $j = h/2$ . De fato, defina  $F_{21} := (f_1/f_0)^2 - f_2/f_0$ . Assim, obtemos a seguinte expansão

$$F_{21} = (t^4 + 2(e - a)t^5 + \dots) - (t^4 + (h - a)t^5 + \dots) = (2e - h - a)t^5 + O(t^6).$$

Como  $5 \notin S$ , temos que

$$2e - h - a = 0. \quad (3.1)$$

Agora, escreva  $F_{31} := (f_1/f_0)^3 - (f_3/f_0)$ . Sua expansão é

$$F_{31} = (t^6 + 3(e - a)t^7 + \dots) - (t^6 + (j - a)t^7 + \dots) = (3e - j - 2a)t^7 + O(t^8)$$

e, como  $7 \notin S$  obtemos

$$3e - j - 2a = 0. \quad (3.2)$$

Definindo  $F_{41} := (f_1/f_0)^4 - (f_4/f_0)$  e expandindo, encontramos que

$$F_{41} = (t^8 + 4(e - a)t^9 + \dots) - (t^8 - at^9 + \dots) = (4e - 3a)t^9 + O(t^{10}).$$

Como  $9 \notin S$  temos que

$$4e - 3a = 0. \quad (3.3)$$

Logo, a afirmação segue de (3.1), (3.2) and (3.3).

Além disso, podemos afirmar que  $f = 2b/3 + 13h^3/24$ ,  $g = c/2 + 11(bh^2 + h^5)/24$  e  $i = b/3 + 11h^3/24$ . De fato, defina  $F_{22} = F_{21} - h^2/4(f_1/f_0)^3$ . Expandindo, obtemos

$$\begin{aligned} F_{22} &= ((h^2/4)t^6 + (2f - i - b - h^3)t^7 + \dots) - (h^2/4)(t^6 + (-3h/2)t^7 + \dots) \\ &= (2f - i - b - 5h^3/8)t^7 + O(t^8). \end{aligned}$$

e, como  $7 \notin S$  temos que

$$2f - i - b - 5h^3/8 = 0. \quad (3.4)$$

Agora, escreva  $F_{23} := F_{22} - (2hi + 3bh - 5hf + 33h^4/16)(f_1/f_0)^4$  que nos dá

$$\begin{aligned} F_{23} &= ((2hi + 3bh - 5hf + 33h^4/16)t^8 \\ &\quad + (2g - c - 4h^2i + 45fh^2/4 - 31bh^2/4 - 183h^5/32)t^9 + \dots) \\ &\quad - (2hi + 3bh - 5hf + 33h^4/16)(t^8 - 2ht^9 + \dots) \\ &= (2g - c + 5fh^2/4 - 7bh^2/4 - 51h^5/32)t^9 + O(t^{10}). \end{aligned}$$

e, como  $9 \notin S$ , obtemos

$$2g - c + 5fh^2/4 - 7bh^2/4 - 51h^5/32 = 0. \quad (3.5)$$

Finalmente, defina  $F_{32} := F_{31} - (3h^2/4)(f_1/f_0)^4$  tendo como expansão

$$\begin{aligned} F_{32} &= ((3h^2/4)t^8 + (3f - 2b - 25h^3/8)t^9 + \dots) - (3h^2/4)(t^8 - 2ht^9 + \dots) \\ &= (3f - 2b - 13h^3/8)t^9 + O(t^{10}). \end{aligned}$$

Como  $9 \notin S$ , temos

$$3f - 2b - 13h^3/8 = 0. \quad (3.6)$$

A afirmação segue de (3.4), (3.5) e (3.6) e terminamos com a descrição da curva.

Agora provaremos o item (i). De acordo com [10, Thm 3.1],  $C$  admite um  $g_2^1$  livre de pontos de base se, e somente se,  $t^2/h(t) \in \mathcal{O}_P$  para  $h \in k[t]$ , com  $h(0) \neq 0$  e  $\deg(h) \leq 2$ .

O fato de que  $t^2/h \in \mathcal{O}_P$  implica que

$$\frac{d_2 t^2}{1 + r_1 t + r_2 t^2} = \frac{c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4 f_4 + t^{10} h(t)}{1 + at + bt^3 + ct^5 + dt^7}$$

onde  $h(t) \in \overline{\mathcal{O}}_P$  e  $c_i \in \mathbb{C}$  para todo  $i \in \{0, \dots, 4\}$ . A igualdade acima é verdadeira se, e somente se,  $c_1 = d_2$ ,  $r_1 = h/2$ ,  $c_2 = d_2(-3h^2/4 - r_2)$ ,  $c_3 = d_2(11h^4/16 + 5h^2 r_2/4 + r_2^2)$  e  $c_4 = (-17h^6/64 - 17h^4 r_2/16 - 3h^2 r_2^2/2 - r_2^3)$ . Ainda

$$b = -7h^3/4, \quad c = 7h^5/8, \quad d = -17h^7/128 \text{ e } h \neq 0.$$

Segue-se a caracterização desejada do lugar hiperelítico.

Para provarmos o item (ii) temos, novamente de acordo com [10, Lem. 2.4], que  $C$  é trigonal e tem sua gonalidade computada por um  $g_3^1$  livre de pontos de base se, e somente se, existirem escalares  $\{d_2, d_3, r_1, r_2, r_3\} \in k$  tal que

$$f(t) := \frac{d_2 t^2 + d_3 t^3}{1 + r_1 t + r_2 t^2 + r_3 t^3} \in \mathcal{O}_P \quad (3.7)$$

em que  $r_3 \neq 0$  sempre que  $d_3 = 0$ . (Exigir que  $r_3$  seja diferente de zero sempre que  $d_3$  se anula é simplesmente evitar que  $C$  seja hiperelítica.) Agora, (3.7) vale se, e somente se, existirem escalares  $\{c_1, c_2, c_3, c_4\} \in k$  para os quais

$$f(t) = \frac{c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4 f_4 + t^{10} h(t)}{1 + at + bt^3 + ct^5 + dt^7} \quad (3.8)$$

onde  $h(t)$  é uma unidade em  $\overline{\mathcal{O}}_P$ . Definindo  $c_1 = d_2$  e comparando (3.7) e (3.8) obtemos a seguinte matriz

$$\begin{pmatrix} a & 1 & -c_1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -ec_1 & -c_1 & 0 \\ b & 0 & -c_2 & -ec_1 & -c_1 \\ 0 & b & -fc_1 - hc_2 & -c_2 & -ec_1 \\ c & 0 & -c_3 & -fc_1 - hc_2 & -c_2 \\ 0 & c & -gc_1 - ic_2 - jc_3 & -c_3 & -fc_1 - hc_2 \\ d & 0 & -c_4 & -gc_1 - ic_2 - jc_3 & -c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_2 \\ d_3 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ec_1 \\ c_2 \\ fc_1 + hc_2 \\ c_3 \\ gc_1 + ic_2 + jc_3 \\ c_4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Agora, suponha que  $d_2$  e  $d_3$  são não-nulos, temos a seguinte resolução

$$c_1 = d_2$$

$$r_1 = h/2 + d_3d_2^{-1}$$

$$r_2 = (6ch^{-3}/7 + 30bh^{-1}/7 + 1183h^2/56) + 12d_2^{-2} + (12bh^{-3}/7)d_2^{-2}d_3^2 \\ + (10b/7 - 286h^3/21)d_2d_3^{-1} + (7h - 2bh^{-2}/7)d_2^{-1}d_3 + (12h)d_2^{-1}d_3^{-1}$$

$$r_3 = (73b/21 + 301h^3/21) + (6ch^{-3}/7 + 1183h^2/56 + 30bh^{-1}/7)d_2^{-1}d_3 \\ + (13h/2 - 2bh^{-2}/7)d_2^{-2}d_3^2 + (12bh^{-3}/7)d_2^{-3}d_3^3 + 12d_2^{-3}d_3 + (12h)d_2^{-2}$$

$$c_2 = hd_3/2 - d_2(r_2 + 3h^2/4)$$

$$c_3 = bd_3 - hr_3d_2 - 163h^4d_2/48 + 7h^3d_3/12 - 5bhd_2/6 - h^2d_3^2d_2^{-1}/4 \\ + 5h^2d_2^2d_3^{-1}(r_3 - b - 7h^3)/4 + r_2^2d_2$$

$$c_4 = -cd_2/4 + r_3(d_2(-3h^3/4 - 5b/3 - r_2^2) + d_3(b/3 + 2h^2)) + 217bh^3d_2/144 + 793h^6d_2/144 \\ + 19bh^2d_3/24 + (bh/6 + 11h^4/48)d_2r_2 + 117h^5d_3/48 + d_3^2d_2^{-1}(bh/6 - 3h^4/4) + r_2^2(bd_2/3 \\ + 7h^3d_2/12 - h^2d_2/4 - hd_3/2 + r_2^2hd_2d_3/2) + 5h^3d_3^2d_2^{-2}/8 + 11h^3d_3r_2/24 + b^2d_2/3 \\ + d_2^2d_3^{-1}(br_3/3 - 47bh^4/36 - 5b^2h^3/18 + 2hr_3^2 + 23h^4r_3/12 + 119h^7/576 \\ + (b + 7h^3 - 5r_3)5r_2h^2/4)$$

$$0 = r_2(d_2(c/2 + 9bh^2/8 + 233h^5/32 - 7h^3r_2/8 - br_2/3 + hr_2^2/2 + bhr_2/6 + 7h^4r_2/24) \\ + d_3(5bh/6 + 47h^4/48 - h^2r_2/2 + br_2/2 + 7h^3r_2/12)) + r_3(d_3(5h^3/6 - 2b/3 + bh/6 - r_2^2) \\ + d_2(hr_3 - 89h^4/48 - 5bh/3 + r_2^2(1 - h/2))) + d_3(137bh^3/72 + 1937h^6/288 + b^2/3 - c/4) \\ - 7h^2r_2r_3d_2/4 + d_2(-d - ch/8 - 159bh^4/288 + 1705h^7/576 + b^2(h/6 - 5h^3/18)) \\ + d_3^3d_2^{-2}(bh/6 - 7h^4/16) + 5h^3d_3^4d_2^{-3}/8 + r_2^4d_3(h^2d_2/2 + hd_3)/2 + d_3^2d_2^{-1}(7h^2r_3/4 + br_3/3 \\ + 99h^5/48 + 7bh^2/8 + 5h^3r_2/24 - hr_2^2/2) + d_2^2d_3^{-1}(bhr_3/6 - 47bh^5/72 - 5b^2h^4/36 + 9h^2r_3^2/4 \\ - 187h^5r_3/24 + 119h^8/1152 - 5h^2br_3/4)$$

Note que  $c_1, r_1, r_2, r_3$  são determinados por  $d_2$  e  $d_3$ . Da mesma forma,  $c_2, c_3, c_4$  são indiretamente determinados por  $d_2$  e  $d_3$ . Agora, suponha  $d_3 = 1$  e escreva

$$r_2 = A + Bd_2^{-2} + Cd_2 + Dd_2^{-1}$$

$$r_3 = E + Fd_2^{-1} + Gd_2^{-2} + Hd_2^{-3}$$

onde as letras maiúsculas correspondem a polinômios nas variáveis  $(b, c, d, h)$  que determinam a curva. Da mesma forma, escreve a última equação como sendo

$$r_2 d_2(I + Jr_2 + Kr_2^2) + r_2(L + Mr_2) + r_3(N + Or_2^2) + r_3 d_2(P + Qr_2^2) + R + Sr_2 r_3 d_2 + Td_2 + Ud_2^{-2} + Vd_2^{-3} + r_2^4(Wd_2 + X) + d_2^{-1}(Y + Zr_2 + A'r_3 + B'r_2^2) + d_2^2(C' + D'r_3 + E'r_3^2) = 0.$$

Substituindo  $r_2$  e  $r_3$  e multiplicando por  $d_2^7$  chegamos a

$$F(d_2) = B_{12}d_2^{12} + B_{11}d_2^{11} + \dots + B_1d_2 + B_0 = 0$$

com  $B_i \in k[b, c, d, h]$ . Temos que

$$B_{12} = (10b/7 - 286h^4/21)^4(h/2).$$

Se  $B_{12} \neq 0$  então basta tomar uma dentre as 12 raízes de  $F$ . Do contrário passamos a  $B_{11}$  e assim por diante. Omitimos as contas de que estas 11 hipersuperfícies de  $\mathbb{A}^4$  não se interceptam simultaneamente. Segue o resultado.  $\square$

## 3.2 Gonalidade de Curvas Gorenstein

A prova do teorema da seção anterior sugere que podemos abordar o caso geral de forma semelhante. Aqui faremos um estudo heurístico, mas que aponta para um possível modo de se obter uma cota superior da gonalidade de uma curva racional unicuspidal Gorenstein. Mais ainda, tal limite se aproxima com aquele válido para qualquer curva projetiva suave, que é a cota de Brill-Noether, como veremos a seguir.

Para tal estudo, necessitamos refinar um resultado de [10], que usamos em demasia em seções anteriores, para expressá-lo em termos de coeficientes de polinômios, que é o que nos interessa.

**Lema 3.2.1.** *Seja  $C$  uma curva racional unicuspidal com singularidade  $P$ . Então  $C$  possui um  $g_k^1$  livre de pontos de base se e somente se existe um elemento  $f/h \in \mathcal{O}_P$  da forma*

$$\frac{f(t)}{h(t)} := \frac{d_m t^m + d_{m+1} t^{m+1} + \dots + d_k t^k}{1 + r_1 t + \dots + r_k t^k} \quad (3.9)$$

onde  $m$  é a multiplicidade de  $P$ , e tal que ou  $d_k \neq 0$  ou  $r_k \neq 0$

*Demonstração.* Por [10, Lem. 2.4],  $C$  possui um  $g_k^1$  livre de pontos de base se e somente se existe  $f/h \in \mathcal{O}_P$  com  $f(0) \neq 0$  tal que

$$k = \deg(h(t)) + \max\{0, \deg(f(t) - \deg(h(t)))\}$$

Como  $f(0) \neq 0$  e  $f/h \in \mathcal{O}_P$ , segue que o menor coeficiente de  $f$  possivelmente não nulo é a multiplicidade  $m$  de  $P$ . Agora, suponha que  $\deg(f) \geq \deg(h)$ ; pela fórmula acima, segue que  $k = \deg(f)$ . Do contrário temos  $k = \deg(h)$  e segue o resultado.  $\square$

Com isso, podemos abordar agora o caso geral de tentar obter  $g_k^1$ 's em uma curva racional unicuspidal arbitrária. Tal estudo aponta para a seguinte sentença, posto aqui a modo de conjectura, cujos passos de uma possível prova, comentamos a seguir. Para tal introduzimos as seguintes notações.

$$\begin{aligned} \text{gon}_F(C) &:= \text{menor } d \text{ tal que } C \text{ admite um } g_d^1 \text{ livre de pontos de base} \\ &= \text{menor } d \text{ tal que existe um fibrado } \mathcal{F} \text{ em } C \text{ com } \deg(\mathcal{F}) = d \text{ e } h^0(\mathcal{F}) \geq 2 \end{aligned}$$

O subscrito  $F$  remete a "free" (livre) posto que um fibrado corresponde a um feixe localmente livre. Em artigos de Ballico, também se usa a notação  $\text{gon}_{TF}(C)$  para denotar a gonalidade computada a partir de feixes apenas livre de torção e que corresponde aqui a  $g_d^1$ 's com ponto de base não-removível.

**Afirmção 1.** *Se  $C$  é uma curva racional unicuspidal Gorenstein de gênero  $g$ , então  $\text{gon}_F(C) \leq \lceil \frac{g+1}{2} \rceil$ . Em particular a gonalidade de  $C$  também é cotada por tal valor.*

É importante frisar que o resultado é falso para curvas projetivas (não necessariamente racionais) não-Gorenstein. Considere, por exemplo, as *curvas de Serre*, também caracterizadas em [19] como *curvas nearly normais*, que são aquelas com um único ponto singular (não necessariamente cuspidal) cujo ideal maximal coincide com o condutor. Não é difícil verificar que para tais curvas vale que  $\text{gon}_F(C) = g + 1$ , ao passo que sua gonalidade é sempre 2.

Voltando à afirmação acima. Para mostrar a existência de um  $g_k^1$  temos de encontrar  $f/h$  como no Lema 3.2.1, pertencente a  $\mathcal{O}_P$ . Seguindo o raciocínio da seção anterior,

procuramos constantes  $c_i$  com  $i \in S'$ , tais que

$$\frac{f(t)}{h(t)} = \frac{c_{s_1}F_{s_1} + c_{s_2}F_{s_2} + \dots + c_{s_{g-1}}F_{s_{g-1}} + t^{2g}u(t)}{F_0} \quad (3.10)$$

com  $u \in \overline{\mathcal{O}}_P$ . Aqui vale um aparte importante. Note que podemos fazer isso pelos mesmos motivos explicados na demonstração do Teorema 3.1.1. De fato, se  $\text{gon}_F(C) = 2$ , então o resultado é imediato. Do contrário,  $C$  é não hiperelítica. Como  $C$  é Gorenstein, segue que pode ser vista como uma curva canônica da forma

$$C = (F_0 : F_{s_1} : F_{s_2} : \dots : F_{s_{g-1}}) \subset \mathbb{P}^{g-1}$$

onde os  $s_i$  são os  $g$  elementos do semigrupo  $S$  de  $P$  menores que o condutor, isto é, de acordo com nossa convenção,

$$S^\circ = \{0, s_1, \dots, s_{g-1}\}.$$

Repara que  $s_1 = m$ , a multiplicidade de  $P$ , ao passo que  $s_{g-1} = 2g - 2$  por que  $P$  é Gorenstein e, portanto,  $S$  é simétrico. E, por outro lado, os polinômios  $F_{s_i}$  são da forma

$$\begin{aligned} F_0 &= 1 + a_{0,1}t + \dots + a_{0,2g-2}t^{2g-2} \\ F_{s_1} &= t^{s_1} + a_{s_1,s_1+1}t^{s_1+1} + \dots + a_{s_1,2g-2}t^{2g-2} \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \\ F_{s_i} &= t^{s_i} + a_{s_i,s_i+1}t^{s_i+1} + \dots + a_{s_i,2g-2}t^{2g-2} \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \\ F_{s_{g-1}} &= t^{s_{g-1}} = t^{2g-2} \end{aligned}$$

Isto porque, sendo canônica,  $C$  é uma curva de grau  $2g - 2$  em  $\mathbb{P}^{g-1}$ . Note que podemos anular vários dos  $a_{i,j}$ , como fizemos antes, mas isto não terá papel especial no argumento.

Temos então que determinar as constantes  $d_i$ ,  $r_i$  e  $c_i$  que viabilizam a igualdade de (3.9) com (3.10).

Então o número de incógnitas é  $k - m + 1$  correspondente aos  $d_i$ 's, mais  $k$  correspondente aos  $r_i$ 's, e mais  $g - 1$  correspondente aos  $c_i$ 's. Por outro lado, o número de equações é determinado pelas potências indo de  $t^m$  a  $t^{2g-1}$ , o que nos dá  $2g - m$  equações. Espera-se

então que o sistema tenha solução sempre que os coeficientes sobreponham as equações, ou seja, se

$$(k - m + 1) + k + (g - 1) \geq (2g - m) + 1$$

o que nos leva a

$$k \geq \frac{g + 1}{2}$$

Então chegamos a que para qualquer  $k \geq (g + 1)/2$ , temos que  $C$  possui um  $g_k^1$ , que é semelhante ao resultado de Brill-Noether sobre a não vacuidade da variedade de sistemas lineares, da qual se obtém trivialmente a cota de gonalidade. Voltamos a afirmar que é uma argumentação heurística. Para a prova efetiva precisaremos adentrar-nos no sistema. De toda forma, cremos que é possível uma análise qualitativa, sem necessidade de explicitar as equações, de forma a levar-nos a dizer sobre sua solubilidade. Mais ainda, se o espaço de parâmetros estiver bem definido bastaria verificarmos esta solubilidade genericamente, e um argumento de semi-continuidade completaria a prova.

### 3.3 Curvas Bielíticas de Gênero 6

Nesta breve seção descrevemos curvas racionais unicuspidais de gênero 6 com singularidades bielíticas. Seguindo os mesmos passos e argumentos do Teorema 2.1.1 chegamos a que uma tal curva  $C$  é isomorfa a

$$C = \left( 1 + 2a_5t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 : t^4 + a_5t^5 : t^6 + a_6t^7 : t^{11} : t^{12} : t^{13} \right) \subset \mathbb{P}^5$$

e com modelo canônico

$$C' = \left( 1 + 2a_5t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 : t^2 + e_1t^3 + e_2t^5 : t^4 + a_5t^5 : t^6 + a_6t^7 : t^7 : t^9 \right) \subset \mathbb{P}^5$$

onde

$$e_1 = 2a_5 - a_6 \quad \text{e} \quad e_2 = a_3 - a_2(a_5 + a_6).$$

Além disso, afirmamos que tal  $C$  é trigonal. De fato, considere  $\mathcal{F} := \mathcal{O}_C\langle 1, z \rangle$  com  $z = t^2/at^2 + bt + 1$ . Um elemento geral em  $\mathcal{F}_P$  é da forma



$$\begin{aligned}
f(t) = & c_0 + c_1 \frac{t^2}{at^2 + bt + 1} + c_2 \frac{t^4 + a_5 t^5}{1 + 2a_5 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4} + c_3 \frac{t^6 + a_6 t^7}{1 + 2a_5 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4} \\
& + c_4 \frac{t^8}{1 + 2a_5 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4} + c_5 \frac{t^6 + a_5 t^7}{(1 + 2a_5 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4)(at^2 + bt + 1)} \\
& + c_6 \frac{t^8 + a_6 t^9}{(1 + 2a_5 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4)(at^2 + bt + 1)} + t^{10} h(t)
\end{aligned}$$

com  $h \in \overline{\mathcal{O}}_P$ . Definindo  $p(t) := (1 + 2a_5 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4)(at^2 + bt + 1)$ , obtemos

$$\begin{aligned}
pf = & c_0 + (2a_5 + b)c_0 t + (c_1 + (a_2 + 2ba_5 + a)c_0)t^2 + (2a_5 c_1 + (a_3 + ba_2 + 2aa_5)c_0)t^3 \\
& + (c_2 + a_2 c_1 + (a_4 + ba_3 + aa_2)c_0)t^4 + ((a_5 + b)c_2 + a_3 c_1 + (ba_4 + aa_3)c_0)t^5 \\
& + (c_5 + c_3 + (ba_5 + a)c_2) + a_4 c_1 + (aa_4 c_0)t^6 + (a_5 c_5 + (a_6 + b)c_3 + aa_5 c_2)t^7 \\
& + (c_6 + c_4 + (ba_6 + a)c_5)t^8 + (a_6 c_6 + bc_4 + aa_6 c_3)t^9 + t^{10} h.
\end{aligned}$$

Como  $v_P(1/p) = 0$  podemos nos concentrar no lado direito da igualdade acima para estudar as possíveis ordens de  $f$ . Temos que os valores são 0, 2, 4, 6 e 8 tomando sucessivamente  $c_0 = 0$ ,  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 0$ ,  $c_3 = -c_5$ ,  $b = a_5 - a_6$ ,  $c_4 = -c_6 + (a + a_5 a_6 - a_6^2)c_5$  e  $c_6 = (a_6^2(a_6 - 2a_5) + a(a_5 - 2a_6) + a_5^2 a_6)c_5 / (a_5 - 2a_6)$ . Logo,  $D = \{2\}$  e  $\deg_P(\mathcal{F}) = |D| = 1$ . Por outro lado,  $\deg_{C \setminus P}(\mathcal{F}) = \deg(t^2) = 2$  e então  $\deg(\mathcal{F}) = 3$ . Portanto,  $C$  admite um  $g_3^1$  com pontos de base e é trigonal.

# Capítulo 4

## Curvas Unicuspidais de Gênero até 6

Neste capítulo, dedicamos à aplicabilidade dos resultados obtidos no Capítulo 2. Além disso, encontramos equações que contêm o modelo canônico em quatro casos específicos.

### 4.1 Classificação

Com os Teoremas (2.1.1) e (2.2.1), estamos aptos a classificar as curvas não Gorenstein racionais unicuspidais de gênero até 6, com a análise de gonalidade e descrição dos respectivos modelos canônicos. É o conteúdo do seguinte resultado.

**Teorema 4.1.1.** *Seja  $C$  uma curva racional não Gorenstein de gênero  $g$  com um único ponto singular  $P$  e, com modelo canônico  $C'$ . Além disso, seja  $d_b$  (resp.  $d_f$ ) o menor inteiro tal que  $C$  admite um  $g_{d_b}^1$  (resp.  $g_{d_f}^1$ ) com (resp. sem) pontos de base. Em particular, temos que  $\text{gon}(C) = \min(d_b, d_f)$ . Então, temos as seguintes tabelas que computam todos os casos onde  $g \leq 6$ .*

caso	$g$	$C$	$C'$	$d_b$	$d_f$
(i)	3	$(1 + a_1t : t^3 : t^5 : t^6 : t^7)$	$(1 + a_1t : t^2 : t^3)$	3	3
(ii)	4	$(1 + a_1t + a_2t^2 : t^3 : t^7 : t^8)$	$(1 + a_1t + a_2t^2 : t + a_1t^2 : t^3 : t^4)$	3	3
(iii)	4	$(1 + a_1t + a_2t^2 : t^4 : t^5 : t^7 : t^8)$	$(1 + a_1t + a_2t^2 : t^3 : t^4 : t^5)$	3	4
(iv)	4	$(1 + a_1t : t^4 : t^6 : t^7 : t^9 : t^{10})$	$(1 + a_1t : t^2 : t^3 : t^4)$	3	4

caso	C e C'	$d_b$	$d_f$
	gênero 5		
(v)	$(1 + a_1t + a_2t^2 : t^4 + a_3t^5 : t^6 : t^9 : t^{10} : t^{11})$ $(1 + a_1t + a_2t^2 : t^2 + (a_1 - a_3)t^3 : t^4 + a_3t^5 : t^5 : t^6)$ ou $(1 + a_1t + a_2t^3 : t^4 + a_1t^5 : t^6 : t^9 : t^{10} : t^{11})$ $(1 + a_1t + a_2t^3 : t^2 : t^4 + a_1t^5 : t^5 : t^6)$	3	4
(vi)	$(1 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 : t^4 + a_4t^6 : t^5 : t^{10} : t^{11})$ $(1 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 : t + a_1t^2 + (a_2 - a_4)t^3 : t^4 + a_4t^6 : t^5 : t^6)$	3	4
(vii)	$(1 + a_1t + a_2t^2 : t^5 : t^6 : t^8 : t^9)$ $(1 + a_1t + a_2t^2 : t^3 : t^4 : t^5 : t^6)$	3	5
(viii)	$(1 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 : t^5 : t^6 : t^7 : t^9 : t^{10})$ $(1 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 : t^4 : t^5 : t^6 : t^7)$	3	5
(ix)	$(1 + a_1t : t^5 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{10} : t^{11})$ $(1 + a_1t : t^2 : t^3 : t^4 : t^5)$	3	5
(x)	$1 + a_1t + a_2t^2 : t^4 : t^7 : t^9 : t^{10}$ $(1 + a_1t + a_2t^2 : t + a_1t^2 : t^3 : t^4 : t^5)$	3	4
(xi)	$(1 + 2a_4t + a_2t^2 + a_3t^3 : t^3 + a_4t^4 : t^8 : t^{10} : t^{11})$ $(1 + 2a_4t + a_2t^2 + a_3t^3 : t^2 + a_4t^3 + (a_2 - a_4^2)t^4 : t^3 + a_4t^4 : t^5 : t^6)$ ou $(1 + a_2t^2 + a_3t^4 : t^3 : t^8 : t^{10} : t^{11})$ $(1 + a_2t^2 + a_3t^4 : t^2 + a_2t^4 : t^3 : t^5 : t^6)$	4	3
(xii)	$(1 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 : t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 : t^7 : t^{10} : t^{11})$ $(1 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 : t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 : t^4 + (a_1 - a_4)t^5 : t^6 : t^7)$ ou $(1 + a_1t + (a_1^2 - a_4^2)t^2 + a_3t^5 : t^3 + a_4t^4 + a_5^*t^5 : t^7 : t^{10} : t^{11})$ $(1 + a_1t + (a_1^2 - a_4^2)t^2 + a_3t^5 : t^3 + a_4t^4 + a_5^*t^5 : t^4 + (a_1 - a_4)t^5 : t^6 : t^7)$ onde $a_2 = ((a_1 - a_4)^2 + 2a_5)$ e $a_5^* = a_4(a_1 - a_4)$	4	3

	gênero 6		
(xiii)	$(1 + a_1t : t^6 : t^8 : t^9 : t^{10} : t^{11} : t^{12} : t^{13})$ $(1 + a_1t : t^2 : t^3 : t^4 : t^5 : t^6)$	3	6
(xiv)	$(1 + a_1t + a_2t^2 : t^6 : t^7 : t^9 : t^{10} : t^{11})$ $(1 + a_1t + a_2t^2 : t^3 : t^4 : t^5 : t^6 : t^7)$	3	6
(xv)	$(1 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 : t^6 : t^7 : t^8 : t^{10} : t^{11})$ $(1 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 : t^4 : t^5 : t^6 : t^7 : t^8)$	3	6
(xvi)	$(1 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 : t^6 : t^7 : t^8 : t^9 : t^{11} : t^{12})$ $(1 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 : t^5 : t^6 : t^7 : t^8 : t^9)$	3	6
(xvii)	$(1 + a_1t + a_2t^2 : t^5 : t^8 : t^9 : t^{11} : t^{12})$ $(1 + a_1t + a_2t^2 : t + a_1t^2 : t^3 : t^4 : t^5 : t^6)$	3	5
(xviii)	$(1 + a_1t + a_2t^2 : t^5 + a_3t^6 : t^7 : t^9 : t^{11} : t^{12} : t^{13})$ $(1 + a_1t + a_2t^2 : t^2 + (a_1 - a_3)t^3 : t^4 : t^5 + a_3t^6 : t^6 : t^7)$ ou $(1 + a_1t + a_2t^3 : t^5 + a_3t^6 : t^7 : t^9 : t^{11} : t^{12} : t^{13})$ $(1 + a_1t + a_2t^3 : t^2 + (a_1 - a_3)t^3 : t^4 : t^5 + a_3t^6 : t^6 : t^7)$	3	5
(xix)	$(1 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 : t^5 + a_4t^6 : t^7 : t^8 : t^{10} : t^{11})$ $(1 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 : t^3 + (a_1 - a_4)t^4 : t^5 + a_4t^6 : t^6 : t^7 : t^8)$ ou $(1 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^4 : t^5 + a_1t^6 : t^7 : t^8 : t^{10} : t^{11})$ $(1 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^4 : t^3 : t^5 + a_1t^6 : t^6 : t^7 : t^8)$	4	5
(xx)	$(1 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 : t^5 + a_4t^7 : t^6 : t^9 : t^{12} : t^{13})$ $(1 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 : t + a_1t^2 + (a_2 - a_4)t^3 : t^4 : t^5 + a_4t^7 : t^6 : t^7)$	3	5
(xxi)	$(1 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 : t^5 + a_5t^8 : t^6 + a_6t^8 : t^7 : t^{10} : t^{11})$ $(1 + a_1t + \dots + a_4t^4 : t + a_1t^2 + b_2t^3 + b_3t^4 : t^5 + a_5t^8 : t^6 + a_6t^8 : t^7 : t^8)$ onde $b_2 = (a_2 - a_6)$ e $b_3 = (a_3 - a_5 - a_1a_6)$	3	5
(xxii)	$(1 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 : t^4 : t^9 : t^{10} : t^{11})$ $(1 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 : t + a_1t^2 + a_2t^3 : t^2 + a_1t^3 : t^4 : t^5 : t^6)$	3	4
(xxiii)	$(1 + 2a_4t + a_2t^2 + a_3t^3 : t^4 + a_4t^5 + a_5t^6 : t^7 : t^{10} : t^{12} : t^{13})$ $(1 + 2a_4t + a_2t^2 + a_3t^3 : t^3 + a_4t^4 + a_5^*t^5 : t^4 + a_4t^5 + a_5t^6 : t^6 : t^7 : t^8)$ ou $(1 + 2a_4t + a_2t^2 + a_3t^5 : t^4 + a_4t^5 + a_5^{**}t^6 : t^7 : t^{10} : t^{12} : t^{13})$ $(1 + a_1t + (a_1^2 - a_4^2)t^2 + a_3t^5 : t^3 + a_4t^4 + a_4^2t^5 : t^4 + a_4t^5 + a_5^{***}t^6 : t^6 : t^7 : t^8)$ onde $a_5^* = (a_2 - a_4^2 - a_5)$ , $a_5^{**} = (a_2 + a_1a_4 - a_1^2)$ e $a_5^{***} = (a_2 - 2a_4^2)$	4	4

*Demonstração.* Todos resultam dos Teoremas (2.1.1) e (2.2.1). Casos (i), (iii), (iv), (vii), (viii), (ix), (xiii), (xiv), (xv) e (xvi) seguem de (2.1.1)(i); casos (ii), (x), (xvii) e (xxii) de (2.1.1)(ii); casos (vi), (xx) e (xxi) de (2.1.1)(iii); e os casos (v), (xi), (xii), (xviii), (xix) e (xxiii) seguem de (2.2.1).  $\square$

## 4.2 Modelos Canônicos

Agora computaremos equações dos modelos canônicos nos quatro primeiros casos. O que eles têm em comum é que podemos esboçar tanto a curva como as superfícies que a determinam pois estaremos ou no plano (gênero 3) ou no espaço tridimensional (gênero 4). O primeiro caso é simples, e, para os demais, lembramos por [21], que se  $C$  é  $d$ -gonal, então:  $C'$  está contida em um scroll  $(d-1)$ -dimensional em  $\mathbb{P}^{g-1}$  e a regra do scroll corta um  $g_d^1$  em  $C'$ . Então no primeiro caso, temos  $C' \subset \mathbb{P}^2$ , que é o próprio scroll, e a regra, ou seja, um pencil de retas, corta a curva genericamente em 3 pontos; ou seja,  $C'$  é uma curva de grau 3 em  $\mathbb{P}^2$ . Para os três casos seguintes, temos que  $C'$  é uma curva em  $\mathbb{P}^3$  que está contida em um scroll bidimensional, ou seja, uma quádrlica, e a regra desta corta  $C'$  em três pontos. Isto fica claro nas equações abaixo de superfícies que contêm  $C'$ .

Considere  $(a_1, a_2) = (a, b)$ .

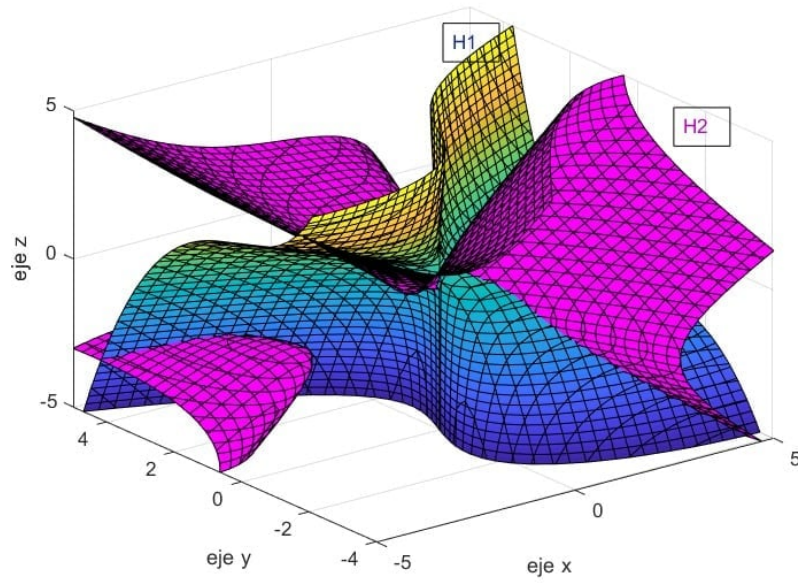
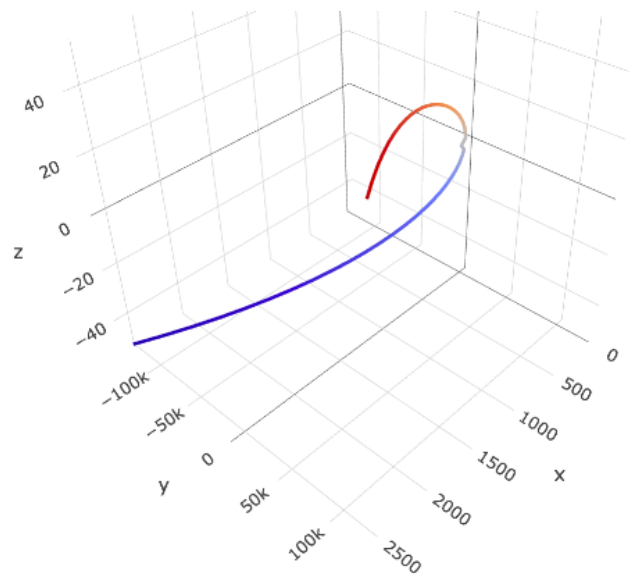
**Caso (i)**  $H_0 := x^3 + ax^2y - y^2z$ .

**Caso (ii)**

$$H_1 := (-a^3 + ab - b)x^2 - (a+1)xz + xw + (a^2 - b)yz + yw;$$

$$\begin{aligned} H_2 := & x^3 + (a + ab + a^4b - a^4 - a^2b^2 + 2a^2b - b^2 + b)x^2y - (ab - b^2 + b + 1)x^2z \\ & - (ab + b + 1)x^2w + (2b - 1)xz^2 - xw^2 + xzy + xyw - (a + 1)xzw + yzw \\ & - (a^3b - a^3 + ab + b + 1)y^2z + (a^2b - a^2 + b - 1)y^2w + yz^2 + yw^2 + z^3. \end{aligned}$$

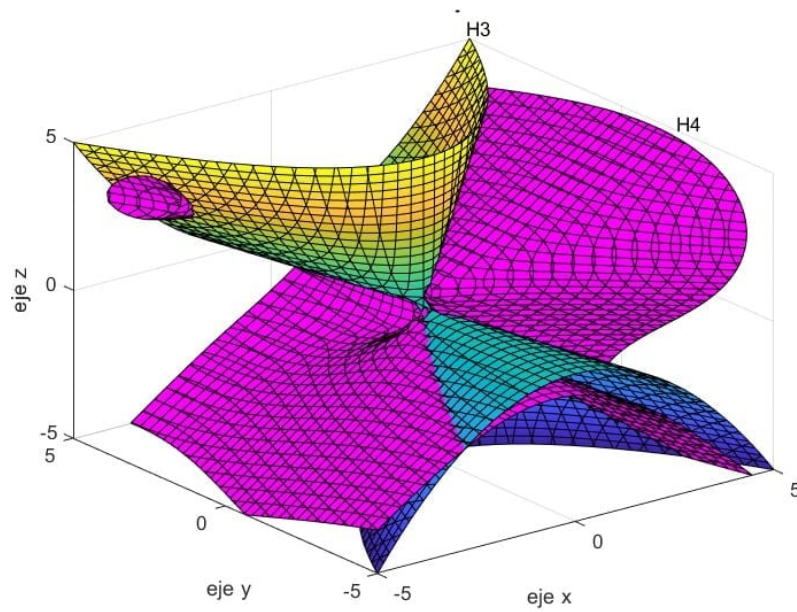
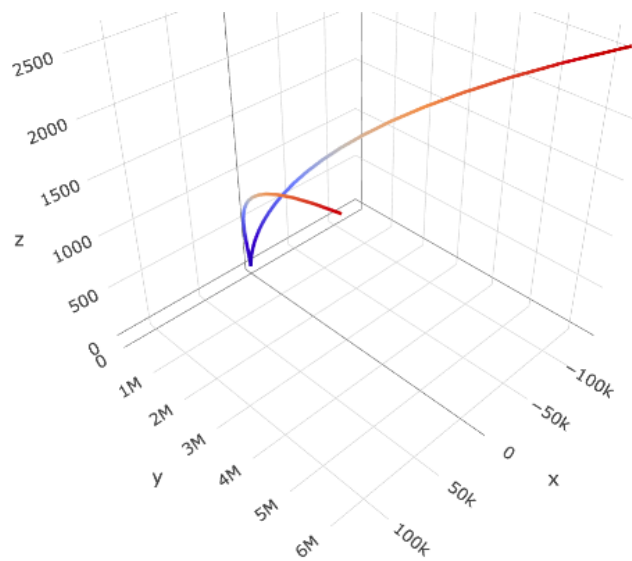
Agora, tomando  $w = 1$  e  $(a, b) = (1, 0)$ , temos as seguintes interseções:

Figura 4.1:  $H_1 \cap H_2$ Figura 4.2:  $(x, y, z) = (t^3/(1+t), t^4/(1+t), t)$

## Caso (iii)

$$H_3 := x^2 - yz;$$

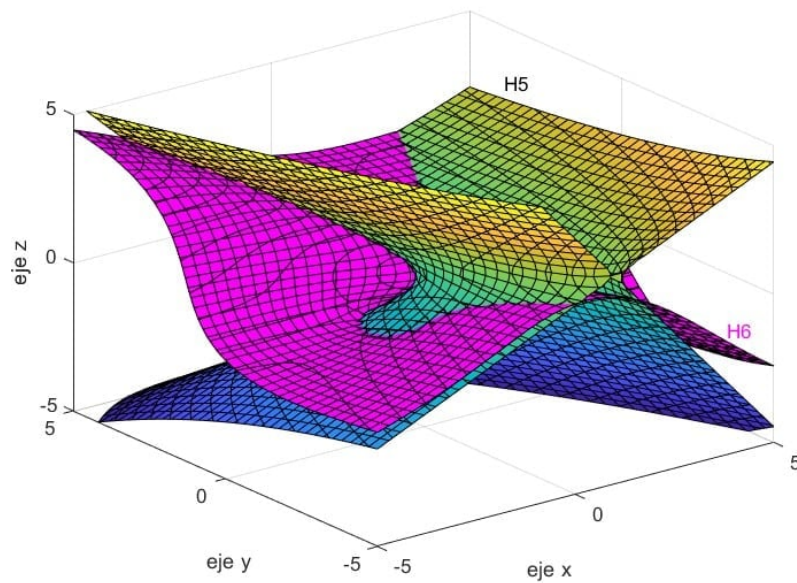
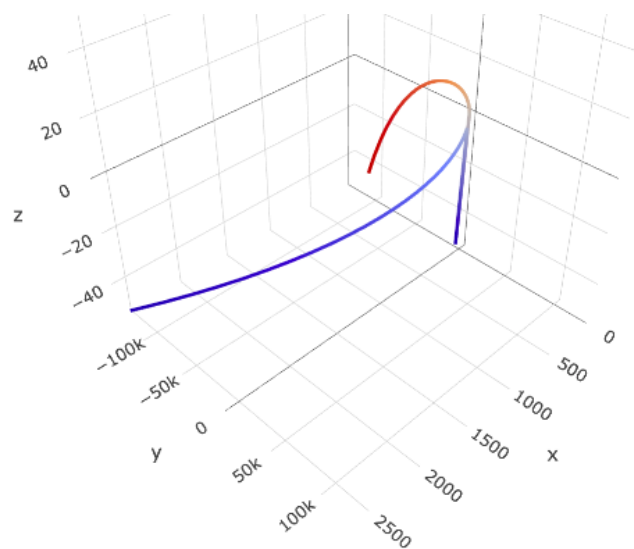
$$H_4 := (-ab + b - 1)x^3 - x^2y + (-a^2 + a + b - 1)x^2z + x^2w + xz^2 + xzy - xyw \\ + y^2z + (a - 1)y^2w - yzw + yz^2 + z^3.$$

Figura 4.3:  $H_3 \cap H_4$ Figura 4.4:  $(x, y, z) = (t^4/(1+t), t^5/(1+t), t^3/(1+t))$

**Caso (iv)**

$$H_5 := x^2 - z^2 - axz - yz + yw;$$

$$H_6 := (a^3 - a^2 + 2a - 1)x^3 - x^2y + x^2z + x^2w + xz^2 + xzy + (a - 1)xyw + axzw \\ + y^2z + (-a^2 + a - 2)y^2w - 2yzw + yz^2 - yw^2 + z^3 + z^2w.$$

Figura 4.5:  $H_5 \cap H_6$ Figura 4.6:  $(x, y, z) = (t^3/(1+t), t^4/(1+t), t^2/(1+t))$



# Referências Bibliográficas

- [1] A. Andreotti, A. L. Mayer, *On Period Relations for Abelian Integrals on Algebraic Curves*, Annali della Scuola Normale Superiore di Piza, 21 2 (1967) 189-238.
- [2] M. Aprodu and G. Farkas, *Koszul cohomology and applications to moduli*, Clay Math. Proc., 14 (2011) 25–50.
- [3] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths, and J. Harris, *Geometry of algebraic curves*, Springer-Verlag (1985).
- [4] D. W. Babbage, *A note on the quadrics through a canonical curve*, J. London Math. Soc. 14 (1939), 310–315.
- [5] V. Barucci, R. Fröberg, *One-Dimensional Almost Gorenstein Rings*, Journal of Algebra 188 (1997), 418–442.
- [6] K. Behnke, J. A. Christophersen, *Hypersurface Sections and Obstructions (Rational Surface Singularities)*, Comp. Math. 77 (1991) 233-268.
- [7] J. Coelho, F. Sercio, *On the gonality of stable curves*, Mathematische Nachrichten, 292, (2019) no. 11, 2338-2351
- [8] M. Coppens, *Free Linear Systems on Integral Gorenstein Curves*, Journal of Algebra 145 (1992), 209–218.
- [9] E. Cotterill, L. Feital and R. V. Martins, *Dimension Counts for Cuspidal Rational Curves via Semigroups*, Proc. Amer. Math. Soc. 148 (2020) 3217-3231
- [10] E. Cotterill, L. Feital, and R.V. Martins, *Singular rational curves with points of nearly-maximal weight*, J. Pure Appl. Alg. **222** (2018), 3448-3469.

- [11] E. Cotterill, V. Lara, and R.V. Martins, *Rational Curves with Hyperelliptic Singularities*, (ArXiv:2006.09580) (2020).
- [12] D. Eisenbud, J. Harris, J. Koh, M. Stillmann, *Determinantal Equations for Curves of High Degree*, American Journal of Mathematics 110 (1988) 513-539
- [13] D. Eisenbud, J. Harris, *On Varieties of Minimal Degree*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 46 (1987), 3–13
- [14] F. Enriques, *Sulle curve canoniche di genera  $p$  cello spazio a  $p - 1$  dimensioni*, Rend. Accad. Sci. Ist. Bologna, 23 (1919), 80–82.
- [15] L. Feital. R. V. Martins, *Gonality of non-Gorenstein curves of genus five*, Bull. Braz. Math. Soc., 45(4) (2014), 1–22.
- [16] M. Franciosi and E. Tenni, *Green's conjecture for binary curves*, arxiv.1402.5780v1.
- [17] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag (1977)
- [18] J. Hotchkiss, B. Ullery, *The Gonality of Complete Intersection Curves*, arXiv:1706.08169 (2017)
- [19] S. L. Kleiman, R. V. Martins, *The Canonical Model of a Singular Curve*, Geometria Dedicata. 139 (2009), 139-166.
- [20] D. Nicolau, S. Marchesi, R. V. Martins, *Curves with Canonical Models on Scrolls*, International Journal of Mathematics, Vol. 27, No. 5 (2016) 1650045-1-30.
- [21] D. Nicolau, R. V. Martins, J. Souza, *On gonality, scrolls, and canonical models of non-Gorenstein curves*, Geometriae Dedicata, Vol. 198, p. 1-23 (2019).
- [22] T. Matsuoka, *On the degree of singularity of one-dimensional analytically irreducible noetherian rings*, J. Math. Kyoto Univ. 11 (1971) 485-491
- [23] R. V. Martins, *On Trigonal Non-Gorenstein Curves with Zero Maroni Invariant*, Journal of Algebra 275 (2004), 453–470.
- [24] R. V. Martins, *Trigonal non-Gorenstein curves*, J. Pure Appl. Algebra, 209 (2007), 873–882.

- [25] R. M. Miró-Roig, *The Representation Type of Rational Normal Scrolls*, Rend. Circ. Mat. Palermo 62 (2012), 153–164.
- [26] M. Rosenlicht, *Equivalence Relations on Algebraic Curves*, Annals of Mathematics 56 (1952), 169–191
- [27] M. Reid, *Chapters on Algebraic Surfaces*, arXiv:alg-geom/9602006v1 6 Feb 1996; Lectures of a summer programm Park City, UT, 1993
- [28] R. Rosa, K.-O. Stöhr, *Trigonal Gorenstein Curves*, Journal of Pure and Applied Algebra 174 (2002), 187-205.
- [29] J. P. Serre, *Groupes Algébriques et Corps de Classes*, Hermann, 1959.
- [30] J. Stevens, *The Versal Deformation of Universal Curve Singularities*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 63 (1993) 197-213
- [31] K.-O. Stöhr, *On the Poles of Regular Differentials of Singular Curves*, Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática 24 (1993), 105–135.
- [32] K.-O. Stöhr, *Hyperelliptic Gorenstein Curves*, Journal of Pure and Applied Algebra 135 (1999), 93–105.
- [33] F.-O. Schreyer, *Szygies of Canonical Curves and Special Linear Series*, Mathematische Annalen 275 (1986), 105–137.
- [34] K.-O. Stöhr, P. Viana, *Weierstrass gap sequences and moduli varieties of trigonal curves*, Journal of Pure and Applied Algebra 81 (1992), 63–82.
- [35] F. Torres, *On  $\gamma$ -hyperelliptic numerical semigroups*, Semigroup Forum **55** (1997), 364–379.
- [36] C. Voisin, *Green’s generic syzygy conjecture for curves of even genus lying on a  $K3$  surface*, J. Eur. Math. Soc., 4 (2002) 363–404.
- [37] C. Voisin, *Green’s canonical syzygy conjecture for generic curves of odd genus*, Compos. Math., 141 (2005) 1163–1190.