UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

DESIGUALDADES ISOPERIMÉTRICAS COM PESOS MONOMIAIS

Marta Nascimento Menezes

Belo Horizonte - MG
2020

Marta Nascimento Menezes

DESIGUALDADES ISOPERIMÉTRICAS COM PESOS MONOMIAIS

Versão final da dissertação submetida à banca examinadora, designada pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas - ICEX da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Análise

Orientador: Prof. Dr. Emerson Alves Mendonça de Abreu

Belo Horizonte - MG

2020

Ficha catalográfica elaborada pelo bibliotecário Célio Resende Diniz - CRB 6ª Região nº 2403

Menezes, Marta Nascimento.

M543d Desigualdades isoperimétricas com pesos monomiais/ Marta Nascimento Menezes — Belo Horizonte, 2020.
60 f. il.; 29 cm.

(Dissertação) – Universidade Federal de Minas Gerais – Departamento de Matemática.

Orientador: Emerson Alves Mendonça de Abreu.

1. Matemática – Teses. 2. Desigualdades (Matemática) – Teses. 3. Sobolev, Espaço de. – Teses. I. Orientador. II. Título.

CDU 51(043)

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

Desigualdade isoperimétricas com pesos monomiais

MARTA NASCIMENTO MENEZES

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Prof. Emerson Alves Mendonça de Abreu
UFMG

Prof. Everaldo Souto de Medeiros
UFPB

Marcos Montenegro

Prof. Marcos da Silva Montenegro
UFMG

Belo Horizonte, 20 de fevereiro de 2020.

Av. Antônio Carlos, 6627 – Campus Pampulha - Caixa Postal: 702
CEP-31270-901 - Belo Horizonte – Minas Gerais - Fone (31) 3409-5963
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br - home page: http://www.mat.ufmg.br/pgmat

Hay que endurecerse,

pero sin perder la ternura jamás.

Resumo

Consideramos o peso monomial $|x_1|^{A_1} \cdots |x_n|^{A_n}$ em $\mathbb{R}^n$, onde $A_i \geq 0$ é um número real para cada $i = 1, \ldots, n$, e fazemos uma exposição das desigualdades isoperimétrica, de Sobolev, de Morrey e de Trudinger-Moser envolvendo esse peso. Estas são análogas às desigualdades clássicas com a medida de Lebesgue dx substituída por $|x_1|^{A_1} \cdots |x_n|^{A_n} dx$. Para as desigualdades isoperimétrica e de Sobolev, descrevemos a melhor constante e as funções extremais.

Palavras-chave: Desigualdade de Sobolev com peso. Desigualdades isoperimétricas com uma densidade. Peso monomial.

Abstract

We consider the monomial weight $|x_1|^{A_1} \cdots |x_n|^{A_n}$ in $\mathbb{R}^n$, where $A_i \geq 0$ is a real number for each $i = 1, \dots, n$, and we present the isoperimetric, Sobolev, Morrey, and Trudinger-Moser inequalities involving this weight. They are the analogue of the classical ones with the Lebesgue measure dx replaced by $|x_1|^{A_1} \cdots |x_n|^{A_n} dx$. For the isoperimetric and Sobolev inequalities, we describe the best constant and the extremal functions.

Keywords: Weighted Sobolev inequality. Isoperimetric inequalities with a density. Monomial weight.

Sumário

Introdução

Desde a antiguidade, problemas envolvendo desigualdades isoperimétricas tem chamado a atenção dos pesquisadores. Talvez, o mais famoso destes problemas seja o que hoje chamamos de *Problema de Dido*; o qual consistia em determinar a forma de um domínio com área máxima, dado o seu perímetro. A resposta para esta questão foi que o círculo maximiza a área para um dado perímetro. Equivalentemente, dada uma área fechada por uma curva simples fechada, o círculo minimiza o perímetro. No caso do plano, a propriedade isoperimétrica do círculo foi estabelecida por Steiner [18] [Veja também [10], Capítulo 7].

Um outro modo de ver este problema é através de sua formulação analítica. Se L é o perímetro de uma região no plano e A sua área, então

$$L^2 \geq 4\pi A. \tag{1}$$

A desigualdade (1) motiva a questão da existência e unicidade da forma ótima da região que atinge o valor máximo $L^2/4\pi$. Como uma generalização para dimensões maiores, seja ω_n denotando o volume da esfera unitária no $\mathbb{R}^n$, e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado. Denotando por $\partial\Omega$ seu bordo, então temos a seguinte desigualdade:

$$\mathcal{L}_{n-1}(\partial\Omega) \geq n\omega_n^{\frac{1}{n}} \mathcal{L}_n(\Omega)^{1-\frac{1}{n}}, \tag{2}$$

onde $\mathcal{L}_n(E)$ denota a $n-$dimensional medida de Lebesgue de $E \subset \mathbb{R}^n$. Seja $B_R(0)$ a bola de raio R, tal que $\mathcal{L}_n(\Omega) = \mathcal{L}_n(B_R(0))$. Então, podemos reescrever (2) do seguinte modo:

$$\frac{\mathcal{L}_{n-1}(\partial\Omega)}{\mathcal{L}_n(\Omega)^{1-\frac{1}{n}}} \geq \frac{n\omega_n R^{n-1}}{(\omega_n R^n)^{1-\frac{1}{n}}} = n\omega_n^{\frac{1}{n}}. \tag{3}$$

Em geral, a prova destas desigualdades utilizam ferramentas muito sofisticadas de teoria da medida geométrica. Entretanto, em anos recentes, X. Cabré em [3, 5] forneceu uma prova alternativa para (3), além de estender estes resultados para novas desigualdades isoperimétricas. Neste sentido, estamos interessados nas seguintes desigualdades. Sejam

$$m(\Omega) = \int_{\Omega} x^A \, dx \quad \text{e} \quad P(\Omega) = \int_{\partial\Omega} x^A \, d\sigma,$$

onde, dado $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $A = (A_1, \ldots, A_n)$, definimos o peso monomial

$$x^A := |x_1|^{A_1} \cdots |x_n|^{A_n}, \text{ onde } A_i \geq 0, \text{ para } i = 1, \ldots, n \tag{4}$$

e denotaremos

$$\mathbb{R}^n_* = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i > 0 \text{ quando } A_i > 0\}. \tag{5}$$

Então foi provado em [5], que

$$\frac{P(\Omega)}{m(\Omega)^{1-\frac{1}{D}}} \geq \frac{P(B_1^*)}{m(B_1^*)^{1-\frac{1}{D}}}, \tag{6}$$

onde $B_1^* = B_1(0) \cap \mathbb{R}^n_*$ e $D = A_1 + \cdots + A_n + n$. Note que, se $A \equiv 0$, isto é, $A_i = 0$ para $i = 1, \cdots, n$, então de (6) reobtemos (3).

Neste trabalho, faremos uma exposição das desigualdades de Sobolev, Morrey, Trudinger-Moser e isoperimétrica em $\mathbb{R}^n$ com o peso monominal definido em (4).

O interesse por essas desigualdades surgiu em [6], onde foi tomado $n = 2$ em (4). Neste artigo, os autores estudaram a regularidade de soluções estáveis para problemas de reação-difusão em domínios limitados de dupla revolução em $\mathbb{R}^N$. Isto é, domínios em $\mathbb{R}^N$ que são invariantes sob rotação nas primeiras m variáveis e nas últimas $N - m$ variáveis, isto é,

$$\overline{\Omega} = \left\{ \left(x^1, x^2\right) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{N-m} : \left(s = |x^1|, t = |x^2|\right) \in \overline{\Omega}_2 \right\},$$

onde $\Omega_2 \subset (\mathbb{R}_+)^2$ é um domínio limitado.

O primeiro passo para obter o resultado em [6] consistia em obter limitações para algumas integrais da forma

$$\int_{\Omega_2} \left\{ s^{-\alpha} u_s^2 + t^{-\beta} u_t^2 \right\} ds dt,$$

onde u é qualquer solução estável e s e t são as duas coordenadas radiais descrevendo

Ω. Então, a partir dessa cota, era necessário que $u \in L^q(\Omega)$, com q tão grande quanto possível. Após uma mudança de variáveis da forma $s = \sigma^{\gamma_1}$, $t = \tau^{\gamma_2}$, estabeleceu-se a seguinte desigualdade de Sobolev. Dados $a > -1$ e $b > -1$, foi encontrado o maior expoente q para o qual

$$\left(\int_{\widetilde{\Omega}_2} \sigma^a \tau^b |u|^q d\sigma d\tau\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_{\widetilde{\Omega}_2} \sigma^a \tau^b |\nabla u|^2 d\sigma d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

é válida para todas as funções suaves u que somem em $\partial\widetilde{\Omega}_2 \cap (\mathbb{R}_+)^2$, onde $\widetilde{\Omega}_2 = \{(\sigma,\tau) \in (\mathbb{R}_+)^2 : (s = \sigma^{\gamma_1}, t = \tau^{\gamma_2}) \in \Omega_2\}$ é um domínio limitado arbitrário de $(\mathbb{R}_+)^2$.

Por um lado, obteve-se que $u \in L^\infty(\widetilde{\Omega}_2)$ sempre que o lado direito da equação é finito para alguns a, b com $a + b < 0$. Por outro lado, no caso $a + b > 0$ foi estabelecido o seguinte resultado.

Proposição 0.1 (Veja [6]). *Sejam a e b números reais tais que*

$$a > -1, \quad b > -1, \quad e \quad a + b > 0.$$

Seja u uma função não-negativa em $C_c^1(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$u_\sigma \leq 0 \quad e \quad u_\tau \leq 0 \quad em \quad \{\sigma > 0, \tau > 0\}, \tag{7}$$

com desigualdades estritas no conjunto $\{u > 0\}$. Então, existe uma constante C, dependendo apenas de a e b, tal que

$$\left(\int_{\{\sigma>0,\tau>0\}} \sigma^a \tau^b |u|^{2_*} d\sigma d\tau\right)^{\frac{1}{2_*}} \leq C \left(\int_{\{\sigma>0,\tau>0\}} \sigma^a \tau^b |\nabla u|^2 d\sigma d\tau\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{8}$$

onde $2_* = \frac{2D}{D-2}$ e $D = a + b + 2$.

Neste trabalho, apresentaremos uma extensão da desigualdade (8) em $\mathbb{R}^2$ para o caso em $\mathbb{R}^n$ com qualquer peso da forma $x^A = |x_1|^{A_1} \cdots |x_n|^{A_n}$. Quando A_i são números não-negativos reais, mostraremos na Seção 2.2 que essa desigualdade de Sobolev com pesos é válida para qualquer função $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, e assim a hipótese (7) não é necessária. Também demonstraremos as desigualdades de Sobolev com $|\nabla u|^2$ substituída por outras potências, ou seja, $|\nabla u|^p$. Na Seção 2.3, descreveremos a melhor constante e as funções extremais envolvidas nestas desigualdades. Para isso, um resultado crucial é a nova desigualdade isoperimétrica com o peso x^A e com melhor constante, exibida na Seção 2.1. Além disso, na Seção 2.4 e 2.5, provamos as desigualdades de Morrey e Trudinger-Moser envolvendo o peso monomial.

Antes disso, no Capítulo 1 apresentamos alguns temas que serão importantes no decorrer do trabalho. Primeiramente, os espaços L^p, Hölder, Sobolev e Orlicz, definições e propriedades interessantes. Em seguida enunciamos as desigualdades clássicas de Sobolev, Morrey e Trudinger-Moser.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e resultados que serão usados no decorrer do trabalho.

1.1 Espaços L^p

No decorrer desta seção, Ω denota um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$. Para $p \geq 1$, $L^p(\Omega)$ denota o espaço de Banach clássico que consiste de classes de equivalência de funções mensuráveis em Ω que diferem a menos de um conjunto de medida nula e são p-integráveis, isto é, $|u|^p$ possui integral finita sobre Ω. A norma em $L^p(\Omega)$ é definida por

$$\|u\|_p = \|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.1}$$

Normalmente são bastante utilizadas as seguintes desigualdades quando estamos trabalhando com estimativas integrais.

Primeiramente, a *desigualdade de Young*:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}; \tag{1.2}$$

esta desigualdade é válida para números reais positivos a, b, p, q satisfazendo

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

O caso $p = q = 2$ da desigualdade (1.2) é conhecida como *desigualdade de Cauchy*.

Além disso, temos a *desigualdade de Hölder*, apresentada a seguir.

Teorema 1.1 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam* $1 \leq p,\ q \leq \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Então, se* $u \in L^p(\Omega),\ v \in L^q(\Omega)$, *temos*

$$\int_\Omega |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração. Veja [12, Apêndice B.2., p. 622]. ■

Quando $p = q = 2$, a desigualdade de Hölder se reduz a expressão conhecida como *desigualdade de Schwarz.* O fato de que (1.1) define uma norma em $L^p(\Omega)$ é uma consequência da desigualdade de Hölder.

Normalmente também utilizamos uma generalização da desigualdade de Hölder para m funções, $u_1, \dots, u_m$, que pertencem respectivamente aos espaços $L^{p_1}, \dots, L^{p_m}$, onde

$$\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} = 1.$$

A desigualdade resultante, obtida a partir do caso $m = 2$ por um argumento de indução, é

$$\int_\Omega u_1 \cdots u_m dx \leq \|u_1\|_{p_1} \cdots \|u_m\|_{p_m}.$$

Agora definiremos a *convolução* de uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ com uma função $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.2 (Young)**.** *Seja* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *e* $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *com* $1 \leq p \leq \infty$. *Então para quase todo* $x \in \mathbb{R}^n$ *a função* $y \mapsto f(x-y)g(y)$ *é integrável em* $\mathbb{R}^n$ *e definimos*

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Além disso $f \star g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *e*

$$\|f \star g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Demonstração. Veja [2, Teorema 4.15, p. 104]. ■

Dizemos que uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ pertence a $L^p_{loc}(\Omega)$ se $f\chi_K \in L^p(\Omega)$ para todo conjunto compacto K contido em Ω.

Além disso, precisamos agora da notação de multi-índice.

Definição 1.1. Um vetor da forma $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, onde cada componente α_i é um inteiro não-negativo, é chamado *multi-índice* de ordem

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Dado um multi-índice α, definimos

$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Teorema 1.3. *Seja $f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, e seja $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Então $f \star g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e, para todo $|\alpha| \leq k$,*

$$D^\alpha (f \star g) = (D^\alpha f) \star g.$$

Demonstração. Veja [2, Proposição 4.20, p. 107]. ■

1.2 Espaços de Hölder

Dada a equação de Laplace

$$\Delta u = 0, x \in \mathbb{R}^n,$$

sabemos que sua solução fundamental Γ é dada por

$$\Gamma(x-y) = \Gamma(|x-y|) = \begin{cases} \dfrac{1}{n(2-n)\omega_n}|x-y|^{2-n}, & n > 2, \\ \dfrac{1}{2\pi}\log|x-y|, & n = 2. \end{cases}$$

Para uma função integrável f em um domínio Ω, o potencial Newtoniano de f é a função w definida em $\mathbb{R}^n$ por

$$w(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y) f(y) dy. \tag{1.3}$$

Além disso, o estudo da equação de Poisson

$$\Delta u = f$$

pode ser fortemente afetado pelo estudo do potencial Newtoniano de f.

Desse modo, se f em (1.3) pertence a C_c^∞, escrevemos

$$\begin{aligned} w(x) &= \int_\Omega \Gamma(x-y)f(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x-y)f(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(z)f(x-z)dz, \end{aligned}$$

e assim podemos ver que a função w pertencerá a $C^\infty(\overline{\Omega})$. Se, por outro lado, f é apenas contínua, o potencial Newtoniano w não é necessariamente duplamente diferenciável. Acontece que uma classe de funções f convenientes para trabalhar com o potencial Newtoniano é a classe de funções Hölder contínuas que serão introduzidas agora.

A definição de continuidade não é uma definição quantitativa pois não nos diz o quão rapidamente os valores $u(y)$ se aproximam de $u(x)$ quando $y \to x$. O módulo de continuidade $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ de uma função contínua u, satisfazendo

$$|u(x) - u(y)| \leq \omega(|x-y|),$$

pode decrescer arbitrariamente devagar.

Uma maneira útil de fortalecer a definição de continuidade é exigir que o módulo de continuidade seja proporcional à potência $|x-y|^\gamma$ para algum expoente $0 < \gamma \leq 1$. Tais funções são ditas Hölder contínuas, ou Lipschitz contínuas, quando $\gamma = 1$. Grosseiramente, podemos pensar nas funções Hölder contínuas com expoente γ como sendo funções com derivadas fracionárias limitadas de ordem γ.

Assim, seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $0 < \gamma \leq 1$. Se $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função tal que

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\gamma, \quad x, y \in \Omega,$$

para alguma constante C, dizemos que tal função é *Hölder contínua com expoente* γ.

Definição 1.2. (i) Se $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é contínua e limitada, escrevemos

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} := \sup_{x\in\Omega} |u(x)|.$$

(ii) A γ-ésima Hölder seminorma de $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} := \sup_{x,y\in\Omega,\, x\neq y} \left\{ \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\gamma}} \right\},$$

e a γ-ésima Hölder norma é

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} := \|u\|_{C(\overline{\Omega})} + [u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}.$$

Definição 1.3. O espaço de Hölder

$$C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$$

consiste de todas as funções $u \in C^k(\overline{\Omega})$ para as quais a norma

$$\|u\|_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} := \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^{\alpha}u\|_{C(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^{\alpha}u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}$$

é finita.

O espaço $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ consiste de funções u que são k vezes diferenciáveis e cujas k-ésimas derivadas parciais são Hölder contínuas com expoente γ.

1.3 Espaços de Sobolev

Nesta seção faremos uma breve apresentação dos espaços de Sobolev. Considere o seguinte problema. Dada $f \in C([a,b])$, encontre uma função u satisfazendo

$$\begin{cases} -u'' + u = f \quad \text{em} \quad [a,b], \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Um solução clássica – ou forte – é uma função C^2 em $[a,b]$ satisfazendo (1.4) no sentido usual. Agora, multiplique por $\varphi \in C^1([a,b])$ a primeira equação no problema (1.4) e integre por partes. Obtemos

$$\int_a^b u'\varphi' + \int_a^b u\varphi = \int_a^b f\varphi, \text{ para toda } \varphi \in C^1([a,b]), \quad \varphi(a) = \varphi(b) = 0. \tag{1.5}$$

Note que (1.5) faz sentido desde que $u \in C^1([a,b])$ (onde (1.4) necessita que u possua duas derivadas). Com efeito, é suficiente que $u, u' \in L^1(a,b)$. Dizemos que uma função $u \in C^1$ que satisfaz (1.5) é uma solução fraca de (1.4). É possível obter uma solução clássica ao mostrar que qualquer solução fraca que é C^2 é uma solução clássica.

Desse modo, os espaços de Hölder introduzidos na seção anterior normalmente não são convenientes para a teoria elementar de EDPs, pois não conseguimos fazer estimativas analíticas para demonstrar que as soluções que construimos de fato pertencem a tais espaços. O que precisamos são outros tipos de espaços contendo funções "menos suaves", isto é, que consistem de funções que possuem algumas, mas não muitas, propriedades de suavidade. Isso nos motiva a definir o espaço de Sobolev $W^{1,p}(I)$, onde $I = (a,b)$ e $1 \leq p \leq \infty$:

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I); \exists g \in L^p(I) \text{ tal que } \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I) \right\}.$$

Para $u \in W^{1,p}$, denotamos $u' = g$.

O espaço $W^{1,p}$ munido da norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p}$$

é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.

Agora, podemos generalizar ainda mais a definição de espaço de Sobolev. Para fazer isso, começamos enfraquecendo a definição de derivada parcial.

Seja $C_c^\infty(\Omega)$ o espaço de funções infinitamente diferenciáveis $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ com suporte compacto em Ω. Chamamos a função $\varphi \in C_c^\infty$ de função teste.

Definição 1.4. Suponha que $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, e α é um multi-índice. Dizemos que v é a α-ésima derivada parcial de u, denotada por

$$D^\alpha u = v,$$

se

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\varphi dx \tag{1.6}$$

para todas as funções teste $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

Em outras palavras, se dada uma função u, existe uma função v para a qual (1.6) é válida para toda φ, dizemos que $D^\alpha u = v$ no sentido fraco. Dizemos que uma função é *fracamente diferenciável* se todas as suas derivadas fracas de primeira ordem existem e k *vezes fracamente diferenciável* se todas as suas derivadas fracas existem para ordens menores ou iguais a k. Denotamos o espaço linear de funções k vezes fracamente diferenciáveis por $W^k(\Omega)$.

Fixe $1 \leq p \leq \infty$ e k um inteiro não-negativo. Definimos agora certos espaços de funções cujos elementos possuem derivadas fracas de várias ordens que pertecem a vários espaços L^p.

Definição 1.5. O espaço de Sobolev

$$W^{k,p}(\Omega)$$

consiste de todas as funções localmente somáveis $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que para cada multi-índice α com $|\alpha| \leq k$, $D^\alpha u$ existe no sentido fraco e pertence a $L^p(\Omega)$, isto é,

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in W^k(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo } |\alpha| \leq k\}.$$

O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} & (1 \leq p < \infty) \\ \sum_{|\alpha|\leq k} \text{ess sup}_\Omega |D^\alpha u| & (p = \infty). \end{cases}$$

é um espaço de Banach.

Uma norma equivalente é

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_p \,.$$

Definição 1.6. Seja $\{u_m\}_{m=1}^\infty$, $u \in W^{k,p}(\Omega)$. Dizemos que u_m converge para u em $W^{k,p}(\Omega)$, denotado

$$u_m \to u \quad \text{em } W^{k,p}(\Omega),$$

se

$$\lim_{m\to\infty} \|u_m - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0.$$

Definição 1.7. Denotamos por

$$W_0^{k,p}(\Omega)$$

o fecho de $C_c^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$.

Portanto, $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ se e somente se existem funções $u_m \in C_c^\infty(\Omega)$ tal que $u_m \to u$ em $W^{k,p}(\Omega)$. Interpretamos $W_0^{k,p}(\Omega)$ como sendo as funções $u \in W^{k,p}(\Omega)$ tais que

$$D^\alpha u = 0 \text{ em } \partial\Omega \text{ para todo } |\alpha| \leq k-1.$$

Além disso, temos um resultado que nos garante uma aproximação global por funções suaves dada uma função $u \in W^{k,p}(\Omega)$.

Teorema 1.4. *O subspaço $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ é denso em $W^{k,p}(\Omega)$.*

Demonstração. Veja [13, Teorema 7.9, p. 154]. ■

A seguir enunciamos algumas propriedades que são claramente válidas para funções suaves, porém funções no espaço de Sobolev não são necessariamente suaves.

Teorema 1.5 (Propriedades da derivada fraca)**.** *Assuma que $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$, $|\alpha| \leq k$. Então*

(i) $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$ e $D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta} u$ para todos os multi-índices α, β com $|\alpha| + |\beta| \leq k$.

(ii) Para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(\Omega)$ e $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$, $|\alpha| \leq k$.

Demonstração. Veja [12, Teorema 1, p. 247]. ■

1.4 Espaços de Orlicz

Os espaços de Orlicz foram introduzidos como uma generalização natural dos espaços clássicos de Lebesgue L^p, $1 < p < \infty$. Para essa generalização, a função x^p que aparece na definição do espaço L^p é substituída por uma função convexa mais geral A, a qual é chamada N-função. Definimos uma N-função da seguinte maneira.

Definição 1.8. Seja a uma função real definida em $[0, \infty)$ com as seguintes propriedades:

(a) $a(0) = 0$, $a(t) > 0$ se $t > 0$, $\lim_{t\to\infty} a(t) = \infty$;

(b) a é não-decrescente, isto é, $s > t$ implica $a(s) \geq a(t)$;

(c) a é contínua pela direita, isto é, se $t \geq 0$, então $\lim_{s\to t^+} a(s) = a(t)$.

Então a função real A definida em $[0,\infty)$ por

$$A(t) = \int_0^t a(\tau)d\tau \tag{1.7}$$

é chamada uma *N-função.*

Podemos verificar que tal N-função A possui as seguintes propriedades:

(i) A é contínua em $[0,\infty)$;

(ii) A é estritamente crescente, isto é, $s > t \geq 0$ implica $A(s) > A(t)$;

(iii) A é convexa, isto é, se $s, t \geq 0$ e $0 < \lambda < 1$, então

$$A(\lambda s + (1-\lambda)t) \leq \lambda A(s) + (1-\lambda)A(t);$$

(iv) $\lim_{t\to 0} A(t)/t = 0$, e $\lim_{t\to\infty} A(t)/t = \infty$;

(v) se $s > t > 0$, então $A(s)/s > A(t)/t$.

As propriedades (i), (iii) e (iv) podem ser usadas para definir uma N-função pois elas implicam a existência de uma representação de A na forma (1.7) onde a possui as propriedades (a)-(c).

As funções a seguir são exemplos de N-funções:

$$\begin{aligned}
&A(t) = t^p, \quad 1 < p < \infty,\\
&A(t) = e^t - t - 1,\\
&A(t) = e^{t^p} - 1, \quad 1 < p < \infty,\\
&A(t) = (1+t)\log(1+t) - t.
\end{aligned}$$

Dizemos que uma N-função satisfaz uma *condição Δ_2 global* se existe uma constante positiva k tal que para todo $t \geq 0$,

$$A(2t) \leq kA(t). \tag{1.8}$$

Este é o caso se, e somente se, para todo $r > 1$ existe uma constante positiva $k = k(r)$ tal que para todo $t \geq 0$,

$$A(rt) \leq kA(t). \tag{1.9}$$

Similarmente, A satisfaz uma *condição Δ_2 próximo do infinito* se existe $t_0 > 0$ tal que (1.8) (ou equivalentemente (1.9) com $r > 1$) é válida para todo $t \geq t_0$. Além disso, t_0 pode ser substituido por qualquer número positivo menor t_1, pois se $t_1 \leq t \leq t_0$, então

$$A(rt) \leq \frac{A(rt_0)}{A(t_1)}A(t).$$

Podemos verificar que A satisfaz uma condição Δ_2 global (ou próximo do infinito) se, e somente se, existe uma constante positiva finita c tal que

$$\frac{1}{c}ta(t) \leq A(t) \leq ta(t)$$

é válida para todo $t \geq 0$ (ou para todo $t \geq t_0 > 0$), onde A é dado por (1.7).

Agora definimos a *classe de Orlicz $K_A(\Omega)$*. Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^n$ e seja A uma N-função. A classe de Orlicz $K_A(\Omega)$ é o conjunto de todas as funções mensuráveis u definidas em Ω que satisfazem

$$\int_\Omega A(|u(x)|)dx < \infty.$$

Como A é convexa, $K_A(\Omega)$ é sempre um conjunto convexo de funções mas pode não ser um espaço vetorial, isto é, pode existir $u \in K_A(\Omega)$ e $\lambda > 0$ tal que $\lambda u \notin K_A(\Omega)$.

Dizemos que o par (A, Ω) é Δ-regular se

(a) A satisfaz uma condição Δ_2 global, ou

(b) A satisfaz uma condição Δ_2 próximo do infinito e Ω possui volume finito.

Lema 1.1. *$K_A(\Omega)$ é um espaço vetorial (sob adição pontual e multiplicação escalar) se,* *e somente se, (A,Ω) é Δ-regular.*

Demonstração. Veja [1, Lema 8.8, p. 267.] ■

O *espaço de Orlicz* $L_A(\Omega)$ é o span linear da classe de Orlicz $K_A(\Omega)$, isto é, é o menor espaço vetorial (sob adição pontual e multiplicação escalar) que contem $K_A(\Omega)$. Evidentemente, $L_A(\Omega)$ contem todos os múltiplos escalares λu de elementos $u \in K_A(\Omega)$. Portanto, $K_A(\Omega) \subset L_A(\Omega)$, onde os conjuntos são iguais se, e somente se, (A,Ω) é Δ-regular.

O funcional

$$\|u\|_A = \inf\left\{K > 0 : \int_\Omega A\left(\frac{|u(x)|}{K}\right)dx \leq 1\right\}$$

é uma norma em $L_A(\Omega)$. Esta é chamada norma de Luxemburgo. O ínfimo é atingido. De fato, se K decresce para $\|u\|_A$ na desigualdade

$$\int_\Omega A\left(\frac{|u(x)|}{K}\right)dx \leq 1, \tag{1.10}$$

obtemos por convergência monótona

$$\int_\Omega A\left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_A}\right)dx \leq 1. \tag{1.11}$$

A igualdade pode não ser atingida em (1.11) mas se a igualdade vale em (1.10), então $K = \|u\|_A$.

Teorema 1.6. *$L_A(\Omega)$ é um espaço de Banach com respeito a norma de Luxemburgo.*

Exemplo 1.1. A N-função $A_p(t) = t^p/p$, $1 < p < \infty$, satisfaz uma condição Δ_2 global. Desse modo,

$$L^p(\Omega) = L_{A_p}(\Omega) = K_{A_p}(\Omega).$$

Além disso, $\|u\|_{A_p} = p^{-\frac{1}{p}}\|u\|_p$.

1.5 Desigualdades Clássicas de Sobolev

Considerando inicialmente o espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, nos perguntamos o seguinte: se uma função u pertence à $W^{1,p}(\Omega)$, ela pertence automaticamente à algum outro espaço?

A resposta será "sim", mas à qual espaço depende se

$$1 \leq p < n,$$

$$p = n,$$

$$n < p \leq \infty.$$

Esta pergunta é respondida usando como ferramentas as desigualdades de Sobolev, que estabelecem estimativas para funções arbitrárias nos espaços relevantes.

Teorema 1.7 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev). *Assuma que $1 \leq p < n$. Então existe uma constante C, que depende apenas de p e n, tal que*

$$\|u\|_{L^{p*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

para todo $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, onde $\dfrac{1}{p_*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$.

Demonstração. Veja [12, Teorema 1, p. 263]. ∎

Teorema 1.8 (Desigualdade de Morrey). *Dado $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p > n$, para qualquer bola $B = B_R$,*

$$\underset{\Omega \cap B_R}{osc}\, u \leq CR^{\gamma} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

onde $\gamma = 1 - n/p$ e C depende apenas de n e p.

Demonstração. Veja [13, Teorema 7.17, p. 163] ∎

Teorema 1.9 (Teorema de Trudinger-Moser). *Para qualquer domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com $n \geq 2$, existe uma constante positiva $C := C(N)$ tal que, para qualquer $0 < \alpha \leq \alpha_n := n\omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}}$, onde ω_{n-1} denota a área da superfície da bola unitária em $\mathbb{R}^n$, então temos*

$$\int_{\Omega} \exp(\alpha |u(x)|^N) dx \leq C|\Omega|$$

para toda $u \in W_0^{1,n}(\Omega)$ com $\|\nabla u\|_{L^n(\Omega)} \leq 1$, onde $N := \frac{n}{n-1}$.

Demonstração. Veja [17] e [21]. ∎

Capítulo 2

Desigualdades Isoperimétricas com pesos monomiais

2.1 Desigualdade Isoperimétrica

Nesta seção faremos uma exposição da demonstração da desigualdade isoperimétrica com um peso monomial. A prova estende a demonstração da desigualdade isoperimétrica clássica também devida a X. Cabré [7], [8], onde consideramos o problema linear

$$\begin{cases} \Delta u = c & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 1 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

tal que c é a única constante para a qual o problema tem solução. Quando $\Omega = B_1$, a solução de (2.1) é $u(x) = |x|^2/2$ e todas as desigualdades da prova se tornam igualdades. Aqui consideramos um problema semelhante a (2.1), mas o Laplaciano é substituído pelo operador

$$x^{-A}\mathrm{div}(x^A \nabla u) = \Delta u + \frac{A_1}{x_1} u_{x_1} + \cdots + \frac{A_n}{x_n} u_{x_n}. \tag{2.2}$$

Um fato essencial para obter a melhor contante na desigualdade isoperimétrica com pesos é que a função $u(x) = |x|^2/2$ é solução do problema de Neumann

$$\begin{cases} \mathrm{div}(x^A \nabla u) = b_\Omega x^A & \text{em } \Omega, \\ x^A \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = x^A & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

para alguma constante $b_\Omega > 0$ onde $\Omega = B_1 \cap \mathbb{R}^n_*$.

Teorema 2.1. *Seja A um vetor não-negativo em $\mathbb{R}^n$, x^A dado por (4), e $D = A_1 + \cdots + A_n + n$. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio de Lipschitz limitado. Denote*

$$m(\Omega) = \int_\Omega x^A dx \quad e \quad P(\Omega) = \int_{\partial\Omega} x^A d\sigma.$$

Então,

$$\frac{P(\Omega)}{m(\Omega)^{\frac{D-1}{D}}} \geq \frac{P(B_1^*)}{m(B_1^*)^{\frac{D-1}{D}}}, \tag{2.4}$$

onde $B_1^* = B_1(0) \cap \mathbb{R}^n_*$, e $\mathbb{R}^n_*$ é dada por (5).

Demonstração. Por simetria, podemos assumir que $A = (A_1, \ldots, A_k, 0, \ldots, 0)$, com $A_i > 0$ para $i = 1, \ldots, k$ onde $0 \leq k \leq n$. Com efeito, suponhamos que existam A_i, A_j, tal que $0 \leq i, j \leq n$ e $A_i = A_j = 0$. Assim podemos reescrever

$$x^A = |x_1|^{A_1} \cdots |x_{i-1}|^{A_{i-1}} |x_{i+1}|^{A_{i+1}} \cdots |x_{j-1}|^{A_{j-1}} |x_{j+1}|^{A_{j+1}} \cdots |x_n|^{A_n} |x_{i,j}|^{A_{i,j}},$$

onde $x_{i,j} = (x_i, x_j)$ e $A_{i,j} = (0, 0)$.

Desse modo, podemos redefinir $A = (A_1, \ldots, A_k, 0, 0)$. O processo é feito de modo análogo caso tenhamos $A_i = 0$ para um número maior de entradas.

Além disso, podemos afirmar que $\Omega \subset \mathbb{R}^n_*$. De fato, dividimos o domínio Ω em no máximo 2^k subdomínios disjuntos Ω_j, $j = 1, \ldots, J$, tal que cada Ω_j está contido no cone $\{\varepsilon_i x_i > 0, i = 1, \ldots, k\}$ para diferentes $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, e $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \cdots \cup \overline{\Omega}_J$. Mostraremos que

$$P(\Omega) = \sum_{j=1}^{J} P(\Omega_j) \quad \text{e} \quad m(\Omega) = \sum_{j=1}^{J} m(\Omega_j).$$

Para a primeira igualdade, note que

$$\begin{aligned} P(\Omega_j) &= \int_{\partial\Omega_j} x^A d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega \cap \overline{\Omega}_j} x^A d\sigma + \int_{\Omega \cap \partial\Omega_j} x^A d\sigma. \end{aligned}$$

Como o peso é zero em $\Omega \cap \partial\Omega_j$ já que é zero em $\{x_i = 0\}$ para cada $i = 1, \ldots, k$, temos

$$\sum_{j=1}^{J} P(\Omega_j) = \sum_{j=1}^{J} \int_{\partial\Omega \cap \overline{\Omega}_j} x^A d\sigma = P(\Omega).$$

Para a segunda igualdade:

$$\begin{aligned}
m(\Omega_j) &= \int_{\Omega_j} x^A dx \\
&= \frac{1}{D}\int_{\Omega_j} \operatorname{div}(x^A x)dx \\
&= \frac{1}{D}\int_{\partial\Omega_j} x^A\langle x, \nu(x)\rangle d\sigma \\
&= \frac{1}{D}\left[\int_{\partial\Omega\cap\overline{\Omega}_j} x^A\langle x, \nu(x)\rangle d\sigma + \int_{\Omega\cap\partial\Omega_j} x^A\langle x, \nu(x)\rangle d\sigma\right].
\end{aligned}$$

Note que:

- em $\Omega \cap \partial\Omega_j$, o peso é zero já que $\{x_i = 0\} \subset \Omega \cap \partial\Omega_j$ para alguns $i = 1, \ldots, k$, logo

$$\int_{\Omega\cap\partial\Omega_j} x^A\langle x, \nu(x)\rangle d\sigma = 0;$$

- temos que

$$\begin{aligned}
m(\Omega) &= \int_{\Omega} x^A dx \\
&= \frac{1}{D}\int_{\Omega} \operatorname{div}(x^A x)dx \\
&= \frac{1}{D}\int_{\partial\Omega} x^A\langle x, \nu(x)\rangle d\sigma \\
&= \frac{1}{D}\sum_{j=1}^{J}\int_{\partial\Omega\cap\overline{\Omega}_j} x^A\langle x, \nu(x)\rangle d\sigma.
\end{aligned}$$

Logo

$$\sum_{j=1}^{J} m(\Omega_j) = \frac{1}{D}\sum_{j=1}^{J}\int_{\partial\Omega\cap\overline{\Omega}_j} x^A\langle x, \nu(x)\rangle d\sigma = m(\Omega).$$

Agora, seja $\dfrac{P(\Omega_{j_0})}{m(\Omega_{j_0})^{\frac{D-1}{D}}} := \min_{1\leq j\leq J}\left\{\dfrac{P(\Omega_j)}{m(\Omega_j)^{\frac{D-1}{D}}}\right\}$.

Assim

$$
\begin{aligned}
\frac{P(\Omega_{j_0})}{m(\Omega_{j_0})^{\frac{D-1}{D}}} &\leq \frac{P(\Omega_j)}{m(\Omega_j)^{\frac{D-1}{D}}} \quad \text{para todo } 1 \leq j \leq J \\
&\leq \sum_{j=1}^{J} \frac{P(\Omega_j)}{m(\Omega_j)^{\frac{D-1}{D}}} \\
&= \frac{P(\Omega)}{\sum_{j=1}^{J} m(\Omega_j)^{\frac{D-1}{D}}} \\
&\leq \frac{P(\Omega)}{m(\Omega)^{\frac{D-1}{D}}},
\end{aligned}
$$

usando que $\frac{D-1}{D} < 1$ na última desigualdade. Além disso, a desigualdade é estrita a menos que $J = 1$.

Após algumas reflexões, podemos assumir que $\Omega_{j_0} \subset \mathbb{R}^n_*$.

Além disso, como Ω_{j_0} é a intersecção de um domínio de Lipschitz de $\mathbb{R}^n$ com $\mathbb{R}^n_*$, Ω_{j_0} pode ser aproximado em área e perímetro com peso por domínios suaves Ω_ε com $\overline{\Omega}_\varepsilon \subset \Omega_{j_0} \subset \mathbb{R}^n_*$.

Assim, podemos assumir que Ω é suave e $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n_*$. Em particular, $x^A \geq c$ em $\overline{\Omega}$ para alguma constante positiva c.

Seja u uma solução do problema de Neumann

$$
\begin{cases}
\operatorname{div}(x^A \nabla u) = b_\Omega x^A \quad \text{em } \Omega, \\
\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 1 \quad \text{em } \partial\Omega,
\end{cases}
\tag{2.5}
$$

onde a constante b_Ω é escolhida tal que o problema tem uma única solução a menos de uma constante aditiva, isto é,

$$
b_\Omega = \frac{P(\Omega)}{m(\Omega)}. \tag{2.6}
$$

Sobre a existência dessa função u, veja [9, Teorema 4.22, p. 78]. Sobre a constante b_Ω, temos o seguinte.

Integrando a primeira equação de (2.5) sobre Ω temos

$$
b_\Omega \int_\Omega x^A dx = \int_\Omega \operatorname{div}(x^A \nabla u) dx = \int_{\partial\Omega} x^A \langle \nabla u, \nu \rangle d\sigma = \int_{\partial\Omega} x^A d\sigma,
$$

assim obtemos (2.6).

Agora suponha que existam funções u e v satisfazendo (2.5). Desse modo

$$0 = \int_\Omega \operatorname{div}(x^A \nabla(u-v))(u-v)dx = -\int_\Omega x^A |\nabla(u-v)|^2 dx,$$

logo $\nabla(u-v) = 0$, e assim $u = v + c$, onde c é uma constante.

Dizemos que um operador

$$Lu = a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)D_i u + c(x)u$$

é uniformemente elíptico se ${}^\Lambda\!/\!_\lambda$ é limitado em Ω, onde $\lambda(x)$ e Λ denotam o menor e o maior autovalor de $[a^{ij}]$.

A primeira equação de (2.5) pode ser reescrita

$$\begin{aligned}
x^{-A}\operatorname{div}(x^A\nabla u) &= x^{-A}\operatorname{div}\left(|x_1|^{A_1}\cdots|x_n|^{A_n}(u_{x_1},\dots,u_{x_n})\right)\\
&= x^{-A}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(|x_1|^{A_1}\cdots|x_n|^{A_n}u_{x_1}\right)+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_n}\left(|x_1|^{A_1}\cdots|x_n|^{A_n}u_{x_n}\right)\right]\\
&= x^{-A}[\left(A_1|x_1|^{A_1-1}\cdots|x_n|^{A_n}u_{x_1}+x^A u_{x_1x_1}\right)+\\
&\qquad+\cdots+\left(|x_1|^{A_1}\cdots A_n|x_n|^{A_n-1}u_{x_n}+x^A u_{x_nx_n}\right)]\\
&= \Delta u + \frac{A_1}{x_1}u_{x_1}+\cdots+\frac{A_n}{x_n}u_{x_n} = b_\Omega, \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

logo esse operador é uniformemente elíptico em Ω, onde u é suave em $\overline{\Omega}$.

Algumas observações úteis:

(i) o problema (2.5) é equivalente a (2.3) pois $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^n_*$;

(ii) quando $\Omega = B_1^* = B_1 \cap \mathbb{R}^n_*$ a solução para (2.3) é dada por $u(x) = \dfrac{|x|^2}{2}$, pois

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \langle \nu, \nabla u\rangle = \langle (x_1,\dots,x_n),(x_1,\dots,x_n)\rangle = x_1^2+\cdots+x_n^2 = 1$$

e

$$\operatorname{div}(x^A\nabla u) = \operatorname{div}\left(x_1^{A_1+1}\cdots x_n^{A_n}, x_1x_2^{A_2+1}\cdots x_n^{A_n},\cdots,x_1^{A_1}\cdots x_n^{A_n+1}\right) = \sum_{i=1}^n (A_i+1)x^A$$

(iii) todas as desigualdades no resto da prova são igualdades para $\Omega = B_1^*$.

Considere o conjunto de contato inferior de u, definido por

$$\Gamma_u = \{x \in \Omega : u(y) \geq u(x) + \nabla u(x) \cdot (y - x) \text{ para todo } y \in \overline{\Omega}\}.$$

Esse é o conjunto dos pontos onde o hiperplano tangente ao gráfico de u situa-se abaixo de u em todo $\overline{\Omega}$.

Defina também

$$\Gamma_u^* = \{x \in \Gamma_u : u_{x_1} > 0, \cdots, u_{x_k} > 0\} = \Gamma_u \cap (\nabla u)^{-1}(\mathbb{R}_*^n).$$

Afirmamos que

$$B_1^* \subset \nabla u(\Gamma_u^*), \tag{2.8}$$

onde $B_1^* = B_1(0) \cap \mathbb{R}_*^n$.

Para mostrar (2.8), mostraremos inicialmente que $B_1(0) \subset \nabla u(\Gamma_u)$.

Seja $p \in \mathbb{R}^n$ tal que $|p| < 1$ e seja $x \in \overline{\Omega}$ tal que $\min_{y \in \overline{\Omega}}\{g(y) := u(y) - p \cdot y\} = u(x) - p \cdot x$.

Suponha que $x \in \partial\Omega$. Assim, a derivada normal exterior de $u(y) - p \cdot y$ em x será não positiva. De fato, se $\nu(x)$ é o vetor normal unitário apontando pra fora em x, temos que $\nabla g(x) \cdot \nu(x) \leq 0$ pois g está decrescendo nessa direção em x.

Logo

$$0 \geq \nabla g(x) \cdot \nu(x) = \nabla u(x) \cdot \nu(x) - p \cdot \nu(x)$$

e assim

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)(x) = \nabla u(x) \cdot \nu \leq p \cdot \nu \leq |p| < 1,$$

uma contradição com (2.5).

Portanto, $x \in \Omega$, e assim x é ponto mínimo interior da função $u(y) - p \cdot y$.

Em particular $p = \nabla u(x)$ e $x \in \Gamma_u$. Logo $B_1(0) \subset \nabla u(\Gamma_u)$. Intersectando ambos os lados com $\mathbb{R}_*^n$,

$$B_1^* = B_1(0) \cap \mathbb{R}_*^n \subset \nabla u(\Gamma_u) \cap \mathbb{R}_*^n = \nabla u(\Gamma_u^*).$$

A partir de (2.8), temos

$$
\begin{aligned}
m(B_1^*) = \int_{B_1^*} x^A dx &\leq \int_{\nabla u(\Gamma_u^*)} x^A dx \\
&\leq \int_{\Gamma_u^*} (\nabla u(x))^A \det D^2 u(x) dx \qquad (2.9)\\
&= \int_{\Gamma_u^*} \frac{(\nabla u(x))^A}{x^A} \det D^2 u(x) x^A dx \\
&= \int_{\Gamma_u^*} \left(\frac{u_{x_1}}{x_1}\right)^{A_1} \cdots \left(\frac{u_{x_k}}{x_k}\right)^{A_k} \det D^2 u(x) x^A dx. \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

A desigualdade (2.9) segue de acordo com a observação feita no Teorema A.5, já que $\nabla u : \Gamma_u^* \to \mathbb{R}^n$ é um mapa suave e o jacobiano $\det D^2 u$ é não-negativo em Γ_u. De fato, mostraremos que $D^2 u$ é não-negativa, isto é, para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi^T D^2 u(x) \xi \geq 0$.

Seja t pequeno o suficiente tal que $x + t\xi \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, então

$$u(x + t\xi) = u(x) + t\nabla u(x)\xi + \frac{t^2}{2}\xi^T D^2(x)\xi + o(t^2)$$

e como $x \in \Gamma_u$, temos

$$t^2 \xi^T D^2(x)\xi + o(t^2) \geq 0.$$

Dividindo por t^2 e fazendo $t \to 0$, a afirmação segue.

Agora usamos a versão com pesos da desigualdade aritmética-geométrica (Teorema A.1),

$$w_1^{\lambda_1} \cdots w_m^{\lambda_m} \leq \left(\frac{\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_m}\right)^{\lambda_1 + \cdots + \lambda_m}, \qquad (2.11)$$

onde λ_i e w_i são números arbitrários não-negativos. Aplicamos (2.11) ao números $w_i = \dfrac{u_{x_i}}{x_i}$ e $\lambda_i = A_i$, para $i = 1, \cdots, k$, e aos autovalores $D^2 u(x)$ e $\lambda_j = 1$, para $j = k+1, \cdots, k+n$. Estes são todos não-negativos quando $x \in \Gamma_u^*$. Obtemos

$$\left(\frac{u_{x_1}}{x_1}\right)^{A_1} \cdots \left(\frac{u_{x_k}}{x_k}\right)^{A_k} \det D^2 u \leq \left(\frac{A_1 \frac{u_{x_1}}{x_1} + \cdots + A_k \frac{u_{x_k}}{x_k} + \Delta u}{A_1 + \cdots + A_k + n}\right)^{A_1 + \cdots + A_k + n} \quad \text{em } \Gamma_u^*.$$

Isso, combinado a (2.7)

$$A_1 \frac{u_{x_1}}{x_1} + \cdots + A_k \frac{u_{x_k}}{x_k} + \Delta u = \frac{\operatorname{div}(x^A \nabla u)}{x^A} \equiv b_\Omega,$$

nos dá
$$\int_{\Gamma_u^*} \frac{(\nabla u(x))^A}{x^A} \det D^2u(x) x^A dx \leq \int_{\Gamma_u^*} \left(\frac{b_\Omega}{D}\right)^D x^A dx.$$

Portanto, por (2.10) e (2.6),

$$\begin{aligned} m(B_1^*) &\leq \int_{\Gamma_u^*} \left(\frac{b_\Omega}{D}\right)^D x^A dx = \int_{\Gamma_u^*} \left(\frac{P(\Omega)}{Dm(\Omega)}\right)^D x^A dx \\ &= \left(\frac{P(\Omega)}{Dm(\Omega)}\right)^D m(\Gamma_u^*) \\ &\leq \left(\frac{P(\Omega)}{Dm(\Omega)}\right)^D m(\Omega). \end{aligned}$$

Assim concluimos que
$$Dm(B_1^*)^{\frac{1}{D}} \leq \frac{P(\Omega)}{m(\Omega)^{\frac{D-1}{D}}}. \tag{2.12}$$

Finalmente, usando que $\frac{|x|^2}{2}$ resolve (2.3) com $b_\Omega = D$ em $\Omega = B_1^*$, temos $P(B_1^*) = Dm(B_1^*)$. Logo
$$Dm(B_1^*)^{\frac{1}{D}} = \frac{P(B_1^*)}{m(B_1^*)} m(B_1^*)^{\frac{1}{D}} = \frac{P(B_1^*)}{m(B_1^*)^{\frac{D-1}{D}}} \tag{2.13}$$

e a desigualdade isoperimétrica (2.4) segue.

■

2.2 Desigualdade de Sobolev

O objetivo desta seção é apresentar a demonstração da desigualdade de Sobolev com um peso monomial. Note que o expoente p_* é o mesmo da desigualdade de Sobolev clássica, mas neste caso a "dimensão" é dada por D ao invés de n. Além disso, quando $A_1 = \cdots = A_n = 0$ temos que $D = n$ e (2.14) é exatamente a desigualdade de Sobolev clássica.

Na Proposição 2.1 apresentamos uma prova alternativa para a desigualdade de Sobolev, adicionando algumas hipóteses, porém perdendo a melhor constante.

Teorema 2.2. *Seja A um vetor não-negativo em $\mathbb{R}^n$, $D = A_1 + \cdots + A_n + n$, e $1 \leq p < D$ um número real. Então existe uma constante C_p tal que para toda $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$,*

$$\left(\int_{\mathbb{R}_*^n} x^A |u|^{p_*} dx\right)^{\frac{1}{p_*}} \leq C_p \left(\int_{\mathbb{R}_*^n} x^A |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.14}$$

onde $p_* = \dfrac{pD}{D-p}$ *e* x^A *é dado por* (4).

Demonstração. Provaremos primeiramente o caso $p = 1$. Podemos assumir $u \geq 0$ e por argumentos de densidade, $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Além disso, podemos supor $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}_*^n)$. De fato, considere $\tilde{u}_\varepsilon = u\eta_\varepsilon$, onde $\eta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}_*^n)$ é uma função satisfazendo $\eta_\varepsilon \equiv 1$ no conjunto $\{x_i > \varepsilon$ quando $A_i > 0\}$ e $|\nabla \eta_\varepsilon| \leq C/\varepsilon$.

Então

$$\|u\eta_\varepsilon\|_{L^{\frac{D}{D-1}}(\mathbb{R}_*^n, x^A dx)} \to \|u\|_{L^{\frac{D}{D-1}}(\mathbb{R}_*^n, x^A dx)}$$

quando $\varepsilon \to 0$. Além disso, seja $\Omega = \text{supp}(u)$. Assim

$$\begin{aligned}
\|\nabla(u\eta_\varepsilon)\|_{L^1(\mathbb{R}_*^n, x^A dx)} &= \int_\Omega |\nabla(u\eta_\varepsilon)| x^A dx \\
&= \int_\Omega |\nabla u \eta_\varepsilon + u \nabla \eta_\varepsilon| x^A dx \\
&\leq \int_\Omega |\nabla u| \eta_\varepsilon x^A dx + \int_\Omega \|u\|_\infty |\nabla \eta_\varepsilon| x^A dx,
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}_*^n} (|\nabla(u\eta_\varepsilon)| - |\nabla u| \eta_\varepsilon) x^A dx \right| &\leq \|u\|_\infty \int_\Omega |\nabla \eta_\varepsilon| x^A dx \\
&\leq C_1 \left(\sum_{i=1}^n \int_{\Omega \cap \{0 \leq x_i \leq \varepsilon\}} |\eta_\varepsilon^i| x^A dx \right) \\
&\leq C_1 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} \frac{C}{\varepsilon} x^A dx, \quad \text{onde} \quad \Omega \cap \{0 \leq x_i \leq \varepsilon\} := \Omega_i \\
&\leq C \sum_{i=1}^n x_1^{A_1+1} \cdots \frac{x_i^{A_i+1}}{\varepsilon} \cdots x_n^{A_n+1} \Big|_{\Omega_i} \\
&\leq C \sum_{i=1}^n \left(\max_{\Omega_i} \left\{ x_1^{A_1+1} \cdots x_{i-1}^{A_{i-1}+1} x_{i+1}^{A_{i+1}+1} \cdots x_n^{A_n+1} \right\} \right) \varepsilon^{A_i} \to 0
\end{aligned}$$

quando $\varepsilon \to 0$. Portanto,

$$\|\nabla(u\eta_\varepsilon)\|_{L^1(\mathbb{R}_*^n, x^A dx)} \to \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}_*^n, x^A dx)}.$$

Assim, se a desigualdade (2.14) é válida no caso $p = 1$ para todo $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}_*^n)$, temos

$$\|u\|_{L^{\frac{D}{D-1}}(\mathbb{R}_*^n, x^A dx)} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}_*^n, x^A dx)},$$

logo, dado $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, temos $u\eta_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}_*^n)$ e

$$\|u\eta_\varepsilon\|_{L^{\frac{D}{D-1}}(\mathbb{R}_*^n, x^A dx)} \leq C_p \|\nabla(u\eta_\varepsilon)\|_{L^1(\mathbb{R}_*^n, x^A dx)},$$

Portanto, fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos a desigualdade (2.14) quando $p = 1$ para $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Assim, basta considerar $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}_*^n)$.

Depois dessas considerações, mostraremos o caso $p = 1$. Para cada $t \geq 0$, defina

$$\{u > t\} := \{x \in \mathbb{R}_*^n : u(x) > t\} \quad \text{e} \quad \{u = t\} := \{x \in \mathbb{R}_*^n : u(x) = t\}.$$

Como $u \geq 0$ e $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, pelo Teorema de Sard (Teorema A.6), para quase todo t na imagem de u, temos que $|\nabla u| \neq 0$ no conjunto de nível $\{u = t\}$. Portanto, $\{u = t\}$ é uma superfície $(n-1)$-dimensional e, além disso, $\{u = t\} = \partial\{u > t\}$.

Assim, pelo Teorema 2.1, temos

$$m(\{u > t\})^{\frac{D-1}{D}} \leq C_1^{-1} P(\{u > t\}) = C_1^{-1} \int_{\{u=t\}} x^A d\sigma \tag{2.15}$$

para quase todo t (onde $\{u = t\}$ é suave). Aqui C_1 é a constante ótima em (2.4), isto é,

$$C_1 = \frac{P(B_1^*)}{m(B_1^*)^{\frac{D-1}{D}}} = Dm(B_1^*)^{\frac{1}{D}}. \tag{2.16}$$

Seja χ_A a função característica do conjunto A. Assim

$$u(x) = \int_0^{+\infty} \chi_{\{u(x) > \tau\}} d\tau.$$

Logo, pela desigualdade integral de Minkowski (Teorema A.2)

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n_*} x^A|u|^{\frac{D}{D-1}}dx\right)^{\frac{D-1}{D}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n_*} x^A\left(\int_0^\infty \chi_{\{u(x)>\tau\}}d\tau\right)^{\frac{D}{D-1}}dx\right)^{\frac{D-1}{D}}\\ &\leq \int_0^{+\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^n_*}\chi_{\{u(x)>\tau\}}x^Adx\right)^{\frac{D-1}{D}}d\tau\\ &= \int_0^{+\infty}\left(\int_{\{u(x)>\tau\}}x^Adx\right)^{\frac{D-1}{D}}d\tau\\ &= \int_0^{+\infty} m(\{u>\tau\})^{\frac{D-1}{D}}d\tau.\end{aligned}$$

A desigualdade (2.15) e a fórmula da co-área (Teorema A.4), nos dá

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n_*} x^A|u|^{\frac{D}{D-1}}dx\right)^{\frac{D-1}{D}} &\leq \int_0^{+\infty} m(\{u>\tau\})^{\frac{D-1}{D}}d\tau\\ &\leq C_1^{-1}\int_0^{+\infty}\int_{\{u=\tau\}}x^Ad\sigma d\tau = C_1^{-1}\int_{\mathbb{R}^n_*}x^A|\nabla u|dx, \qquad (2.17)\end{aligned}$$

e o teorema está provado para $p=1$.

Provaremos o caso $1<p<D$. Tome $u\in C^1_c(\mathbb{R}^n)$ e defina $\nu=|u|^\gamma$, onde $\gamma=\dfrac{p_*}{1_*}$. Como

$$\gamma=\frac{\frac{pD}{D-p}}{\frac{D}{D-1}}=\frac{p(D-1)}{D-p}>1, \qquad \text{pois} \qquad pD-p>D-p,$$

temos que $\nu\in C^1_c(\mathbb{R}^n)$ e podemos aplicar a desigualdade de Sobolev com expoente $p=1$:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_*} x^A|u|^{p_*}dx\right)^{\frac{1}{1_*}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n_*} x^A|\nu|^{\frac{D}{D-1}}dx\right)^{\frac{D-1}{D}} \leq c_0\int_{\mathbb{R}^n_*}x^A|\nabla\nu|dx.$$

Agora, $|\nabla\nu|=\gamma|u|^{\gamma-1}|\nabla u|$, e pela desigualdade de Hölder (Teorema 1.1):

$$\int_{\mathbb{R}^n_*}x^A|\nabla\nu|dx\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n_*}x^A|\nabla u|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n_*}x^A|u|^{(\gamma-1)p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Pelas definições de γ e p_*, segue que

$$\frac{1}{1_*}-\frac{1}{p'}=\frac{1}{p_*}, \quad (\gamma-1)p'=p_*,$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_*} x^A|u|^{p_*}dx\right)^{\frac{1}{1_*}}\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n_*}x^A|\nabla u|^pdx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n_*}x^A|u|^{(\gamma-1)p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}},$$

e portanto,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_*} x^A|u|^{p_*}dx\right)^{\frac{1}{p_*}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n_*} x^A|u|^{p_*}dx\right)^{\frac{1}{1_*}-\frac{1}{p'}}$$
$$\leq C_p\left(\int_{\mathbb{R}^n_*} x^A|\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

■

Agora apresentaremos uma prova alternativa e mais curta do Teorema 2.2, porém sem a melhor constante na desigualdade, sob algumas hipóteses adicionais.

Proposição 2.1. *Seja A um vetor positivo em $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < D$ um número real. Então existe uma constante C tal que para toda $u \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo*

$$u_{x_i} \leq 0 \ \textit{em}\ (\mathbb{R}_+)^n \ \textit{para}\ i = 1, \ldots, n, \tag{2.18}$$

temos

$$\left(\int_{(\mathbb{R}_+)^n} x^A|u|^{p_*}dx\right)^{\frac{1}{p_*}} \leq C\left(\int_{(\mathbb{R}_+)^n} x^A|\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

onde $p_* = \dfrac{pD}{D-p}$ *e* $D = A_1 + \cdots + A_n + n$.

Demonstração. Provaremos inicialmente o caso $p = 1$. Pela hipótese (2.18), temos que $u \geq 0$ em $(\mathbb{R}_+)^n$. Agora, integrando por partes (Teorema A.3), temos

$$\int_{(\mathbb{R}_+)^n} x^A(|u_{x_1}| + \cdots + |u_{x_n}|)dx = -\int_{(\mathbb{R}_+)^n} x^A(u_{x_1} + \cdots + u_{x_n})dx$$
$$= \int_{(\mathbb{R}_+)^n} x^A u\left(\frac{A_1}{x_1} + \cdots + \frac{A_n}{x_n}\right)dx,$$

e portanto,

$$\int_{(\mathbb{R}_+)^n} x^A|\nabla u|dx \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{(\mathbb{R}_+)^n} x^A(|u_{x_1}| + \cdots + |u_{x_n}|)dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{(\mathbb{R}_+)^n} x^A u\left(\frac{A_1}{x_1} + \cdots + \frac{A_n}{x_n}\right)dx$$
$$\geq \frac{1}{K}\int_{(\mathbb{R}_+)^n} x^A u\left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)dx, \tag{2.19}$$

onde $K = \dfrac{\sqrt{n}}{\min_i A_i}$.

Seja $\lambda > 0$ tal que

$$\int_{(\mathbb{R}_+)^n} x^A u^{\frac{D}{D-1}} dx = b\lambda^D, \tag{2.20}$$

onde $b = \displaystyle\int_{\{0\leq x_i\leq 1\}} x^A dx$. Aqui $\{0 \leq x_i \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1 \text{ para } i = 1, \dots, n\}$.

Afirmamos que, para cada $x \in (\mathbb{R}_+)^n$ temos $u(x)^{\frac{1}{D-1}} \leq \dfrac{\lambda}{x_i}$ para algum $i = 1, \dots, n$.

De fato, suponha que exista $y \in (\mathbb{R}_+)^n$ tal que $u(y)^{\frac{1}{D-1}} > \dfrac{\lambda}{y_i}$ para cada i, e assim

$$u(y)^{\frac{D}{D-1}} > \frac{\lambda^D}{y^{A+1}},$$

onde $A + 1 = A + (1, \dots, 1) = (A_1 + 1, \dots, A_n + 1)$. Mas, pela condição (2.18), se $0 \leq x_i \leq y_i$ para todo $i = 1, \dots, n$,

$$u(x) - u(y) = \nabla u(c)(x - y) = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}(c)(x_i - y_i) \geq 0.$$

Assim

$$\int_{\{0\leq x_i\leq y_i\}} x^A u(x)^{\frac{D}{D-1}} dx > \lambda^D \int_{\{0\leq x_i\leq y_i\}} x^A y^{-A-1} dx = \lambda^D \int_{\{0\leq z_i\leq 1\}} z^A dz = b\lambda^D,$$

o que é uma contradição com a suposição (2.20).

Portanto, para cada $x \in (\mathbb{R}_+)^n$ temos $u(x)^{\frac{1}{D-1}} \leq \dfrac{\lambda}{x_i}$ para algum $i = 1, \dots, n$.

Desse modo,

$$u(x)^{\frac{1}{D-1}} \leq \lambda \left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} \right) \text{ em } (\mathbb{R}^n_*),$$

logo

$$\int_{(\mathbb{R}_+)^n} x^A u^{\frac{D}{D-1}} dx \leq \lambda \int_{(\mathbb{R}_+)^n} x^A u \left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} \right) dx. \tag{2.21}$$

Por (2.20), sabemos que

$$\lambda = b^{-\frac{1}{D}} \left(\int_{(\mathbb{R}_+)^n} x^A u^{\frac{D}{D-1}} dx \right)^{\frac{1}{D}},$$

assim, deduzimos de (2.19) e (2.21)

$$\begin{aligned}\left(\int_{(\mathbb{R}_+)^n} x^A u^{\frac{D-1}{D}} dx\right)^{\frac{D}{D-1}} &= \left(\int_{(\mathbb{R}_+)^n} x^A u^{\frac{D-1}{D}} dx\right)\left(\int_{(\mathbb{R}_+)^n} x^A u^{\frac{D-1}{D}} dx\right)^{-\frac{1}{D}} \\ &\leq b^{-\frac{1}{D}} \int_{(\mathbb{R}_+)^n} x^A u \left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) dx \\ &\leq K b^{-\frac{1}{D}} \int_{(\mathbb{R}_+)^n} x^A |\nabla u| dx.\end{aligned}$$

Isso completa a prova e nos dá a constante $Kb^{-\frac{1}{D}}$ calculada explicitamente.

Para $1 < p < D$, a desigualdade segue aplicando a desigualdade de Hölder, como em Teorema 2.2.

■

Observação 2.1. É possível pensar em adaptar a prova clássica da desigualdade de Sobolev feita por Gagliardo e Nirenberg (veja Teorema 1.7) pro caso de pesos monomiais. Mostraremos que isso nos leva a desigualdade

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} x^A u^{\frac{n}{n-1}} dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} x^{\frac{n-1}{n}A} |\nabla u| dx, \tag{2.22}$$

mas não à desigualdade de Sobolev (2.14) com o mesmo peso em ambas as integrais.

De fato, temos que

$$|x_i|^{\frac{n-1}{n}A_i} |u(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |y_i|^{\frac{n-1}{n}A_i} |\nabla u(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)| dy_i.$$

Isso segue integrando u_{y_i} em $(x_i, +\infty)$ se $x_i > 0$ e em $(-\infty, x_i)$ se $x_i < 0$, e usando que $|x_i| \leq |y_i|$ nestas semirretas.

Portanto,

$$|x_1|^{\frac{n-1}{n}A_1} \cdots |x_n|^{\frac{n-1}{n}A_n} |u(x)|^n \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \cdots, y_i, \cdots, x_n)| |y_i|^{\frac{n-1}{n}A_i} dy_i\right),$$

logo

$$|x_1|^{\frac{A_1}{n}} \cdots |x_n|^{\frac{A_n}{n}} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \cdots, y_i, \cdots, x_n)| |y_i|^{\frac{n-1}{n}A_i} dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}. \tag{2.23}$$

Integrando ambos os lados com respeito a medida $x^{\frac{n-1}{n}A}dx$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} x^A |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |x_1|^{\frac{A_1}{n}} \cdots |x_n|^{\frac{A_n}{n}} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} x^{\frac{n-1}{n}A} dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \cdots, y_i, \cdots, x_n)| |y_i|^{\frac{n-1}{n}A_i} dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} x^{\frac{n-1}{n}A} dx.\end{aligned}$$

Chamando $d\mu_i(x_i) = |x_i|^{\frac{n-1}{n}A_i} dx_i$ e $d\mu_i(y_i) = |y_i|^{\frac{n-1}{n}A_i} dy_i$, e integrando (2.23) com relação à $d\mu_1(x_1)$:

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} |x_1|^{A_1} \cdots |x_n|^{\frac{A_n}{n}} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \\ &\qquad \leq \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \cdots, y_i, \cdots, x_n)| d\mu_i(y_i) \right)^{\frac{1}{n-1}} d\mu_1(y_1) \\ &\qquad = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| d\mu_1(y_1) \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| d\mu_i(y_i) \right)^{\frac{1}{n-1}} d\mu_1(x_1) \\ &\qquad \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| d\mu_1(y_1) \right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\prod_{i=2}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| d\mu_1(x_1) d\mu_i(y_i) \right)^{\frac{1}{n-1}}.\end{aligned}$$

Integrando com relação à $d\mu_2(x_2)$:

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x_1|^{A_1} |x_2|^{A_2} \cdots |x_n|^{\frac{A_n}{n}} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2 \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| d\mu_1(y_1) \right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\prod_{i=2}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| d\mu_1(x_1) d\mu_i(y_i) \right)^{\frac{1}{n-1}} d\mu_2(x_2) \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| d\mu_1(x_1) d\mu_2(y_2) \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| d\mu_1(y_1) \right)^{\frac{1}{n-1}} \\ &\qquad\qquad \left(\prod_{i=3}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| d\mu_1(x_1) d\mu_i(y_i) \right)^{\frac{1}{n-1}} d\mu_2(x_2) \\ &:= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| d\mu_1(x_1) d\mu_2(y_2) \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^{n} I_i^{\frac{1}{n-1}} d\mu_2(x_2),\end{aligned}$$

onde

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| d\mu_1(y_1), \quad I_i = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| d\mu_1(x_1) d\mu_i(y_i).$$

Assim

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |x_1|^{A_1}|x_2|^{A_2}\cdots|x_n|^{\frac{A_n}{n}}|u(x)|^{\frac{n}{n-1}}dx_1dx_2\\
&\quad\le\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|d\mu_1(x_1)d\mu_2(y_2)\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq 2}}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}I_id\mu_2(x_2)\right)^{\frac{1}{n-1}}\\
&\quad=\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|d\mu_1(x_1)d\mu_2(y_2)\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|d\mu_1(x_1)d\mu_2(y_2)\right)^{\frac{1}{n-1}}\\
&\qquad\qquad\prod_{i=3}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|d\mu_1(x_1)d\mu_2(x_2)d\mu_i(y_i)\right)^{\frac{1}{n-1}}.
\end{aligned}
$$

Continuando a integrar com respeito a $d\mu_3(y_3),\ldots,d\mu_n(y_n)$, temos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} x^A|u|^{\frac{n}{n-1}}dx &\le \prod_{i=1}^{n}\left(\int_{\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|d\mu_1(x_1)\cdots d\mu_i(y_i)\cdots d\mu_n(x_n)\right)^{\frac{1}{n-1}}\\
&=\left(\int_{\mathbb{R}^n} x^{\frac{n}{n-1}A}|\nabla u|dx\right)^{\frac{1}{n-1}}.
\end{aligned}
$$

Para terminar esta seção, apresentaremos uma consequência do Teorema 2.2.

Corolário 2.1. *Sejam $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ números reais tais que $\alpha_i\in[0,1)$. Existe uma constante C tal que para todo $u\in C_c^1(\mathbb{R}^n)$,*

$$
\left(\int_{\mathbb{R}^n_*} x^A|u|^{p_*}dx\right)^{\frac{1}{p_*}}\le C\left(\int_{\mathbb{R}^n_*}\{|x_1|^{p\alpha_1}|u_{x_1}|^p+\cdots+|x_n|^{p\alpha_n}|u_{x_n}|^p\}dx\right)^{\frac{1}{p}},
$$

onde $p_*=\frac{pD}{D-p}$ e $D=n+\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}+\cdots+\frac{\alpha_n}{1-\alpha_n}$.

Demonstração. Considere a mudança de variável $y_i=x_i^{1-\alpha_i}$. Assim $dy_i=(1-\alpha_i)x_i^{-\alpha_i}dx_i$.

Desse modo, aplicando o Teorema 2.1, tomando $A_i=\frac{\alpha_i}{1-\alpha_i}$, temos

$$
\left(\int_{\mathbb{R}^n_*}|u|^{p_*}dx\right)^{\frac{1}{p_*}}=C\left(\int_{\mathbb{R}^n_*}y^A|u|^{p_*}dy\right)^{\frac{1}{p_*}}\le C\left(\int_{\mathbb{R}^n_*}y^A|\nabla_y u|^pdy\right)^{\frac{1}{p}}.
$$

Note que

$$
\nabla_y u=(u_{y_1},\ldots,u_{y_n})=\left(\frac{u_{x_1}}{y_{1,x_1}},\ldots,\frac{u_{x_n}}{y_{n,x_n}}\right)=(u_{x_1}(1-\alpha_1)x_1^{\alpha_1},\ldots,u_{x_n}(1-\alpha_n)x_n^{\alpha_n}).
$$

Logo

$$
\begin{aligned}
|\nabla_y u|^p &= (|u_{x_1}(1-\alpha_1)x_1^{\alpha_1}|^2 + \cdots + |u_{x_n}(1-\alpha_n)x_n^{\alpha_n}|^2)^{\frac{p}{2}} \\
&\leq C(|u_{x_1}|^p(1-\alpha_1)^p|x_1|^{p\alpha_1}| + \cdots + |u_{x_n}|^p(1-\alpha_n)^p|x_n|^{p\alpha_n}) \\
&\leq C(|u_{x_1}|^p|x_1|^{p\alpha_1}| + \cdots + |u_{x_n}|^p|x_n|^{p\alpha_n}).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^n_*} |u|^{p_*}dx\right)^{\frac{1}{p_*}} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n_*} y^A|\nabla_y u|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n_*} \{|x_1|^{p\alpha_1}|u_{x_1}|^p + \cdots + |x_n|^{p\alpha_n}|u_{x_n}|^p\}dx\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}
$$

■

2.3 Melhor constante e funções extremais na desigualdade de Sobolev

Nesta seção descreveremos a melhor constante e as funções extremais na desigualdade de Sobolev com pesos (2.14).

O primeiro passo é calcular a medida da bola unitária em $\mathbb{R}^n_*$ com peso x^A. A partir disso, obtemos a constante ótima na desigualdade isoperimétrica e, portanto, a constante ótima na desigualdade de Sobolev para $p = 1$.

Lema 2.1. *Seja A um vetor não-negativo em $\mathbb{R}^n$ e $B_1^* = B_1(0) \cap \mathbb{R}^n_*$. Então*

$$
\int_{B_1^*} x^A dx = \frac{\Gamma\left(\frac{A_1+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{A_2+1}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{A_n+1}{2}\right)}{2^k\Gamma\left(1+\frac{A_1+1}{2}\right)},
$$

onde $D = A_1 + \cdots + A_n + n$ e k é o número de entradas estritamente positivas de A.

Demonstração. Provaremos por indução sobre n que

$$
\int_{B_1} x^A dx = \frac{\Gamma\left(\frac{A_1+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{A_2+1}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{A_n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{A_1+1}{2}\right)},
$$

onde B_1 é a bola unitária em $\mathbb{R}^n$. O lema segue pois

$$m(B_1^*) = \frac{m(B_1)}{2^k}.$$

Para $n=1$, temos que por um lado

$$\frac{\Gamma\left(\frac{A_1+1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{A_1+1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{A_1+1}{2}\right)}{\left(\frac{A_1+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{A_1+1}{2}\right)} = \frac{2}{A_1+1},$$

e por outro

$$\int_{B_1} x^A dx = \int_{-1}^{1} |x|^{A_1} dx = \left.\frac{|x|^{A_1+1}}{A_1+1}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{A_1+1}.$$

Assuma que a afirmação é verdadeira para $n-1$, provaremos que é válida para n. Denote $x=(x',x_n)$, $A=(A',A_n)$, com $x',A'\in\mathbb{R}^{n-1}$, e $D=A_1+\cdots+A_{n-1}+n+1$.

Denotemos

$$Y=\{y'\in\mathbb{R}^{n-1} : |y'|\leq 1\}, \quad f(x')=x'^{A'} \quad e \quad h(y')=y'\sqrt{1-x_n^2}.$$

Pelo Teorema da Mudança de Variáveis (Teorema A.5)

$$\int_{h(Y)} f(x')dx' = \int_Y f(h(y'))|\det h'(y')|dy',$$

logo

$$\int_{|x'|\leq\sqrt{1-x_n^2}} x'^{A'}dx' = \int_{|y'|\leq 1} (\sqrt{1-x_n^2})^{A_1+\cdots+A_{n-1}} y'^{A'} (\sqrt{1-x_n^2})^{n-1} dy'.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{B_1} x^A dx &= \int_{-1}^{1} |x_n|^{A_n}\left(\int_{|x'|\leq\sqrt{1-x_n^2}} x'^{A'}dx'\right)dx_n \\
&= \int_{-1}^{1} |x_n|^{A_n}\left((1-x_n^2)^{\frac{D'}{2}}\int_{|y'|\leq 1} x'^{A'}dy'\right)dx_n \\
&= \int_{|y'|\leq 1} x'^{A'}dy' \int_{-1}^{1} |x_n|^{A_n}(1-x_n^2)^{\frac{D'}{2}}dx_n,
\end{aligned}$$

e assim nos resta calcular

$$\int_{-1}^{1} |x_n|^{A_n}(1-x_n^2)^{\frac{D'}{2}}dx_n.$$

Fazendo a mudança de variáveis $x_n^2 = t$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} |x_n|^{A_n}(1-x_n^2)^{\frac{D'}{2}}dx_n &= 2\int_0^1 x_n^{A_n}(1-x_n^2)^{\frac{D'}{2}}dx_n \\ &= \int_0^1 t^{\frac{A_n-1}{2}}(1-t)^{\frac{D'}{2}}dt \\ &= B\left(\frac{A_n+1}{2}, 1+\frac{D'}{2}\right),\end{aligned}$$

onde B é a função Beta. Como

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \tag{2.24}$$

então

$$\begin{aligned}\int_{B_1} x^A dx &= \int_{|y'|\leq 1} x'^{A'}dy' \int_{-1}^{1} |x_n|^{A_n}(1-x_n^2)^{\frac{D'}{2}}dx_n \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{A_1+1}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{A_{n-1}+1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{D'}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{A_n+1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{D'}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{D}{2}\right)} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{A_1+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{A_2+1}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{A_n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{D}{2}\right)},\end{aligned}$$

e o lema segue.

■

Para provar nosso objetivo, usaremos dois resultados estabelecidos por G. Talenti. O primeiro é uma versão com peso de um resultado apresentado em [19]. A proposição diz que sempre que bolas minimizam o quociente isoperimétrico com um peso w, existe um rearranjamento radial de u, o qual preserva $\int f(u)wdx$ e faz $\int \Phi(|\nabla u|)wdx$ decrescer (sob algumas condições para Φ). Quando $w = x^A$, o resutado é ununciado da seguinte maneira.

Proposição 2.2. *Seja u uma função contínua Lipschitz em $\mathbb{R}^n_*$ com suporte compacto em $\overline{\mathbb{R}^n_*}$. Então, denotando*

$$m(E) = \int_E x^A dx,$$

existe um rearranjamento radial u_* de u tal que

(i) $m(\{|u| > t\}) = m(\{u_* > t\})$ para todo t,

(ii) u_* é radialmente decrescente,

(iii) para cada função de Young Φ (isto é, uma função convexa e crescente que se anula em 0),

$$\int_{\mathbb{R}^n_*} \Phi(|\nabla u_*|)x^A dx \leq \int_{\mathbb{R}^n_*} \Phi(|\nabla u|)x^A dx.$$

O segundo resultado que usaremos, apresentado em [20], é um resultado em dimensão 1 que caracteriza os minimizantes do funcional

$$J(u) = \frac{(\int_0^\infty r^{m-1}|u'(r)|^p dr)^{\frac{1}{p}}}{(\int_0^\infty r^{m-1}|u(r)|^{p_*} dr)^{\frac{1}{p_*}}},$$

onde $p_* = \frac{pD}{D-p}$.

Lema 2.2. *Sejam m, p e q números reais tais que*

$$1 < p < m \text{ e } q = \frac{mp}{m-p}.$$

Seja u qualquer função real com variável real r, que é contínua Lipschitz e tal que

$$\int_0^\infty r^{m-1}|u'(r)|^p dr < \infty \text{ e } u(r) \to 0 \text{ quando } r \to \infty.$$

Então

$$\frac{(\int_0^\infty r^{m-1}|u(r)|^q dr)^{\frac{1}{q}}}{(\int_0^\infty r^{m-1}|u'(r)|^p dr)^{\frac{1}{p}}} \leq \frac{(\int_0^\infty r^{m-1}|\varphi(r)|^q dr)^{\frac{1}{q}}}{(\int_0^\infty r^{m-1}|\varphi'(r)|^p dr)^{\frac{1}{p}}} := J(\varphi),$$

onde φ é qualquer função da forma

$$\varphi(r) = (a + br^{p'})^{1-\frac{m}{p}},$$

com a e b constantes positivas. Aqui $p' = \dfrac{p}{p-1}$.

Além disso,

$$J(\varphi) = m^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{p-1}{m-p}\right)^{\frac{1}{p'}} \left[\frac{1}{p'} B\left(\frac{m}{p}, \frac{m}{p'}\right)\right]^{-\frac{1}{m}},$$

onde B é a função Beta.

Agora podemos encontrar a melhor constante e as funções extremais na desigualdade de Sobolev com peso. A prova é baseada na Proposição 2.2, que nos permite reduzir o problema a funções radiais em $\mathbb{R}^n_*$. Então o funcional que devemos minimizar é tal qual podemos aplicar o Lema 2.2.

Proposição 2.3. *A melhor constante na desigualdade de Sobolev (2.14) é dada por*

$$C_1 = D^{-1}\left(\frac{\Gamma\left(\frac{A_1+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{A_2+1}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{A_n+1}{2}\right)}{2^k\Gamma\left(1+\frac{D}{2}\right)}\right)^{-\frac{1}{D}} \quad \textit{para } p=1 \tag{2.25}$$

e por

$$C_p = C_1^{-1}D^{1-\frac{1}{D}-\frac{1}{p}}\left(\frac{p-1}{D-p}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\frac{p'\Gamma(D)}{\Gamma\left(\frac{D}{p}\right)\Gamma\left(\frac{D}{p'}\right)}\right)^{\frac{1}{D}} \quad \textit{para } 1<p<D. \tag{2.26}$$

Aqui, $p' = \dfrac{p}{p-1}$ *e* k *é o número de entradas positivas do vetor* A.

Além disso, a constante não é obtida por nenhuma função em $W_0^{1,1}(\mathbb{R}^n, x^A dx)$ *quando* $p=1$. *Mas, quando* $1<p<D$, *essa constante é atingida em* $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n, x^A dx)$ *por*

$$u_{a,b}(x) = (a+b|x|^{\frac{p}{p-1}})^{1-\frac{D}{p}}, \tag{2.27}$$

onde a *e* b *são constantes positivas arbitrárias.*

Demonstração. Para $p=1$, a melhor constante na desigualdade de Sobolev é igual a inversa da obtida na desigualdade isoperimétrica. Com efeito, note que por (2.17), na demonstração do Teorema 2.2, temos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n_*} x^A|u|^{\frac{D}{D-1}}dx\right)^{\frac{D-1}{D}} \leq C^{-1}\int_{\mathbb{R}^n_*} x^A|\nabla u|dx,$$

onde C é a constante ótima em (2.4), isto é,

$$C = \frac{P(B_1^*)}{m(B_1^*)^{\frac{D-1}{D}}} = Dm(B_1^*)^{\frac{1}{D}}.$$

Portanto, se C_1 é a constante ótima na desigualdade de Sobolev para $p=1$, temos $C_1 \leq C^{-1}$.

Agora mostraremos que $C^{-1} \leq C_1$. Para isso, obtemos a desigualdade isoperimétrica a partir da desigualdade de Sobolev.

Para cada domínio de Lipschitz E, seja $u_\varepsilon = \chi_E \star \rho_\varepsilon$, onde $\rho_\varepsilon(x) = \dfrac{1}{\varepsilon^n}\rho\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$, $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp}(\rho) \subset B(0,1)$, $\rho \geq 0$ e $\int \rho = 1$.

Note que

$$\|u_\varepsilon\|_{L^{\frac{D}{D-1}}(\mathbb{R}^n_*, x^A dx)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n_*} x^A u_\varepsilon^{\frac{D-1}{D}} dx\right)^{\frac{D-1}{D}} \to \left(\int_E x^A dx\right)^{\frac{D-1}{D}} = m(E)^{\frac{D-1}{D}},$$

quando $\varepsilon \to 0$.

Agora mostraremos que $\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^n_*, x^A dx)} \leq P(E)$, para todo $\varepsilon > 0$.

Dada $v \in C_c^\infty$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v| x^A dx = \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n} v \cdot \operatorname{div}(x^A \varphi) dx, \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), |\varphi(x)| \leq 1\right\},$$

assim é suficiente mostrar que $\int_{\mathbb{R}^n} u_\varepsilon \cdot \operatorname{div}(x^A \varphi) dx \leq P(E)$, para toda $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $|\varphi(x)| \leq 1$.

Seja $X = x^A \varphi$. Então

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} u_\varepsilon \operatorname{div} X(x) dx &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} u_\varepsilon X^i(x) dx \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(x-y) \rho_\varepsilon(y) dy X^i(x) dx \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(y) \rho_\varepsilon(x-y) dy X^i(x) dx \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(y) (\rho_\varepsilon(x-y) X^i(x)) dx dy \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E(y) \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x-y) X^i(x) dx dy \\
&= \sum_{i=1}^n \int_E \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x-y) X^i(x) dx dy \\
&= \sum_{i=1}^n \int_E (\rho_\varepsilon \star X^i)(y) dy \\
&= \int_E \operatorname{div}(\rho_\varepsilon \star X)(y) dy \\
&= \int_{\partial E} (\rho_\varepsilon \star X) \cdot \nu d\sigma \\
&\leq \int_{\partial E} \|\rho_\varepsilon\|_1 \|X\|_1 d\sigma \\
&\leq \int_{\partial E} x^A dx = P(E).
\end{aligned}$$

Seja C_1 a constante ótima na desigualdade de Sobolev com $p = 1$. Assim

$$\|u_\varepsilon\|_{L^{\frac{D}{D-1}}(\mathbb{R}^n_*, x^A dx)} \leq C_1 \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^n_*, x^A dx)} \leq C_1 P(E).$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$, temos

$$m(E)^{\frac{D-1}{D}} \leq C_1 P(E).$$

Desse modo, $C_1 \leq C^{-1}$.

Por (2.16), $C = Dm(B_1^*)^{\frac{1}{D}}$ e pelo Lema 2.1,

$$m(B_1^*) = \frac{\Gamma\left(\frac{A_1+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{A_2+1}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{A_n+1}{2}\right)}{2^k\Gamma\left(1+\frac{A_1+1}{2}\right)},$$

assim segue o valor de C_1.

Seja agora $1 < p < D$, $u \in C^1(\overline{\mathbb{R}^n_*})$ com suporte compacto em $\overline{\mathbb{R}^n_*}$, e seja u_* seu rearranjo radial dado pela Proposição 2.2. Então, pela mesma proposição,

$$\|\nabla u_*\|_{L^p(\mathbb{R}^n_*, x^A dx)} \leq \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n_*, x^A dx)} \quad \text{e} \quad \|u_*\|_{L^{p_*}(\mathbb{R}^n_*, x^A dx)} = \|u\|_{L^{p_*}(\mathbb{R}^n_*, x^A dx)}.$$

De fato, pela Parte (iii), tomando a função de Young Φ como a identidade, obtemos a primeira equação. Além disso

$$\|u\|^{p_*}_{L^{p_*}(\mathbb{R}^n_*, x^A dx)} = \int_{\mathbb{R}^n_*} |u|^{p_*} x^A dx = \int_{\mathbb{R}^n_*} x^A \int_0^\infty \chi_{\{|u|^{p_*}>t\}} dt dx = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n_*} \chi_{\{|u|^{p_*}>t\}} x^A dx dt.$$

Note que $\{|u|^{p_*} > t\} = \{x; |u|^{p_*} > t\} = \{x; |u| > t^{1/p_*}\}$. Seja $t^{1/p_*} = s$, logo $t = s^{p_*}$ e $dt = p_* s^{p_*-1} ds$. Assim

$$\begin{aligned}
\|u\|^{p_*}_{L^{p_*}(\mathbb{R}^n_*, x^A dx)} &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n_*} \chi_{\{|u|>s\}} x^A dx p_* s^{p_*-1} ds \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n_*} \chi_{\{u_*>s\}} x^A dx p_* s^{p_*-1} ds \\
&= \int_{\mathbb{R}^n_*} x^A \int_0^\infty \chi_{\{u_*^{p_*}>t\}} dt dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n_*} |u_*|^{p_*} x^A dx = \|u_*\|^{p_*}_{L^{p_*}(\mathbb{R}^n_*, x^A dx)}.
\end{aligned}$$

Logo
$$\frac{\|\nabla u_*\|_{L^p(\mathbb{R}^n_*,x^A dx)}}{\|u_*\|_{L^{p_*}(\mathbb{R}^n_*,x^A dx)}} \leq \frac{\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n_*,x^A dx)}}{\|u\|_{L^{p_*}(\mathbb{R}^n_*,x^A dx)}}.$$

Além disso, usando a fórmula da co-área (Teorema A.4):

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n_*} x^A |u_*|^{p_*} dx &= \int_0^\infty \left(\int_{\partial B_r^*} x^A |u_*|^{p_*} d\sigma \right) dr \\
&= \int_0^\infty r^{D-1} |u_*|^{p_*} \left(\int_{\partial B_1^*} x^A d\sigma \right) dr \\
&= P(B_1^*) \int_0^\infty r^{D-1} |u_*|^{p_*} dr
\end{aligned}$$

e, analogamente,
$$\int_{\mathbb{R}^n_*} x^A |\nabla u_*|^p dx = P(B_1^*) \int_0^\infty r^{D-1} |u_*'|^p dr.$$

Portanto, a melhor constante na desigualdade de Sobolev pode ser calculada como

$$\begin{aligned}
\inf_{u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)} \frac{\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n_*,x^A dx)}}{\|u\|_{L^{p_*}(\mathbb{R}^n_*,x^A dx)}} &= \inf_{u \in C_c^1(\mathbb{R})} \frac{P(B_1^*)^{\frac{1}{p}} (\int_0^\infty r^{D-1} |u'|^p dr)^{\frac{1}{p}}}{P(B_1^*)^{\frac{1}{p_*}} (\int_0^\infty r^{D-1} |u|^{p_*} dr)^{\frac{1}{p_*}}} \\
&= P(B_1^*)^{\frac{1}{D}} \inf_{u \in C_c^1(\mathbb{R})} \frac{(\int_0^\infty r^{D-1} |u'|^p dr)^{\frac{1}{p}}}{(\int_0^\infty r^{D-1} |u|^{p_*} dr)^{\frac{1}{p_*}}},
\end{aligned}$$

onde usamos que $\frac{1}{p} - \frac{1}{p_*} = \frac{1}{D}$.

Usando (2.13), temos $P(B_1^*) = Dm(B_1^*)$ e por (2.16), temos $C_1 = Dm(B_1^*)^{\frac{1}{D}}$, assim

$$P(B_1^*)^{\frac{1}{D}} = D^{\frac{1}{D}} m(B_1^*)^{\frac{1}{D}} = D^{\frac{1}{D}-1} C_1.$$

Pelo Lema 2.2, temos

$$\inf_{u \in C_c^1(\mathbb{R})} \frac{(\int_0^\infty r^{D-1} |u'|^p dr)^{\frac{1}{p}}}{(\int_0^\infty r^{D-1} |u|^{p_*} dr)^{\frac{1}{p_*}}} = \frac{1}{J(\varphi)},$$

e assim,
$$\inf_{u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)} \frac{\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n_*,x^A dx)}}{\|u\|_{L^{p_*}(\mathbb{R}^n_*,x^A dx)}} = P(B_1^*)^{\frac{1}{D}} \frac{1}{J(\varphi)}.$$

Portanto, temos que

$$
\begin{aligned}
C_p &= P(B_1^*)^{-\frac{1}{D}} J(\varphi) \\
&= C_1^{-1} D^{1-\frac{1}{D}} D^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{p-1}{D-p}\right)^{\frac{1}{p'}} \left[\frac{1}{p'} B\left(\frac{D}{p}, \frac{D}{p'}\right)\right]^{-\frac{1}{D}} \\
&= C_1^{-1} D^{1-\frac{1}{D}-\frac{1}{p}} \left(\frac{p-1}{D-p}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\frac{p'\Gamma(D)}{\Gamma\left(\frac{D}{p}\right)\Gamma\left(\frac{D}{p'}\right)}\right)^{\frac{1}{D}}.
\end{aligned}
$$

Do Lema 2.2 também segue que as funções $u_{a,b}$ em (2.27) atingem a melhor constante C_p.

Para $p = 1$, do uso da desigualdade integral de Minkowski na demonstração do Teorema 2.2, se a igualdade é obtida por uma função u, então essa função extremal deve ser a característica $\chi_{\{u(x)>t\}}$, $t \in (0, \max u)$, o que mostra que a função ótima não é obtida por qualquer função em $W_0^{1,1}(\mathbb{R}^n, x^A dx)$.

■

2.4 Desigualdade de Morrey

Nosso objetivo nesta seção é apresentar a demonstração da desigualdade de Morrey

$$
\sup_{x \neq y,\ x,y \in \mathbb{R}^n_*} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n_*} x^A |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}
$$

para todo $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, onde $\alpha = 1 - \frac{D}{p}$.

Para isso primeiramente mostraremos o seguinte lema, que estabelece essa desigualdade quando $y = 0$.

Lema 2.3. *Seja A um vetor não-negativo em $\mathbb{R}^n$, $D = A_1 + \cdots + A_n + n$ e $p > D$. Seja $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ e $x \in \mathbb{R}^n_*$. Então*

$$
|u(x) - u(0)| \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n_*} |\nabla u|^p z^A dz\right)^{\frac{1}{p}} |x|^{1-\frac{D}{p}},
$$

onde C é uma constante dependendo apenas de p e D.

Demonstração. Provaremos primeiramente que

$$|u(x) - u(0)| \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n_*} |\nabla u|^p |z|^\gamma dz \right)^{\frac{1}{p}} |x|^{1-\frac{n+\gamma}{p}}, \tag{2.28}$$

onde $p > D = n + |A| := n + \gamma$.

Como $z^A = |z_1|^{A_1} \cdots |z_n|^{A_n} \leq |z|^{A_1} \cdots |z|^{A_n} = |z|^{|A|}$, então a desigualdade do Lema 2.3 é mais forte que a desigualdade (2.28).

Para $x \in \mathbb{R}^n$ com $|x| = r$ temos que $|z|^\gamma \geq cr^\gamma$ em $B_{r/2}(x)$, onde c é uma constante. De fato, seja $z \in B_{r/2}(x)$, ou seja, $|x - z| \leq r/2$. Logo $|x|/2 \geq |x - z| \geq ||x| - |z|| \geq |x| - |z|$, assim $|z| \geq |x|/2$.

Desse modo, usando a desigualdade de Morrey clássica (Teorema 1.8),

$$\begin{aligned}
\left| u(x) - u\left(\frac{x}{2}\right) \right| &\leq C \left(\int_{B_{r/2}(x)} |\nabla u|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} r^{1-\frac{n}{p}} \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} r^{\frac{\gamma}{p}} r^{1-\frac{n+\gamma}{p}} \\
&= C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p r^\gamma dz \right)^{\frac{1}{p}} r^{1-\frac{n+\gamma}{p}} \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p |z|^\gamma dz \right)^{\frac{1}{p}} r^{1-\frac{n+\gamma}{p}}.
\end{aligned}$$

Escrevendo a mesma desigualdade para $x/2$, $x/4$, $x/8$ etc, obtemos

$$\begin{aligned}
\left| u(x) - u\left(\frac{x}{2^k}\right) \right| &\leq \left| u(x) - u\left(\frac{x}{2}\right) \right| + \left| u\left(\frac{x}{2}\right) - u\left(\frac{x}{4}\right) \right| + \\
&\quad + \left| u\left(\frac{x}{4}\right) - u\left(\frac{x}{8}\right) \right| + \cdots + \left| u\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - u\left(\frac{x}{2^k}\right) \right| \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p |z|^\gamma dz \right)^{\frac{1}{p}} \sum_{j=1}^{k} \left| \frac{x}{2^j} \right|^{1-\frac{n+\gamma}{p}}.
\end{aligned}$$

Fazendo $k \to \infty$,

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(0)| &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p |z|^\gamma dz \right)^{\frac{1}{p}} \sum_{i \geq 0} \left| \frac{x}{2^i} \right|^{1-\frac{n+\gamma}{p}} \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p |z|^\gamma dz \right)^{\frac{1}{p}} |x|^{1-\frac{n+\gamma}{p}}.
\end{aligned}$$

Provaremos agora a desigualdade do Lema 2.3. Assuma sem perda de generalidade que $x = (x_1, \dots, x_n)$, com $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0$. Também denote $x' = (x_1, \dots, x_{n_1})$.

Para qualquer número y tal que $0 \leq y \leq x_{n-1}$, temos que $z^A \geq c|y|^{|A|}$ em $B_{y/2}(x', y)$. Com efeito, seja $z \in B_{y/2}(x', y)$, isto é, $|(x', y) - z| \leq y/2$. Logo $y/2 \geq |(x', y) - z| \geq ||(x', y)| - |z|| \geq |(x', y)| - |z|$, assim $|z| \geq |(x', y)| - y/2 \geq |y| - y/2 = |y|/2$.

Desse modo, usando a desigualdade de Morrey clássica,

$$\begin{aligned}
\left|u(x', y) - u\left(x', \frac{y}{2}\right)\right| &\leq C \left(\int_{B_{y/2}(x', y)} |\nabla u|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} |y|^{1-\frac{n}{p}} \\
&= C \left(\int_{B_{y/2}(x', y)} |\nabla u|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} |y|^{\frac{|A|}{p}} |y|^{1-\frac{D}{p}} \\
&= C \left(\int_{B_{y/2}(x', y)} |\nabla u|^p |y|^{|A|} dz \right)^{\frac{1}{p}} |y|^{1-\frac{D}{p}} \\
&\leq C \left(\int_{B_{y/2}(x', y)} |\nabla u|^p z^A dz \right)^{\frac{1}{p}} |y|^{1-\frac{D}{p}} \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n_*} |\nabla u|^p z^A dz \right)^{\frac{1}{p}} |y|^{1-\frac{D}{p}}.
\end{aligned}$$

Logo, usando o mesmo argumento de (2.28),

$$|u(x', y) - u(x', 0)| \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n_*} |\nabla u|^p z^A dz \right)^{\frac{1}{p}} |y|^{1-\frac{D}{p}},$$

para todo $0 \leq y \leq x_{n-1}$. Em particular

$$|u(x', x_n) - u(x', 0)| \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n_*} |\nabla u|^p z^A dz \right)^{\frac{1}{p}} |x_n|^{1-\frac{D}{p}}.$$

A partir disso,

$$\begin{aligned}
|u(x', x_n) - u(x', x_{n-1})| &\leq |u(x', x_n) - u(x', 0)| + |u(x', x_{n-1}) - u(x', 0)| \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n_*} |\nabla u|^p z^A dz \right)^{\frac{1}{p}} \left(|x_n|^{1-\frac{D}{p}} + |x_{n-1}|^{1-\frac{D}{p}} \right) \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n_*} |\nabla u|^p z^A dz \right)^{\frac{1}{p}} |x|^{1-\frac{D}{p}}.
\end{aligned}$$

Podemos repetir o mesmo argumento comparando $u(x_1, \dots, x_{n-2}, y, y)$ com

$u(x_1, \dots, x_{n-2}, y/2, y/2)$ para qualquer $y \leq x_{n-2}$ e então com $u(x_1, \dots, x_{n-2}, 0, 0)$ e obter

$$|u(x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) - u(x_1, \dots, u_{n-2}, x_{n-2}, x_{n-2}| \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n_*} |\nabla u|^p z^A dz \right)^{\frac{1}{p}} |x|^{1-\frac{D}{p}}.$$

Procedendo analogamente para o resto das coordenadas e somando todas as desigualdades

$$|u(x_1, \dots, x_1) - u(x)| \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n_*} |\nabla u|^p z^A dz \right)^{\frac{1}{p}} |x|^{1-\frac{D}{p}}.$$

Resta controlar $|u(x_1, \dots, x_1) - u(0, \dots, 0)|$.

Mostraremos que existe $\lambda > 1$ dependendo apenas de n tal que para qualquer $y > 0$

$$\left| u(y, \dots, y) - u\left(\frac{y}{\lambda}, \dots, \frac{y}{\lambda} \right) \right| \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n_*} |\nabla u|^p z^A dz \right)^{\frac{1}{p}} |x|^{1-\frac{D}{p}}.$$

Primeiramente, note que $|z|^{|A|} > c|y|^{|A|}$ na bola $B_{\sqrt{n}(1-1/\lambda)y}(y, \dots, y) := B_R$, cujo fecho contém o ponto $(y/\lambda, \dots, y/\lambda)$. De fato, seja $z \in B_R$, isto é, $\sqrt{n}(1 - 1/\lambda)y > |(y, \dots, y) - z| \geq |(y, \dots, y)| - |z| = \sqrt{n}y - |z|$, assim $|z| > cy$.

Desse modo, aplicando a desigualdade clássica de Morrey,

$$\begin{aligned}
\left| u(y, \dots, y) - u\left(\frac{y}{\lambda}, \cdots, \frac{y}{\lambda} \right) \right| &\leq C \left(\int_{B_R} |\nabla u|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} |y|^{1-\frac{n}{p}} \\
&= C \left(\int_{B_R} |\nabla u|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} |y|^{\frac{|A|}{p}} |y|^{1-\frac{n+|A|}{p}} \\
&= C \left(\int_{B_R} |\nabla u|^p |y|^{|A|} dz \right)^{\frac{1}{p}} |y|^{1-\frac{D}{p}} \\
&\leq C \left(\int_{B_R} |\nabla u|^p |z|^{|A|} dz \right)^{\frac{1}{p}} |y|^{1-\frac{D}{p}} \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n_*} |\nabla u|^p z^A dz \right)^{\frac{1}{p}} |y|^{1-\frac{D}{p}}.
\end{aligned}$$

Além disso, $z_i \geq y/2$ para todo $i = 1, \dots, n$ e $z \in B_{\sqrt{n}(1-1/\lambda)y}(y, \dots, y)$, se tomarmos $\lambda > 1$ perto o suficiente de 1, já que $|z_i - y| \leq |z - (y, \dots, y)| < \sqrt{n}(1 - 1/\lambda)y$, assim $z_i > y - \sqrt{n}(1 - 1/\lambda)y = y(1 - \sqrt{n}(1/\lambda))$.

Aplicando essa desigualdade para $x_1, x_1/\lambda, x_1/\lambda^2, \ldots, x_1/\lambda^k$ etc,

$$\begin{aligned}
\left|u(x_1,\ldots,x_1) - u\left(\frac{x_1}{\lambda^k},\ldots,\frac{x_1}{\lambda^k}\right)\right| &\le \left|u(x_1,\ldots,x_1) - u\left(\frac{x_1}{\lambda},\ldots,\frac{x_1}{\lambda}\right)\right| + \\
&+ \left|u\left(\frac{x_1}{\lambda},\ldots,\frac{x_1}{\lambda}\right) - u\left(\frac{x_1}{\lambda^2},\ldots,\frac{x_1}{\lambda^2}\right)\right| + \\
&+ \cdots + \left|u\left(\frac{x_1}{\lambda^{k-1}},\ldots,\frac{x_1}{\lambda^{k-1}}\right) - u\left(\frac{x_1}{\lambda^k},\ldots,\frac{x_1}{\lambda^k}\right)\right| \\
&\le C\left(\int_{\mathbb{R}^n_*} |\nabla u|^p z^A dz\right)^{\frac{1}{p}} \sum_{j=1}^{k} \left|\frac{x_1}{\lambda^j}\right|^{1-\frac{D}{p}}.
\end{aligned}$$

Fazendo $k \to \infty$, temos

$$|u(x_1,\ldots,x_1) - u(0)| \le C\left(\int_{\mathbb{R}^n_*} |\nabla u|^p z^A dz\right)^{\frac{1}{p}} |x|^{1-\frac{D}{p}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(0)| &\le |u(x) - u(x_1,\ldots,x_1)| + |u(x_1,\ldots,x_1) - u(0)| \\
&\le C\left(\int_{\mathbb{R}^n_*} |\nabla u|^p z^A dz\right)^{\frac{1}{p}} |x|^{1-\frac{D}{p}}.
\end{aligned}$$

■

Teorema 2.3. *Seja A um vetor não-negativo em $\mathbb{R}^n$, $D = A_1 + \cdots + A_n + n$ e $p > D$ um número real. Então existe uma constante C, dependendo apenas de p e D, tal que*

$$\sup_{x\neq y,\ x,y\in\mathbb{R}^n_*} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \le C\left(\int_{\mathbb{R}^n_*} x^A |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.29}$$

para todo $u \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$, onde $\alpha = 1 - \frac{D}{p}$.

Como consequência, se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado e $u \in C^1_c(\Omega)$ então

$$\sup_\Omega |u| \le C\mathrm{diam}(\Omega)^{1-\frac{D}{p}} \left(\int_\Omega x^A |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.30}$$

Demonstração. Mostraremos que

$$\frac{|u(y)-u(z)|}{|y-z|^{1-\frac{D}{p}}} \le C\left(\int_{\mathbb{R}^n_*} x^A |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.31}$$

para todos $y, z \in \mathbb{R}^n_*$. Dividiremos a prova em três passos.

Passo 1. Pelo Lema 2.3, temos que (2.31) é válido para $z = 0$.

Passo 2. Agora provaremos (2.31) para y e z em $\mathbb{R}^n_*$ tal que $y - z \in \mathbb{R}^n_*$. Aplicando a desigualdade provada no Passo 1 a função $v(\tilde{y}) = u(\tilde{y}+z)$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}^n$, no ponto $\tilde{y} = y-z \in \mathbb{R}^n_*$, deduzimos

$$|u(x) - u(z)| \leq C \left(\int_{z+\mathbb{R}^n_*} (x-z)^A |\nabla u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} |y - z|^{1-\frac{D}{p}},$$

onde $z + \mathbb{R}^n_* = \{x \in \mathbb{R}^n : x - z \in \mathbb{R}^n_*\}$.

Como $(x-z)^A \leq x^A$ se x e $x - z$ pertencem a $\mathbb{R}^n_*$, esse caso de (2.31) segue.

Passo 3. Agora provaremos (2.31) para todos y e z em $\mathbb{R}^n_*$. Definamos $w \in \mathbb{R}^n_*$ como $w_i = \min\{y_i, z_i\}$ para todo i. Então, temos $y - w \in \mathbb{R}^n_*$ e $z - w \in \mathbb{R}^n_*$. Assim, podemos aplicar a desigualdade provada no Passo 2 e obter

$$|u(y) - u(w)| \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n_*} x^A |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} |y - w|^{1-\frac{D}{p}}$$

e

$$|u(z) - u(w)| \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n_*} x^A |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} |z - w|^{1-\frac{D}{p}}.$$

Como $|y - w|^2 + |z - w|^2 = |y - z|^2$, dessas desigualdades temos

$$\begin{aligned} |u(y) - u(z)| &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n_*} x^A |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(|y - w|^{1-\frac{D}{p}} + |z - w|^{1-\frac{D}{p}} \right) \\ &\leq 2C \left(\int_{\mathbb{R}^n_*} x^A |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} |y - z|^{1-\frac{D}{p}} \end{aligned}$$

para todos $y, z \in \mathbb{R}^n_*$.

Provaremos agora (2.30). Seja $x_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\sup_\Omega |u| = |u(x_0)|$. Após um número finito de reflexões com respeito aos hiperplanos coordenados, podemos assumir que $x_0 \in \mathbb{R}^n_*$. Denotemos $\tilde{u}$ a função u após fazer tais reflexões, definida no domínio refletido $\tilde{\Omega}$. Como $\tilde{u} \equiv 0$ em $\partial\tilde{\Omega}$, temos

$$\sup_\Omega |u| \mathrm{diam}(\Omega)^{-1+\frac{D}{p}} = |\tilde{u}(x_0)| \mathrm{diam}(\tilde{\Omega})^{-1+\frac{D}{p}} \leq \sup_{x,y \in \mathbb{R}^n_*} \frac{|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)|}{|x - y|^{1-\frac{D}{p}}}.$$

O lado direito da desigualdade é limitado usando (2.29). A prova é concluída controlando a integral sobre $\mathbb{R}^n_*$ em (2.29) por uma integral sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

■

2.5 Desigualdade de Trudinger-Moser

Nesta seção faremos uma exposição da prova da desigualdade de Trudinger-Moser com peso e um corolário que estabelece algumas imersões contínuas entre espaços, que são versões análogas das imersões clássicas de Sobolev.

A prova da desigualdade de Trudinger-Moser é baseada no lema seguinte, que apresenta um limite para a melhor constante da desigualdade de Sobolev quando p tende à D.

Lema 2.4. *Seja A um vetor não-negativo em $\mathbb{R}^n$, $D = A_1 + \cdots + A_n + n$ e $1 < p < D$. Seja C_p a constante ótima da desigualdade de Sobolev (2.14), dada por (2.25)-(2.26). Então*

$$C_p \leq C_0 p_*^{1-\frac{1}{D}},$$

onde $p_* = \dfrac{pD}{D-p}$ e C_0 é uma constante que depende apenas de D.

Demonstração. A constante ótima é dada por

$$C_p = C_1 D^{1-\frac{1}{D}-\frac{1}{p}} \left(\frac{p-1}{D-p}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\frac{p'\Gamma(D)}{\Gamma\left(\frac{D}{p}\right)\Gamma\left(\frac{D}{p'}\right)}\right)^{\frac{1}{D}},$$

onde $p' = \dfrac{p}{p-1}$ e C_1 é uma constante que depende apenas de A e n. A constante C_p é limitada quando $p \downarrow 1$. De fato, note que

$$\Gamma\left(\frac{D}{p'}\right) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi D}{p'}\right)} \frac{1}{\Gamma\left(1-\frac{D}{p'}\right)},$$

onde podemos escrever

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi D}{p'}\right) = \frac{\pi D(p-1)}{p} + O(p-1)^3.$$

Desse modo temos

$$
\begin{aligned}
C_p &= C_1 D^{1-\frac{1}{D}-\frac{1}{p}}(p-1)^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{D}}(D-p)^{-\frac{1}{p'}}p^{\frac{1}{D}}\left(\frac{\Gamma(D)}{\Gamma(\frac{D}{p})}\right)^{\frac{1}{D}}\left(\frac{1}{\Gamma(\frac{D}{p'})}\right)^{\frac{1}{D}}\\
&= C_1 D^{1-\frac{1}{D}-\frac{1}{p}}(p-1)^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{D}}(D-p)^{-\frac{1}{p'}}p^{\frac{1}{D}}\left(\frac{\Gamma(D)}{\Gamma(\frac{D}{p})}\right)^{\frac{1}{D}}\\
&\qquad\qquad\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi D}{p'}\right)\right)^{\frac{1}{D}}\left(\Gamma\left(1-\frac{D}{p'}\right)\right)^{\frac{1}{D}}\\
&= C_1 D^{1-\frac{1}{D}-\frac{1}{p}}(p-1)^{1-\frac{1}{p}}(D-p)^{-\frac{1}{p'}}p^{\frac{1}{D}}\left(\frac{\Gamma(D)}{\Gamma(\frac{D}{p})}\right)^{\frac{1}{D}}\\
&\qquad\qquad\left(\frac{\pi D}{p}+O(p-1)^2\right)^{\frac{1}{D}}\left(\Gamma\left(1-\frac{D}{p'}\right)\right)^{\frac{1}{D}}\\
&\to 0 \quad \text{quando} \quad p\downarrow 1.
\end{aligned}
$$

Assim, precisamos analisar o limite quando $p\uparrow D$. Segue da expressão acima que

$$
C_p \leq C(D-p)^{-\frac{1}{p'}},
$$

onde C não depende de p. Portanto, levando em conta que $\frac{1}{p'} = 1-\frac{1}{D}-\frac{1}{p_*}$ e $D-p=\frac{pD}{p_*}$, deduzimos que

$$
C_p \leq C_0 p_*^{1-\frac{1}{D}-\frac{1}{p_*}} \leq C_0 p_*^{1-\frac{1}{D}}.
$$

Além disso, C_1 pode ser limitada por uma constante dependendo apenas de D, assim podemos escolher uma constante C_0 que depende apenas de D.

■

Agora apresentaremos a prova da desigualdade de Trudinger-Moser. A ideia da demonstração é expandir $\exp(\cdot)$ como uma série de potência e usar a desigualdade de Sobolev para cada um dos termos, onde usamos o Lema 2.4 para provar a convergência da série.

Teorema 2.4. *Seja A um vetor não-negativo em $\mathbb{R}^n$, $D = A_1+\cdots+A_n+n$ e $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ um domínio limitado. Então, para cada $u\in C_c^1(\Omega)$,*

$$
\int_\Omega \exp\left\{\left(\frac{c_1|u|}{\|\nabla u\|_{L^D(\Omega,x^A dx)}}\right)^{\frac{D}{D-1}}\right\}x^A dx \leq C_2 m(\Omega),
$$

onde $m(\Omega) = \int_\Omega x^A dx$ *e* c_1 *e* C_2 *são constantes que dependem apenas de* D.

Demonstração. Seja $u \in C_c^1(\Omega)$. A partir do Teorema 2.2, temos

$$\left(\int_\Omega x^A |u|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_p \left(\int_\Omega x^A |\nabla u|^{\frac{qD}{q+D}} dx\right)^{\frac{q+D}{D}},$$

para cada $q > 1$, onde $q = \frac{pD}{D-p}$.

Pelo Lema 2.4, $C_p \leq C_0 p_*^{1-\frac{1}{D}}$, assim

$$\int_\Omega x^A |u|^q dx \leq C_0^q q^{q-\frac{q}{D}} \left(\int_\Omega x^A |\nabla u|^{\frac{qD}{q+D}} dx\right)^{\frac{q+D}{D}},$$

onde C_0 é uma constante que depende apenas D. Além disso, pela desigualdade de Hölder,

$$\int_\Omega x^A |\nabla u|^{\frac{qD}{q+D}} dx \leq \left(\int_\Omega x^A dx\right)^{\frac{D}{q+D}} \left(\int_\Omega x^A |\nabla u|^D dx\right)^{\frac{q}{q+D}},$$

e portanto,

$$\int_\Omega x^A |u|^q dx \leq m(\Omega) C_0^q q^{q\frac{D-1}{D}} \|\nabla u\|^q_{L^D(\Omega, x^A dx)}. \tag{2.32}$$

Agora, dividindo a função u por alguma constante, se necessário, podemos assumir

$$\|\nabla u\|_{L^D(\Omega, x^A dx)} = 1.$$

Seja c_1 uma constante a ser escolhida. Então, usando (2.32) com $q = \frac{kD}{D-1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \exp\left\{(c_1|u|)^{\frac{D}{D-1}}\right\} x^A dx &= \int_\Omega \sum_{k\geq 0} \frac{(c_1|u|)^{\frac{kD}{D-1}}}{k!} x^A dx \\
&= m(\Omega) + \sum_{k\geq 1} \frac{c_1^{\frac{kD}{D-1}}}{k!} \int_\Omega |u|^{\frac{kD}{D-1}} x^A dx \\
&\leq m(\Omega) + m(\Omega) \sum_{k\geq 1} \frac{c_1^{\frac{kD}{D-1}}}{k!} C_0^{\frac{kD}{D-1}} \left(\frac{kD}{D-1}\right)^k \\
&= m(\Omega) + m(\Omega) \sum_{k\geq 1} \frac{k^k}{k!} \left(\frac{D}{D-1}(c_1 C_0)^{\frac{D}{D-1}}\right)^k.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Escolhemos c_1, que depende apenas de D, satisfazendo $\left(\frac{D}{D-1}\right)^{\frac{D-1}{D}} c_1 C_0 < \frac{1}{e}$. Então, pelo teste da razão para convergência de séries,

$$\sum_{k\geq 1}\frac{k^k}{k!}\left(\frac{1}{e^{\frac{D}{D-1}}}\right)^k$$

é convergente, logo a série (2.33) é convergente e, portanto,

$$\int_\Omega \exp\left\{\left(\frac{c_1|u|}{\|\nabla u\|_{L^D(\Omega,x^A dx)}}\right)^{\frac{D}{D-1}}\right\} x^A dx \leq C_2 m(\Omega).$$

■

Finalmente, juntando os resultados dos Teoremas 2.2, 2.3 e 2.4, obtemos imersões contínuas, que são versões com pesos das imersões clássicas de Sobolev.

Corolário 2.2. *Seja A um vetor não negativo em $\mathbb{R}^n$, x^A como em (4) e $D = A_1 + \cdots + A_n + n$. Seja $k \geq 1$ um inteiro e $p \geq 1$ um número real. Então para qualquer domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ temos as seguintes imersões contínuas:*

(i) Se $kp < D$ então

$$W_0^{k,p}(\Omega, x^A dx) \subset L^q(\Omega, x^A dx),$$

onde q é dado por $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{D}$.

(ii) Se $kp = D$ então

$$W_0^{k,p}(\Omega, x^A dx) \subset L_\varphi(\Omega, x^A dx),$$

onde $L_\varphi(\Omega, x^A dx)$ é o espaço de Orlicz associado à função

$$\varphi(t) = \exp(t^{\frac{D}{D-1}}) - 1.$$

(iii) Se $kp > D$ então

$$W_0^{k,p}(\Omega, x^A dx) \subset C^{r,\alpha}(\overline{\Omega}),$$

onde $r = k - \left\lfloor \frac{D}{p} \right\rfloor - 1$, e $\alpha = \left\lfloor \frac{D}{p} \right\rfloor + 1 - \frac{D}{p}$ sempre que $\frac{D}{p}$ não é um inteiro ou α é qualquer número positivo menor que 1 caso contrário.

Demonstração. Segue como consequência dos Teoremas 2.2, 2.3 e 2.4. Para um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ que não está contido em $\mathbb{R}^n_*$, estes resultados precisam ser aplicados nas interseções de Ω com cada um dos 2^k quadrantes, onde k é o número de entradas positivas do vetor A.

Parte 1. Usaremos o Teorema 2.2 para mostrar (i). Seja $u \in W_0^{k,p}(\Omega, x^A dx)$, onde $kp < D$. Então $D^\beta u \in W^{1,p}(\Omega, x^A dx)$, para todo $|\beta| \leq k-1$ e

$$\left\| D^\beta u \right\|_{W^{1,p}(\Omega, x^A dx)} \leq \|u\|_{W_0^{k,p}(\Omega, x^A dx)}.$$

Usando o Teorema 2.2,

$$\begin{aligned} \left\| D^\beta u \right\|_{L^{p_*}(\Omega, x^A dx)} &\leq C \left\| D^\beta u \right\|_{W^{1,p}(\Omega, x^A dx)}, \quad |\beta| \leq k-2, \\ &\leq C \|u\|_{W_0^{k,p}(\Omega, x^A dx)}. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\|u\|_{W_0^{k-1,p_*}(\Omega, x^A dx)} \leq C \|u\|_{W_0^{k,p}(\Omega, x^A dx)}$$

e $u \in W_0^{k-1,p_*}(\Omega, x^A dx)$, onde $\dfrac{1}{p_*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{D}$.

Similarmente, $u \in W_0^{k-2,p_{**}}(\Omega, x^A dx)$, onde $\dfrac{1}{p_{**}} = \dfrac{1}{p_*} - \dfrac{1}{D} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{2}{D}$.

Indutivamente, depois de k passos, temos que $u \in W_0^{0,q}(\Omega, x^A dx) = L^q(\Omega, x^A dx)$ e $\|u\|_{L^q(\Omega, x^A dx)} \leq C \|u\|_{W_0^{k,p}(\Omega, x^A dx)}$.

Parte 2. Agora usaremos o Teorema 2.4 para mostrar (ii).

Se $k > 1$, $kp = D$, então $W_0^{k,p} \hookrightarrow W_0^{1,D}$. Portanto, é suficiente mostrar o resultado para o caso $k = 1$, $p = D > 1$.

Seja $C_3 = \displaystyle\sum_{k \geq 1} \frac{k^k}{k!} \left(\frac{1}{e^{\frac{D}{D-1}}} \right)^k$. Temos dois casos pra analisar: $m(\Omega) C_3 < 1$ ou $m(\Omega) C_3 \geq 1$.

Para o primeiro caso, pela demonstração do Teorema 2.4, temos

$$\int_\Omega \exp\left\{ \left(\frac{c_1 |u|}{\|\nabla u\|_{L^D(\Omega, x^A dx)}} \right)^{\frac{D}{D-1}} \right\} x^A dx \leq m(\Omega) + m(\Omega) \sum_{k \geq 1} \frac{k^k}{k!} \left(\frac{1}{e^{\frac{D}{D-1}}} \right)^k,$$

logo

$$\int_\Omega \varphi \left(\frac{|u|}{c_1^{-1} \|\nabla u\|_{L^D(\Omega, x^A dx)}} \right) x^A dx \leq m(\Omega) C_3 < 1.$$

Portanto,

$$\|u\|_{L^{\varphi}(\Omega,x^A dx)} \leq c_1^{-1} \|\nabla u\|_{L^D(\Omega,x^A dx)} \leq c_1^{-1} \|u\|_{L^D(\Omega,x^A dx)} .$$

Para o segundo caso, considere $C_4 = \dfrac{c_1}{(m(\Omega)C_3)^{\frac{D-1}{D}}}$. Assim

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi\left(\frac{C_4|u|}{\|\nabla u\|_{L^D(\Omega,x^A dx)}}\right) x^A dx &= \int_\Omega \left[\exp\left\{\left(\frac{c_1|u|}{\|\nabla u\|_{L^D(\Omega,x^A dx)}}\right)^{\frac{D}{D-1}}\right\} - 1\right] x^A dx \\ &= m(\Omega) \sum_{k\geq 1} \frac{k^k}{k!}\left(\frac{D}{D-1}(C_4 C_0)^{\frac{D}{D-1}}\right)^k .\end{aligned}$$

Escolhemos c_1 tal que

$$\left(\frac{D}{D-1}\right)^{\frac{D-1}{D}} \frac{c_1 C_0}{m(\Omega)C_3} < \frac{1}{em(\Omega)C_3}.$$

Desse modo

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi\left(\frac{C_4|u|}{\|\nabla u\|_{L^D(\Omega,x^A dx)}}\right) x^A dx &\leq m(\Omega) \sum_{k\geq 1} \frac{k^k}{k!}\left(\frac{1}{e^{\frac{D}{D-1}}}\right)^k \frac{1}{(m(\Omega)C_3)^k} \\ &= \frac{1}{C_3}\sum_{k\geq 1} \frac{k^k}{k!}\left(\frac{1}{e^{\frac{D}{D-1}}}\right)^k \frac{1}{(m(\Omega)C_3)^{k-1}} \\ &\leq \frac{1}{C_3}\sum_{k\geq 1} \frac{k^k}{k!}\left(\frac{1}{e^{\frac{D}{D-1}}}\right)^k = 1.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u\|_{L^{\varphi}(\Omega,x^A dx)} \leq C_4^{-1} \|\nabla u\|_{L^D(\Omega,x^A dx)} \leq C_4^{-1} \|u\|_{L^D(\Omega,x^A dx)} .$$

Parte 3. Por último, usaremos o Teorema 2.3 para provar (iii).

Suponha que $\frac{D}{p}$ não é um inteiro. Escolhemos um inteiro l tal que

$$l < \frac{D}{p} < l+1,$$

isto é, $l = \left\lfloor \frac{D}{p} \right\rfloor$.

Para

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{l}{D},$$

sempre que $lp < D$, temos $u \in W^{k-l,r}(\Omega, x^A dx)$. Com efeito, como $u \in W_0^{k,p}(\Omega, x^A dx)$, temos $D^\beta u \in W_0^{l,p}(\Omega, x^A dx)$ para todo $|\beta| \leq k-l$ e

$$\left\|D^\beta u\right\|_{W_0^{l,p}(\Omega, x^A dx)} \leq \|u\|_{W_0^{k,p}(\Omega, x^A dx)}.$$

Como $l < \frac{D}{p}$, podemos aplicar a Parte 1 e obter

$$\left\|D^\beta u\right\|_{L^r(\Omega, x^A dx)} \leq C \left\|D^\beta u\right\|_{W_0^{l,p}(\Omega, x^A dx)}, \quad \text{para todo} \quad |\beta| \leq k-l,$$

onde $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{l}{D}$. Portanto,

$$\left\|D^\beta u\right\|_{L^r(\Omega, x^A dx)} \leq C \|u\|_{W_0^{k,p}(\Omega, x^A dx)}, \quad \text{para todo} \quad |\beta| \leq k-l.$$

Desse modo

$$\|u\|_{W^{k-l,r}(\Omega, x^A dx)} \leq C \|u\|_{W_0^{k,p}(\Omega, x^A dx)}. \tag{2.34}$$

Portanto, $u \in W^{k-l,r}(\Omega, x^A dx)$.

Note que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{l}{D}$. Logo, $r = \frac{pD}{D-pl}$. Como $\frac{D}{p} < l+1$, temos $r > D$. Assim, podemos aplicar o Teorema 2.3 para $D^\beta u \in W^{1,r}(\Omega, x^A dx)$, $|\beta| \leq k-l-1$ e obter

$$\begin{aligned}
[D^\beta u]_{C^{0,\gamma}} &= \sup_{x,y\in\Omega,\, x\neq y} \left\{ \frac{|D^\beta u(x) - D^\beta u(y)|}{|x-y|^\gamma} \right\} \\
&\leq C \left\|D^\beta u\right\|_{W^{1,r}(\Omega, x^A dx)} \leq C \|u\|_{W^{k-l,r}(\Omega, x^A dx)},
\end{aligned} \tag{2.35}$$

onde $\gamma = 1 - \frac{D}{r}$.

Portanto, usando (2.34) e (2.35), temos

$$\begin{aligned}
\|u\|_{C^{k-l-1,\gamma}} &= \sum_{|\alpha|\leq k-l-1} \|D^\alpha u\|_\infty + \sum_{|\alpha|=k-l-1} [D^\alpha u]_{C^{0,1-\frac{D}{r}}} \\
&\leq C \|u\|_{W^{k-l,r}(\Omega, x^A dx)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega, x^A dx)}.
\end{aligned}$$

Assim, como $1 - \frac{D}{r} = 1 - \frac{D}{p} + l = \left\lfloor \frac{D}{p} \right\rfloor - \frac{D}{p}$, temos $u \in C^{k-\left\lfloor \frac{D}{p}\right\rfloor -1, \left\lfloor \frac{D}{p}\right\rfloor + 1 - \frac{D}{p}}$.

Suponha que $kp > D$, com $\frac{D}{p}$ um inteiro. Seja $l = \left\lfloor \frac{D}{p} \right\rfloor - 1 = \frac{D}{p} - 1$. Assim, $l < \frac{D}{p} < k$ e, analogamente ao caso anterior, temos $u \in W^{k-l,r}(\Omega, x^A dx)$, onde $r = \frac{pD}{D-pl} = D$. Como $|\Omega| < \infty$, temos $u \in W^{k-l,q}(\Omega, x^A dx)$ para todo $q < r$. Portanto, $D^\alpha u \in W^{1,q}(\Omega, x^A dx)$

para todo $|\alpha| \leq k - l - 1$. Aplicando o Teorema 2.2, obtemos

$$\begin{aligned}\|D^\alpha u\|_{L^{q*}(\Omega, x^A dx)} &\leq C \|D^\alpha u\|_{W^{1,q}(\Omega, x^A dx)} \\ &\leq C \|u\|_{W^{k-l,q}(\Omega, x^A dx)} \leq C \|u\|_{W^{k-l,r}(\Omega, x^A dx)} .\end{aligned}$$

Note que a última constante depende de $|U|$. Logo, para todo $|\alpha| \leq k - l - 1 = k - \frac{D}{p}$, temos $D^\alpha u \in L^s(\Omega, x^A dx)$, $D \leq s < \infty$.

Desse modo, $u \in W^{k-\frac{D}{p},s}(\Omega, x^A dx)$ e $D^\alpha u \in W^{1,s}(\Omega, x^A dx)$ para todo $|\alpha| \leq k - \frac{D}{p} - 1$. Seja $D < s < \infty$, aplicando o Teorema 2.3, temos

$$[D^\alpha u]_{C^{0,\gamma}} \leq C \|D^\alpha u\|_{W^{1,s}(\Omega, x^A dx)} , \quad |\alpha| \leq k - \frac{D}{p} - 1,$$

onde $\gamma = 1 - \frac{D}{s}$. Analogamente ao caso anterior, temos $u \in C^{k-\frac{D}{p}-1,\gamma}$, onde $0 < \gamma < 1$, e

$$\|u\|_{C^{k-\frac{D}{p}-1,\gamma}} \leq C \|u\|_{W^{k-l,q}(\Omega, x^A dx)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega, x^A dx)} .$$

■

Apêndice A

Nesta seção apresentamos uma miscelânea de resultados que foram usados no decorrer do trabalho.

Teorema A.1 (Desigualdade aritmética-geométrica com pesos)**.** *Sejam* λ_i *e* w_i *números arbitrários não-negativos. Então*

$$w_1^{\lambda_1} \cdots w_m^{\lambda_m} \leq \left(\frac{\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_m} \right)^{\lambda_1 + \cdots + \lambda_m}.$$

Demonstração. Veja [14, Teorema 9, p. 17]. ∎

Teorema A.2 (Desigualdade Integral de Minkowski)**.** *Seja* $1 \leq p < \infty$*, então*

$$\left(\int_Y \left(\int_X |F(x,y)| dx \right)^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_X \left(\int_Y |F(x,y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} dx.$$

Aqui, $F(x,y)$ *é uma função mensurável no espaço medida produto* σ*-finito* $X \times Y$*,* dx *e* dy *são medidas em* X *e* Y *respectivamente.*

Demonstração. Veja [14, Teorema 202, p. 148]. ∎

Teorema A.3 (Fórmula da integração por partes)**.** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *e* $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$*. Então*

$$\int_\Omega u_{x_i} v dx = -\int_\Omega u v_{x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u v \nu^i dS \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Demonstração. Veja [12, Teorema 2, p. 628]. ∎

Teorema A.4 (Fórmula da Co-área)**.** *Seja $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitz contínua e assuma que para quase todo $r \in \mathbb{R}$, o conjunto*

$$\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, u(x) = r\}$$

seja uma hipersuperfície $(n-1)$-dimensional suave em $\mathbb{R}^n$. Suponha também que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é contínua e somável. Então

$$\int_{\mathbb{R}^n} f|\nabla u| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\{u=r\}} f dS \right) dr.$$

Demonstração. Veja [11, Teorema 2, p. 117]. ∎

Dado um conjunto limitado $X \subset \mathbb{R}^n$, seja A um bloco n-dimensional contendo X. A função característica de X é uma função $\xi_X : A \to \mathbb{R}$, definida por $\xi_X(x) = 1$ se $x \in X$ e $\xi_X(x) = 0$ se $x \notin X$. Quando a função característica $\xi_X : A \to \mathbb{R}$ é integrável, dizemos que X é J-mensurável.

Teorema A.5 (Mudança de Variável)**.** *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto J-mensurável, $h : U \to V$ um difeomorfismo de classe C^1 (isto é, f é invertível e f e f^{-1} são transformações C^1) entre abertos $U, V \subset \mathbb{R}^n$ e $f : h(X) \to \mathbb{R}$ um função integrável. Então*

$$\int_{h(X)} f(y) dy = \int_X f(h(x)) |\det h'(x)| dx.$$

Demonstração. Veja [16, Teorema de Mudança de Variáveis, p. 385]. ∎

Observação A.1. Seja $T = (T_1, T_2, \ldots, T_n) : \Omega \to T(\Omega)$, onde Ω é um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$, um difeomorfismo de classe C^1, então para um subconjunto S de Ω, pelo teorema de mudança de variáveis

$$\int_{T(S)} dx = \int_S |\det(T'(x))| dx,$$

onde $T'(x)$ é a matriz Jacobiana cujas entradas são $\frac{\partial T_i}{\partial x_j}(x)$. Porém, se T não é um difeomorfismo, temos que a igualdade na relação acima é substituída por uma desigualdade "$\leq$".

Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é dito de medida zero se para qualquer $\varepsilon > 0$, existe uma união contável de conjuntos abertos $U_i \subset \mathbb{R}^n$ tal que $A \subset \cup_i U_i$ e $\sum_i \operatorname{vol}(U_i) < \varepsilon$.

Teorema A.6 (Teorema de Sard)**.** *Seja U um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$ e $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação continuamente diferenciável. Seja C o conjunto de pontos críticos de f, isto é, $C = \{x \in U \,:\, \det(f'(x)) = 0\}$. Então $f(C)$ tem medida zero.*

Demonstração. Veja [16, Teorema de Sard, p. 359]. ■

Referências Bibliográficas

[1] Adams, R. A.; Fournier, J. J. F. *Sobolev Spaces.* Pure and Applied Mathematics, Vol. 140. Academic Press, 2003.

[2] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, 2010.

[3] Cabré, X. *Elliptic PDEs in Probability and Geometry. Symmetry and regularity of solutions*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 20, 2008, 425-457.

[4] Cabré, X. *Isoperimetric, Sobolev, and eigenvalue inequalities via the Alexandroff-Bakelman-Pucci method: a survey.* arXiv:1507.04563v3 [math.AP].

[5] Cabré, X. *Partial differential equations, geometry, and stochastic control (in Catalan)*, Bult. Soc. Catalana Mat. 15, 2000, 7-27.

[6] Cabré, X.; Ros-Oton, X. *Regularity of minimizers up to dimension 7 in domains of double revolution*, Comm. Partial Differential Equations 38 (2013) 135-154.

[7] Cabré, X.; Ros-Oton, X. *Sobolev and isoperimetric inequalities with monomial weights*, J. Differential Equations, 255 (2013), 4312-4336.

[8] Cabré, X.; Ros-Oton, X. *Sobolev and isoperimetric inequalities with monomial weights.* arXiv:1210.4487v2 [math.AP].

[9] Cioranescu, D.; Donato, P. *An Introduction to Homogenization.* Oxford lecture series in mathematics and its applications, Vol. 17. Oxford University Press. 1999.

[10] Courant, R.; Robbins, H. *What is Mathematics?*, Second Edition (revised by Ian Stewart). Oxford University Press, 1996.

[11] Evans, L. C.; Gariepy, R. F. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. Boca Raton, FL: CRC, 1992.

[12] Evans, L. C. *Partial Differential Equations.* Graduate Studies in Mathematics Vol. 19. American Mathematical Society, 1990.

[13] Gilbarg, D.; Trudinger, N. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, 1983.

[14] Hardy, G. H.; Littlewood, J. E.; Pólya, G. *Inequalities.* Cambridge Mathematical Library (second ed.). Cambridge: Cambridge University Press, 1952.

[15] Kesavan, S. *Symmetrization & Applications*, Series in Analysis Vol. 3. World Scientific, 2006.

[16] Lima, E. L. *Curso de análise vol.2.* 11 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[17] Moser, J. *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Indiana Univ. Math. J. 20 (1970) 1077–1092.

[18] Steiner, J. *Einfacher Beweis der isoperimetrischen Hauptsätze*, J. reine angew Math. 18, (1838), 281-296; and Gesammelte Werke Vol. 2, 77-91, Reimer, Berlin, (1882).

[19] Talenti, G. *A weighted version of a rearrangement inequality*, Ann. Univ. Ferrara 4 (1997) 121-133.

[20] Talenti, G. *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl. 110 (1976) 353-372.

[21] Trudinger, N. S. *On imbeddings into Orlicz spaces and some applications*, J. Math. Mech. 17 (1967) 473–483.