UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

O CENTRO DAS ÁLGEBRAS ENVOLVENTES UNIVERSAIS DE ÁLGEBRAS DE LIE NILPOTENTES EM CARACTERÍSTICA PRIMA

Vanderlei Lopes de Jesus

Belo Horizonte - MG
13 de Agosto de 2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

O CENTRO DAS ÁLGEBRAS ENVOLVENTES UNIVERSAIS DE ÁLGEBRAS DE LIE NILPOTENTES EM CARACTERÍSTICA PRIMA

Vanderlei Lopes de Jesus

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Csaba Schneider

Belo Horizonte - MG
13 de Agosto de 2021

Jesus, Vanderlei Lopes de

J58c O Centro das álgebras envolventes universais de álgebras de Lie nilpotentes em característica prima [manuscrito] / Vanderlei Lopes de Jesus. Belo Horizonte — 2021.
vii, 87 f. : il. ; 29cm

Orientador: Csaba Schneider.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f. 82-84

1. Matemática – Teses. 2. Lie, Álgebra de - Teses. 3. Grupos nilpotentes – Teses. 4 . Poisson, Distribuição de – Teses. 5. Aneis comutativos – Teses. I. Schneider, Csaba. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irénquer Vismeg Lucas Cruz CRB/6ª Região nº 819.

ATA DA CENTÉSIMA SEPTUAGÉSIMA SEGUNDA DEFESA DE TESE DE DOUTORADO DO ALUNO VANDERLEI LOPES DE JESUS, REGULARMENTE MATRICULADO NO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, REALIZADA DIA 13 DE AGOSTO DE 2021.

Aos treze dias do mês de agosto de 2021, às 10h00, em reunião pública virtual na Plataforma Google Meet pelo link meet.google.com/jrp-rwtt-eir (conforme mensagem eletrônica da Pró-Reitoria de Pós-Graduação de 26/03/2020, com orientações para a atividade de defesa de tese durante a vigência da Portaria nº 1819), reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para julgar a defesa de tese do aluno **Vanderlei Lopes de Jesus**, intitulada: *"O centro das álgebras envolventes universais de álgebras de Lie nilpotentes em característica prima"*, requisito final para obtenção do Grau de Doutor em Matemática. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Csaba Schneider, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares do trabalho final, passou a palavra ao aluno para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa do aluno. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se reservadamente, sem a presença do aluno, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: o aluno foi considerado aprovado sem ressalvas e por unanimidade. O resultado final foi comunicado publicamente ao aluno pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 13 de agosto de 2021.

PROF. DR. CSABA SCHNEIDER
Orientador (UFMG)

PROF. DR. LETTERIO GATTO
Examinador (Politecnico di Torino)

PROF. DR. LUCAS HENRIQUE CALIXTO
Examinador (UFMG)

PROF. DR. RENATO VIDAL DA SILVA MARTINS
Examinador (UFMG)

Tiago Macedo

PROF. DR. TIAGO MACEDO
Examinador (UNIFESP)

Pois que aproveita ao homem ganhar o mundo inteiro, se perder a sua alma? Ou que dará o homem em recompensa da sua alma? Mateus 16:26

Resumo

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica prima p e seja $U(\mathfrak{g})$ a álgebra envolvente universal de $\mathfrak{g}$. Sabemos da literatura que o centro $Z(\mathfrak{g})$ da álgebra envolvente $U(\mathfrak{g})$ é um domínio integralmente fechado. Nesta tese, descrevemos $Z(\mathfrak{g})$ para todas as álgebras de Lie nilpotentes indecomponíveis de dimensão menor ou igual a 6 sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica prima p assumindo que a classe de nilpotência $\mathrm{cl}(\mathfrak{g}) \leq p$.

Apresentamos exemplos em que $Z(\mathfrak{g}) = Z_p(\mathfrak{g})$, onde $Z_p(\mathfrak{g})$ é o p-centro de $U(\mathfrak{g})$. No entanto, encontramos casos em que $Z(\mathfrak{g}) \neq Z_p(\mathfrak{g})$. Nestes casos, vamos lidar com extensões integrais $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, \ldots z_s] \subseteq Z(\mathfrak{g})$ onde $z_1, \ldots, z_s \in Z(\mathfrak{g}) \setminus Z_p(\mathfrak{g})$. Nas condições em que $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, \ldots z_s] \subseteq Z(\mathfrak{g})$ é uma extensão integral cujos corpos de frações coincidem, para ocorrer a igualdade $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, \ldots z_s] = Z(\mathfrak{g})$, é suficiente que $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, \ldots z_s]$ seja um domínio integralmente fechado. Boa parte de nosso trabalho é mostrar essa propriedade. Nesse ponto, precisamos dos conceitos de anéis regulares e anéis Cohen-Macaulay.

Denotamos por $S(\mathfrak{g})$ a álgebra simétrica de $\mathfrak{g}$. Em característica zero, os espaços $U(\mathfrak{g})$ e $S(\mathfrak{g})$ são $\mathfrak{g}$-módulos isomorfos com respeito a representação adjunta. O conjunto de invariantes do $\mathfrak{g}$-módulo $U(\mathfrak{g})$ é o seu centro $Z(\mathfrak{g})$ e o conjunto de invariantes do $\mathfrak{g}$-módulo $S(\mathfrak{g})$ é denotado por $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. Nesta tese, também, explicitamos a álgebra de invariantes $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ para todas as álgebras de Lie nilpotentes indecomponíveis de dimensão menor ou igual a 6 sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica prima p com $\mathrm{cl}(\mathfrak{g}) \leq p$. Bem como, mostramos a incidência de um isomorfismo de álgebras entre $Z(\mathfrak{g})$ e $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.

Particularmente, determinamos $Z(\mathfrak{g})$ e $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ para as álgebras de Lie standard filiform de dimensão até 6 em característica prima p. Para essas álgebras, em geral, não é uma tarefa fácil determinar geradores explicitos para $Z(\mathfrak{g})$ e $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ por causa da complexidade de seus geradores e suas relações.

Palavras-chave: álgebras de Lie nilpotentes, álgebra envolvente universal, centro, centro Poisson, anéis Cohen-Macaulay.

Abstract

Let $\mathfrak{g}$ be a finite-dimensional Lie algebra over a field $\mathbb{F}$ of prime characteristic p and let $U(\mathfrak{g})$ be the universal enveloping algebra of $\mathfrak{g}$. We know from the literature that the center $Z(\mathfrak{g})$ of the enveloping algebra $U(\mathfrak{g})$ is an integrally closed domain. In this thesis, we describe $Z(\mathfrak{g})$ for all indecomposable nilpotent Lie algebras of dimension less than or equal to 6 over a field $\mathbb{F}$ of prime characteristic p assuming that $\mathrm{cl}(\mathfrak{g}) \leq p$.

We present examples where $Z(\mathfrak{g}) = Z_p(\mathfrak{g})$, where $Z_p(\mathfrak{g})$ is the p-center of $U(\mathfrak{g})$. However, we found cases where $Z(\mathfrak{g}) \neq Z_p(\mathfrak{g})$. In these cases, we will deal with integral extensions $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, \dots z_s] \subseteq Z(\mathfrak{g})$ where $z_1, \dots, z_s \in Z(\mathfrak{g}) \setminus Z_p(\mathfrak{g})$. When $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, \dots z_s] \subseteq Z(\mathfrak{g})$ is an integral extension whose fraction fields coincide, for equality $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, \dots z_s] = Z(\mathfrak{g})$ to occur, it is sufficient that $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, \dots z_s]$ is an integrally closed domain. A good part of our job is to show this property. At this point, we need the concepts of regular rings and Cohen-Macaulay rings.

We denote by $S(\mathfrak{g})$ the symmetric algebra of $\mathfrak{g}$. In characteristic zero, the spaces $U(\mathfrak{g})$ and $S(\mathfrak{g})$ are isomorphic $\mathfrak{g}$-modules with respect to the adjoint representation. The set of invariants of the $\mathfrak{g}$-module $U(\mathfrak{g})$ is its center $Z(\mathfrak{g})$ and the set of invariants of the $\mathfrak{g}$-module $S(\mathfrak{g})$ is denoted by $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. In this thesis, we describe the algebra of invariants $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ for all indecomposable nilpotent Lie algebras of a dimension less than or equal to 6 over a field $\mathbb{F}$ of prime caracteristic p with $\mathrm{cl}(\mathfrak{g}) \leq p$. Furthermore, we show the existence of an algebra isomorphism between $Z(\mathfrak{g})$ and $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.

We also describe $Z(\mathfrak{g})$ and $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ for the standard filiform Lie algebras of dimension up to 6 in prime characteristic p. For these algebras, in general, it is not an easy task to determine explicit generators for $Z(\mathfrak{g})$ and $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ because of the complexity of their generators and their relations.

Keywords: nilpotent Lie algebras, universal enveloping algebra, center, Poisson center, Cohen-Macaulay rings.

Sumário

Lista de Símbolos

$\mathbb{F}$	corpo
p	número primo
$\mathfrak{g}$	álgebra de Lie
$C(\mathfrak{g})$	centro de $\mathfrak{g}$
$\mathrm{cl}(\mathfrak{g})$	classe de nilpotência de $\mathfrak{g}$
$U(\mathfrak{g})$	álgebra envolvente universal de $\mathfrak{g}$
$Z(\mathfrak{g})$	centro de $U(\mathfrak{g})$
$Z_p(\mathfrak{g})$	p-centro de $U(\mathfrak{g})$
$D(\mathfrak{g})$	anel de divisão de $U(\mathfrak{g})$
$K(\mathfrak{g})$	corpo de frações de $Z(\mathfrak{g})$
$K_p(\mathfrak{g})$	corpo de frações de $Z_p(\mathfrak{g})$
$S(\mathfrak{g})$	álgebra simétrica de $\mathfrak{g}$
$S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$	álgebra de invariantes de $S(\mathfrak{g})$
$Q(\mathfrak{g})$	corpo de frações de $S(\mathfrak{g})$
Q_0	corpo de frações de $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$
R	anel comutativo com identidade
$R[\mathbf{x}_n] = R[x_1, \dots x_s]$	álgebra de polinômios sobre R
$\mathbb{F}(\mathbf{x}_n)$	corpo de frações de $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$
$P(\mathfrak{g}) = \mathbb{F}[\mathbf{x}_n]^{\mathfrak{g}}$	centro de Poisson de $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$
$P_p(\mathfrak{g})$	subálgebra de $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]^{\mathfrak{g}}$ gerada por $x_1^p, \dots, x_k^p, x_{k+1}, \dots, x_n$

$L(\mathfrak{g})$	corpo de frações de $P(\mathfrak{g})$
$L_p(\mathfrak{g})$	corpo de frações de $P_p(\mathfrak{g})$
$r(\mathfrak{g})$	posto da matriz $M_\mathfrak{g}$
$\det(M)$	determinante da matriz M
rank(M)	posto da matriz M
$[\mathbb{E} : \mathbb{F}]$	o grau da extensão de corpos $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$
$F(\alpha)$	extensão do corpo $\mathbb{F}$ por α
$\dim(R)$	dimensão de Krull de R
Spec(R)	conjunto dos ideais primos de R
Frac(R)	corpo de frações de R
$S^{-1}R$	localização de R com respeito ao conjunto multiplicativo S
R_P	localização de R em relação a $R \setminus P$ (P ideal primo)
R_x	localização de R em relação ao conjunto multiplicativo gerado por x
$(a_1, \ldots, a_n)$	ideal gerado por $a_1, \ldots, a_n$
$\mathfrak{m}$	ideal maximal
ht(I)	altura do ideal I
R/I	anel quociente de R pelo ideal I
ad$_x$	derivação interna em relação a x
$\frac{\partial}{\partial x}$	derivação parcial em relação x
min$_\mathbb{F}(x)$	polinômio minimal de x sobre $\mathbb{F}$
$\dim_\mathbb{F}(V)$	dimensão do espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{F}$
$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle_\mathbb{F}$	espaço vetorial gerado por $x_1, \ldots, x_n$ sobre $\mathbb{F}$

Capítulo 1

Introdução

1.1 O centro da álgebra envolvente universal

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ e seja $U(\mathfrak{g})$ sua álgebra envolvente universal. Associando todo elemento de $\mathfrak{g}$ com sua imagem em $U(\mathfrak{g})$ consideramos $\mathfrak{g}$ como uma subálgebra de Lie de $U(\mathfrak{g})$. O centro de $U(\mathfrak{g})$ é denotado por $Z(\mathfrak{g})$.

A descrição do centro $Z(\mathfrak{g})$ é uma questão importante na teoria de representações de álgebras de Lie estando vinculada ao estudo de variedades algébricas como os grupos de Lie. A título de exemplo, em característica zero, determinar $Z(\mathfrak{g})$ é uma ferramenta para indicar as representações unitárias irredutíveis dos grupos de Lie [9]. Em característica prima, o estudo das representações de uma álgebra de Lie está ligado com especialização (ou redução) de uma variedade algébrica [34]. Em particular, se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie de dimensão n sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica prima, então $\mathrm{Spec}(Z(\mathfrak{g}))$ é uma variedade algébrica normal de dimensão n sobre $\mathbb{F}$ [34].

Existem alguns fatos importantes que diferem as álgebras de Lie de dimensão finita sobre um corpo de característica prima p das álgebras de Lie de dimensão finita sobre um corpo de característica zero. Por exemplo:

- O anel de frações da álgebra envolvente universal de uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo de característica prima é uma álgebra de divisão de dimensão finita sobre seu centro (Teorema 3.3.4(2)), enquanto que este não é o caso em característica zero.

- Para cada álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo de característica prima, existem representações indecomponíveis de dimensão finita que não são irredutíveis [19, Teorema 2], enquanto que pelo Teorema de Weyl, toda representação indecomponível de dimensão finita de uma álgebra de Lie semissimples sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero é irredutível [17, Seção 6.3, p. 28].

- Toda álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo de característica prima possui uma representação de dimensão finita fiel e completamente redutível [32, Teorema 5.2, p. 220]. Em característica zero, o Teorema de Weyl aborda a situação em que todas as representações de dimensão finita de uma dada álgebra de Lie são completamente redutíveis. Nesse caso, as álgebras de Lie semissimples e álgebras de Lie abelianas admitem representações completamente redutíveis [17, Seção 6.3, p. 28] e [32, Lema 5.6, p. 31].

Contudo, algumas propriedades das álgebras de Lie em característica zero são preservadas quando passamos para característica positiva. Por exemplo, se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie nilpotente de dimensão finita sobre um corpo de característica zero, então o centro $Z(\mathfrak{g})$ é um domínio fatorial [11] e cada ideal primo em $U(\mathfrak{g})$ de altura um é um ideal principal gerado por um elemento central [27]. Estas propriedades também são válidas em característica prima [4]. Aqui a nilpotência de $\mathfrak{g}$ é importante, pois em [6, Exemplo 9.1], encontramos uma álgebra de Lie solúvel $\mathfrak{g}$ de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica prima em que o centro $Z(\mathfrak{g})$ não é fatorial. No caso semissimples, se $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ ou $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ e o corpo considerado é algebricamente fechado de característica p com $p \nmid n$, então $Z(\mathfrak{g})$ é um domínio fatorial [30].

Denotamos por $S(\mathfrak{g})$ a álgebra simétrica da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Se $\mathfrak{g}$ é de dimensão n sobre $\mathbb{F}$, então $S(\mathfrak{g})$ é isomorfa a álgebra de polinômios em n variáveis sobre $\mathbb{F}$. Em característica zero, os espaços $U(\mathfrak{g})$ e $S(\mathfrak{g})$ são $\mathfrak{g}$-módulos isomorfos com respeito a representação adjunta [13, Proposição 2.4.10]. O espaço de invariantes do $\mathfrak{g}$-módulo $U(\mathfrak{g})$ é precisamente o seu centro $Z(\mathfrak{g})$. Os elementos de $Z(\mathfrak{g})$ são também chamados invariantes de Casimir de $\mathfrak{g}$. O conjunto de invariantes do $\mathfrak{g}$-módulo $S(\mathfrak{g})$ é denotado por $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ (veja Seção 6.17). Desperta interesse descrever a estrutura do centro $Z(\mathfrak{g})$ e da álgebra de invariantes $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, tanto quanto estudar a existência de um isomorfismo de álgebras $Z(\mathfrak{g}) \cong S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.

1.2 Resultados conhecidos

Se $\mathfrak{g}$ é uma das álgebras $\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{pgl}_n, \mathfrak{psl}_n$, então o centro $Z(\mathfrak{g})$ é calculado em característica prima em [5]. O cálculo de $Z(\mathfrak{g})$ para a álgebra de Lie das matrizes triangulares estritamente inferiores $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$ pode ser encontrado em [12]. Ainda em característica zero, considerando $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie das matrizes triangulares superiores, $Z(\mathfrak{g})$ foi calculado em [3]. O centro $Z(\mathfrak{g})$ em característica prima para $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie semissimples foi calculado em [33] e [26].

Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ algebricamente fechado de caracterítica zero, então M. Duflo mostrou que existe um isomorfismo de álgebras entre $Z(\mathfrak{g})$ e $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, o chamado Isomorfismo de Duflo [15, Teorema 2].

O isomorfismo de álgebras entre $Z(\mathfrak{g})$ e $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ também é interessante nos casos particulares. Se $\mathfrak{g}$ é semissimples, então esse isomorfismo é uma soma dos teoremas de Chevalley e Harish-Chandra [13, Teoremas 7.3.7 e 7.4.5]. Para $\mathfrak{g}$ nilpotente, o mapa de simetrização dá um isomorfismo entre $Z(\mathfrak{g})$ e $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ (veja [13, Proposição 4.8.12]). No caso em que $\mathfrak{g}$ é solúvel, o isomorfismo é uma consequência de [21, Proposições 4.0 e 4.1]. Em todos esses casos, o corpo considerado é algebricamente fechado de característica zero.

No entato, considerando um corpo de característica $p > 3$ e tomando $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, é conhecido que $Z(\mathfrak{g}) \ncong S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ (veja [2, Exemplos 6.1]). Nessa direção, A. Braun (ver [2, p. 204]) apresentou a seguinte conjectura:

Conjectura (A. Braun) Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie nilpotente de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica prima, então $Z(\mathfrak{g}) \cong S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.

Em característica positiva, se $\mathfrak{g}$ é o nilradical (ideal nilpotente maximal) da subálgebra de Borel (subálgebra solúvel maximal) de uma álgebra de Lie simples clássica (do tipo A_n, B_n, C_n, D_n), então as álgebras $Z(\mathfrak{g})$ e $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ são isomorfas [2]. Isto é, para essas álgebras a conjectura de A. Braun é verdadeira. No trabalho [2], Ben-Shimol toma o p-centro $Z_p(\mathfrak{g})$ de $U(\mathfrak{g})$ (ver Definição 3.3.1), constrói elementos centrais $z_1, \ldots, z_s \in Z(\mathfrak{g}) \setminus Z_p(\mathfrak{g})$ e mostra, em cada uma das álgebras de Lie simples clássicas, que $Z(\mathfrak{g}) = Z_p(\mathfrak{g})[z_1, \ldots, z_s]$.

Ben-Shimol mostrou que, em cada caso, tem-se $Z(\mathfrak{g}) = Z_p(\mathfrak{g})[z_1, \ldots, z_s]$ é isomorfo a um anel Cohen-Macaulay integralmente fechado da forma R/I, onde $R = Z_p(\mathfrak{g})[t_1, \ldots t_s]$ é o anel de polinômios sobre $Z_p(\mathfrak{g})$ nas variáveis $t_1, \ldots, t_s$ e $I = (f_1, \ldots, f_s)$ é o ideal gerado pela sequência regular $f_1, \ldots, f_s$, onde $f_i = t_i^p - z_i^p$, $i = 1, \ldots s$. Para tanto, ele fez uso do Critério Jacobiano para regularidade (Teorema 2.3.8(2)) e do Critério de Serre para integridade (Teorema 2.4.5(2)).

J. Dixmier em [10], estudando as representações unitárias dos grupos de Lie nilpotentes, apresenta todas as álgebras de Lie nilpotentes indecomponíveis de dimensão menor ou igual a 5 (a menos de isomorfismo) e usa o Isomorfismo de Duflo para exibir o centro $Z(\mathfrak{g})$ para essas álgebras sobre um corpo de característica zero. Em particular, ele concluiu que se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie nilpotente de dimensão menor ou igual a 5 sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica zero, então $Z(\mathfrak{g})$ é isomorfo a uma álgebra de polinômios, exceto quando temos a álgebra de Lie standard filiform de dimensão 5.

Alfons Ooms em [28], calculando o centro e o semi-centro de $U(\mathfrak{g})$ para $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo de característica zero, e em [29], também em característica zero, coletando resultados gerais sobre a álgebra de invariantes $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ de álgebras de Lie de dimensão finita, descreve $Z(\mathfrak{g})$ para todas as álgebras de Lie nilpotentes indecomponíveis de dimensão no máximo 7 sobre $\mathbb{C}$. Devido à quantidade e ao tamanho dos geradores de $Z(\mathfrak{g})$, o autor utilizou as ferramentas computacionais MAPLE e SINGULAR para expressar esses geradores.

Estes trabalhos de J. Dixmier e Alfons Ooms determinam o centro $Z(\mathfrak{g})$ para $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie nilpotente indecomponível de dimensão até 7 sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero ($\mathbb{C}$).

1.3 Resultados novos

Em nosso trabalho, fazendo uso das técnicas empregadas por Oz Ben-Shimol em [2], vamos explicitar a estrutura do centro $Z(\mathfrak{g})$ e da álgebra de invariantes $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, bem como a incidência de um isomorfismo de álgebras entre $Z(\mathfrak{g})$ e $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, para todas as álgebras de Lie nilpotentes indecomponíveis de dimensão menor ou igual a 6 sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica prima p. Efetivamente vamos demonstrar os seguintes teoremas:

Teorema A. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie nilpotente de dimensão menor ou igual a 6 sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica prima p com $\mathrm{cl}(\mathfrak{g}) \leq p$, onde $\mathrm{cl}(\mathfrak{g})$ é a classe de nilpotência de $\mathfrak{g}$. Então

1. $Z(\mathfrak{g})$ é o fecho integral do anel gerado sobre $\mathbb{F}$ pelos geradores dados na Tabela 1.1 no seu corpo de frações.

2. Se $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{g}_{5,5}, \mathfrak{g}_{6,18}, \mathfrak{g}_{6,25}$, então $Z(\mathfrak{g})$ é um anel Cohen-Macaulay gerado sobre $\mathbb{F}$ pelos geradores dados na Tabela 1.1.

No caso das três álgebras explicitadas no item 2 do Teorema A, o centro $Z(\mathfrak{g})$ não é gerado pelos geradores dados na Tabela 1.1. Veja as discussões nas Seções 4.2.1, 5.2.1 e 5.2.2.

Teorema B. Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie nilpotente de dimensão menor ou igual a 6 sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica prima p com $\mathrm{cl}(\mathfrak{g}) \leq p$, então $Z(\mathfrak{g}) \cong S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. Em particular, a conjectura de A. Braun é verdadeira nesta classe de álgebras.

Veja as Tabelas 4.1 e 5.1 para as táboas de multiplicação das álgebras aparecendo na Tabela 1.1.

Tabela 1.1: Invariantes de Casimir de $\mathfrak{g}$

$\mathfrak{g}$	Geradores	p
$\mathfrak{g}_3$	x_1^p, x_2^p, x_3	$p \geq 2$
$\mathfrak{g}_4$	$x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4, x_3^2 - 2x_2x_4$	$p \geq 3$
$\mathfrak{g}_{5,1}$	$x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5$	$p \geq 2$

Continua na próxima página

Tabela 1.1 – *Continuação da tabela*

$\mathfrak{g}$	Geradores	p
$\mathfrak{g}_{5,2}$	$x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4, x_5, x_2x_5 - x_3x_4$	$p \geq 2$
$\mathfrak{g}_{5,3}$	$x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5$	$p \geq 3$
$\mathfrak{g}_{5,4}$	$x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4, x_5, x_3^2 + 2x_1x_5 - 2x_2x_4$	$p \geq 3$
$\mathfrak{g}_{5,5}$	$x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5, 2x_3x_5 - x_4^2, 3x_2x_5^2 - 3x_3x_4x_5 + x_4^3$	$p \geq 5$
$\mathfrak{g}_{5,6}$	$x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5$	$p \geq 5$
$\mathfrak{g}_{6,7}^{(2)}(\eta)$	$x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5, x_6 \quad (\eta \in \mathbb{F})$	$p = 2$
$\mathfrak{g}_{6,10}$	$x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5^p, x_6, x_3^2 - 2x_2x_6$	$p \geq 3$
$\mathfrak{g}_{6,11}$	$x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5^p, x_6, x_4^2 + 2x_5x_6 - 2x_3x_6$	$p \geq 5$
$\mathfrak{g}_{6,12}$	$x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5^p, x_6, x_4^2 - 2x_3x_6$	$p \geq 5$
$\mathfrak{g}_{6,13}$	$x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5^p, x_6, x_5^3 - 3x_3x_5x_6 + 3x_2x_6^2$	$p \geq 5$
$\mathfrak{g}_{6,14}$	$x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5^p, x_6, 2x_5^3 + 3x_4^2x_6 - 6x_3x_5x_6 - 6x_1x_6^2$	$p \geq 5$
$\mathfrak{g}_{6,15}$	$x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5^p, x_6, x_5^3 - 3x_4x_5x_6 + 3x_3x_6^2$	$p \geq 5$
$\mathfrak{g}_{6,16}$	$x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5^p, x_6, x_4^2 - 2x_1x_6 - 2x_3x_5$	$p \geq 5$
$\mathfrak{g}_{6,17}$	$x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5^p, x_6, x_5^2 - 2x_4x_6$	$p \geq 5$
$\mathfrak{g}_{6,18}$	$x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5^p, x_6, x_5^2 - 2x_4x_6, x_5^3 - 3x_4x_5x_6 + 3x_3x_6^2,$ $x_4^2 + 2x_2x_6 - 2x_3x_5$	$p \geq 5$
$\mathfrak{g}_{6,19}(\varepsilon)$	$x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5^p, x_6, x_5^2 + \varepsilon x_4^2 + 2\varepsilon x_1x_6 - 2x_3x_6 \; (\varepsilon \in \mathbb{F}^*)$	$p \geq 3$
$\mathfrak{g}_{6,20}$	$x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5^p, x_6, x_5^2 - 2x_3x_6$	$p \geq 3$
$\mathfrak{g}_{6,21}(\varepsilon)$	$x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5^p, x_6, x_5^2 + \varepsilon x_4^2 - 2\varepsilon x_3x_6 \quad (\varepsilon \in \mathbb{F}^*)$	$p \geq 5$
$\mathfrak{g}_{6,22}(\varepsilon)$	$x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5, x_6 \; (\varepsilon \in \mathbb{F})$	$p \geq 2$
$\mathfrak{g}_{6,23}$	$x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5, x_6$	$p \geq 3$
$\mathfrak{g}_{6,24}(\varepsilon)$	$x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5, x_6 \; (\varepsilon \in \mathbb{F})$	$p \geq 3$
$\mathfrak{g}_{6,25}$	$x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5, x_6, x_3^2 - 2x_2x_5, x_3x_6 - x_4x_5$	$p \geq 3$
$\mathfrak{g}_{6,26}$	$x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4, x_5, x_6, x_1x_6 - x_2x_5 + x_3x_4$	$p \geq 2$
$\mathfrak{g}_{6,27}$	$x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5, x_6$	$p \geq 3$
$\mathfrak{g}_{6,28}$	$x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5, x_6$	$p \geq 5$

Fim da tabela

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie nilpotente de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica prima p e seja $Z_p(\mathfrak{g})$ o p-centro de $U(\mathfrak{g})$. O domínio $Z_p(\mathfrak{g})$ é uma álgebra de polinômios e a extensão $Z_p(\mathfrak{g}) \subseteq Z(\mathfrak{g})$ é uma extensão integral de domínios. Determinando $Z(\mathfrak{g})$ para $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie nilpotente indecomponível de dimensão menor ou igual a 6 sobre um corpo de característica prima p, vamos mostar exemplos onde $Z(\mathfrak{g}) = Z_p(\mathfrak{g})$ (veja as Seções 4.2 e 5.2).

Pode, no entanto, acontecer que $Z(\mathfrak{g}) \neq Z_p(\mathfrak{g})$. Nestes casos, vamos tratar de extensões integrais $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, \ldots z_s] \subseteq Z(\mathfrak{g})$ com $z_1, \ldots, z_s \in Z(\mathfrak{g}) \setminus Z_p(\mathfrak{g})$ onde $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, \ldots, z_s]$

não é uma álgebra de polinômios. Vamos calcular o corpo de frações de $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, \dots z_s]$ e lidando com extensões puramente inseparáveis, estabeleceremos um critério para que os corpos de frações de $Z(\mathfrak{g})$ e $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, \dots z_s]$ coincidam (ver Teorema 3.3.6).

Nas condições em que $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, \dots z_s] \subseteq Z(\mathfrak{g})$ é uma extensão integral cujos corpos de frações coincidem, para ocorrer a igualdade $Z(\mathfrak{g}) = Z_p(\mathfrak{g})[z_1, \dots z_s]$ será suficiente que $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, \dots z_s]$ seja um domínio integralmente fechado. Boa parte de nosso trabalho será mostrar essa propriedade (Teoremas 4.2.1 e 5.2.1). Assim como Oz Ben-Shimol, recorremos aos conceitos de anéis regulares e anéis Cohen-Macaulay, bem como, ao Critério Jacobiano para regularidade e ao Critério de Serre para integridade.

Em nosso trabalho, vamos determinar o centro $Z(\mathfrak{g})$ para todas as álgebras de Lie nilpotentes indecomponíveis de dimensão até 6 sobre um corpo de característica prima p, limitando $p \geq \mathrm{cl}(\mathfrak{g})$. Também será necessário o uso de recursos computacinais para calcular os geradores do centro em alguns casos (veja as Seções 4.2.1 e 5.2.1). Utilizaremos o software Macaulay2 [16].

Para calcular os geradores da álgebra de invariantes $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, em qualquer característica, é necessário determinar soluções de certas equações diferenciais parciais. Isso acontece porque se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie com base $\{x_1, \dots, x_n\}$ sobre um corpo $\mathbb{F}$, então podemos identificar sua álgebra simétrica $S(\mathfrak{g})$ com a álgebra de polinômios $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n] = \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$. Considerando a ação adjunta de $\mathfrak{g}$ em $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$ (ver Equação 3.4), o conjunto de invariantes de $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$ por essa ação é chamado centro de Poisson de $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$ e é denotado por $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]^{\mathfrak{g}}$. Para todo $f \in \mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$ vale que

$$f \in \mathbb{F}[\mathbf{x}_n]^{\mathfrak{g}} \text{ se e somente se } \sum_{j=1}^{n} [x_i, x_j] \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0, \text{ para todo } 1 \leq i \leq n.$$

(veja Proposição 3.2.3). Vamos utilizar essas equações diferenciais para calcular os geradores de $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]^{\mathfrak{g}}$ (ou $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$) em todos os casos que consideraremos.

1.4 Casos interessantes

É particularmente interessante o cálculo de $Z(\mathfrak{g})$ e $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ quando $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(n)$ $(n \geq 3)$ é a álgebra de Lie standard filiform de dimensão n sobre um corpo $\mathbb{F}$ (veja [2, Exemplo 6.4]). Se $\{x_1, \dots, x_n\}$ é uma base para $\mathfrak{g}$, então $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie definida pelos comutadores $[x_1, x_i] = x_{i+1}$, para $i = 2, \dots, n-1$. Nesse caso, $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie nilpotente com classe de nilpotência $\mathrm{cl}(\mathfrak{g}) = n - 1$. Para essas álgebras, não é uma tarefa fácil determinar $Z(\mathfrak{g})$ e $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ por causa da complexidade de seus geradores e suas relações. Por exemplo, podemos ver isso em [10, Caso $\mathfrak{g}_3$, $\mathfrak{g}_4$, $\mathfrak{g}_{5,5}$] e [28, Caso 25], onde os autores mostraram que se $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie standard filiform de dimensão $n \leq 6$ sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, então para

$$
\begin{aligned}
Z(\mathfrak{g}(3)) &= \mathbb{F}[x_3], \\
Z(\mathfrak{g}(4)) &= \mathbb{F}[x_4, x_3^2 - 2x_2x_4], \\
Z(\mathfrak{g}(5)) &= \mathbb{F}[x_5, z_1, z_2, z_3],
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 2x_3x_5 - x_4^2, \\
z_2 &= 3x_2x_5^2 - 3x_3x_4x_5 + x_4^3, \\
z_3 &= 9x_2^2x_5^2 - 18x_2x_3x_4x_5 + 6x_2x_4^3 + 8x_3^3x_5 - 3x_3^2x_4^2,
\end{aligned}
$$

e é válida a relação $z_1^3 + z_2^2 - x_5^2z_3 = 0$. Ademais, $Z(\mathfrak{g}(6)) = \mathbb{F}[x_6, z_1, z_2, z_3, z_4]$, onde

$$
\begin{aligned}
z_1 &= x_5^2 - 2x_4x_6, \\
z_2 &= x_5^3 - 3x_4x_5x_6 + 3x_3x_6^2, \\
z_3 &= x_4^2 + 2x_2x_6 - 2x_3x_5, \\
z_4 &= 2x_4^3 + 6x_2x_5^2 + 9x_3^2x_6 - 12x_2x_4x_6 - 6x_3x_4x_5,
\end{aligned}
$$

e é válida a relação $z_1^3 - z_2^2 - 3x_6^2z_1z_3 + x_6^3z_4 = 0$.

O centro $Z(\mathfrak{g}(7))$ sobre $\mathbb{C}$ possui um conjunto minimal de geradores com 23 elementos satisfazendo 168 relações [29, Caso 159].

Sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, as álgebras de Lie standard filiform gozam da propriedade que $Z(\mathfrak{g})$ (ou $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$) é uma álgebra de polinômios se $n \leq 4$ [29, Exemplo 27]. Em característica positiva, as álgebras de Lie standard filiform formam um exemplo importante de álgebras de Lie nilpotentes onde a conjectura de A. Braun é verdadeira. Isto é, também em característica positiva, essas álgebras satisfazem $Z(\mathfrak{g}) \cong S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ como álgebras comutativas [2, Exemplo 6.4].

Em nosso trabalho, vamos explicitar $Z(\mathfrak{g})$ para as álgebras de Lie standard filiform de dimensão até 6 em característica positiva. Nesse caso, $Z(\mathfrak{g})$ (ou $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$) é uma álgebra de polinômios apenas para a álgebra standard filiform de dimensão 3 (veja nas Seções 4.1 e 4.2 os casos $\mathfrak{g}(3)$ e $\mathfrak{g}(4)$, e as Seções 4.2.1 e 5.2.2).

Em característica zero, o Isomorfismo de Duflo mostra que o conhecimento da álgebra de invariantes $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ determina o centro $Z(\mathfrak{g})$. Em característica positiva, para as álgebras de Lie nilpotentes indecomponíveis de dimensão até 6, utilizaremos de conceitos de álgebra comutativa para determinar a integridade dos anéis Cohen-Macaulay que consideraremos, e assim, explicitar os centros $Z(\mathfrak{g})$ e deduzir a incidência de um isomorfiso de álgebras entre $Z(\mathfrak{g})$ e $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.

1.5 A estrutura da tese

O texto desta tese está dividida em cinco capítulos.

No Capítulo 2, apresentaremos alguns conceitos de álgebra comutativa essenciais em nosso trabalho. Nesse capítulo vamos brevemente tratar de definições e propriedades das extensões inseparáveis, da localização de um anel, dos anéis Cohen-Macaulay e dos anéis regulares, do fecho integral e da integridade de anéis e apresentaremos também alguns resultados sobre polinômios primos. No fim desse capítulo vamos dar uma condição para que um domínio seja integralmente fechado e vamos exibir uma lista de domínios integralmente fechados que aplicaremos nos Capítulos 4 e 5 no cálculo do centro das álgebras envolventes universais.

No Capítulo 3, vamos falar sobre a álgebra envolvente universal de uma álgebra de Lie e seu anel de divisão, falaremos da álgebra de invariantes de uma álgebra de Lie e seu corpo de frações. Aqui explicaremos o conceito e as principais propriedades do p-centro da álgebra envolvente universal de uma álgebra de Lie. Nesse capítulo abordaremos sobre os graus das extensões do anel de divisão da álgebra envolvente universal sobre seu centro e sobre o corpo de frações do seu p-centro.

No Capítulo 4, será calculado o centro $Z(\mathfrak{g})$ para todas as álgebras de Lie nilpotentes indecomponíveis de dimensão menor ou igual a 5 em característica prima p. Apresentaremos os dois casos: o centro coincinde com o p-centro ou o centro é uma extensão própria do p-centro. Concluíremos esse capítulo apresentando o caso particular quando $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie standard filiform $\mathfrak{g}(5) = \mathfrak{g}_{5,5}$ de dimensão 5. Nesse caso, para $z_1, z_2 \in Z(\mathfrak{g})$ dados por

$$z_1 = 2x_3x_5 - x_4^2,$$
$$z_2 = 3x_2x_5^2 - 3x_3x_4x_5 + x_4^3,$$

temos que $Z(\mathfrak{g})$ é o fecho integral de $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$ no seu corpo de frações. Geradores expressos no caso $p = 5$ foram determinados usando o software Macaulay2 e são apresentados na Seção 4.2.1.

No Capítulo 5, faremos o cálculo de $Z(\mathfrak{g})$ para todas as álgebras de Lie nilpotentes indecomponíveis de dimensão igual a 6 em característica prima p. Primeiro obtemos dois casos: o centro é igual ao p-centro ou o centro é uma extensão própria do p-centro. Depois, destacam-se dois casos complicados:

Se $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,25}$ é a álgebra definida pelos comutadores

$$[x_1, x_2] = x_3, \ [x_1, x_3] = x_5 \text{ e } [x_1, x_4] = x_6,$$

então para $z_1, z_2 \in Z(\mathfrak{g})$ dados por

$$z_1 = x_3^2 - 2x_2x_5,$$
$$z_2 = x_3x_6 - x_4x_5,$$

temos que $Z(\mathfrak{g})$ é o fecho integral de $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$ no seu corpo de frações. Geradores para $Z(\mathfrak{g})$ são determinados computacionalmente nos casos $p = 3$ e $p = 5$ e são apresentados na Seção 5.2.1.

Se $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,18} = \mathfrak{g}(6)$ é a álgebra de Lie standard filiform de dimensão 6, então para os elementos $z_1, z_2, z_3 \in Z(\mathfrak{g})$ definidos por

$$
\begin{aligned}
z_1 &= x_5^2 - 2x_4x_6, \\
z_2 &= x_5^3 - 3x_4x_5x_6 + 3x_3x_6^2, \\
z_3 &= x_4^2 + 2x_2x_6 - 2x_3x_5,
\end{aligned}
$$

temos que $Z(\mathfrak{g})$ é o fecho integral de $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2, z_3]$ no seu corpo de frações. Infelizmente nem por meios computacionais nós conseguimos determinar geradores explícitos para $Z(\mathfrak{g})$ neste caso (veja Seção 5.2.2).

No Capítulo 6, determinaremos a álgebra de invariantes $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ para todas as álgebras de Lie nilpotentes indecomponíveis de dimensão até 6 sobre um corpo de característica prima p. Em particular, concluíremos que a conjectura de A. Braun é verdadeira para todas as álgebras de Lie nilpotentes de dimensão até 6 com classe de nilpotência menor ou igual a p.

1.6 Para o futuro...

- Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie nilpotente de dimensão finita n sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica prima p, com $p \geq \mathrm{cl}(\mathfrak{g})$, então $x^p \in Z(\mathfrak{g})$ para todo $x \in \mathfrak{g}$. Por isso, em nosso trabalho, em todos os casos, assumimos que $p \geq \mathrm{cl}(\mathfrak{g})$. Mas, para cada $x \in \mathfrak{g}$, a nilpotência de ad_x garante que $x^{p^r} \in Z(\mathfrak{g})$ para algum $r \geq 0$. Como $\mathfrak{g}$ é de dimensão finita, sempre podemos tomar um número r minimal com essa propriedade. Assim, seria interessante considerar no futuro os casos em que p é pequeno $p < \mathrm{cl}(\mathfrak{g})$. Nesse sentido, se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie standard filiform de dimensão n sobre um corpo de característica positiva já sabemos que $Z(\mathfrak{g}) \cong S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ sem restrinções sob a característica p (Proposição 6.2.1). Também, A. Braun em [4] nos mostra um caminho.

- Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie nilpotente indecomponível de dimensão 7 sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero ($\mathbb{C}$), então $Z(\mathfrak{g})$ foi calculado em [28] e [29]. Dadas as tabelas de multiplicação e os geradores de $Z(\mathfrak{g})$ em característica zero, percebemos que as estratégias que utilizamos com as álgebras de dimensão até 6 em característica p podem ser aplicadas para essas álgebras. Assim, fica a possibilidade de continuar esse trabalho para as álgebras de Lie nilpotentes de dimensão 7 em característica p. Mas, claro que a quantidade de geradores e relações em alguns casos nessa dimesão assustam.

Capítulo 2

Uns conceitos de álgebra comutativa

Grande parte de nosso trabalho será mostrar a integridade de álguns anéis que consideraremos. Com esse fim, precisamos recorrer a alguns tópicos da álgebra comutativa como a integridade e localização de anéis, os anéis regulares, os anéis Cohen-Macaulay, as extensões inseparáveis e também, o Critério Jacobiano para regularidade e o Critério de Serre para integridade. No fim desse capítulo apresentaremos uma lista de anéis integralmente fechados importantes no decorrer de nosso trabalho.

Vamos iniciar essa seção tratando de extensões de corpos. Particularmente vamos definir e apresentar algumas propriedades de extensões de corpos puramente inseparáveis em caracterítica positiva. Depois vamos apresentar o conceito de sequência regular, definir anéis regulares e CM anéis, vendo que os anéis regulares são CM anéis fatoriais. Vamos apresentar o Critério de Serre para integridade e o Critério Jacobiano para regularidade. Usaremos desses dois critérios para mostrar regularidade e integridade dos anéis que consideraremos.

Os conceitos e resultados que apresentaremos nessa seção visam, em resumo, possibilitarem a demonstração do Teorema 2.6.1, que será aplicado na Seção 2.6, onde apresentaremos exemplos de anéis integralmente fechados. A integridade desses anéis será útil nos Capítulos 4 e 5, onde determinaremos os centros $Z(\mathfrak{g})$ em característica prima p, para $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie nilpotente de dimensão até 6. Todos os anéis que consideramos nesse capítulo são comutativos com identidade.

Se R é um anel, então $R[\mathbf{x}_n] = R[x_1, \ldots, x_n]$ é o anel de polinômios sobre R em n variáveis. Isto é, o conjunto de expressões polinomiais em $x_1, \ldots, x_n$ com coeficientes em R. Se $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ é uma extensão de corpos e $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{E}$, então denotamos por $\mathbb{F}(\mathbf{x}_n) = \mathbb{F}(x_1, \ldots, x_n)$ ao corpo gerado por $\mathbb{F}$ e $x_1, \ldots, x_n$. O grau da extensão $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ é denotado por $[\mathbb{E} : \mathbb{F}]$.

2.1 Extensões Inseparáveis

Nessa seção nossa principal referência é [18, Capítulo 19]. Se $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ é uma extensão de corpos, então um elemento $\alpha \in \mathbb{E}$ algébrico sobre $\mathbb{F}$, é dito separável sobre $\mathbb{F}$ se $\min_{\mathbb{F}}(\alpha)$ (o polinômio minimal de α sobre $\mathbb{F}$) é separável, ou equivalentemente, se as raízes de $\min_{\mathbb{F}}(\alpha)$ no fecho algébrico de $\mathbb{F}$ são distintas. Uma extensão algébrica $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ é separável, se todo elemento $\alpha \in \mathbb{E}$ é separável sobre $\mathbb{F}$, ou equivalentemente, se as raízes de $\min_{\mathbb{F}}(\alpha)$ são distintas para todo $\alpha \in \mathbb{E}$.

Definição 2.1.1. *Seja $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ uma extensão de corpos de grau finito. Se nenhum elemento de $\mathbb{E} \setminus \mathbb{F}$ é separável sobre $\mathbb{F}$, então dizemos que $\mathbb{E}$ é puramente inseparável sobre $\mathbb{F}$.*

Note que a extensão trivial $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{F}$ é considerada como puramente inseparável.

Teorema 2.1.2. *[18, Teorema 19.10] Seja $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ uma extensão algébrica com $\mathbb{F}$ um corpo de característica prima p. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$\mathbb{E}$ é puramente inseparável sobre $\mathbb{F}$.*
2. *Para cada elemento $\alpha \in \mathbb{E}$, existe $n \geq 1$ tal que $\alpha^{p^n} \in \mathbb{F}$.*
3. *Cada elemento de $\mathbb{E}$ tem polinômio minimal sobre $\mathbb{F}$ da forma $\min_{\mathbb{F}}(x) = x^{p^n} - a$ para algum inteiro $n \geq 1$ e algum $a \in \mathbb{F}$.*

Particularmente estamos interessados em extensões puramente inseparáveis em característica prima p. O próximo corolário reune as propriedades básicas de extensões puramente inseparáveis que precisamos.

Corolário 2.1.3. *[18, Corolários 19.11-19.13] Seja $\mathbb{F}$ um corpo de característica prima p. As seguintes afirmações são válidas:*

1. *Suponha que $\mathbb{E} = \mathbb{F}(\alpha)$ e que $\alpha^{p^n} \in \mathbb{F}$ para algum $n \geq 1$. Então $\mathbb{E}$ é puramente inseparável sobre $\mathbb{F}$.*
2. *Suponha que $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ é puramente inseparável. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*
   (a) Se $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{E}$ é uma extensão de corpos, então $\mathbb{K}$ é puramente inseparável sobre $\mathbb{F}$ e $\mathbb{E}$ é puramente inseparável sobre $\mathbb{K}$.
   (b) Se $[\mathbb{E} : \mathbb{F}] < \infty$, então $[\mathbb{E} : \mathbb{F}]$ é uma potência de p.
3. *Suponha que $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{E}$ é um extensão de corpos com $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$ e $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{E}$ ambas puramente inseparáveis. Então $\mathbb{E}$ é puramente inseparável sobre $\mathbb{F}$.*

2.2 Localização

Em [22, Capítulo 6] e [25, Capítulo 2], encontramos as principais definições e propriedades básicas da localização de um anel.

Seja R um anel e $S \subseteq R$ um subconjunto multiplicativo. Denotamos por $S^{-1}R$ a localização de R por S. Seja $P \in \operatorname{Spec}(R)$ um ideal primo de R. Denotamos por R_P a localização de R pelo conjunto multiplicativo $S = R \setminus P$. Agora, dado $x \in R$, denotamos por R_x a localização de R pelo conjunto multiplicativo $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^k, \ldots\}$ gerado por x.

O próximo Lema é uma consequência da definição da localização de um anel por um subconjunto multiplicativo e será útil em nosso trabalho. Como não encontramos sua demonstração na literatura, vamos demonstra-lo.

Lema 2.2.1. *Seja $R \subseteq B$ uma extensão de anéis e considere a extensão $R[b]$ com $b \in B$. Se $S \subseteq R$ é um subconjunto multiplicativo de R, então $S^{-1}\big(R[b]\big) = \big(S^{-1}R\big)[b]$.*

Demonstração. Se $0 \in S$, então por definição a localização é nula. Assumimos que $0 \notin S$. Por um lado, dado $x \in S^{-1}\big(R[b]\big)$ temos que $x = c/s$ com $c \in R[b]$ e $s \in S$. Logo, $c = \sum_{j=0}^{n} r_j b^j$ com $r_j \in R$. Daí

$$x = \frac{\sum_{j=0}^{n} r_j b^j}{s} = \sum_{j=0}^{n} \frac{r_j}{s} b^j \in \big(S^{-1}R\big)[b].$$

Por outro lado, dado $y \in \big(S^{-1}R\big)[b]$ temos que

$$y = \sum_{k=0}^{n} \frac{r_k}{s_k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{r_k b^k}{s_k} \in S^{-1}\big(R[b]\big),$$

com $r_k \in R$ e $s_k \in S$. □

Do Lema 2.2.1 obtemos por indução sobre n que

$$S^{-1}\big(R[b_1, \ldots, b_n]\big) = \big(S^{-1}R\big)[b_1, \ldots, b_n],$$

para todo $b_1, \ldots, b_n \in B$.

Uma propriedade importante de localização de anéis é que a localização comuta com a passagem ao quociente. Mais precisamente temos que:

Teorema 2.2.2. *[25, Teorema 4.2] Seja R um anel, $S \subseteq R$ um subconjunto multiplicativo e I um ideal de R. Denote por $\bar{S}$ a imagem de S em R/I. Então $(S^{-1}R)/(IS^{-1}R) \cong (R/I)_{\bar{S}}$.*

2.3 Anéis Cohen-Macaulay e regulares

Agora vamos apresentar conceitos e propriedades referentes aos anéis Cohen-Macaulay e aos anéis regulares que utilizaremos em nosso trabalho. Nossas principais referências nessa seção são [7, Capítulos 1 e 2] e [25, Capítulos 6, 7 e 11].

Definição 2.3.1. *Seja R um anel e sejam $a_1, \ldots, a_n \in R$. Diz-se que $a_1, \ldots, a_n$ é uma sequência regular se as seguintes condições são satisfeitas:*

1. *a_1 não é um divisor de zero.*
2. *A imagem de a_i não é um divisor de zero em $R/(a_1, \ldots, a_{i-1})$ para $i \geq 2$.*
3. *$R \neq (a_1, \ldots, a_n)$.*

Um exemplo de sequência regular é a sequência $x_1, \ldots, x_n$ de indeterminadas no anel de polinômios $R = S[\mathbf{x}_n]$ para S um anel. Se R é um anel noetheriano e $a_1, \ldots, a_n$ é uma sequência regular, então qualquer permutação de $a_1, \ldots, a_n$ é uma sequência regular [7, Proposição 1.1.6]. Ainda nesse caso, um ideal gerado por uma sequência regular tem altura máxima:

Corolário 2.3.2. *Sejam R é um anel noetheriano, $a_1, \ldots, a_n$ uma sequência regular em R e $I = (a_1, \ldots, a_n)$. Então, ht$(I) = n$, onde ht(I) é a altura do ideal I.*

Demonstração. Por um lado, por [22, Teorema 7.5] temos que $\mathrm{ht}(I) \leq n$. Por outro lado, por [7, Proposição 1.2.14] temos que $\mathrm{ht}(I) \geq n$. Logo, $\mathrm{ht}(I) = n$. □

Agora estamos em condições de introduzir os anéis Cohen-Macaulay. Em um anel noetheriano local R, o comprimento máximo de uma sequência regular no ideal máximal de R, é no máximo, a dimensão de Krull de R (denotada $\dim(R)$). Anéis Cohen-Macaulay são tais que o comprimento máximo de uma sequência regular é $\dim(R)$.

Definição 2.3.3. *Seja R um anel noetheriano local com ideal maximal $\mathfrak{m}$. Dizemos que R é um anel Cohen-Macaulay local (ou CM anel local) se $R = 0$ ou se existe uma sequência regular de comprimento $\dim(R)$ contida em $\mathfrak{m}$. Além disso, um anel noetheriano R é dito ser um anel Cohen-Macaulay (ou CM anel) se $R_{\mathfrak{m}}$ é um CM anel local para todo ideal máximal $\mathfrak{m}$ de R.*

Pela Definição 2.3.3, um corpo $\mathbb{F}$ é um CM anel local. Se R é um CM anel, então todo anel de polinômios $R[\mathbf{x}_n]$ é também um CM anel [25, Teorema 17.7, p. 137]. Se R um CM anel e $S \subseteq R$ é um subconjunto multiplicativo, então a localização $S^{-1}R$ também é um anel Cohen-Macaulay [7, Teorema 2.1.3(b)]. Os anéis Cohen-Macaulay também são preservados por quocientes por ideais gerados por sequências regulares. Isto é, se R é um

CM anel e I é um ideal gerado por uma sequência regular, então o quociente R/I também é um CM anel. Mais geralmente temos que:

Teorema 2.3.4. *[25, Exercício 17.4, p. 139] Sejam R um CM anel, $a_1, \ldots, a_n$ uma sequência regular em R e $I = (a_1, \ldots, a_n)$. Então, para todo inteiro $r > 0$, o anel R/I^r é um CM anel.*

Agora vamos mostrar uma importante propriedade dos ideais primos de um CM anel.

Lema 2.3.5. *Se R é um CM anel e $P \subset Q$ são ideais primos de R, então $ht(Q) = ht(P) + ht(Q/P)$.*

Demonstração. Assuma sem perda de generalidade que $R = R_Q$. Por [7, Corolário 2.1.4] vale que $\dim(R) = \text{ht}(P) + \dim(R/P)$. Logo,

$$\text{ht}(Q) = \dim(R) = \text{ht}(P) + \dim(R/P) = \text{ht}(P) + \text{ht}(Q/P),$$

e o lema é verdadeiro. □

Definição 2.3.6. *Um anel noetheriano local R com ideal maximal $\mathfrak{m}$ é um anel local regular se*

$$\dim_K(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \dim(R),$$

onde $K = R/\mathfrak{m}$ e $\dim_K(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)$ é a dimensão de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ como um espaço vetorial sobre K. Além disso, um anel noetheriano R é dito ser um anel regular se a localização R_P é um anel local regular para todo $P \in Spec(R)$.

Observe que um corpo $\mathbb{F}$ é um exemplo de anel local regular. Segue de [7, Corolário 2.2.9], que se R é um anel local regular, então a localização R_P, para todo $P \in \text{Spec}(R)$, é um anel local regular, isto é, a localização por ideais primos preserva a regularidade de um anel local regular.

Teorema 2.3.7. *Seja R um anel regular. As seguintes afirmações são verdadeiras.*

1. *O anel de polinômios $R[\mathbf{x}_n]$ é regular.*

2. *Se $x \in R$ é um elemento não divisor de zero, então R_x é um anel regular, onde R_x é a localização de R pelo conjunto multiplicativo gerado por x.*

3. *R é um CM anel.*

Demonstração. Para parte 1, veja [25, Teoremas 19.5]. Para parte 2, seja $P \in \text{Spec}(R_x)$. Então, $x \notin P$, caso contrário $1 \in P$. Temos que

$$\begin{aligned}(R_x)_P &= \left\{\frac{a}{b}\ :\ a \in R_x,\ b \in R_x \setminus P\right\}\\ &= \left\{\frac{c/x^i}{d/x^j}\ : c \in R,\ d \in R \setminus P,\ i, j \geq 0\right\}\\ &= \left\{\frac{cx^j}{dx^i}\ :\ cx^j \in R,\ dx^i \in R \setminus P,\ i, j \geq 0\right\}\\ &= \left\{\frac{v}{u}\ :\ v \in R,\ u \in R \setminus P\right\}\\ &= R_{P\cap R}.\end{aligned}$$

Como $P \cap R$ é um ideal primo de R, temos que $R_{P\cap R}$ é um anel local regular, isto é, $\big(R_x\big)_P$ é um anel local regular. Portanto, R_x é um anel regular.

Para parte 3, veja em [25, Teoremas 17.8], que o resultado é válido para R anel local regular, isto é, se R é um anel local regular, então R é um CM anel local. Mas, se R é um anel regular, então temos que R_P é local regular para todo $P \in \text{Spec}(R)$. Logo, R_P é um CM anel local para todo $P \in \text{Spec}(R)$. Em particular, $R_{\mathfrak{m}}$ é CM anel local para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \in R$. Sendo assim, pela Definição 2.3.3 temos que R é um CM anel. $\square$

Uma derivação de uma $\mathbb{F}$-álgebra A é um endomorfismo linear $d : A \to A$ tal que

$$d(xy) = d(x)y + xd(y), \text{ para todo } x, y \in A.$$

Denotamos por Der(A) o conjunto de derivações de A.

Seja R um anel ($\mathbb{F}$-álgebra), Der(R) o conjunto de derivações de R e seja $P \in \text{Spec}(R)$. Sejam $d_1, \dots, d_s \in \text{Der}(R)$ e $f_1, \dots, f_t \in R$. Escrevemos

$$J\left(f_1, \dots, f_t; d_1, \dots, d_s\right)(P) = \left(d_i f_j + P\right)_{i,j}$$

a matriz $s \times t$ com entradas em R/P. O posto dessa matriz, isto é, o número de linhas ou o número de colunas, linearmente independentes em relação ao corpo $\mathbb{F}$, é denotado por rank $J\left(f_1, \dots, f_t; d_1, \dots, d_s\right)(P)$. O item 2 do próximo resultado é conhecido como Critério Jacobiano para regularidade.

Teorema 2.3.8. *[25, Teorema 30.4] Sejam R um anel regular, $P \in$ Spec(R), e $I \subseteq P$ um ideal de R. Suponha que ht$(IR_P) = r$. Então*

1. *Para quaisquer $d_1, \dots, d_s \in$ Der(R) e $f_1, \dots, f_t \in I$ temos que*

$$\textit{rank}\, J\left(f_1, \dots, f_t; d_1, \dots, d_s\right)(P) \leq r.$$

2. *Se existem $d_1, \dots, d_r \in$ Der(R) e $f_1, \dots, f_r \in I$ tais que $\det(d_i f_j) \notin P$, então R_P/IR_P é regular.*

O Teorema 2.3.8(2) é conhecido como Critério Jacobiano para regularidade.

2.4 O fecho integral e anéis integralmente fechados

As principais referências utilizadas nessa seção são [22], [24] e [25].

Sejam S um anel, $R \subseteq S$ um subanel de S e um elemento $s \in S$. Um polinômio mônico

$$g(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$$

com $g(s) = 0$ é chamado equação integral para s sobre R. Um elemento $s \in S$ é chamado integral sobre R se existe uma equação integral para s sobre R (a diferença para a definição de elemento algébrico é que o polinômio $g(x)$ é mônico). O anel S é dito integral sobre R se todos os elementos de S são integrais sobre R. Nesse caso, dizemos que S é uma extensão integral de R.

Definição 2.4.1. *[22, Definição 8.7] Seja S um anel e $R \subseteq S$ um subanel de S. O conjunto $C = \{s \in S \ : \ s$ é integral sobre $R\}$ é chamado o fecho integral de R em S. Se $C = R$, então dizemos que R é integralmente fechado em S. Um domínio R é chamado integralmente fechado se é integralmente fechado no seu corpo de frações Frac(R).*

Teorema 2.4.2. *[22, Proposição 8.10] Seja R um domínio. As seguintes afirmações são equivalentes.*

1. *R é integralmente fechado.*
2. *Para todo subconjunto multiplicativo $S \subset R$ com $0 \notin S$ a localização $S^{-1}R$ é um domínio integralmente fechado.*

Kemper em [22] usa o termo normal para domínios integralmente fechados. Fazendo essa observação usamos as referências [22] e [25] em nosso trabalho sem o risco de falta de compatibilidade de definição.

Teorema 2.4.3. *Seja R um domínio fatorial. As seguintes afirmaçoes são verdadeiras:*

1. *O anel de polinômios $R[\mathbf{x}_n]$ é um domínio fatorial.*
2. *R é integralmente fechado.*

Demonstração. Para a afirmação 1, veja [25, Exercício 20.2, p. 168] e para a afirmação 2, veja [24, Proposição 1.7, p. 337]. □

Uma consequência imediata das afirmações do Teorema 2.4.3 é que se R é um domínio fatorial, então o anel de polinômios $R[\mathbf{x}_n]$ é integralmente fechado. Em particular, a álgebra de polinômios $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$ é integralmente fechada.

Definição 2.4.4. *[25, p. 183] Seja R um anel Noetheriano e $k \geq 0$ um inteiro.*

(R_k) *Dizemos que o anel R satisfaz a condição de Serre (R_k) se para todo ideal primo P de R com ht$(P) \leq k$, temos que R_P é um anel regular.*

(S_k) *Dizemos que o anel R satisfaz a condição de Serre (S_k) se para todo ideal primo P em R tem-se que $r \geq \min\{k, ht(P)\}$, onde r é o comprimento comum das sequências regulares maximais no ideal maximal de R_P.*

Como veremos no próximo teorema, CM anéis satisfazem a condição de Serre (S_k) para todo $k \geq 0$. Ademais as condições de Serre estabelecem um critério para integridade de anéis noetherianos.

Teorema 2.4.5. *[25, p 183 e Teorema 23.8] As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *Todo CM anel satisfaz a condição de Serre (S_k) para todo $k \geq 0$.*
2. *Se R é um domínio noetheriano satisfazendo as condições de Serre (R_1) e (S_2), então R é integralmente fechado.*
3. *Se R é um domínio Cohen-Macaulay que satisfaz a condição de Serre (R_1), então R é integralmente fechado.*

O Teorema 2.4.5(2) é conhecido como Critério de Serre para integridade. É esse critério que usaremos para mostrar a integridade dos anéis que consideraremos na Seção 2.6.

2.5 Polinômios primos

Vamos apresentar algumas propriedades dos polinômios primos que precisamos em nosso trabalho. Nossas principais referências nessa seção são [2] e [24].

Se A é um anel e k é natural, então $A^k = \{a^k : a \in A\}$. O próximo lema será muito proveitoso em nosso trabalho quanto a irredutibilidade de um polinômio.

Lema 2.5.1. *[24, Teorema 9.1] Sejam $\mathbb{F}$ um corpo, $n \geq 2$ um inteiro e um elemento não nulo $a \in \mathbb{F} - \{0\}$. Assuma que para todo primo p tal que $p|n$ temos $a \notin \mathbb{F}^p$, e se $4|n$, então $a \notin -4\mathbb{F}^4$. Então $x^n - a$ é irredutível em $\mathbb{F}[x]$.*

O próximo lema apresenta um método para identificar quando um elemento é primo em um anel de polinômios.

Lema 2.5.2. *[2, Lema 1.5] Seja A um domínio e Frac(A) seu corpo de frações. Seja $f \in A[t]$ um polinômio mônico sobre A. Então f é um elemento primo de $A[t]$ se, e somente se, f é um elemento primo de Frac$(A)[t]$.*

Observe que, se A é um anel fatorial, então o Lema 2.5.2 é uma consequência do Lema de Gauss [24, Teorema 2.1]. O próximo teorema nos será muito útil no cálculo do centro $Z(\mathfrak{g})$ das álgebras envolventes universais das álgebras de Lie nilpotentes de dimensão até 6 sobre um corpo de característica prima p.

Teorema 2.5.3. *Seja A um domínio integralmente fechado, p um número primo e $a \in A \setminus A^p$. Então $x^p - a \in A[x]$ é um polinômio primo. Em particular, $x^p - a$ é irredutível em $A[x]$.*

Demonstração. Seja $K = \text{Frac}(A)$ o corpo de frações de A. Seja $a \in A \setminus A^p$. Afirmamos que $a \notin K^p$. Se sim, existiria $u \in K$ tal que $a = u^p$. Logo, $g(x) = x^p - a$ seria uma equação integral para u sobre A. Como A é integralmente fechado, teríamos que $u \in A$. Portanto, $a = u^p \in A^p$ que não ocorre. Assim, a afirmação é verdadeira. Segue do Lema 2.5.1 que $x^p - a$ é irredutível sobre $K[x]$. O Teorema 2.4.3 parte 1 diz que $K[x]$ é fatorial. Em um anel fatorial um elemento irredutível também é primo [24, p. 113]. Logo, $x^p - a$ é um elemento primo em $K[x]$. Pelo Lema 2.5.2 vemos que $x^p - a$ um elemento primo em $A[x]$. Em particular, como primo implica irredutível [24, p. 111], temos que $x^p - a$ é irredutível em $A[x]$. $\square$

Lema 2.5.4. *Seja A um domínio noetheriano e seja $A \subseteq B$ extensão integral de domínios. Seja $A[x]$ o anel de polinômios sobre A e seja $f(x)$ um elemento primo de $A[x]$. Se $\alpha \in B \setminus A$ é raíz de $f(x)$, então $A[x]/(f(x)) \cong A[\alpha]$.*

Demonstração. Considere $\varphi : A[x] \longrightarrow A[\alpha],\ x \mapsto \alpha$, homomorfismo sobrejetor de anéis. Sabemos que $\big(f(x)\big) \subseteq \text{Ker}(\varphi)$. Como $f(x)$ é um elemento primo de $A[x]$ temos que $\text{ht}\big((f(x))\big) = 1$. Logo, $\big(f(x)\big)$ é um ideal primo de $A[x]$ de altura 1 contido em $\text{Ker}(\varphi)$. Daí, $\text{ht}\big(\text{Ker}(\varphi)\big) \geq 1$. Utilizando que $\dim(A) = \dim(A[\alpha])$ e que $\dim(A[x]) = \dim(A) + 1$ [22, Corolários 7.13 e 8.13] temos

$$\begin{aligned}
\dim(A) + 1 &= \dim(A[x]) \\
&\geq \text{ht}\big(\text{Ker}(\varphi)\big) + \dim\big(A[x]/\text{Ker}(\varphi)\big) \\
&= \text{ht}\big(\text{Ker}(\varphi)\big) + \dim\big(A[\alpha]\big) \\
&= \text{ht}\big(\text{Ker}(\varphi)\big) + \dim(A) \\
&\geq \dim(A) + 1.
\end{aligned}$$

Isso implica igualdade em todo lugar e $\text{ht}\big(\text{Ker}(\varphi)\big) = 1$. Portanto, $\text{Ker}(\varphi) = \big(f(x)\big)$, e assim, $A[x]/\big(f(x)\big) \cong A[\alpha]$. $\square$

Observe que o Lema 2.5.4 continua sendo verdadeiro se A é um domínio noetheriano fatorial e $f(x)$ é um polinômio irredutível de $A[x]$. Assim, podemos enunciar o corolário:

Corolário 2.5.5. *Seja A um domínio noetheriano fatorial e seja $A \subseteq B$ extensão integral de domínios. Seja $A[x]$ o anel de polinômios sobre A. Se $\alpha \in B \setminus A$ é raíz de um polinômio irredutível $f(x) \in A[x]$, então $A[x]/(f(x)) \cong A[\alpha]$.*

2.6 Exemplos de anéis integralmente fechados

Seja $A \subseteq B$ uma extensão integral de domínios. Assuma que $\text{Frac}(A) = \text{Frac}(B)$. É fato que, se A é integralmente fechado, então $A = B$. Pensando nisso, isto é, em extensões integrais de domínios onde os respectivos corpos de frações coincidem e buscando saber se os domínios também coincidem, utilizando o Critério de Serre para integridade e o Critério Jacobiano para regularidade, enunciaremos e demonstraremos o seguinte teorema que nos oferece uma condição para que um domínio seja integralmente fechado.

Teorema 2.6.1. *Seja $A[\mathbf{t}_s]$ um anel de polinômios em s variáveis sobre um domínio regular A. Seja $f \in A[\mathbf{t}_s]$ um polinômio primo não nulo e seja $I = (f)$ o ideal primo gerado por f. Se o ideal*

$$J = \Big(f, d(f) \mid d \in \textit{Der}\big(A[\mathbf{t}_s]\big)\Big)$$

é tal que $ht(J) \geq 3$, então $R = A[t_1, \ldots, t_s]/I$ é um domínio integralmente fechado.

Demonstração. Pelos itens 1 e 3 do Teorema 2.3.7 temos que $A[\mathbf{t}_s]$ é um CM anel. Do Teorema 2.3.4 temos que R também é um CM anel. Vamos mostrar que R satisfaz a condição de Serre (R_1). Seja $\bar{P} \in \text{Spec}(R)$ com $\text{ht}(\bar{P}) \leq 1$. Isto é, $\bar{P} = P/I$ para algum $P \in \text{Spec}(A[\mathbf{t}_s])$ com $I \subseteq P$. Pelo Lema 2.3.5 temos que $\text{ht}(P) \leq 2$. Se para todo $d \in \text{Der}(A[\mathbf{t}_s])$ tivéssemos $d(f) \in P$, então $P \supseteq J$ e assim $\text{ht}(P) \geq 3$, por hipótese. Portanto, existe $d \in \text{Der}(A[\mathbf{t}_s])$ tal que $d(f) \notin P$. Pelo Critério Jacobiano para regularidade, Teorema 2.3.8(2), temos que $A[\mathbf{t}_s]_P/(IA[\mathbf{t}_s])_P$ é regular, isto é, $(A[\mathbf{t}_s]/I)_{\bar{P}}$ é regular, pelo Teorema 2.2.2. Como é válido para todo $\bar{P} \in R$ com $\text{ht}(\bar{P}) \leq 1$ temos que R satisfaz a condição de Serre (R_1). O Teorema 2.4.5(3) garante que R é um domínio integralmente fechado. $\square$

Com o Teorema 2.6.1 podemos apresentar uma lista de exemplos de domínios integralmente fechados que serão fundamentais no nosso trabalho. Começamos com o seguinte teorema:

Teorema 2.6.2. *Se $\mathbb{F}$ é um corpo de característica prima $p \geq 3$, então os seguintes domínios são integralmente fechados*

1. $R = \mathbb{F}[\mathbf{t}_5]/\big(t_5^p - t_3^2 + 2t_2t_4^p\big)$,

2. $R = \mathbb{F}[\mathbf{t}_6]/\big(t_6^p - t_2t_5^p + t_3t_4^p\big)$ *($p \geq 2$)*,

3. $R = \mathbb{F}[\mathbf{t}_6]/\big(t_6^p - 2t_1t_5^p + 2t_2t_4^p - t_3^2\big)$.

Demonstração. Seja $\mathbb{F}[\mathbf{t}_s]$ com $s = 5$ no item 1 e $s = 6$ nos itens 2 e 3. Seja f o gerador do ideal pelo qual quocientamos que aparece no enunciado e seja

$$J = \Big(f, d(f) \mid d \in \text{Der}\big(\mathbb{F}[\mathbf{t}_s]\big)\Big).$$

O polinômio f é primo em $\mathbb{F}[\mathbf{t}_s]$ pelo Teorema 2.5.3 e assim o anel R é um domínio em todos os casos. Afirmamos que $\mathrm{ht}(J) \geq 3$ em todos os casos.

Caso 1: Nesse caso $f = t_5^p - t_3^2 + 2t_2t_4^p$. Considere as seguintes derivações de $\mathbb{F}[\mathbf{t}_s]$

$$d_1 = \frac{\partial}{\partial t_3} \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{\partial}{\partial t_2}.$$

Então, $d_1(f) = -2t_3$ e $d_2(f) = 2t_4^p$. Veja que, se P é um ideal primo que contém J, então $t_4^p \in P$ implica que $t_4 \in P$. Coloque $J_1 = (t_3)$ e $J_2 = (t_3, t_4)$. Então J_1 e J_2 são ideais primos de $\mathbb{F}[\mathbf{t}_s]$ contidos em J. Como $0 \subset J_1 \subset J_2 \subset P$, para todo ideal primo P contendo J, pois $f \in P \setminus J_2$, temos que $\mathrm{ht}(J) \geq 3$. Assim, pelo Teorema 2.6.1 segue que R é um domínio integralmente fechado.

Caso 2: Aqui $f = t_6^p - t_2t_5^p + t_3t_4^p$. Considere as seguintes derivações de $\mathbb{F}[\mathbf{t}_s]$

$$d_1 = \frac{\partial}{\partial t_2} \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{\partial}{\partial t_3}.$$

Então, $d_1(f) = -t_5^p$ e $d_2(f) = t_4^p$. Assim, se P é um ideal primo contendo J, então $t_4, t_5 \in P$. Coloque $J_1 = (t_5)$ e $J_2 = (t_5, t_4)$. Então J_1 e J_2 são ideais primos de $\mathbb{F}[\mathbf{t}_s]$ contidos em J. Como $0 \subset J_1 \subset J_2 \subset P$, para todo ideal primo P contendo J, uma vez que $f \in P \setminus J_2$, temos que $\mathrm{ht}(J) \geq 3$. Assim, pelo Teorema 2.6.1 segue que R é um domínio integralmente fechado.

Caso 3: Nesse caso $f = t_6^p - 2t_1t_5^p + 2t_2t_4^p - t_3^2$. Tome as seguintes derivações de $\mathbb{F}[\mathbf{t}_s]$

$$d_1 = \frac{\partial}{\partial t_1}, \quad d_2 = \frac{\partial}{\partial t_2} \quad \text{e} \quad d_3 = \frac{\partial}{\partial t_3}.$$

Então,

$$d_1(f) = -2t_5^p, \quad d_2(f) = 2t_4^p \quad \text{e} \quad d_3(f) = -2t_3,$$

e assim, $J_1 = (t_5)$, $J_2 = (t_5, t_4)$ e $J_3 = (t_5, t_4, t_3)$ dá uma cadeia de ideais primos $0 \subset J_1 \subset J_2 \subset J_3$ contidos em J. Daí, $\mathrm{ht}(J) \geq 3$ e o resultado segue do Teorema 2.6.1. $\square$

Não apresentamos o Teorema 2.6.2 de modo aleatório, ele implicará que o centro das álgebras envolventes universais das álgebras de Lie nilpotentes de dimensão até 5 pode ser calculado, exceto em um exemplo que possui centro mais complicado (veja a Seção 4.2.1), o qual é calculado com o seguinte teorema:

Teorema 2.6.3. *Seja $\mathbb{F}[\mathbf{t}_7]$ a álgebra de polinômios em 7 variáveis sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica prima $p > 3$. Considere $R = \mathbb{F}[\mathbf{t}_7]_{t_5}$. Isto é, $R = \mathbb{F}[t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_5^{-1}, t_6, t_7]$ é a localização pelo conjunto multiplicativo gerado por t_5. Para*

$$f_1 = t_6^p - 2t_3t_5^p + t_4^2,$$
$$f_2 = t_7^p - 3t_2t_5^{2p} + 3t_3t_4t_5^p - t_4^3$$

em R temos que $R/\big(f_1, f_2\big)$ é um CM anel que satisfaz a condição de Serre (R_k) com $k \geq 0$.

Demonstração. Primeiro, pelo Teorema 2.3.7(2) temos que R é um anel regular e assim, pelo Teorema 2.3.7(3) temos que R é um CM anel. Note que f_1, f_2 é uma sequência regular em R, pois f_1 não é um divisor de zero em R e $f_2 \notin (f_1)$ em R, uma vez que tem um termo dependendo apenas de t_7. Segue do Teorema 2.3.4 que $R/\big(f_1, f_2\big)$ é um CM anel. Ainda, o Corolário 2.3.2 nos diz que $\operatorname{ht}\big((f_1, f_2)\big) = 2$. Vamos mostrar que $R/\big(f_1, f_2\big)$ satisfaz a condição de Serre (R_k) com $k \geq 0$.

Considere as seguintes derivações de R:

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial t_2} \quad \text{e} \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial t_3}.$$

Então,

$$D_1(f_1) = 0, \quad D_1(f_2) = -3t_5^{2p}, \quad D_2(f_1) = -2t_5^p, \quad D_2(f_2) = 3t_4t_5^p.$$

Temos a matriz jacobiana

$$(D_if_j) = \begin{pmatrix} 0 & -3t_5^{2p} \\ -2t_5^p & 3t_4t_5^p \end{pmatrix}$$

com $\det(D_if_j) = -6t_5^{3p} \neq 0$, pois $p > 3$.

Seja $\bar{P} \in \operatorname{Spec}\big(R/\big(f_1, f_2\big)\big)$. Então, $\bar{P} = P/\big(f_1, f_2\big)$ para algum $P \in \operatorname{Spec}(R)$ com $t_5 \notin P$ e $(f_1, f_2) \subseteq P$. Consequentemente, $\det(D_if_j) \notin P$, caso contrário, $t_5 \in P$. Pelo Critério Jacobiano para regularidade, Teorema 2.3.8(2), temos que $R_P/\big(f_1, f_2\big)_P$ é um anel regular, ou seja, $\big(R/\big(f_1, f_2\big)\big)_{\bar{P}}$ é um anel regular, pelo Teorema 2.2.2. Segue que $R/\big(f_1, f_2\big)$ satisfaz a condição de Serre (R_k) para todo $k \geq 0$. $\square$

No Teorema 2.6.3 foi necessário considerar a localização $R = \mathbb{F}[\mathbf{t}_7]_{t_5}$ e depois o quociente $R/\big(f_1, f_2\big)$, pois o quociente $\mathbb{F}[\mathbf{t}_7]/\big(f_1, f_2\big)$ não é um domínio integralmente fechado, mas segue da Proposição 4.2.4(3) que o anel $R/\big(f_1, f_2\big)$ no Teorema 2.6.3 é um domínio e assim (pelo Teorema 2.4.5(3)) é integralmente fechado (veja discussão em Observação 4.2.6).

Seja $\mathbb{F}$ um corpo de característica prima p e $\mathbb{F}[\mathbf{t}_7]$ o anel de polinômios em 7 variáveis sobre $\mathbb{F}$. Utilizando o Teorema 2.6.1 e demonstrações analogas a demonstração do Teorema 2.6.2, vamos apresentar uma lista de anéis integralmente fechados que utilizaremos no cálculo do centro das álgebras envolventes universais de álgebreas de Lie nilpotentes de dimensão 6 em característica positiva.

Teorema 2.6.4. *Seja $\mathbb{F}$ um corpo com característica prima p. Os seguintes domínios são integralmente fechados:*

1. $R = \mathbb{F}[\mathbf{t}_7]/\big(t_7^p - t_3^2 + 2t_2t_6^p\big)$ *($p \geq 3$),*

2. $R = \mathbb{F}[\mathbf{t}_7]/\big(t_7^p - t_4^2 - 2t_5t_6^p + 2t_3t_6^p\big)$ *($p \geq 5$),*

3. $R = \mathbb{F}[\mathbf{t}_7]/\big(t_7^p - t_4^2 + 2t_3t_6^p\big)$ *($p \geq 5$),*

4. $R = \mathbb{F}[\mathbf{t}_7]/\big(t_7^p - t_5^3 + 3t_3t_5t_6^p - 3t_2t_6^{2p}\big)$ *($p \geq 5$),*

5. $R = \mathbb{F}[\mathbf{t}_7]/\big(t_7^p - 2t_5^3 - 3t_4^2t_6^p + 6t_3t_5t_6^p + 6t_1t_6^{2p}\big)$ *($p \geq 5$),*

6. $R = \mathbb{F}[\mathbf{t}_7]/\big(t_7^p - t_5^3 + 3t_4t_5t_6^p - 3t_3t_6^{2p}\big)$ *($p \geq 5$),*

7. $R = \mathbb{F}[\mathbf{t}_7]/\big(t_7^p - t_4^2 + 2t_1t_6^p + 2t_3t_5\big)$ *($p \geq 5$),*

8. $R = \mathbb{F}[\mathbf{t}_7]/\big(t_7^p - t_5^2 + 2t_4t_6^p\big)$ *($p \geq 5$),*

9. $R = \mathbb{F}[\mathbf{t}_7]/\big(t_7^p - t_5^2 - \varepsilon t_4^2 - 2\varepsilon t_1t_6^p + 2t_3t_6^p\big)$*, onde* $\varepsilon \in \mathbb{F}^*$ *($p \geq 3$),*

10. $R = \mathbb{F}[\mathbf{t}_7]/\big(t_7^p - t_5^2 + 2t_3t_6^p\big)$ *($p \geq 3$),*

11. $R = \mathbb{F}[\mathbf{t}_7]/\big(t_7^p - t_5^2 - \varepsilon t_4^2 + 2\varepsilon t_3t_6^p\big)$*, onde* $\varepsilon \in \mathbb{F}^*$ *($p \geq 5$),*

12. $R = \mathbb{F}[\mathbf{t}_7]/\big(t_7^p - t_1t_6^p + t_2t_5^p - t_3t_4^p\big)$ *($p \geq 2$),*

Demonstração. Seja f o gerador do ideal pelo qual quocientamos que aparece no enunciado e seja

$$J = \Big(f, d(f) \mid d \in \mathrm{Der}\big(\mathbb{F}[\mathbf{t}_7]\big)\Big).$$

Em todos os casos o polinômio f é primo em $\mathbb{F}[\mathbf{t}_7]$ (pelo Teorema 2.5.3) e o quociente R é um domínio. Afirmamos que $\mathrm{ht}(J) \geq 3$ em todos os casos.

Caso 1: Nesse caso $f = t_7^p - t_3^2 + 2t_2t_6^p$. Tome as seguintes derivações de $\mathbb{F}[\mathbf{t}_7]$

$$d_1 = \frac{\partial}{\partial t_3} \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{\partial}{\partial t_2}.$$

Então, $d_1(f) = -2t_3$ e $d_2(f) = 2t_6^p$. Para $J_1 = (t_3)$ e $J_2 = (t_3, t_6)$ temos que J_1 e J_2 são ideais primos com $0 \subset J_1 \subset J_2 \subset P$, para todo ideal primo P contendo J, pois $f \in P \setminus J_2$. Logo, $\mathrm{ht}(J) \geq 3$. Segue do Teorema 2.6.1 que R é um domínio integralmente fechado.

Caso 2: Aqui $f = t_7^p - t_4^2 - 2t_5t_6^p + 2t_3t_6^p$ e consideramos as seguintes derivações

$$d_1 = \frac{\partial}{\partial t_4} \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{\partial}{\partial t_3} \in \mathrm{Der}(\mathbb{F}[\mathbf{t}_7]).$$

Então, $d_1(f) = -2t_4$ e $d_2(f) = 2t_6^p$. Então, $J_1 = (t_4)$ e $J_2 = (t_4, t_6)$ são ideais primos com $0 \subset J_1 \subset J_2 \subset P$, para todo ideal primo P contendo J, pois $f \in P \setminus J_2$. Assim, $\mathrm{ht}(J) \geq 3$. O Teorema 2.6.1 assegura que R é um domínio integralmente fechado.

Caso 3: Nesse caso $f = t_7^p - t_4^2 + 2t_3t_6^p$. Tome as derivações

$$d_1 = \frac{\partial}{\partial t_4} \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{\partial}{\partial t_3} \in \mathrm{Der}(\mathbb{F}[\mathbf{t}_7]).$$

Então, $d_1(f) = -2t_4$ e $d_2(f) = 2t_6^p$. Coloque $J_1 = (t_4)$ e $J_2 = (t_4, t_6)$. Então $0 \subset J_1 \subset J_2 \subset P$ é uma cadeia de ideais primos para todo ideal primo P contendo J. Portanto, $\text{ht}(J) \geq 3$. Pelo Teorema 2.6.1 vemos que R é um domínio integralmente fechado.

Caso 4: Nesse caso $f = t_7^p - t_5^3 + 3t_3t_5t_6^p - 3t_2t_6^{2p}$ e tomamos as derivações

$$d_1 = \frac{\partial}{\partial t_5} \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{\partial}{\partial t_2} \in \text{Der}(\mathbb{F}[\mathbf{t}_7]).$$

Então, $d_1(f) = 3t_3t_6^p - 3t_5^2$ e $d_2(f) = -3t_6^{2p}$. Seja P um ideal primo contendo J. Então, $3t_3t_6^p - 3t_5^2$ e $-3t_6^{2p}$ estão em P. Como P é primo, $-3t_6^{2p} \in P$ significa que $t_6 \in P$, e assim, $3t_3t_6^p - 3t_5^2 \in P$ implica que $-3t_5^2 \in P$, isto é, $t_5 \in P$. Sejam $J_1 = (t_5)$ e $J_2 = (t_5, t_6)$ ideais primos contidos em P. Como $f \in P \setminus J_2$ temos que $0 \subset J_1 \subset J_2 \subset P$ é uma cadeia de ideais primos, e assim, $\text{ht}(P) \geq 3$. Isto é, $\text{ht}(J) \geq 3$. Segue do Teorema 2.6.1 que R é um domínio integralmente fechado.

Caso 5: Aqui $f = t_7^p - 2t_5^3 - 3t_4^2t_6^p + 6t_3t_5t_6^p + 6t_1t_6^{2p}$ e definindo

$$d_1 = \frac{\partial}{\partial t_5} \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{\partial}{\partial t_1} \in \text{Der}(\mathbb{F}[\mathbf{t}_7]),$$

temos que $d_1(f) = 6t_3t_6^p - 6t_5^2$ e $d_2(f) = 6t_6^{2p}$. Seja P um ideal primo contendo J. Então, $6t_6^{2p} \in P$ donde $t_6 \in P$. E $6t_3t_6^p - 6t_5^2 \in P$ diz que $t_5 \in P$. Para $J_1 = (t_5)$ e $J_2 = (t_5, t_6)$ temos que $f \in P \setminus J_2$ e $0 \subset J_1 \subset J_2 \subset P$ é uma cadeia de ideais primos. Isto é, $\text{ht}(P) \geq 3$. Ou melhor, $\text{ht}(J) \geq 3$. O Teorema 2.6.1 diz que R é um domínio integralmente fechado.

Caso 6: Aqui $f = t_7^p - t_5^3 + 3t_4t_5t_6^p - 3t_3t_6^{2p}$. Para as derivações

$$d_1 = \frac{\partial}{\partial t_5} \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{\partial}{\partial t_3} \in \text{Der}(\mathbb{F}[\mathbf{t}_7]),$$

temos que $d_1(f) = 3t_4t_6^p - 3t_5^2$ e $d_2(f) = -3t_6^{2p}$. Se P é um ideal primo contendo J, então $-3t_6^{2p} \in P$ donde $t_6 \in P$. Também, $3t_4t_6^p - 3t_5^2 \in P$ donde $3t_5^2 \in P$, isto é, $t_5 \in P$. Colocando $J_1 = (t_5)$ e $J_2 = (t_5, t_6)$, o fato de $f \in P \setminus J_2$ implica que $0 \subset J_1 \subset J_2 \subset P$ é uma cadeia de ideais primos, e portanto, $\text{ht}(P) \geq 3$. Em outras palavras, $\text{ht}(J) \geq 3$. Segue que R é um domínio integralmente fechado (Teorema 2.6.1).

Caso 7: Então $f = t_7^p - t_4^2 + 2t_1t_6^p + 2t_3t_5$ e considerando as derivações

$$d_1 = \frac{\partial}{\partial t_5}, \quad d_2 = \frac{\partial}{\partial t_4} \quad \text{e} \quad d_3 = \frac{\partial}{\partial t_3} \in \text{Der}(\mathbb{F}[\mathbf{t}_7]),$$

temos que $d_1(f) = 2t_3$, $d_2(f) = -2t_4$ e $d_3(f) = 2t_5$. Se P é um ideal primo contendo J, então os ideais primos $J_1 = (t_3)$, $J_2 = (t_3, t_4)$ e $J_3 = (t_3, t_4, t_5)$ estão contidos em P. Assim, a cadeia $0 \subset J_1 \subset J_2 \subset J_3 \subset P$ garante que $\text{ht}(J) \geq 3$. O Teorema 2.6.1 diz que R é um domínio integralmente fechado.

Caso 8: Nesse caso $f = t_7^p - t_5^2 + 2t_4t_6^p$. Sejam

$$d_1 = \frac{\partial}{\partial t_5} \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{\partial}{\partial t_4} \in \text{Der}(\mathbb{F}[\mathbf{t}_7]).$$

Então, $d_1(f) = -2t_5$ e $d_2(f) = 2t_6^p$. Logo, para todo ideal primo P contendo J, os ideais $J_1 = (t_5)$ e $J_2 = (t_5, t_6)$ são ideais primos contidos em P, e além disso, $0 \subset J_1 \subset J_2 \subset P$. Portanto, $\mathrm{ht}(J) \geq 3$. Pelo Teorema 2.6.1 temos que R é um domínio integralmente fechado.

Caso 9: Aqui $f = t_7^p - t_5^2 - \varepsilon t_4^2 - 2\varepsilon t_1 t_6^p + 2t_3 t_6^p$, onde $\varepsilon \in \mathbb{F}^*$. Tome as derivações

$$d_1 = \frac{\partial}{\partial t_3}, \quad d_2 = \frac{\partial}{\partial t_4} \quad \text{e} \quad d_3 = \frac{\partial}{\partial t_5} \in \mathrm{Der}(\mathbb{F}[\mathbf{t}_7]).$$

Então, $d_1(f) = 2t_6^p$, $d_2(f) = -2\varepsilon t_4$ e $d_3(f) = -2t_5$. Coloque $J_1 = (t_6)$, $J_2 = (t_4, t_6)$ e $J_3 = (t_4, t_5, t_6)$. Então, J_1, J_2 e J_3 são ideais primos contidos em todo ideal primo P contendo J. Além disso, $0 \subset J_1 \subset J_2 \subset J_3 \subset P$, para todo ideal primo P contendo J. Segue que $\mathrm{ht}(J) \geq 3$. Pelo Teorema 2.6.1 segue que R é um domínio integralmente fechado.

Caso 10: Nesse caso $f = t_7^p - t_5^2 + 2t_3 t_6^p$. Tome as seguintes derivações de $\mathbb{F}[\mathbf{t}_7]$

$$d_1 = \frac{\partial}{\partial t_5} \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{\partial}{\partial t_3}.$$

Então, $d_1(f) = -2t_5$ e $d_3(f) = 2t_6^p$. Denotando $J_1 = (t_5)$ e $J_2 = (t_5, t_6)$. Então, $0 \subset J_1 \subset J_2 \subset P$ é uma cadeia de ideais primos para todo ideal primo P contendo J, e assim, $\mathrm{ht}(J) \geq 3$. Segue novamente do Teorema 2.6.1 que R é um domínio integralmente fechado.

Caso 11: Nesse caso $f = t_7^p - t_5^2 - \varepsilon t_4^2 + 2\varepsilon t_3 t_6^p$, onde $\varepsilon \in \mathbb{F}^*$. Então, definindo

$$d_1 = \frac{\partial}{\partial t_5}, \quad d_2 = \frac{\partial}{\partial t_4} \quad \text{e} \quad d_3 = \frac{\partial}{\partial t_3} \in \mathrm{Der}(\mathbb{F}[\mathbf{t}_7]),$$

temos que $d_1(f) = -2t_5$, $d_2(f) = -2\varepsilon t_4$ e $d_3(f) = 2\varepsilon t_6^p$. Para os ideais primos $J_1 = (t_5)$, $J_2 = (t_4, t_5)$ e $J_3 = (t_4, t_5, t_6)$ temos a cadeia $0 \subset J_1 \subset J_2 \subset J_3 \subset P$, para todo ideal primo P contendo J, que garante $\mathrm{ht}(J) \geq 3$. Pelo Teorema 2.6.1 vemos que R é um domínio integralmente fechado.

Caso 12: Nesse caso $f = t_7^p - t_1 t_6^p + t_2 t_5^p - t_3 t_4^p$. Para

$$d_1 = \frac{\partial}{\partial t_1}, \quad d_2 = \frac{\partial}{\partial t_2} \quad \text{e} \quad d_3 = \frac{\partial}{\partial t_3} \in \mathrm{Der}(\mathbb{F}[\mathbf{t}_7])$$

temos $d_1(f) = -t_6^p$, $d_2(f) = t_5^p$ e $d_3(f) = -t_4^p$. Fazendo $J_1 = (t_6)$, $J_2 = (t_5, t_6)$ e $J_3 = (t_4, t_5, t_6)$ temos $0 \subset J_1 \subset J_2 \subset J_3$ uma cadeia de ideais primos em P, para todo ideal primo P contendo J, e assim, $\mathrm{ht}(J) \geq 3$. Logo, o Teorema 2.6.1 garante que R é um domínio integralmente fechado. □

Os próximos dois teoremas contribuirão para que o centro $Z(\mathfrak{g})$, nos casos mais complicados, quando $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie nilpotente de dimensão 6 sobre um corpo $\mathbb{F}$ de caracterítica positiva seja determinado.

Teorema 2.6.5. *Seja $\mathbb{F}[\mathbf{t}_8]$ a álgebra de polinômios em 8 variáveis sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica prima $p \geq 3$. Seja $R = \mathbb{F}[\mathbf{t}_8]_{t_5}$. Isto é, $R = \mathbb{F}[t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_5^{-1}, t_6, t_7, t_8]$ é a localização pelo conjunto multiplicativo gerado por t_5. Sejam*

$$f_1 = t_7^p - t_3^2 + 2t_2t_5^p,$$
$$f_2 = t_8^p - t_3t_6^p + t_4t_5^p.$$

Então, $R/\big(f_1, f_2\big)$ é um CM anel que satisfaz a condição de Serre (R_k) com $k \geq 0$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.3.7(2) temos que R é um anel regular e assim, pelo Teorema 2.3.7(3) temos que R é um CM anel. A sequência f_1, f_2 é uma sequência regular em R, pois f_1 não é um divisor de zero em R e $f_2 \notin (f_1)$ em R, uma vez que tem um termo dependendo apenas de t_8. O Teorema 2.3.4 garante que $R/\big(f_1, f_2\big)$ é um CM anel. O Corolário 2.3.2 nos diz que $\operatorname{ht}\big((f_1, f_2)\big) = 2$. Vamos mostrar que $R/\big(f_1, f_2\big)$ satisfaz a condição de Serre (R_k) com $k \geq 0$.

Considere $D_1 = \frac{\partial}{\partial t_2}$ e $D_2 = \frac{\partial}{\partial t_4}$. Então,

$$D_1(f_1) = 2t_5^p, \quad D_1(f_2) = 0, \quad D_2(f_1) = 0 \quad \text{e} \quad D_2(f_2) = t_5^p.$$

Temos a matriz jacobiana

$$(D_i f_j) = \begin{pmatrix} 2t_5^p & 0 \\ 0 & t_5^p \end{pmatrix}$$

com seu determinante não nulo, $\det(D_i f_j) = 2t_5^{2p} \neq 0$, pois $p \geq 3$.

Seja $\bar{P} \in \operatorname{Spec}\big(R/\big(f_1, f_2\big)\big)$. Então, $\bar{P} = P/\big(f_1, f_2\big)$ para algum $P \in \operatorname{Spec}(R)$ com $t_5 \notin P$ e $(f_1, f_2) \subseteq P$. Consequentemente, $\det(D_i f_j) \notin P$, caso contrário, $t_5 \in P$. Pelo Critério Jacobiano para regularidade, Teorema 2.3.8(2), temos que $R_P/\big(f_1, f_2\big)_P$ é um anel regular, ou seja, $\big(R/\big(f_1, f_2\big)\big)_{\bar{P}}$ é um anel regular, pelo Teorema 2.2.2. Segue que $R/\big(f_1, f_2\big)$ satisfaz a condição de Serre (R_k) para todo $k \geq 0$. $\square$

No Teorema 2.6.5 foi necessário considerar a localização $R = \mathbb{F}[\mathbf{t}_8]_{t_5}$ e depois o quociente $R/\big(f_1, f_2\big)$, pois o quociente $\mathbb{F}[\mathbf{t}_8]/\big(f_1, f_2\big)$ não é um domínio integralmente fechado, mas segue da Proposição 5.2.4(3) que o anel $R/\big(f_1, f_2\big)$ no Teorema 2.6.5 é um domínio e assim (pelo Teorema 2.4.5(3)) é integralmente fechado (veja discussão em Observação 5.2.6).

Teorema 2.6.6. *Seja $\mathbb{F}[\mathbf{t}_9]$ a álgebra de polinômios em 9 variáveis sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica prima $p \geq 5$. Seja $R = \mathbb{F}[\mathbf{t}_9]_{t_6}$. Isto é, $R = \mathbb{F}[t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_6^{-1}, t_7, t_8, t_9]$ é a localização pelo conjunto multiplicativo gerado por t_6. Para*

$$f_1 = t_7^p - t_5^2 + 2t_4t_6^p,$$
$$f_2 = t_8^p - t_5^3 + 3t_4t_5t_6^p - 3t_3t_6^{2p},$$
$$f_3 = t_9^p - t_4^2 - 2t_2t_6^p + 2t_3t_5.$$

em R, temos que $R/\big(f_1,f_2,f_3\big)$ é um CM anel que satisfaz a condição de Serre (R_k) com $k\geq 0$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.3.7(2) temos que R é um anel regular e assim, pelo Teorema 2.3.7(3) temos que R é um CM anel. A sequência f_1,f_2,f_3 é uma sequência regular em R, pois f_1 não é um divisor de zero em R, $f_2\notin(f_1)$ em R, uma vez que tem um termo dependendo apenas de t_8 e $f_3\notin(f_1,f_2)$ em R, uma vez que f_3 possui um termo apenas na variável t_9. O Teorema 2.3.4 garante que $R/\big(f_1,f_2,f_3\big)$ é um CM anel. O Corolário 2.3.2 nos diz que $\mathrm{ht}\big((f_1,f_2,f_3)\big)=3$. Vamos mostrar que $R/\big(f_1,f_2,f_3\big)$ satisfaz a condição de Serre (R_k) com $k\geq 0$.

Considere as derivações: $D_1=\frac{\partial}{\partial t_2},\quad D_2=\frac{\partial}{\partial t_3}\quad$ e $\quad D_3=\frac{\partial}{\partial t_4}$. Então,

$$\begin{aligned}
&D_1(f_1)=0, && D_1(f_2)=0, && D_1(f_3)=-2t_6^p,\\
&D_2(f_1)=0, && D_2(f_2)=-3t_6^{2p}, && D_2(f_3)=2t_5,\\
&D_3(f_1)=2t_6^p, && D_3(f_2)=3t_5t_6^p, && D_3(f_3)=-2t_4.
\end{aligned}$$

Temos a matriz jacobiana

$$(D_if_j)=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2t_6^p\\ 0 & -3t_6^{2p} & 2t_5\\ 2t_6^p & 3t_5t_6^p & -2t_4\end{pmatrix}$$

com o determinante não nulo, $\det(D_if_j)=-12t_6^{4p}\neq 0$, pois $p\geq 5$.

Seja $\bar{P}\in\mathrm{Spec}\big(R/\big(f_1,f_2,f_3\big)\big)$. Então, $\bar{P}=P/\big(f_1,f_2,f_3\big)$ para algum $P\in\mathrm{Spec}(R)$ com $t_6\notin P$ e $(f_1,f_2,f_3)\subseteq P$. Consequentemente, $\det(D_if_j)\notin P$, caso contrário, $t_6\in P$. Pelo Critério Jacobiano para regularidade, Teorema 2.3.8(2), temos que $R_P/\big(f_1,f_2,f_3\big)_P$ é um anel regular, ou seja, $\big(R/\big(f_1,f_2,f_3\big)\big)_{\bar{P}}$ é um anel regular, pelo Teorema 2.2.2. Segue que $R/\big(f_1,f_2,f_3\big)$ satisfaz a condição de Serre (R_k) para todo $k\geq 0$. $\square$

No Teorema 2.6.6 foi necessário considerar a localização $R=\mathbb{F}[\mathbf{t}_9]_{t_6}$ e depois o quociente $R/\big(f_1,f_2,f_3\big)$, pois o quociente $\mathbb{F}[\mathbf{t}_9]/\big(f_1,f_2,f_3\big)$ não é um domínio integralmente fechado, mas segue da Proposição 5.2.9(3) que o anel $R/\big(f_1,f_2,f_3\big)$ no Teorema 2.6.6 é um domínio e assim (pelo Teorema 2.4.5(3)) é integralmente fechado (veja discussão em Observação 5.2.11).

Capítulo 3

Álgebra Envolvente Universal

3.1 A álgebra envolvente universal de uma álgebra de Lie

Consideramos $\mathbb{F}$ um corpo arbitrário (exceto onde indicado em contrário). Associaremos a cada álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{F}$ uma álgebra associativa com unidade (de dimensão infinita, em geral), que é gerada o mais livremente possível por $\mathfrak{g}$, sujeita às relações de comutação em $\mathfrak{g}$. Essa álgebra é chamada álgebra envolvente universal e denotada por $U(\mathfrak{g})$. O estudo das álgebras envolventes depende, é claro, de um conhecimento bastante detalhado das álgebras de Lie. Por outro lado, certas propriedades das álgebras de Lie podem ser convenientemente estabelecidas pelo uso de álgebras envolventes, pois o estudo das representações para $\mathfrak{g}$ pode ser transformado em um problema de álgebra associativa por passagem para a álgebra envolvente universal $U(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$.

Seja V um $\mathbb{F}$-espaço vetorial de dimensão finita. Definimos $T(V)$ a álgebra tensorial do espaço vetorial V por

$$T(V) = T^0(V) \oplus T^1(V) \oplus \cdots \oplus T^n(V) \oplus \cdots ,$$

onde $T^n(V) = V \otimes \cdots \otimes V$ (n-vezes). Em particular, $T^0(V) = \mathbb{F}$ e $T^1(V) = V$. Se $v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \in T^r(V)$ e $w_1 \otimes \cdots \otimes w_s \in T^s(V)$, então introduzimos um produto associativo definido pela regra

$$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r) \cdot (w_1 \otimes \cdots \otimes w_s) = v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_s \in T^{r+s}(V).$$

A multiplicação em $T(V)$ é obtida por extensão linear desta multiplicação. Isso faz de $T(V)$ uma álgebra graduada associativa com unidade, gerada por uma base de V.

Seja I o ideal de $T(V)$ gerado por todos os elementos em $T^2(V)$ na forma $v \otimes w - w \otimes v$ com $v, w \in V$. A álgebra quociente $S(V) = T(V)/I$ é chamada álgebra simétrica de V. Note que pela definição do ideal I temos que $S(V)$ é uma álgebra comutativa com unidade. Ainda, se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, então a álgebra simétrica $S(V)$ é isomorfa à álgebra de polinômios $\mathbb{F}[\mathbf{v}_n]$. Assumindo que $\mathbb{F}$ é um corpo infinito, então podemos pensar em $S(V)$ como o anel das funções polinomiais no espaço vetorial V, isto é,

$$S(V) \cong \{f : V \to \mathbb{F} \mid f \text{ é polinomial}\}.$$

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$. Então podemos considerar $T(\mathfrak{g})$ sua álgebra tensorial. Seja J o ideal de $T(\mathfrak{g})$ gerado por todos os elementos $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ com $x, y \in \mathfrak{g}$. A álgebra quociente $U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/J$ é uma álgebra associativa sobre $\mathbb{F}$. A álgebra $U(\mathfrak{g})$ é chamada álgebra envolvente universal de $\mathfrak{g}$. Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie abeliana $\big([x, y] = 0,\ \forall x, y \in \mathfrak{g}\big)$, então o ideal J acima é gerado por todos os elementos $x \otimes y - y \otimes x$ com $x, y \in \mathfrak{g}$, e assim, $U(\mathfrak{g})$ coincide com a álgebra simétrica $S(\mathfrak{g})$.

Se $x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathfrak{g}$, então na projeção canônica $\pi : T(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$, usamos a notação

$$\pi(x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Teorema 3.1.1 (Poincaré-Birkhoff-Witt)**.** *[13, Teorema 2.1.11] Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre um corpo $\mathbb{F}$ com base ordenada $\{x_i : i \in I\}$. Uma base para a álgebra $U(\mathfrak{g})$ é dada por*

$$\{x_{i_1}^{\alpha_1} \cdot x_{i_2}^{\alpha_2} \cdots x_{i_n}^{\alpha_n} : i_1 < i_2 < \ldots < i_n,\ n \geq 0 \text{ e } \alpha_i > 0 \text{ para todo } i \in I\}.$$

Veja que uma consequência do Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt é que podemos identificar todos os elementos de $\mathfrak{g}$ com suas imagens canônicas em $U(\mathfrak{g})$. Consequentemente, $\mathfrak{g}$ é canonicamente embutida em $U(\mathfrak{g})$, além disso, como toda álgebra associativa, $U(\mathfrak{g})$ pode ser considerada como uma álgebra de Lie com o comutador $[a, b] = ab - ba$ e $\mathfrak{g}$ pode ser visto como uma subálgebra de Lie de $U(\mathfrak{g})$.

Denotamos por $Z(\mathfrak{g})$ o centro de $U(\mathfrak{g})$, ou seja,

$$Z(\mathfrak{g}) = \{a \in U(\mathfrak{g}) \mid ab = ba \quad \text{para todo} \quad b \in U(\mathfrak{g})\}.$$

É fácil verificar que $Z(\mathfrak{g})$ é um domínio com identidade.

Para cada $k \geq 0$ definimos o subespaço $U_{(k)}$ da álgebra envolvente universal $U(\mathfrak{g})$ como o subespaço gerado por:

$$U_{(k)} = \big\langle x_1 \cdots x_l : l \leq k,\ x_j \in \mathfrak{g} \big\rangle_{\mathbb{F}},$$

onde $U_{(0)} = \mathbb{F}$. A sequência de subespaços $\big(U_{(k)}\big)_{k\geq 0}$ é crescente e sua união é $U(\mathfrak{g})$. Temos que $U_{(n)}U_{(m)} \subseteq U_{(m+n)}$. Assim, $\big(U_{(k)}\big)_{k\geq 0}$ é uma filtração crescente de $U(\mathfrak{g})$, chamada filtração canônica de $U(\mathfrak{g})$.

Seja G^n o espaço vetorial $U_{(n+1)}/U_{(n)}$ e $G = \operatorname{gr} U(\mathfrak{g})$ a álgebra graduada $\bigoplus_{n\geq 0} G^n$. Por [13, Afirmação 2.3.4] temos que G é uma álgebra associativa comutativa com unidade.

Assim, G é a álgebra graduada associada à álgebra filtrada $U(\mathfrak{g})$. Em [13, Proposição 2.3.6] vemos que $S(\mathfrak{g})$ é isomorfa à álgebra G, e portanto, podemos afirmar que a álgebra simétrica $S(\mathfrak{g})$ é a álgebra graduada associada à álgebra filtrada $U(\mathfrak{g})$. Isto é, $S(\mathfrak{g}) \cong \operatorname{gr} U(\mathfrak{g})$.

Em [13, p. 76], temos as seguintes propriedades de $U(\mathfrak{g})$:

Teorema 3.1.2. *Seja $U(\mathfrak{g})$ a álgebra envolvente universal de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ sobre um corpo $\mathbb{F}$. Então*

1. *Se $\mathfrak{g}$ tem dimensão finita, então a álgebra $U(\mathfrak{g})$ é noetheriana.*

2. *A álgebra $U(\mathfrak{g})$ não possui divisores de zero.*

Observe que o item 2 do Teorema 3.1.2 é uma consequência de podermos afirmar que a álgebra simétrica $S(\mathfrak{g})$ (que claramente não possui divisores de zero) é a álgebra graduada associada à álgebra filtrada $U(\mathfrak{g})$. Uma questão interessante é saber se é possível que a álgebra envolvente universal de uma álgebra de Lie de dimensão infinita não seja noetheriana. Sierra e Walton demonstraram em [31] que $U(\mathfrak{g})$ pode não ser noetheriana se $\mathfrak{g}$ tem dimensão infinita.

Como $U(\mathfrak{g})$ é uma álgebra noetheriana sem divisores de zero, podemos construir seu anel de frações (veja [13, Seção 3.6]), que é um anel de divisão e que denotamos por $D(\mathfrak{g})$. Uma vez que $Z(\mathfrak{g})$ é um domínio de integridade, seu anel de frações é um corpo, o qual denotamos por $K(\mathfrak{g})$ e chamamos corpo de frações de $Z(\mathfrak{g})$. O corpo $K(\mathfrak{g})$ é um subcorpo do centro de $D(\mathfrak{g})$.

O conceito de domínio integralmente fechado foi apresentado na Definição 2.4.1. Um teorema importante no estudo do centro das álgebras envolventes universais de álgebras de Lie é o seguinte:

Teorema 3.1.3. *[32, Corolário 5.4] Seja $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica prima p. Então o centro $Z(\mathfrak{g})$ é um domínio integralmente fechado.*

Nos casos particulares em que $\mathfrak{g}$ é semissimples ou nilpotente, temos as seguintes propriedades no anel de divisão $D(\mathfrak{g})$:

Teorema 3.1.4. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. *Se $\mathfrak{g}$ é semissimples e $\mathbb{F}$ um corpo algebricamente fechado, então $K(\mathfrak{g})$ coincide com o centro de $D(\mathfrak{g})$ e, se n é o rank de $\mathfrak{g}$ (dimensão da sua subálgebra de Cartan), então $Z(\mathfrak{g})$ é isomorfo a uma álgebra de polinômios em n indeterminadas sobre $\mathbb{F}$.*

2. *Se $\mathfrak{g}$ é nilpotente, então $K(\mathfrak{g})$ coincide com o centro de $D(\mathfrak{g})$.*

Demonstração. Para 1 veja [13, Corolário 4.2.3 e Teorema 7.3.8] e para 2 veja [13, Corolário 4.7.2]. □

Um fato importante para o nosso trabalho que extraímos do Teorema 3.1.3 e do Teorema 3.1.4 item 2 é que se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie nilpotente de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica prima p, então $Z(\mathfrak{g})$ é um domínio integralmente fechado cujo corpo de frações coincide com o centro do anel de divisão de $U(\mathfrak{g})$.

3.2 Álgebra de invariantes de uma álgebra de Lie

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre um corpo $\mathbb{F}$. Para cada $x \in \mathfrak{g}$ definimos a aplicação linear $\text{ad}_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ como $\text{ad}_x(y) = [x, y]$ para cada $y \in \mathfrak{g}$. Por [32, Teorema 1.2] temos que para cada $x \in \mathfrak{g}$ a aplicação linear ad_x é uma derivação de $\mathfrak{g}$. As derivações de $\mathfrak{g}$ da forma ad_x são denominadas derivações internas de $\mathfrak{g}$. O conjunto de todas as derivações internas de $\mathfrak{g}$ é denotado por $\text{ad}_\mathfrak{g}$. Ainda, temos o centro de $\mathfrak{g}$ definido por

$$C(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} : \text{ad}_x(y) = 0, \ \forall y \in \mathfrak{g}\}.$$

Também para $y \in \mathfrak{g}$ temos o centralizador de y em $\mathfrak{g}$ definido por

$$C_\mathfrak{g}(y) = \{x \in \mathfrak{g} : \text{ad}_x(y) = 0\}.$$

Seja A uma $\mathbb{F}$-álgebra associativa. Então podemos obter uma álgebra de Lie com o comutador $[x, y] = xy - yx, \ \forall x, y \in A$. Por abuso de notação, também denotamos por A essa álgebra de Lie. Para cada $x \in A$ definimos a aplicação linear $\text{ad}_x : A \to A$ como $\text{ad}_x(y) = [x, y] = xy - yx$. Assim definida, é fácil ver que ad_x é uma derivação de A, ou seja, para cada $y, z \in A$ obtemos $\text{ad}_x(yz) = \text{ad}_x(y)z + y\,\text{ad}_x(z)$. Ainda, sendo A uma álgebra associativa, em [32, Proposição 1.3] temos a fórmula

$$\big(\text{ad}_x\big)^m(y) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} x^j y x^{m-j}, \ \forall x, y \in A. \tag{3.1}$$

Logo, se $\mathbb{F}$ é um corpo de característica prima p e substituindo $m = p$ obtemos que

$$\big(\text{ad}_x\big)^p(y) = x^p y - y x^p = \text{ad}_{x^p}(y), \ \forall x, y \in A. \tag{3.2}$$

Dado $x \in \mathfrak{g}$, em $U(\mathfrak{g})$, definimos a aplicação linear $\text{ad}_{U(\mathfrak{g})}x : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ por

$$\text{ad}_{U(\mathfrak{g})}x(u) = [x, u] = xu - ux.$$

Assim, para cada $x \in \mathfrak{g}$ temos que $\text{ad}_{U(\mathfrak{g})}x$ é uma derivação de $U(\mathfrak{g})$. Em particular, a ação adjunta $x \cdot u = xu - ux = \text{ad}_{U(\mathfrak{g})}x(u)$ mune $U(\mathfrak{g})$ de uma estrutura de $\mathfrak{g}$-módulo [13, Afirmação 2.2.21]. Como todo elemento $x \in \mathfrak{g}$ pode ser identificado por $x/1$ no anel de divisão $D(\mathfrak{g})$, podemos definir a aplicação linear $\text{ad}_{D(\mathfrak{g})}x : D(\mathfrak{g}) \to D(\mathfrak{g})$ por

$$\text{ad}_{D(\mathfrak{g})}x(v) = [x, v] = xv - vx.$$

Observação 3.2.1. Uma observação importante é que para todo $x \in \mathfrak{g}$ vale as igualdades

$$\text{ad}_{D(\mathfrak{g})}x \mid_{U(\mathfrak{g})} = \text{ad}_{U(\mathfrak{g})}x \ \text{ e } \ \text{ad}_{D(\mathfrak{g})}x \mid_{\mathfrak{g}} = \text{ad}_x.$$

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita n sobre um corpo $\mathbb{F}$. Seja $\{x_1, \ldots, x_n\}$ uma base para $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{F}$ com relações

$$[x_i, x_j] = \sum_{k=1}^{n} C_{i,j}^k x_k, \ \text{ onde } C_{i,j}^k \in \mathbb{F} \text{ e } 1 \leq i, j, k \leq n. \tag{3.3}$$

Considere a álgebra de polinômios $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$. Como consequência de ad_x ser uma derivação de $U(\mathfrak{g})$ para todo $x \in \mathfrak{g}$, podemos considerar a ação adjunta de $\mathfrak{g}$ em $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$, definida na base da seguinte forma:

$$x_l \cdot (x_{i_1} \cdots x_{i_k}) = \sum_{j=1}^{k} x_{i_1} \cdots x_{i_{j-1}} [x_l, x_{i_j}] x_{i_{j+1}} \cdots x_{i_k}, \tag{3.4}$$

e por linearidade para todo $x \in \mathfrak{g}$ e para todo $f \in \mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$. Essa ação mune $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$ de uma estrutura de $\mathfrak{g}$-módulo (veja [13, Afirmação 1.2.14]). Observe ainda que a imagem $x_l \cdot (x_{i_1} \cdots x_{i_k})$ é 0 ou um polinômio homogêneo de grau k.

Teorema 3.2.2. *[13, Proposição 2.4.10] Se $\mathbb{F}$ é um corpo de característica zero, então os $\mathfrak{g}$-módulos $U(\mathfrak{g})$ e $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$ são isomorfos.*

Considere os conjuntos:

$$U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} = \{u \in U(\mathfrak{g}) \ : \ \text{ad}_{U(\mathfrak{g})}x(u) = 0, \ \forall x \in \mathfrak{g}\}$$
$$\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]^{\mathfrak{g}} = \{f \in \mathbb{F}[\mathbf{x}_n] \ : \ x \cdot f = 0, \ \forall x \in \mathfrak{g}\}.$$

Pelo Teorema 3.2.2, sobre um corpo de característica zero, $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ e $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]^{\mathfrak{g}}$ são isomorfos como espaços vetoriais (ver [13, Afirmação 2.4.11]). Eles são os $\mathfrak{g}$-invariantes em $U(\mathfrak{g})$ e $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$, respectivamente, sobre a ação adjunta de $\mathfrak{g}$. Os elementos em $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ são chamados invariantes de Casimir de $\mathfrak{g}$. Note que $Z(\mathfrak{g}) \subseteq U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. Por outro lado, se $x \in U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ então x comuta com todos os elementos de $\mathfrak{g}$. Como $U(\mathfrak{g})$ é gerada por $\mathfrak{g}$ temos que $x \in Z(\mathfrak{g})$. Portanto, $Z(\mathfrak{g})$ é precisamente o conjunto de invariantes de Casimir de $\mathfrak{g}$. Denominamos o espaço $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]^{\mathfrak{g}}$ por centro de Poisson de $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$.

Proposição 3.2.3. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ qualquer e seja $\{x_1, \ldots, x_n\}$ uma base para $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{F}$. Se $f \in \mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$, então*

$$x_i \cdot f = \sum_{j=1}^{n} [x_i, x_j] \frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Em particular,

$$f \in \mathbb{F}[\mathbf{x}_n]^{\mathfrak{g}} \quad \textit{se, e somente se,} \quad \sum_{j=1}^{n}[x_i, x_j]\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0, \ \textit{para todo } 1 \leq i \leq n.$$

Demonstração. Vamos provar a primeira afirmação. Inicialmente considere um monômio $x_j^\alpha \in \mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$ com $\alpha > 0$ (para $\alpha = 0$ o teorema é válido). Então, pela Equação (3.4) temos

$$x_i \cdot (x_j^\alpha) = \alpha[x_i, x_j]x_j^{\alpha-1} = [x_i, x_j]\frac{\partial(x_j^\alpha)}{\partial x_j}.$$

Agora tomemos um monômio $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \in \mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$ com $\alpha_i \geq 0$ para cada $1 \leq i \leq n$. Então, pela regra de Leibniz temos

$$\begin{aligned} x_i \cdot \big(x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}\big) &= \sum_{j=1}^{n} x_1^{\alpha_1} \cdots x_{j-1}^{\alpha_{j-1}}\big(x_i \cdot x_j^{\alpha_j}\big)x_{j+1}^{\alpha_{j+1}} \cdots x_n^{\alpha_n} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_1^{\alpha_1} \cdots x_{j-1}^{\alpha_{j-1}}[x_i, x_j]x_j^{\alpha_j-1}x_{j+1}^{\alpha_{j+1}} \cdots x_n^{\alpha_n} \\ &= \sum_{j=1}^{n}[x_i, x_j]\alpha_j x_1^{\alpha_1} \cdots x_{j-1}^{\alpha_{j-1}}x_j^{\alpha_j-1}x_{j+1}^{\alpha_{j+1}} \cdots x_n^{\alpha_n} \\ &= \sum_{j=1}^{n}[x_i, x_j]\frac{\partial(x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n})}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Portanto, por linearidade, segue que $x_i \cdot f = \sum_{j=1}^{n}[x_i, x_j]\frac{\partial f}{\partial x_j}$ para cada $f \in \mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$. A segunda afirmação segue diretamente da primeira. □

Seja $\mathbb{F}(\mathbf{x}_n)$ o corpo de frações de $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$. Os elementos de $\mathbb{F}(\mathbf{x}_n)$ são da forma f/g tal que $f, g \in \mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$ e $g \neq 0$. Também escrevemos $g^{-1}f$ para denotar f/g. Podemos estender a ação adjunta de $\mathfrak{g}$ para o corpo $\mathbb{F}(\mathbf{x}_n)$ como segue:
Para todo $f/g \in \mathbb{F}(\mathbf{x}_n)$ e $1 \leq i \leq n$,

$$x_i \cdot (f/g) = \sum_{j=1}^{n}[x_i, x_j]\Big(g^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_j} - g^{-2}f\frac{\partial g}{\partial x_j}\Big), \tag{3.5}$$

e por linearidade para todo $x \in \mathfrak{g}$. Observe que 3.5 pode ser escrita como

$$\begin{aligned} x_i \cdot (f/g) &= \sum_{j=1}^{n}[x_i, x_j]\Big(g^{-1}\frac{\partial f}{\partial x_j} - g^{-2}f\frac{\partial g}{\partial x_j}\Big) \\ &= g^{-1}\Big(\sum_{j=1}^{n}[x_i, x_j]\frac{\partial f}{\partial x_j}\Big) - g^{-2}f\Big(\sum_{j=1}^{n}[x_i, x_j]\frac{\partial g}{\partial x_j}\Big) \\ &= g^{-1}\big(x_i \cdot f\big) - g^{-2}f\big(x_i \cdot g\big), \end{aligned}$$

onde na última igualdade $x_i \cdot f$ e $x_i \cdot g$ é a ação adjunta de $\mathfrak{g}$ em $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$. Como a ação adjunta em $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$ é uma derivação, segue que a ação

$$x_i \cdot (f/g) = g^{-1}\big(x_i \cdot f\big) - g^{-2}f\big(x_i \cdot g\big) \tag{3.6}$$

é uma derivação de $\mathbb{F}(\mathbf{x}_n)$ que estende a ação adjunta de $\mathfrak{g}$ em $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$, pois claramente $x \cdot f = x \cdot (f/1)$ para cada $f \in \mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$. A ação (3.6) está bem definida. Com efeito, se $f_1/g_1 = f_2/g_2$ em $\mathbb{F}(\mathbf{x}_n)$, então temos que $f_1 = g_2^{-1}g_1f_2$. Com isso,

$$\begin{aligned}
x_i \cdot (f_1/g_1) &= g_1^{-1}\big(x_i \cdot f_1\big) - g_1^{-2}f_1\big(x_i \cdot g_1\big) \\
&= g_1^{-1}\big(x_i \cdot (g_2^{-1}g_1f_2)\big) - g_1^{-2}(g_2^{-1}g_1f_2)\big(x_i \cdot g_1\big) \\
&= g_1^{-1}\big[g_2^{-1}\big(x_i \cdot (g_1f_2)\big) - g_2^{-2}g_1f_2\big(x_i \cdot g_2\big)\big] - g_1^{-1}g_2^{-1}f_2\big(x_i \cdot g_1\big) \\
&= g_1^{-1}\Big[g_2^{-1}\Big(f_2\big(x_i \cdot g_1\big) + g_1\big(x_i \cdot f_2\big)\Big) - g_2^{-2}g_1f_2\big(x_i \cdot g_2\big)\Big] - g_1^{-1}g_2^{-1}f_2\big(x_i \cdot g_1\big) \\
&= g_1^{-1}g_2^{-1}f_2\big(x_i \cdot g_1\big) + g_2^{-1}\big(x_i \cdot f_2\big) - g_2^{-2}f_2\big(x_i \cdot g_2\big) - g_1^{-1}g_2^{-1}f_2\big(x_i \cdot g_1\big) \\
&= g_2^{-1}\big(x_i \cdot f_2\big) - g_2^{-2}f_2\big(x_i \cdot g_2\big) \\
&= x_i \cdot (f_2/g_2).
\end{aligned}$$

A afirmação do Teorema 3.1.3 é que o centro $Z(\mathfrak{g})$ da álgebra envolvente universal $U(\mathfrak{g})$ de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ é um domínio integralmente fechado. Vamos mostrar que o mesmo acontece com $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]^{\mathfrak{g}}$, isto é, vamos mostrar que $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]^{\mathfrak{g}}$ é igual ao seu fecho integral no seu corpo de frações.

Proposição 3.2.4. $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]^{\mathfrak{g}}$ *é um domínio integralmente fechado.*

Demonstração. Seja $\overline{\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]^{\mathfrak{g}}}$ o fecho integral de $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]^{\mathfrak{g}}$ no seu corpo de frações $\mathrm{Frac}\big(\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]^{\mathfrak{g}}\big)$. Escrevemos $K = \mathrm{Frac}\big(\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]^{\mathfrak{g}}\big)$. Como $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$ é integralmente fechado (Teorema 2.4.3) temos que

$$\overline{\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]^{\mathfrak{g}}} \subseteq \overline{\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]} = \mathbb{F}[\mathbf{x}_n],$$

onde $\overline{\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]}$ é o fecho integral de $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$ em $\mathbb{F}(\mathbf{x}_n)$.

Observe que $K \subseteq \mathbb{F}(\mathbf{x}_n)^{\mathfrak{g}}$, onde

$$\mathbb{F}(\mathbf{x}_n)^{\mathfrak{g}} = \{f/g \in \mathbb{F}(\mathbf{x}_n) \ : \ x \cdot (f/g) = 0, \ \forall x \in \mathfrak{g}\}.$$

Logo,

$$K \cap \mathbb{F}[\mathbf{x}_n] \subseteq \mathbb{F}(\mathbf{x}_n)^{\mathfrak{g}} \cap \mathbb{F}[\mathbf{x}_n] = \mathbb{F}[\mathbf{x}_n]^{\mathfrak{g}}.$$

Como a inclusão $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]^{\mathfrak{g}} \subseteq K \cap \mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$ é óbvia, temos

$$K \cap \mathbb{F}[\mathbf{x}_n] = \mathbb{F}[\mathbf{x}_n]^{\mathfrak{g}}.$$

Em vista que

$$\overline{\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]^{\mathfrak{g}}} \subseteq \Big(K \cap \mathbb{F}[\mathbf{x}_n]\Big) = \mathbb{F}[\mathbf{x}_n]^{\mathfrak{g}},$$

concluímos a igualdade $\overline{\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]^{\mathfrak{g}}} = \mathbb{F}[\mathbf{x}_n]^{\mathfrak{g}}$. $\square$

Uma questão interessante é determinar o número máximo de invariantes de Casimir algebricamente independentes. Considere a matriz antissimétrica $\mathrm{M}_{\mathfrak{g}} = \Big((\mathrm{M}_{\mathfrak{g}})_{ij}\Big)$ com entradas

$$(\mathrm{M}_{\mathfrak{g}})_{ij} = [x_i, x_j] = \sum_k C_{i,j}^k x_k \in \mathbb{F}[\mathbf{x}_n],$$

onde os escalares $C_{i,j}^k$ são definidos na Equação (3.3).

Consideramos a matriz $\mathrm{M}_{\mathfrak{g}}$ como uma matriz com entradas no corpo $\mathbb{F}(\mathbf{x}_n)$. Escrevemos $r(\mathfrak{g}) = \mathrm{rank}(\mathrm{M}_{\mathfrak{g}})$. Se $\mathbb{F}$ é um corpo algebricamente fechado de característica zero e τ é o número máximo de invariantes de Casimir algebricamente independentes, então temos a relação $\tau \leq n - r(\mathfrak{g})$ [1, Teorema 1].

A álgebra simétrica $S(\mathfrak{g})$ é isomorfa à álgebra de polinômios em $n = \dim \mathfrak{g}$ variáveis sobre o corpo $\mathbb{F}$, em particular um domínio, assim está definido seu corpo de frações $Q(\mathfrak{g}) = \mathrm{Frac}(S(\mathfrak{g}))$. A álgebra $S(\mathfrak{g})$ também é um $\mathfrak{g}$-módulo sob a ação adjunta de $\mathfrak{g}$ [13, Afirmação 1.2.14]. O conjunto de invariantes do $\mathfrak{g}$-módulo $S(\mathfrak{g})$, isto é, o conjunto de elementos de $S(\mathfrak{g})$ que são anulados sob a representação adjunta de $\mathfrak{g}$ em $S(\mathfrak{g})$ é denotado por $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. Denotamos por Q_0 o corpo de frações de $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. Como $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \subseteq S(\mathfrak{g})$ temos que $Q_0 \subseteq Q(\mathfrak{g})$ é uma extensão de corpos.

Na verdade, se $\{x_1, \ldots, x_n\}$ é uma base de $\mathfrak{g}$, então as álgebras de polinômios $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$ e $S(\mathfrak{g})$ são isomorfas, bem como o centro de Poisson $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]^{\mathfrak{g}}$ é isomorfo à álgebra de invariantes $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.

Álgebras de Lie nilpotentes de classe de nilpotência menor ou igual a p ($\mathrm{cl}(\mathfrak{g}) \leq p$) são exemplos de álgebras de Lie restritas (veja definição em [32, p. 64] e [32, Exemplo 2, p. 72]).

Teorema 3.2.5. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie nilpotente com cl$(\mathfrak{g}) \leq p$ de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica prima p. Então*

$$\big[Q(\mathfrak{g}) \,:\, Q_0\big] = p^{r(\mathfrak{g})},$$

onde $r(\mathfrak{g}) = rank(M_{\mathfrak{g}})$.

Demonstração. A condição que $\mathfrak{g}$ é nilpotente com $\mathrm{cl}(\mathfrak{g}) \leq p$ implica que $\mathfrak{g}$ é restrita e que $\mathfrak{g}$ é um $\mathfrak{g}$-módulo restrito para a ação adjunta. O teorema segue de [5, Proposição 3.3]. □

Quando $\mathbb{F}$ é um corpo algebricamente fechado de caracterítica zero, M. Duflo usando a estrutura das álgebras de Lie mostra que existe um isomorfismo de álgebras entre $Z(\mathfrak{g})$ e $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, o chamado Isomorfismo de Duflo [15, Teorema 2]. M. Kontsevich, em [23, Teorema 7], utilizando cohomologia, deu uma nova prova para esse isomorfismo. Uma demonstração mais algébrica do isomorfismo de Duflo é apresentada por J. Dixmier em [13, Teorema 10.4.5].

Teorema 3.2.6 (Isomorfismo de Duflo). *Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ algebricamente fechado de característica zero, então $Z(\mathfrak{g}) \cong S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ como álgebras comutativas.*

Se $\mathbb{F}$ é um corpo de caracterítica positiva $p > 0$, não é sempre verdade que temos um isomorfismo de álgebras comutativas $Z(\mathfrak{g}) \cong S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. Por exemplo, exemplos de álgebras de Lie não nilpotentes de dimensão finita são conhecidos onde esse isomorfismo não acontece (veja [2, Exemplos 6.1 e 6.2]). A. Braun (ver [2, p. 204]) apresentou a seguinte conjectura:

Conjectura (A. Braun) Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie nilpotente de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica prima, então $Z(\mathfrak{g}) \cong S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ como álgebras comutativas.

Uma das consequências deste trabalho é que se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie nilpotente de dimensão menor ou igual a 6 sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica prima p com $\mathrm{cl}(\mathfrak{g}) \leq p$, então $Z(\mathfrak{g}) \cong S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. Em particular, a conjectura de A. Braun é verdadeira nesta classe de álgebras. Esse resultado será demonstrado no Capítulo 6.

3.3 p-Centro

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie nilpotente de dimensão finita n sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica prima p. Para cada $x \in \mathfrak{g}$, a nilpotência de ad_x garante que $x^{p^r} \in Z(\mathfrak{g})$ para algum $r \geq 0$. Se $\mathrm{cl}(\mathfrak{g}) \leq p$, então $x^p \in Z(\mathfrak{g})$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.

Considere o $\mathbb{F}$-subespaço vetorial de $U(\mathfrak{g})$

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathbb{F}\mathfrak{g}^p + \mathbb{F}\mathfrak{g}^{p^2} + \cdots = \sum_{n \geq 0} \langle \mathfrak{g}^{p^n} \rangle_{\mathbb{F}}.$$

O $\mathbb{F}$-espaço $\widehat{\mathfrak{g}}$ independe da escolha da base de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{F}$, pois é gerado por todos os elementos x^{p^j} com $x \in \mathfrak{g}$ e $j \geq 0$ inteiro, onde para cada $j \geq 0$ temos que $\mathfrak{g}^{p^j}$ denota o $\mathbb{F}$-módulo gerado por todos os elementos x^{p^j} com $x \in \mathfrak{g}$ (ver [34, Lema 3] e [32, p. 202]). Ademais, se $\{x_1, \ldots, x_n\}$ é uma base para $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{F}$, então $\left\{x_i^{p^j} \;:\; 1 \leq i \leq n;\; j \geq 0\right\}$ é uma base para $\widehat{\mathfrak{g}}$ sobre $\mathbb{F}$. [ver [34], Lema 2].

Definição 3.3.1. *Chamamos de p-centro de $U(\mathfrak{g})$ a álgebra gerada sobre $\mathbb{F}$ pela interseção $\widehat{\mathfrak{g}} \cap Z(\mathfrak{g})$, isto é,*

$$Z_p(\mathfrak{g}) = \left\langle \widehat{\mathfrak{g}} \cap Z(\mathfrak{g}) \right\rangle.$$

O p-centro $Z_p(\mathfrak{g})$ é uma $\mathbb{F}$-subálgebra do centro $Z(\mathfrak{g})$ de $U(\mathfrak{g})$.

O anel $Z_p(\mathfrak{g})$ é um subanel de $Z(\mathfrak{g})$ que não depende da base escolhida para $\mathfrak{g}$, pois está contido em $\widehat{\mathfrak{g}}$ que é independente da base escolhida para $\mathfrak{g}$. Strade e Farnsteiner em [32, p. 202] também definem o p-centro (notação: $O(\mathfrak{g})$) para uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ qualquer sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica prima p e apresentam algumas propriedades dessa álgebra.

Teorema 3.3.2. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie nilpotente com cl$(\mathfrak{g}) \leq p$ de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ de caracterítica $p > 0$. Seja $\{x_1, \ldots, x_n\}$ uma base de $\mathfrak{g}$ tal que $\{x_{k+1}, \ldots, x_n\}$ é uma base do centro $C(\mathfrak{g})$. Então, $Z_p(\mathfrak{g}) = \mathbb{F}[x_1^p, \ldots, x_k^p, x_{k+1}, \ldots, x_n]$. Em particular, $Z_p(\mathfrak{g})$ é isomorfo a uma álgebra de polinômios em n variáveis. Além disso, $U(\mathfrak{g})$ é um $Z_p(\mathfrak{g})$-módulo livre de posto p^k.*

Demonstração. As condições implicam que $\mathfrak{g}$ é restrita. Assim, o teorema segue de [32, Teorema 1.3, p. 203]. □

Lembre-se que $K(\mathfrak{g})$ denota o corpo de frações de $Z(\mathfrak{g})$ e seja $K_p(\mathfrak{g})$ o corpo de frações de $Z_p(\mathfrak{g})$.

Corolário 3.3.3. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie nilpotente com $cl(\mathfrak{g}) \leq p$ e dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica prima p. As seguintes afirmações são verdadeiras*

1. *$Z_p(\mathfrak{g})$ é um anel integralmente fechado.*
2. *$Z_p(\mathfrak{g}) \subseteq Z(\mathfrak{g})$ é uma extensão integral de anéis.*
3. *Se $K(\mathfrak{g}) = K_p(\mathfrak{g})$, então $Z(\mathfrak{g}) = Z_p(\mathfrak{g})$.*

Demonstração. Para 1, veja que o Teorema 3.3.2 diz que $Z_p(\mathfrak{g})$ é isomorfo a uma álgebra de polinômios sobre $\mathbb{F}$. Pelo Teorema 2.4.3 segue que $Z_p(\mathfrak{g})$ é um anel integralmente fechado. Para 2, sabemos que $Z_p(\mathfrak{g})$ é isomorfo a álgebra de polinômios, e assim, é um anel noetheriano (veja [22, Corolário 2.13, p. 40]). Pelo Teorema 3.3.2 temos que $U(\mathfrak{g})$ é um $Z_p(\mathfrak{g})$-módulo finitamente gerado, e portanto, $U(\mathfrak{g})$ também é um $Z_p(\mathfrak{g})$-módulo noetheriano. Como $Z(\mathfrak{g})$ é um $Z_p(\mathfrak{g})$-submódulo em $U(\mathfrak{g})$ segue que ele também é noetheriano. Isto é, $Z(\mathfrak{g})$ é um $Z_p(\mathfrak{g})$-módulo finitamente gerado. Por [22, Teorema 8.4] isso acontece se, e somente se, $Z_p(\mathfrak{g}) \subseteq Z(\mathfrak{g})$ é uma extensão integral de anéis. O item 3 segue de 1 e 2. □

O anel de frações $D(\mathfrak{g})$ de $U(\mathfrak{g})$ foi abordado na Seção 3.1. Em [34, p. 15 e 16], Hans Zassenhaus construiu o anel de frações $\bar{D}(\mathfrak{g})$ de $U(\mathfrak{g})$ considerando apenas denominadores em $Z_p(\mathfrak{g}) - \{0\}$. Com essa construção, ele mostra que $\bar{D}(\mathfrak{g})$ não possui divisores de zero e que existe uma base finita de $\bar{D}(\mathfrak{g})$ sobre $K_p(\mathfrak{g})$ contida em $U(\mathfrak{g})$. Ou seja, $\bar{D}(\mathfrak{g})$ é uma $K_p(\mathfrak{g})$-álgebra de dimensão finita. Obtemos por [14, Corolário 1.2.2] que $\bar{D}(\mathfrak{g})$ é uma álgebra de divisão. Portanto, as álgebras de divisão $D(\mathfrak{g})$ e $\bar{D}(\mathfrak{g})$ coincidem.

Teorema 3.3.4. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie nilpotente de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica prima p. Sejam $D(\mathfrak{g})$ o anel de divisão de $U(\mathfrak{g})$, $K(\mathfrak{g})$ o corpo de frações de $Z(\mathfrak{g})$ e $K_p(\mathfrak{g})$ o corpo de frações de $Z_p(\mathfrak{g})$. Então*

1. *O anel de divisão $D(\mathfrak{g})$ é um $K_p(\mathfrak{g})$-módulo de dimesão p^d, onde $d = \dim_{\mathbb{F}} \big(\widehat{\mathfrak{g}}/\widehat{\mathfrak{g}} \cap Z(\mathfrak{g})\big)$. Em particular, se cl$(\mathfrak{g}) \leq p$, então $d = \dim_{\mathbb{F}} \mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})$.*

2. *Para algum inteiro positivo m, temos que $D(\mathfrak{g})$ é um $K(\mathfrak{g})$-módulo de dimensão p^{2m}.*

3. *A extensão de corpos $K_p(\mathfrak{g}) \subseteq K(\mathfrak{g})$ é puramente insepáravel.*

Demonstração. Para 1 veja [[34], p. 16]. A parte 2 segue do fato que uma álgebra de divisão considerada sobre seu centro é uma álgebra central simples e a dimensão de qualquer álgebra central simples é um número quadrado, veja [[20], p. 222]. O item 3 encontra-se em [[34], Teorema 9]. □

Lema 3.3.5. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie nilpotente de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica prima p tal que cl($\mathfrak{g}$) $\leq p$. Suponha que existem $x, y \in \mathfrak{g}$ linearmente independentes tais que $x, y \notin C(\mathfrak{g})$, $[x, y] = 0$ e $y \notin K(\mathfrak{g})(x)$. Então $\dim_{K(\mathfrak{g})} D(\mathfrak{g}) > p^2$.*

Demonstração. Com efeito, suponhamos que existem $x, y \in \mathfrak{g}$ linearmente independentes tais que $x, y \notin C(\mathfrak{g})$, $[x, y] = 0$ e $y \notin K(\mathfrak{g})(x)$. Sejam $D_1 = K(\mathfrak{g})[x]$ e $D_2 = K(\mathfrak{g})[x, y]$ as $K(\mathfrak{g})$-subálgebras de $D(\mathfrak{g})$ geradas por $\{x\}$ e $\{x, y\}$, respectivamente. Como $[x, y] = 0$ temos que D_1 e D_2 são comutativas. Com o Teorema 3.3.4(2) vemos que $D(\mathfrak{g})$ é uma $K(\mathfrak{g})$-álgebra de divisão de dimensão finita. Os anéis D_1 e D_2 são domínios de dimensão finita sobre o corpo $K(\mathfrak{g})$ e assim são corpos (veja [14, Corolário 1.2.3]). Como $y \notin K(\mathfrak{g})(x)$ segue que $D_1 \neq D_2$. A desigualdade cl($\mathfrak{g}$) $\leq p$ implica que $x_i^p, x_j^p \in K(\mathfrak{g})$ donde $\dim_{K(\mathfrak{g})} D_1 \leq p$ e $\dim_{D_1} D_2 \leq p$. Pelo Corolário 2.1.3(1) temos que $K(\mathfrak{g}) \subseteq D_1$ e $D_1 \subseteq D_2$ são extensões puramente inseparáveis. Ademais, do Corolário 2.1.3(2b) vemos que $\dim_{K(\mathfrak{g})} D_1 = \dim_{D_1} D_2 = p$. Logo, $\dim_{K(\mathfrak{g})} D_2 = p^2$. Portanto, $\dim_{K(\mathfrak{g})} D(\mathfrak{g}) > p^2$, senão teríamos $D(\mathfrak{g}) = D_2$, mas isso não ocorre, pois $D(\mathfrak{g})$ não é comutativo. □

Nesse trabalho vamos apresentar exemplos onde $Z(\mathfrak{g})$ é uma extensão simples do p-centro $Z_p(\mathfrak{g})$ para $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie nilpotente de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica positiva. Precisamos do seguinte resultado.

Teorema 3.3.6. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie nilpotente de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica prima p com cl($\mathfrak{g}$) $\leq p$. Suponha que $\mathfrak{g}$ é uma álgebra não abeliana e seja $d = \dim_{\mathbb{F}} \mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})$. Assuma que existem $z_1, \ldots, z_{d-2} \in Z(\mathfrak{g})$ tais que $z_i^p \in Z_p(\mathfrak{g})$ para cada $1 \leq i \leq d-2$ e*

$$K_p(\mathfrak{g}) \subset K_p(\mathfrak{g})(z_1) \subset K_p(\mathfrak{g})(z_1, z_2) \subset \cdots \subset K_p(\mathfrak{g})(z_1, \ldots, z_{d-2}) \subseteq K(\mathfrak{g}) \subset D(\mathfrak{g}).$$

Nessas condições temos que $K(\mathfrak{g}) = K_p(\mathfrak{g})(z_1, \ldots, z_{d-2})$.

Demonstração. Com efeito, como $z_i^p \in Z_p(\mathfrak{g})$ para cada $1 \leq i \leq d-2$, segue que a desigualdade $[K_p(\mathfrak{g})(z_1, \ldots, z_i) : K_p(z_1, \ldots, z_{i-1})] \leq p$ é verdadeira. Pelo Teorema 3.3.4 temos que $K_p(\mathfrak{g}) \subseteq K(\mathfrak{g})$ é uma extensão puramente inseparável (ver Definição 5.1). Logo, pelo Corolário 2.1.3 item 2, a extensão $K_p(\mathfrak{g})(z_1, \ldots, z_{i-1}) \subset K_p(\mathfrak{g})(z_1, \ldots, z_i)$ também é puramente inseparável e obtemos $[K_p(\mathfrak{g})(z_1,\ldots,z_i) : K_p(\mathfrak{g})(z_1,\ldots,z_{i-1})] = p^r$ para algum $r \geq 1$. Decorrente disso, $[K_p(\mathfrak{g})(z_1,\ldots,z_i) : K_p(\mathfrak{g})(z_1,\ldots,z_{i-1})] = p$ donde $[K_p(\mathfrak{g})(z_1,\ldots,z_i) : K_p(\mathfrak{g})] = p^i$.

Com isso,

$$\begin{aligned} p^d &= [D(\mathfrak{g}) : K_p(\mathfrak{g})] \\ &= [D(\mathfrak{g}) : K(\mathfrak{g})][K(\mathfrak{g}) : K_p(\mathfrak{g})(z_1,\ldots,z_{d-2})][K_p(\mathfrak{g})(z_1,\ldots,z_{d-2}) : K_p(\mathfrak{g})] \\ &= p^{2m}[K(\mathfrak{g}) : K_p(\mathfrak{g})(z_1,\ldots,z_{d-2})]p^{d-2} \\ &= p^{d+2(m-1)}[K(\mathfrak{g}) : K_p(\mathfrak{g})(z_1,\ldots,z_{d-2})]. \end{aligned}$$

Como $m \geq 1$ temos que $2(m-1) \geq 0$. Como $K_p(\mathfrak{g}) \subseteq K(\mathfrak{g})$ é puramente inseparável (Teorema 3.3.4), temos que $[K(\mathfrak{g}) : K_p(\mathfrak{g})(z_1,\ldots,z_{d-2})]$ é uma potência de p. Comparando temos que $m = 1$ e $[K(\mathfrak{g}) : K_p(\mathfrak{g})(z_1,\ldots,z_{d-2})] = 1$. Consequentemente, $K(\mathfrak{g}) = K_p(\mathfrak{g})(z_1,\ldots,z_{d-2})$. $\square$

Capítulo 4

O centro $Z(\mathfrak{g})$ para $\mathfrak{g}$ nilpotente de dimensão menor ou igual a 5

Neste capítulo, nós verificaremos as afirmações do Teorema A para as álgebras de Lie nilpotentes de dimensão menor ou igual a 5.

Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é dita indecomponível, se não pode ser escrita como uma soma direta de quaisquer de suas subálgebras não triviais de Lie, isto é, se $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$, então $\mathfrak{h}_1 = 0$ ou $\mathfrak{h}_2 = 0$.

Seja $\{x_1, \ldots, x_n\}$ uma base para a álgebra de Lie de dimensaõ finita $\mathfrak{g}$ sobre um corpo $\mathbb{F}$. Escrevemos o colchete $[x_i, x_j]$ apenas para $i < j$ e somente se esse colchete for não nulo (os produtos $[x_i, x_j]$ que são iguais a zero são omitidos). A Tabela 4.1 apresenta todas as álgebras de Lie nilpotentes indecomponíveis de dimensão menor ou igual a 5 sobre um corpo $\mathbb{F}$ qualquer.

Tabela 4.1: álgebras de Lie nilpotentes indecomponíveis de dimensão ≤ 5

$\mathfrak{g}$	Comutadores	cl($\mathfrak{g}$)
$\mathfrak{g}_3$	$[x_1, x_2] = x_3$	2
$\mathfrak{g}_4$	$[x_1, x_2] = x_3$, $[x_1, x_3] = x_4$	3
$\mathfrak{g}_{5,1}$	$[x_1, x_2] = x_5$, $[x_3, x_4] = x_5$	2
$\mathfrak{g}_{5,2}$	$[x_1, x_2] = x_4$, $[x_1, x_3] = x_5$	2
$\mathfrak{g}_{5,3}$	$[x_1, x_2] = x_4$, $[x_1, x_4] = x_5$, $[x_2, x_3] = x_5$	3
$\mathfrak{g}_{5,4}$	$[x_1, x_2] = x_3$, $[x_1, x_3] = x_4$, $[x_2, x_3] = x_5$	3
$\mathfrak{g}_{5,5}$	$[x_1, x_2] = x_3$, $[x_1, x_3] = x_4$, $[x_1, x_4] = x_5$	4
$\mathfrak{g}_{5,6}$	$[x_1, x_2] = x_3$, $[x_1, x_3] = x_4$, $[x_1, x_4] = x_5$, $[x_2, x_3] = x_5$	4

Fim da tabela

Seja $\mathfrak{g}_1$ a única álgebra de Lie de dimensão 1 sobre um corpo $\mathbb{F}$. O teorema seguinte mostra que a álgebra $\mathfrak{g}_1$ juntamente com as álgebras da Tabela 4.1 são as únicas álgebras de Lie nilpotentes indecomponíveis de dimensão até 5 (a menos de isomorfismo) sobre um corpo qualquer, assim elas determinam todas as álgebras de Lie nilpotentes de dimensão menor ou igual a 5:

Teorema 4.0.1 ([10], Proposição 1)**.** *Todas as álgebras de Lie nilpotentes de dimensão* ≤ 5 *sobre um corpo qualquer* $\mathbb{F}$ *são isomorfas a uma das seguintes álgebras de Lie:*

Dimensão 1 : $\mathfrak{g}_1$

Dimensão 2 : $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1$

Dimensão 3 : $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1,\ \mathfrak{g}_3$

Dimensão 4 : $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1,\ \mathfrak{g}_3 \oplus \mathfrak{g}_1,\ \mathfrak{g}_4$

Dimensão 5 : $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_1,\ \mathfrak{g}_3 \oplus \mathfrak{g}_2,\ \mathfrak{g}_4 \oplus \mathfrak{g}_1,\ \mathfrak{g}_{5,1},\ \mathfrak{g}_{5,2},\ \mathfrak{g}_{5,3},\ \mathfrak{g}_{5,4},\ \mathfrak{g}_{5,5},\ \mathfrak{g}_{5,6}.$

(As álgebras nessa lista são não isomorfas).

Sejam $\mathfrak{h}_1, \ldots, \mathfrak{h}_k$ álgebras de Lie e $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{h}_k$ sua soma direta. Por [13, Corolário 2.2.12], existe um isomorfismo de álgebras $U(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{h}_1) \otimes \cdots \otimes U(\mathfrak{h}_k)$. Portanto, $Z(\mathfrak{g}) \cong Z(\mathfrak{h}_1) \otimes \cdots \otimes Z(\mathfrak{h}_k)$.

Pelo parágrafo anterior, nosso foco é descrever o centro $Z(\mathfrak{g})$ de $U(\mathfrak{g})$ para álgebras indecomponíveis.

Para calcular o centro das álgebras envolventes universais das álgebras de Lie é suficiente calcular o centro das álgebras indecomponíveis. Em [10, Proposição 2], J. Dixmier determina explicitamente o centro das álgebras envolventes universais de álgebras de Lie nilpotentes indecomponíveis de dimensão menor ou igual a 5 em característica zero:

$$
\begin{aligned}
Z(\mathfrak{g}_3) &= \mathbb{F}[x_3], \\
Z(\mathfrak{g}_4) &= \mathbb{F}[x_4, x_3^2 - 2x_2x_4], \\
Z(\mathfrak{g}_{5,1}) &= \mathbb{F}[x_5], \\
Z(\mathfrak{g}_{5,2}) &= \mathbb{F}[x_5, x_4, x_2x_5 - x_3x_4], \\
Z(\mathfrak{g}_{5,3}) &= \mathbb{F}[x_5], \\
Z(\mathfrak{g}_{5,4}) &= \mathbb{F}[x_5, x_4, x_3^2 + 2x_1x_5 - 2x_2x_4], \\
Z(\mathfrak{g}_{5,5}) &= \mathbb{F}[x_5, 2x_3x_5 - x_4^2, 3x_2x_5^2 - 3x_3x_4x_5 + x_4^3, \\
&\qquad 9x_2^2x_5^2 - 18x_2x_3x_4x_5 + 6x_2x_4^3 + 8x_3^3x_5 - 3x_3^2x_4^2], \\
Z(\mathfrak{g}_{5,6}) &= \mathbb{F}[x_5].
\end{aligned}
$$

Assim, os centros $Z(\mathfrak{g}_3), Z(\mathfrak{g}_{5,1}), Z(\mathfrak{g}_{5,3})$ e $Z(\mathfrak{g}_{5,6})$ são isomorfos à álgebra de polinômios em uma variável sobre $\mathbb{F}$; o centro $Z(\mathfrak{g}_4)$ é isomorfo à álgebra de polinômios em duas variáveis sobre $\mathbb{F}$ e os centros $Z(\mathfrak{g}_{5,2})$ e $Z(\mathfrak{g}_{5,4})$ são isomorfos à álgebra de polinômios em três variáveis sobre $\mathbb{F}$.

O centro $Z(\mathfrak{g}_{5,5}) = \mathbb{F}[x_5, z_1, z_2, z_3]$, onde

$$\begin{aligned}
z_1 &= 2x_3x_5 - x_4^2, \\
z_2 &= 3x_2x_5^2 - 3x_3x_4x_5 + x_4^3, \\
z_3 &= 9x_2^2x_5^2 - 18x_2x_3x_4x_5 + 6x_2x_4^3 + 8x_3^3x_5 - 3x_3^2x_4^2,
\end{aligned}$$

não é uma álgebra de polinômios, pois é válida a relação $z_1^3 + z_2^2 - x_5^2z_3 = 0$.

Nosso objetivo neste capítulo é determinar o centro $Z(\mathfrak{g})$ para todas as álgebras de Lie nilpotentes indecomponíveis de dimensão menor ou igual a 5 em característica prima p.

4.1 Caso 1: Centro igual ao p-Centro

Seja $\mathbb{F}$ um corpo de característica prima p e $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita sobre $\mathbb{F}$. Não é sempre verdade que o centro $Z(\mathfrak{g})$ e o p-centro $Z_p(\mathfrak{g})$ da álgebra envolvente universal $U(\mathfrak{g})$ coincidem. Mas, as álgebras $\mathfrak{g}_3$, $\mathfrak{g}_{5,1}$, $\mathfrak{g}_{5,3}$ e $\mathfrak{g}_{5,6}$ são exemplos onde esse evento acontece.

Teorema 4.1.1. *Seja $\mathfrak{g}$ uma das álgebras $\mathfrak{g}_3, \mathfrak{g}_{5,1}, \mathfrak{g}_{5,3}$ e $\mathfrak{g}_{5,6}$, sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica prima p. Assuma ainda, $p \geq 3$ se $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{5,3}$ e $p \geq 5$ se $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{5,6}$. Então $Z(\mathfrak{g}) = Z_p(\mathfrak{g})$. Em particular, supondo as condições sobre a característica de $\mathbb{F}$,*

$$\begin{aligned}
Z(\mathfrak{g}_3) &= \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3], \\
Z(\mathfrak{g}_{5,1}) &= \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5], \\
Z(\mathfrak{g}_{5,3}) &= \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5], \\
Z(\mathfrak{g}_{5,6}) &= \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5].
\end{aligned}$$

Demonstração. Relembramos que $D(\mathfrak{g})$ denota o anel de divisão de $U(\mathfrak{g})$, $K(\mathfrak{g})$ denota o corpo de frações de $Z(\mathfrak{g})$ e $K_p(\mathfrak{g})$ denota o corpo de frações de $Z_p(\mathfrak{g})$.

1. **Caso:** $\mathfrak{g}_3$

   Considere $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3$. Temos que $\mathrm{cl}(\mathfrak{g}) = 2$. Segue do Teorema 3.3.2 que $Z_p(\mathfrak{g}) = \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3]$ é o p-centro de $U(\mathfrak{g})$. Afirmamos que os corpos de frações de $Z(\mathfrak{g})$ e $Z_p(\mathfrak{g})$ coincidem, isto é, que $K(\mathfrak{g}) = K_p(\mathfrak{g})$. Com efeito, pelo Teorema 3.3.4 temos que as extensões de anéis $K_p(\mathfrak{g}) \subseteq D(\mathfrak{g})$ e $K(\mathfrak{g}) \subseteq D(\mathfrak{g})$ são de graus p^2 e p^{2m}, respectivamente, para algum inteiro $m \geq 1$. Portanto,

$$p^2 = [D(\mathfrak{g}) : K_p(\mathfrak{g})] = [D(\mathfrak{g}) : K(\mathfrak{g})][K(\mathfrak{g}) : K_p(\mathfrak{g})] = p^{2m}[K(\mathfrak{g}) : K_p(\mathfrak{g})].$$

Sendo assim, $m = 1$ e $[K(\mathfrak{g}) : K_p(\mathfrak{g})] = 1$. Isto é, $K(\mathfrak{g}) = K_p(\mathfrak{g})$. Assim, pelo Corolário 3.3.3(3) concluimos que $Z(\mathfrak{g}) = Z_p(\mathfrak{g})$.

2. **Caso:** $\mathfrak{g}_{5,1}, \mathfrak{g}_{5,3}$ **e** $\mathfrak{g}_{5,6}$

   Seja $\mathfrak{g}$ uma das álgebras $\mathfrak{g}_{5,1}, \mathfrak{g}_{5,3}$ e $\mathfrak{g}_{5,6}$. Como $\mathrm{cl}(\mathfrak{g}_{5,1}) = 2$, $\mathrm{cl}(\mathfrak{g}_{5,3}) = 3$ e $\mathrm{cl}(\mathfrak{g}_{5,6}) = 4$, supondo as condições sobre a característica de $\mathbb{F}$, temos pelo Teorema 3.3.2 que $Z_p(\mathfrak{g}) = \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5]$.

   Afirmamos que $K(\mathfrak{g}) = K_p(\mathfrak{g})$. De fato, pelo Teorema 3.3.4 vemos que as extensões de anéis $K_p(\mathfrak{g}) \subseteq D(\mathfrak{g})$ e $K(\mathfrak{g}) \subseteq D(\mathfrak{g})$ são de graus p^4 e p^{2m}, respectivamente, para algum inteiro $m \geq 1$. Portanto,

   $$p^4 = [D(\mathfrak{g}) : K_p(\mathfrak{g})] = [D(\mathfrak{g}) : K(\mathfrak{g})][K(\mathfrak{g}) : K_p(\mathfrak{g})] = p^{2m}[K(\mathfrak{g}) : K_p(\mathfrak{g})].$$

   Temos as possibilidades: $m = 1$ e $[D(\mathfrak{g}) : K(\mathfrak{g})] = [K(\mathfrak{g}) : K_p(\mathfrak{g})] = p^2$ ou $m = 2$ e $K(\mathfrak{g}) = K_p(\mathfrak{g})$. Observe que a primeira possibilidade não ocorre, pois em cada caso, a álgebra $\mathfrak{g}$ satisfaz as condições do Lema 3.3.5. Com efeito, se $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{5,1}$, então $x_1, x_3 \in \mathfrak{g}$ são linearmente independentes, $x_1, x_3 \notin C(\mathfrak{g})$, $[x_1, x_3] = 0$ e também $x_3 \notin K(\mathfrak{g})(x_1)$, pois $x_4 \in C_{D(\mathfrak{g})}\big(K(\mathfrak{g})(x_1)\big)$ (centralizador de $K(\mathfrak{g})(x_1)$ em $D(\mathfrak{g})$), mas $[x_3, x_4] = x_5$. Também, se $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{5,3}$ ou $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{5,6}$, então $x_3, x_4 \in \mathfrak{g}$ são linearmente independentes, $x_3, x_4 \notin C(\mathfrak{g})$, $[x_3, x_4] = 0$ e $x_3 \notin K(\mathfrak{g})(x_4)$, pois $x_2 \in C_{D(\mathfrak{g})}\big(K(\mathfrak{g})(x_4)\big)$, mas $[x_2, x_3] = x_5$. Em todo caso, pelo Lema 3.3.5 temos que $\dim_{K(\mathfrak{g})} D(\mathfrak{g}) > p^2$. Consequentemente, $m = 2$ e $K(\mathfrak{g}) = K_p(\mathfrak{g})$. Nessa situação o Corolário 3.3.3(3) garante que $Z(\mathfrak{g}) = Z_p(\mathfrak{g})$.

Segue que em todo caso $Z(\mathfrak{g}) = Z_p(\mathfrak{g})$ e o teorema é demonstrado. □

4.2 Caso 2: Centro é uma extensão própria do p-Centro

Mostraremos agora que as álgebras $\mathfrak{g}_4, \mathfrak{g}_{5,2}$ e $\mathfrak{g}_{5,4}$ (ver Tabela 4.1) são exemplos onde o centro $Z(\mathfrak{g})$ é uma extensão própria do p-centro $Z_p(\mathfrak{g})$.

Teorema 4.2.1. *Seja $\mathfrak{g}$ uma das álgebras $\mathfrak{g}_4, \mathfrak{g}_{5,2}$ e $\mathfrak{g}_{5,4}$, sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica prima p. Assuma ainda, $p \geq 3$ se $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_4$ ou $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{5,4}$. Então $Z(\mathfrak{g})$ é uma extensão própria de $Z_p(\mathfrak{g})$. Mais precisamente,*

$$\begin{aligned} Z(\mathfrak{g}_4) &= \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4, x_3^2 - 2x_2x_4], \\ Z(\mathfrak{g}_{5,2}) &= \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4, x_5, x_2x_5 - x_3x_4], \\ Z(\mathfrak{g}_{5,4}) &= \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4, x_5, x_3^2 + 2x_1x_5 - 2x_2x_4]. \end{aligned}$$

Demonstração. Seja $\mathfrak{g}$ uma das álgebras $\mathfrak{g}_4, \mathfrak{g}_{5,2}, \mathfrak{g}_{5,4}$ e suponhamos as condições sobre a característica de $\mathbb{F}$. Porque $\mathrm{cl}(\mathfrak{g}_4) = 3, \mathrm{cl}(\mathfrak{g}_{5,2}) = 2$ e $\mathrm{cl}(\mathfrak{g}_{5,4}) = 3$ o Teorema 3.3.2 afirma que para $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_4$ temos $Z_p(\mathfrak{g}) = \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4]$ e para $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{5,2}$ ou $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{5,4}$ obtemos $Z_p(\mathfrak{g}) = \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4, x_5]$. Considere o seguinte elemento $z \in U(\mathfrak{g})$:

$$\begin{array}{lll} z = x_3^2 - 2x_2x_4 & \text{se} & \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_4, \\ z = x_2x_5 - x_3x_4 & \text{se} & \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{5,2}, \\ z = 2x_1x_5 - 2x_2x_4 + x_3^2 & \text{se} & \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{5,4}. \end{array}$$

Afirmamos que $z \in Z(\mathfrak{g})$. Vejamos isso em cada caso.

Seja $z = x_3^2 - 2x_2x_4 \in U(\mathfrak{g}_4)$. Como $x_2, x_3, x_4 \in C_{U(\mathfrak{g}_4)}(z)$, para ver que z é central basta verificar que $\text{ad}_{x_1}(z) = 0$. De fato, como ad_{x_1} é uma derivação temos que

$$\begin{aligned} \text{ad}_{x_1}(z) &= \text{ad}_{x_1}(x_3^2 - 2x_2x_4) = \text{ad}_{x_1}(x_3^2) - 2\text{ad}_{x_1}(x_2x_4) \\ &= [x_1, x_3]x_3 + x_3[x_1, x_3] - 2\big([x_1, x_2]x_4 + x_2[x_1, x_4]\big) \\ &= x_4x_3 + x_3x_4 - 2(x_3x_4) \\ &= 2x_3x_4 - 2x_3x_4 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Seja $z = x_2x_5 - x_3x_4 \in U(\mathfrak{g}_{5,2})$. Temos que $x_2, x_3, x_4, x_5 \in C_{U(\mathfrak{g}_{5,2})}(z)$. Assim z é central se $\text{ad}_{x_1}(z) = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \text{ad}_{x_1}(z) &= \text{ad}_{x_1}(x_2x_5 - x_3x_4) = \text{ad}_{x_1}(x_2x_5) - \text{ad}_{x_1}(x_3x_4) \\ &= [x_1, x_2]x_5 + x_2[x_1, x_5] - \big([x_1, x_3]x_4 + x_3[x_1, x_4]\big) \\ &= x_4x_5 - (x_5x_4) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Agora seja $z = 2x_1x_5 - 2x_2x_4 + x_3^2 \in U(\mathfrak{g}_{5,4})$. Então $x_4, x_5 \in C_{U(\mathfrak{g}_{5,4})}(z)$. Segue que z é central se $\text{ad}_{x_1}(z) = \text{ad}_{x_2}(z) = \text{ad}_{x_3}(z) = 0$. Temos que

$$\begin{aligned} \text{ad}_{x_1}(z) &= \text{ad}_{x_1}(2x_1x_5 - 2x_2x_4 + x_3^2) \\ &= 2\text{ad}_{x_1}(x_1x_5) - 2\text{ad}_{x_1}(x_2x_4) + \text{ad}_{x_1}(x_3^2) \\ &= 2\big([x_1, x_1]x_5 + x_1[x_1, x_5] - [x_1, x_2]x_4 - x_2[x_1, x_4]\big) \\ &+ [x_1, x_3]x_3 + x_3[x_1, x_3] \\ &= 2\big(-x_3x_4\big) + x_4x_3 + x_3x_4 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_{x_2}(z) &= \mathrm{ad}_{x_2}(2x_1x_5 - 2x_2x_4 + x_3^2)\\
&= 2\mathrm{ad}_{x_2}(x_1x_5) - 2\mathrm{ad}_{x_2}(x_2x_4) + \mathrm{ad}_{x_2}(x_3^2)\\
&= 2\big([x_2,x_1]x_5 + x_1[x_2,x_5] - [x_2,x_2]x_4 - x_2[x_2,x_4]\big)\\
&+ [x_2,x_3]x_3 + x_3[x_2,x_3]\\
&= 2\big(-x_3x_5\big) + x_5x_3 + x_3x_5\\
&= 0.
\end{aligned}$$

E,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_{x_3}(z) &= \mathrm{ad}_{x_3}(2x_1x_5 - 2x_2x_4 + x_3^2)\\
&= 2\mathrm{ad}_{x_3}(x_1x_5) - 2\mathrm{ad}_{x_3}(x_2x_4) + \mathrm{ad}_{x_3}(x_3^2)\\
&= 2\big([x_3,x_1]x_5 + x_1[x_3,x_5] - [x_3,x_2]x_4 - x_2[x_3,x_4]\big)\\
&+ [x_3,x_3]x_3 + x_3[x_3,x_3]\\
&= 2\big(-x_4x_5\big) - 2\big(-x_5x_4\big)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, em cada caso, $z \in Z(\mathfrak{g})$. Note que $z \in Z(\mathfrak{g}) \setminus Z_p(\mathfrak{g})$, mas $z^p \in Z_p(\mathfrak{g})$. Assim, z é integral sobre o anel integralmente fechado $Z_p(\mathfrak{g})$ (Corolário 3.3.3(1)), donde $z \notin K_p(\mathfrak{g})$, senão $z \in Z_p(\mathfrak{g})$. Seja $Z_p(\mathfrak{g})[t]$ anel de polinômios sobre $Z_p(\mathfrak{g})$ na variável t. Pelo Teorema 2.5.3, o polinômio $f = t^p - z^p$ é irredutível em $Z_p(\mathfrak{g})[t]$. O Corolário 2.5.5 assegura o isomorfismo $Z_p(\mathfrak{g})[t]/(f) \cong Z_p(\mathfrak{g})[z]$. Portanto, $Z_p(\mathfrak{g})[z]$ é isomorfo aos respectivos anéis integralmente fechados do Teorema 2.6.2:

$$\begin{aligned}
&Z_p(\mathfrak{g})[z] \cong \mathbb{F}[\mathbf{t}_5]/\big(t_5^p - t_3^2 + 2t_2t_4^p\big) && \text{se} && \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_4,\\
&Z_p(\mathfrak{g})[z] \cong \mathbb{F}[\mathbf{t}_6]/\big(t_6^p - t_2t_5^p + t_3t_4^p\big) && \text{se} && \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{5,2},\\
&Z_p(\mathfrak{g})[z] \cong \mathbb{F}[\mathbf{t}_6]/\big(t_6^p - 2t_1t_5^p + 2t_2t_4^p - t_3^2\big) && \text{se} && \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{5,4}.
\end{aligned}$$

Assim, $Z_p(\mathfrak{g})[z]$ é um anel integralmente fechado. Por fim, $Z_p(\mathfrak{g})[z] \subseteq Z(\mathfrak{g})$ é uma extensão integral de anéis (Corolário 3.3.3(2)) e se $K_p(z)$ é o corpo de frações de $Z_p(\mathfrak{g})[z]$, então pelo Teorema 3.3.6 temos que $K(\mathfrak{g}) = K_p(\mathfrak{g})(z)$. Sendo assim, $Z(\mathfrak{g}) = Z_p(\mathfrak{g})[z]$. □

Com o Teorema 4.2.1 completamos o cálculo de $Z(\mathfrak{g})$ para $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie nilpotente de dimensão menor ou igual a 5 sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica prima p, exceto no caso em que $\mathfrak{g}$ é a álgebra $\mathfrak{g}_{5,5}$. Concluímos que

$$\begin{aligned}
Z(\mathfrak{g}_3) &= \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3] \ (p \geq 2),\\
Z(\mathfrak{g}_4) &= \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4, x_3^2 - 2x_2x_4] \ (p \geq 3),\\
Z(\mathfrak{g}_{5,1}) &= \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5] \ (p \geq 2),\\
Z(\mathfrak{g}_{5,2}) &= \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4, x_5, x_2x_5 - x_3x_4] \ (p \geq 2),\\
Z(\mathfrak{g}_{5,3}) &= \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5] \ (p \geq 3),\\
Z(\mathfrak{g}_{5,4}) &= \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4, x_5, x_3^2 + 2x_1x_5 - 2x_2x_4] \ (p \geq 3),\\
Z(\mathfrak{g}_{5,6}) &= \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5] \ (p \geq 5).
\end{aligned}$$

As álgebras $Z(\mathfrak{g}_3)$, $Z(\mathfrak{g}_{5,1})$, $Z(\mathfrak{g}_{5,3})$ e $Z(\mathfrak{g}_{5,6})$ são álgebras de polinômios, e portanto, anéis Cohen-Macaulay (Teorema 2.3.7(1)(3)). As álgebras $Z(\mathfrak{g}_4)$, $Z(\mathfrak{g}_{5,2})$ e $Z(\mathfrak{g}_{5,4})$ são isomorfas aos respectivos anéis Cohen-Macaulay do Teorema 2.6.2:

$$\begin{aligned}
Z(\mathfrak{g}_4) &\cong \mathbb{F}[\mathbf{t}_5]/\big(t_5^p - t_3^2 + 2t_2t_4^p\big),\\
Z(\mathfrak{g}_{5,2}) &\cong \mathbb{F}[\mathbf{t}_6]/\big(t_6^p - t_2t_5^p + t_3t_4^p\big),\\
Z(\mathfrak{g}_{5,4}) &\cong \mathbb{F}[\mathbf{t}_6]/\big(t_6^p - 2t_1t_5^p + 2t_2t_4^p - t_3^2\big).
\end{aligned}$$

4.2.1 O centro $Z(\mathfrak{g}_{5,5})$

Sobre um corpo $\mathbb{F}$ a álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{5,5}$ é definida pelos colchetes $[x_1, x_i] = x_{i+1},\ 2 \leq i \leq 4$. Isto é, $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie standard filiform de dimensão 5. Note que $\mathrm{cl}(\mathfrak{g}) = 4$. Assumindo que $\mathbb{F}$ é um corpo de característica prima $p \geq 5$, o Teorema 3.3.2 afirma que $Z_p(\mathfrak{g}) = \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5]$ é o p-centro de $U(\mathfrak{g})$. Considere os elementos em $U(\mathfrak{g})$

$$\begin{aligned}
z_1 &= 2x_3x_5 - x_4^2,\\
z_2 &= 3x_2x_5^2 - 3x_3x_4x_5 + x_4^3.
\end{aligned}$$

Teorema 4.2.2. *Seja $\mathbb{F}$ um corpo de característica prima $p \geq 5$. Ponha $R = Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$. Então, o fecho integral de R em Frac(R) coincide com o fecho integral de R na localização R_{x_5}. Além disso, este fecho integral é igual a $Z(\mathfrak{g})$.*

No resto dessa seção nós provaremos o Teorema 4.2.2. Ele descreve o centro $Z(\mathfrak{g})$ como o fecho integral de $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$ no seu corpo de frações. Primeiro vamos mostrar que $z_1, z_2 \in Z(\mathfrak{g})$. De fato, uma vez que temos $x_2, x_3, x_4, x_5 \in C_{U(\mathfrak{g})}(z_i),\ i = 1, 2$, para ver que z_1 e z_2 são centrais, precisamos apenas verificar que $\mathrm{ad}_{x_1}(z_1) = \mathrm{ad}_{x_1}(z_2) = 0$. Usando que

ad_{x_1} é uma derivação de $U(\mathfrak{g})$ vemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_{x_1}(z_1) &= \mathrm{ad}_{x_1}\big(2x_3x_5 - x_4^2\big) = 2\mathrm{ad}_{x_1}(x_3x_5) - \mathrm{ad}_{x_1}(x_4^2)\\
&= 2\big([x_1,x_3]x_5 + x_3[x_1,x_5]\big) - [x_1,x_4]x_4 - x_4[x_1,x_4]\\
&= 2x_4x_5 - 2x_4x_5\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_{x_1}(z_2) &= \mathrm{ad}_{x_1}\big(3x_2x_5^2 - 3x_3x_4x_5 + x_4^3\big)\\
&= 3\mathrm{ad}_{x_1}(x_2x_5^2) - 3\mathrm{ad}_{x_1}\big(x_3x_4x_5\big) + \mathrm{ad}_{x_1}\big(x_4^3\big)\\
&= 3\big([x_1,x_2]x_5^2 + x_2[x_1,x_5^2]\big) - 3\big([x_1,x_3]x_4x_5 + x_3[x_1,x_4]x_5 + x_3x_4[x_1,x_5]\big)\\
&+ [x_1,x_4]x_4^2 + x_4[x_1,x_4]x_4 + x_4^2[x_1,x_4]\\
&= 3x_3x_5^2 - 3\big(x_4^2x_5 + x_3x_5^2\big) + x_5x_4^2 + x_4x_5x_4 + x_4^2x_5\\
&= 3x_3x_5^2 - 3x_4^2x_5 - 3x_3x_5^2 + 3x_4^2x_5\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Com isso, concluímos que $z_1, z_2 \in Z(\mathfrak{g})$. Como consequência (Corolário 3.3.3(2)) temos que $Z_p(\mathfrak{g})[z_1,z_2] \subseteq Z(\mathfrak{g})$ é uma extensão integral de anéis.

Proposição 4.2.3. *Os corpos de frações de $Z_p(\mathfrak{g})[z_1,z_2]$ e $Z(\mathfrak{g})$ são iguais. Além disso, $Z(\mathfrak{g})$ é o fecho integral de $Z_p(\mathfrak{g})[z_1,z_2]$ no seu corpo de frações $K_p(\mathfrak{g})(z_1,z_2)$.*

Demonstração. O primeiro passo da demonstração é mostrar que temos a inclusão estrita $K_p(\mathfrak{g})(z_1) \subset K_p(\mathfrak{g})(z_1,z_2)$, onde $K_p(\mathfrak{g})(z_1)$ e $K_p(\mathfrak{g})(z_1,z_2)$ são os respectivos corpos de frações de $Z_p(\mathfrak{g})[z_1]$ e $Z_p(\mathfrak{g})[z_1,z_2]$. De fato, veja que

$$\begin{aligned}
&z_1 \in Z_p(\mathfrak{g})[x_3,x_4],\\
&z_2 \in Z_p(\mathfrak{g})[x_2,x_3,x_4] \text{ e } z_2 \notin Z_p(\mathfrak{g})[x_3,x_4].
\end{aligned}$$

Com isso, $Z_p(\mathfrak{g})[z_1] \subset Z_p(\mathfrak{g})[z_1,z_2]$ estritamente. Logo, $K_p(\mathfrak{g})(z_1) \subset K_p(\mathfrak{g})(z_1,z_2)$. Segue do Teorema 3.3.6 que $K(\mathfrak{g}) = K_p(\mathfrak{g})(z_1,z_2)$.

Para a segunda parte da proposição, seja S o fecho integral de $Z_p(\mathfrak{g})[z_1,z_2]$ em $K_p(\mathfrak{g})(z_1,z_2)$. Por um lado, dado $y \in S$, então y também é integral sobre $Z(\mathfrak{g})$ e $y \in K(\mathfrak{g})$. Conhecemos do Teorema 3.1.3 que $Z(\mathfrak{g})$ integralmente fechado, desse modo, $y \in Z(\mathfrak{g})$ e $S \subseteq Z(\mathfrak{g})$. Por outro lado, dado $x \in Z(\mathfrak{g})$, segue que x é integral sobre $Z_p(\mathfrak{g})[z_1,z_2]$ e como $Z(\mathfrak{g}) \subseteq K(\mathfrak{g}) = K_p(\mathfrak{g})(z_1,z_2)$ temos também que $x \in K_p(\mathfrak{g})(z_1,z_2)$. Logo, $x \in S$ e vale que $Z(\mathfrak{g}) \subseteq S$. □

Conclue-se da Proposição 4.2.3 que os elementos de $K(\mathfrak{g})$ são expressões polinomiais em z_1 e z_2 com coeficientes em $K_p(\mathfrak{g})$. Claramente $Z(\mathfrak{g}) \subset K(\mathfrak{g})$, e assim, os elementos de $Z(\mathfrak{g})$ são polinomômios em $K_p(\mathfrak{g})[z_1,z_2]$. Ainda, a Proposição 4.2.3 apresenta uma melhor descrição de $Z(\mathfrak{g})$ como o fecho integral de $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$ no seu corpo de frações $K_p(\mathfrak{g})(z_1, z_2)$.

Considere $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]_{x_5}$ a localização pelo conjunto multiplicativo gerado por x_5. Com o Lema 2.2.1 temos a igualdade $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]_{x_5} = Z_p(\mathfrak{g})_{x_5}[z_1, z_2]$. Vamos mostar que $Z_p(\mathfrak{g})_{x_5}[z_1, z_2]$ é integralmente fechado. Considere os polinômios $f_1 = t_1^p - z_1^p$ e $f_2 = t_2^p - z_2^p$ em $Z_p(\mathfrak{g})[t_1]$ e $Z_p(\mathfrak{g})[z_1][t_2]$, respectivamente.

Proposição 4.2.4. *As seguintes afirmações são verdadeiras.*

1. *Os polinômios f_1 e f_2 são elementos primos de $Z_p(\mathfrak{g})[t_1]$ e $Z_p(\mathfrak{g})[z_1][t_2]$.*
2. *O anel $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$ é um CM anel com $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2] \cong Z_p(\mathfrak{g})[t_1, t_2]/(f_1, f_2)$.*
3. *A localização $Z_p(\mathfrak{g})_{x_5}[z_1, z_2]$ é um domínio integralmente fechado. Em particular, $Z(\mathfrak{g})_{x_5} = Z_p(\mathfrak{g})_{x_5}[z_1, z_2]$.*

Demonstração. Para 1, denotamos $A_1 = Z_p(\mathfrak{g})$, $A_2 = Z_p(\mathfrak{g})[z_1]$ e $A_3 = Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$. Então, $z_1 \notin \text{Frac}(A_1) = K_p(\mathfrak{g})$. Isso implica que $z_1^p \notin \Big(K_p(\mathfrak{g})\Big)^p$, pois se $z_1^p = u^p$ com $u \in K_p(\mathfrak{g})$, então $(z_1 - u)^p = 0$ donde $z_1 = u \in K_p(\mathfrak{g})$, que não ocorre. Então, pelo Lema 2.5.1, f_1 é irredutível em $K_p(\mathfrak{g})[t_1]$. O Lema 2.5.2 garante que f_1 é um elemento primo de $Z_p(\mathfrak{g})[t_1]$. Similarmente, porque $z_2 \notin \text{Frac}(A_2) = K_p(\mathfrak{g})(z_1)$ temos que $z_2^p \notin \Big(K_p(\mathfrak{g})(z_1)\Big)^p$. Pelo Lema 2.5.1 temos que f_2 é irredutível em $K_p(\mathfrak{g})(z_1)[t_2]$ e pelo Lema 2.5.2 segue que f_2 é um elemento primo de $Z_p(\mathfrak{g})[z_1][t_2]$.

Para 2, primeiramente pela parte 1 e o Corolário 2.5.5 obtemos o isomorfismo de anéis $Z_p(\mathfrak{g})[t_1]/(f_1) \cong Z_p(\mathfrak{g})[z_1]$. Também, a parte 1 e o Lema 2.5.4 nos garante o isomorfismo de anéis $Z_p(\mathfrak{g})[z_1][t_2]/(f_2) \cong Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$. Daí,

$$\frac{Z_p(\mathfrak{g})[t_1, t_2]}{(f_1, f_2)} \cong \frac{Z_p(\mathfrak{g})[z_1][t_2]}{(f_2)} \cong Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2].$$

Ademais, f_1, f_2 é uma sequência regular em $Z_p(\mathfrak{g})[t_1, t_2]$. Pelo Teorema 2.3.4 temos que $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$ é um CM anel.

Para 3, observe que $\Big(Z_p(\mathfrak{g})[t_1, t_2]/(f_1, f_2)\Big)_{x_5}$ é isomorfo ao anel do Teorema 2.6.3. Pela parte 2 temos que $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2] \cong Z_p(\mathfrak{g})[t_1, t_2]/(f_1, f_2)$ e assim $Z_p(\mathfrak{g})_{x_5}[z_1, z_2] \cong \Big(Z_p(\mathfrak{g})[t_1, t_2]/(f_1, f_2)\Big)_{x_5}$. O anel do Teorema 2.6.3 é um CM anel que satisfaz a condição de Serre (R_k) com $k \geq 0$. Além disso, como $Z_p(\mathfrak{g})_{x_5}[z_1, z_2]$ é um domínio, segue pelo Teorema 2.4.5(3) que $Z_p(\mathfrak{g})_{x_5}[z_1, z_2]$ é um domínio integralmente fechado.

Para a segunda afirmação da parte 3, considere a localização $Z(\mathfrak{g})_{x_5}$. Pelo Teorema 2.4.2, $Z(\mathfrak{g})_{x_5}$ também é integralmente fechado. Observamos que $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]_{x_5} \subseteq Z(\mathfrak{g})_{x_5}$ é uma extensão integral de anéis, pois $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2] \subseteq Z(\mathfrak{g})$ é uma extensão integral, e que pela Proposição 4.2.3 os corpos de frações de $Z(\mathfrak{g})_{x_5}$ e $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]_{x_5}$ coincidem. Já que $Z_p(\mathfrak{g})_{x_5}[z_1, z_2]$ é integralmente fechado, recebemos que $Z(\mathfrak{g})_{x_5} = Z_p(\mathfrak{g})_{x_5}[z_1, z_2]$. □

Com tudo que apresentamos até aqui e o próximo corolário chegamos a prova do Teorema 4.2.2.

Corolário 4.2.5. *O fecho integral de $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$ em $K_p(\mathfrak{g})$ coincide com seu fecho integral em $Z_p(\mathfrak{g})_{x_5}[z_1, z_2]$. Além disso, este fecho integral é igual a $Z(\mathfrak{g})$.*

Demonstração. Seja S o fecho integral de $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$ na localização $Z_p(\mathfrak{g})_{x_5}[z_1, z_2]$. Por um lado, como $Z_p(\mathfrak{g})_{x_5}[z_1, z_2]$ é um subanel de $K_p(\mathfrak{g})(z_1, z_2)$, segue da Proposição 4.2.3 que $S \subseteq Z(\mathfrak{g})$. Por outro lado, sabemos que $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2] \subset Z(\mathfrak{g})$ é uma extensão integral e conhecemos da Proposição 4.2.4(3) que $Z(\mathfrak{g})_{x_5} = Z_p(\mathfrak{g})_{x_5}[z_1, z_2]$. Dado que $Z(\mathfrak{g}) \subseteq Z(\mathfrak{g})_{x_5}$, concluímos que $Z(\mathfrak{g}) \subseteq S$. Logo, $Z(\mathfrak{g})$ é o fecho integral de $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$ em $Z_p(\mathfrak{g})_{x_5}[z_1, z_2]$. Já mostramos na Proposição 4.2.3 que o fecho integral de $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$ em $K_p(\mathfrak{g})(z_1, z_2)$ é igual ao centro $Z(\mathfrak{g})$. □

Observação 4.2.6. Vimos que o centro $Z(\mathfrak{g})$ e o domínio $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$ possuem o mesmo corpo de frações. Além disso, $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2] \subseteq Z(\mathfrak{g})$ é uma extensão integral. Assim, se $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$ fosse integralmente fechado teríamos que $Z(\mathfrak{g}) = Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$, mas isso não ocorre, pois $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$ não é integralmente fechado. Primeiro, pela Proposição 4.2.4(2) temos que $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2] \cong \mathbb{F}[\mathbf{t}_7]/(f_1, f_2)$, onde $\mathbb{F}[\mathbf{t}_7]/(f_1, f_2)$ é o quociente do Teorema 2.6.3. Considere o elemento

$$z_3 = \frac{z_1^3 + z_2^2}{x_5^2} = 9x_2^2x_5^2 - 18x_2x_3x_4x_5 + 6x_2x_4^3 + 8x_3^3x_5 - 3x_3^2x_4^2 \in K_p(\mathfrak{g})(z_1, z_2).$$

Dessa forma, $z_3^p \in Z_p(\mathfrak{g})$ e z_3 é integral sobre $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$.

Afirmamos que $z_3 \notin Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$. De fato, seja $\mathfrak{h}$ a álgebra de Lie nilpotente de dimensão 7 sobre $\mathbb{F}$ definida pelos comutadores $[x_1, x_i] = x_{i+1},\ 2 \leq i \leq 4,\ [x_2, x_6] = x_7$, onde $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$ é uma base de $\mathfrak{h}$. Então $\mathfrak{g}$ pode ser vista como a subálgebra de Lie de $\mathfrak{h}$ com base $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Note que $\mathrm{cl}(\mathfrak{h}) = \mathrm{cl}(\mathfrak{g}) = 4$. Como $p \geq 5$, vem do Teorema 3.3.2 que o p-centro de $U(\mathfrak{h})$ é dado por $Z_p(\mathfrak{h}) = \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_6^p, x_5, x_7]$. Note que $z_1 \in Z(\mathfrak{h})$, pois $x_6, x_7 \in C_{U(\mathfrak{h})}(z_1)$. Como $Z_p(\mathfrak{g}) \subseteq Z_p(\mathfrak{h})$ segue que $Z_p(\mathfrak{g})[z_1] \subseteq Z(\mathfrak{h})$. Veja que

$$\mathrm{ad}_{x_6}(z_2) = \mathrm{ad}_{x_6}(3x_2x_5^2 - 3x_3x_4x_5 + x_4^3) = \mathrm{ad}_{x_6}(3x_2x_5^2) = 3x_5^2x_7 \in Z(\mathfrak{h}).$$

Logo, $z_2 \notin Z(\mathfrak{h})$, mas $\mathrm{ad}_{x_6}\Big(Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]\Big) \subseteq Z(\mathfrak{h})$. Agora,

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_{x_6}(z_3) = \mathrm{ad}_{x_6}(9x_2^2x_5^2 - 18x_2x_3x_4x_5 + 6x_2x_4^3) &= 18x_2x_5^2x_7 - 18x_3x_4x_5 + 6x_4^3x_7 \\ &= 6x_7z_2 \notin Z(\mathfrak{h}).\end{aligned}$$

Assim, $z_3 \notin Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$. Sendo assim, $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$ não é integralmente fechado.

Com o exposto no Teorema 4.2.2, concluímos que $Z(\mathfrak{g})$ é gerado sobre $Z_p(\mathfrak{g})$ por expressões da forma $f(z_1, z_2)/x_5^n$, onde $f(z_1, z_2) \in Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$ e $n \geq 0$ inteiro. Essa é a melhor descrição que conseguimos obter para $Z(\mathfrak{g})$. Veja em [10, Proposição 2] que considerando $\mathbb{F}$ um corpo de característica zero, precisamos apenas de uma destas expressões, pois nessa característica o centro é dado por $\mathbb{F}[x_5, z_1, z_2, z_3]$. Observe que nesse caso o centro não é um anel de polinômios, pois $z_1^3 + z_2^2 - x_5^2 z_3 = 0$.

Utilizando o software Macaulay2, conseguimos calcular os geradores de $Z(\mathfrak{g})$ para $p = 5$. Calculamos também para $p = 7$, mas os geradores são complicados e parece difícil demais determinar os geradores para um p arbitrário. O conjunto gerador para $p = 5$ é o seguinte:

$$\Big\{x_1^5, x_2^5, x_3^5, x_4^5, x_5, z_1, z_2, z_3, \frac{z_1z_2 + x_4^5}{x_5^2}, \frac{z_1^4 - z_1z_2^2 - 2x_4^5 z_2}{x_5^4}, \frac{z_1^3 z_2 - x_4^5 z_1^2 + 2z_2^3}{x_5^4},$$
$$\frac{z_1^4 z_2 + 2x_4^5 z_1^3 - 2z_1 z_2^3 - x_4^5 z_2^2}{x_5^5}, \frac{2x_2^5 x_5^5 z_1^2 + x_3^5 z_1^3 z_2 - x_3^5 x_4^5 z_1^2 + 2x_3^5 z_2^3}{x_5^2 z_1 z_2 + x_4^5 x_5^2},$$
$$\frac{2x_2^5 x_5^4 z_1 z_2 - x_3^{10} x_5^4 - x_2^5 x_4^5 x_5^4}{z_1^4 - z_1 z_2^2 - 2x_4^5 z_2}\Big\}.$$

Observamos que os geradores de $Z(\mathfrak{g})$ dependem do primo p fixado. Por exemplo, para $p = 5$ o gerador $\frac{z_1z_2+x_4^5}{x_5^2}$ é dado pela expressão

$$\frac{z_1z_2 + x_4^5}{x_5^2} = 6x_2x_3x_5^3 - 6x_3^2x_4x_5^2 - 3x_2x_4^2x_5^2 + 5x_3x_4^3x_5 = 6x_2x_3x_5^3 - 6x_3^2x_4x_5^2 - 3x_2x_4^2x_5^2.$$

Com os Teoremas 4.1.1, 4.2.1 e 4.2.2, segue o Teorema A no caso de álgebras de Lie nilpotentes de dimensão menor ou igual a 5.

Capítulo 5

O centro $Z(\mathfrak{g})$ para $\mathfrak{g}$ nilpotente de dimensão 6

Neste capítulo, nós verificaremos as afirmações do Teorema A para as álgebras de Lie nilpotentes de dimensão igual a 6.

Em [8], S. Cicalò, W.A. de Graaf e C. Schneider apresentam uma classificação completa das álgebras de Lie nilpotentes de dimensão 6 sobre um corpo arbitrário. Seguindo a notação de [8], para $\mathbb{F}$ um corpo de característica diferente de 2 ($\mathbb{F}$ um corpo de característica 2 para a álgebra $\mathfrak{g}_{6,7}^{(2)}(\eta)$), a menos de isomorfismo, temos a seguinte listagem das álgebras de Lie nilpotentes indecomponíveis de dimensão 6:

Tabela 5.1: álgebras de Lie nilpotentes indecomponíveis de dimensão 6

$\mathfrak{g}$	Comutadores	cl($\mathfrak{g}$)
$\mathfrak{g}_{6,7}^{(2)}(\eta)$	$[x_1,x_2]=x_5$, $[x_1,x_3]=x_6$, $[x_2,x_4]=\eta x_6$, $[x_3,x_4]=x_5+x_6$ $(\eta\in\mathbb{F})$	2
$\mathfrak{g}_{6,10}$	$[x_1,x_2]=x_3$, $[x_1,x_3]=x_6$, $[x_4,x_5]=x_6$	3
$\mathfrak{g}_{6,11}$	$[x_1,x_2]=x_3$, $[x_1,x_3]=x_4$, $[x_1,x_4]=x_6$, $[x_2,x_3]=x_6$, $[x_2,x_5]=x_6$	4
$\mathfrak{g}_{6,12}$	$[x_1,x_2]=x_3$, $[x_1,x_3]=x_4$, $[x_1,x_4]=x_6$, $[x_2,x_5]=x_6$	4
$\mathfrak{g}_{6,13}$	$[x_1,x_2]=x_3$, $[x_1,x_3]=x_5$, $[x_1,x_5]=x_6$, $[x_2,x_4]=x_5$, $[x_3,x_4]=x_6$	4
$\mathfrak{g}_{6,14}$	$[x_1,x_2]=x_3$, $[x_1,x_3]=x_4$, $[x_1,x_4]=x_5$, $[x_2,x_3]=x_5$, $[x_2,x_5]=x_6$, $[x_3,x_4]=-x_6$	5
$\mathfrak{g}_{6,15}$	$[x_1,x_2]=x_3$, $[x_1,x_3]=x_4$, $[x_1,x_4]=x_5$, $[x_1,x_5]=x_6$, $[x_2,x_3]=x_5$, $[x_2,x_4]=x_6$	5

Continua na próxima página

Tabela 5.1 – *Continuação da tabela*

$\mathfrak{g}$	Comutadores	cl($\mathfrak{g}$)
$\mathfrak{g}_{6,16}$	$[x_1,x_2]=x_3$, $[x_1,x_3]=x_4$, $[x_1,x_4]=x_5$, $[x_2,x_5]=x_6$, $[x_3,x_4]=-x_6$	5
$\mathfrak{g}_{6,17}$	$[x_1,x_2]=x_3$, $[x_1,x_3]=x_4$, $[x_1,x_4]=x_5$, $[x_1,x_5]=x_6$, $[x_2,x_3]=x_6$	5
$\mathfrak{g}_{6,18}$	$[x_1,x_2]=x_3$, $[x_1,x_3]=x_4$, $[x_1,x_4]=x_5$, $[x_1,x_5]=x_6$	5
$\mathfrak{g}_{6,19}(\varepsilon)$	$[x_1,x_2]=x_4$, $[x_1,x_3]=x_5$, $[x_1,x_5]=x_6$, $[x_2,x_4]=x_6$, $[x_3,x_5]=\varepsilon x_6$ $(\varepsilon\in\mathbb{F}^*)$	3
$\mathfrak{g}_{6,20}$	$[x_1,x_2]=x_4$, $[x_1,x_3]=x_5$, $[x_1,x_5]=x_6$, $[x_2,x_4]=x_6$	3
$\mathfrak{g}_{6,21}(\varepsilon)$	$[x_1,x_2]=x_3$, $[x_1,x_3]=x_4$, $[x_1,x_4]=x_6$, $[x_2,x_3]=x_5$, $[x_2,x_5]=\varepsilon x_6$ $(\varepsilon\in\mathbb{F}^*)$	4
$\mathfrak{g}_{6,22}(\varepsilon)$	$[x_1,x_2]=x_5$, $[x_1,x_3]=x_6$, $[x_2,x_4]=\varepsilon x_6$, $[x_3,x_4]=x_5$ $(\varepsilon\in\mathbb{F})$	2
$\mathfrak{g}_{6,23}$	$[x_1,x_2]=x_3$, $[x_1,x_3]=x_5$, $[x_1,x_4]=x_6$, $[x_2,x_4]=x_5$	3
$\mathfrak{g}_{6,24}(\varepsilon)$	$[x_1,x_2]=x_3$, $[x_1,x_3]=x_5$, $[x_1,x_4]=\varepsilon x_6$, $[x_2,x_3]=x_6$, $[x_2,x_4]=x_5$ $(\varepsilon\in\mathbb{F})$	3
$\mathfrak{g}_{6,25}$	$[x_1,x_2]=x_3$, $[x_1,x_3]=x_5$, $[x_1,x_4]=x_6$	3
$\mathfrak{g}_{6,26}$	$[x_1,x_2]=x_4$, $[x_1,x_3]=x_5$, $[x_2,x_3]=x_6$	2
$\mathfrak{g}_{6,27}$	$[x_1,x_2]=x_3$, $[x_1,x_3]=x_5$, $[x_2,x_4]=x_6$	3
$\mathfrak{g}_{6,28}$	$[x_1,x_2]=x_3$, $[x_1,x_3]=x_4$, $[x_1,x_4]=x_5$, $[x_2,x_3]=x_6$	4

Fim da tabela

A família de álgebras $\mathfrak{g}_{6,7}^{(2)}(\eta)$ é definida sobre um corpo de característica 2 e depende de um parâmetro η. Nas famílias $\mathfrak{g}_{6,19}(\varepsilon)$, $\mathfrak{g}_{6,21}(\varepsilon)$, $\mathfrak{g}_{6,22}(\varepsilon)$ e $\mathfrak{g}_{6,24}(\varepsilon)$ as álgebras dependem de um parâmetro ε, as condições para isomorfismo entre duas álgebras na mesma família são determinadas em [8].

Para a lista completa das famílias das álgebras de Lie nilpotentes de dimensão 6 sobre um corpo $\mathbb{F}$, incluindo os demais casos quando $\mathbb{F}$ é um corpo de característica 2, veja [8, Teorema 3.1].

O cálculo do centro $Z(\mathfrak{g})$ das álgebras envolventes universais de álgebras de Lie nilpotentes de dimensão 6 sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero ($\mathbb{C}$) foi feito por Alfons Ooms em [28]. Em todo caso, ele concluiu que $Z(\mathfrak{g})$ é uma álgebra de polinômios exceto quando $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{6,18}$ e quando $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{6,25}$ (essas álgebras são denotadas em [28] por $\mathfrak{g}_{6,16}$ e $\mathfrak{g}_{6,6}$, respectivamente). Nesses casos mais complicados, Alfons Ooms concluiu que $Z(\mathfrak{g}_{6,18}) = \mathbb{F}[x_6, w_1, w_2, w_3, w_4]$, onde

$$\begin{aligned}
w_1 &= x_5^2 - 2x_4x_6,\\
w_2 &= x_5^3 - 3x_4x_5x_6 + 3x_3x_6^2,\\
w_3 &= x_4^2 + 2x_2x_6 - 2x_3x_5,\\
w_4 &= 2x_4^3 + 6x_2x_5^2 + 9x_3^2x_6 - 12x_2x_4x_6 - 6x_3x_4x_5.
\end{aligned}$$

A álgebra $Z(\mathfrak{g}_{6,18})$ não é uma álgebra de polinômios, pois temos a seguinte relação entre seus geradores: $w_1^3 - w_2^2 - 3x_6^2w_1w_3 + x_6^3w_4 = 0$.

Ele também concluiu que $Z(\mathfrak{g}_{6,25}) = \mathbb{F}[x_5, x_6, z_1, z_2, z_3]$, onde

$$\begin{aligned}
z_1 &= x_3^2 - 2x_2x_5,\\
z_2 &= x_3x_6 - x_4x_5,\\
z_3 &= 2x_3x_4x_6 - 2x_2x_6^2 - x_4^2x_5.
\end{aligned}$$

A álgebra $Z(\mathfrak{g}_{6,25})$ não é uma álgebra de polinômios, pois temos a seguinte relação entre seus geradores: $x_6^2z_1 - z_2^2 - x_5z_3 = 0$.

Para a lista completa de $Z(\mathfrak{g})$, das álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ nilpotentes indecomponíveis de dimenbsão 6 sobre $\mathbb{C}$, veja [28, Seção 5].

5.1 Caso 1: Centro igual ao p-Centro

Com o cálculo do centro das álgebras envolventes universais das álgebras de Lie nilpotentes de dimensão menor ou igual a 5, em característica positiva, obtivemos exemplos onde o centro é uma álgebra de polinômios com $Z(\mathfrak{g}) = Z_p(\mathfrak{g})$. Veremos que em dimensão 6 também obtemos exemplos onde o centro e o p-centro das álgebras envolventes universais coincidem.

Teorema 5.1.1. *Seja $\mathfrak{g}$ uma das seguintes álgebras de Lie $\mathfrak{g}_{6,7}^{(2)}(\eta)$, $\mathfrak{g}_{6,22}(\varepsilon)$, $\mathfrak{g}_{6,23}$, $\mathfrak{g}_{6,24}(\varepsilon)$, $\mathfrak{g}_{6,27}$ e $\mathfrak{g}_{6,28}$, sobre um corpo $\mathbb{F}$ de caraterística p primo. Assuma que $p = 2$ se $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,7}^{(2)}(\eta)$, $p \geq 3$ se $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,23}$, $\mathfrak{g}_{6,24}(\varepsilon)$, $\mathfrak{g}_{6,27}$ e que $p \geq 5$ se $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,28}$. Então $Z(\mathfrak{g}) = Z_p(\mathfrak{g})$. Em particular, supondo as condiçoes sobre a característica de $\mathbb{F}$ temos que $Z(\mathfrak{g}) = \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5, x_6]$.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{g}$ uma das álgebras $\mathfrak{g}_{6,7}^{(2)}(\eta)$, $\mathfrak{g}_{6,22}(\varepsilon)$, $\mathfrak{g}_{6,23}$, $\mathfrak{g}_{6,24}(\varepsilon)$, $\mathfrak{g}_{6,27}$, $\mathfrak{g}_{6,28}$ e suponhamos as condiçoes sobre a característica de $\mathbb{F}$. Observe na Tabela 5.1 que $C(\mathfrak{g}) = \langle x_5, x_6\rangle_{\mathbb{F}}$ para todas as álgebras que aparecem neste teorema. Portanto, o Teorema 3.3.2 afirma que $Z_p(\mathfrak{g}) = \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5, x_6]$. Afirmamos que $K(\mathfrak{g}) = K_p(\mathfrak{g})$. De fato, pelo Teorema

3.3.4 vemos que as extensões de anéis $K_p(\mathfrak{g}) \subseteq D(\mathfrak{g})$ e $K(\mathfrak{g}) \subseteq D(\mathfrak{g})$ são de graus p^4 e p^{2m} ($m \geq 1$ inteiro), respectivamente. Portanto,

$$p^4 = [D(\mathfrak{g}) : K_p(\mathfrak{g})] = [D(\mathfrak{g}) : K(\mathfrak{g})][K(\mathfrak{g}) : K_p(\mathfrak{g})] = p^{2m}[K(\mathfrak{g}) : K_p(\mathfrak{g})].$$

As possibilidades são: $m = 1$ e $[D(\mathfrak{g}) : K(\mathfrak{g})] = [K(\mathfrak{g}) : K_p(\mathfrak{g})] = p^2$ ou $m = 2$ e $K(\mathfrak{g}) = K_p(\mathfrak{g})$.

Para $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,7}^{(2)}(\eta)$: Se $\eta = 0$, então temos que $x_2, x_3 \notin C(\mathfrak{g})$, $[x_2, x_3] = 0$ e $x_3 \notin K(\mathfrak{g})(x_2)$, pois $x_4 \in C_{\mathfrak{g}}\Big(K(\mathfrak{g})(x_2)\Big)$, mas $[x_3, x_4] = x_5 + x_6$. Nesse caso, o Lema 3.3.5 fornece que $\dim_{K(\mathfrak{g})} D(\mathfrak{g}) > p^2$. Ou seja, $m = 2$, $[D(\mathfrak{g}) : K(\mathfrak{g})] = p^4$ e $K(\mathfrak{g}) = K_p(\mathfrak{g})$.

Se $\eta \neq 0$, então considere a álgebra de Lie $\mathfrak{h}^{(2)}(\eta)$ com uma base sobre $\mathbb{F}$ dada por $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ e definida pelos comutadores $[x_1, x_2] = x_5$, $[x_1, x_3] = x_6$, $[x_2, x_4] = \eta x_6$, $[x_3, x_4] = x_5 + x_6$, $[x_2, x_7] = x_8$. Então podemos considerar $\mathfrak{g}$ como uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{h}^{(2)}(\eta)$. Assim, $K(\mathfrak{g})$ é um subcorpo de $K(\mathfrak{h}^{(2)}(\eta))$. Observe que $x_7 \in C_{\mathfrak{h}^{(2)}(\eta)}\Big(K(\mathfrak{g})(x_3)\Big)$, mas $[x_2, x_7] = x_8$. Logo, $x_2 \notin K(\mathfrak{g})(x_3)$. Pelo Lema 3.3.5 temos que $\dim_{K(\mathfrak{g})} D(\mathfrak{g}) > p^2$. E assim, $m = 2$, $[D(\mathfrak{g}) : K(\mathfrak{g})] = p^4$ e $K(\mathfrak{g}) = K_p(\mathfrak{g})$.

Segue do Corolário 3.3.3(3) que temos a igualdade $Z(\mathfrak{g}) = Z_p(\mathfrak{g})$.

Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,k}(\varepsilon)$, onde $k \in \{22, 24\}$. Suponhamos que $\varepsilon = 0$. Se $k = 22$, então temos que $x_2, x_3 \notin C(\mathfrak{g})$, $[x_2, x_3] = 0$ e $x_3 \notin K(\mathfrak{g})(x_2)$, pois $x_4 \in C_{\mathfrak{g}}\Big(K(\mathfrak{g})(x_2)\Big)$, mas $[x_3, x_4] = x_5$. Se $k = 24$, então temos que $x_3, x_4 \notin C(\mathfrak{g})$, $[x_3, x_4] = 0$ e $x_3 \notin K(\mathfrak{g})(x_4)$, pois $x_1 \in C_{\mathfrak{g}}\Big(K(\mathfrak{g})(x_4)\Big)$, mas $[x_1, x_3] = x_5$. Nesses dois casos, o Lema 3.3.5 garante que $\dim_{K(\mathfrak{g})} D(\mathfrak{g}) > p^2$. Ou seja, $m = 2$, $[D(\mathfrak{g}) : K(\mathfrak{g})] = p^4$ e $K(\mathfrak{g}) = K_p(\mathfrak{g})$.

Suponhamos que $\varepsilon = 1$. Se $k = 22$, então considere os seguintes elementos em $\mathfrak{g}$:

$$x = x_1 + x_4, \quad y = x_1 + x_2 + x_3, \quad \text{e} \quad z = x_4.$$

Para esse elementos temos que

$$\begin{aligned}
[x, y] &= [x_1 + x_4, x_1 + x_2 + x_3] = [x_1, x_2] + [x_1, x_3] + [x_4, x_2] + [x_4, x_3] \\
&= x_5 + x_6 - x_6 - x_5 = 0. \\
[y, z] &= [x_1 + x_2 + x_3, x_4] = [x_2, x_4] + [x_3, x_4] \\
&= x_6 + x_5. \\
[x, z] &= 0.
\end{aligned}$$

Se $k = 24$, então considere os seguintes elementos em $\mathfrak{g}$:

$$x = x_3 + x_4, \quad y = -x_1 + x_2 + x_3, \quad \text{e} \quad z = x_4.$$

Para esse elementos temos que

$$
\begin{aligned}
[x,y] &= [x_3+x_4, -x_1+x_2+x_3] = -[x_3,x_1]+[x_3,x_2]-[x_4,x_1]+[x_4,x_2]\\
&= x_5-x_6+x_6-x_5=0.\\
[y,z] &= [-x_1+x_2+x_3, x_4] = -[x_1,x_4]+[x_2,x_4]\\
&= -x_6+x_5.\\
[x,z] &= 0.
\end{aligned}
$$

Nos dois casos, esses elementos $x, y \in \mathfrak{g}$ satisfazem as hipóteses do Lema 3.3.5, com $y \notin K(\mathfrak{g})(x)$, pois $z \in C_{\mathfrak{g}}\Big(K(\mathfrak{g})(x)\Big)$, mas $[y,z] \neq 0$. Como antes, segue que $\dim_{K(\mathfrak{g})} D(\mathfrak{g}) > p^2$. Isto é, $m = 2$, $[D(\mathfrak{g}) : K(\mathfrak{g})] = p^4$ e $K(\mathfrak{g}) = K_p(\mathfrak{g})$.

Agora suponhamos que $\varepsilon \notin \{0,1\}$. Se $\varepsilon \in (\mathbb{F}^*)^2$, isto é, se $\varepsilon = \alpha^2$ para algum $\alpha \in \mathbb{F}^*$ e $\alpha \neq 1$, então por [8, p. 166] temos que $\mathfrak{g}_{6,k}(\varepsilon) \cong \mathfrak{g}_{6,k}(1)$. Esse isomorfismo de álgebras de Lie induz o isomorfismo de álgebras $Z(\mathfrak{g}_{6,k}(\varepsilon)) \cong Z(\mathfrak{g}_{6,k}(1))$. Assim, recorremos ao caso $\varepsilon = 1$.

Se $\varepsilon \in \mathbb{F}^* \setminus (\mathbb{F}^*)^2$, então considere a extensão $\mathbb{E} = \mathbb{F}[t]/(t^2-\varepsilon)$ de grau 2 de $\mathbb{F}$, onde t é uma indeterminada sobre $\mathbb{F}$. Logo, sobre $\mathbb{E}$, a álgebra de Lie $\mathfrak{g}_{6,k}(\varepsilon)$ é dada por $\mathfrak{g}_{6,k}(\varepsilon)\otimes\mathbb{E} = \bar{\mathfrak{g}}_{6,k}(\varepsilon)$. Novamente, por [8, p. 166] temos que $\bar{\mathfrak{g}}_{6,k}(\varepsilon) \cong \bar{\mathfrak{g}}_{6,k}(1)$. Como $\mathfrak{g}_{6,k}(\varepsilon)$ e $\bar{\mathfrak{g}}_{6,k}(\varepsilon)$ possuem a mesma táboa de multiplicação, recorremos ao caso $\varepsilon = 1$ e obtemos que $K(\bar{\mathfrak{g}}_{6,k}(\varepsilon)) = K_p(\bar{\mathfrak{g}}_{6,k}(\varepsilon))$. Segue do Corolário 3.3.3(3) que $Z(\bar{\mathfrak{g}}_{6,k}(\varepsilon)) = Z_p(\bar{\mathfrak{g}}_{6,k}(\varepsilon))$.

Agora note que temos a inclusão de $\mathbb{F}$-álgebras de Lie $\mathfrak{g}_{6,k}(\varepsilon) \subset \bar{\mathfrak{g}}_{6,k}(\varepsilon)$, e portanto, também temos a inclusão de $\mathbb{F}$-álgebras $U(\mathfrak{g}_{6,k}(\varepsilon)) \subset U(\bar{\mathfrak{g}}_{6,k}(\varepsilon))$. Logo,

$$
\begin{aligned}
Z(\mathfrak{g}_{6,k}(\varepsilon)) &= Z(\bar{\mathfrak{g}}_{6,k}(\varepsilon)) \cap U(\mathfrak{g}_{6,k}(\varepsilon))\\
&= Z_p(\bar{\mathfrak{g}}_{6,k}(\varepsilon)) \cap U(\mathfrak{g}_{6,k}(\varepsilon))\\
&= Z_p(\mathfrak{g}_{6,k}(\varepsilon)).
\end{aligned}
$$

Segue que em todo caso, para a álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,k}(\varepsilon)$ obtemos que $m = 2$ e $K(\mathfrak{g}) = K_p(\mathfrak{g})$. O Corolário 3.3.3(3) nos dá que $Z(\mathfrak{g}) = Z_p(\mathfrak{g})$.

Para as demais álgebras do teorema afirmamos que também temos $m = 2$ e $K(\mathfrak{g}) = K_p(\mathfrak{g})$. Com efeito,

Para $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,23}$: temos que $x_3, x_4 \notin C(\mathfrak{g})$, $[x_3,x_4] = 0$ e $x_4 \notin K(\mathfrak{g})(x_3)$, pois $x_2 \in C_{\mathfrak{g}}\Big(K(\mathfrak{g})(x_3)\Big)$, mas $[x_2,x_4] = x_5$.

Para $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,27}$: temos que $x_3, x_4 \notin C(\mathfrak{g})$, $[x_3,x_4] = 0$ e $x_4 \notin K(\mathfrak{g})(x_3)$, pois $x_2 \in C_{\mathfrak{g}}\Big(K(\mathfrak{g})(x_3)\Big)$, mas $[x_2,x_4] = x_6$.

Para $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,28}$: temos que $x_3, x_4 \notin C(\mathfrak{g})$, $[x_3,x_4] = 0$ e $x_3 \notin K(\mathfrak{g})(x_4)$, pois $x_2 \in C_{\mathfrak{g}}\Big(K(\mathfrak{g})(x_4)\Big)$, mas $[x_2,x_3] = x_6$.

Então, nesses casos, pelo Lema 3.3.5 temos que $\dim_{K(\mathfrak{g})}\ D(\mathfrak{g}) > p^2$. Resta que $m = 2$ e $K(\mathfrak{g}) = K_p(\mathfrak{g})$, como afirmamos. O Corolário 3.3.3(3) nos dá que $Z(\mathfrak{g}) = Z_p(\mathfrak{g})$.

Em particular, supondo as condiçoes sobre a característica de $\mathbb{F}$ segue que $Z(\mathfrak{g}) = \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5, x_6]$. □

Em todos os casos do Teorema 5.1.1 o centro $Z(\mathfrak{g})$ é uma álgebra de polinômios. Na próxima seção vamos ver exemplos onde $Z(\mathfrak{g})$ não é uma álgebra de polinômios, em particular, $Z(\mathfrak{g})$ é uma extensão simples do p-centro $Z_p(\mathfrak{g})$.

5.2 Caso 2: Centro é uma extensão própria do p-Centro

Teorema 5.2.1. *Seja $\mathfrak{g}$ uma das álgebras $\mathfrak{g}_{6,10}$, $\mathfrak{g}_{6,11}$, $\mathfrak{g}_{6,12}$, $\mathfrak{g}_{6,13}$, $\mathfrak{g}_{6,14}$, $\mathfrak{g}_{6,15}$, $\mathfrak{g}_{6,16}$, $\mathfrak{g}_{6,17}$, $\mathfrak{g}_{6,19}(\varepsilon)$, $\mathfrak{g}_{6,20}$, $\mathfrak{g}_{6,21}(\varepsilon)$ e $\mathfrak{g}_{6,26}$ sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica prima p. Assuma que $p \geq 3$ quando $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,10}$, $\mathfrak{g}_{6,19}(\varepsilon)$, $\mathfrak{g}_{6,20}$ e que $p \geq 5$ se $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,11}$, $\mathfrak{g}_{6,12}$, $\mathfrak{g}_{6,13}$, $\mathfrak{g}_{6,14}$, $\mathfrak{g}_{6,15}$, $\mathfrak{g}_{6,16}$, $\mathfrak{g}_{6,17}$, $\mathfrak{g}_{6,21}(\varepsilon)$. Então $Z(\mathfrak{g})$ é uma extensão própria de $Z_p(\mathfrak{g})$. Mais precisamente,*

$$\begin{aligned}
Z(\mathfrak{g}_{6,10}) &= \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5^p, x_6, x_3^2 - 2x_2x_6],\\
Z(\mathfrak{g}_{6,11}) &= \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5^p, x_6, x_4^2 + 2x_5x_6 - 2x_3x_6],\\
Z(\mathfrak{g}_{6,12}) &= \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5^p, x_6, x_4^2 - 2x_3x_6],\\
Z(\mathfrak{g}_{6,13}) &= \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5^p, x_6, x_5^3 - 3x_3x_5x_6 + 3x_2x_6^2],\\
Z(\mathfrak{g}_{6,14}) &= \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5^p, x_6, 2x_5^3 + 3x_4^2x_6 - 6x_3x_5x_6 - 6x_1x_6^2],\\
Z(\mathfrak{g}_{6,15}) &= \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5^p, x_6, x_5^3 - 3x_4x_5x_6 + 3x_3x_6^2],\\
Z(\mathfrak{g}_{6,16}) &= \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5^p, x_6, x_4^2 - 2x_1x_6 - 2x_3x_5],\\
Z(\mathfrak{g}_{6,17}) &= \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5^p, x_6, x_5^2 - 2x_4x_6],\\
Z(\mathfrak{g}_{6,19}(\varepsilon)) &= \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5^p, x_6, x_5^2 + \varepsilon x_4^2 + 2\varepsilon x_1x_6 - 2x_3x_6],\\
Z(\mathfrak{g}_{6,20}) &= \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5^p, x_6, x_5^2 - 2x_3x_6],\\
Z(\mathfrak{g}_{6,21}(\varepsilon)) &= \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5^p, x_6, x_5^2 + \varepsilon x_4^2 - 2\varepsilon x_3x_6],\\
Z(\mathfrak{g}_{6,26}) &= \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4, x_5, x_6, x_1x_6 - x_2x_5 + x_3x_4].
\end{aligned}$$

Demonstração. Seja $\mathfrak{g}$ uma das álgebras listadas neste teorema. Se $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,26}$, então $C(\mathfrak{g}) = \langle x_4, x_5, x_6\rangle_{\mathbb{F}}$. Portanto, o Teorema 3.3.2 afirma que $Z_p(\mathfrak{g}) = \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4, x_5, x_6]$. Em todos os outros casos, temos que $C(\mathfrak{g}) = \langle x_6\rangle_{\mathbb{F}}$. Supondo as condições sobre a característica de $\mathbb{F}$, o Teorema 3.3.2 mostra que, nestes casos, temos o p-centro dado por $Z_p(\mathfrak{g}) =$

$\mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5^p, x_6]$. Agora, considere o seguinte elemento $z \in U(\mathfrak{g})$:

$$
\begin{array}{lll}
z = x_3^2 - 2x_2x_6 & \text{se} & \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,10}, \\
z = x_4^2 + 2x_5x_6 - 2x_3x_6 & \text{se} & \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,11}, \\
z = x_4^2 - 2x_3x_6 & \text{se} & \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,12}, \\
z = x_5^3 - 3x_3x_5x_6 + 3x_2x_6^2 & \text{se} & \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,13}, \\
z = 2x_5^3 + 3x_4^2x_6 - 6x_3x_5x_6 - 6x_1x_6^2 & \text{se} & \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,14}, \\
z = x_5^3 - 3x_4x_5x_6 + 3x_3x_6^2 & \text{se} & \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,15}, \\
z = x_4^2 - 2x_1x_6 - 2x_3x_5 & \text{se} & \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,16}, \\
z = x_5^2 - 2x_4x_6 & \text{se} & \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,17}, \\
z = x_5^2 + \varepsilon x_4^2 + 2\varepsilon x_1x_6 - 2x_3x_6 & \text{se} & \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,19}(\varepsilon), \\
z = x_5^2 - 2x_3x_6 & \text{se} & \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,20}, \\
z = x_5^2 + \varepsilon x_4^2 - 2\varepsilon x_3x_6 & \text{se} & \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,21}(\varepsilon), \\
z = x_1x_6 - x_2x_5 + x_3x_4 & \text{se} & \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,26}.
\end{array}
$$

Afirmamos que $z \in Z(\mathfrak{g})$. Com efeito, seja $z = x_3^2 - 2x_2x_6 \in U(\mathfrak{g}_{6,10})$. Como os elementos $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in C_{\mathfrak{g}_{6,10}}(z)$ para ver que z é central basta mostrar que $\mathrm{ad}_{x_1}(z) = 0$. Por ad_{x_1} ser uma derivação de $U(\mathfrak{g}_{6,10})$, temos que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ad}_{x_1}(z) &= \mathrm{ad}_{x_1}(x_3^2 - 2x_2x_6) = \mathrm{ad}_{x_1}(x_3^2) - 2\mathrm{ad}_{x_1}(x_2x_6) \\
&= [x_1, x_3]x_3 + x_3[x_1, x_3] - 2[x_1, x_2]x_6 = 2x_3x_6 - 2x_3x_6 = 0.
\end{aligned}
$$

Se $z = x_4^2 + 2x_5x_6 - 2x_3x_6 \in U(\mathfrak{g}_{6,11})$, então por $x_3, x_4, x_5, x_6 \in C_{\mathfrak{g}_{6,11}}(z)$ temos que z é central se $\mathrm{ad}_{x_1}(z) = \mathrm{ad}_{x_2}(z) = 0$. De fato, obtemos as igualdades

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ad}_{x_1}(z) &= \mathrm{ad}_{x_1}(x_4^2 + 2x_5x_6 - 2x_3x_6) = \mathrm{ad}_{x_1}(x_4^2) + 2\mathrm{ad}_{x_1}(x_5x_6) - 2\mathrm{ad}_{x_1}(x_3x_6) \\
&= [x_1, x_4]x_4 + x_4[x_1, x_4] - 2[x_1, x_3]x_6 = 2x_4x_6 - 2x_4x_6 = 0, \\
\mathrm{ad}_{x_2}(z) &= \mathrm{ad}_{x_2}(x_4^2 + 2x_5x_6 - 2x_3x_6) = \mathrm{ad}_{x_2}(x_4^2) + 2\mathrm{ad}_{x_2}(x_5x_6) - 2\mathrm{ad}_{x_2}(x_3x_6) \\
&= 2[x_2, x_5]x_6 - 2[x_2, x_3]x_6 = 2x_6^2 - 2x_6^2 = 0.
\end{aligned}
$$

Seja $z = x_4^2 - 2x_3x_6 \in U(\mathfrak{g}_{6,12})$, então por $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in C_{\mathfrak{g}_{6,12}}(z)$ temos que z é central se $\mathrm{ad}_{x_1}(z) = 0$. Vemos que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ad}_{x_1}(z) &= \mathrm{ad}_{x_1}(x_4^2 - 2x_3x_6) = \mathrm{ad}_{x_1}(x_4^2) - 2\mathrm{ad}_{x_1}(x_3x_6) \\
&= [x_1, x_4]x_4 + x_4[x_1, x_4] - 2[x_1, x_3]x_6 = 2x_4x_6 - 2x_4x_6 = 0.
\end{aligned}
$$

Se $z = x_5^3 - 3x_3x_5x_6 + 3x_2x_6^2 \in U(\mathfrak{g}_{6,13})$. Então z é central. Com efeito, porque

$x_2, x_3, x_5, x_6 \in C_{\mathfrak{g}_{6,13}}(z)$ basta verificar que $\mathrm{ad}_{x_1}(z) = \mathrm{ad}_{x_4}(z) = 0$. Temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_{x_1}(z) &= \mathrm{ad}_{x_1}(x_5^3 - 3x_3x_5x_6 + 3x_2x_6^2) = \mathrm{ad}_{x_1}(x_5^3) - 3\mathrm{ad}_{x_1}(x_3x_5x_6) + 3\mathrm{ad}_{x_1}(x_2x_6^2) \\
&= [x_1, x_5]x_5^2 + x_5[x_1, x_5]x_5 + x_5^2[x_1, x_5] - 3\big([x_1, x_3]x_5x_6 + x_3[x_1, x_5]x_6\big) \\
&+ 3[x_1, x_2]x_6^2 \\
&= 3x_5^2x_6 - 3x_5^2x_6 - 3x_3x_6^2 + 3x_3x_6^2 = 0, \\
\mathrm{ad}_{x_4}(z) &= \mathrm{ad}_{x_4}(x_5^3 - 3x_3x_5x_6 + 3x_2x_6^2) = \mathrm{ad}_{x_4}(x_5^3) - 3\mathrm{ad}_{x_4}(x_3x_5x_6) + 3\mathrm{ad}_{x_4}(x_2x_6^2) \\
&= -3[x_4, x_3]x_5x_6 + 3[x_4, x_2]x_6^2 = 3x_5x_6^2 - 3x_5x_6^2 = 0.
\end{aligned}$$

Se $z = 2x_5^3 + 3x_4^2x_6 - 6x_3x_5x_6 - 6x_1x_6^2 \in U(\mathfrak{g}_{6,14})$, então z é central. Para ver isso, devemos verificar que $\mathrm{ad}_{x_1}(z) = \mathrm{ad}_{x_2}(z) = \mathrm{ad}_{x_3}(z) = \mathrm{ad}_{x_4}(z) = 0$. Isso ocorre pois,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_{x_1}(z) &= \mathrm{ad}_{x_1}(2x_5^3 + 3x_4^2x_6 - 6x_3x_5x_6 - 6x_1x_6^2) \\
&= 2\mathrm{ad}_{x_1}(x_5^3) + 3\mathrm{ad}_{x_1}(x_4^2x_6) - 6\mathrm{ad}_{x_1}(x_3x_5x_6) - 6\mathrm{ad}_{x_1}(x_1x_6^2) \\
&= 3\big([x_1, x_4]x_4x_6 + x_4[x_1, x_4]x_6\big) - 6[x_1, x_3]x_5x_6 = 6x_4x_5x_6 - 6x_4x_5x_6 = 0, \\
\mathrm{ad}_{x_2}(z) &= \mathrm{ad}_{x_2}(2x_5^3 + 3x_4^2x_6 - 6x_3x_5x_6 - 6x_1x_6^2) \\
&= 2\mathrm{ad}_{x_2}(x_5^3) + 3\mathrm{ad}_{x_2}(x_4^2x_6) - 6\mathrm{ad}_{x_2}(x_3x_5x_6) - 6\mathrm{ad}_{x_2}(x_1x_6^2) \\
&= 2\big([x_2, x_5]x_5^2 + x_5[x_2, x_5]x_5 + x_5^2[x_2, x_5]\big) - 6\big([x_2, x_3]x_5x_6 + x_3[x_2, x_5]x_6\big) \\
&- 6[x_2, x_1]x_6^2 \\
&= 6x_5^2x_6 - 6x_5^2x_6 - 6x_3x_6^2 + 6x_3x_6^2 = 0, \\
\mathrm{ad}_{x_3}(z) &= \mathrm{ad}_{x_3}(2x_5^3 + 3x_4^2x_6 - 6x_3x_5x_6 - 6x_1x_6^2) \\
&= 2\mathrm{ad}_{x_3}(x_5^3) + 3\mathrm{ad}_{x_3}(x_4^2x_6) - 6\mathrm{ad}_{x_3}(x_3x_5x_6) - 6\mathrm{ad}_{x_3}(x_1x_6^2) \\
&= 3\big([x_3, x_4]x_4x_6 + x_4[x_3, x_4]x_6\big) - 6[x_3, x_1]x_6^2 = -6x_4x_6^2 + 6x_4x_6^2 = 0, \\
\mathrm{ad}_{x_4}(z) &= \mathrm{ad}_{x_4}(2x_5^3 + 3x_4^2x_6 - 6x_3x_5x_6 - 6x_1x_6^2) \\
&= 2\mathrm{ad}_{x_4}(x_5^3) + 3\mathrm{ad}_{x_4}(x_4^2x_6) - 6\mathrm{ad}_{x_4}(x_3x_5x_6) - 6\mathrm{ad}_{x_4}(x_1x_6^2) \\
&= -6[x_4, x_3]x_5x_6 - 6[x_4, x_1]x_6^2 = -6x_5x_6^2 + 6x_5x_6^2 = 0.
\end{aligned}$$

Se $z = x_5^3 - 3x_4x_5x_6 + 3x_3x_6^2 \in U(\mathfrak{g}_{6,15})$. Como $x_3, x_4, x_5, x_6 \in C_{\mathfrak{g}_{6,19}}(z)$ temos que z é central se $\mathrm{ad}_{x_1}(z) = \mathrm{ad}_{x_2}(z) = 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_{x_1}(z) &= \mathrm{ad}_{x_1}(x_5^3 - 3x_4x_5x_6 + 3x_3x_6^2) = \mathrm{ad}_{x_1}(x_5^3) - 3\mathrm{ad}_{x_1}(x_4x_5x_6) + 3\mathrm{ad}_{x_1}(x_3x_6^2) \\
&= [x_1, x_5]x_5^2 + x_5[x_1, x_5]x_5 + x_5^2[x_1, x_5] - 3\big([x_1, x_4]x_5x_6 + x_4[x_1, x_5]x_6\big) \\
&+ 3[x_1, x_3]x_6^2 \\
&= 3x_5^2x_6 - 3x_5^2x_6 - 3x_4x_6^2 + 3x_4x_6^2 = 0, \\
\mathrm{ad}_{x_2}(z) &= \mathrm{ad}_{x_2}(x_5^3 - 3x_4x_5x_6 + 3x_3x_6^2) = \mathrm{ad}_{x_2}(x_5^3) - 3\mathrm{ad}_{x_2}(x_4x_5x_6) + 3\mathrm{ad}_{x_2}(x_3x_6^2) \\
&= -3[x_2, x_4]x_5x_6 + 3[x_2, x_3]x_6^2 = -3x_5x_6^2 + 3x_5x_6^2 = 0.
\end{aligned}$$

Se $z = x_4^2 - 2x_1x_6 - 2x_3x_5 \in U(\mathfrak{g}_{6,16})$, então ele é um elemento central. Para ver isso, temos de verificar que $\mathrm{ad}_{x_1}(z) = \mathrm{ad}_{x_2}(z) = \mathrm{ad}_{x_3}(z) = \mathrm{ad}_{x_4}(z) = 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_{x_1}(z) &= \mathrm{ad}_{x_1}(x_4^2 - 2x_1x_6 - 2x_3x_5) = \mathrm{ad}_{x_1}(x_4^2) - 2\mathrm{ad}_{x_1}(x_1x_6) - 2\mathrm{ad}_{x_1}(x_3x_5)\\
&= [x_1, x_4]x_4 + x_4[x_1, x_4] - 2[x_1, x_3]x_5 = 2x_4x_5 - 2x_4x_5 = 0,\\
\mathrm{ad}_{x_2}(z) &= \mathrm{ad}_{x_2}(x_4^2 - 2x_1x_6 - 2x_3x_5) = \mathrm{ad}_{x_2}(x_4^2) - 2\mathrm{ad}_{x_2}(x_1x_6) - 2\mathrm{ad}_{x_2}(x_3x_5)\\
&= -2[x_2, x_1]x_6 - 2x_3[x_2, x_5] = 2x_3x_6 - 2x_3x_6 = 0,\\
\mathrm{ad}_{x_3}(z) &= \mathrm{ad}_{x_3}(x_4^2 - 2x_1x_6 - 2x_3x_5) = \mathrm{ad}_{x_3}(x_4^2) - 2\mathrm{ad}_{x_3}(x_1x_6) - 2\mathrm{ad}_{x_3}(x_3x_5)\\
&= [x_3, x_4]x_4 + x_4[x_3, x_4] - 2[x_3, x_1]x_6 = -2x_4x_6 + 2x_4x_6 = 0,\\
\mathrm{ad}_{x_4}(z) &= \mathrm{ad}_{x_4}(x_4^2 - 2x_1x_6 - 2x_3x_5) = \mathrm{ad}_{x_4}(x_4^2) - 2\mathrm{ad}_{x_4}(x_1x_6) - 2\mathrm{ad}_{x_4}(x_3x_5)\\
&= -2[x_4, x_1]x_6 - 2[x_4, x_3]x_5 = 2x_5x_6 - 2x_5x_6 = 0.
\end{aligned}$$

Se $z = x_5^2 - 2x_4x_6 \in U(\mathfrak{g}_{6,17})$, então z é central. Para ver isto, basta verificar que $\mathrm{ad}_{x_1}(z) = 0$, pois $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in C_{\mathfrak{g}_{6,17}}(z)$. Temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_{x_1}(z) &= \mathrm{ad}_{x_1}(x_5^2 - 2x_4x_6) = \mathrm{ad}_{x_1}(x_5^2) - 2\mathrm{ad}_{x_1}(x_4x_6)\\
&= [x_1, x_5]x_5 + x_5[x_1, x_5] - 2[x_1, x_4]x_6 = 2x_5x_6 - 2x_5x_6 = 0.
\end{aligned}$$

Seja $z = x_5^2 + \varepsilon x_4^2 + 2\varepsilon x_1x_6 - 2x_3x_6 \in U(\mathfrak{g}_{6,19}(\varepsilon))$. Uma vez que $x_4, x_6 \in C_{\mathfrak{g}_{6,19}(\varepsilon)}(z)$, para ver que z é central devemos verificar que $\mathrm{ad}_{x_1}(z) = \mathrm{ad}_{x_2}(z) = \mathrm{ad}_{x_3}(z) = \mathrm{ad}_{x_5}(z) = 0$. Segue que

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_{x_1}(z) &= \mathrm{ad}_{x_1}(x_5^2 + \varepsilon x_4^2 + 2\varepsilon x_1x_6 - 2x_3x_6) = \mathrm{ad}_{x_1}(x_5^2) - 2\mathrm{ad}_{x_1}(x_3x_6)\\
&= [x_1, x_5]x_5 + x_5[x_1, x_5] - 2[x_1, x_3]x_6 = 2x_5x_6 - 2x_5x_6 = 0,\\
\mathrm{ad}_{x_2}(z) &= \mathrm{ad}_{x_2}(x_5^2 + \varepsilon x_4^2 + 2\varepsilon x_1x_6 - 2x_3x_6) = \varepsilon\mathrm{ad}_{x_2}(x_4^2) + 2\varepsilon\mathrm{ad}_{x_2}(x_1x_6)\\
&= \varepsilon([x_2, x_4]x_4 + x_4[x_2, x_4]) + 2\varepsilon[x_2, x_1]x_6 = 2\varepsilon x_4x_6 - 2\varepsilon x_4x_6 = 0,\\
\mathrm{ad}_{x_3}(z) &= \mathrm{ad}_{x_3}(x_5^2 + \varepsilon x_4^2 + 2\varepsilon x_1x_6 - 2x_3x_6) = \mathrm{ad}_{x_3}(x_5^2) + 2\varepsilon\mathrm{ad}_{x_3}(x_1x_6)\\
&= [x_3, x_5]x_5 + x_5[x_3, x_5] + 2\varepsilon[x_3, x_1]x_6 = 2\varepsilon x_5x_6 - 2\varepsilon x_5x_6 = 0,\\
\mathrm{ad}_{x_5}(z) &= \mathrm{ad}_{x_5}(x_5^2 + \varepsilon x_4^2 + 2\varepsilon x_1x_6 - 2x_3x_6) = 2\varepsilon\mathrm{ad}_{x_5}(x_1x_6) - 2\mathrm{ad}_{x_5}(x_3x_6)\\
&= 2\varepsilon([x_5, x_1]x_6) - 2[x_5, x_3]x_6 = -2\varepsilon x_6^2 + 2\varepsilon x_6^2 = 0.
\end{aligned}$$

Seja $z = x_5^2 - 2x_3x_6 \in U(\mathfrak{g}_{6,20})$. Então por $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in C_{\mathfrak{g}_{6,20}}(z)$ segue que z é central se $\mathrm{ad}_{x_1}(z) = 0$. Vemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_{x_1}(z) &= \mathrm{ad}_{x_1}(x_5^2 - 2x_3x_6) = \mathrm{ad}_{x_1}(x_5^2) - 2\mathrm{ad}_{x_1}(x_3x_6)\\
&= [x_1, x_5]x_5 + x_5[x_1, x_5] - 2[x_1, x_3]x_6 = 2x_5x_6 - 2x_5x_6 = 0.
\end{aligned}$$

Se $z = x_5^2 + \varepsilon x_4^2 - 2\varepsilon x_3x_6 \in U(\mathfrak{g}_{6,21}(\varepsilon))$, então z é central. Para ver isso devemos verificar que $\text{ad}_{x_1}(z) = \text{ad}_{x_2}(z) = 0$, pois $x_3, x_4, x_5, x_6 \in C_{\mathfrak{g}_{6,21}(\varepsilon)}(z)$. Temos

$$\begin{aligned}
\text{ad}_{x_1}(z) &= \text{ad}_{x_1}(x_5^2 + \varepsilon x_4^2 - 2\varepsilon x_3 x_6) = \text{ad}_{x_1}(x_5^2) + \varepsilon \text{ad}_{x_1}(x_4^2) - 2\varepsilon \text{ad}_{x_1}(x_3 x_6) \\
&= \varepsilon([x_1, x_4]x_4 + x_4[x_1, x_4]) - 2\varepsilon[x_1, x_3]x_6 = 2\varepsilon x_4 x_6 - 2\varepsilon x_4 x_6 = 0, \\
\text{ad}_{x_2}(z) &= \text{ad}_{x_2}(x_5^2 + \varepsilon x_4^2 - 2\varepsilon x_3 x_6) = \text{ad}_{x_2}(x_5^2) + \varepsilon \text{ad}_{x_2}(x_4^2) - 2\varepsilon \text{ad}_{x_2}(x_3 x_6) \\
&= [x_2, x_5]x_5 + x_5[x_2, x_5] - 2\varepsilon[x_2, x_3]x_6 = 2\varepsilon x_5 x_6 - 2\varepsilon x_5 x_6 = 0.
\end{aligned}$$

Seja $z = x_1x_6 - x_2x_5 + x_3x_4 \in U(\mathfrak{g}_{6,26})$. Uma vez que $C(\mathfrak{g}_{6,26}) = \langle x_4, x_5, x_6 \rangle_{\mathbb{F}}$ temos que z é central se $\text{ad}_{x_1}(z) = \text{ad}_{x_2}(z) = \text{ad}_{x_3}(z) = 0$. Temos que

$$\begin{aligned}
\text{ad}_{x_1}(z) &= \text{ad}_{x_1}(x_1x_6 - x_2x_5 + x_3x_4) = \text{ad}_{x_1}(x_1x_6) - \text{ad}_{x_1}(x_2x_5) + \text{ad}_{x_1}(x_3x_4) \\
&= -[x_1, x_2]x_5 + [x_1, x_3]x_4 = -x_4x_5 + x_4x_5 = 0, \\
\text{ad}_{x_2}(z) &= \text{ad}_{x_2}(x_1x_6 - x_2x_5 + x_3x_4) = \text{ad}_{x_2}(x_1x_6) - \text{ad}_{x_2}(x_2x_5) + \text{ad}_{x_2}(x_3x_4) \\
&= [x_2, x_1]x_6 + [x_2, x_3]x_4 = -x_4x_6 + x_4x_6 = 0, \\
\text{ad}_{x_3}(z) &= \text{ad}_{x_3}(x_1x_6 - x_2x_5 + x_3x_4) = \text{ad}_{x_3}(x_1x_6) - \text{ad}_{x_3}(x_2x_5) + \text{ad}_{x_3}(x_3x_4) \\
&= [x_3, x_1]x_6 - [x_3, x_2]x_5 = -x_5x_6 + x_5x_6 = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, em cada caso, $z \in Z(\mathfrak{g})$. Agora observe que para cada z definido temos $z \notin Z_p(\mathfrak{g})$, mas obtemos que $z^p \in Z_p(\mathfrak{g})$. Logo, z é integral sobre $Z_p(\mathfrak{g})$. Pelo Corolário 3.3.3(1) sabemos que $Z_p(\mathfrak{g})$ é integralmente fechado, donde $z \notin K_p(\mathfrak{g})$, do contrário $z \in Z_p(\mathfrak{g})$.

Seja $Z_p(\mathfrak{g})[t]$ anel de polinômios sobre $Z_p(\mathfrak{g})$ na variável t. Pelo Teorema 2.5.3, o polinômio $f = t^p - z^p$ é irredutível em $Z_p(\mathfrak{g})[t]$. O Corolário 2.5.5 assegura o isomorfismo $Z_p(\mathfrak{g})[t]/(f) \cong Z_p(\mathfrak{g})[z]$.

Seja $\mathbb{F}[\mathbf{t}_7]$ o anel de polinômios em 7 variáveis sobre $\mathbb{F}$. Segue que $Z_p(\mathfrak{g})[z]$ é isomorfo aos respectivos anéis integralmente fechados do Teorema 2.6.4:

$$
\begin{array}{lll}
Z_p(\mathfrak{g})[z] \cong \mathbb{F}[\mathbf{t}_7]/\big(t_7^p - t_3^2 + 2t_2t_6^p\big) & \text{se} & \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,10}, \\
Z_p(\mathfrak{g})[z] \cong \mathbb{F}[\mathbf{t}_7]/\big(t_7^p - t_4^2 - 2t_5t_6^p + 2t_3t_6^p\big) & \text{se} & \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,11}, \\
Z_p(\mathfrak{g})[z] \cong \mathbb{F}[\mathbf{t}_7]/\big(t_7^p - t_4^2 + 2t_3t_6^p\big) & \text{se} & \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,12}, \\
Z_p(\mathfrak{g})[z] \cong \mathbb{F}[\mathbf{t}_7]/\big(t_7^p - t_5^3 + 3t_3t_5t_6^p - 3t_2t_6^{2p}\big) & \text{se} & \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,13}, \\
Z_p(\mathfrak{g})[z] \cong \mathbb{F}[\mathbf{t}_7]/\big(t_7^p - 2t_5^3 - 3t_4^2t_6^p + 6t_3t_5t_6^p + 6t_1t_6^{2p}\big) & \text{se} & \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,14}, \\
Z_p(\mathfrak{g})[z] \cong \mathbb{F}[\mathbf{t}_7]/\big(t_7^p - t_5^3 + 3t_4t_5t_6^p - 3t_3t_6^{2p}\big) & \text{se} & \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,15}, \\
Z_p(\mathfrak{g})[z] \cong \mathbb{F}[\mathbf{t}_7]/\big(t_7^p - t_4^2 + 2t_1t_6^p + 2t_3t_5\big) & \text{se} & \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,16}, \\
Z_p(\mathfrak{g})[z] \cong \mathbb{F}[\mathbf{t}_7]/\big(t_7^p - t_5^2 + 2t_4t_6^p\big) & \text{se} & \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,17}, \\
Z_p(\mathfrak{g})[z] \cong \mathbb{F}[\mathbf{t}_7]/\big(t_7^p - t_5^2 - \varepsilon t_4^2 - 2\varepsilon t_1t_6^p + 2t_3t_6^p\big) & \text{se} & \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,19}(\varepsilon), \\
Z_p(\mathfrak{g})[z] \cong \mathbb{F}[\mathbf{t}_7]/\big(t_7^p - t_5^2 + 2t_3t_6^p\big) & \text{se} & \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,20}, \\
Z_p(\mathfrak{g})[z] \cong \mathbb{F}[\mathbf{t}_7]/\big(t_7^p - t_5^2 - \varepsilon t_4^2 + 2\varepsilon t_3t_6^p\big) & \text{se} & \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,21}(\varepsilon), \\
Z_p(\mathfrak{g})[z] \cong \mathbb{F}[\mathbf{t}_7]/\big(t_7^p - t_1x_6^p + t_2t_5^p - t_3t_4^p\big) & \text{se} & \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,26}.
\end{array}
$$

Até aqui, concluímos que, em cada caso, $Z_p(\mathfrak{g})[z]$ é um anel integralmente fechado. Agora vamos mostrar que $Z(\mathfrak{g})$ e $Z_p(\mathfrak{g})[z]$ possuem o mesmo corpo de frações. Isto é, $K(\mathfrak{g}) = K_p(\mathfrak{g})(z)$.

Se $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,26}$, então $\dim_{\mathbb{F}} \mathfrak{g}/C(\mathfrak{g}) = 3$. Nesse caso, o Teorema 3.3.6 garante que $K(\mathfrak{g}) = K_p(\mathfrak{g})(z)$. Nos outros casos $\dim_{\mathbb{F}} \mathfrak{g}/C(\mathfrak{g}) = 5$. Pelo Teorema 3.3.4 segue que

$$
\begin{aligned}
p^5 &= [D(\mathfrak{g}) : K_p(\mathfrak{g})] = [D(\mathfrak{g}) : K(\mathfrak{g})][K(\mathfrak{g}) : K_p(\mathfrak{g})(z)][K_p(\mathfrak{g})(z) : K_p(\mathfrak{g})] \\
&= p^{2m}[K(\mathfrak{g}) : K_p(\mathfrak{g})(z)]p = p^{2m+1}[K(\mathfrak{g}) : K_p(\mathfrak{g})(z)].
\end{aligned}
$$

Então temos duas possibilidades: $m = 1$, $[K(\mathfrak{g}) : K_p(\mathfrak{g})(z)] = p^2$ e $\dim_{K(\mathfrak{g})} D(\mathfrak{g}) = p^2$ ou $m = 2$ e $K(\mathfrak{g}) = K_p(\mathfrak{g})(z)$. A primeira possibilidade não ocorre, pois em cada caso, a álgebra $\mathfrak{g}$ satisfaz as condições do Lema 3.3.5. Vejamos isto.

Se $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,10}$, então $x_3, x_4 \in \mathfrak{g}$ são tais que $x_3, x_4 \notin C(\mathfrak{g})$, $[x_3, x_4] = 0$ e $x_4 \notin K(\mathfrak{g})(x_3)$, pois $x_5 \in C_{\mathfrak{g}}\Big(K(\mathfrak{g})(x_3)\Big)$, mas $[x_4, x_5] = x_6 \neq 0$.

Se $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,11}$ ou $\mathfrak{g}_{6,21}(\varepsilon)$, então $x_1, x_5 \in \mathfrak{g}$ são tais que $x_1, x_5 \notin C(\mathfrak{g})$, $[x_1, x_5] = 0$ e $x_1 \notin K(\mathfrak{g})(x_5)$, pois $x_4 \in C_{\mathfrak{g}}\Big(K(\mathfrak{g})(x_5)\Big)$, mas $[x_1, x_4] = x_6 \neq 0$.

Se $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,12}$, então $x_3, x_5 \in \mathfrak{g}$ são tais que $x_3, x_5 \notin C(\mathfrak{g})$, $[x_3, x_5] = 0$ e $x_5 \notin K(\mathfrak{g})(x_3)$, pois $x_2 \in C_{\mathfrak{g}}\Big(K(\mathfrak{g})(x_3)\Big)$, mas $[x_2, x_5] = x_6 \neq 0$.

Se $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,13}$, então $x_3, x_5 \in \mathfrak{g}$ são tais que $x_3, x_5 \notin C(\mathfrak{g})$, $[x_3, x_5] = 0$ e $x_3 \notin K(\mathfrak{g})(x_5)$, pois $x_4 \in C_{\mathfrak{g}}\Big(K(\mathfrak{g})(x_5)\Big)$, mas $[x_3, x_4] = x_6 \neq 0$.

Se $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,14}$, então $x_1, x_5 \in \mathfrak{g}$ são tais que $x_1, x_5 \notin C(\mathfrak{g})$, $[x_1, x_5] = 0$ e $x_1 \notin K(\mathfrak{g})(x_5)$, pois $x_4 \in C_{\mathfrak{g}}\Big(K(\mathfrak{g})(x_5)\Big)$, mas $[x_1, x_4] = x_5 \neq 0$.

Se $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,15}$, então $x_3, x_5 \in \mathfrak{g}$ são tais que $x_3, x_5 \notin C(\mathfrak{g})$, $[x_3, x_5] = 0$ e $x_3 \notin K(\mathfrak{g})(x_5)$, pois $x_2 \in C_{\mathfrak{g}}\Big(K(\mathfrak{g})(x_5)\Big)$, mas $[x_2, x_3] = x_5 \neq 0$.

Se $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,16}$, então $x_2, x_3 \in \mathfrak{g}$ são tais que $x_2, x_3 \notin C(\mathfrak{g})$, $[x_2, x_3] = 0$ e $x_2 \notin K(\mathfrak{g})(x_3)$, pois $x_5 \in C_{\mathfrak{g}}\Big(K(\mathfrak{g})(x_3)\Big)$, mas $[x_2, x_5] = x_6 \neq 0$.

Se $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,17}$, então $x_3, x_4 \in \mathfrak{g}$ são tais que $x_3, x_4 \notin C(\mathfrak{g})$, $[x_3, x_4] = 0$ e $x_3 \notin K(\mathfrak{g})(x_4)$, pois $x_2 \in C_{\mathfrak{g}}\Big(K(\mathfrak{g})(x_4)\Big)$, mas $[x_2, x_3] = x_6 \neq 0$.

Se $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,19}(\varepsilon)$, então $x_3, x_4 \in \mathfrak{g}$ são tais que $x_3, x_4 \notin C(\mathfrak{g})$, $[x_3, x_4] = 0$ e $x_4 \notin K(\mathfrak{g})(x_3)$, pois $x_2 \in C_{\mathfrak{g}}\Big(K(\mathfrak{g})(x_3)\Big)$, mas $[x_2, x_4] = x_6 \neq 0$.

Se $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,20}$, então $x_1, x_4 \in \mathfrak{g}$ são tais que $x_1, x_4 \notin C(\mathfrak{g})$, $[x_1, x_4] = 0$ e $x_1 \notin K(\mathfrak{g})(x_4)$, pois $x_5 \in C_{\mathfrak{g}}\Big(K(\mathfrak{g})(x_4)\Big)$, mas $[x_1, x_5] = x_6 \neq 0$.

Portanto, em cada caso, pelo Lema 3.3.5, $\dim_{K(\mathfrak{g})} D(\mathfrak{g}) > p^2$. Daí, nos resta que $m = 2$ e $K(\mathfrak{g}) = K_p(\mathfrak{g})(z)$. Por fim, reunindo os fatos, o que mostramos foi que $Z_p(\mathfrak{g})[z]$ é integralmente fechado e que $K(\mathfrak{g}) = K_p(\mathfrak{g})(z)$. Dado que $Z_p(\mathfrak{g})[z] \subseteq Z(\mathfrak{g})$ é uma extensão integral de anéis, sucede que $Z(\mathfrak{g}) = Z_p(\mathfrak{g})[z]$. $\square$

Com o Teorema 5.2.1 completamos o cálculo de $Z(\mathfrak{g})$ para $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie nilpotente de dimensão menor ou igual a 6 sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica prima, exceto nos casos mais complicados em que $\mathfrak{g}$ é uma das álgebra $\mathfrak{g}_{6,18}$ ou $\mathfrak{g}_{6,25}$. Concluímos que as álgebras $Z(\mathfrak{g}_{6,7}^{(2)}(\eta))$, $Z(\mathfrak{g}_{6,22}(\varepsilon))$, $Z(\mathfrak{g}_{6,23})$, $Z(\mathfrak{g}_{6,24}(\varepsilon))$, $Z(\mathfrak{g}_{6,27})$ e $Z(\mathfrak{g}_{6,28})$ são álgebras de polinômios, e portanto, anéis Cohen-Macaulay (Teorema 2.3.7(1)(3)). As álgebras $Z(\mathfrak{g}_{6,10})$, $Z(\mathfrak{g}_{6,11})$, $Z(\mathfrak{g}_{6,12})$, $Z(\mathfrak{g}_{6,13})$, $Z(\mathfrak{g}_{6,14})$, $Z(\mathfrak{g}_{6,15})$, $Z(\mathfrak{g}_{6,16})$, $Z(\mathfrak{g}_{6,17})$, $Z(\mathfrak{g}_{6,19}(\varepsilon))$, $Z(\mathfrak{g}_{6,20})$, $Z(\mathfrak{g}_{6,21}(\varepsilon))$ e $Z(\mathfrak{g}_{6,26})$ são isomorfas aos respectivos anéis Cohen-Macaulay do Teorema 2.6.4.

5.2.1 O centro $Z(\mathfrak{g}_{6,25})$

Sobre um corpo $\mathbb{F}$ a álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,25}$ (ver Tabela 5.1) é uma álgebra de Lie nilpotente de classe $\mathrm{cl}(\mathfrak{g}) = 3$ e centro $C(\mathfrak{g}) = \langle x_5, x_6 \rangle_{\mathbb{F}}$. Assim, assumindo que $\mathbb{F}$ é um corpo de característica prima $p \geq 3$ vemos pelo Teorema 3.3.2 que o p-centro de $U(\mathfrak{g})$ é dado por $Z_p(\mathfrak{g}) = \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5, x_6]$. Considere os seguintes elementos em $U(\mathfrak{g})$

$$z_1 = x_3^2 - 2x_2x_5,$$
$$z_2 = x_3x_6 - x_4x_5.$$

O principal resultado dessa seção é o seguinte teorema:

Teorema 5.2.2. *Seja $p \geq 3$ e $\mathbb{F}$ um corpo de característica prima p. Ponha $R = Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$. Então, o fecho integral de R em Frac(R) é igual ao fecho integral de R na localização R_{x_5}. Além disso, este fecho integral é igual ao centro $Z(\mathfrak{g})$.*

A partir de agora, no que resta dessa seção, vamos demonstar o Teorema 5.2.2. Inicialmente vamos verificar que $z_1, z_2 \in Z(\mathfrak{g})$. Observe que $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in C_{\mathfrak{g}}(z_i),\ i = 1, 2$. Assim, z_1 e z_2 são centrais se $\text{ad}_{x_1}(z_1) = \text{ad}_{x_2}(z_2) = 0$. Usando que ad_{x_2} é uma derivação de $U(\mathfrak{g})$ e a tabela de multiplicação de $\mathfrak{g}$ dada na Tabela 5.1, vemos que

$$\begin{aligned}
\text{ad}_{x_1}(z_1) &= \text{ad}_{x_1}\big(x_3^2 - 2x_2x_5\big) = \text{ad}_{x_1}(x_3^2) - 2\text{ad}_{x_1}(x_2x_5) \\
&= [x_1, x_3]x_3 + x_3[x_1, x_3] - 2([x_1, x_2]x_5) \\
&= 2x_3x_5 - 2x_3x_5 = 0, \\
\text{ad}_{x_1}(z_2) &= \text{ad}_{x_1}\big(x_3x_6 - x_4x_5\big) = \text{ad}_{x_1}(x_3x_6) - \text{ad}_{x_1}(x_4x_5) \\
&= [x_1, x_3]x_6 - [x_1, x_4]x_5 \\
&= x_5x_6 - x_5x_6 = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $z_1, z_2 \in Z(\mathfrak{g})$. Note que $z_1, z_2 \notin Z_p(\mathfrak{g})$, mas $z_1^p, z_2^p \in Z_p(\mathfrak{g})$. Logo, a extensão $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2] \subseteq Z(\mathfrak{g})$ é uma extensão integral de anéis (Corolário 3.3.3(2)).

Proposição 5.2.3. *Os corpos de frações de $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$ e $Z(\mathfrak{g})$ são iguais. Além disso, $Z(\mathfrak{g})$ é o fecho integral de $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$ no seu corpo de frações $K_p(\mathfrak{g})(z_1, z_2)$.*

Demonstração. Primeiro afirmamos que $K_p(\mathfrak{g})(z_1) \subset K_p(\mathfrak{g})(z_1, z_2)$ é uma inclusão estrita, onde $K_p(\mathfrak{g})(z_1)$ e $K_p(\mathfrak{g})(z_1, z_2)$ são os corpos de frações de $Z_p(\mathfrak{g})[z_1]$ e $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$, respectivamente. De fato, veja que

$$\begin{aligned}
&z_1 \in Z_p(\mathfrak{g})[x_2, x_3], \\
&z_2 \in Z_p(\mathfrak{g})[x_3, x_4].
\end{aligned}$$

Com isso, $Z_p(\mathfrak{g})[z_1] \subset Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$ é uma inclusão estrita. Consequentemente, vale que $K_p(\mathfrak{g})(z_1) \subset K_p(\mathfrak{g})(z_1, z_2)$. Segue do Teorema 3.3.6 que $K(\mathfrak{g}) = K_p(\mathfrak{g})(z_1, z_2)$.

Agora vamos mostrar a segunda parte da proposição. Para isso, seja S o fecho integral de $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$ em $K_p(\mathfrak{g})(z_1, z_2)$. Seja $y \in S$. Então y também é integral sobre $Z(\mathfrak{g})$ e $y \in K(\mathfrak{g})$. É fato que $Z(\mathfrak{g})$ é integralmente fechado (Teorema 3.1.3), por isso $y \in Z(\mathfrak{g})$. Assim, $S \subseteq Z(\mathfrak{g})$. Para a inclusão contrária, lembramos que $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2] \subseteq Z(\mathfrak{g})$ é uma extensão integral e como $Z(\mathfrak{g}) \subseteq K(\mathfrak{g}) = K_p(\mathfrak{g})(z_1, z_2)$ temos também que $Z(\mathfrak{g}) \subseteq S$. $\square$

A Proposição 5.2.3 descreve os elementos de $K(\mathfrak{g})$ como expressões polinomiais em z_1 e z_2 com coeficientes em $K_p(\mathfrak{g})$. Como $Z(\mathfrak{g}) \subset K(\mathfrak{g})$, temos também que os elementos de $Z(\mathfrak{g})$ são polinômios em $K_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$.

Seja $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]_{x_5}$ a localização pelo conjunto multiplicativo gerado por x_5. O Lema 2.2.1 garante a igualdade $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]_{x_5} = Z_p(\mathfrak{g})_{x_5}[z_1, z_2]$. Sejam também os polinômios $f_1 = t_1^p - z_1^p \in Z_p(\mathfrak{g})[t_1]$ e $f_2 = t_2^p - z_2^p \in Z_p(\mathfrak{g})[z_1][t_2]$.

Proposição 5.2.4. *As seguintes afirmações são verdadeiras.*

1. *Os polinômios f_1 e f_2 são elementos primos de $Z_p(\mathfrak{g})[t_1]$ e $Z_p(\mathfrak{g})[z_1][t_2]$.*

2. *O anel $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$ é um CM anel com $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2] \cong Z_p(\mathfrak{g})[t_1, t_2]/(f_1, f_2)$.*

3. *O domínio $Z_p(\mathfrak{g})_{x_5}[z_1, z_2]$ é integralmente fechado e ainda $Z(\mathfrak{g})_{x_5} = Z_p(\mathfrak{g})_{x_5}[z_1, z_2]$.*

Demonstração. Para 1, denotamos $A_1 = Z_p(\mathfrak{g})$, $A_2 = Z_p(\mathfrak{g})[z_1]$ e $A_3 = Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$. Como $z_1 \notin \mathrm{Frac}(A_1) = K_p(\mathfrak{g})$ temos que $z_1^p \notin \Big(K_p(\mathfrak{g})\Big)^p$, pois se $z_1^p = u^p$ com $u \in K_p(\mathfrak{g})$, então teríamos $(z_1 - u)^p = 0$ donde $z_1 = u \in K_p(\mathfrak{g})$, que não ocorre. Pelo Lema 2.5.1 temos que f_1 é irredutível em $K_p(\mathfrak{g})[t_1]$ e pelo Lema 2.5.2 segue que f_1 é um elemento primo de $Z_p(\mathfrak{g})[t_1]$. Do mesmo modo, dado que $z_2 \notin \mathrm{Frac}(A_2) = K_p(\mathfrak{g})(z_1)$ vemos que $z_2^p \notin \Big(K_p(\mathfrak{g})(z_1)\Big)^p$. Pelo Lema 2.5.1 também f_2 é irredutível em $K_p(\mathfrak{g})(z_1)[t_2]$ e pelo Lema 2.5.2 segue que f_2 é um elemento primo de $Z_p(\mathfrak{g})[z_1][t_2]$.

Para 2, a parte 1 e o Corolário 2.5.5 dá o isomorfismo $Z_p(\mathfrak{g})[t_1]/(f_1) \cong Z_p(\mathfrak{g})[z_1]$. Também, a parte 1 e o Lema 2.5.4 nos cede que $Z_p(\mathfrak{g})[z_1][t_2]/(f_2) \cong Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$. Com isso,

$$\frac{Z_p(\mathfrak{g})[t_1, t_2]}{(f_1, f_2)} \cong \frac{Z_p(\mathfrak{g})[z_1][t_2]}{(f_2)} \cong Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2].$$

Além disto, f_1, f_2 é uma sequência regular em $Z_p(\mathfrak{g})[t_1, t_2]$. Pelo Teorema 2.3.4 temos que $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$ é um CM anel.

Para 3, primeiro temos que $\Big(Z_p(\mathfrak{g})[t_1, t_2]/(f_1, f_2)\Big)_{x_5}$ é isomorfo ao anel do Teorema 2.6.5. Pela parte 2 temos que $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2] \cong Z_p(\mathfrak{g})[t_1, t_2]/(f_1, f_2)$ e assim $Z_p(\mathfrak{g})_{x_5}[z_1, z_2] \cong \Big(Z_p(\mathfrak{g})[t_1, t_2]/(f_1, f_2)\Big)_{x_5}$. O anel do Teorema 2.6.5 é um CM anel que satisfaz a condição de Serre (R_k) com $k \geq 0$. Além disso, como $Z_p(\mathfrak{g})_{x_5}[z_1, z_2]$ é um domínio, segue pelo Teorema 2.4.5(3) que $Z_p(\mathfrak{g})_{x_5}[z_1, z_2]$ é um domínio integralmente fechado.

Para a segunda afirmação da parte 3, considere a localização $Z(\mathfrak{g})_{x_5}$. Pelo Teorema 2.4.2 também $Z(\mathfrak{g})_{x_5}$ é integralmente fechado. A extensão $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]_{x_5} \subseteq Z(\mathfrak{g})_{x_5}$ é integral, pois $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2] \subseteq Z(\mathfrak{g})$ é uma extensão integral. Pela Proposição 5.2.3 os corpos de frações de $Z(\mathfrak{g})_{x_5}$ e $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]_{x_5}$ coincidem. Já que $Z_p(\mathfrak{g})_{x_5}[z_1, z_2]$ é integralmente fechado obtemos a igualdade $Z(\mathfrak{g})_{x_5} = Z_p(\mathfrak{g})_{x_5}[z_1, z_2]$. □

Corolário 5.2.5. *O fecho integral de $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$ em $K_p(\mathfrak{g})$ coincide com seu fecho integral em $Z_p(\mathfrak{g})_{x_5}[z_1, z_2]$. Além disso, este fecho integral é igual a $Z(\mathfrak{g})$.*

Demonstração. Primeiramente lembramos que já mostramos na Proposição 5.2.3 que $Z(\mathfrak{g})$ é o fecho integral de $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$ em $K_p(\mathfrak{g})(z_1, z_2)$. Agora, seja S o fecho integral de $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$ na localização $Z_p(\mathfrak{g})_{x_5}[z_1, z_2]$. Por um lado, $Z_p(\mathfrak{g})_{x_5}[z_1, z_2]$ é um subanel de $K_p(\mathfrak{g})(z_1, z_2)$, e portanto, segue da Proposição 5.2.3 que $S \subseteq Z(\mathfrak{g})$. Por outro lado, a extensão $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2] \subset Z(\mathfrak{g})$ é integral e temos pela Proposição 5.2.4(3) a igualdade $Z(\mathfrak{g})_{x_5} = Z_p(\mathfrak{g})_{x_5}[z_1, z_2]$. Como $Z(\mathfrak{g}) \subseteq Z(\mathfrak{g})_{x_5}$ concluímos que $Z(\mathfrak{g}) \subseteq S$. Logo, $Z(\mathfrak{g})$ é o fecho integral de $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$ em $Z_p(\mathfrak{g})_{x_5}[z_1, z_2]$. □

Com o Corolário 5.2.5 concluímos a prova do Teorema 5.2.2.

Observação 5.2.6. Os corpos de frações do centro $Z(\mathfrak{g})$ e do domínio $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$ são iguais (Proposição 5.2.3) além disso, $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2] \subseteq Z(\mathfrak{g})$ é uma extensão integral. Portanto, se $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$ fosse integralmente fechado teríamos que $Z(\mathfrak{g}) = Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$. Isso não ocorre, pois $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$ não é integralmente fechado. Primeiro, pela Proposição 5.2.4(2) temos que $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2] \cong \mathbb{F}[\mathfrak{t}_8]/(f_1, f_2)$, onde $\mathbb{F}[\mathfrak{t}_8]/(f_1, f_2)$ é o quociente do Teorema 2.6.5. O seguinte elemento

$$z_3 = \frac{x_6^2 z_1 - z_2^2}{x_5} = 2x_3x_4x_6 - 2x_2x_6^2 - x_4^2x_5 \in K_p(\mathfrak{g})(z_1, z_2)$$

satisfaz a relação $x_6^2 z_1 - z_2^2 - x_5 z_3 = 0$. Observe que $z_3^p \in Z_p(\mathfrak{g})$. Logo, z_3 é integral sobre $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$.

Afirmamos que $z_3 \notin Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$. De fato, seja $\mathfrak{h}$ a álgebra de Lie nilpotente de dimensão 8 sobre $\mathbb{F}$ definida pelos comutadores $[x_1, x_2] = x_3$, $[x_1, x_3] = x_5$, $[x_1, x_4] = x_6$ e $[x_4, x_7] = x_8$, onde $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$ é uma base de $\mathfrak{h}$. Então $\mathfrak{g}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{h}$ com base $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$. Agora, $p \geq 3$ e $\mathrm{cl}(\mathfrak{h}) = \mathrm{cl}(\mathfrak{g}) = 3$ dá com o Teorema 3.3.2 que

$$Z_p(\mathfrak{h}) = \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_7^p, x_5, x_6, x_8].$$

Note que $z_1 \in Z(\mathfrak{h})$, pois $x_7, x_8 \in C_{U(\mathfrak{h})}(z_1)$. Por $Z_p(\mathfrak{g}) \subseteq Z_p(\mathfrak{h})$ temos $Z_p(\mathfrak{g})[z_1] \subseteq Z(\mathfrak{h})$. Com z_2 temos que

$$\mathrm{ad}_{x_7}(z_2) = \mathrm{ad}_{x_7}(x_3x_6 - x_4x_5) = -\mathrm{ad}_{x_7}(x_4x_5) = x_5x_8 \in Z(\mathfrak{h}).$$

Portanto, $\mathrm{ad}_{x_7}\Big(Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]\Big) \subseteq Z(\mathfrak{h})$. Mas,

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_{x_7}(z_3) &= \mathrm{ad}_{x_7}(2x_3x_4x_6 - 2x_2x_6^2 - x_4^2x_5) = \mathrm{ad}_{x_7}(2x_3x_4x_6 - x_4^2x_5) \\
&= 2\mathrm{ad}_{x_7}(x_3x_4x_6) - \mathrm{ad}_{x_7}(x_4^2x_5) = -2x_3x_6x_8 + 2x_4x_5x_8 \\
&= -2x_8(x_3x_6 - x_4x_5) = -2x_8z_2 \notin Z(\mathfrak{h}).
\end{aligned}$$

Assim, $z_3 \notin Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$. Portanto, $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$ não é integralmente fechado.

Em suma o Teorema 5.2.2 diz que $Z(\mathfrak{g})$ é gerado sobre $Z_p(\mathfrak{g})$ por expressões da forma $f(z_1, z_2)/x_5^n$ com $f(z_1, z_2) \in Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$ e $n \geq 0$ inteiro. Essa é a melhor descrição do centro $Z(\mathfrak{g})$ que conseguimos obter em característica prima p. Quando o corpo considerado é algebricamente fechado de característica zero, Alfons Ooms em [28] concluiu que $Z(\mathfrak{g}_{6,25}) = \mathbb{F}[x_5, x_6, z_1, z_2, z_3]$. A álgebra $Z(\mathfrak{g}_{6,25})$ também em característica zero não é uma álgebra de polinômios, pois $x_6^2 z_1 - z_2^2 - x_5 z_3 = 0$. Em [28] a álgebra $\mathfrak{g}_{6,25}$ é denotada por $\mathfrak{g}_{6,6}$ e possui uma apresentação diferente. Seguimos a notação de [8].

Utilizando o software Macaulay2, conseguimos calcular os geradores de $Z(\mathfrak{g})$ para $p = 3$ e $p = 5$. O conjunto gerador para $p = 3$ é o conjunto

$$\Big\{x_1^3, x_2^3, x_3^3, x_4^3, x_5, x_6, z_1, z_2, z_3, \frac{x_3^3x_6 - z_1z_2}{x_5}, \frac{x_6z_1^2 - x_3^3z_2}{x_5}, \frac{x_3^3x_4^3x_5z_1 - x_2^3x_5x_6z_2^2}{x_3^3x_6 - z_1z_2}, \frac{x_4^3x_5z_1^2 - x_2^3x_5x_6^2z_2}{x_3^3x_6 - z_1z_2}\Big\}.$$

O conjunto gerador para $p = 5$ é o seguinte:

$$\Big\{x_1^5, x_2^5, x_3^5, x_4^5, x_5, x_6, z_1, z_2, z_3, \frac{x_6^2z_1^3z_2 - 2x_3^5x_6^3z_1 + 2z_1^2z_2^3 - x_3^5x_6z_2^2}{x_5^3}, \frac{z_1^2z_2 - x_3^5x_6}{x_5}, \frac{x_6z_1^3 - x_3^5z_2}{x_5}, \frac{x_6^2z_1^3 + z_1^2z_2^2 - 2x_3^5x_6z_2}{x_5^2}, \frac{x_6^2z_1^2z_2 + x_3^5x_6^3 - 2z_1z_2^3}{x_5^2}, \frac{x_6z_1^3z_2 + 2x_3^5x_6^2z_1 + 2x_3^5z_2^2}{x_5^2}, \frac{x_6^3z_1^4 - 2x_6z_1^3z_2^2 + 2x_3^5x_6^2z_1z_2 - x_3^5z_2^3}{x_5^3}, \frac{x_6^4z_1^3 + 2x_6^2z_1^2z_2^2 - x_3^5x_6^3z_2 - 2z_1z_2^4}{x_5^3}, \frac{-2x_2^5x_5x_6^4z_1z_2 - 2x_2^5x_5x_6^2z_2^3 - x_4^5x_5z_1^4}{z_1^2z_2 - x_3^5x_6}, \frac{-2x_2^5x_5x_6^3z_1z_2^2 - 2x_2^5x_5x_6z_2^4 - x_3^5x_4^5x_5^5z_1^2}{z_1^2z_2 - x_3^5x_6}\Big\}.$$

5.2.2 O centro $Z(\mathfrak{g}_{6,18})$

Sejam $\mathbb{F}$ um corpo e $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{6,18}$ a álgebra de Lie com base $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ sobre $\mathbb{F}$ e definida pelos comutadores $[x_1, x_i] = x_{i+1},\ 2 \leq i \leq 5$ (ver Tabela 5.1). Note que $C(\mathfrak{g}) = \langle x_6\rangle_{\mathbb{F}}$ e que $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie nilpotente standard filiform com $\mathrm{cl}(\mathfrak{g}) = 5$. Assuma que $\mathbb{F}$ é um corpo de característica prima $p \geq 5$. Então pelo Teorema 3.3.2, o p-centro de $U(\mathfrak{g})$ é dado por $Z_p(\mathfrak{g}) = \mathbb{F}[x_1^p, x_2^p, x_3^p, x_4^p, x_5^p, x_6]$. Considere os seguintes elementos em $U(\mathfrak{g})$

$$z_1 = x_5^2 - 2x_4x_6, \tag{5.1}$$

$$z_2 = x_5^3 - 3x_4x_5x_6 + 3x_3x_6^2, \tag{5.2}$$

$$z_3 = x_4^2 + 2x_2x_6 - 2x_3x_5. \tag{5.3}$$

Nessa seção nosso trabalho será demonstrar o seguinte teorema

Teorema 5.2.7. *Seja $\mathbb{F}$ um corpo de característica prima $p \geq 5$ e seja $R = Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2, z_3]$. Então, o fecho integral de R em Frac(R) é igual ao fecho integral de R na localização R_{x_6}. Além disso, este fecho integral é igual ao centro $Z(\mathfrak{g})$.*

No resto dessa seção vamos demonstrar o Teorema 5.2.7. Primeiro vamos mostrar que $z_1, z_2, z_3 \in Z(\mathfrak{g})$. Pela definição dos comutadores em $\mathfrak{g}$ temos que $x_i \in C_{\mathfrak{g}}(z_j)$ para cada $2 \leq i \leq 6$ e $1 \leq j \leq 3$. Assim, cada z_j será central se $\mathrm{ad}_{x_1}(z_j) = 0$. Usando que ad_{x_1}

é uma derivação de $U(\mathfrak{g})$ vemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_{x_1}(z_1) &= \mathrm{ad}_{x_1}\big(x_5^2-2x_4x_6\big)=\mathrm{ad}_{x_1}(x_5^2)-2\mathrm{ad}_{x_1}(x_4x_6)\\
&= [x_1,x_5]x_5+x_5[x_1,x_5]-2\big([x_1,x_4]x_6+x_4[x_1,x_6]\big)\\
&= 2x_6x_5-2x_5x_6\\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_{x_1}(z_2) &= \mathrm{ad}_{x_1}\big(x_5^3-3x_4x_5x_6+3x_3x_6^2\big)\\
&= \mathrm{ad}_{x_1}(x_5^3)-3\mathrm{ad}_{x_1}(x_4x_5x_6)+3\mathrm{ad}_{x_1}(x_3x_6^2)\\
&= [x_1,x_5]x_5^2+x_5[x_1,x_5]x_5+x_5^2[x_1,x_5]\\
&- 3\big([x_1,x_4]x_5x_6+x_4[x_1,x_5]x_6+x_4x_5[x_1,x_6]\big)\\
&+ 3\big([x_1,x_3]x_6^2+x_3[x_1,x_6^2]\big)\\
&= 3x_5^2x_6-3x_5^2x_6-3x_4x_6^2+3x_4x_6^2\\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_{x_1}(z_3) &= \mathrm{ad}_{x_1}\big(x_4^2+2x_2x_6-2x_3x_5\big)\\
&= \mathrm{ad}_{x_1}(x_4^2)+2\mathrm{ad}_{x_1}(x_2x_6)-2\mathrm{ad}_{x_1}(x_3x_5)\\
&= [x_1,x_4]x_4+x_4[x_1,x_4]\\
&+ 2\big([x_1,x_2]x_6+x_2[x_1,x_6]\big)-2\big([x_1,x_3]x_5+x_3[x_1,x_5]\big)\\
&= 2x_5x_4+2x_3x_6-2x_4x_5-2x_3x_6\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $z_1,z_2,z_3\in Z(\mathfrak{g})$. Ainda observe que $z_1,z_2,z_3\in Z(\mathfrak{g})\setminus Z_p(\mathfrak{g})$. Note que $z_1^p,z_2^p,z_3^p\in Z_p(\mathfrak{g})$. Além disso, $Z_p(\mathfrak{g})[z_1,z_2,z_3]\subseteq Z(\mathfrak{g})$ é uma extensão integral de domínios , pelo Corolário 3.3.3(2).

Proposição 5.2.8. *Os corpos de frações de $Z_p(\mathfrak{g})[z_1,z_2,z_3]$ e $Z(\mathfrak{g})$ são iguais. Ademais, $Z(\mathfrak{g})$ é o fecho integral de $Z_p(\mathfrak{g})[z_1,z_2,z_3]$ no seu corpo de frações $K_p(\mathfrak{g})(z_1,z_2,z_3)$.*

Demonstração. Afirmamos que $K_p(\mathfrak{g})(z_1)\subset K_p(\mathfrak{g})(z_1,z_2)\subset K_p(\mathfrak{g})(z_1,z_2,z_3)$ são inclusões estritas, onde $K_p(\mathfrak{g})(z_1),\ K_p(\mathfrak{g})(z_1,z_2)$ e $K_p(\mathfrak{g})(z_1,z_2,z_3)$ são os corpos de frações de $Z_p(\mathfrak{g})[z_1],\ Z_p(\mathfrak{g})[z_1,z_2]$ e $Z_p(\mathfrak{g})[z_1,z_2,z_3]$, respectivamente. De fato, perceba das Equaçãoes (5.1), (5.2) e (5.3) que

$$\begin{aligned}
&z_1\in Z_p(\mathfrak{g})[x_4,x_5],\\
&z_2\in Z_p(\mathfrak{g})[x_3,x_4,x_5] \text{ e } z_2\notin Z_p(\mathfrak{g})[x_4,x_5],\\
&z_3\in Z_p(\mathfrak{g})[x_2,x_3,x_4,x_5] \text{ e } z_3\notin Z_p(\mathfrak{g})[x_3,x_4,x_5].
\end{aligned}$$

Com isso, segue que $Z_p(\mathfrak{g})[z_1] \subset Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2] \subset Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2, z_3]$ são inclusões estritas e consequentemente $K_p(\mathfrak{g})(z_1) \subset K_p(\mathfrak{g})(z_1, z_2) \subset K_p(\mathfrak{g})(z_1, z_2, z_3)$. Com essa afirmação, segue do Teorema 3.3.6 que $K(\mathfrak{g}) = K_p(\mathfrak{g})(z_1, z_2, z_3)$.

Para a segunda parte da proposição, seja S o fecho integral de $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2, z_3]$ em $K_p(\mathfrak{g})(z_1, z_2, z_3)$. Dado $y \in S$ temos que y também é integral sobre $Z(\mathfrak{g})$ e que $y \in K(\mathfrak{g})$. Como $Z(\mathfrak{g})$ é integralmente fechado (Teorema 3.1.3) devemos ter que $y \in Z(\mathfrak{g})$. Logo, $S \subseteq Z(\mathfrak{g})$. A inclusão contrária é verdadeira. Com efeito, $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2, z_3] \subseteq Z(\mathfrak{g})$ é uma extensão integral e por $Z(\mathfrak{g}) \subseteq K(\mathfrak{g}) = K_p(\mathfrak{g})(z_1, z_2, z_3)$ temos que $Z(\mathfrak{g}) \subseteq S$. $\square$

A Proposição 5.2.8 dá uma descrição de $K(\mathfrak{g})$ como expressões polinomiais em z_1, z_2 e z_3 com coeficientes em $K_p(\mathfrak{g})$. Como $Z(\mathfrak{g}) \subset K(\mathfrak{g})$, obtemos também que os elementos de $Z(\mathfrak{g})$ são polinômios em $K_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2, z_3]$.

Seja $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2, z_3]_{x_6}$ a localização pelo conjunto multiplicativo gerado por x_6. O Lema 2.2.1 garante a igualdade $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2, z_3]_{x_6} = Z_p(\mathfrak{g})_{x_6}[z_1, z_2, z_3]$. Sejam também os polinômios

$$\begin{aligned} f_1 &= t_1^p - z_1^p \in Z_p(\mathfrak{g})[t_1], \\ f_2 &= t_2^p - z_2^p \in Z_p(\mathfrak{g})[z_1][t_2], \\ f_3 &= t_3^p - z_3^p \in Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2][t_3]. \end{aligned}$$

Proposição 5.2.9. *As seguintes afirmações são verdadeiras.*

1. *Os polinômios f_1, f_2 e f_3 são elementos primos de $Z_p(\mathfrak{g})[t_1]$, $Z_p(\mathfrak{g})[z_1][t_2]$ e de $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2][t_3]$, respectivamente.*

2. *$Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2, z_3]$ é um CM anel com $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2, z_3] \cong Z_p(\mathfrak{g})[t_1, t_2, t_3]/(f_1, f_2, f_3)$.*

3. *O domínio $Z_p(\mathfrak{g})_{x_6}[z_1, z_2, z_3]$ é um domínio integralmente fechado e vale a igualdade $Z(\mathfrak{g})_{x_6} = Z_p(\mathfrak{g})_{x_6}[z_1, z_2, z_3]$.*

Demonstração. Considere as notações

$$A_1 = Z_p(\mathfrak{g}),\ A_2 = Z_p(\mathfrak{g})[z_1],\ A_3 = Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2],\ A_4 = Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2, z_3]$$

e seja $i \in \{1, 2, 3\}$.

Para 1, como $z_i \notin \text{Frac}(A_i)$ temos que $z_i^p \notin \Big(\text{Frac}(A_i)\Big)^p$, pois se $z_i^p = u^p$ com $u \in \text{Frac}(A_i)$, então teríamos $(z_i - u)^p = 0$ donde $z_i = u \in \text{Frac}(A_i)$, que não ocorre. Pelo Lema 2.5.1, temos que f_i é irredutível em $\text{Frac}(A_i)[t_i]$ e pelo Lema 2.5.2 segue que f_i é um elemento primo de $A_i[t_i]$.

Para 2, observe que a parte 1 e o Lema 2.5.4 nos cede para cada $i \in \{1, 2, 3\}$ os isomorfismos

$$A_i[t_i]/(f_i) \cong A_{i+1} \tag{5.4}$$

Com isso,

$$\frac{A_1[t_1,t_2,t_3]}{(f_1,f_2,f_3)} \cong \frac{A_2[t_2,t_3]}{(f_2,f_3)} \cong \frac{A_3[t_3]}{(f_3)} \cong A_4. \tag{5.5}$$

Além disto, os isomorfismos (5.4) implicam que f_1, f_2, f_3 é uma sequência regular em $A_1[t_1, t_2, t_3]$. Pelo Teorema 2.3.4, temos que A_4 é um CM anel.

Vamos mostrar 3. Pelos isomorfismos (5.5) temos $A_4 \cong A_1[t_1,t_2,t_3]/(f_1,f_2,f_3)$. Segue disso que $\left(A_4\right)_{x_6}$ é isomorfo ao anel do Teorema 2.6.6, o qual é um CM anel que satisfaz a condição de Serre (R_k) com $k \geq 0$. Além disso, como $\left(A_4\right)_{x_6}$ é um domínio, segue pelo Teorema 2.4.5(3) que $\left(A_4\right)_{x_6}$ é um domínio integralmente fechado.

Por fim, considere a localização $Z(\mathfrak{g})_{x_6}$. Pelo Teorema 2.4.2 temos $Z(\mathfrak{g})_{x_6}$ integralmente fechado. A extensão $\left(A_4\right)_{x_6} \subseteq Z(\mathfrak{g})_{x_6}$ é integral, pois $A_4 \subseteq Z(\mathfrak{g})$ é uma extensão integral. Pela Proposição 5.2.8 os corpos de frações de $Z(\mathfrak{g})_{x_6}$ e $\left(A_4\right)_{x_6}$ coincidem. Dado que $\left(A_4\right)_{x_6}$ é integralmente fechado segue a igualdade $Z(\mathfrak{g})_{x_6} = \left(A_4\right)_{x_6}$. □

Por último, o próximo corolário conclui a prova do Teorema 5.2.7.

Corolário 5.2.10. *O fecho integral de $Z_p(\mathfrak{g})[z_1,z_2,z_3]$ em $K_p(\mathfrak{g})$ coincide com seu fecho integral em $Z_p(\mathfrak{g})_{x_6}[z_1,z_2,z_3]$. Além disso, este fecho integral é igual a $Z(\mathfrak{g})$.*

Demonstração. Por um lado, mostramos na Proposição 5.2.8 que $Z(\mathfrak{g})$ é o fecho integral de $Z_p(\mathfrak{g})[z_1,z_2,z_3]$ em $K_p(\mathfrak{g})(z_1,z_2,z_3)$. Por outro lado, seja S o fecho integral de $Z_p(\mathfrak{g})[z_1,z_2,z_3]$ em $Z_p(\mathfrak{g})_{x_6}[z_1,z_2,z_3]$. Primeiro, $Z_p(\mathfrak{g})_{x_6}[z_1,z_2,z_3]$ é um subanel do corpo $K_p(\mathfrak{g})(z_1,z_2,z_3)$, e portanto, segue da Proposição 5.2.8 que $S \subseteq Z(\mathfrak{g})$. Agora, a extensão $Z_p(\mathfrak{g})[z_1,z_2,z_3] \subset Z(\mathfrak{g})$ é integral e temos pela Proposição 5.2.9(3) a igualdade $Z(\mathfrak{g})_{x_6} = Z_p(\mathfrak{g})_{x_6}[z_1,z_2,z_3]$. Uma vez que $Z(\mathfrak{g}) \subseteq Z(\mathfrak{g})_{x_6}$ concluímos que $Z(\mathfrak{g}) \subseteq S$. Logo, $Z(\mathfrak{g}) = S$. □

Observação 5.2.11. Os corpos de frações do centro $Z(\mathfrak{g})$ e do domínio $Z_p(\mathfrak{g})[z_1,z_2,z_3]$ são iguais (Proposição 5.2.8) além disso, $Z_p(\mathfrak{g})[z_1,z_2,z_3] \subseteq Z(\mathfrak{g})$ é uma extensão integral. Portanto, se $Z_p(\mathfrak{g})[z_1,z_2,z_3]$ fosse integralmente fechado teríamos que $Z(\mathfrak{g}) = Z_p(\mathfrak{g})[z_1,z_2,z_3]$. Isso não ocorre, pois $Z_p(\mathfrak{g})[z_1,z_2,z_3]$ não é integralmente fechado. Primeiro, pela Proposição 5.2.9(2) temos que $Z_p(\mathfrak{g})[z_1,z_2,z_3] \cong \mathbb{F}[\mathsf{t}_9]/(f_1,f_2,f_3)$, onde $\mathbb{F}[\mathsf{t}_9]/(f_1,f_2,f_3)$ é o quociente do Teorema 2.6.6. O seguinte elemento

$$z_4 = 2x_4^3 + 6x_2x_5^2 + 9x_3^2x_6 - 12x_2x_4x_6 - 6x_3x_4x_5 \in U(\mathfrak{g})$$

satisfaz a relação $z_1^3 - z_2^2 - 3x_6^2z_1z_3 + x_6^3z_4 = 0$. Isto é, podemos escrever z_4 da seguinte forma

$$z_4 = \frac{z_2^2 + 3x_6^2z_1z_3 - z_1^3}{x_6^3}.$$

Portanto, $z_4 \in K_p(\mathfrak{g})(z_1,z_2,z_3)$. Observe que $z_4^p \in Z_p(\mathfrak{g})$. Logo, z_4 é integral sobre $Z_p(\mathfrak{g})[z_1,z_2,z_3]$.

Afirmamos que $z_4 \notin Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2, z_3]$. De fato, considere $\mathfrak{h}$ a álgebra de Lie nilpotente de dimensão 8 sobre $\mathbb{F}$ definida pelos comutadores $[x_1, x_i] = x_{i+1},\ 2 \leq i \leq 5,\ [x_2, x_7] = x_8$. Então $\mathfrak{g}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{h}$ e a definição dos comutadors de $\mathfrak{h}$ dá que $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2] \subseteq Z(\mathfrak{h})$. Também,

$$\mathrm{ad}_{x_7}(z_3) = \mathrm{ad}_{x_7}(x_4^2 + 2x_2x_6 - 2x_3x_5) = \mathrm{ad}_{x_7}(2x_2x_6) = -2x_6x_8 \in Z(\mathfrak{h}).$$

Assim, $\mathrm{ad}_{x_7}\Big(Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2, z_3]\Big) \subseteq Z(\mathfrak{h})$. Temos também que

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}_{x_7}(z_4) &= \mathrm{ad}_{x_7}(2x_4^3 + 6x_2x_5^2 + 9x_3^2x_6 - 12x_2x_4x_6 - 6x_3x_4x_5)\\ &= \mathrm{ad}_{x_7}(6x_2x_5^2 - 12x_2x_4x_6) = 6\mathrm{ad}_{x_7}(x_2x_5^2) - 12\mathrm{ad}_{x_7}(x_2x_4x_6)\\ &= -6x_5^2x_8 + 12x_4x_6x_8 \notin Z(\mathfrak{h}).\end{aligned}$$

Portanto, $z_4 \notin Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2, z_3]$. Logo, $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2, z_3]$ não é integralmente fechado.

Em suma o Teorema 5.2.7 diz que $Z(\mathfrak{g})$ é gerado sobre $Z_p(\mathfrak{g})$ por expressões da forma $f(z_1, z_2, z_3)/x_6^n$ com $f(z_1, z_2, z_3) \in Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2, z_3]$ e $n \geq 0$ inteiro. Essa é a melhor descrição do centro $Z(\mathfrak{g})$ que conseguimos obter em característica prima p. Quando o corpo considerado é algebricamente fechado de característica zero, Alfons Ooms em [28] concluiu que $Z(\mathfrak{g}_{6,18}) = \mathbb{F}[x_6, z_1, z_2, z_3, z_4]$. A álgebra $Z(\mathfrak{g}_{6,18})$ também em característica zero não é uma álgebra de polinômios, pois $z_1^3 - z_2^2 - 3x_6^2z_1z_3 + x_6^3z_4 = 0$. Em [28] a álgebra $\mathfrak{g}_{6,18}$ é denotada por $\mathfrak{g}_{6,16}$. Seguimos a notação de [8].

Para a álgebra $g_{6,18}$ também tentamos utilizar o software Macaulay2 para calcular os geradores de $Z(\mathfrak{g}_{6,18})$ para $p = 5$. Mas, o programa não conseguiu realizar os cálculos. Figura ser difícil expressar os gerados do centro nesse caso, dada a quantidade e o tamanho deles.

Juntando os Teoremas 4.1.1, 4.2.1, 4.2.2 e 5.1.1, 5.2.1, 5.2.2 e 5.2.7, a demonstração do Teorema A é completa.

Capítulo 6

O Isomorfismo entre $Z(\mathfrak{g})$ e $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ em característica positiva

Neste capítulo, nosso objetivo é completar a demonstração do Teorema B.

Nesse capítulo vamos mostar que, sobre um corpo de caracterítica prima p ímpar, o centro $Z(\mathfrak{g})$ das álgebras envolventes universais $U(\mathfrak{g})$ das álgebras de Lie nilpotentes de dimensão menor ou igual a 6 é isomorfo à álgebra de invariantes $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ (ver página 34). Isto é, que a conjectura de A. Braun (ver página 35) é verdadeira para as álgebras de Lie nilpotentes de dimensão menor ou igual a 6 em característica suficientemente grande.

6.1 Considerações gerais

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie nilpotente de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica prima p e suponhamos que $\mathrm{cl}(\mathfrak{g}) \leq p$. Seja $\{x_1, \dots, x_n\}$ uma base de $\mathfrak{g}$. Como as álgebras de polinômios $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$ e $S(\mathfrak{g})$ são isomorfas, bem como o centro de Poisson $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]^{\mathfrak{g}}$ é isomorfo à álgebra de invariantes $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$, nesse capítulo, sem perda de generalidade, vamos trabalhar com as álgebras $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$ e $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]^{\mathfrak{g}}$ para mostrar que a conjectura de Braun é verdadeira na classe de álgebras que tratamos.

Assuma que $\{x_{k+1}, \dots, x_n\}$ é uma base de $C(\mathfrak{g})$ e considere a seguinte subálgebra $\mathbb{F}[x_1^p, \dots, x_k^p, x_{k+1}, \dots, x_n]$ da álgebra de invariantes $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]^{\mathfrak{g}}$. Para faciliatar a notação, no decorrer desse capítulo escrevemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}[\mathbf{x}_n] &= \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n] & \text{e} \quad && \mathbb{F}(\mathbf{x}_n) &= \mathbb{F}(x_1, \dots, x_n), \\
P(\mathfrak{g}) &= \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{g}} & \text{e} \quad && L(\mathfrak{g}) &= \mathrm{Frac}\big(\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{g}}\big), \\
P_p(\mathfrak{g}) &= \mathbb{F}[x_1^p, \dots, x_k^p, x_{k+1}, \dots, x_n] & \text{e} \quad && L_p(\mathfrak{g}) &= \mathbb{F}(x_1^p, \dots, x_k^p, x_{k+1}, \dots, x_n).
\end{aligned}$$

Segue que $L_p(\mathfrak{g}) \subseteq \mathbb{F}(\mathbf{x}_n)$ é uma extensão puramente inseparável (Teorema 2.1.2) com grau $[\mathbb{F}(\mathbf{x}_n) : L_p(\mathfrak{g})] = p^k$. Observe que $P_p(\mathfrak{g}) \subseteq P(\mathfrak{g})$ é uma extensão integral, uma vez que, $w^p \in P_p(\mathfrak{g})$ para todo $w \in P(\mathfrak{g})$. Ainda pelo Teorema 3.3.2, temos que $Z_p(\mathfrak{g}) \cong P_p(\mathfrak{g})$.

No resto deste capítulo demonstraremos o teorema:

Teorema B. Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie nilpotente de dimensão menor ou igual a 6 sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica prima p com $\mathrm{cl}(\mathfrak{g}) \leq p$, então $Z(\mathfrak{g}) \cong S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. Em particular, a conjectura de A. Braun é verdadeira nesta classe de álgebras.

6.2 Álgebras standard filiforms

Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(n)$ a álgebra de Lie standard filiform de dimensão n sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica prima p e seja $\{x_1, \ldots, x_n\}$ uma base para $\mathfrak{g}$. Isto é, $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie definida pelos comutadores $[x_1, x_i] = x_{i+1},$ para $i = 2, \ldots, n-1$.

As álgebras de Lie standard filiform são um exemplo importante de álgebras de Lie nilpotentes onde a conjectura de A. Braun é verdadeira.

Proposição 6.2.1. *[2, Exemplo 6.4] Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(n)$ a álgebra de Lie standard filiform de dimensão n sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica prima p. Nesse caso, $Z(\mathfrak{g}) \cong S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ como álgebras.*

Corolário 6.2.2. *Seja $\mathbb{F}$ um corpo de característica prima p. Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3,\ \mathfrak{g}_4,\ \mathfrak{g}_{5,5}$ ou $\mathfrak{g}_{6,18}$. Então, $Z(\mathfrak{g}) \cong S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.*

Demonstração. Observando as tabelas de multiplicação que definem as álgebras $\mathfrak{g}_3,\ \mathfrak{g}_4,\ \mathfrak{g}_{5,5}$ (Tabela 4.1) e $\mathfrak{g}_{6,18}$ (Tabela 5.1) vemos que estas álgebras são álgebras de Lie standard filiforms. Logo, se $\mathfrak{g}$ é uma destas álgebras, então a Proposição 6.2.1 afirma que temos $Z(\mathfrak{g}) \cong S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$. □

Note que a Proposição 6.2.1 e o Corolário 6.2.2 são válidos em qualquer característica prima.

6.3 O caso $Z(\mathfrak{g}) = Z_p(\mathfrak{g})$

Nas Seções 4.1 e 5.1 calculamos os exemplos onde $Z(\mathfrak{g}) = Z_p(\mathfrak{g})$, para $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie nilpotente de dimensão até 6 sobre um corpo de caracterítica prima p, assumindo que $p \geq \mathrm{cl}(\mathfrak{g})$. Para essas álgebras temos o teorema.

Teorema 6.3.1. *Seja $\mathbb{F}$ um corpo de característica prima p. Seja*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{5,1},\ \mathfrak{g}_{5,3},\ \mathfrak{g}_{5,6}, \mathfrak{g}_{6,7}^{(2)}(\eta), \mathfrak{g}_{6,22}(\varepsilon), \mathfrak{g}_{6,23}, \mathfrak{g}_{6,24}(\varepsilon), \mathfrak{g}_{6,27} \text{ ou } \mathfrak{g}_{6,28}.$$

Assuma que $p \geq cl(\mathfrak{g})$ ($p = 2$ para $\mathfrak{g}_{6,7}^{(2)}(\eta)$). Então, $Z(\mathfrak{g}) \cong S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.

Demonstração. Seja $\mathfrak{g}$ uma das álgebras do teorema. Pelos Teoremas 4.1.1 e 5.1.1 temos que $Z(\mathfrak{g}) = Z_p(\mathfrak{g})$. Considere $\{x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n\}$ uma base de $\mathfrak{g}$ tal que $\{x_{k+1}, \ldots, x_n\}$ é uma base de $C(\mathfrak{g})$. Estas bases são explicitamente apresentadas nos Capítulos 4 e 5 nas páginas 39 e 50.

Seja $f \in \mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$. Pela Proposição 3.2.3 temos que $f \in P(\mathfrak{g})$ se, e somente se, f é solução do sistema de equações diferenciais $\sum_{j=1}^{n}[x_i, x_j]\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Usando as tabelas de multiplicação para estas álgebras (ver Tabelas 4.1 e 5.1) obtemos que este sistema tem a seguinte forma nestes casos

Álgebra $\mathfrak{g}_{5,1}$:

$$x_5\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad -x_5\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad x_5\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0 \quad \text{e} \quad -x_5\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0.$$

Álgebra $\mathfrak{g}_{5,3}$:

$$x_4\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_5\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0, \quad -x_4\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_5\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0,$$
$$-x_5\frac{\partial f}{x_2} = 0 \quad \text{e} \quad -x_5\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0.$$

Álgebra $\mathfrak{g}_{5,6}$:

$$x_3\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_4\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_5\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0, \quad -x_3\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_5\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0,$$
$$-x_4\frac{\partial f}{\partial x_1} - x_5\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \quad \text{e} \quad -x_5\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0.$$

Álgebra: $\mathfrak{g}_{6,23}$:

$$x_3\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_5\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0, \quad -x_3\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_5\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0,$$
$$-x_5\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \quad \text{e} \quad -x_6\frac{\partial f}{\partial x_1} - x_5\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0.$$

Álgebra: $\mathfrak{g}_{6,27}$:

$$x_3\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_5\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0, \quad -x_3\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0,$$
$$-x_5\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \quad \text{e} \quad -x_6\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0.$$

Álgebra: $\mathfrak{g}_{6,28}$*:*

$$x_3\frac{\partial f}{\partial x_2}+x_4\frac{\partial f}{\partial x_3}+x_5\frac{\partial f}{\partial x_4}=0,\quad -x_3\frac{\partial f}{\partial x_1}+x_6\frac{\partial f}{\partial x_3}=0,$$
$$-x_4\frac{\partial f}{\partial x_1}-x_6\frac{\partial f}{\partial x_2}=0\quad \text{e}\quad -x_5\frac{\partial f}{\partial x_1}=0.$$

Considerando estas equações e considerando que $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$ não tem divisores de zero, nestes casos pode-se concluir que $f\in P(\mathfrak{g})$ se, e somente se,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}=0,\ \text{para todo } j=1,\dots,k.$$

Álgebra: $g_{6,7}^{(2)}(\eta)$*:*

$$x_5\frac{\partial f}{\partial x_2}+x_6\frac{\partial f}{\partial x_3}=0, \tag{6.1}$$

$$-x_5\frac{\partial f}{\partial x_1}+\eta x_6\frac{\partial f}{\partial x_4}=0, \tag{6.2}$$

$$-x_6\frac{\partial f}{\partial x_1}+(x_5+x_6)\frac{\partial f}{\partial x_4}=0, \tag{6.3}$$

$$-\eta x_6\frac{\partial f}{\partial x_2}-(x_5+x_6)\frac{\partial f}{\partial x_3}=0. \tag{6.4}$$

Se $\eta=0$, então $-x_5\frac{\partial f}{\partial x_1}=-(x_5+x_6)\frac{\partial f}{\partial x_3}=0$. Como $x_5, x_5+x_6\neq 0$ e como $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$ não tem divisores de zero temos que $\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_3}=0$. Logo, $\frac{\partial f}{\partial x_2}=\frac{\partial f}{\partial x_4}=0$.

Se $\eta\neq 0$, então multiplicando a Equação (6.1) por $-\eta x_6$, a Equação (6.2) por $-x_6$ e as Equações (6.3) e (6.4) por x_5 obtemos

$$-\eta x_5x_6\frac{\partial f}{\partial x_2}-\eta x_6^2\frac{\partial f}{\partial x_3}=0, \tag{6.5}$$

$$x_5x_6\frac{\partial f}{\partial x_1}-\eta x_6^2\frac{\partial f}{\partial x_4}=0, \tag{6.6}$$

$$-x_5x_6\frac{\partial f}{\partial x_1}+(x_5^2+x_5x_6)\frac{\partial f}{\partial x_4}=0, \tag{6.7}$$

$$-\eta x_5x_6\frac{\partial f}{\partial x_2}-(x_5^2+x_5x_6)\frac{\partial f}{\partial x_3}=0. \tag{6.8}$$

Agora, somando as Equações (6.5) e (6.8) e somando as Equações (6.6) e (6.7) temos que

$$(x_5^2+x_5x_6-\eta x_6^2)\frac{\partial f}{\partial x_3}=0\quad \text{e}\quad (x_5^2+x_5x_6-\eta x_6^2)\frac{\partial f}{\partial x_4}=0.$$

Como $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$ não tem divisores de zero temos que $\frac{\partial f}{\partial x_3}=\frac{\partial f}{\partial x_4}=0$ ou $x_5^2+x_5x_6-\eta x_6^2=0$. Observe que a segunda opção não acontece, pois se $x_5^2+x_5x_6-\eta x_6^2=0$, então $x_5^2+x_5x_6=\eta x_6^2\in\mathbb{F}[x_6]$, que não é verdade. Portanto, $\frac{\partial f}{\partial x_3}=\frac{\partial f}{\partial x_4}=0$ e substituindo essa informação nas

Equações (6.1) e (6.2) concluímos que $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$. Neste caso, $f \in P(\mathfrak{g})$ se, e somente se, $\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0,$ para todo $j = 1, \ldots, 4$.

Álgebra: $g_{6,22}(\varepsilon)$*:*

$$x_5 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_6 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0, \tag{6.9}$$

$$-x_5 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \varepsilon x_6 \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0, \tag{6.10}$$

$$-x_6 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_5 \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0, \tag{6.11}$$

$$-\varepsilon x_6 \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_5 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0. \tag{6.12}$$

Se $\varepsilon = 0$, então $-x_5 \frac{\partial f}{\partial x_1} = -x_5 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$. Como $x_5 \neq 0$ e como $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$ não tem divisores de zero temos que $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$. Logo, $\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0$.

Se $\varepsilon \neq 0$, então multiplicando as Equações (6.9) e (6.11) por x_5 e as Equações (6.10) e (6.12) por x_6 obtemos

$$x_5^2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_5 x_6 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0, \tag{6.13}$$

$$-x_5 x_6 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \varepsilon x_6^2 \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0, \tag{6.14}$$

$$-x_5 x_6 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_5^2 \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0, \tag{6.15}$$

$$-\varepsilon x_6^2 \frac{\partial f}{\partial x_2} - x_5 x_6 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0. \tag{6.16}$$

Agora, somando as Equações (6.13) e (6.16) e subtraindo a Equação (6.14) da Equação (6.15) temos que

$$(x_5^2 - \varepsilon x_6^2) \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \quad \text{e} \quad (x_5^2 - \varepsilon x_6^2) \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0.$$

Como $x_5^2 - \varepsilon x_6^2 \neq 0$ e como $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$ não tem divisores de zero temos que $\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0$. Substituindo nas Equações (6.9) e (6.10) concluímos que $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$. Neste caso, $f \in P(\mathfrak{g})$ se, e somente se, $\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0,$ para todo $j = 1, \ldots, 4$.

Álgebra: $\mathfrak{g}_{6,24}(\varepsilon)$*:*

$$x_3 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_5 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \varepsilon x_6 \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0, \tag{6.17}$$

$$-x_3 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_6 \frac{\partial f}{\partial x_3} + x_5 \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0, \tag{6.18}$$

$$-x_5 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_6 \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \tag{6.19}$$

$$-\varepsilon x_6 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_5 \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0. \tag{6.20}$$

Se $\varepsilon = 0$, então $-x_5\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$. Como $x_5 \neq 0$ e como $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$ não tem divisores de zero temos que $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$. Logo, substituindo nas Equações (6.17) e (6.19) temos que $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$. Aplicando na Equação (6.18) chegamos que $\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0$.

Se $\varepsilon \neq 0$, então Multiplicando a Equação (6.19) por $-x_5$ e a Equação (6.20) por x_6 e, depois somando as equaçõe resultantes, obtemos

$$(x_5^2 - \varepsilon x_6^2)\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0.$$

Como $x_5^2 - \varepsilon x_6^2 \neq 0$ e como $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$ não tem divisores de zero temos que $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$. Substituindo nas Equações (6.19) e (6.20) concluímos que e $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$. Aplicando isso nas equações (6.17) e (6.18) chegamos que

$$x_5\frac{\partial f}{\partial x_3} + \varepsilon x_6\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0, \tag{6.21}$$

$$x_6\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_5\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0. \tag{6.22}$$

Multiplicando a Equação (6.21) por $-x_6$ e a Equação (6.22) por x_5 e, depois somando as equaçõe resultantes, obtemos

$$(x_5^2 - \varepsilon x_6^2)\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0.$$

Como antes, vemos que $\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0$ que implica em $\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$. Neste caso, $f \in P(\mathfrak{g})$ se, e somente se, $\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0,$ para todo $j = 1, \ldots, 4$.

Avaliando todos os casos, vimos que $f \in P(\mathfrak{g})$ se, e somente se,

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0, \text{ para todo } j = 1, \ldots, k.$$

Isso significa que $f \in P(\mathfrak{g})$ se, e somente se, $f \in \mathbb{F}[x_1^p, \ldots, x_k^p, x_{k+1}, \ldots, x_n] = P_p(\mathfrak{g})$. Logo, $P(\mathfrak{g}) = P_p(\mathfrak{g}) \cong Z_p(\mathfrak{g})$. $\square$

Em particular, o Teoremas 6.3.1 nos fornece exemplos onde o centro de Poisson $P(\mathfrak{g})$ é uma álgebra de polinômios.

6.4 $Z(\mathfrak{g})$ é uma extensão própria de $Z_p(\mathfrak{g})$

Nesta seção consideramos o caso quando existe um elemento $z \in Z(\mathfrak{g}) \backslash Z_p(\mathfrak{g})$ tal que $Z(\mathfrak{g}) = Z_p(\mathfrak{g})[z]$. Isto é, $Z(\mathfrak{g})$ é uma extensão simples do p-centro $Z_p(\mathfrak{g})$ (veja os Teoremas 4.2.1 e 5.2.1).

Teorema 6.4.1. *Seja $\mathbb{F}$ um corpo de característica prima p. Seja*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{5,2}, \mathfrak{g}_{5,4}, \mathfrak{g}_{6,10}, \mathfrak{g}_{6,11}, \mathfrak{g}_{6,12}, \mathfrak{g}_{6,13}, \mathfrak{g}_{6,14}, \mathfrak{g}_{6,15}, \mathfrak{g}_{6,16}, \mathfrak{g}_{6,17}, \mathfrak{g}_{6,19}(\varepsilon), \mathfrak{g}_{6,20}, \mathfrak{g}_{6,21}(\varepsilon) \textit{ ou } \mathfrak{g}_{6,26}.$$

Assuma que $p \geq cl(\mathfrak{g})$. Então, $Z(\mathfrak{g}) \cong S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.

Demonstração. Seja $\mathfrak{g}$ uma das álgebras do teorema. Para estes casos temos

$$L_p(\mathfrak{g}) \subseteq L(\mathfrak{g}) \subseteq \mathbb{F}(\mathbf{x}_n),$$

onde temos o grau $[\mathbb{F}(\mathbf{x}_n) : L_p(\mathfrak{g})] = p^{\dim_{\mathbb{F}} \mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})}$ e pelo Teorema 3.2.5 também temos $[\mathbb{F}(\mathbf{x}_n) : L(\mathfrak{g})] = p^{r(\mathfrak{g})}$ com $r(\mathfrak{g}) = \text{rank}(\mathbf{M}_{\mathfrak{g}})$ (ver página 34).

Pode-se verificar por inspeção da Tabela A.1, para todas estas álgebras, que temos $\text{rank}(\mathbf{M}_{\mathfrak{g}}) = \dim_{\mathbb{F}} \mathfrak{g}/C(\mathfrak{g}) - 1$. Portanto,

$$\begin{aligned} p^{\dim_{\mathbb{F}} \mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})} &= [\mathbb{F}(\mathbf{x}_n) : L_p(\mathfrak{g})] = [\mathbb{F}(\mathbf{x}_n) : L(\mathfrak{g})][L(\mathfrak{g}) : L_p(\mathfrak{g})] \\ &= p^{\dim_{\mathbb{F}} \mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})-1}[L(\mathfrak{g}) : L_p(\mathfrak{g})]. \end{aligned}$$

Assim,

$$[L(\mathfrak{g}) : L_p(\mathfrak{g})] = p. \tag{6.23}$$

Dado $f \in \mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$, pela Proposição 3.2.3, temos que $f \in P(\mathfrak{g})$ se, e somente se, f é solução do sistema de equações diferenciais $\sum_{j=1}^{n} [x_i, x_j] \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Usando as tabelas de multiplicação para estas álgebras, considerando que $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$ não tem divisores de zero e escolhendo $f \in \mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$, adequadamente, em cada caso, $f \in P(\mathfrak{g})$ se, e somente se, f é solução do respectivo sistema de equações diferenciais presente na Tabela A.1. Em cada caso tomamos a seguinte solução:

Para $\mathfrak{g}_{5,2}$: $f = x_2x_5 - x_3x_4$.

De fato,

$$x_4 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_5 \frac{\partial f}{\partial x_3} = x_4x_5 + x_5(-x_4) = 0$$

e $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$.

Para $\mathfrak{g}_{5,4}$: $f = 2x_1x_5 - 2x_2x_4 + x_3^2$.

De fato,

$$\begin{aligned} x_3 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_4 \frac{\partial f}{\partial x_3} &= x_3(-2x_4) + x_4(2x_3) = 0, \\ -x_3 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_5 \frac{\partial f}{\partial x_3} &= -x_3(2x_5) + x_5(2x_3) = 0, \\ -x_4 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_5 \frac{\partial f}{\partial x_2} &= -x_4(2x_5) - x_5(-2x_4) = 0. \end{aligned}$$

Para $\mathfrak{g}_{6,10}$: $f = x_3^2 - 2x_2x_6$.

De fato, $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_4} = \frac{\partial f}{\partial x_5} = 0$ e também

$$x_3 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_6 \frac{\partial f}{\partial x_3} = x_3(-2x_6) + x_6(2x_5) = 0.$$

Para $\mathfrak{g}_{6,11}$: $f = x_4^2 + 2x_5x_6 - 2x_3x_6$.

De fato, $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$ e

$$x_3\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_4\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_4} = x_3(0) + x_4(-2x_6) + x_6(2x_4) = 0,$$
$$-x_3\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_5} = -x_3(0) + x_6(-2x_6) + x_6(2x_6) = 0.$$

Para $\mathfrak{g}_{6,12}:\ f = x_4^2 - 2x_3x_6.$

De fato, $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_5} = 0$ e

$$x_3\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_4\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_4} = x_3(0) + x_4(-2x_6) + x_6(2x_4) = 0.$$

Para $\mathfrak{g}_{6,13}:\ f = x_5^3 - 3x_3x_5x_6 + 3x_2x_6^2.$

De fato, $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0$. Também,

$$x_3\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_5\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_5} = x_3(3x_6^2) + x_5(-3x_5x_6) + x_6(3x_5^2 - 3x_3x_6) = 0,$$
$$-x_5\frac{\partial f}{\partial x_2} - x_6\frac{\partial f}{\partial x_3} = -x_5(3x_6^2) - x_6(-3x_5x_6) = 0.$$

Para $\mathfrak{g}_{6,14}:\ f = 2x_5^3 + 3x_4^2x_6 - 6x_3x_5x_6 - 6x_1x_6^2.$

Veja que $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$. Além disso,

$$x_3\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_4\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_5\frac{\partial f}{\partial x_4} = x_4(-6x_5x_6) + x_5(6x_4x_6) = 0,$$
$$-x_3\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_5\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_5} = -x_3(-6x_6^2) + x_5(-6x_5x_6) + x_6(6x_5^2 - 6x_3x_6) = 0,$$
$$-x_4\frac{\partial f}{\partial x_1} - x_5\frac{\partial f}{\partial x_2} - x_6\frac{\partial f}{\partial x_4} = -x_4(-6x_6^2) - x_6(6x_4x_6) = 0,$$
$$-x_5\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_3} = -x_5(-6x_6^2 + x_6(-6x_5x_6) = 0.$$

Para $\mathfrak{g}_{6,15}:\ f = x_5^3 - 3x_4x_5x_6 + 3x_3x_6^2.$

Veja que $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$. Além disso,

$$x_3\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_4\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_5\frac{\partial f}{\partial x_4} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_5} = x_4(3x_6^2) + x_5(-3x_5x_6) + x_6(3x_5^2 - 3x_4x_6) = 0,$$
$$-x_3\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_5\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_4} = x_5(3x_6^2) + x_6(-3x_5x_6) = 0.$$

Para $\mathfrak{g}_{6,16}:\ f = x_4^2 - 2x_1x_6 - 2x_3x_5.$

Veja que $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$. Além disso,

$$\begin{aligned}
x_3\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_4\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_5\frac{\partial f}{\partial x_4} &= x_3(0) + x_4(-2x_5) + x_5(2x_4) = 0,\\
-x_3\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_5} &= -x_3(-2x_6) + x_6(-2x_3) = 0,\\
-x_4\frac{\partial f}{\partial x_1} - x_6\frac{\partial f}{\partial x_4} &= -x_4(-2x_6) - x_6(2x_4) = 0,\\
-x_5\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_3} &= -x_5(-2x_6) + x_6(-2x_5) = 0.
\end{aligned}$$

Para $\mathfrak{g}_{6,17}: \ f = x_5^2 - 2x_4x_6$.

Veja que $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$. Também,

$$x_3\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_4\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_5\frac{\partial f}{\partial x_4} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_5} = x_3(0) + x_4(0) + x_5(-2x_6) + x_6(2x_5) = 0.$$

Para $\mathfrak{g}_{6,19}(\varepsilon): \ f = x_5^2 + \varepsilon x_4^2 + 2\varepsilon x_1x_6 - 2x_3x_6$.

De fato, $-x_6\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$. Também,

$$\begin{aligned}
x_4\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_5\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_5} &= x_4(0) + x_5(-2x_6) + x_6(2x_5) = 0,\\
-x_4\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_4} &= -x_4(2\varepsilon x_6) + x_6(2\varepsilon x_4) = 0,\\
-x_5\frac{\partial f}{\partial x_1} + \varepsilon x_6\frac{\partial f}{\partial x_5} &= -x_5(2\varepsilon x_6) + \varepsilon x_6(2x_5) = 0,\\
-x_6\frac{\partial f}{\partial x_1} - \varepsilon x_6\frac{\partial f}{\partial x_3} &= -x_6(2\varepsilon x_6) - \varepsilon x_6(-2x_6) = 0.
\end{aligned}$$

Para $\mathfrak{g}_{6,20}: \ f = x_5^2 - 2x_3x_6$.

De fato, $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0$ e

$$x_4\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_5\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_5} = x_4(0) + x_5(-2x_6) + x_6(2x_5) = 0.$$

Para $\mathfrak{g}_{6,21}(\varepsilon): \ f = x_5^2 + \varepsilon x_4^2 - 2\varepsilon x_3x_6$.

De fato, $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$. Também,

$$\begin{aligned}
x_3\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_4\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_4} &= x_3(0) + x_4(-2\varepsilon x_6) + x_6(2\varepsilon x_4) = 0,\\
-x_3\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_5\frac{\partial f}{\partial x_3} + \varepsilon x_6\frac{\partial f}{\partial x_5} &= -x_3(0) + x_5(-2\varepsilon x_6) + \varepsilon x_6(2x_5) = 0.
\end{aligned}$$

Para $\mathfrak{g}_{6,26}: \ f = x_1x_6 - x_2x_5 + x_3x_4$.

De fato,

$$\begin{aligned}
x_4\frac{\partial f}{\partial x_2}+x_5\frac{\partial f}{\partial x_3}&=x_4(-x_5)+x_5(x_4)=0,\\
-x_4\frac{\partial f}{\partial x_1}+x_6\frac{\partial f}{\partial x_3}&=-x_4(x_6)+x_6(x_4)=0,\\
-x_5\frac{\partial f}{\partial x_1}-x_6\frac{\partial f}{\partial x_2}&=-x_5(x_6)-x_6(-x_5)=0.
\end{aligned}$$

Portanto, analisando cada caso, vemos que $f\in P(\mathfrak{g})$.

Agora, note que, em cada caso, $f\notin L_p(\mathfrak{g})$ e $f^p\in L_p(\mathfrak{g})$. Como $L_p(\mathfrak{g})\subset\mathbb{F}(\mathbf{x}_n)$ é puramente inseparável, temos do Corolário 2.1.3(2) que $L_p(\mathfrak{g})\subset L_p(\mathfrak{g})(f)$ é puramente inseparável e $[L_p(\mathfrak{g})(f):L_p(\mathfrak{g})]=p$. Vimos na Equação (6.23) que $[L(\mathfrak{g}):L_p(\mathfrak{g})]=p$. Com isso, $L_p(\mathfrak{g})(f)=L(\mathfrak{g})$. Por $P_p(\mathfrak{g})[f]\subseteq P(\mathfrak{g})$ ser uma extensão integral e também por $P_p(\mathfrak{g})[f]\cong Z_p(\mathfrak{g})[z]$ ser integralmente fechado (ver em cada caso os Teoremas 4.2.1 e 5.2.1) temos que $P(\mathfrak{g})=P_p(\mathfrak{g})[f]$. Segue dos Teoremas 4.2.1 e 5.2.1 que $Z(\mathfrak{g})\cong P(\mathfrak{g})$. $\square$

Para completar o cálculo do isomorfismo $Z(\mathfrak{g})\cong S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ para $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie nilpotente indecomponível de dimensão até 6 sobre um corpo $\mathbb{F}$ de caracterítica prima p tal que $p\geq\mathrm{cl}(\mathfrak{g})$ resta o caso em que $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{6,25}$. Abordamos esse último caso na próxima seção.

6.5 A álgebra de invariantes de $\mathfrak{g}_{6,25}$

Nessa seção assumimos que $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_{6,25}$ e $\mathbb{F}$ é um corpo de caracterítica prima p tal que $p\geq\mathrm{cl}(\mathfrak{g})=3$. Nesse caso, o cálculo do centro $Z(\mathfrak{g})$ foi realizado na Seção 5.2.1. Nosso trabalho nessa seção será mostar que $Z(\mathfrak{g})\cong P(\mathfrak{g})$. Isto é, que $Z(\mathfrak{g})\cong S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$.

Lema 6.5.1. *A extensão de corpos $L_p(\mathfrak{g})\subset L(\mathfrak{g})$ é uma extensão de grau p^2.*

Demonstração. Lembramos da Tabela 5.1 que os colchetes

$$[x_1,x_2]=x_3,\ [x_1,x_3]=x_5,\ [x_1,x_4]=x_6$$

definem $\mathfrak{g}$. Então, $P_p(\mathfrak{g})=\mathbb{F}[x_1^p,x_2^p,x_3^p,x_4^p,x_5,x_6]$ e com isso a extensão $L_p(\mathfrak{g})\subseteq\mathbb{F}(\mathbf{x}_n)$ é de grau $[\mathbb{F}(\mathbf{x}_n):L_p(\mathfrak{g})]=p^{\dim_{\mathbb{F}}\mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})}=p^4$. Também temos que

$$r(\mathfrak{g})=\mathrm{rank}(\mathrm{M}_{\mathfrak{g}})=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}0&x_3&x_5&x_6&0&0\\-x_3&0&0&0&0&0\\-x_5&0&0&0&0&0\\-x_6&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}=2.$$

Segue do Teorema 3.2.5 que $[\mathbb{F}(\mathbf{x}_n) : L(\mathfrak{g})] = p^2$. Por

$$p^4 = [\mathbb{F}(\mathbf{x}_n) : L_p(\mathfrak{g})] = [\mathbb{F}(\mathbf{x}_n) : L(\mathfrak{g})][L(\mathfrak{g}) : L_p(\mathfrak{g})] = p^2[L(\mathfrak{g}) : L_p(\mathfrak{g})].$$

Temos $[L(\mathfrak{g}) : L_p(\mathfrak{g})] = p^2$. □

Para o restante desta seção considere os seguintes elementos em $\mathbb{F}[\mathbf{x}_n]$:

$$f_1 = x_3^2 - 2x_2x_5 \quad \text{e} \quad f_2 = x_3x_6 - x_4x_5.$$

Lema 6.5.2. *Os elementos f_1 e f_2 são invariantes. Isto é, $f_1, f_2 \in P(\mathfrak{g})$.*

Demonstração. De fato, considerando a tabela de multiplicação de $\mathfrak{g}$ e a Proposição 3.2.3, temos que $f_1, f_2 \in P(\mathfrak{g})$ se, e somente se, para $i = 1, 2$, vale que f_i é solução do seguinte sitema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} x_3\frac{\partial f_i}{\partial x_2} + x_5\frac{\partial f_i}{\partial x_3} + x_6\frac{\partial f_i}{\partial x_4} &= 0, \\ -x_3\frac{\partial f_i}{\partial x_1} = -x_5\frac{\partial f_i}{\partial x_1} = -x_6\frac{\partial f_i}{\partial x_1} &= 0. \end{aligned}$$

De fato, veja que para cada $i = 1, 2$ temos $\frac{\partial f_i}{\partial x_1} = 0$ e

$$\begin{aligned} x_3\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + x_5\frac{\partial f_1}{\partial x_3} + x_6\frac{\partial f_1}{\partial x_4} &= x_3(-2x_5) + x_5(2x_3) + x_6(0) = 0, \\ x_3\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + x_5\frac{\partial f_2}{\partial x_3} + x_6\frac{\partial f_2}{\partial x_4} &= x_3(0) + x_5(x_6) + x_6(-x_5) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $f_1, f_2 \in P(\mathfrak{g})$. □

Lema 6.5.3. *Os corpos de frações de $P(\mathfrak{g})$ e de $P_p(\mathfrak{g})[f_1, f_2]$ coincidem.*

Demonstração. Primeiro, $f_1 \notin P_p(\mathfrak{g})[f_2]$, pois se $f \in P_p(\mathfrak{g})[f_2]$ então $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$, mas temos que $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 2x_5$. Também, veja que

$$\begin{aligned} f_1 &\in P_p(\mathfrak{g})[x_2, x_3], \\ f_2 &\in P_p(\mathfrak{g})[x_3, x_4]. \end{aligned}$$

Com isso, $P_p(\mathfrak{g})[f_1] \subset P_p(\mathfrak{g})[f_1, f_2]$ é uma inclusão estrita e também vale que $L_p(\mathfrak{g})(f_1) \subset L_p(\mathfrak{g})(f_1, f_2)$. Observe que para cada $i = 1, 2$ temos $f_i \notin L_p(\mathfrak{g})$ e $f_i^p \in L_p(\mathfrak{g})$. Como $L_p(\mathfrak{g}) \subset \mathbb{F}(\mathbf{x}_n)$ é puramente inseparável, temos do Corolário 2.1.3(2) que $L_p(\mathfrak{g}) \subset L_p(\mathfrak{g})(f_i)$ é puramente inseparável e grau $[L_p(\mathfrak{g})(f_i) : L_p(\mathfrak{g})] = p$. Como $[L(\mathfrak{g}) : L_p(\mathfrak{g})] = p^2$ (Lema 6.5.1) nos resta que $L(\mathfrak{g}) = L_p(\mathfrak{g})(f_1, f_2)$. □

Com o Lema 6.5.3, temos que $P_p(\mathfrak{g})[f_1, f_2] \subseteq P(\mathfrak{g})$ é uma extensão integral cujos corpos de frações coincidem.

Lema 6.5.4. *O centro de Poisson $P(\mathfrak{g})$ é o fecho integral de $P_p(\mathfrak{g})[f_1, f_2]$ no seu corpo de frações.*

Demonstração. Com efeito, seja S o fecho integral de $P_p(\mathfrak{g})[f_1, f_2]$ em $L_p(\mathfrak{g})(f_1, f_2)$. Seja $y \in S$. Então y também é integral sobre $P(\mathfrak{g})$ e $y \in L(\mathfrak{g})$. Sabemos que $P(\mathfrak{g})$ é integralmente fechado (Proposição 3.2.4), e portanto $y \in P(\mathfrak{g})$. Logo, $S \subseteq P(\mathfrak{g})$. Para a inclusão contrária, lembramos que $P_p(\mathfrak{g})[f_1, f_2] \subseteq P(\mathfrak{g})$ é uma extensão integral. Pelo Lema 6.5.3, temos $P(\mathfrak{g}) \subseteq L(\mathfrak{g}) = L_p(\mathfrak{g})(f_1, f_2)$. Logo, $P(\mathfrak{g}) \subseteq S$. Assim, $P(\mathfrak{g}) = S$. □

Corolário 6.5.5. *Temos o isomorfismo $Z(\mathfrak{g}) \cong P(\mathfrak{g})$.*

Demonstração. Pela Seção 5.2.1 vemos o isomorfismo $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2] \cong P_p(\mathfrak{g})[f_1, f_2]$, pois esses domínios possuem os mesmos geradores e relações. Com o Teorema 5.2.2 vemos que $Z(\mathfrak{g})$ é o fecho integral de $Z_p(\mathfrak{g})[z_1, z_2]$ no seu corpo de frações. Como consequência do Lema 6.5.4, temos o isomorfismo $Z(\mathfrak{g}) \cong P(\mathfrak{g})$. □

Referências Bibliográficas

[1] L. Abellanas and L. Martínez Alonso. A general setting for Casimir invariants. *J. Mathematical Phys.*, 16:1580–1584, 1975.

[2] Oz Ben-Shimol. On Dixmier-Duflo isomorphism in positive characteristic-the classical nilpotent case. *J. Algebra*, 382:203–239, 2013.

[3] Vyacheslav Boyko, Jiri Patera, and Roman Popovych. Invariants of triangular Lie algebras. *J. Phys. A*, 40(27):7557–7572, 2007.

[4] Amiram Braun. Factorial properties of the enveloping algebra of a nilpotent Lie algebra in prime characteristic. *J. Algebra*, 308(1):1–11, 2007.

[5] Amiram Braun. The center of the enveloping algebra of the p-Lie algebras $\mathfrak{sl}_n$, $\mathfrak{pgl}_n$, $\mathfrak{psl}_n$, when p divides n. *J. Algebra*, 504:217–290, 2018.

[6] Amiram Braun and Gil Vernik. On the center and semi-center of enveloping algebras in prime characteristic. *J. Algebra*, 322(5):1830–1858, 2009.

[7] Winfried Bruns and Jürgen Herzog. *Cohen-Macaulay rings*, volume 39 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[8] Serena Cicalò, Willem A. de Graaf, and Csaba Schneider. Six-dimensional nilpotent Lie algebras. *Linear Algebra Appl.*, 436(1):163–189, 2012.

[9] J. Dixmier. Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents. II. *Bull. Soc. Math. France*, 85:325–388, 1957.

[10] Jacques Dixmier. Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents. III. *Canadian J. Math.*, 10:321–348, 1958.

[11] Jacques Dixmier. Sur l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie nilpotente. *Arch. Math.*, 10:321–326, 1959.

[12] Jacques Dixmier. Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents. IV. *Canadian J. Math.*, 11:321–344, 1959.

[13] Jacques Dixmier. *Enveloping algebras*, volume 11 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. Revised reprint of the 1977 translation.

[14] Yurij A. Drozd and Vladimir V. Kirichenko. *Finite-dimensional algebras*. Springer-Verlag, Berlin, 1994. Translated from the 1980 Russian original and with an appendix by Vlastimil Dlab.

[15] Michel Duflo. Opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 10(2):265–288, 1977.

[16] Daniel R. Grayson and Michael E. Stillman. Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry. Available at `http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/`.

[17] James E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory*. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 9. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1972.

[18] I. Martin Isaacs. *Algebra: a graduate course*, volume 100 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009. Reprint of the 1994 original.

[19] N. Jacobson. A note on Lie algebras of characteristic p. *Amer. J. Math.*, 74:357–359, 1952.

[20] Nathan Jacobson. *Basic algebra. II*. W. H. Freeman and Company, New York, second edition, 1989.

[21] Masaki Kashiwara and Michèle Vergne. The Campbell-Hausdorff formula and invariant hyperfunctions. *Invent. Math.*, 47(3):249–272, 1978.

[22] Gregor Kemper. *A course in commutative algebra*, volume 256 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Heidelberg, 2011.

[23] Maxim Kontsevich. Operads and motives in deformation quantization. volume 48, pages 35–72. 1999. Moshé Flato (1937–1998).

[24] Serge Lang. *Algebra*, volume 211 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third edition, 2002.

[25] Hideyuki Matsumura. *Commutative ring theory*, volume 8 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1989. Translated from the Japanese by M. Reid.

[26] Ivan Mirković and Dmitriy Rumynin. Centers of reduced enveloping algebras. *Math. Z.*, 231(1):123–132, 1999.

[27] Colette Moeglin. Factorialité dans les algèbres enveloppantes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 282(22):Ai, A1269–A1272, 1976.

[28] Alfons I. Ooms. Computing invariants and semi-invariants by means of Frobenius Lie algebras. *J. Algebra*, 321(4):1293–1312, 2009.

[29] Alfons I. Ooms. The Poisson center and polynomial, maximal Poisson commutative subalgebras, especially for nilpotent Lie algebras of dimension at most seven. *J. Algebra*, 365:83–113, 2012.

[30] Alexander Premet and Rudolf Tange. Zassenhaus varieties of general linear Lie algebras. *J. Algebra*, 294(1):177–195, 2005.

[31] Susan J. Sierra and Chelsea Walton. The universal enveloping algebra of the Witt algebra is not noetherian. *Adv. Math.*, 262:239–260, 2014.

[32] Helmut Strade and Rolf Farnsteiner. *Modular Lie algebras and their representations*, volume 116 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1988.

[33] F. D. Veldkamp. The center of the universal enveloping algebra of a Lie algebra in characteristic p. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 5:217–240, 1972.

[34] Hans Zassenhaus. The representations of Lie algebras of prime characteristic. *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, 2:1–36, 1954.

Apêndice A

Tabela A.1

Neste apêndice apresentamos uma tabela usada na demonstração do Teorema 6.4.1. Para a tabela seguinte adotamos a notação:
$d = \dim_{\mathbb{F}} \mathfrak{g}/C(\mathfrak{g})$;
$\mathrm{M}_{\mathfrak{g}} = \Big((\mathrm{M}_{\mathfrak{g}})_{ij}\Big)$, onde $(\mathrm{M}_{\mathfrak{g}})_{ij} = [x_i, x_j]$;
$r(\mathfrak{g}) = \mathrm{rank}(\mathrm{M}_{\mathfrak{g}})$.
As equações diferenciais são dadas por $\sum_{j=1}^{n} [x_i, x_j] \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0,$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Tabela A.1: Tabela para a demonstração do Teorema 6.4.1

$\mathfrak{g}$	$\mathrm{M}_{\mathfrak{g}}$	$r(\mathfrak{g})$	d	Eq. Diferenciais
$\mathfrak{g}_{5,2}$	$\begin{pmatrix} 0 & x_4 & x_5 & 0 & 0 \\ -x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2	3	$x_4 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_5 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0,$ $-x_4 \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, -x_5 \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0.$
$\mathfrak{g}_{5,4}$	$\begin{pmatrix} 0 & x_3 & x_4 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & x_5 & 0 & 0 \\ -x_4 & -x_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2	3	$x_3 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_4 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0,$ $-x_3 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_5 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0,$ $-x_4 \frac{\partial f}{\partial x_1} - x_5 \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0.$
$\mathfrak{g}_{6,10}$	$\begin{pmatrix} 0 & x_3 & x_6 & 0 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	4	5	$x_3 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_6 \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0,$ $-x_3 \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, -x_6 \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0,$ $-x_6 \frac{\partial f}{\partial x_5} = 0, -x_6 \frac{\partial f}{\partial x_4} = 0.$

Continua na próxima página

Tabela A.1 – *Continuação da tabela*

$\mathfrak{g}$	$M_{\mathfrak{g}}$	$r(\mathfrak{g})$	d	Eq. Diferenciais
$\mathfrak{g}_{6,11}$	$\begin{pmatrix} 0 & x_3 & x_4 & x_6 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & x_6 & 0 & x_6 & 0 \\ -x_4 & -x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	4	5	$x_3\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_4\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0$, $-x_3\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_5} = 0$, $-x_4\frac{\partial f}{\partial x_1} - x_6\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$, $-x_6\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$, $-x_6\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$.
$\mathfrak{g}_{6,12}$	$\begin{pmatrix} 0 & x_3 & x_4 & x_6 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & 0 & 0 & x_6 & 0 \\ -x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	4	5	$x_3\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_4\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0$, $-x_3\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_5} = 0$, $-x_4\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$, $-x_6\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$, $-x_6\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$.
$\mathfrak{g}_{6,13}$	$\begin{pmatrix} 0 & x_3 & x_5 & 0 & x_6 & 0 \\ -x_3 & 0 & 0 & x_5 & 0 & 0 \\ -x_5 & 0 & 0 & x_6 & 0 & 0 \\ 0 & -x_5 & -x_6 & 0 & 0 & 0 \\ -x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	4	5	$x_3\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_5\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_5} = 0$, $-x_3\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_5\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0$, $-x_5\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0$, $-x_5\frac{\partial f}{\partial x_2} - x_6\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$, $-x_6\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$.
$\mathfrak{g}_{6,14}$	$\begin{pmatrix} 0 & x_3 & x_4 & x_5 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & x_5 & 0 & x_6 & 0 \\ -x_4 & -x_5 & 0 & -x_6 & 0 & 0 \\ -x_5 & 0 & x_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	4	5	$x_3\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_4\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_5\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0$, $-x_3\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_5\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_5} = 0$, $-x_4\frac{\partial f}{\partial x_1} - x_5\frac{\partial f}{\partial x_2} - x_6\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0$, $-x_5\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$, $-x_6\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$.
$\mathfrak{g}_{6,15}$	$\begin{pmatrix} 0 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & 0 \\ -x_3 & 0 & x_5 & x_6 & 0 & 0 \\ -x_4 & -x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_5 & -x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	4	5	$x_3\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_4\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_5\frac{\partial f}{\partial x_4} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_5} = 0$, $-x_3\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_5\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0$, $-x_4\frac{\partial f}{\partial x_1} - x_5\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$, $-x_5\frac{\partial f}{\partial x_1} - x_6\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$, $-x_6\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$.
$\mathfrak{g}_{6,16}$	$\begin{pmatrix} 0 & x_3 & x_4 & x_5 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & 0 & 0 & x_6 & 0 \\ -x_4 & 0 & 0 & -x_6 & 0 & 0 \\ -x_5 & 0 & x_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	4	5	$x_3\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_4\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_5\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0$, $-x_3\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_5} = 0$, $-x_4\frac{\partial f}{\partial x_1} - x_6\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0$, $-x_5\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$, $-x_6\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$.

Continua na próxima página

Tabela A.1 – *Continuação da tabela*

$\mathfrak{g}$	$M_{\mathfrak{g}}$	$r(\mathfrak{g})$	d	Eq. Diferenciais
$\mathfrak{g}_{6,17}$	$\begin{pmatrix} 0 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & 0 \\ -x_3 & 0 & x_6 & 0 & 0 & 0 \\ -x_4 & -x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	4	5	$x_3\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_4\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_5\frac{\partial f}{\partial x_4} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_5} = 0$, $-x_3\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$, $-x_4\frac{\partial f}{\partial x_1} - x_6\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$, $-x_5\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$, $-x_6\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$.
$\mathfrak{g}_{6,19}(\varepsilon)$	$\begin{pmatrix} 0 & x_4 & x_5 & 0 & x_6 & 0 \\ -x_4 & 0 & 0 & x_6 & 0 & 0 \\ -x_5 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon x_6 & 0 \\ 0 & -x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_6 & 0 & -\varepsilon x_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	4	5	$x_4\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_5\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_5} = 0$, $-x_4\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0$, $-x_5\frac{\partial f}{\partial x_1} + \varepsilon x_6\frac{\partial f}{\partial x_5} = 0$, $-x_6\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$, $-x_6\frac{\partial f}{\partial x_1} - \varepsilon x_6\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$.
$\mathfrak{g}_{6,20}$	$\begin{pmatrix} 0 & x_4 & x_5 & 0 & x_6 & 0 \\ -x_4 & 0 & 0 & x_6 & 0 & 0 \\ -x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	4	5	$x_4\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_5\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_5} = 0$, $-x_4\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0$, $-x_5\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$, $-x_6\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$, $-x_6\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$.
$\mathfrak{g}_{6,21}(\varepsilon)$	$\begin{pmatrix} 0 & x_3 & x_4 & x_6 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & x_5 & 0 & \varepsilon x_6 & 0 \\ -x_4 & -x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	4	5	$x_3\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_4\frac{\partial f}{\partial x_3} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_4} = 0$, $-x_3\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_5\frac{\partial f}{\partial x_3} + \varepsilon x_6\frac{\partial f}{\partial x_5} = 0$, $-x_4\frac{\partial f}{\partial x_1} - x_5\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$, $-x_6\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$, $-\varepsilon x_6\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$.
$\mathfrak{g}_{6,26}$	$\begin{pmatrix} 0 & x_4 & x_5 & 0 & 0 & 0 \\ -x_4 & 0 & x_6 & 0 & 0 & 0 \\ -x_5 & -x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	2	3	$x_4\frac{\partial f}{\partial x_2} + x_5\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$, $-x_4\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_6\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$, $-x_5\frac{\partial f}{\partial x_1} - x_6\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$.

Fim da tabela