

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS  
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA



# A evolução de Curvas Planas pela Curvatura de Minkowski

*Fernanda Helen Moreira Baêta*

Belo Horizonte - MG

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS  
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA



Fernanda Helen Moreira Baêta  
Orientador: Prof. Dr. Marcos da Silva Montenegro

## **A evolução de Curvas Planas pela Curvatura de Minkowski**

Dissertação submetida à banca examinadora, designada pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas-ICEX da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Belo Horizonte - MG  
2020

© 2020, Fernanda Helen Moreira Baêta.  
Todos os direitos reservados.

Baêta, Fernanda Helen Moreira

B142e A evolução de curvas planas pela curvatura de Minkowski [manuscrito] / Fernanda Helen Moreira Baêta. Belo Horizonte — 2020.  
108 f. : il. ; 29cm

Orientador: Marcos da Silva Montenegro.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.

Referências: f. 106-108

1. Matemática - Teses. 2. Cálculo vetorial - Teses.  
3. Espaços generalizados - Teses. 4 . Curvas planas - Teses. 5. Superfícies de curvatura constante -Teses  
I. Montenegro, Marcos da Silva. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irénquer Vismeg Lucas Cruz - CRB 6ª nº 819.



FOLHA DE APROVAÇÃO

*A evolução de Curvas Planas pela Curvatura  
de Minkowski*

**FERNANDA HELEN MOREIRA BAÊTA**

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Marcos da Silva Montenegro  
UFMG

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Julian Eduardo Haddad  
UFMG

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Vitor Balestro  
UFF

Belo Horizonte, 21 de fevereiro de 2020.

# Agradecimentos

Em primeiro lugar quero agradecer a Deus, que sempre me deu forças para ir em busca de meus sonhos e principalmente por colocar tantas pessoas incríveis em meu caminho.

Agradecer a meu pai Douglas, fonte inesgotável de amor e doação. Aos meus irmãos Jéssica e Leonardo, que são os bens mais preciosos que meus pais me deram, verdadeiros amigos.

Aos parentes que estiveram na torcida, que rezaram por mim, que estiveram ao meu lado nos momentos bons e nos momentos nem tão bons.

Agradecer aos amigos de longa data. Aos amigos feitos no mestrado, que compartilharam histórias e conhecimentos. Em especial àqueles que estiveram dia a dia na salinha do mestrado, tornando sem dúvidas os meus dias mais divertidos, foram muitas as risadas. Sentirei saudades!

Não poderia deixar de agradecer também Às amigas Gabriela e Mariana pela parceria e histórias vivenciadas. Vocês são MARAVILHOSAS! Ao Ronaldo por ser meu amigo conselheiro e a Isadora pela amizade e por ser a melhor veterana.

Agradeço imensamente ao meu orientador Marcos, que generosamente me presenteou com este trabalho maravilhoso. Sempre muito solícito e paciente. Obrigada pelos ensinamentos compartilhados e pelas correções feitas.

A todos os professores que tive o prazer de conhecer, que compartilharam comigo experiências e seus saberes.

Às secretárias da pós Kelli e Andréa, pela disponibilidade, cordialidade e gentileza de sempre.

À CNPQ pelo fundamental auxílio financeiro.

Por fim, muito obrigada a todos que direta ou indiretamente contribuíram com a realização deste trabalho. Não existem palavras suficientes e significativas que me permitam agradecer a vocês por tudo que me acrescentam. Gratidão!

*À memória de minha mãe.*

*“As grandes ideias surgem da observação dos pequenos detalhes”.*

*Augusto Cury*

## Resumo

Um plano de Minkowski é um espaço vetorial  $X$  de dimensão dois dotado de uma norma  $\|\cdot\|$ . Três conceitos de curvatura neste plano são: curvatura normal, curvatura circular e curvatura de Minkowski. O principal objetivo desta dissertação é estudar a evolução de curvas planas pela curvatura de Minkowski. Em particular, fechamos uma lacuna em aberto na teoria de fluxos geométricos de curvas planas em espaços de Minkowski. Para isto, inicialmente, iremos compreender a geometria de curvas planas em espaço de Minkowski seguindo o artigo “Concepts of curvatures in normed planes” [4], o qual aborda a teoria em linguagem moderna de forma bastante organizada. Posteriormente, usando ferramentas de EDP, mostraremos que curvas convexas evoluem ao longo do tempo, para curvas de curvatura de Minkowski constante (não nula).

**Palavras-chave:** Plano de Minkowski. Tipos de curvatura. Curvas com curvatura de Minkowski constante. Fluxo pela curvatura de Minkowski. Evolução de curvas planas pela curvatura de Minkowski.

## Abstract

A Minkowski plane is a two-dimensional  $X$  vector space with a norm  $\|\cdot\|$ . Three concepts of curvature in this plane are: normal curvature, circular curvature and Minkowski curvature. The main objective of this dissertation is to study the evolution of planar curves by Minkowski curvature. In particular, we closed an open gap in the theory of geometric flows of planar curves in Minkowski spaces. For this, we will first understand geometry of planar curves in Minkowski space following the article “Concepts of curvatures in normed planes” [4], which deals with the theory in modern language in a very organized way. Later, using EDP theory, we will show that convex curves evolve over time to constant (non-zero) Minkowski curvature curves.

**Keywords:** Minkowski plane. Curvature types. Curves with constant Minkowski curvature. Flow through Minkowski curvature. Evolution of plane curves by Minkowski curvature.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>5</b>
2.1	Equações Diferenciais Ordinárias . . . . .	5
2.2	Análise Funcional . . . . .	6
2.3	Teoria de curvas no plano Euclidiano . . . . .	7
2.3.1	Reparametrização e Comprimento de Arco . . . . .	8
2.3.2	Curvatura e Equações de Frenet . . . . .	9
2.3.3	Evolutas e Involutas . . . . .	14
2.3.4	Teorema dos Quatro Vértices . . . . .	15
2.4	Resultados Adicionais . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Geometria de Curvas Planas em Espaço de Minkowski</b>	<b>17</b>
3.1	Geometria de Minkowski no plano . . . . .	17
3.1.1	Antinorma . . . . .	20
3.1.2	Relação entre o parâmetro de área e o parâmetro de comprimento de arco	24
3.2	Definindo tipos de curvatura em um plano normado . . . . .	25
3.3	Usando uma estrutura Euclidiana auxiliar . . . . .	32
3.4	Curvas de curvatura constante . . . . .	40
3.5	O Teorema Fundamental e Isometrias . . . . .	47
3.6	Valores de curvatura extrema e largura constante . . . . .	53
3.7	Evolutas, Involutas e Paralela . . . . .	61
<b>4</b>	<b>A evolução de Curvas Planas pela Curvatura de Minkowski</b>	<b>71</b>
4.1	Preliminares . . . . .	71
4.2	O fluxo pela curvatura de Minkowski . . . . .	76
4.3	Existência de soluções . . . . .	78
4.4	Normalizando o fluxo . . . . .	93
4.5	Comportamento no infinito . . . . .	97
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>106</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Existem na literatura algumas extensões importantes da geometria Euclidiana, denominadas de geometrias não-Euclidianas. Uma delas e bem conhecida é a geometria de Minkowski a qual generaliza os conceitos geométricos Euclidianos a correspondentes em espaços de Banach reais de dimensão finita.

Considerando a geometria de Minkowski, existem diferentes noções de ortogonalidade em planos normados e também diferentes tipos de curvatura de curvas planas nestes ambientes. Em relação aos vários conceitos de ortogonalidade, existe um vasto material sobre o assunto e, em relação aos diferentes tipos de curvatura, até bem pouco tempo, eram pouco difundidos na literatura.

Recentemente, em 2018, Balestro, Martini e Shonoda [4], apresentaram, de maneira sistemática e conectada, a teoria de curvas planas em espaços de Minkowski. Mais especificamente, eles introduziram propriedades geométricas dos diferentes tipos de curvatura, relacionaram essas curvaturas e até mesmo desenvolveram um pouco de teoria em linguagem moderna. Esses conceitos de curvatura em planos normados foram introduzidos e tratados no século XX por matemáticos como Biberstein, Busemann, Ghandehari e Petty.

Referindo-se a essas extensões da curvatura Euclidiana, os autores de [4] caracterizaram as curvas com cada curvatura constante, caracterização presente nos planos Radon ou do subcaso Euclidiano, e estabeleceram resultados análogos, como o teorema dos quatro vértices e o teorema fundamental de curvas planas. Completando os estudos, eles também obtiveram resultados para curvas de largura constante, noções de evolutas e involutas e curvas paralelas do ponto de vista da teoria de singularidades.

Nos artigos [8] e [35], Busemann e Petty, respectivamente, utilizaram uma estrutura Euclidiana auxiliar para trabalhar com os chamados *isoperímetros*, que são soluções dos problemas *isoperimétricos* em planos normados. Na abordagem de [4], o isoperímetro induz uma nova norma, e nessa norma ele é o círculo unitário.

Biberstein definiu a curvatura medindo a variação (no sentido de rotação) do vetor tangente em relação ao comprimento do arco da curva. Ele reobteve a *curvatura de Minkowski* de Petty de um outro modo (veja também [5] e [35]). Da mesma forma, Biberstein definiu anticurvatura medindo a variação da rotação do vetor normal com relação ao comprimento de arco (“normal” não tem um significado único na geometria de Minkowski). Acontece que, como veremos, a anticurvatura de Biberstein é a curvatura isoperimétrica de Petty. Desse modo, ambos autores

---

deduziram, de maneira análoga ao caso Euclidiano, as fórmulas de Frenet.

Petty [35] definiu um outro conceito de curvatura que ele chamou de curvatura circular. Como veremos, essa curvatura pode ser vista como o inverso do raio do círculo osculatório (círculo de Minkowski que tem contato de segunda ordem com a curva no ponto considerado). Esse tipo de curvatura também foi utilizada por Craizer [12], Balestro, Craizer e Teixeira [13] e Ghandehari [21, 22]. Guggenheimer [23] trabalhou com um anticírculo osculatório, obtendo, como veremos, a curvatura isoperimétrica.

Na primeira parte da dissertação, apresentaremos os conceitos de curvatura e a teoria básica de curvas planas em espaços de Minkowski, tendo [4] como referência principal. O desenvolvimento dessa parte é fundamental para a segunda parte, que consiste no estudo do fluxo pela curvatura de Minkowski. Este fluxo é um problema ainda em aberto e por isso, o estudaremos detalhadamente. Nosso objetivo é fechar o estudo de fluxos no contexto da geometria plana de Minkowski. Com o propósito de posicionar historicamente essa segunda parte, a seguir, apresentaremos um breve panorama do fluxo de curvas planas no contexto Euclidiano e do fluxo pela curvatura normal em planos de Minkowski.

Na década de 80, Gage e Hamilton [19] estudaram a evolução de curvas planas pela curvatura Euclidiana. Eles provaram que no plano Euclidiano, o fluxo pela curvatura Euclidiana converge homoteticamente para o círculo Euclidiano. Gage [20], em 1993, também estudou a evolução de curvas planas pela curvatura normal em planos de Minkowski e, como veremos, conseqüentemente estudou a evolução de curvas planas pela curvatura circular. Ele provou que o fluxo pela curvatura normal converge homoteticamente para o anticírculo de Minkowski (também chamado isoperímetro).

Gage e Yi Li [20], em 1994, demonstraram que toda curva convexa que evolui pela equação

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \gamma(\theta)k_e N_e,$$

onde  $\gamma \in C^2(\mathbb{T})$ , evolui para um ponto em tempo finito, e se a família de curvas for normalizada de tal forma que a área se torne constante, cada sequência infinita de curvas tem uma subsequência convergente, que converge a uma solução auto-similar. A demonstração seguiu as ideias do artigo de Gage [18], onde ele estudou o fluxo pela curvatura normal em planos de Minkowski. De fato, em [20], Gage e Yi Li mostraram que  $\gamma$  pode ser escrita como  $\gamma = \frac{h}{k}$ , onde  $h$  e  $k$  são a função suporte e a curvatura Euclidiana, respectivamente, do bordo de algum corpo convexo suave e simétrico com relação à origem  $K$ . Além disso, eles mostraram que as curvas evoluem para  $\partial K$ . Só que, como veremos na Seção 3.3,  $\partial K$  é o anticírculo em algum plano de Minkowski e  $\frac{h}{k}k_e N_e = k_n N$ , onde  $k_n$  e  $N$  são a curvatura normal e o vetor normal direito das curvas  $Z(t, \cdot)$  no plano de Minkowski que têm  $\partial K$  como sendo o anticírculo. Deste modo, o fluxo estudado por Gage e Yi Li não partiu de um plano de Minkowski, como é o nosso caso. Na verdade, eles estudaram um fluxo no caso Euclidiano e utilizaram o fato que as soluções auto-similares deste fluxo, é o anticírculo em algum plano de Minkowski, levando assim, a um problema de fluxo pela curvatura normal em algum plano de Minkowski.

Gage e Hamilton utilizaram como ferramenta em seus estudos o fato de que o círculo Euclidiano resolve o problema isoperimétrico no plano Euclidiano. No plano de Minkowski, as curvas de curvatura de Minkowski constante são homotéticas à curva centróide da bola unitária.

---

Estas curvas não resolvem o problema isoperimétrico em planos de Minkowski. Desta forma, as técnicas utilizadas por eles não nos permitem estudar o caso da curvatura de Minkowski. Contudo, em [14], Levi estudou a evolução de curvas planas pela curvatura Euclidiana utilizando ferramentas de EDP, que nos permite estudar a evolução de curvas planas pela curvatura de Minkowski. Vale salientar que o fluxo que introduziremos não é uma contra-partida aos fluxos mencionados.

# Capítulo 2

## Preliminares

Para comodidade do leitor, neste capítulo apresentaremos alguns resultados básicos, dentre eles um breve resumo da teoria de curvas no plano Euclidiano, para que possamos posteriormente obter resultados em planos normados, tendo o plano Euclidiano como caso particular. São referências para esse capítulo: [2], [4], [6], [14], [27], [30] e [36].

### 2.1 Equações Diferenciais Ordinárias

**Teorema 2.1** ([6], Seção 2.8). (*Existência e Unicidade*) Consideremos o sistema

$$x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j,$$

onde cada  $a_{ij} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em um intervalo  $I$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ . Tal sistema é equivalente ao sistema

$$x' = A(t)x, \quad \forall t \in I, \quad (2.1)$$

onde  $A(t) = (a_{ij}(t))_{n \times n}$ . Para todo  $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ , existe uma única solução  $\varphi(t) = \varphi(t, t_0, x_0)$  de (2.1) definida em  $I$  tal que  $\varphi(t_0) = x_0$ .

**Teorema 2.2** ([6], Teorema 3.6.1). (*Método de Variação dos Parâmetros*) Consideremos a EDO de segunda ordem

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad \forall t \in I \quad (2.2)$$

onde  $p, q, g$  são contínuas para cada  $t \in I$ .

Consideremos também  $y_1$  e  $y_2$  soluções fundamentais da equação homogênea associada à equação (2.2). Seja  $W[y_1, y_2]$  o Wronskiano entre  $y_1$  e  $y_2$ , isto é, o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{bmatrix}.$$

A solução geral da equação (2.2) é dada por

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) - y_1(t) \int \frac{y_2(t)g(t)}{W[y_1, y_2](t)} dt + y_2(t) \int \frac{y_1(t)g(t)}{W[y_1, y_2](t)} dt, \quad (2.3)$$

onde  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

## 2.2 Análise Funcional

As definições e resultados desta seção podem ser encontrados em [27] e [30].

**Definição 2.1.** Uma norma em um espaço vetorial  $X$  é uma função real definida em  $X$  denotada por  $\|\cdot\|$  satisfazendo as seguintes propriedades:

- i)  $\|x\| \geq 0, \forall x \in X$ ;
- ii)  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ;
- iii)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times X$ ;
- iv)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$ .

**Definição 2.2.** Um **espaço normado**  $X$  é um espaço vetorial com uma norma definida  $\|\cdot\|$ . Neste caso, denotamos  $(X, \|\cdot\|)$ .

**Definição 2.3.** Dizemos que um espaço normado  $(X, \|\cdot\|)$  com respeito à métrica induzida  $d(x, y) = \|x - y\|$  é completo se toda sequência de Cauchy em  $X$  converge para um elemento de  $X$ .

**Definição 2.4.** Um **espaço de Banach** é um espaço normado completo (completo com relação à métrica induzida pela norma).

**Teorema 2.3** ([27], Teorema 2.5-3). *Em um espaço normado  $X$  de dimensão finita, um subconjunto  $M \subset X$  é **compacto** se e somente se  $M$  é fechado e limitado em  $X$ .*

**Definição 2.5.** Um espaço vetorial simplético é um par  $(V, \Omega)$  onde  $V$  é um espaço vetorial e  $\Omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  é uma forma bilinear antissimétrica e não-degenerada, isto é, para todo  $x, y \in V$ ,  $\Omega(x, y) = -\Omega(y, x)$  e se  $\Omega(x, y) = 0$  para todo  $y$ , então  $x = 0$ . Neste caso, dizemos que  $\Omega$  é uma forma bilinear simplética.

**Exemplo 2.1.** O determinante  $2 \times 2$  é uma forma bilinear simplética.

**Proposição 2.1.** *Seja  $\Omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma bilinear antissimétrica e não-degenerada. Então existe  $a \in \mathbb{R}$  tal que, para quaisquer  $v_1, v_2 \in V$ , vale  $\Omega(v_1, v_2) = a \det(v_1, v_2)$ .*

**Demonstração:** Seja  $\{e_1, e_2\}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ . Se  $v_1 = (x_1, y_1), v_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$  então

$$\begin{aligned} v_1 &= x_1 e_1 + y_1 e_2 \\ v_2 &= x_2 e_1 + y_2 e_2. \end{aligned}$$

Daí, como  $\Omega$  é uma forma bilinear antissimétrica,

$$\begin{aligned}\Omega(v_1, v_2) &= \Omega(x_1e_1 + y_1e_2, x_2e_1 + y_2e_2) \\ &= x_1x_2\Omega(e_1, e_1) + x_1y_2\Omega(e_1, e_2) + y_1x_2\Omega(e_2, e_1) + y_1y_2\Omega(e_2, e_2) \\ &= (x_1y_2 - x_2y_1)\Omega(e_1, e_2) \\ &= a \det(v_1, v_2).\end{aligned}$$

■

Um funcional em  $X$  é uma transformação linear  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ . O conjunto de todos os funcionais em  $X$  é chamado espaço dual de  $X$  e denotado por  $X^*$ . Então  $X^*$  é também um espaço vetorial real de mesma dimensão de  $X$  (ver [27]). A norma dual é definida por

$$\|\varphi\|^* = \sup \{\varphi(x) : \|x\| = 1\}.$$

**Teorema 2.4** ([27], Teorema 3.8-4). *Seja  $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma forma bilinear limitada. Então  $h$  tem uma representação  $h(x, y) = \langle Sx, y \rangle$  onde  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um operador linear limitado.  $S$  é unicamente determinado por  $h$  e  $\|h\|^* = \|S\|^*$ .*

**Teorema 2.5** ([27], Teorema 4.3-3). *Seja  $X$  um espaço normado e  $x_0$  um elemento de  $X \setminus \{0\}$ . Então existe um funcional linear limitado  $f$  em  $X$  tal que  $\|f\|^* = 1$  e  $f(x_0) = \|x_0\|$ .*

**Teorema 2.6** ([30], Pág 5). *(Desigualdade de Cauchy-Schwarz) Para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , tem-se  $|\langle x, y \rangle| \leq |x| \cdot |y|$ . Além disso, vale a igualdade se, e somente se,  $x$  e  $y$  são linearmente dependentes.*

## 2.3 Teoria de curvas no plano Euclidiano

Nesta seção iremos fazer um breve resumo da teoria de curvas no plano Euclidiano para que posteriormente possamos fazer comparações com a teoria de curvas desenvolvida para planos normados. As principais referências para essa seção são [2], [4] e [14].

**Definição 2.6.** Uma curva contínua no plano  $\mathbb{R}^2$  é uma aplicação contínua  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida num intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ . A aplicação  $\gamma$  dada por  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  é contínua se cada função coordenada  $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua.

O conjunto imagem  $\mathcal{C}$  da aplicação  $\gamma$ , dado por

$$\mathcal{C} = \{\gamma(t) = (x(t), y(t)) : t \in I\},$$

é chamado **traço** de  $\gamma$ . Nesse caso,  $\gamma$  é dita uma parametrização de  $\mathcal{C}$  e denominamos  $t$  o parâmetro da curva  $\gamma$ .

Se a curva  $\gamma$  está definida em um intervalo fechado  $I = [a, b]$ , os pontos  $\gamma(a)$  e  $\gamma(b)$  são chamados de ponto inicial e ponto final de  $\gamma$ , respectivamente. Se  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , dizemos que a curva é **fechada**.

**Definição 2.7.** Uma curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita **simples** se  $\gamma$  é injetiva.  $\gamma$  é dita **fechada e simples** se  $\gamma(s) \neq \gamma(t)$  para todo  $s \neq t$  em  $[a, b]$  e  $\gamma(a) = \gamma(b)$ . Nesse caso,  $\gamma$  é dita **curva de Jordan**.

**Observação 2.1.** Neste trabalho, diremos que uma curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é **suave** quando ela tiver todas as derivadas necessárias contínuas.

**Definição 2.8.** Uma curva parametrizada suave ou um caminho no plano  $\mathbb{R}^2$  é uma aplicação suave  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  que para cada  $t \in I$  associa  $\gamma(t) \in \mathbb{R}^2$ .

O vetor tangente (ou vetor velocidade) de  $\gamma$  em  $t_0 \in I$  é dado por

$$\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)).$$

$\gamma$  é dita **regular** em  $t_0 \in I$  se  $\gamma'(t_0) \neq (0, 0)$ . Se  $\gamma$  é regular para todo  $t \in I$ , dizemos simplesmente que  $\gamma$  é regular em  $I$ . Se  $\gamma'(t_0) = (0, 0)$ , dizemos que  $\gamma$  é **singular** em  $t_0$ .

### 2.3.1 Reparametrização e Comprimento de Arco

Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada definida por  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  e seja  $h : J \subset \mathbb{R} \rightarrow I$  uma função suave. Podemos então considerar uma nova curva  $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$\beta(t) = (\gamma \circ h)(t) = \gamma(h(t)).$$

A curva  $\beta$  é, portanto, uma curva parametrizada suave. Dizemos que a curva  $\beta$  é uma **reparametrização** de  $\gamma$ . Pela regra da cadeia,

$$\beta'(t) = (\gamma \circ h)'(t) = \gamma'(h(t))h'(t).$$

Se  $h$  é estritamente crescente, dizemos que a reparametrização  $\beta = \gamma \circ h$  preserva orientação de  $\gamma$ . Se  $h$  é estritamente decrescente, dizemos que  $\beta$  inverte orientação de  $\gamma$ .

Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva parametrizada por  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ . A função  $l_\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$l_\gamma(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(\xi)\| d\xi, \tag{2.4}$$

$t_0 \in I$ , é denominada **comprimento de arco**. Como  $\|\gamma'(t)\|$  é uma função contínua,  $l_\gamma$  é de classe  $C^1$ , daí

$$l'_\gamma(t) = \|\gamma'(t)\|.$$

**Definição 2.9.** Dizemos que uma curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  está parametrizada pelo comprimento de arco (*p.p.c.a.*), se o parâmetro  $t$  é, a menos de constante, igual a  $l_\gamma(t)$ , isto é,  $l_\gamma(t) = t + c$ .

**Proposição 2.2** ([2], Proposição 1.3). *Uma curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  está parametrizada pelo comprimento de arco se e somente se  $\|\gamma'(t)\| = 1$ .*

**Teorema 2.7.** *Toda curva regular  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco.*

**Demonstração:** Como  $\gamma$  é regular, então  $l'_\gamma(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$ . Logo,  $l_\gamma$  é estritamente crescente e, portanto, injetiva. Devido à continuidade de  $l_\gamma$ , temos ainda que  $l_\gamma(I)$  é um intervalo  $J$ . Concluimos então, pelo teorema da função inversa, que  $l_\gamma$  possui inversa diferenciável  $h : J \rightarrow I$ . Digamos que  $0 \in J$ ,  $h(0) = t_0$  e

$$l_\gamma(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(\xi)\| d\xi.$$

Então,  $l_\gamma(t_0) = 0$ . Vamos mostrar que  $\beta = \gamma \circ h$  está parametrizada pelo comprimento de arco. Com efeito, visto que  $h$  é a inversa de  $l_\gamma$ , temos

$$h'(t) = \frac{1}{l'_\gamma(h(t))} = \frac{1}{\|\gamma'(h(t))\|},$$

daí,

$$\beta'(t) = (\gamma \circ h)'(t) = \gamma'(h(t))h'(t).$$

Portanto,

$$\|\beta'(t)\| = \|\gamma'(h(t))\| |h'(t)| = 1.$$

■

**Definição 2.10.** Um campo de vetores de classe  $C^r$  ao longo de  $\gamma$  é uma aplicação  $X : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^r$ . Geometricamente, o campo de vetores  $X$  é dado, em cada ponto  $\gamma(t)$ , pelo vetor de extremidades  $\gamma(t)$  e  $\gamma(t) + X(t)$ .

Se  $\gamma$  é uma curva parametrizada e regular dada por  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , então  $T$  definido por  $T(t) = (x'(t), y'(t))$  é um campo de vetores ao longo de  $\gamma$  chamado **campo tangente**. O campo  $N$  dado por  $N(t) = (-y'(t), x'(t))$  é também um campo ao longo de  $\gamma$ . Observemos que para todo  $t \in I$ ,  $T \perp N$ , isto é,  $N$  é perpendicular a  $T$ . Neste caso,  $N$  é chamado **campo normal**.

**Definição 2.11.** Seja  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva de Jordan, regular e de classe  $C^2$ . Dizemos que  $\gamma$  está **orientada positivamente** se seu campo normal aponta para a região limitada de  $\mathbb{R}^2$  determinada pelo traço de  $\gamma$ .

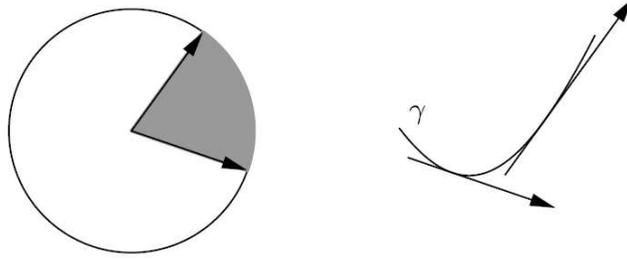
### 2.3.2 Curvatura e Equações de Frenet

Seja  $C$  um círculo de raio  $r$  e  $A$  a área do setor de ângulo  $\theta$ . Então, a área do setor de ângulo  $\theta$  é  $\frac{\theta r^2}{2}$  e o comprimento do arco  $L$  de ângulo  $\theta$  é  $r\theta$ . Portanto,

$$A = \frac{Lr}{2}. \tag{2.5}$$

Observemos que a área do setor de ângulo  $\theta$  é proporcional ao comprimento deste arco. E quando  $r = 1$ , temos  $2A = L$ .

**Figura 2.1:** A área varrida pelo campo tangente da curva  $\gamma$ .



Fonte: Concepts of curvatures in normed planes, 2018.

Seja  $\gamma : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva suave parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , e seja  $u : [0, l(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}$  a função que associa a cada  $s \in [0, l(\gamma)]$  duas vezes o valor da área do setor entre  $\gamma'(0)$  e  $\gamma'(s)$ . Definimos a curvatura  $k(s)$  de  $\gamma$  em  $\gamma(s)$  por

$$k(s) := u'(s), \quad s \in [0, c].$$

Esta definição pode ser reescrita em outros termos. Em [2], por exemplo, a curvatura é definida como sendo o comprimento da derivada do campo tangente em cada ponto, como veremos a seguir.

Como  $\gamma'(s)$  pertence ao círculo unitário, então  $\|\gamma'(s)\| = 1, \forall s \in [0, c]$ , daí

$$\|\gamma'(s)\|^2 = 1 \Rightarrow \langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = 1 \Rightarrow \langle \gamma'(s), \gamma''(s) \rangle = 0 \Rightarrow \gamma'(s) \perp \gamma''(s), \quad \forall s.$$

Como  $\{\gamma'(s), n(s)\}$  forma uma base de  $\mathbb{R}^2$ , onde  $n(s)$  é o vetor normal orientado positivamente por  $\gamma'(s)$ , de comprimento unitário, devemos ter  $\gamma''(s) // n(s)$ . Escrevemos

$$\gamma''(s) = k(s)n(s), \quad \forall s \in [0, l(\gamma)].$$

Para verificar que as definições coincidem, seja  $\varphi(u) : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma parametrização do círculo unitário orientada positivamente, onde o parâmetro  $u$  é duas vezes a área do setor (que também é uma parametrização pelo comprimento de arco do círculo unitário, devido a equação (2.5)). Considerando que  $\varphi(u(s)) = \gamma'(s)$ , temos

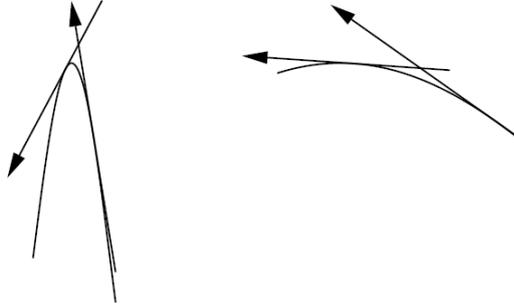
$$\gamma''(s) = u'(s) \frac{d\varphi}{du}(u(s)) = u'(s)n(s),$$

logo,

$$k(s) = u'(s),$$

ou seja, as definições dadas de curvatura coincidem.

**Figura 2.2:** Curvaturas “grandes” e “pequenas”.



Fonte: Concepts of curvatures in normed planes, 2018.

Quando a curva  $\gamma$  não está parametrizada pelo comprimento de arco, a curvatura Euclidiana de  $\gamma$  em  $t$  é dada por

$$k(t) = \frac{[\gamma'(t), \gamma''(t)]}{\|\gamma'(t)\|^3}, \quad (2.6)$$

onde  $[\cdot, \cdot]$  é a forma determinante padrão.

Seja  $\gamma(s) = (x(s), y(s))$  uma curva de classe pelo menos  $C^2$ , parametrizada pelo comprimento de arco, então

$$\gamma'(s) = (x'(s), y'(s)) \Rightarrow \gamma''(s) = (x''(s), y''(s)),$$

e,

$$n(s) = (-y'(s), x'(s)) \Rightarrow n'(s) = (-y''(s), x''(s)). \quad (2.7)$$

Como

$$(x''(s), y''(s)) = \gamma''(s) = k(s)(-y'(s), x'(s)), \quad (2.8)$$

então de (2.7) e (2.8), temos

$$\begin{cases} n'(s) = -k(s)\gamma'(s) \\ t'(s) = k(s)n(s) \end{cases}. \quad (2.9)$$

As equações em (2.9) são chamadas *fórmulas de Frenet*.

Existe uma terceira maneira de obter curvatura no plano Euclidiano que mais tarde dará sentido a um certo tipo de curvatura nos planos normados, chamada **curvatura circular**.

Seja  $\gamma : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva suave de curvatura positiva parametrizada positivamente pelo comprimento de arco  $s$  e seja  $\varphi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma parametrização positiva pelo comprimento de arco  $u$  (ou duas vezes a área do setor) do círculo unitário. Então podemos considerar localmente uma reparametrização  $s = s(u)$  de  $\gamma$  de tal maneira que o vetor tangente de  $\gamma$  em  $\gamma(s(u))$  aponta na direção de  $\varphi'(u)$ . Escrevemos

$$\frac{d}{du}\gamma(s(u)) = \rho(u)\varphi'(u).$$

Geometricamente, estamos colocando um círculo (de raio  $\rho(u)$ ) “preso” no ponto  $\gamma(s(u))$  da

curva, de tal maneira que os vetores tangentes da curva e do círculo coincidam neste ponto. O número  $\rho(u)$  é chamado **raio de curvatura** de  $\gamma$  em  $s(u)$ .

**Observação 2.2.** Temos que

$$k(s(u)) = \frac{1}{\rho(u)},$$

onde  $k(s(u))$  é a curvatura de  $\gamma$  em  $s(u)$ .

Com efeito,

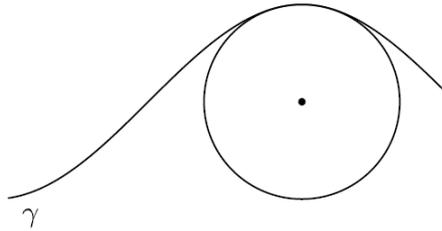
$$\rho(u)\varphi'(u) = \frac{d}{du}\gamma(s(u)) = \frac{ds}{du}(u) \frac{d\gamma}{ds}(s(u)),$$

e como  $\varphi'(u)$  e  $\frac{d\gamma}{ds}(s(u))$  são unitários, temos

$$\rho(u) = \frac{ds}{du}(u) \Rightarrow \frac{1}{\rho(s(u))} = \left(\frac{ds}{du}(u)\right)^{-1} = \frac{du}{ds}(s(u)) = k(s(u)).$$

O círculo de raio  $\rho(u)$  passando por  $\gamma(s(u))$  é chamado **círculo osculatório** de  $\gamma$  em  $\gamma(s(u))$ . A Figura 2.3 ilustra essa construção.

**Figura 2.3:** Um círculo osculatório de  $\gamma(s(u))$ .



Fonte: Concepts of curvatures in normed planes, 2018.

**Definição 2.12.** Sejam  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^2$  curvas regulares tais que  $\gamma(s_0) = \alpha(s_0)$  onde  $s_0 \in I \cap J$ . Dizemos que  $\gamma$  e  $\alpha$  têm **contato de ordem  $n$**  em  $s_0$  se todas as derivadas de ordem menor que  $n$  coincidem em  $s_0$  e as derivadas de ordem  $n$  diferem em  $s_0$ .

**Teorema 2.8.** *Seja  $k : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma função de classe  $C^1$ . Então dados  $P \in \mathbb{R}^2$  e  $V_0 \in \mathbb{R}^2$  com  $\|V_0\| = 1$ , existe uma única curva parametrizada pelo comprimento de arco  $\gamma : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que a curvatura em cada ponto  $\gamma(s)$  é dada por  $k(s)$ ,  $\gamma(0) = P$  e  $\gamma'(0) = V_0$ .*

**Demonstração:** Encontrarmos uma curva  $\gamma : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizada pelo comprimento de arco e com curvatura  $k$  é equivalente a resolvermos o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} x''(s) = -k(s)y'(s) \\ y''(s) = k(s)x'(s) \end{cases}, \quad (2.10)$$

onde  $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ .

Observemos que o sistema (2.10) é equivalente ao sistema

$$\begin{pmatrix} (x'(s))' \\ (y'(s))' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -k(s) \\ k(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Como  $k(s)$  é de classe  $C^1$  em  $[0, c]$ , em particular  $k(s)$  é contínua em  $[0, c]$ . Daí, pelo Teorema 2.1, existe uma única solução  $\gamma'(s) = (x'(s), y'(s))$  de (2.11) tal que  $\gamma'(0) = (x'(0), y'(0)) = V_0$ . Agora, dado o ponto inicial  $\gamma(0) = (x(0), y(0)) = P$ , como o campo tangente é unicamente determinado, também pelo Teorema 2.1, a curva  $\gamma$  é unicamente determinada.

De (2.10), temos

$$\begin{cases} x'(s)x''(s) = -k(s)y'(s)x'(s) \\ y'(s)y''(s) = k(s)x'(s)y'(s) \end{cases}.$$

Logo,

$$x'(s)x''(s) + y'(s)y''(s) = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (\|\gamma'(s)\|^2)' &= \langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle' \\ &= 2\langle \gamma''(s), \gamma'(s) \rangle \\ &= 2\langle (x''(s), y''(s)), (x'(s), y'(s)) \rangle \\ &= 2(x'(s)x''(s) + y'(s)y''(s)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja,  $\|\gamma'(s)\| = cte = c$ . Observemos que  $c = \|\gamma'(0)\| = \|V_0\| = 1$

■

**Definição 2.13.** Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^2$  diz-se **convexo** quando contém qualquer segmento de reta cujos extremos pertençam a  $X$ , ou seja, se  $x, y \in X$ , então  $(1-t)x + ty \in X$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

**Definição 2.14.** Dizemos que uma curva regular  $\gamma : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é **convexa** se, para cada  $s_0 \in [0, c]$ , o traço de  $\gamma$  está inteiramente contido em um dos semiplanos determinados pela reta tangente à  $\gamma$  em  $s_0$ . A curva  $\gamma$  é dita **estritamente convexa** em  $s_0$ , se o traço de  $\gamma$ , exceto pelo ponto  $\gamma(s_0)$ , está inteiramente contido no semiplano aberto determinado pela reta tangente à curva  $\gamma$  em  $\gamma(s_0)$ .

**Teorema 2.9** ([2], Proposição 5.1). *Seja  $\gamma : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular de classe  $C^2$ . Se a curvatura de  $\gamma$  em  $s \in [0, c]$  é não-nula, então  $\gamma$  é estritamente convexa em  $s$ .*

**Definição 2.15.** Um **corpo convexo** em  $\mathbb{R}^2$  é um conjunto compacto e convexo com interior não vazio.

**Definição 2.16.** Sejam  $A \subset \mathbb{R}^2$  e  $P \in \bar{A}$  (fecho de  $A$ ). Dizemos que uma reta  $r$  passando por  $P$  é uma reta suporte para  $A$  em  $P$ , se  $A$  estiver totalmente contido em um dos semiplanos fechados determinados por  $r$ .

**Proposição 2.3** ([2], Proposição 5.4). *Se  $\Omega$  é convexo e  $P \in \partial\Omega$ , então existe uma reta suporte para  $\Omega$  passando por  $P$ .*

**Lema 2.1** ([2], Lema 5.1). *Seja  $\gamma : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva de Jordan, regular e de classe  $C^1$  e seja  $\Omega$  o fecho da região limitada pelo traço de  $\gamma$ . Se  $\Omega$  é um conjunto convexo, então, para todo  $s \in [0, c]$ , a reta tangente à curva  $\gamma$  em  $s$  é a única reta suporte para  $\Omega$  passando por  $\gamma(s)$ .*

**Teorema 2.10** ([2], Teorema 5.1). *Uma curva regular, fechada e simples  $\gamma : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é convexa se e só se sua curvatura não muda de sinal.*

**Teorema 2.11** ([14], Teorema 5.1.4). *Uma curva fechada localmente convexa é convexa se e somente se é simples.*

### 2.3.3 Evolutas e Involutas

Consideremos  $\gamma : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizada pelo comprimento de arco, tal que sua curvatura  $k$  não se anula em  $[0, c]$ . Nesse caso, para cada  $s \in [0, c]$ , está bem definido o centro de curvatura de  $\gamma$  em  $s$ , dado por

$$\gamma_e(s) = \gamma(s) + \frac{1}{k(s)}n(s),$$

onde  $n$  é o campo normal unitário de  $\gamma$ . A aplicação que a cada  $s \in [0, c]$  associa  $\gamma_e(s)$  define uma curva diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ , e é chamada **evoluta** da curva  $\gamma$ .

**Exemplo 2.2.** Consideremos a *ciclóide* dada pelo traço da curva  $\gamma$ , definida por

$$\gamma(s) = (s - \text{sen } s, 1 - \text{cos } s), \quad s \in [0, 2\pi].$$

A evoluta de  $\gamma$  é a curva definida por

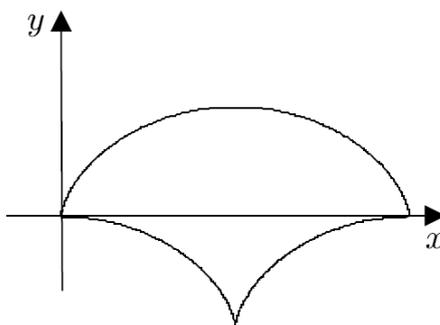
$$\gamma_e(s) = (s + \text{sen } s, \text{cos } s - 1).$$

Observemos que

$$\gamma(s + \pi) = \gamma_e(s) + (\pi, 2).$$

Logo, a menos de uma translação, a evoluta de  $\gamma$  é a própria ciclóide.

**Figura 2.4:** Evoluta da ciclóide.



Fonte: Geometria das Curvas Planas, 2002.

Se derivarmos a curva evoluta, pelas fórmulas de Frenet, obtemos

$$\gamma'_e(s) = -\frac{k'(s)}{k^2(s)}n(s),$$

ou seja, a reta normal à curva  $\gamma$  em  $\gamma(s)$  coincide com a reta tangente à  $\gamma_e$  em  $\gamma_e(s)$ . Um outro modo de interpretar esse fato é dizer que a evoluta de uma curva tem a propriedade de, em cada instante, ser tangente às retas normais da curva. Nesse caso, dizemos que a evoluta de uma curva é a envoltória da família de retas normais dessa curva.

Vamos agora introduzir uma noção dual à de evoluta de uma curva regular.

**Definição 2.17.** Uma **involuta** da curva regular  $\gamma : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizada pelo comprimento de arco é uma curva  $\gamma_i : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que para todo  $s \in [0, c]$ ,  $\gamma_i(s)$  intercepta a reta tangente a  $\gamma$  em  $\gamma(s)$  ortogonalmente.

Vamos obter a família das involutas de  $\gamma$ . Como  $\gamma_i(s)$  pertence à reta tangente a  $\gamma$  em  $\gamma(s)$ , então

$$\gamma_i(s) = \gamma(s) + f(s)\gamma'(s),$$

para alguma função  $f : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}$ . Além disso,  $\gamma'_i(s)$  deve ser ortogonal a  $\gamma'(s)$ , isto é,

$$\langle \gamma'(s) + f'(s)\gamma'(s) + f(s)\gamma''(s), \gamma'(s) \rangle = 0.$$

Portanto,

$$1 + f'(s) = 0,$$

ou seja,

$$f(s) = a - s,$$

onde  $a$  é uma constante arbitrária. Daí, concluímos que uma involuta de  $\gamma$  é dada por

$$\gamma_i(s) = \gamma(s) + (a - s)\gamma'(s).$$

Como  $a$  é arbitrária, essa equação representa uma família infinita de involutas de  $\gamma$ .

### 2.3.4 Teorema dos Quatro Vértices

Seja  $\gamma : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular de classe  $C^2$  parametrizada pelo comprimento de arco. Um **vértice** de  $\gamma$  é um ponto crítico da função curvatura  $k$  de  $\gamma$ , isto é, um ponto onde a derivada da função curvatura se anula.

**Teorema 2.12** ([2], Teorema 6.1). *(Teorema dos Quatro Vértices)* Seja  $\gamma : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva de Jordan, regular e de classe  $C^3$ . Então  $\gamma$  possui pelo menos quatro vértices.

## 2.4 Resultados Adicionais

**Teorema 2.13** ([36], Teorema 6.3). *(Teorema de Green)* Seja  $\gamma : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva plana, simples e fechada dada por  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ . Suponhamos que  $\gamma$  tenha orientação positiva, seja

## 2.4. RESULTADOS ADICIONAIS

---

$C$  o traço de  $\gamma$ , e seja  $R$  o interior de  $C$ . Sejam  $p = p(x, y)$ ,  $q = q(x, y)$  funções reais com derivadas parciais contínuas em  $\bar{R}$ . Então,

$$\int \int_R (q_x - p_y) dx dy = \int_C \left( p \frac{dx}{dt} + q \frac{dy}{dt} \right) dt.$$

**Lema 2.2.** *Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função continuamente diferenciável tal que  $f(a) = f(b)$ ,  $f'(a) = f'(b)$  e  $f$  não é constante em nenhum subintervalo, então  $f$  possui o mesmo número de mínimos e máximos locais, convencionando que, se eles ocorrem nos extremos, são contados como 1.*

**Demonstração:** Se  $f'(a) \neq 0$ , como por hipótese  $f'$  é contínua, então  $f'$  possui um número par de zeros que mudam de sinal em  $[a, b]$ , uma vez que  $f'(a) = f'(b)$ . Logo, em  $(a, b)$ , a função  $f$  possui o mesmo número de mínimos locais e máximos locais. Como um dos extremos é, certamente, máximo local e o outro é mínimo local, chegamos ao desejado.

Se  $f'(a) = f'(b) = 0$  e o número de zeros de  $f'$  que mudam de sinal em  $(a, b)$  é par, o mesmo raciocínio utilizado anteriormente é aplicado. Se o número de zeros em  $(a, b)$  for ímpar, então os extremos são ou máximo ou mínimo, e em ambos casos, o resultado segue, já que existe a convenção de que neste caso contabiliza-se somente um dos extremos.

■

**Teorema 2.14** ([30], Pág 311). *Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  de classe  $C^k$  no aberto  $U$ . Se  $c \in \mathbb{R}^{n-m}$  é valor regular de  $f$  então  $f^{-1}(c)$  é uma superfície de classe  $C^k$  e dimensão  $m$  em  $\mathbb{R}^n$ . Em cada ponto  $p \in f^{-1}(c)$ , o espaço tangente  $T_p[f^{-1}(c)]$  é o núcleo da derivada  $f'(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ .*

## Capítulo 3

# Geometria de Curvas Planas em Espaço de Minkowski

Esse capítulo é voltado para geometria de Minkowski de curvas planas, isto é, a geometria dos espaços reais normados de dimensão dois. Boas referências para este Capítulo são: [4], [32], [33] e [34].

### 3.1 Geometria de Minkowski no plano

As definições e resultados dessa seção podem ser encontrados em [4] e [33].

Um **plano de Minkowski** é um espaço vetorial  $X$  de dimensão dois dotado de uma norma, denotado por  $(X, \|\cdot\|)$ . A bola fechada centrada em  $a$  e de raio  $r$  em  $(X, \|\cdot\|)$  é definida como sendo o conjunto

$$B(a, r) = \{x \in X : \|x - a\| \leq r\},$$

e o círculo de centro  $a$  e raio  $r$  é definido como sendo o bordo de  $B(a, r)$ , isto é,

$$S(a, r) = \{x \in X : \|x - a\| = r\}.$$

Quando  $a = (0, 0)$  e  $r = 1$ , denotamos simplesmente por  $B$  e  $S$  a bola unitária e o círculo unitário, respectivamente.

**Teorema 3.1.**  *$B$  é convexa.*

**Demonstração:** Se  $x, y \in B$ , então  $\|x\|, \|y\| \leq 1$ . Daí, para qualquer  $t \in [0, 1]$ , temos

$$\|(1-t)x + ty\| \leq (1-t)\|x\| + t\|y\| \leq (1-t) + t = 1.$$

Logo,  $(1-t)x + ty \in B$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . ■

Observemos que como  $B$  é fechada e limitada em  $(X, \|\cdot\|)$ , então, pelo Teorema 2.3,  $B$  é compacta. Além disso, como  $\|(0, 0)\| = 0 < 1$ ,  $B$  contém pontos interiores. Com estas observações feitas e com o Teorema 3.1, temos o seguinte resultado:

**Proposição 3.1.**  *$B$  é um corpo convexo e simétrico com relação a origem.*

**Observação 3.1.** Ao longo deste trabalho, vamos sempre assumir que  $S$  é de classe (pelo menos)  $C^2$  e é uma curva *convexa estrita*, isto é, delimita uma região convexa sem segmentos no bordo.

**Observação 3.2.** Geralmente a palavra suave é usada para descrever uma bola unitária que possui uma única reta suporte em cada ponto do seu bordo. Como estamos assumindo que  $S$  é sempre pelo menos de classe  $C^2$ , segue que todas as bolas consideradas são suaves. Quando se trata de curvas, a mesma palavra suave denota aquelas que são de classe  $C^\infty$ . Aqui, sempre que dissermos que uma curva é suave, queremos dizer que ela tem a diferenciabilidade suficiente para todas as expressões envolvidas fazerem sentido.

Queremos ao longo deste capítulo descrever os conceitos de curvatura em planos normados de forma a enfatizar seu significado geométrico.

Para estudar as curvaturas precisamos da noção de comprimento de curvas e de medida de área. O **comprimento** de uma curva  $\gamma : [0, c] \rightarrow X$  é definido de maneira similar a que definimos em (2.4),

$$l_\gamma(s) = \int_0^s \|\gamma'(\xi)\| d\xi,$$

onde  $\|\cdot\|$  é a norma definida em  $X$ . Com esta definição podemos, de maneira análoga à feita ao caso Euclidiano, provar que qualquer curva regular em  $(X, \|\cdot\|)$  pode ser reparametrizada pelo comprimento de arco de Minkowski.

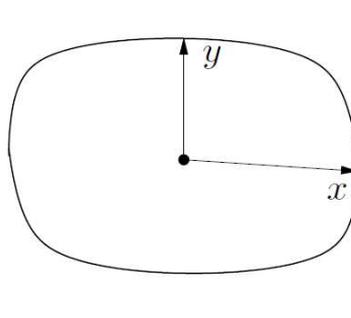
A medida de área em um plano normado é obtida fixando uma **forma bilinear simplética**  $[\cdot, \cdot] : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ . A escolha de tal forma é única, a menos de multiplicação por escalar (Proposição 2.1), ela fixa um elemento de área e uma orientação no plano.

Aqui aparece a primeira diferença entre a geometria Euclidiana e a geometria de Minkowski e isso é o que vamos trabalhar com relação às curvaturas: podemos parametrizar o círculo unitário de Minkowski pelo comprimento de arco e por duas vezes a área do setor, mas as parametrizações não coincidirão, necessariamente. Como veremos mais adiante, a parametrização por duas vezes o parâmetro de área é igual à parametrização pelo parâmetro comprimento de arco, mas em uma norma diferente. A segunda diferença é que trabalhamos com um conceito de ortogonalidade que não é necessariamente simétrico.

**Definição 3.1.** Sejam  $x, y \in X$ . Dizemos que  $x$  é **ortogonal Birkhoff** a  $y$ , e denotamos  $x \dashv_B y$ , quando  $\|x\| \leq \|x + ty\|$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Geometricamente, isso significa que a reta suporte da bola unitária (que pelo Lema 2.1 sabemos ser única) em  $\frac{x}{\|x\|}$  é paralela a  $y$ .

**Figura 3.1:**  $x \dashv_B y$ .



Fonte: Antinorms and Radon curves, 2006.

### 3.1. GEOMETRIA DE MINKOWSKI NO PLANO

Com efeito, se  $y$  está na direção da reta suporte da bola unitária em  $\frac{x}{\|x\|}$ , então

$$1 = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq \left\| \frac{x}{\|x\|} + ty \right\|, \forall t \in \mathbb{R},$$

pois como  $S$  é uma curva estritamente convexa então a reta suporte não intersecta  $S$  em mais de um ponto, conseqüentemente nenhum ponto da bola unitária, além de  $\frac{x}{\|x\|}$ , pode pertencer a reta suporte. Observemos que,

$$\begin{aligned} \frac{x}{\|x\|} \dashv_B y &\Leftrightarrow 1 = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq \left\| \frac{x}{\|x\|} + ty \right\|, \forall t \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \|x\| \leq \|x\| \left\| \frac{x}{\|x\|} + ty \right\|, \forall t \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \|x\| \leq \|x + ty\|, \forall t \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow x \dashv_B y. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, a ortogonalidade Birkhoff é homogênea e  $x \dashv_B y$ . Por outro lado, se supormos que  $\frac{x}{\|x\|} \dashv_B y$  e que  $y$  não está na direção da reta suporte, então a reta  $\frac{x}{\|x\|} + ty$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , intersecta  $S$  em mais de um ponto, devido a unicidade da reta suporte de  $B$  em  $\frac{x}{\|x\|}$  e como  $B$  é convexa, esta reta contém pelo menos um  $z \in B$ , da forma  $\frac{x}{\|x\|} + t_0 y$ , com  $\|z\| < 1 = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|$ , contrariando o fato de  $\frac{x}{\|x\|} \dashv_B y$ .

**Observação 3.3.** Com essa ideia geométrica concluímos que dado  $x \in X$ , existe  $y \in S$  tal que  $x$  é ortogonal Birkhoff a  $y$ , além disso, existe um  $z \in S$  tal que  $z$  é ortogonal Birkhoff a  $x$ . Como já mencionado, a ortogonalidade Birkhoff nem sempre é simétrica, ou seja, não vale necessariamente que  $y \dashv_B x$  ou  $x \dashv_B z$ . Mais adiante iremos classificar os planos onde a ortogonalidade Birkhoff é simétrica.

**Observação 3.4.** Dada uma parametrização  $\varphi(t) : [0, c] \rightarrow S$  do círculo unitário, como  $\varphi'(t)$  está na direção da reta suporte de  $B$  em  $\varphi(t)$ , então  $\varphi(t) \dashv_B \varphi'(t)$ .

**Exemplo 3.1.** Consideremos o plano normado  $(\mathbb{R}^2, l_3)$  onde a norma  $l_3$  é dada por

$$\|(x, y)\|_3 = (|x|^3 + |y|^3)^{1/3}.$$

Seja  $\varphi(t) = (t^{1/3}, (1-t)^{1/3})$ ,  $t \in [0, 1]$ , parametrização da parte do círculo unitário que fica no primeiro quadrante (as outras partes são simples reflexões deste). Daí,

$$\varphi'(t) = \left( \frac{t^{-2/3}}{3}, -\frac{(1-t)^{-2/3}}{3} \right), \quad t \in (0, 1).$$

Como  $\varphi\left(\frac{9}{10}\right) \approx (0.97, 0.46)$  e  $\varphi'\left(\frac{9}{10}\right) \approx (0.36, -1.55)$ , então

$$\left\| \varphi'\left(\frac{9}{10}\right) \right\|_3 \approx 1.56 \text{ e } \left\| \varphi'\left(\frac{9}{10}\right) + \frac{1}{3}\varphi\left(\frac{9}{10}\right) \right\|_3 \approx 1.45.$$

Portanto,  $\varphi'\left(\frac{9}{10}\right)$  não é ortogonal Birkhoff à  $\varphi\left(\frac{9}{10}\right)$ . Mas, pela Observação 3.4,  $\varphi\left(\frac{9}{10}\right)$  é ortogonal Birkhoff à  $\varphi'\left(\frac{9}{10}\right)$ . Ou seja,  $(\mathbb{R}^2, l_3)$  é um exemplo onde a ortogonalidade Birkhoff não é simétrica.

Na próxima seção, iremos definir um novo tipo de norma a partir da norma inicial  $\|\cdot\|$ , onde teremos que se  $x$  é ortogonal Birkhoff a  $y$  então nessa nova norma definida  $y$  é ortogonal Birkhoff a  $x$ .

### 3.1.1 Antinorma

Consideremos  $(X, \|\cdot\|)$  um espaço vetorial normado e  $[\cdot, \cdot]$  uma forma bilinear simplética fixada, então, pelo Teorema 2.4, existe um isomorfismo  $T : X \rightarrow X^*$  tal que  $[x, y] = T(y)x$ . Definimos em  $X$  uma nova norma identificando  $X^*$  com  $X$  via  $[\cdot, \cdot]$  como segue abaixo.

$$\|x\|_a = \|T(x)\|^* = \sup \{ | [y, x] | : \|y\| = 1 \}. \quad (3.1)$$

Chamamos  $\|\cdot\|_a$  de **antinorma**.

Observemos que

$$\|x\|_a = \sup \{ | [x, y] | : \|y\| = 1 \} \quad (3.2)$$

e

$$| [y, x] | = | [x, y] | = | T(y)x | \leq \|T(y)\|^* \|x\| = \|y\|_a \|x\|. \quad (3.3)$$

**Proposição 3.2.**  $\|\cdot\|_a$  é uma norma em  $X$ .

**Demonstração:** Primeiramente  $\|\cdot\|_a \geq 0$ , pois  $|[\cdot, \cdot]| \geq 0$ . Também temos

$$\begin{aligned} \|x\|_a = 0 &\Leftrightarrow \sup \{ | [x, y] | : y \in S \} = 0 \\ &\Leftrightarrow | [x, y] | = 0, \forall y \in S \\ &\Leftrightarrow [x, y] = 0, \forall y \in S \\ &\Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Esta última equivalência vem do fato de  $[\cdot, \cdot]$  ser não degenerada. Além disso,

$$\begin{aligned} \|\lambda x\|_a &= \sup \{ | [\lambda x, y] | : y \in S \} \\ &= \sup \{ | \lambda [x, y] | : y \in S \} \\ &= \sup \{ | \lambda | | [x, y] | : y \in S \} \\ &= | \lambda | \sup \{ | [x, y] | : y \in S \} \\ &= | \lambda | \|x\|_a. \end{aligned}$$

Por fim,

$$\begin{aligned} \|x + y\|_a &= \sup \{ | [x + y, z] | : z \in S \} \\ &= \sup \{ | [x, z] + [y, z] | : z \in S \} \\ &\leq \sup \{ | [x, z] | : z \in S \} + \sup \{ | [y, z] | : z \in S \} \\ &= \|x\|_a + \|y\|_a. \end{aligned}$$

Portanto,  $\|\cdot\|_a$  é uma norma em  $X$ . ■

**Proposição 3.3.** *A antinorma da antinorma é a norma.*

**Demonstração:** Seja  $\|x\|_{a,a}$  a antinorma da antinorma. Consideremos o supremo em (3.3) sobre todos os  $y$ 's, com  $\|y\|_a = 1$ . Então,

$$\|x\|_{a,a} = \sup \{ |[x, y]| : \|y\|_a = 1 \} \leq \|x\|. \quad (3.4)$$

Agora consideremos  $\varphi$  o funcional tal que  $\|\varphi\|^* = 1$  e  $|\varphi(x)| = \|x\|$ . Este funcional existe pelo Teorema 2.5. Como  $\varphi \in X^*$ , então existe  $y \in X$  tal que  $\varphi = T(y)$ . Observemos que

$$1 = \|\varphi\|^* = \|T(y)\|^* = \|y\|_a$$

e

$$|[x, y]| = |T(y)x| = |\varphi(x)| = \|x\|.$$

Por outro lado,

$$\|x\| = |[x, y]| \leq \sup\{|[x, y]| : \|y\|_a = 1\} = \|x\|_{a,a}. \quad (3.5)$$

De (3.4) e (3.5), segue que

$$\|x\| = \|x\|_{a,a}.$$

Quando  $|\varphi(x)| = \|\varphi\|^* \|x\|$  para algum funcional  $\varphi \in X^*$ , vamos abreviar essa igualdade por  $x \perp_{\|\cdot\|} \varphi$ . ■

**Proposição 3.4.**  $x \perp_{\|\cdot\|} T(y) \Leftrightarrow y \perp_{\|\cdot\|_a} T(x)$ .

**Demonstração:**

$$\begin{aligned} x \perp_{\|\cdot\|} T(y) &\Leftrightarrow |T(y)x| = \|T(y)\|^* \|x\| = \|y\|_a \|x\|_{a,a} = \|T(x)\|_a^* \|y\|_a \\ &\Leftrightarrow |T(x)y| = |[y, x]| = |[x, y]| = |T(y)x| = \|T(x)\|_a^* \|y\|_a \\ &\Leftrightarrow y \perp_{\|\cdot\|_a} T(x). \end{aligned}$$

**Proposição 3.5.**  $y \in S$  maximiza  $[x, \cdot] : S \rightarrow \mathbb{R} \Leftrightarrow y \dashv_B x$ . ■

**Demonstração:**  $(\Rightarrow)$  Como  $[x, y] = [x, y+tx]$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  ( $[\cdot, \cdot]$  é uma forma antissimétrica), então

$$\frac{[x, y]}{\|y+tx\|} = \left[ x, \frac{y+tx}{\|y+tx\|} \right].$$

Por absurdo, suponhamos  $\|y+tx\| < \|y\| = 1$  para algum  $t \in \mathbb{R}$ . Então,

$$[x, y] = [x, y+tx] \Rightarrow \left[ x, \frac{y+tx}{\|y+tx\|} \right] > [x, y],$$

### 3.1. GEOMETRIA DE MINKOWSKI NO PLANO

o que contraria o fato de  $y \in S$  maximizar  $[x, \cdot]$ . Logo,  $\|y\| \leq \|y + tx\|$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponhamos, por absurdo, que  $y \in S$  não maximiza  $[x, \cdot]$ . Então existe  $z \in S$  tal que  $[x, y] < [x, z]$ . Como  $y \dashv_B x$ , então  $\{x, y\}$  forma uma base de  $\mathbb{R}^2$ . Daí, existem  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tal que

$$z = \alpha x + \beta y.$$

Portanto,

$$[x, z] = [x, \alpha x + \beta y] = \beta[x, y].$$

Como  $\|z\| = 1$ , então

$$1 = \left\| y + \frac{\alpha}{\beta} x \right\| |\beta|. \quad (3.6)$$

E como  $y \dashv_B x$ , então  $1 \leq \|y + tx\|$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , em particular para  $t = \frac{\alpha}{\beta}$ . Logo, em (3.6), devemos ter  $\beta \leq 1$ , o que é um absurdo, pois se assim o fosse teríamos

$$[x, y] < [x, z] = \beta[x, y].$$

Portanto,  $y$  maximiza  $[x, \cdot]$ . ■

**Proposição 3.6.**  $x \dashv_B y \Leftrightarrow x \perp_{\|\cdot\|} T(y)$ .

**Demonstração:** Se  $x = 0$ , não há nada a se fazer. Se  $\|x\| = 1$ , como  $x \dashv_B y$ , então, pela Proposição 3.5,  $x$  maximiza  $[y, \cdot]$ . Daí,

$$\begin{aligned} x \dashv_B y &\Leftrightarrow \|y\|_a = \|T(y)\|^* = |[x, y]| = |T(y)x| \\ &\Leftrightarrow x \perp_{\|\cdot\|} T(y). \end{aligned}$$

Se  $\|x\| \neq 1$ , então pelo que fizemos acima,

$$\begin{aligned} \frac{x}{\|x\|} \dashv_B y &\Leftrightarrow \|y\|_a = \|T(y)\|^* = \left| \left[ \frac{x}{\|x\|}, y \right] \right| = \left| T(y) \frac{x}{\|x\|} \right| \\ &\Leftrightarrow \|x\| \|T(y)\|^* = |T(y)x| \\ &\Leftrightarrow x \perp_{\|\cdot\|} T(y). \end{aligned}$$

Como  $\frac{x}{\|x\|} \dashv_B y \Leftrightarrow x \dashv_B y$ , segue o resultado. ■

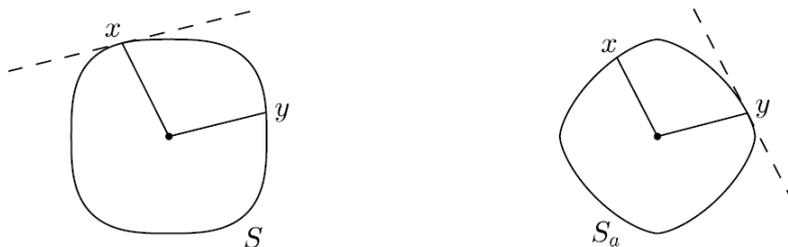
Denotaremos a bola unitária e o círculo unitário na antinorma por  $B_a$  e  $S_a$ , respectivamente. A antinorma inverte a ortogonalidade Birkhoff, como mostra a Proposição a seguir.

**Proposição 3.7.**  $x \dashv_B y \Leftrightarrow y \dashv_B^a x$ , onde  $\dashv_B^a$  denota a ortogonalidade Birkhoff na antinorma.

**Demonstração:** Segue diretamente das Proposições 3.4 e 3.6, pois

$$x \dashv_B y \Leftrightarrow x \perp_{\|\cdot\|} T(y) \Leftrightarrow y \perp_{\|\cdot\|_a} T(x) \Leftrightarrow y \dashv_B^a x. \quad \blacksquare$$

**Figura 3.2:** A antinorma inverte a ortogonalidade Birkhoff.



Fonte: Concepts of curvatures in normed planes, 2018.

Na Figura 3.2,  $x$  e  $y$  representam direções ao invés de vetores. Isso se deve pois a ortogonalidade Birkhoff é homogênea, logo podemos considerar a relação entre  $x$  e  $y$  como uma relação entre direções ao invés de vetores.

**Definição 3.2.** Dizemos que um plano é um **plano Radon** quando além de normado a ortogonalidade Birkhoff é simétrica.

Observemos que quando a ortogonalidade Birkhoff é simétrica, temos pela Proposição 3.6 que

$$\|x\|_a \|y\| = \|y\|_a \|x\|,$$

pois,

$$x \dashv_B y \Rightarrow |T(y)x| = \|y\|_a \|x\|$$

$$y \dashv_B x \Rightarrow |T(x)y| = \|x\|_a \|y\|.$$

**Exemplo 3.2.** Consideremos  $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ , onde  $\|(x, y)\| = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$ . Observemos primeiramente que  $\|\cdot\|$  é uma norma. Com efeito,

$$i) \|\cdot\| \geq 0 \text{ e } \|(x, y)\| = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 0 \Leftrightarrow x = y = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0);$$

$$ii) \|\lambda(x, y)\| = \left(\frac{(\lambda x)^2}{4} + \frac{(\lambda y)^2}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\lambda^2 \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \|(x, y)\|;$$

$$iii) \|(x, z)\| = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \\ = \|(x, y)\| + \|(y, z)\|,$$

onde usamos que  $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$  na última desigualdade. Portanto,  $\|\cdot\|$  é uma norma em  $\mathbb{R}^2$ . Agora vamos determinar a antinorma, considerando  $[\cdot, \cdot]$  a forma determinante padrão.

$$\begin{aligned} \|(x, y)\|_a &= \sup \left\{ [(x, y), (x_1, y_1)] ; \frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{9} = 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ xy_1 - x_1y ; \frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{9} = 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ 3x \frac{y_1}{3} - 2x_1 \frac{y}{2} ; \frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{9} = 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \left\langle (3x, -2y), \left(\frac{y_1}{3}, \frac{x_1}{2}\right) \right\rangle ; \frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{9} = 1 \right\}. \end{aligned}$$

Daí, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz (Teorema 2.6),

$$\|(x, y)\|_a = (9x^2 + 4y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Logo,

$$\|(x, y)\|_a = 6 \|(x, y)\|.$$

Portanto,  $X$  é um plano Radon.

Observemos que tanto o círculo unitário em  $X$  quanto o anticírculo são elipses.

A partir de agora, sempre que estivermos trabalhando com plano Radon (ver [33]), vamos sempre assumir que  $[\cdot, \cdot]$  está escalonada de maneira a se ter  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_a$ .

### 3.1.2 Relação entre o parâmetro de área e o parâmetro de comprimento de arco

Vamos denotar o comprimento de uma curva  $\gamma$  na norma  $\|\cdot\|$  por  $l(\gamma)$  e na antinorma  $\|\cdot\|_a$  por  $l_a(\gamma)$ . A área no plano de Minkowski é, a menos de multiplicação por escalar, definida da mesma forma que é definida a área no plano Euclidiano. Vamos denotar a área induzida pela forma simplética fixada do círculo e do anticírculo por  $\lambda(S)$  e  $\lambda(S_a)$ , respectivamente.

Consideremos  $\gamma : [0, c] \rightarrow X$  uma curva plana simples e fechada dada por  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ . Suponhamos que  $\gamma$  tenha orientação positiva, seja  $C$  o traço de  $\gamma$ , e seja  $R$  o interior de  $C$ . Sabemos que a área Euclidiana de uma região  $R$  é dada por

$$A(R) = \int \int_R dx dy.$$

Daí, tomando  $q = x$  e  $p = -y$  no Teorema 2.13, temos

$$2A(R) = 2 \int \int_R dx dy = \int_C \left( -y \frac{dx}{dt} + x \frac{dy}{dt} \right) dt = \int_C \det(\gamma(t), \gamma'(t)) dt.$$

Logo, pela Proposição 2.1,

$$A(R) = \frac{1}{2} \int_C [\gamma(t), \gamma'(t)] dt. \quad (3.7)$$

Seja  $\varphi(u) : [0, 2\lambda(S)] \rightarrow X$  uma parametrização positiva do círculo unitário  $S$ , onde o parâmetro é duas vezes a área do setor. Então, por (3.7),

$$u = \int_0^u [\varphi(t), \varphi'(t)] dt, \quad u \in [0, 2\lambda(S)]. \quad (3.8)$$

Pela Observação 3.4, temos que  $\varphi(u) \dashv_B \varphi'(u)$ , e pela Proposição 3.5,

$$[\varphi(u), \varphi'(u)] = \|\varphi'(u)\|_a.$$

Daí, derivando a Equação (3.8) com relação a  $u$ , temos

$$1 = [\varphi(u), \varphi'(u)] = \|\varphi'(u)\|_a. \quad (3.9)$$

Pela equação (3.9), concluímos que uma parametrização do círculo unitário pelo parâmetro de área é uma parametrização pelo comprimento de arco em relação à antinorma. Como a antinorma da antinorma é a norma, segue que o parâmetro de área no anticírculo unitário é igual ao parâmetro comprimento de arco no círculo unitário.

**Observação 3.5.** De agora em diante, ao lidarmos com mais de um parâmetro, iremos utilizar o símbolo ' para a derivada com relação ao comprimento de arco Minkowski (que será geralmente a letra  $s$ ). Quando não houver confusão no contexto podemos usar ' para indicar diferenciabilidade com relação a outros parâmetros. Além disso, quando estivermos tratando do parâmetro duas vezes a área do setor vamos apenas dizer parâmetro de área.

### 3.2 Definindo tipos de curvatura em um plano normado

Agora apresentaremos conceitos já definidos na literatura para planos normados, e explicaremos como cada um destes conceitos é obtido na perspectiva descrita na Seção 2.3. As principais referências para essa seção são: [4], [5], [12], [34] e [35].

O primeiro conceito é chamado **curvatura de Minkowski** introduzido por Petty em [35] e é o mesmo que Biberstein chama simplesmente de **curvatura** em [5]. Este conceito de curvatura é baseado na primeira ideia descrita na Seção 2.3, vamos estudar a variação da área varrida no círculo unitário pelo campo tangente à curva  $\gamma$ .

Seja  $\gamma(s) : [0, l(\gamma)] \rightarrow X$  uma curva suave parametrizada positivamente pelo comprimento de arco na norma  $\|\cdot\|$  e  $\varphi(u) : [0, 2\lambda(S)] \rightarrow S$  uma parametrização positiva do círculo unitário pelo parâmetro de área na norma  $\|\cdot\|$ . Iremos identificar a área “varrida” pelo campo tangente  $\gamma'$  escrevendo

$$\gamma'(s) = \varphi(u(s)), \quad s \in [0, l(\gamma)]. \quad (3.10)$$

Em outras palavras, o vetor  $\gamma'(s)$  é identificado dentro do círculo unitário no parâmetro de área. A função  $u(s) : [0, l(\gamma)] \rightarrow [0, 2\lambda(S)]$  associa o comprimento percorrido em  $\gamma$  com a área dentro de  $B$ .

**Definição 3.3.** A **curvatura de Minkowski** de  $\gamma$  em  $\gamma(s)$  é definida por

$$k_m(s) := u'(s), \quad s \in [0, l(\gamma)]. \quad (3.11)$$

**Observação 3.6.**  $\varphi(u(s))$  é uma reparametrização de  $\varphi(u)$  que preserva orientação, pois

$$u(s) = \int_0^s [\gamma'(t), \gamma''(t)] dt$$

e daí, como  $\gamma' \dashv_B \gamma''$  e  $\gamma' \in S$  para cada  $s$ , então

$$u'(s) = [\gamma'(s), \gamma''(s)] = \|\gamma''(s)\|_a > 0, \quad \forall s \in [0, l(\gamma)].$$

**Observação 3.7.** A partir de agora, sempre que estivermos considerando as parametrizações das curvas em questão, vamos estar supondo que elas estão orientadas positivamente.

### 3.2. DEFININDO TIPOS DE CURVATURA EM UM PLANO NORMADO

No plano Euclidiano também podemos obter a curvatura Euclidiana derivando o campo tangente e tomando sua norma, como vimos em (2.9). Em um plano Minkowski podemos fazer algo parecido, mas temos mais de uma escolha possível para o campo normal (lembrando que a ortogonalidade Birkhoff não é simétrica). Como o parâmetro de área em  $S$  na norma é o parâmetro pelo comprimento de arco na antinorma, definimos o campo normal à  $\gamma$  em  $\gamma(s)$  da seguinte forma.

**Definição 3.4.** A aplicação  $\bar{n}_\gamma(s) : [0, l(\gamma)] \rightarrow S$  que associa a cada  $s \in [0, l(\gamma)]$  o único vetor  $\bar{n}_\gamma(s)$  tal que

$$\bar{n}_\gamma(s) \dashv_B \gamma'(s) \text{ e } [\gamma'(s), \bar{n}_\gamma(s)] = \|\gamma'(s)\|_a, \quad (3.12)$$

é chamada de **campo normal esquerdo**.

**Definição 3.5.** O **campo normal direito** de  $\gamma$  é definido como a aplicação  $n_\gamma(s) : [0, l(\gamma)] \rightarrow S_a$  que associa a cada  $s \in [0, l(\gamma)]$  o único vetor  $n_\gamma(s)$  tal que

$$\gamma'(s) \dashv_B n_\gamma(s) \text{ e } [\gamma'(s), n_\gamma(s)] = 1. \quad (3.13)$$

Em outras palavras, esta última igualdade diz que  $n_\gamma(s)$  é único na antinorma e que a base  $\{\gamma'(s), n_\gamma(s)\}$  está orientada positivamente. Derivando a igualdade (3.10), temos

$$\gamma''(s) = u'(s) \frac{d\varphi}{du}(u(s)) = k_m(s)n_\gamma(s), \quad s \in [0, l(\gamma)]. \quad (3.14)$$

Esta última igualdade vem da unicidade do vetor normal direito, já que

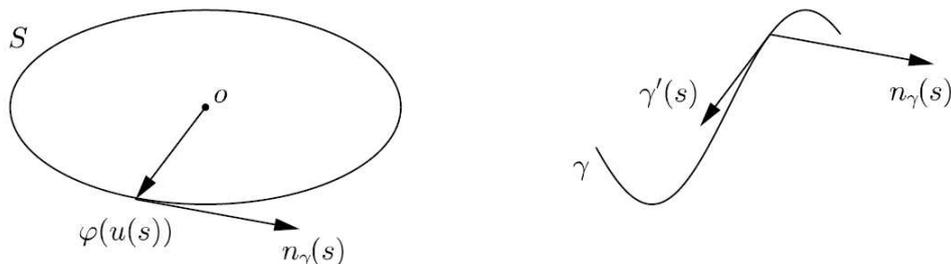
$$\gamma'(s) = \varphi(u(s)) \dashv_B \frac{d\varphi}{du}(u(s)) \text{ e } \left[ \varphi(u(s)), \frac{d\varphi}{du}(u(s)) \right] = \left\| \frac{d\varphi}{du}(u(s)) \right\|_a = 1$$

e

$$\gamma'(s) \dashv_B n_\gamma(s) \text{ e } [\gamma'(s), n_\gamma(s)] = 1.$$

A Figura 3.3 ilustra a situação.

**Figura 3.3:** O campo tangente e o campo normal direito de  $\gamma$ .



Fonte: Concepts of curvatures in normed planes, 2018.

Como o campo tangente  $\gamma'(s)$  “varre” o círculo unitário, então o campo normal direito de  $\gamma$

$n_\gamma(s)$  varre o anticírculo. Como esses campos vetoriais não “varrem” necessariamente a mesma área, então eles podem produzir diferentes curvaturas, diferente do caso Euclidiano.

Agora para lidar com a área varrida no anticírculo unitário pelo campo vetorial  $n_\gamma(s)$ , seja  $\psi(v) : [0, 2\lambda(S_a)] \rightarrow S_a$  uma parametrização pelo parâmetro de área do anticírculo unitário. Para cada  $s \in [0, l(\gamma)]$ , consideremos a função  $v(s) \in [0, 2\lambda(S_a)]$  tal que  $n_\gamma(s) = \psi(v(s))$ .

Em outras palavras, o vetor  $n_\gamma(s)$  é identificado dentro do anticírculo unitário no parâmetro de área. A função  $v(s) : [0, l(\gamma)] \rightarrow [0, 2\lambda(S_a)]$  associa o comprimento percorrido em  $\gamma$  com a área dentro de  $B_a$ .

**Definição 3.6.** A **curvatura normal** de  $\gamma$  em  $\gamma(s)$  é definida por

$$k_n(s) := v'(s), \quad s \in [0, l(\gamma)]. \quad (3.15)$$

Este conceito é chamado **curvatura isoperimétrica** introduzido por Petty em [35] (motivado pelo fato que para qualquer plano normado, o anticírculo resolve o problema isoperimétrico) e **anticurvatura** por Biberstein em [5].

**Observação 3.8.** A função  $\psi(v(s))$  é uma reparametrização de  $\psi(v)$  que preserva orientação, pois

$$v(s) = \int_0^s [n_\gamma(t), n'_\gamma(t)] dt$$

e daí, como  $n_\gamma \dashv_B^a n'_\gamma, n_\gamma \in S_a$ , para todo  $s \in [0, l(\gamma)]$ , então

$$v'(s) = [n_\gamma(s), n'_\gamma(s)] = \|n'_\gamma(s)\| > 0, \quad \forall s \in [0, l(\gamma)].$$

Se derivarmos a igualdade  $n_\gamma(s) = \psi(v(s))$ , podemos reobter a curvatura normal,

$$n'_\gamma(s) = v'(s) \frac{d\psi}{dv}(v(s)) = -k_n(s) \gamma'(s), \quad s \in [0, l(\gamma)]. \quad (3.16)$$

Esta última igualdade ocorre, pois

$$\psi(v(s)) = n_\gamma(s) \dashv_B^a \frac{d\psi}{dv}(v(s)) \text{ e } \left[ n_\gamma(s), \frac{d\psi}{dv}(v(s)) \right] = \left\| \frac{d\psi}{dv}(v(s)) \right\| = 1$$

e

$$n_\gamma(s) \dashv_B^a \gamma'(s) \text{ e } [n_\gamma(s), \gamma'(s)] = -1,$$

ou seja,  $\frac{d\psi}{dv}(v(s)) = -\gamma'(s)$ .

Notemos que as equações (3.14) e (3.16) podem ser consideradas como as **Fórmulas de Frenet para um plano normado** (como apontado em [1], [18], [35] e [40]).

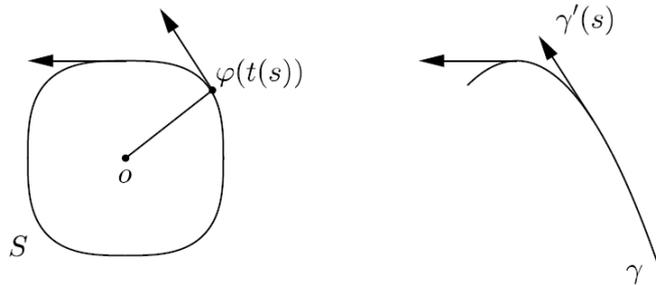
Agora vamos definir curvatura circular. Este conceito é definido por Petty [35]. Para defini-la, seja  $\gamma(s) : [0, l(\gamma)] \rightarrow X$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e assumamos que  $\varphi(t) : [0, l(S)] \rightarrow S$  é uma parametrização pelo comprimento de arco do círculo

### 3.2. DEFININDO TIPOS DE CURVATURA EM UM PLANO NORMADO

unitário. Consideremos  $t(s)$  a função que associa cada  $s \in [0, l(\gamma)]$  com  $t(s) \in [0, l(S)]$  tal que  $\gamma'(s) = \frac{d\varphi}{dt}(t(s))$ .

Em outras palavras,  $t(s)$  é o comprimento percorrido ao longo do círculo unitário quando o campo vetorial  $\gamma'(s)$  percorre o círculo unitário. A Figura 3.4 ilustra isso.

**Figura 3.4:**  $\gamma'(s) = \frac{d\varphi}{dt}(t(s))$ .



Fonte: Concepts of curvatures in normed planes, 2018.

**Definição 3.7.** A **curvatura circular** de  $\gamma$  em  $\gamma(s)$  é definida por

$$k_c(s) := t'(s). \quad (3.17)$$

**Observação 3.9.** No caso em que a curva  $\gamma$  é o próprio círculo unitário segue, pela definição, que a curvatura circular de  $\gamma$  é constante e igual a 1.

**Observação 3.10.** A função  $\frac{d\varphi}{dt}(t(s))$  é uma reparametrização de  $\frac{d\varphi}{dt}(t)$  que preserva orientação, pois

$$t(s) = \int_0^s \|\gamma''(\xi)\| d\xi$$

e daí,

$$t'(s) = \|\gamma''(s)\| > 0, \quad \forall s \in [0, l(\gamma)].$$

Em [12], Craizer define a curvatura circular inspirado na geometria de contato. A ideia é considerar um círculo de Minkowski com contato de segunda ordem em cada ponto da curva e definir a curvatura pelo inverso do raio de curvatura. Com este ponto de vista é possível definir círculo osculatório.

Notemos que a reparametrização  $\varphi(s) := \varphi(t(s))$  é tal que a tangente no círculo osculatório em  $\varphi(s)$  e a tangente à  $\gamma$  em  $\gamma(s)$  são paralelas. Consequentemente, para cada  $s_0 \in [0, l(\gamma)]$ , temos

$$\varphi'(s_0) = t'(s_0) \frac{d\varphi}{dt}(t(s_0)) = k_c(s_0) \gamma'(s_0). \quad (3.18)$$

Consideremos a curva  $\alpha(s) = \gamma(s_0) - k_c^{-1}(s_0)\varphi(s_0) + k_c^{-1}(s_0)\varphi(s)$ . Observemos que  $\alpha$  parametriza um círculo de centro  $\gamma(s_0) - k_c^{-1}(s_0)\varphi(s_0)$  e raio  $k_c^{-1}(s_0)$ . Além disso,  $\alpha$  tem contato

de segunda ordem com  $\gamma$  no ponto  $\gamma(s_0)$ , pois

$$\begin{aligned}\alpha(s_0) &= \gamma(s_0) - k_c^{-1}(s_0)\varphi(s_0) + k_c^{-1}(s_0)\varphi(s_0) = \gamma(s_0) \\ \alpha'(s_0) &= k_c^{-1}(s_0)\varphi'(s_0) = \gamma'(s_0).\end{aligned}$$

Este círculo transladado é chamado **círculo osculatório** de  $\gamma$  em  $\gamma(s)$ . O número  $k_c^{-1}(s)$  é o **raio de curvatura** de  $\gamma$  em  $\gamma(s)$ .

Vale ressaltar que demos uma interpretação da curvatura circular por meio da geometria de contato, mas a curvatura circular em um plano normado Minkowski pode ser definida de outra maneira. Consideremos  $\varphi(\theta) : [0, c] \rightarrow X$  uma parametrização regular qualquer do círculo unitário e seja  $\gamma$  uma curva suave dotada de uma parametrização  $\gamma(\theta) : [0, c] \rightarrow X$  tal que para cada  $\theta \in [0, c]$ , o vetor  $\gamma'(\theta)$  é paralelo à  $\varphi'(\theta)$ , orientados na mesma direção. Em outras palavras, existe uma função  $\rho : [0, c] \rightarrow [0, +\infty)$  tal que

$$\gamma'(\theta) = \rho(\theta)\varphi'(\theta), \quad \theta \in [0, c].$$

De fato  $\rho$  pode ser interpretado como o raio de curvatura e é tal que  $k_c(\theta) = \rho^{-1}(\theta)$ .

Para mostrarmos isso, seja  $\gamma(s) : [0, l(\gamma)] \rightarrow X$  uma parametrização pelo comprimento de arco de  $\gamma$ , daí

$$\begin{aligned}\gamma'(s) &= \theta'(s)\frac{d\gamma}{d\theta}(\theta(s)) \\ &= \theta'(s)\rho(\theta(s))\frac{d\varphi}{d\theta}(\theta(s)) \\ &= \rho(\theta(s))\varphi'(s).\end{aligned}$$

Como  $\rho(\theta(s)) \neq 0$  e  $\varphi'(s) = \rho^{-1}(s)\gamma'(s)$ , então

$$\rho^{-1}(s) = k_c(s).$$

**Proposição 3.8.** *A curvatura circular é a curvatura normal na antinorma.*

**Demonstração:** Seja  $\gamma$  uma curva suave e admitamos que  $\gamma(s) : [0, l(\gamma)] \rightarrow X$  esteja parametrizada pelo comprimento de arco. Seja  $\varphi(t) : [0, l(S)] \rightarrow S$  uma parametrização do círculo unitário pelo comprimento de arco e seja  $t(s) : [0, l(\gamma)] \rightarrow [0, l(S)]$  a função que associa a cada  $s$  o número  $t(s)$  tal que

$$\gamma'(s) = \frac{d\varphi}{dt}(t(s)).$$

Por definição,  $k_c(s) = t'(s)$  para cada  $s \in [0, l(\gamma)]$ .

Para obtermos a curvatura normal na antinorma, consideremos  $\gamma(s_a) : [0, l_a(\gamma)] \rightarrow X$  uma parametrização de  $\gamma$  pelo comprimento de arco na antinorma (orientada positivamente). Primeiro notemos que, como

$$\gamma'(s) = s'_a(s)\frac{d\gamma}{ds_a}(s_a(s)),$$

então

$$|s'_a(s)| = \|\gamma'(s)\|_a. \tag{3.19}$$

### 3.2. DEFININDO TIPOS DE CURVATURA EM UM PLANO NORMADO

Agora, para cada  $s_a \in [0, l_a(\gamma)]$ , seja  $n_\gamma^a(s_a)$  o único vetor tal que

$$\frac{d\gamma}{ds_a}(s_a) \dashv_B n_\gamma^a(s_a) \text{ e } \left[ \frac{d\gamma}{ds_a}(s_a), n_\gamma^a(s_a) \right] = 1.$$

Neste caso,  $n_\gamma^a(s_a) \in S$ , pois  $\frac{d\gamma}{ds_a}(s_a) \in S_a$ . Para obtermos a curvatura normal na antinorma, seja  $\varphi(u) : [0, 2\lambda(S)] \rightarrow S$  uma parametrização pelo parâmetro de área de  $S$  e seja  $u(s_a)$  a função tal que

$$n_\gamma^a(s_a) = \varphi(u(s_a)). \quad (3.20)$$

Seguindo a definição, a curvatura normal na antinorma é dada por

$$k_n^a(s_a) = \frac{du}{ds_a}(s_a). \quad (3.21)$$

Tendo descrito as duas curvaturas que queremos relacionar, só precisamos de dois passos. Primeiramente, derivando (3.20) com relação a  $s_a$ , temos

$$\frac{dn_\gamma^a}{ds_a}(s_a) = \frac{du}{ds_a}(s_a) \frac{d\varphi}{du}(u(s_a)) = k_n^a(s_a) \frac{d\varphi}{du}(u(s_a)).$$

Segundo, como  $u$  é o parâmetro pelo comprimento de arco na antinorma, temos

$$|k_n^a(s_a)| \left\| \frac{d\varphi}{du}(u(s_a)) \right\|_a = \left\| \frac{dn_\gamma^a}{ds_a}(s_a) \right\|_a \Rightarrow |k_n^a(s_a)| = \left\| \frac{dn_\gamma^a}{ds_a}(s_a) \right\|_a. \quad (3.22)$$

Como a antinorma inverte ortogonalidade Birkhoff, temos

$$n_\gamma^a(s_a) \dashv_B \frac{d\gamma}{ds_a}(s_a).$$

Por outro lado,

$$\varphi(t(s)) \dashv_B \frac{d\varphi}{dt}(t(s)) = \gamma'(s) \text{ e } \gamma'(s) = s'_a(s) \frac{d\gamma}{ds_a}(s_a(s)).$$

Como a ortogonalidade Birkhoff é homogênea,

$$\varphi(t(s)) \dashv_B \frac{d\gamma}{ds_a}(s_a(s)),$$

e como

$$\|n_\gamma^a(s_a(s))\| = \|\varphi(t(s))\| = 1,$$

segue que

$$n_\gamma^a(s_a(s)) = \varphi(t(s)). \quad (3.23)$$

Derivando (3.23) com relação à  $s$ , temos

$$s'_a(s) \frac{dn_\gamma^a}{ds_a}(s_a(s)) = t'(s) \frac{d\varphi}{dt}(t(s)) = k_c(s) \gamma'(s).$$

### 3.2. DEFININDO TIPOS DE CURVATURA EM UM PLANO NORMADO

A equação acima juntamente com as equações (3.19) e (3.22) diz que

$$|k_n^a(s_a(s))| = |k_c(s)|.$$

Como  $\varphi(t)$  e  $\varphi(u)$  estão orientadas positivamente, segue que  $k_n^a(s_a(s)) = k_c(s)$ . ■

**Observação 3.11.** Devido a dualidade da ortogonalidade Birkhoff, a curvatura circular na antinorma é a curvatura normal na norma.

**Exemplo 3.3.** Consideremos como no Exemplo 3.2, o plano normado  $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ , onde  $\|(x, y)\| = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$ . Então  $\varphi(s) = (2 \cos s, 3 \sin s)$  parametriza o círculo unitário nesse plano, onde  $s \in [0, 2\pi]$ . Como  $\varphi'(s) = (-2 \sin s, 3 \cos s)$ , então  $\|\varphi'(s)\| = 1$ . Logo,  $\varphi$  está parametrizada pelo comprimento de arco.

Vimos no Exemplo 3.2 que  $\|(x, y)\|_a = (9x^2 + 4y^2)^{\frac{1}{2}}$ . Logo,  $\|\varphi'(s)\|_a = (9(4 \sin^2 s) + 4(9 \cos^2 s))^{1/2} = 6$ . Sendo assim,

$$\varphi(s_a) = \left(2 \cos\left(\frac{s_a}{6}\right), 3 \sin\left(\frac{s_a}{6}\right)\right), \quad s_a \in [0, 12\pi],$$

parametriza o círculo unitário pelo parâmetro comprimento de arco na antinorma, pois

$$\varphi'(s_a) = \left(-\frac{1}{3} \sin\left(\frac{s_a}{6}\right), \frac{1}{2} \cos\left(\frac{s_a}{6}\right)\right).$$

Seja  $n_\varphi^a(s_a) = (c, d)$  o vetor normal direito à  $\varphi(s_a)$ . Então,

$$\begin{aligned} \left[\left(-\frac{1}{3} \sin\left(\frac{s_a}{6}\right), \frac{1}{2} \cos\left(\frac{s_a}{6}\right)\right), (c, d)\right] = 1 &\Rightarrow -\frac{1}{3}d \sin\left(\frac{s_a}{6}\right) - \frac{1}{2}c \cos\left(\frac{s_a}{6}\right) = 1 \\ &\Rightarrow \begin{cases} c = -2 \cos\left(\frac{s_a}{6}\right) \\ d = -3 \sin\left(\frac{s_a}{6}\right) \end{cases}. \end{aligned}$$

Logo,

$$n_\varphi^a(s_a) = \left(-2 \cos\left(\frac{s_a}{6}\right), -3 \sin\left(\frac{s_a}{6}\right)\right) \text{ e } \frac{dn_\varphi^a}{ds_a}(s_a) = \left(\frac{1}{3} \sin\left(\frac{s_a}{6}\right), -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{s_a}{6}\right)\right).$$

Portanto,

$$k_n^a(s_a) = \frac{dv}{ds_a}(s_a) = \left[n_\varphi^a(s_a), \frac{dn_\varphi^a}{ds_a}(s_a)\right] = \cos^2\left(\frac{s_a}{6}\right) + \sin^2\left(\frac{s_a}{6}\right) = 1.$$

Como  $k_c(s) = 1$  para todo  $s \in [0, 2\pi]$ , então mostramos neste exemplo que de fato vale  $k_n^a(s_a(s)) = k_c(s)$ .

**Definição 3.8.** Dois diâmetros do círculo unitário de um plano Minkowski são conjugados se suas direções são mutualmente ortogonais Birkhoff, isto é,  $x \dashv_B y$  e  $y \dashv_B x$  onde  $x$  e  $y$  são as direções dos dois diâmetros.

**Proposição 3.9** ([34], Proposição 39). *O círculo unitário de um plano Minkowski tem um par*

de diâmetros conjugados. Esses diâmetros podem ser escolhidos de tal forma que seus pontos finais sejam pontos extremos do disco unitário.

**Corolário 3.1.** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- a)  $X$  é um plano Radon;
- b) as curvaturas circular e normal do círculo unitário coincidem;
- c) as curvaturas circular e normal de qualquer curva coincidem.

**Demonstração:** Se  $X$  é plano Radon, então  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_a$ . Portanto,  $a) \Rightarrow c)$ . É imediato que  $c) \Rightarrow b)$ . Falta então mostrarmos que  $b) \Rightarrow a)$ .

Seja  $\varphi(t) : [0, l(S)] \rightarrow S$  parametrização pelo comprimento de arco do círculo unitário, tal que  $\varphi(0)$  é um ponto final de um diâmetro conjugado (podemos fazer essa consideração pela Proposição 3.9). Consideremos a curva  $\gamma$  como sendo a curva  $\varphi$ , isto é,  $\gamma = \varphi$  para todo  $s \in [0, l(S)]$ . Daí, pela Observação 3.9,

$$k_c(s) = 1, \forall s \in [0, l(S)].$$

Supondo válido b), pelas fórmulas de Frenet,

$$-\varphi'(s) = n'_\varphi(s) \Rightarrow n_\varphi(s) = -\varphi(s) + v, \quad v \in X.$$

Como  $\varphi(0)$  é um ponto final de um diâmetro conjugado e vale que  $\varphi(0) \dashv_B \varphi'(0)$  e  $\varphi'(0) \dashv_B n_\varphi(0)$ , então pela Proposição 3.9,  $n_\varphi(0) = -\varphi(0)$  e conseqüentemente  $v = 0$ .

Logo,  $\|n_\varphi(s)\| = \|\varphi(s)\| = 1$  para todo  $s \in [0, l(\gamma)]$ . Por outro lado,  $\|n_\varphi(s)\|_a = 1$ . Donde segue que

$$\|n_\varphi(s)\| = \|n_\varphi(s)\|_a, \quad \forall s \in [0, l(\gamma)].$$

Como  $S$  é fechado, o campo normal aponta em todas as direções, portanto  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_a$ , ou seja, o plano  $X$  é Radon. ■

### 3.3 Usando uma estrutura Euclidiana auxiliar

Seria mais interessante se a geometria diferencial de curvas em planos normados fosse desenvolvida sem considerar nada além de conceitos gerais de espaços vetoriais. De fato, na seção anterior obtivemos definições dos tipos de curvaturas sem usar um sistema de coordenadas, embora em quase todos os artigos sobre geometria de Minkowski de alguma forma é usada uma estrutura Euclidiana auxiliar. As principais referências para essa seção são: [1], [4], [21] e [35].

Se  $K$  é um conjunto simétrico com relação à origem e convexo de  $X$  tal que a interseção entre ele e cada reta que passa pela origem é um segmento limitado e fechado de comprimento positivo, então podemos definir um funcional  $\|\cdot\|_K$  sobre  $X$  por

$$\|x\|_K = \inf \{\xi \in \mathbb{R}^+ : x \in \xi K\}.$$

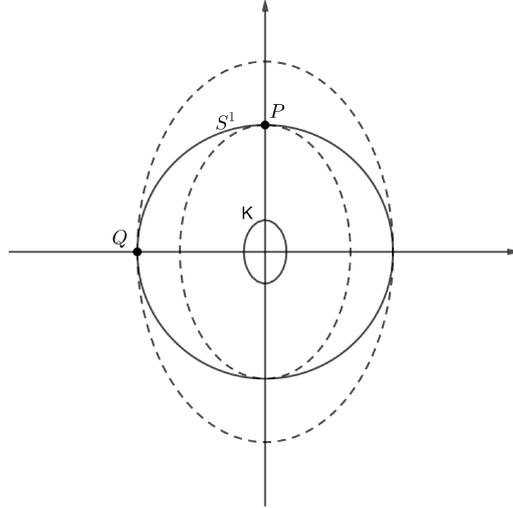
**Definição 3.9.** O funcional  $\|\cdot\|_K$  é chamado o **funcional de Minkowski** associado à  $K$ .

**Exemplo 3.4.** A Figura 3.5 nos ajuda a compreender a definição. Considere  $X = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_e)$  o plano Euclidiano e  $S^1$  o círculo unitário Euclidiano. Seja  $K = \{(x, y); 9x^2 + 4y^2 = 1\}$  o traço da curva

$$\gamma(\theta) = \left( \frac{\cos \theta}{3}, \frac{\sin \theta}{2} \right), \theta \in [0, 2\pi],$$

que sabemos ser convexo e simétrico com relação à origem. Se  $P = (0, 2)$  e  $Q = (-2, 0)$ , então  $P = 4\gamma(\frac{\pi}{2})$  e  $Q = 6\gamma(\pi)$ . Portanto,  $\|P\|_e = \|Q\|_e = 2$  e  $\|P\|_K = 4 \neq 6 = \|Q\|_K$ .

**Figura 3.5:**  $\|P\|_e = \|Q\|_e$ , mas  $\|P\|_K \neq \|Q\|_K$ .



Fonte: Compilação do autor.

**Teorema 3.2.** Se  $K$  é um conjunto simétrico com relação à origem e convexo de  $X$  tal que a interseção entre ele e cada reta que passa pela origem é um segmento (não trivial) limitado e fechado, então  $\|\cdot\|_K$  é uma norma em  $X$ .

**Demonstração:** Por definição,  $\|\cdot\|_K \geq 0$ . Por hipótese, se  $x \neq 0$  então existe uma semireta partindo da origem  $0$  que passa por  $x$  e que cruza  $\partial K$ , em um ponto  $\alpha x$  com  $0 < \alpha < +\infty$ . Assim, por definição,  $\|x\|_K = \alpha^{-1} > 0$  e segue que  $\|\cdot\|_K$  é um número estritamente positivo. Isto prova que  $\|x\|_K = 0$  se e só se  $x = 0$ .

Se  $\lambda \geq 0$ , então  $\|\lambda x\|_K = \lambda \|x\|_K$  por definição. Se  $\lambda < 0$ ,

$$\|\lambda x\|_K = \|-\lambda(-x)\|_K = -\lambda \|x\|_K = |\lambda| \|x\|_K,$$

pois  $-\lambda > 0$  e  $K$  é simétrico. Logo,  $\|\lambda x\|_K = |\lambda| \|x\|_K$ .

Por fim, suponhamos  $x$  e  $y$  elementos distintos de  $X$ . Consideremos os vetores  $\hat{x} = \frac{x}{\|x\|_K}$  e  $\hat{y} = \frac{y}{\|y\|_K}$ . É claro que  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  estão em  $K$  e, por hipótese, a interseção entre a reta suporte de  $\overline{0x}$  e  $K$  é um segmento de reta fechado com extremos  $-\hat{x}$  e  $\hat{x}$ . Existe um vetor  $z$  que pode ser escrito da seguinte forma

$$z = \frac{\|x\|_K}{\|x\|_K + \|y\|_K} \hat{x} + \frac{\|y\|_K}{\|x\|_K + \|y\|_K} \hat{y} = (\|x\|_K + \|y\|_K)^{-1} (x + y).$$

Logo, pela convexidade de  $K$ ,  $z \in K$ , pois

$$\frac{\|x\|_K}{\|x\|_K + \|y\|_K} + \frac{\|y\|_K}{\|x\|_K + \|y\|_K} = 1.$$

Deste modo,  $\|z\|_K \leq 1$ . Como  $\|z\|_K = (\|x\|_K + \|y\|_K)^{-1}\|x + y\|_K$ , temos:

$$(\|x\|_K + \|y\|_K)^{-1}\|x + y\|_K \leq 1 \Rightarrow \|x + y\|_K \leq \|x\|_K + \|y\|_K.$$

Esta desigualdade é trivial quando  $x = 0$  ou  $y = 0$ . Provamos portanto que  $\|\cdot\|_K$  é uma norma. ■

O Teorema acima, juntamente com o fato de que a bola unitária de  $X$  é um corpo convexo, mostram que existe uma correspondência biunívoca entre norma de  $X$  e os conjuntos convexos, simétricos e fechados com interior não-vazio em  $X$ . Esta correspondência faz da convexidade uma propriedade essencial nos estudos de planos Minkowski. Assim, podemos associar uma norma a qualquer curva plana convexa, centralmente simétrica, fechada com o seu centro na origem, de modo que esta curva se torne o círculo unitário com respeito a esta norma.

Como qualquer espaço vetorial real bidimensional é isomorfo a  $\mathbb{R}^2$  (ver mais em [9]), então qualquer geometria de Minkowski pode ser estudada identificando sua bola unitária com um corpo convexo  $K$  centrado na origem do plano  $\mathbb{R}^2$ , dotado da base de coordenadas usual  $\{e_1, e_2\}$ , e assumindo que a forma bilinear simplética é a forma determinante padrão.

Com essas observações feitas, consideramos o círculo unitário  $S$  parametrizado na forma polar

$$\varphi(\theta) = p(\theta)(\cos \theta, \sin \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad (3.24)$$

onde  $p : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função  $\pi$ -periódica de classe pelo menos  $C^2$ . Desta maneira, para obtermos o anticírculo unitário a partir da parametrização polar do círculo vamos precisar apenas lembrar que

$$\varphi(\theta) \dashv_B \varphi'(\theta) \text{ e } [\varphi(\theta), \varphi'(\theta)] = \|\varphi'(\theta)\|_a.$$

Lembrado isso, vamos considerar o anticírculo parametrizado por  $\psi : [0, 2\pi] \rightarrow X$  em que

$$\psi(\theta) = -\frac{\varphi'(\theta)}{[\varphi(\theta), \varphi'(\theta)]}.$$

Como

$$\varphi'(\theta) = p'(\theta)(\cos \theta, \sin \theta) + p(\theta)(-\sin \theta, \cos \theta)$$

e

$$\begin{aligned} [\varphi(\theta), \varphi'(\theta)] &= [p(\theta)(\cos \theta, \sin \theta), p'(\theta)(\cos \theta, \sin \theta) + p(\theta)(-\sin \theta, \cos \theta)] \\ &= p(\theta)^2, \end{aligned}$$

então

$$\psi(\theta) = -\frac{p'(\theta)}{p(\theta)^2}(\cos \theta, \sin \theta) - \frac{1}{p(\theta)}(-\sin \theta, \cos \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]. \quad (3.25)$$

### 3.3. USANDO UMA ESTRUTURA EUCLIDIANA AUXILIAR

Observemos que esta não é uma equação polar de  $S_a$ . Agora vamos obter a função suporte Euclidiana da curva  $\psi$ , isto é, a função que associa a cada direção orientada a distância Euclidiana da reta tangente ortogonal de uma dada curva à origem, que iremos denotar por  $h_\psi$ . Esta função irá ser bastante útil ao longo deste trabalho, nos ajudando a obter resultados significativos.

Para determinarmos essa função, primeiramente definamos  $g(\theta) = p^{-1}(\theta)$ . Daí,

$$\psi(\theta) = g'(\theta)(\cos \theta, \sin \theta) - g(\theta)(-\sin \theta, \cos \theta). \quad (3.26)$$

Seja  $v = (\cos \theta, \sin \theta)$  uma direção qualquer. Então a função suporte nesta direção é dada por

$$\begin{aligned} h_\psi(\theta) &= \sup \{ \langle (\cos \theta, \sin \theta), p \rangle : p \in S_a \} \\ &= \sup \{ \langle (\cos \theta, \sin \theta), g'(\alpha)(\cos \alpha, \sin \alpha) - g(\alpha)(-\sin \alpha, \cos \alpha) \rangle : \alpha \in [0, 2\pi] \} \\ &= \sup \{ g'(\alpha) \cos(\alpha - \theta) + g(\alpha) \sin(\alpha - \theta) : \alpha \in [0, 2\pi] \}. \end{aligned}$$

Consideremos  $f_\theta : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f_\theta(\alpha) = g'(\alpha) \cos(\alpha - \theta) + g(\alpha) \sin(\alpha - \theta)$ . Como  $f_\theta$  é soma e produto de funções diferenciáveis,  $f_\theta$  também o é. E,

$$\begin{aligned} f'_\theta(\alpha) &= g''(\alpha) \cos(\alpha - \theta) + g'(\alpha) \sin(\alpha - \theta) - g'(\alpha) \sin(\alpha - \theta) + g(\alpha) \cos(\alpha - \theta) \\ &= (g''(\alpha) + g(\alpha)) \cos(\alpha - \theta). \end{aligned}$$

Daí,

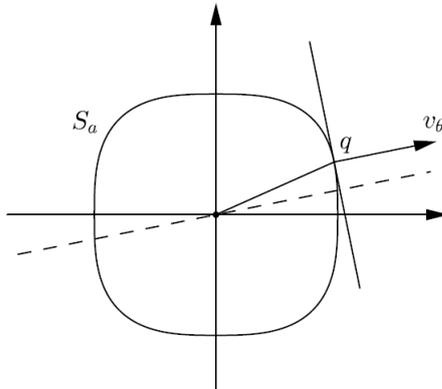
$$f'_\theta(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha - \theta = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \alpha - \theta = \frac{3\pi}{2}.$$

Como  $\alpha - \theta = \frac{\pi}{2}$  é o único ponto de máximo de  $f_\theta$ , concluímos que

$$h_\psi(\theta) = \sup \{ f_\theta(\alpha) : \alpha \in [0, 2\pi] \} = f_\theta\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = g\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = p^{-1}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right). \quad (3.27)$$

Portanto, a direção normal em  $S_a$  no ponto  $\psi(\theta + \frac{\pi}{2})$  é  $(\cos \theta, \sin \theta)$ , isto é,  $h_\psi(\theta) = p^{-1}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$  no ponto de  $S_a$  cuja direção normal é  $(\cos \theta, \sin \theta)$ .

**Figura 3.6:**  $q$  é o ponto  $\psi(\theta + \frac{\pi}{2})$ , onde a direção normal em  $S_a$  é  $v_\theta = (\cos \theta, \sin \theta)$ .



Fonte: Concepts of curvatures in normed planes, 2018.

Nosso próximo objetivo é obter uma expressão para a curvatura de Minkowski de uma curva suave em termos de sua curvatura Euclidiana, de maneira semelhante a utilizada por Petty em

[35]. Para tanto, seja  $\gamma(s) : [0, l(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva suave parametrizada pelo comprimento de arco Minkowski. Para cada  $s \in [0, l(\gamma)]$ , seja  $\theta(s) \in [0, 2\pi]$  tal que

$$\gamma'(s) = p(\theta(s))(\cos \theta(s), \sen \theta(s)). \quad (3.28)$$

A função  $\theta(s) : [0, l(\gamma)] \rightarrow [0, 2\pi]$  é dada pelo ângulo Euclidiano que  $\gamma'(s)$  faz com o vetor  $e_1$ .

Por (3.28), temos

$$\gamma''(s) = \theta'(s) \frac{dp}{d\theta}(\theta(s))(\cos \theta(s), \sen \theta(s)) + \theta'(s)p(\theta(s))(-\sen \theta(s), \cos \theta(s)).$$

Agora para obter a curvatura de Minkowski de  $\gamma$  em  $\gamma(s)$ , precisamos apenas escrever o campo normal direito  $n_\gamma(s)$  de  $\gamma(s)$ , definido em (3.13), em termos da estrutura Euclidiana auxiliar.

Como

$$\gamma'(s) \dashv_B \varphi'(\theta(s)),$$

então  $\gamma'(s) \dashv_B \psi(\theta(s))$  e

$$[\gamma'(s), \psi(\theta(s))] = \frac{[\gamma'(s), -\varphi'(\theta(s))]}{[\varphi(\theta(s)), \varphi'(\theta(s))]} = -1.$$

Por outro lado,

$$\gamma'(s) \dashv_B n_\gamma(s) \text{ e } [\gamma'(s), n_\gamma(s)] = 1.$$

Logo,

$$n_\gamma(s) = -\psi(\theta(s)).$$

Então, de (3.25), temos

$$n_\gamma(s) = \frac{1}{p^2(\theta(s))} \frac{dp}{d\theta}(\theta(s))(\cos \theta(s), \sen \theta(s)) + \frac{1}{p(\theta(s))}(-\sen \theta(s), \cos \theta(s)). \quad (3.29)$$

Portanto, podemos escrever  $\gamma''(s) = \theta'(s)p^2(\theta(s))n_\gamma(s)$ . Pelas fórmulas de Frenet, segue que a curvatura de Minkowski de  $\gamma$  em  $\gamma(s)$  é dada por

$$k_m(s) = \theta'(s)p^2(\theta(s)) \quad (3.30)$$

para cada  $s \in [0, l(\gamma)]$ .

Para determinarmos a curvatura Euclidiana de  $\gamma$  vamos estabelecer a seguinte notação:  $s_e$ ,  $l_e$ ,  $k_e$ , e  $\|\cdot\|_e$  são respectivamente o parâmetro pelo comprimento de arco Euclidiano, o comprimento de arco Euclidiano, a curvatura Euclidiana e a norma Euclidiana. Desse modo, seja  $\gamma(s_e) : [0, l_e(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma parametrização pelo comprimento de arco Euclidiano e, dado  $s_e \in [0, l_e(\gamma)]$ , seja  $\theta(s_e) \in [0, 2\pi]$  tal que

$$\frac{d\gamma}{ds_e}(s_e) = (\cos \theta(s_e), \sen \theta(s_e)).$$

Conseqüentemente,

$$\frac{d^2\gamma}{ds_e^2}(s_e) = \frac{d\theta}{ds_e}(s_e)(-\sen \theta(s_e), \cos \theta(s_e)),$$

e assim, a curvatura Euclidiana de  $\gamma$  em  $\gamma(s_e)$  é dada por  $k_e(s_e) = \frac{d\theta}{ds_e}(s_e)$ .

Para relacionarmos as duas curvaturas, primeiro notemos que  $s_e(s) : [0, l(\gamma)] \rightarrow [0, l_e(\gamma)]$  dada por

$$s_e(s) = \int_0^s \|\gamma'(\xi)\|_e d\xi$$

é tal que  $s'_e(s) = \gamma'(s)_e > 0$ . Logo,  $s \mapsto s_e(s)$  é uma reparametrização de  $\gamma$  que preserva orientação e,

$$\gamma'(s) = s'_e(s) \frac{d\gamma}{ds_e}(s_e(s)) = s'_e(s)(\cos \theta(s_e(s)), \text{sen } \theta(s_e(s))).$$

Daí,

$$\|p(\theta(s))(\cos \theta(s), \text{sen } \theta(s))\|_e = \|s'_e(s)(\cos \theta(s_e(s)), \text{sen } \theta(s_e(s)))\|_e,$$

donde segue que  $s'_e(s) = p(\theta(s))$  para todo  $s$ , pois  $s'_e(s), p(\theta(s)) > 0$ . Agora,

$$\theta'(s) = s'_e(s) \frac{d\theta}{ds_e}(s_e(s)) = p(\theta(s)) k_e(s_e(s)). \quad (3.31)$$

Substituindo (3.31) em (3.30), temos que as curvaturas de Minkowski e a curvatura Euclidiana de  $\gamma$  em  $\gamma(s)$  estão relacionadas pela equação

$$k_m(s) = p^3(\theta(s)) k_e(s_e(s)), \quad s \in [0, l(\gamma)]. \quad (3.32)$$

Para obtermos uma expressão para a curvatura normal, temos que derivar o campo normal direito expresso em (3.29). Para simplificar a notação, definamos  $g(\theta) = p^{-1}(\theta)$  e reescrevamos o campo normal por

$$n_\gamma(s) = -\frac{dg}{d\theta}(\theta(s))(\cos \theta(s), \text{sen } \theta(s)) + g(\theta(s))(-\text{sen } \theta(s), \cos \theta(s)).$$

Derivando esta última equação com respeito a  $s$ , obtemos:

$$\begin{aligned} n'_\gamma(s) &= \theta'(s) \left( -\frac{d^2g}{d\theta^2}(\theta(s)) - g(\theta(s)) \right) (\cos \theta(s), \text{sen } \theta(s)) \\ &= \frac{\theta'(s)}{p(\theta(s))} \left( -\frac{d^2g}{d\theta^2}(\theta(s)) - g(\theta(s)) \right) \gamma'(s) \\ &= k_e(s_e(s)) \left( -\frac{d^2g}{d\theta^2}(\theta(s)) - g(\theta(s)) \right) \gamma'(s), \end{aligned}$$

onde a última igualdade vêm de (3.31). Segue-se de (3.16) que

$$k_n(s) = k_e(s_e(s)) \left( \frac{d^2g}{d\theta^2}(\theta(s)) + g(\theta(s)) \right).$$

Lembrando que o anticírculo unitário é parametrizado por

$$\psi(\theta) = g'(\theta)(\cos \theta, \text{sen } \theta) - g(\theta)(-\text{sen } \theta, \cos \theta),$$

então

$$\psi'(\theta) = (g''(\theta) + g(\theta))(\cos \theta, \sen \theta).$$

A interpretação geométrica dessa parametrização é que os pontos  $\psi'(\theta)$  estão na direção de  $(\cos \theta, \sen \theta)$ . Assim a reta tangente ao anticírculo unitário em  $\psi(\theta(s))$  é paralela a  $\gamma'(s)$ , já que  $\gamma'(s) = p(\theta(s))(\cos \theta(s), \sen \theta(s))$ .

Por (2.6), a curvatura Euclidiana do anticírculo unitário em  $\psi(\theta)$  é dada por

$$k_\psi(\theta) = \frac{[\psi'(\theta), \psi''(\theta)]}{\|\psi'(\theta)\|_e^3}.$$

Como

$$\psi''(\theta) = (g'''(\theta) + g'(\theta))(\cos \theta, \sen \theta) + (g''(\theta) + g(\theta))(-\sen \theta, \cos \theta),$$

então

$$\begin{aligned} [\psi'(\theta), \psi''(\theta)] &= \begin{vmatrix} (g''(\theta) + g(\theta)) \cos \theta & (g'''(\theta) + g'(\theta)) \cos \theta & -(g''(\theta) + g(\theta)) \sen \theta \\ (g''(\theta) + g(\theta)) \sen \theta & (g'''(\theta) + g'(\theta)) \sen \theta & (g''(\theta) + g(\theta)) \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= (g'''(\theta) + g'(\theta))(g''(\theta) + g(\theta))(\cos \theta \sen \theta - \cos \theta \sen \theta) + (g''(\theta) + g(\theta))^2 \\ &= (g''(\theta) + g(\theta))^2. \end{aligned}$$

Além disso,  $\|\psi'(\theta)\|_e^3 = (g''(\theta) + g(\theta))^3$ , e daí

$$k_\psi(\theta) = \left( \frac{d^2g}{d\theta^2}(\theta) + g(\theta) \right)^{-1}. \quad (3.33)$$

Portanto, temos que

$$k_n(s) = \frac{k_e(s_e(s))}{k_\psi(\theta(s))}. \quad (3.34)$$

Em outras palavras, a curvatura normal de uma curva  $\gamma$  em  $\gamma(s)$  é a razão entre a curvatura Euclidiana de  $\gamma$  em  $\gamma(s)$  e a curvatura Euclidiana do anticírculo unitário no ponto em que a reta suporte contém  $\gamma'(s)$ .

Para finalizarmos, como a curvatura circular é a curvatura normal na antinorma, temos que a curvatura circular de  $\gamma$  em  $\gamma(s)$  é dada por

$$k_c(s) = \frac{k_e(s_e(s))}{k_\varphi(\theta(s))}, \quad (3.35)$$

onde  $k_\varphi(\theta(s))$  é a curvatura Euclidiana do círculo unitário em um ponto onde a reta suporte contém  $\gamma'(s)$ . Essa foi a definição usada por Ghandehari em [21].

Em [35], Petty mencionou que se a curvatura de Minkowski e a curvatura normal coincidem para toda curva, então a geometria é a Euclidiana. No artigo [4], eles apresentam uma prova formal para um resultado similar, como veremos a seguir.

**Teorema 3.3.** *Seja  $(X, \|\cdot\|)$  um plano normado. Se existe uma curva suave  $\gamma : [0, c] \rightarrow X$  cujo campo tangente aponta em todas as direções do plano, e cuja curvatura de Minkowski e curvatura normal coincidem em cada ponto, então a norma é a Euclidiana.*

**Demonstração:** Se tal curva  $\gamma$  existe, então, pelas igualdades (3.32) e (3.34), temos que

$$\frac{k_e(s_e(s))}{k_\psi(\theta(s))} = p^3(\theta(s))k_e(s_e(s)) \Rightarrow k_\psi(\theta(s)) = \frac{1}{p^3(\theta(s))}.$$

Como vale a igualdade (3.33), então  $g(\theta) = p^{-1}(\theta)$  restrita à  $[0, 2\pi]$  é solução do problema

$$\begin{cases} y''(\theta) + y(\theta) = y^{-3}(\theta), & \theta \in [0, 2\pi] \\ y(0) = y(\pi), & y'(0) = y'(\pi) \end{cases}. \quad (3.36)$$

Vamos mostrar que  $g(\theta) = 1$ . Para tanto, como  $y'' + y - y^{-3} = 0$ , então

$$y'y'' + y'y - \frac{y'}{y^3} = 0. \quad (3.37)$$

Integrando de 0 a  $x$ ,  $x \in [0, \pi]$ , esta última igualdade e usando as condições de contorno, temos

$$(y')^2 + y^2 + y^{-2} = y'^2(0) + y^2(0) + y^{-2}(0), \quad \forall x \in [0, \pi]. \quad (3.38)$$

Por outro lado, como  $y'' + y - y^{-3} = 0$ , então

$$yy'' + y^2 - y^{-2} = 0. \quad (3.39)$$

Fazendo  $z = y^2$ , temos

$$z'' = (2yy')' = 2y'^2 + 2yy'' \Rightarrow yy'' = \frac{z''}{2} - y'^2. \quad (3.40)$$

Usando (3.37), (3.38) e (3.40) em (3.39), temos

$$\frac{z''}{2} - y'^2 + y^2 - y^{-2} = 0 \Rightarrow \frac{z''}{2} = y^{-2} - y^2 + y'^2 = -y^2 + y'(0)^2 + y^2(0) + y^{-2}(0).$$

Portanto, se  $y$  é solução de (3.36), então  $z = y^2$  é solução do sistema

$$\begin{cases} z'' + 2z = 2(y'(0)^2 + y^2(0) + y^{-2}(0)) \\ z(0) = y^2(0), & z'(0) = 2y(0)y'(0) \end{cases}. \quad (3.41)$$

Como o sistema acima é linear, ele admite uma única solução pelo Teorema 2.1. Observemos que  $y = \pm 1$  são soluções de (3.36), sendo portanto as únicas soluções do sistema (3.36), caso contrário (3.41) teria mais de uma solução. Como  $g(\theta)$  é solução de (3.36) e  $g(\theta) > 0$  para todo  $\theta \in [0, \pi]$ , então devemos ter  $g(\theta) = 1$ , isto é,  $p(\theta) = 1$ . Como o campo tangente à  $\gamma$  aponta em todas as direções, então o círculo unitário é o círculo unitário Euclidiano. Daí, como para todo  $p \in X$ , existem  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $q \in S$  tal que  $p = \lambda q$ , então

$$\|p\| = \|\lambda q\| = |\lambda| \|q\| = |\lambda| \|q\|_e = \|\lambda q\|_e = \|p\|_e.$$

Donde segue que a norma é a Euclidiana. ■

### 3.4 Curvas de curvatura constante

No plano Euclidiano, uma curva com curvatura constante não nula é um arco de um círculo Euclidiano. Estudaremos nesta seção, as **curvas de curvatura constante** em planos Minkowski. São referências para essa seção: [3], [4], [28], [31], [33] e [35].

Considerando os três tipos de curvatura que definimos na Seção 3.2, começaremos com as curvas que têm curvatura circular e normal constante, já que nestes casos não é necessário usar uma estrutura Euclidiana auxiliar, diferente da curvatura de Minkowski e por isso a deixaremos por último.

**Teorema 3.4.** *Uma curva  $\gamma : [0, c] \rightarrow X$  tem curvatura circular constante se e só se é um arco de um círculo de Minkowski.*

**Demonstração:** Suponhamos que  $\gamma$  seja uma curva de curvatura circular constante. É suficiente considerarmos o caso em que a curvatura circular é 1, pois os outros casos são análogos a este.

Consideremos  $\varphi(t)$  uma parametrização pelo comprimento de arco do círculo unitário e  $t(s)$  a função tal que  $t(0) = 0$  e  $\gamma'(s) = \frac{d\varphi}{dt}(t(s))$  para cada  $s \in [0, c]$ . Como  $k_c(s) = t'(s) = 1$  para cada  $s \in [0, c]$ , então segue que

$$t(s) = t(0) + \int_0^s t'(u) du = s$$

e daí,

$$\gamma'(s) = \frac{d\varphi}{dt}(t(s)) = \varphi'(s)$$

para cada  $s \in [0, c]$ . Logo,  $\gamma(s) = \varphi(s) + v$  para algum  $v \in X$ . Portanto,  $\gamma$  é um arco de um círculo centrado em  $v$ . Inversamente, suponhamos, sem perda de generalidade, que  $\gamma$  é um arco de um círculo unitário. Como já vimos, a curvatura circular do círculo unitário é constante e igual a 1. Portanto,  $\gamma$  tem curvatura constante. ■

**Corolário 3.2.** *Uma curva em um plano normado tem curvatura normal constante se e somente se é um arco de um anticírculo.*

**Demonstração:** Como a curvatura normal é a curvatura circular na antinorma, qualquer curva de curvatura normal constante tem curvatura circular constante na antinorma. Portanto, pelo Teorema 3.4, segue que a curva é um arco de um anticírculo. Por outro lado, se a curva é um arco de um anticírculo, então também pelo Teorema 3.4, a curva tem curvatura circular constante na antinorma, donde segue que a curvatura normal é constante. ■

Sabemos que se todas as retas normais de uma curva no plano Euclidiano se intersectam em um ponto, então esta curva está contida em um círculo. Agora iremos classificar as curvas de um plano normado cujas retas normais direita, respectivamente, esquerda, se intersectam em um único ponto.

**Proposição 3.10.** *Seja  $\gamma : [0, c] \rightarrow X$  uma curva de classe  $C^2$ . Se todas as retas normais esquerda de  $\gamma$  se intersectam em um ponto, então  $\gamma$  está contida em um círculo. Analogamente,*

### 3.4. CURVAS DE CURVATURA CONSTANTE

se todas as retas normais direita de  $\gamma$  se intersectam em um ponto, então  $\gamma$  está contida em um anticírculo.

**Demonstração:** Assumamos que  $\gamma$  esteja parametrizada pelo comprimento de arco. Seja  $\varphi(t)$  uma parametrização pelo comprimento de arco do círculo unitário e  $t(s)$  a função tal que

$$\gamma'(s) = \frac{d\varphi}{dt}(t(s)).$$

Uma parametrização para a reta normal esquerda que passa por  $\gamma(s)$  é dada por

$$r_s(\lambda) = \gamma(s) + \lambda \bar{n}_\gamma(s),$$

onde  $\bar{n}_\gamma(s)$  é o vetor normal esquerdo à  $\gamma$  em  $\gamma(s)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Como todas as retas se intersectam em um ponto  $P$ , para cada  $s \in [0, c]$  existe um  $\lambda_s$  tal que

$$P = \gamma(s) + \lambda_s \bar{n}_\gamma(s),$$

e conseqüentemente,

$$\gamma(s) = P - \lambda_s \bar{n}_\gamma(s).$$

Como

$$\varphi(t) \dashv_B \frac{d\varphi}{dt}(t) \text{ com } \left[ \varphi(t), \frac{d\varphi}{dt}(t) \right] = \left\| \frac{d\varphi}{dt}(t) \right\|_a$$

e

$$\bar{n}_\gamma(s) \dashv_B \frac{d\varphi}{dt}(t(s)) \text{ com } \left[ \frac{d\varphi}{dt}(t(s)), \bar{n}_\gamma(s) \right] = \left\| \frac{d\varphi}{dt}(t) \right\|_a,$$

então  $\bar{n}_\gamma(s) = -\varphi'(t(s))$ .

Definindo  $f(s) = \lambda_s$ ,  $s \in [0, c]$ , temos

$$\gamma(s) = P + f(s)\varphi'(t(s)).$$

Portanto,

$$\frac{d\varphi}{dt}(t(s)) = \gamma'(s) = f'(s)\varphi'(t(s)) + t'(s)f(s)\frac{d\varphi}{dt}(t(s)). \quad (3.42)$$

Como  $\left[ \varphi(t(s)), \frac{d\varphi}{dt}(t(s)) \right] \neq 0$ , então  $\left\{ \varphi(t(s)), \frac{d\varphi}{dt}(t(s)) \right\}$  forma uma base de  $\mathbb{R}^2$  para cada  $s \in [0, c]$ . Daí, em (3.42),

$$\begin{cases} f'(s) = 0 \\ t'(s)f(s) - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow f(s) = (t'(s))^{-1} = (k_c(s))^{-1} = \text{cte} \Rightarrow k_c(s) = \text{cte}.$$

Daí, pelo Teorema 3.4,  $\gamma$  está contida em um círculo.

Para o segundo caso, consideremos  $\psi(v)$  uma parametrização por duas vezes a área do setor do anticírculo e  $v(s)$  a função tal que  $n_\gamma(s) = \psi(v(s))$ .

Como feito no primeiro caso, as retas normais direita podem ser parametrizadas por

$$r_s(\lambda) = \gamma(s) + \lambda n_\gamma(s), \lambda \in \mathbb{R}.$$

### 3.4. CURVAS DE CURVATURA CONSTANTE

Como todas as retas normais direita se intersectam em um ponto  $Q$ , para cada  $s \in [0, c]$  vai existir  $\lambda_s$  tal que

$$Q = \gamma(s) + \lambda_s n_\gamma(s),$$

e daí,

$$\gamma(s) = Q - \lambda_s \psi(v(s)).$$

Definindo  $q : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}$  por  $q(s) = -\lambda_s$ , temos

$$\gamma(s) = Q + q(s)\psi(v(s)).$$

Daí,

$$\gamma'(s) = q'(s)\psi(v(s)) + v'(s)q(s)\frac{d\psi}{dv}(v(s)). \quad (3.43)$$

Como

$$\gamma'(s) \perp_B n_\gamma(s) = \psi(v(s)) \text{ com } [\gamma'(s), n_\gamma(s)] = 1$$

e

$$\psi(v(s)) \perp_B \frac{d\psi}{dv}(v(s)) \text{ com } \left[ \psi(v(s)), \frac{d\psi}{dv}(v(s)) \right] = \left\| \frac{d\psi}{dv}(v(s)) \right\| = 1,$$

então  $\gamma'(s) = -\frac{d\psi}{dv}(v(s))$ . Logo, em (3.43),

$$-\frac{d\psi}{dv}(v(s)) = q'(s)\psi(v(s)) + v'(s)q(s)\frac{d\psi}{dv}(v(s)). \quad (3.44)$$

Como  $\left[ \psi(v(s)), \frac{d\psi}{dv}(v(s)) \right] \neq 0$ , então  $\left\{ \psi(v(s)), \frac{d\psi}{dv}(v(s)) \right\}$  forma uma base de  $\mathbb{R}^2$  para cada  $s$ . Daí, em (3.44),

$$\begin{cases} q'(s) = 0 \\ v'(s)q(s) + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow q(s) = (-v'(s))^{-1} = (-k_n(s))^{-1} = \text{cte} \Rightarrow k_n(s) = \text{cte}.$$

Daí, pelo Corolário 3.2,  $\gamma$  está contida em um anticírculo. ■

Para obtermos as curvas de curvatura de Minkowski constante, iremos seguir Petty [35]. Seja  $\gamma : [0, c] \rightarrow X$  uma curva cuja curvatura de Minkowski é igual a 1 (os outros casos são homotéticos). De (3.32), segue que a curvatura Euclidiana de  $\gamma$  é dada por  $k_e(s_e(s)) = (p(\theta(s)))^{-3}$ . Como  $\theta(s)$  é a direção do vetor tangente à  $\gamma$  em  $\gamma(s)$ , então, no ponto em que a normal de  $\gamma$  está na direção do vetor  $(\cos \theta, \sin \theta)$ , a curvatura Euclidiana é dada por  $(p(\theta + \frac{\pi}{2}))^{-3}$  (já vimos que a direção onde a normal é  $(\cos \theta, \sin \theta)$  é em  $\theta + \frac{\pi}{2}$ ).

Como a função curvatura  $k_e$  é definida positivamente sobre o intervalo  $[0, 2\pi]$  e é  $\pi$ -periódica, podemos procurar uma curva que é fechada, convexa (ver Teorema 2.9) e, a menos de translação, simétrica com relação a origem.

**Observação 3.12.** Para aproveitarmos os cálculos feitos para o anticírculo, como pelo Teorema 3.2 toda curva com as características acima induz uma norma, vamos considerar a curva  $\gamma$  sendo

### 3.4. CURVAS DE CURVATURA CONSTANTE

o anticírculo nessa norma induzida, e considerar a parametrização polar

$$\sigma(\theta) = q(\theta)(\cos \theta, \text{sen } \theta)$$

do círculo unitário na norma induzida onde  $q$  é  $\pi$ -periódica.

Sabemos que a curvatura Euclidiana de  $\gamma$  é dada por

$$k_e(\theta) = \frac{[\gamma'(\theta), \gamma''(\theta)]}{\|\gamma'(\theta)\|_e^3}.$$

Daí, se  $\tilde{g}(\theta) = q^{-1}(\theta)$ , fazendo cálculos análogos aos feitos para se chegar na equação (3.33), concluímos que  $k_e(\theta) = (\tilde{g}''(\theta) + \tilde{g}(\theta))^{-1}$ . Da mesma forma, fazendo cálculos análogos aos feitos para se determinar a igualdade (3.27), concluímos que a função suporte de  $\gamma$  em  $\gamma(\theta)$  é dada por  $h_\gamma(\theta) = \tilde{g}(\theta + \frac{\pi}{2})$ . Portanto,

$$k_e\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = (h_\gamma''(\theta) + h_\gamma(\theta))^{-1}.$$

Donde segue, que  $h_\gamma$  é solução do problema de Sturm-Liouville com condições de contorno

$$\begin{cases} y'' + y = (p(\theta + \frac{\pi}{2}))^3 \\ y(0) = y(\pi), \quad y'(0) = y'(\pi) \end{cases}. \quad (3.45)$$

Observemos que a equação homogênea associada à (3.45) é  $y'' + y = 0$ , com soluções LI  $y_1(\theta) = \cos \theta$  e  $y_2(\theta) = \text{sen } \theta$ . Portanto,  $y_h(\theta) = c_1 \cos \theta + c_2 \text{sen } \theta$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , é solução geral da equação homogênea. Observemos que o Wronskiano é 1, isto é,  $W[y_1, y_2] = 1$ . Logo, pelo método de variação de parâmetros (Teorema 2.2), uma solução particular de (3.45) é

$$\begin{aligned} y_p(\theta) &= -\cos \theta \int_0^\theta \text{sen}(u) \left(p\left(u + \frac{\pi}{2}\right)\right)^3 du + \text{sen } \theta \int_0^\theta \cos(u) \left(p\left(u + \frac{\pi}{2}\right)\right)^3 du \\ &= \int_0^\theta \text{sen}(\theta - u) \left(p\left(u + \frac{\pi}{2}\right)\right)^3 du. \end{aligned}$$

Sendo, portanto, a solução geral de (3.45) dada por

$$y(\theta) = c_1 \cos \theta + c_2 \text{sen } \theta + \int_0^\theta \text{sen}(\theta - u) \left(p\left(u + \frac{\pi}{2}\right)\right)^3 du.$$

Impondo as condições de contorno e fazendo algumas manipulações, concluímos que

$$y(\theta) = \frac{1}{2} \int_\theta^{\theta+\pi} \text{sen}(u - \theta) \left(p\left(u + \frac{\pi}{2}\right)\right)^3 du.$$

Portanto,

$$h_\gamma(\theta) = \frac{1}{2} \int_\theta^{\theta+\pi} \text{sen}(u - \theta) \left(p\left(u + \frac{\pi}{2}\right)\right)^3 du. \quad (3.46)$$

**Definição 3.10.** O ponto de uma região que têm a distribuição homogênea de área em torno de

si é chamado centróide.

Traçando retas que passam pela origem, cada uma delas divide a bola  $B$  em pedaços de mesma área. O centróide de cada pedaço constitui uma curva fechada convexa com centro na origem, chamada **curva centróide** de  $B$ .

Petty [35] observou que a curva com função suporte igual à encontrada em (3.46), é homotética a curva centróide da bola unitária. De fato, por [28], a curva centróide da bola unitária é parametrizada por

$$\gamma(\theta) = \frac{2}{A(S)} \left( \int_{\theta}^{\theta+\pi} \frac{1}{3} p^3(u) \cos(u) du, \int_{\theta}^{\theta+\pi} \frac{1}{3} p^3(u) \sen(u) du \right).$$

Daí, se  $v = (\cos \alpha, \sen \alpha)$  é uma direção qualquer, a função suporte Euclidiana de  $\gamma$  é dada por

$$\begin{aligned} h_{\gamma}(\alpha) &= \sup \{ \langle (\cos \alpha, \sen \alpha), \gamma(\theta) \rangle : \theta \in [0, 2\pi] \} \\ &= \sup \left\{ \frac{2}{3A(S)} \int_{\theta}^{\theta+\pi} \cos(u - \alpha) p^3(u) du : \theta \in [0, 2\pi] \right\} \\ &= \frac{2}{3A(S)} \sup \left\{ \int_{\theta}^{\theta+\pi} \cos(u - \alpha) p^3(u) du : \theta \in [0, 2\pi] \right\}. \end{aligned}$$

Definamos

$$f_{\alpha}(\theta) = \int_{\theta}^{\theta+\pi} \cos(u - \alpha) p^3(u) du.$$

Daí,

$$\begin{aligned} f'_{\alpha}(\theta) &= \cos(u - \alpha) p^3(u) \Big|_{\theta}^{\theta+\pi} \\ &= \cos(\theta + \pi - \alpha) p^3(\theta + \pi) - \cos(\theta - \alpha) p^3(\theta) \\ &= -\cos(\theta - \alpha) p^3(\theta) - \cos(\theta - \alpha) p^3(\theta) \\ &= -2p^3(\theta) \cos(\theta - \alpha). \end{aligned}$$

Logo,

$$f'_{\alpha}(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta - \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \theta - \alpha = \frac{3\pi}{2}.$$

Como

$$f''_{\alpha}(\theta) = -6p^2(\theta)p'(\theta) \cos(\theta - \alpha) + 2p^3(\theta) \sen(\theta - \alpha),$$

então, pelo teste da derivada segunda,  $\theta = \alpha + \frac{3\pi}{2}$  é o único ponto de máximo de  $f_{\alpha}$ . Daí,

$$\begin{aligned} h_{\gamma}(\alpha) &= \frac{2}{3A(S)} \int_{\alpha+\frac{3\pi}{2}}^{\alpha+\frac{5\pi}{2}} \cos(u - \alpha) p^3(u) du \\ &= \frac{2}{3A(S)} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \cos\left(u - \alpha + \frac{3\pi}{2}\right) \left(p\left(u + \frac{3\pi}{2}\right)\right)^3 du \\ &= \frac{2}{3A(S)} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \sen(u - \alpha) \left(p\left(u + \frac{\pi}{2}\right)\right)^3 du. \end{aligned}$$

Como as curvas em questão são convexas, as retas tangentes coincidem com as retas suporte em

cada ponto da curva. Logo,  $\gamma$  e a curva centróide da bola unitária são homotéticas. Com todas essas observações feitas, temos o seguinte resultado.

**Proposição 3.11.** *Curvas com curvatura Minkowski constante são homotéticas a curva centróide da bola unitária.*

Em [35], existe uma prova de que se um anticírculo tem curvatura Minkowski constante, então o plano é o Euclidiano. Lá também é mencionado que se um círculo tem curvatura Minkowski constante, então o plano deve ser o plano Euclidiano. O primeiro resultado pode ser considerado como consequência do Teorema 3.3, como veremos a seguir.

**Proposição 3.12.** *Se o anticírculo tem curvatura Minkowski constante, então o plano é o Euclidiano.*

**Demonstração:** Seja  $\gamma : [0, c] \rightarrow S_a$  uma parametrização pelo comprimento de arco Minkowski do anticírculo unitário. Suponhamos que  $\gamma$  tenha curvatura Minkowski constante. Como

$$k_m(s) = u'(s) = [\gamma'(s), \gamma''(s)],$$

então a menos de reescalonamento, podemos supor que a curvatura Minkowski é igual a 1. Pelo Corolário 3.2,  $k_n(s) = 1$  para todo  $s \in [0, c]$ .

Portanto,  $k_n(s) = k_m(s) = 1$  para todo  $s \in [0, c]$ . Como o anticírculo unitário é tal que seu campo tangente aponta em todas as direções do plano (pois é uma curva fechada), pelo Teorema 3.3, segue que o plano  $(X, \|\cdot\|)$  é o plano Euclidiano. ■

Petty não apresentou uma prova para o segundo resultado. A seguir há uma prova deste resultado, devido a Balestro, Martini e Shonoda.

**Teorema 3.5.** *Se o círculo unitário de um plano normado tem curvatura Minkowski constante, então o plano é o Euclidiano.*

**Demonstração:** Notemos primeiramente que, a menos de multiplicação por constante (Proposição 2.1), podemos supor que a curvatura Minkowski é unitária. Consideremos  $\varphi(s) : [0, l(S)] \rightarrow X$  uma parametrização pelo comprimento de arco do círculo unitário e seja  $u(s) : [0, l(S)] \rightarrow [0, 2\lambda(S)]$  a função tal que  $\varphi'(s) = \varphi'(u(s))$ , onde  $u$  é o parâmetro de área usual em  $S$ . Como  $k_m(s) = 1$ , segue que  $u'(s) = 1$ . Daí,  $u(s) = s + c$  para algum  $c \in \mathbb{R}$ .

Agora iremos fazer uso da seguinte definição. Dizemos que uma curva  $C$  é uma curva *equiframed* se  $C$  é centralmente simétrica, fechada, convexa e que é tocada em cada um de seus pontos por algum paralelogramo circunscrito de área mínima. Esta definição pode ser encontrada em [31].

Como

$$u(s) = s + c \text{ e } u'(s) = \int_0^s [\varphi(u), \varphi'(u)] du,$$

então  $u'(s) = [\varphi(s), \varphi'(s)] = 1 = \text{cte}$ . Daí, pela Proposição 2 em [31], segue que  $S$  é uma curva equiframed. Por outro lado, como  $S$  é uma curva suave *equiframed*, segue do Corolário 6 em [31], que  $S$  é uma curva Radon (ver [33] e [31]).

### 3.4. CURVAS DE CURVATURA CONSTANTE

Além disso,  $\varphi'(s) = \varphi(u(s)) = \varphi(s + c)$ ,  $s \in [0, l(S)]$ . Então, como  $\varphi(s) \dashv_B \varphi'(s)$ , vale que  $\varphi(s) \dashv_B \varphi(s + c)$ .

Geometricamente, isso significa que para encontrarmos a direção ortogonal Birkhoff direita de um dado vetor, sempre percorremos o mesmo comprimento de arco sobre o círculo unitário. Observemos que

$$\varphi(s) \dashv_B \varphi'(s) \text{ e } [\varphi(s), \varphi'(s)] = \|\varphi'(s)\|_a. \quad (3.47)$$

Como  $\varphi'(s) \in S$ , vale que  $\varphi'(s) \dashv_B \varphi''(s)$  e  $[\varphi'(s), \varphi''(s)] = \|\varphi''(s)\|_a$ . Como o plano é Radon,  $\varphi''(s) \dashv_B \varphi'(s)$ . Logo,

$$\varphi''(s) \dashv_B \varphi'(s) \text{ e } [\varphi'(s), \varphi''(s)] = \|\varphi''(s)\|_a. \quad (3.48)$$

De (3.47) e (3.48), devemos ter  $\varphi(s) = -\frac{\varphi''(s)}{\|\varphi''(s)\|_a} \|\varphi'(s)\|_a$ . Considerando  $c = l(S)/4$ , temos

$$-\varphi(s) = \frac{\varphi''(s)}{\|\varphi''(s)\|_a} \|\varphi'(s)\|_a = \frac{(\varphi(s+c))'}{\|(\varphi(s+c))'\|_a} \|\varphi'(s)\|_a = \frac{\varphi'(s+c)}{\|\varphi'(s+c)\|_a} \|\varphi'(s)\|_a = \varphi(s+2c).$$

Essa última igualdade vem do fato de  $\varphi'(s) = \varphi(s+c)$  e do plano ser Radon, pois  $\|\varphi'(s+c)\|_a = \|\varphi'(s+c)\| = 1 = \|\varphi'(s)\| = \|\varphi'(s)\|_a$ . Para finalizarmos a demonstração, iremos precisar da seguinte afirmação.

*Afirmção: Dois vetores não nulos são ortogonais Birkhoff se e só se os diâmetros em suas direções dividem o domínio limitado do círculo em quatro partes de áreas iguais.*

Esta afirmação segue da proporcionalidade entre a área e o comprimento de arco no círculo unitário e da unicidade da direção da ortogonalidade Birkhoff. Com efeito,

$$\varphi(t_1) \dashv_B \varphi(t_1 + c) \dashv_B \varphi(t_1 + 2c).$$

Consideremos  $A_1$  a área no círculo unitário compreendida entre  $\varphi(t_1)$  e  $\varphi(t_1 + c)$  e  $A_2$  a área no círculo unitário compreendida entre  $\varphi(t_1 + c)$  e  $\varphi(t_1 + 2c)$ . Como o comprimento de arco entre  $\varphi(t_1)$  e  $\varphi(t_1 + c)$  é igual ao comprimento de arco entre  $\varphi(t_1 + c)$  e  $\varphi(t_1 + 2c)$  e  $u(s) = s + c$ , onde  $u$  é o parâmetro de área, então concluímos que  $A_1 = A_2$ . Como  $\varphi(t_1 + 2c) = -\varphi(t_1)$  e pela simetria do círculo com relação à origem, concluímos que os diâmetros nas direções de  $\varphi(t_1)$  e  $\varphi(t_1 + c)$  dividem o círculo em quatro partes de áreas iguais. Por outro lado, se os diâmetros de dois vetores não nulos dividem o domínio em quatro partes de áreas iguais, então também dividem em quatro comprimentos iguais. Como  $c = l(S)/4$ , então cada “pedaço” tem comprimento  $c$  e portanto tais vetores são da forma  $\varphi(t_1)$  e  $\varphi(t_1 + c)$  ou  $\varphi(t_1)$  e  $\varphi(t_1 - c)$ . Em qualquer dos casos, tais vetores são ortogonais Birkhoff.

Chegamos ao término da demonstração, pois de acordo com a Proposição 3 de [3], esta é uma caracterização do plano Euclidiano. ■

**Proposição 3.13.** *Se um anticírculo tem curvatura circular constante então o plano é Radon.*

**Demonstração:** Se um anticírculo tem curvatura circular constante, então ele tem curvatura normal constante na antinorma. Daí, pelo Corolário 3.2, o anticírculo é também o círculo. Daí,

pelas equações (3.34) e (3.35), vale que

$$k_n(s) = k_c(s), \quad \forall s.$$

Portanto, pelo Corolário 3.1,  $X$  é um plano Radon. ■

**Observação 3.13.** Se o círculo tem curvatura normal constante então o plano também é Radon.

Para finalizar esta seção, observemos que uma curva para o qual um certo tipo de curvatura é zero, é um segmento de reta, pois pelas equações (3.32), (3.34) e (3.35) vale que

$$k_i \equiv 0 \Leftrightarrow k_e \equiv 0,$$

onde  $i = m, n, c$ , respectivamente. E  $k_e \equiv 0$  se e só se a curva em questão é uma reta. Além disso, se uma curvatura se anula em um ponto  $s_0$ , então todas as outras curvaturas se anulam neste ponto.

### 3.5 O Teorema Fundamental e Isometrias

Nessa seção, iremos utilizar as relações obtidas na Seção 3.3 juntamente com o Teorema 2.8 para encontrar o teorema fundamental das curvas para os conceitos de curvatura em um plano normado. Além disso, iremos definir, de maneira similar ao caso Euclidiano, isometrias em planos normados e estudar suas ações sobre os tipos de curvatura. As referências utilizadas nessa seção são: [4], [24], [31], [39] e [42].

**Teorema 3.6.** *Seja  $k : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$  e seja  $(X, \|\cdot\|)$  um plano normado. Então existe uma curva  $\gamma : [0, c] \rightarrow X$  cuja função curvatura de Minkowski no parâmetro comprimento de arco é  $k$ . Tal curva é única dados o ponto inicial e o vetor tangente inicial. O mesmo vale para a curvatura normal e a curvatura circular.*

**Demonstração:** Consideremos

$$\varphi(\theta) = p(\theta)(\cos \theta, \sin \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

parametrização do círculo uniário. Escrevamos

$$k(s) = p^3(\theta(s))k_e(s_e(s)),$$

para alguma função  $k_e$  de classe  $C^1$  e tal que  $s_e(s) = \int_0^s \|\gamma'(\xi)\|_e d\xi$ . Daí, pelo Teorema 2.8, existe uma curva  $\gamma(s_e) : [0, l_e(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^2$  cuja curvatura Euclidiana no parâmetro comprimento de arco Euclidiano é  $k_e$ . Daí, considerando  $\gamma$  parametrizada pelo comprimento de arco de Minkowski e tal que

$$\gamma'(s) = p(\theta(s))(\cos \theta(s), \sin \theta(s)), \quad \theta(s) \in [0, 2\pi],$$

concluimos pela equação (3.32) que a curvatura de Minkowski de  $\gamma$  no parâmetro comprimento

de arco de Minkowski é dada por

$$k(s) = p^3(\theta(s))k_e(s_e(s)).$$

Pelo Teorema 2.8, dados o ponto inicial e o vetor tangente inicial,  $\gamma(s_e)$  está unicamente determinada. Logo,  $\gamma(s)$  está unicamente determinada.

De maneira análoga, prova-se a existência da curva  $\gamma(s)$  com curvatura normal  $k_n$  ou curvatura circular  $k_c$ , usando as relações obtidas em (3.34) ou (3.35), respectivamente. E a unicidade segue do mesmo argumento utilizado para curvatura de Minkowski. ■

**Definição 3.11.** Uma **isometria** entre os planos normados  $(X, \|\cdot\|_X)$  e  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  é uma aplicação sobrejetiva  $T : X \rightarrow Y$  tal que  $\|Tu - Tv\|_Y = \|u - v\|_X$  para  $u, v \in X$  quaisquer.

**Teorema 3.7** ([42], Teorema 3.1.2). (*Mazur-Ulam*) *Toda isometria entre espaços normados é uma transformação afim.*

Qualquer isometria no plano Euclidiano é uma combinação de translações, rotações e reflexões. Em relação às isometrias de um plano normado, o Teorema 3.7 garante que a menos de translações, as isometrias são lineares e por isso vamos sempre considerar as isometrias como sendo lineares.

Dizemos que uma isometria de um plano normado preserva orientação quando o sinal da forma bilinear simplética não muda de sinal sob sua ação, caso contrário, dizemos que a isometria inverte orientação. A seguir, apresentaremos um importante resultado.

**Lema 3.1.** *Sejam  $(X, \|\cdot\|)$  um plano normado com a forma bilinear simplética fixada  $[\cdot, \cdot]$ , a antinorma associada  $\|\cdot\|_a$  e consideremos  $T : X \rightarrow X$  uma isometria. Então  $T$  é uma isometria na antinorma.*

**Demonstração:** Como  $T$  é uma isometria, então  $T(0) = 0$  (estamos supondo que isometrias são sempre lineares). Logo,

$$\|u\|_X = \|u - 0\|_X = \|Tu - T0\|_X = \|Tu\|_X$$

para todo  $u \in X$ . Em particular,  $T(S) = S$  e pelo Teorema 11 em [24],  $T$  é uma rotação. Portanto,  $|[x, y]| = |[Tx, Ty]|$  para todo  $x, y \in X$ . Como  $T$  é uma isometria,  $T$  deixa todas as propriedades de  $X$ , que são definidas somente em termos da norma, invariante.

*Afirmção:*  $T(B_a) = B_a$ .

Com efeito, seja  $x \in B_a$ . Então,

$$\|T(x)\|_a = \sup \{ |[T(x), z]| : z \in S \}.$$

Como  $T(S) = S$ , podemos escrever a igualdade acima como

$$\|T(x)\|_a = \sup \{ |[T(x), T(y)]| : y \in S \}.$$

Por outro lado,  $||[x, y]|| = ||[T(x), T(y)]||$ , então

$$\begin{aligned} ||T(x)||_a &= \sup \{ ||[T(x), T(y)]|| : y \in S \} \\ &= \sup \{ ||[x, y]|| : y \in S \} \\ &= ||x||_a. \end{aligned}$$

Daí, para todo  $x, y \in X$ , temos

$$||T(x) - T(y)||_a = ||T(x - y)||_a = ||x - y||_a.$$

Portanto,  $T$  é uma isometria na antinorma. ■

**Observação 3.14.** Como a antinorma da antinorma é a norma, segue que uma isometria na antinorma também é uma isometria na norma.

No plano Euclidiano, duas curvas tem a mesma curvatura Euclidiana se e só se elas são iguais a menos de movimento rígido. Geometricamente, elas têm a mesma forma e existe uma composição de translação (que relaciona seus respectivos pontos iniciais) e rotação (que relaciona seus respectivos vetores tangentes) produzindo uma posição coincidentes dos mesmos. Quando se trata de reflexões, a curvatura Euclidiana muda de sinal, uma vez que o sinal depende da orientação do vetor normal, mas o valor absoluto é preservado. Em outras palavras, uma isometria no plano Euclidiano age na curvatura de uma curva preservando seu valor absoluto e alterando ou mantendo seu sinal de acordo com sua orientação. Daí surgem duas perguntas:

1. Qual a ação de uma isometria em um plano Minkowski nas curvaturas de uma determinada curva?
2. Duas curvas com mesma curvatura (de qualquer um dos três tipos definidos) são isométricas?

Vamos responder essas perguntas ao longo desta seção.

**Teorema 3.8.** *As curvaturas de Minkowski, normal e circular de uma curva são, a menos de sinal, invariante sobre uma isometria no plano normado considerado. Os sinais são preservados se e só se a isometria preserva orientação.*

**Demonstração:** Seja  $\gamma(s) : [0, l(\gamma)] \rightarrow X$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e seja  $T : X \rightarrow X$  uma isometria. Seja  $\sigma(s) : [0, l(\gamma)] \rightarrow X$  a imagem da curva  $\gamma$  por  $T$ , isto é,  $\sigma(s) = T(\gamma(s))$ .

Começaremos com a curvatura de Minkowski. Iremos denotar por  $k_{m,\gamma}$  e  $k_{m,\sigma}$  as curvaturas de Minkowski de  $\gamma$  e  $\sigma$ , respectivamente.

*Afirmção:*  $s$  é o parâmetro pelo comprimento de arco de  $\sigma$ .

Com efeito,

$$(T\gamma(s))' = \sigma'(s) \Rightarrow dT_{\gamma(s)}\gamma'(s) = \sigma'(s) \Rightarrow T\gamma'(s) = \sigma'(s),$$

e daí, como  $T$  é isometria,

$$1 = \|\gamma'(s)\| = \|T\gamma'(s)\| = \|\sigma'(s)\|.$$

Portanto,  $s$  é o parâmetro pelo comprimento de arco de  $\sigma$ .

Para obtermos as curvaturas de Minkowski das curvas  $\gamma$  e  $\sigma$ , consideremos  $\varphi(u) : [0, 2\lambda(S)] \rightarrow S$  uma parametrização pelo parâmetro de área do círculo unitário e  $u_\gamma, u_\sigma : [0, l(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}$  funções tais que

$$\begin{aligned}\gamma'(s) &= \varphi(u_\gamma(s)) \\ \sigma'(s) &= \varphi(u_\sigma(s)),\end{aligned}$$

onde  $s \in [0, l(\gamma)]$ .

Como  $T$  é linear, temos

$$(T\gamma'(s))' = (\sigma'(s))' \Rightarrow dT_{\gamma'(s)}\gamma''(s) = \sigma''(s) \Rightarrow T\gamma''(s) = \sigma''(s) = u'_\sigma(s)n_\sigma(s),$$

onde a última igualdade vem das fórmulas de Frenet da curva  $\sigma$ . As fórmulas de Frenet da curva  $\gamma$  também nos diz que

$$\gamma''(s) = u'_\gamma(s)n_\gamma(s).$$

Daí,

$$u'_\gamma(s)Tn_\gamma(s) = T\gamma''(s) = u'_\sigma(s)n_\sigma(s). \quad (3.49)$$

Pelo Lema 3.1,

$$\|Tn_\gamma(s)\|_a = \|n_\gamma(s)\|_a = 1.$$

Logo,

$$|u'_\gamma(s)| = |u'_\gamma(s)| \|Tn_\gamma(s)\|_a = |u'_\sigma(s)| \|n_\sigma(s)\|_a = |u'_\sigma(s)|.$$

Portanto,

$$|k_{m,\gamma}(s)| = |k_{m,\sigma}(s)|.$$

Falta mostrarmos que o sinal é preservado se e só se a isometria preserva orientação. Como  $T\gamma'(s) = \sigma'(s)$  e, pela equação (3.49), vale que  $Tn_\gamma(s) = \pm n_\sigma(s)$ , então

$$1 = [\sigma'(s), n_\sigma(s)] = \pm [T\gamma'(s), Tn_\gamma(s)]$$

para todo  $s \in [0, l(\gamma)]$ , onde  $+$  significa que  $T$  preserva orientação e  $-$  significa que  $T$  inverte orientação. Portanto,  $n_\sigma(s)$  tem a mesma orientação que  $Tn_\gamma(s)$  se e só se  $T$  preserva orientação, daí, pela equação (3.49),  $k_{m,\gamma}$  e  $k_{m,\sigma}$  possuem mesmo sinal se e só se  $T$  preserva orientação.

Agora consideremos  $k_{n,\gamma}$  e  $k_{n,\sigma}$  as curvaturas normais de  $\gamma$  e  $\sigma$ , respectivamente. Então, pelas fórmulas de Frenet,

$$\begin{aligned}n'_\gamma(s) &= -k_{n,\gamma}(s)\gamma'(s) \\ n'_\sigma(s) &= -k_{n,\sigma}(s)\sigma'(s).\end{aligned}$$

Como  $T\gamma'(s) = \sigma'(s)$  e  $Tn_\gamma(s) = \pm n_\sigma(s)$ , onde o sinal depende se  $T$  preserva orientação ou não, então

$$-k_{n,\sigma}(s)\sigma'(s) = n'_\sigma(s) = \pm Tn'_\gamma(s) = \pm T(-k_{n,\gamma}(s)\gamma'(s)) = \mp k_{n,\gamma}(s)T\gamma'(s) = \mp k_{n,\gamma}(s)\sigma'(s).$$

Portanto,

$$k_{n,\sigma}(s) = \pm k_{n,\gamma}(s),$$

onde o sinal positivo permanece se e somente se  $T$  preserva orientação.

Para curvatura circular, basta lembrarmos que ela é a curvatura normal na antinorma e que uma isometria na norma também é uma isometria na antinorma. Logo, o valor absoluto da curvatura circular é invariante sobre uma isometria. Quanto ao sinal, basta observarmos que a orientação de uma aplicação linear não depende da norma no plano, ou seja, os sinais serão preservados se e só se a isometria preserva orientação. ■

Portanto, respondemos a pergunta 1. Falta respondermos a pergunta 2, isto é, vale a recíproca do Teorema anterior? A resposta é não. Para encontrarmos exemplos que nos convença disso vamos precisar do seguinte resultado (que é uma caracterização métrica do plano Euclidiano dentre todos os planos de Minkowski):

**Proposição 3.14.** *Se quaisquer dois arcos de comprimentos iguais no círculo unitário de um plano normado coincidem sobre alguma isometria linear que preserva orientação, então o plano é o plano Euclidiano.*

**Demonstração:** Vimos na demonstração do Lema 3.1, que  $[x, y] = [Tx, Ty]$  para todo  $x, y \in X$ , ou seja,  $T$  preserva área. Além disso, estamos supondo que para alguma isometria, dois arcos de mesmo comprimento no círculo unitário coincidem. Logo, quaisquer dois arcos de mesmo comprimento sempre terão a mesma área, ou seja, a área é proporcional ao comprimento do arco correspondente e pela Proposição 2 em [31], esta é uma caracterização dos planos Radon. Agora observemos que, se quaisquer dois arcos de mesmo comprimento podem ser mapeados um sobre o outro por uma isometria linear que preserva orientação, em particular, quaisquer dois pontos do círculo unitário podem ser mapeados um no outro via uma isometria linear, já que qualquer ponto tem comprimento igual a zero.

Denotemos por  $b(\cdot)$  a ortogonalidade Birkhoff direita de um vetor unitário tal que  $[\cdot, b(\cdot)] > 0$  e  $b(\cdot) \in S$ .

*Afirmção:* Dados  $x, y \in S$ , se  $T$  é uma isometria que preserva orientação tal que  $T(x) = y$ , então  $T(b(x)) = b(y)$ .

Com efeito,

$$x \dashv_B b(x) \Rightarrow [x, b(x)] > 0 \text{ e } \|x\| \leq \|x + tb(x)\|, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Como

$$\|x\| = \|T(x)\| = \|y\|$$

e

$$\|x + tb(x)\| = \|T(x + tb(x))\| = \|T(x) + tT(b(x))\|, \forall t \in \mathbb{R},$$

então

$$\|y\| = \|x\| \leq \|x + tb(x)\| = \|T(x) + tT(b(x))\| = \|y + tT(b(x))\|, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Portando,  $y \dashv_B T(b(x))$ . Como  $T$  preserva orientação,

$$[x, b(x)] > 0 \Rightarrow [T(x), T(b(x))] = [y, T(b(x))] > 0,$$

e como  $T(S) = S$ , então  $T(b(x)) \in S$ . Daí, pela unicidade da ortogonalidade Birkhoff direita em  $S$ , temos que  $T(b(x)) = b(y)$ .

Então, pelas observações feitas acima, existe uma isometria  $T$  que preserva orientação tal que,  $T(x) = y$  e  $T(b(x)) = b(y)$  para todo  $x, y \in S$ . Usaremos essa isometria para finalizar a demonstração. Para tanto vamos precisar da seguinte definição.

**Definição 3.12.** Dizemos que  $x, y \in X$  são ortogonal isósceles, denotado por  $x \dashv_I y$ , sempre que  $\|x + y\| = \|x - y\|$ .

Se quaisquer dois vetores unitários ortogonal Birkhoff são também ortogonal isósceles, então segundo [39], Teorema 2, o plano é o plano Euclidiano.

Sejam, então,  $x, b(x) \in S$  par de vetores ortogonais Birkhoff. Vimos que existe uma aplicação  $T$  satisfazendo  $T(x) = b(x)$  e  $T(b(x)) = b(b(x))$ . Como o plano é Radon, temos que

$$x \dashv_B b(x) \Rightarrow b(x) \dashv_B x.$$

Logo,  $b(b(x)) = -x$ , pois definimos  $b(b(x)) \in S$  tal que  $[b(x), b(b(x))] > 0$ . Portanto,

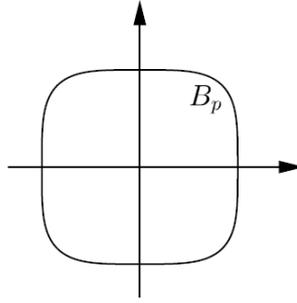
$$\|b(x) + x\| = \|T(b(x) + x)\| = \|T(b(x)) + T(x)\| = \|-x + b(x)\| = \|b(x) - x\|.$$

Assim, a ortogonalidade Birkhoff de vetores unitário implica a ortogonalidade isósceles desses vetores. Isso conclui a demonstração. ■

Como mencionamos, essa proposição garante que, em qualquer plano Minkowski não-Euclidiano existem curvas com curvatura normal ou circular iguais que não coincidem sobre nenhuma isometria no plano. Na verdade, qualquer arco do círculo unitário tem curvatura circular igual a 1, e, portanto, temos apenas que escolher dois arcos que não podem ser levados um no outro via uma isometria. Para a curvatura normal fazemos o mesmo, mas substituímos o círculo unitário pelo anticírculo unitário. Vejamos um exemplo.

**Exemplo 3.5.** Consideremos o plano normado  $(\mathbb{R}^2, l_3)$ , como no Exemplo 3.1. A bola unitária deste plano está ilustrada abaixo.

**Figura 3.7:** A bola unitária  $B_p$  na norma  $l_p$ .



Fonte: Concepts of curvatures in normed planes, 2018.

Consideremos as curvas  $\gamma_1$  como sendo o arco de  $S$  em que  $t \in [1/3, 5/12]$  e  $\gamma_2$  o arco de  $S$  em que  $t \in [1/2, 0.5881]$ . Essas curvas possuem o mesmo comprimento. Sabemos que essas curvas possuem curvatura circular constante igual a 1. Como as isometrias do plano  $l_3$  são composições de translações, reflexões e rotações, então se supormos que existe uma isometria  $T$  tal que  $T\gamma_1 = \gamma_2$ , esta isometria deverá ser uma rotação ou uma reflexão.

Como

$$\varphi' \left( \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3} \left( 3^{2/3}, - \left( \frac{3}{2} \right)^{2/3} \right) \text{ e } \varphi' \left( \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3} (2^{2/3}, -2^{2/3}),$$

então

$$\left\| \varphi' \left( \frac{1}{3} \right) \right\|_3 \approx 0.75 \text{ e } \left\| \varphi' \left( \frac{1}{2} \right) \right\|_3 \approx 0.67.$$

Daí, se  $T\varphi' \left( \frac{1}{3} \right) = \varphi' \left( \frac{1}{2} \right)$ , deveríamos ter  $T\varphi' \left( \frac{1}{3} \right) = \varphi' \left( \frac{1}{2} \right)$ . Mas,

$$\left\| T\varphi' \left( \frac{1}{3} \right) \right\|_3 = \left\| \varphi' \left( \frac{1}{3} \right) \right\|_3 \approx 0.75 \neq 0.67 \approx \left\| \varphi' \left( \frac{1}{2} \right) \right\|_3,$$

o que é um absurdo. Por outro lado, como  $\varphi' (0.5581) = \frac{1}{3} \left( (0.5881)^{-2/3}, - (0.5881)^{-2/3} \right)$ , então

$$\left\| \varphi' (0.5581) \right\|_3 \approx 0.69.$$

Deste modo,

$$\left\| T\varphi' \left( \frac{1}{3} \right) \right\|_3 = \left\| \varphi' \left( \frac{1}{3} \right) \right\|_3 \approx 0.75 \neq 0.69 \approx \left\| \varphi' (0.5581) \right\|_3.$$

Portanto, não existe uma isometria  $T$ , tal que  $T\gamma_1 = \gamma_2$ .

### 3.6 Valores de curvatura extrema e largura constante

Existem muitos resultados em relação à função curvatura de uma curva fechada e convexa (que sempre assumimos ser de classe pelo menos  $C^2$ ) no plano Euclidiano e suas propriedades geométricas. Como exemplo simples, o Teorema 2.10. Esse teorema se estende para planos normados, já que se algum tipo de curvatura é estritamente positiva, então a curvatura Euclidiana é estritamente positiva. Essa é uma consequência imediata das igualdades (3.32), (3.34) e (3.35). O Teorema dos Quatro Vértices 2.12 para o caso Euclidiano é, possivelmente, o resultado mais

conhecido e estudado em relação a função curvatura de curvas planas, fechadas e convexas. Petty [35] provou o Teorema dos Quatro Vértices para curvatura de Minkowski e a demonstração adequa-se também para as curvaturas circular e normal, como veremos. As referências de mais relevância para essa seção são: [4], [10], [23], [35] e [41].

**Definição 3.13.** Dois pontos distintos de uma curva simples, fechada e convexa são ditos opostos se as retas tangentes à curva nestes pontos são paralelas.

**Definição 3.14.** Dois arcos de uma curva são ditos opostos se seus pontos iniciais e finais são opostos, respectivamente.

A demonstração do Teorema dos quatro vértices para planos normados se baseia no seguinte resultado.

**Teorema 3.9** (Wilhelm Süss, [41]). *Uma curva simples, fechada e estritamente convexa tem pelo menos três pares opostos com a mesma curvatura Euclidiana.*

**Teorema 3.10.** *(O Teorema dos Quatro Vértices para planos normados) Seja  $\gamma : [0, c] \rightarrow X$  uma curva simples, fechada e estritamente convexa em um plano normado. Então cada função curvatura de  $\gamma$  tem pelo menos quatro extremos locais.*

**Demonstração:** Como  $\gamma$  é simples, fechada e estritamente convexa, pelo Teorema 3.9, existem pelo menos três pares opostos com a mesma curvatura Euclidiana. Pela equação (3.32),

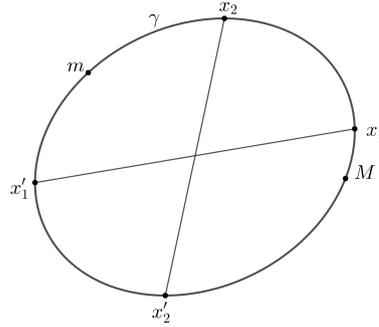
$$k_m(s) = p^3(\theta(s))k_e(s_e(s)),$$

onde  $p(\theta(s))$  é tal que  $\varphi(\theta) = p(\theta)(\cos \theta, \sin \theta)$  parametriza o círculo unitário e  $\theta(s)$  é a direção cuja reta suporte do anticírculo unitário em  $\psi(\theta(s))$  contém  $\gamma'(s)$ . Consideremos  $a = \gamma(s_1)$  e  $a' = \gamma(s_2)$  dois pontos opostos com mesma curvatura Euclidiana. Então,  $p(\theta(s_1)) = p(\theta(s_2))$ , pela definição de  $\theta(s)$ . Donde segue que  $k_m(s_1) = k_m(s_2)$ . Logo, pelo Teorema 3.9,  $k_m$  possui três pares opostos com mesma curvatura de Minkowski.

Sabemos que  $k_m$  possui dois extremos locais, um de máximo e um de mínimo, já que  $k_m$  é uma função contínua em  $[0, c]$  e é diferenciável em  $(0, c)$ . Suponhamos, por absurdo, que  $m = \min k_m$  e  $M = \max k_m$  sejam os únicos extremos de  $k_m$ . Então  $k_m$  decresce no “arco” compreendido entre  $M$  e  $m$ , e cresce no outro “arco”.

*Afirmção: Se  $k_m$  possui somente  $m$  e  $M$  como extremos locais, então só existe um par de pontos opostos em  $\gamma$  com mesma curvatura.*

Com efeito, suponhamos que  $x_1, x'_1$  e  $x_2, x'_2$  sejam dois pares de pontos opostos cuja curvatura em cada par coincida e que eles estão dispostos conforme mostra a Figura abaixo. Como  $k_m$  decresce ao longo do arco  $\widehat{Mm}$ , então,  $k_m(x_2) < k_m(x_1)$ . Como  $k_m$  cresce ao longo do arco  $\widehat{mM}$  e a curva é estritamente convexa, devemos ter  $k_m(x_1) = k_m(x'_1) < k_m(x'_2) = k_m(x_2)$ , o que é um absurdo. Os outros casos (em que os pontos estão dispostos de outra maneira) seguem de argumentos análogos, provando assim a afirmação.



Fonte: Compilação do autor.

Portanto, se  $k_m$  possui somente dois extremos locais, então existe no máximo um par de pontos opostos com mesma curvatura de Minkowski. Mas isso contradiz o Teorema 3.9. Logo,  $k_m$  possui mais extremos locais. Pelo Lema 2.2,  $k_m$  possui pelo menos quatro extremos.

A demonstração para as curvaturas normal e circular segue de maneira análoga, através das equações (3.34) e (3.35), respectivamente. ■

Como estamos considerando as curvas e o círculo unitário sempre de classe pelo menos  $C^2$ , a função curvatura circular de uma curva simples, fechada e estritamente convexa tem máximo e mínimo absoluto. Eles estão associados aos menores e maiores círculos de curvatura (no sentido do raio de curvatura), respectivamente. Os pontos de máximo e mínimo da curvatura normal são, naturalmente, associados aos menores e maiores anticírculos de curvatura, já que a curvatura normal é a curvatura circular na antinorma.

As questões naturais que aparecem são:

1. A região limitada por uma curva contém seu menor círculo de curvatura?
2. A região limitada por uma curva está contida dentro da região delimitada pelo seu maior círculo de curvatura?

Guggenheimer [23] abordou essas questões enquanto Balestro, Martini e Shonoda [4] deram resultados semelhantes como consequência de um resultado mais geral, como veremos a seguir.

**Teorema 3.11.** *Sejam  $\gamma, \sigma : [0, 2\pi] \rightarrow X$  curvas simples, fechadas, estritamente convexas de classe  $C^2$  possuindo os mesmos pontos iniciais e a mesma direção tangencial inicial. Assumamos que estas curvas estão parametrizadas pelo ângulo (orientado) de seus respectivos vetores tangentes com as mesmas direções fixadas, e que elas estão orientadas positivamente. Se  $k_{c,\gamma}(\theta) \leq k_{c,\sigma}(\theta)$  para cada  $\theta \in [0, 2\pi]$ , então a curva  $\sigma$  está contida na região delimitada pela curva  $\gamma$ .*

**Demonstração:** A estratégia desta prova é mostrarmos que a função suporte Euclidiana de  $\gamma$  é sempre maior ou igual à função suporte de  $\sigma$ . Por simplicidade, vamos adotar uma estrutura Euclidiana de posição de tal maneira que a origem está dentro da região delimitada por  $\sigma$  e o vetor  $v = (1, 0)$  é o normal unitário à  $\gamma(0)$  (na norma Euclidiana).

Sejam  $h_\gamma(\theta)$  e  $h_\sigma(\theta)$  as funções suporte de  $\gamma$  e  $\sigma$ , respectivamente (onde o vetor  $(\cos \theta, \sin \theta)$  dá a direção normal, como de costume). Pela Observação 3.12, juntamente com (3.26) e (3.27),

podemos considerar as parametrizações de  $\gamma$  e  $\sigma$  como sendo

$$\begin{aligned}\gamma(\theta) &= g'_\gamma(\theta)(\cos \theta, \sin \theta) + g_\gamma(\theta)(-\sin \theta, \cos \theta) \\ \sigma(\theta) &= g'_\sigma(\theta)(\cos \theta, \sin \theta) + g_\sigma(\theta)(-\sin \theta, \cos \theta),\end{aligned}$$

onde  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $g_\gamma(\theta + \pi/2) = h_\gamma(\theta)$  e  $g_\sigma(\theta + \pi/2) = h_\sigma(\theta)$ . Notemos que como  $\sigma(0) = \gamma(0)$  e  $(\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $(-\sin \theta, \cos \theta)$  são vetores linearmente independentes, então

$$g_\gamma(0) = g_\sigma(0) \text{ e } g'_\gamma(0) = g'_\sigma(0).$$

De (3.35), temos que a curvatura Euclidiana de  $\gamma$  e  $\sigma$  são dadas por

$$\begin{aligned}k_{e,\gamma}(\theta) &= k_\varphi(\theta)k_{c,\gamma}(\theta) \\ k_{e,\sigma}(\theta) &= k_\varphi(\theta)k_{c,\sigma}(\theta),\end{aligned}$$

respectivamente, onde  $k_\varphi(\theta)$  é a curvatura Euclidiana do círculo unitário no ponto cujo vetor normal unitário é  $(\cos \theta, \sin \theta)$ . Por (3.33),

$$g''_\gamma(\theta) + g_\gamma(\theta) = [k_\varphi(\theta)k_{c,\gamma}(\theta)]^{-1} \quad (3.50)$$

$$g''_\sigma(\theta) + g_\sigma(\theta) = [k_\varphi(\theta)k_{c,\sigma}(\theta)]^{-1}. \quad (3.51)$$

Para resolver essas equações, que possuem mesmas condições de contorno, utilizamos o método de variação de parâmetros.

A equação homogênea associada à (3.50) é  $h''_\gamma(\theta) + h_\gamma(\theta) = 0$ , cuja solução geral é dada por  $y(\theta) = c_1 \cos \theta + c_2 \sin \theta$ , com  $y_1(\theta) = \cos \theta$  e  $y_2(\theta) = \sin \theta$  soluções particulares. Daí,  $W[y_1, y_2] = 1$ . Uma solução particular de (3.50) é

$$y_P(\theta) = \int_0^\theta \sin(\theta - u) [k_\varphi(u)k_{c,\gamma}(u)]^{-1} du.$$

Portanto, a solução geral de (3.50), devido ao método de variação de parâmetros, é dada por:

$$y_G(\theta) = c_1 \cos \theta + c_2 \sin \theta + \int_0^\theta \sin(\theta - u) [k_\varphi(u)k_{c,\gamma}(u)]^{-1} du.$$

Impondo as condições de contorno,

$$y_G(\theta) = y_G(0) \cos \theta + y'_G(0) \sin \theta + \int_0^\theta \sin(\theta - u) [k_\varphi(u)k_{c,\gamma}(u)]^{-1} du,$$

ou seja,

$$g_\gamma(\theta) = g_\gamma(0) \cos \theta + g'_\gamma(0) \sin \theta + \int_0^\theta \sin(\theta - u) [k_\varphi(u)k_{c,\gamma}(u)]^{-1} du.$$

Da mesma forma, mostra-se que

$$g_\sigma(\theta) = g_\sigma(0) \cos \theta + g'_\sigma(0) \sin \theta + \int_0^\theta \sin(\theta - u) [k_\varphi(u)k_{c,\sigma}(u)]^{-1} du.$$

Portanto,

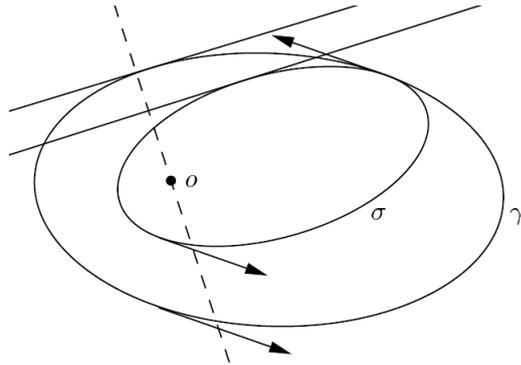
$$g_\gamma(\theta) - g_\sigma(\theta) = \int_0^\theta \left( [k_\varphi(u) k_{c,\gamma}(u)]^{-1} - [k_\varphi(u) k_{c,\sigma}(u)]^{-1} \right) \text{sen}(\theta - u) du.$$

Por hipótese,  $k_\varphi(\theta)k_{c,\gamma}(\theta) \leq k_\varphi(\theta)k_{c,\sigma}(\theta)$ . Logo,  $[k_\varphi(\theta)k_{c,\gamma}(\theta)]^{-1} - [k_\varphi(\theta)k_{c,\sigma}(\theta)]^{-1} \geq 0$  para todo  $\theta \in [0, \pi]$ . Além disso,  $\text{sen}(\theta - u) \geq 0$  para todo  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $u \in [0, \theta]$ . Sendo assim,

$$g_\gamma(\theta) - g_\sigma(\theta) \geq 0, \quad \forall \theta \in [0, \pi].$$

Agora notemos que invertendo a orientação das curvas e repetindo os argumentos, obtemos o mesmo resultado para a outra parte das curvas (veja a Figura 3.8). Portanto, temos que  $g_\gamma(\theta) \geq g_\sigma(\theta)$  para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$  e conseqüentemente,  $h_\gamma(\theta) \geq h_\sigma(\theta)$  para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ . Donde segue que a região delimitada por  $\gamma$  contém a curva  $\sigma$ . ■

Figura 3.8: Teorema 3.11.



Fonte: Concepts of curvatures in normed planes, 2018.

**Observação 3.15.** O Teorema 3.11 também vale se considerarmos a curvatura de Minkowski ou a curvatura normal ao invés da curvatura circular, basta utilizarmos as equações (3.32) e (3.34) em vez de (3.35) e então a prova segue de maneira análoga.

**Corolário 3.3.** *Seja  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow X$  uma curva simples, fechada e estritamente convexa de classe  $C^2$ . Então a região delimitada por  $\gamma$  contém seu menor círculo e anticírculo de curvatura. Além disso,  $\gamma$  está contida nas regiões delimitadas pelo seu maior círculo e anticírculo de curvatura.*

**Demonstração:** Consideremos  $\bar{\theta} \in [0, 2\pi]$  tal que

$$k_{c,\gamma}(\bar{\theta}) \geq k_{c,\gamma}(\theta), \quad \forall \theta \in [0, 2\pi].$$

Consideremos  $\bar{\varphi}$  o círculo osculatório de  $\gamma$  em  $\bar{\theta}$ . Então o raio de curvatura em  $\bar{\theta}$  é  $\rho = \frac{1}{k_{c,\gamma}(\bar{\theta})}$  e portanto a curvatura circular de  $\bar{\varphi}$  é, em cada ponto,  $\frac{1}{\rho}$ . Daí,

$$k_{c,\gamma}(\theta) \leq k_{c,\bar{\varphi}}(\theta), \quad \forall \theta \in [0, 2\pi],$$

e pelo Teorema 3.11, segue que  $\gamma$  contém  $\bar{\varphi}$ , isto é,  $\gamma$  contém o menor círculo de curvatura. De

maneira análoga mostra-se que  $\gamma$  contém o menor anticírculo de curvatura.

Seguindo a mesma ideia, também mostra-se que  $\gamma$  está contida na região delimitada pelo maior círculo e anticírculo de curvatura, respectivamente, bastando observarmos que nestes casos

$$\begin{aligned} k_{c,\varphi_1}(\theta) &\leq k_{c,\gamma}(\theta), \quad \forall \theta \in [0, 2\pi] \\ k_{c,\varphi_2}(\theta) &\leq k_{c,\gamma}(\theta), \quad \forall \theta \in [0, 2\pi], \end{aligned}$$

onde  $\varphi_1$  é o maior círculo de curvatura e  $\varphi_2$  é o maior anticírculo de curvatura. ■

Vale ressaltarmos que por diferentes métodos, Guggenheimer [23] provou que, sob mesma hipótese, a região delimitada pela curva contém pelo menos dois de seus círculos de curvatura.

Terminamos esta seção com um resultado de Petty [35] sobre a importante classe de curvas de largura constante.

**Definição 3.15.** Seja  $\gamma : [0, c] \rightarrow X$  uma curva fechada, simples e estritamente convexa. A **largura** de  $\gamma$  em uma determinada direção é a distância (Minkowski) entre as duas linhas tangentes à  $\gamma$  nessa direção.

Para uma curva no plano Euclidiano cuja largura é constante, sabe-se que a soma dos raios de curvatura Euclidiana de qualquer par de pontos opostos é igual a essa largura, veja a discussão na seção 6 do artigo [10]. A seguir há uma prova para planos normados, devido a Balestro, Martini e Shonoda [4].

**Proposição 3.15.** *Seja  $\gamma : [0, c] \rightarrow X$  uma curva simples, fechada e estritamente convexa de largura constante  $d \in \mathbb{R}$ , que é pelo menos de classe  $C^2$ . Então a soma dos raios de curvatura de qualquer par de pontos opostos é  $d$ .*

**Demonstração:** Primeiramente consideremos  $\varphi(u) : [0, 2\lambda(S)] \rightarrow S$  uma parametrização do círculo unitário por duas vezes a área do setor e reparametrizemos  $\gamma$  de modo que

$$\gamma'(u) = \rho(u)\varphi'(u).$$

Feito isso, temos que  $k_c(u) = \rho^{-1}(u)$ , isto é,  $\rho(u)$  é exatamente o raio de curvatura de  $\gamma$  em  $\gamma(u)$ . Nosso primeiro passo é provar que a reta unindo um par de pontos opostos é normal direita à direção tangente de  $\gamma$  nesses pontos.

Sabemos que a distância (Minkowski) entre as retas tangentes associadas aos pontos opostos é  $d$ . Além disso, como  $\varphi(u) \dashv_B \varphi'(u)$  então  $\varphi(u) \dashv_B \gamma'(u)$ . Como a distância entre as retas é  $d$ , então vai existir  $q(u)$  na reta  $r \mapsto \gamma(u + \lambda(S)) + r\gamma'(u)$  tal que  $\gamma(u) - q(u) = d\varphi(u)$ .

Consideremos  $g : [0, 2\lambda(S)] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que  $q(u) = \gamma(u + \lambda(S)) + g(u)\gamma'(u)$ . Queremos mostrar que  $g \equiv 0$ . Como  $\gamma(u) - q(u) = d\varphi(u)$ , então  $\gamma'(u) - q'(u) = d\varphi'(u)$ . Daí,

$$\gamma'(u) - \gamma'(u + \lambda(S)) - g'(u)\gamma'(u) - g(u)\gamma''(u) = d\varphi'(u).$$

Logo,

$$(\rho(u) + \rho(u + \lambda(S)) - g'(u)\rho(u) - d)\varphi'(u) - g(u)\gamma''(u) = 0.$$

Como  $\gamma'(u), \gamma''(u)$  são vetores linearmente independentes e  $\varphi'(u)/\gamma'(u)$ , então na igualdade acima devemos ter  $g(u) = 0$  para todo  $u$ . Portanto,  $q(u) = \gamma(u + \lambda(S))$  e daí,

$$\gamma(u) - \gamma(u + \lambda(S)) = d\varphi(u), \forall u \in [0, 2\lambda(S)].$$

Derivando essa última igualdade,

$$\begin{aligned} d\varphi'(u) &= \gamma'(u) - \gamma'(u + \lambda(S)) \\ &= \rho(u)\varphi'(u) - \rho(u + \lambda(S))\varphi'(u + \lambda(S)) \\ &= (\rho(u) + \rho(u + \lambda(S)))\varphi'(u). \end{aligned}$$

Portanto,

$$d = (\rho(u) + \rho(u + \lambda(S)))$$

para todo  $u \in [0, 2\lambda(S)]$ , o que conclui a demonstração. ■

**Corolário 3.4.** *Seja  $\gamma : [0, c] \rightarrow X$  uma curva fechada, simples e estritamente convexa de largura constante  $d \in \mathbb{R}$ . Então,*

$$l(\gamma) = d \frac{l(S)}{2}.$$

*Mais ainda, se cada par de pontos opostos divide  $\gamma$  em duas partes de comprimento igual, então  $\gamma$  é um círculo de Minkowski.*

**Demonstração:** Para primeira parte, temos

$$\begin{aligned} l(\gamma) &= \int_0^{2\lambda(S)} \|\gamma'(u)\| du \\ &= \int_0^{2\lambda(S)} \rho(u) \|\varphi'(u)\| du \\ &= \int_0^{\lambda(S)} \rho(u) \|\varphi'(u)\| du + \int_{\lambda(S)}^{2\lambda(S)} \rho(u) \|\varphi'(u)\| du \\ &= \int_0^{\lambda(S)} \rho(u) \|\varphi'(u)\| du + \int_0^{\lambda(S)} \rho(u + \lambda(S)) \|\varphi'(u + \lambda(S))\| du \\ &= \int_0^{\lambda(S)} (\rho(u) + \rho(u + \lambda(S))) \|\varphi'(u)\| du \\ &= \int_0^{\lambda(S)} d \|\varphi'(u)\| du \\ &= d \frac{l(S)}{2}. \end{aligned}$$

Para segunda parte vamos precisar da seguinte afirmação.

*Afirmção: Qualquer arco com comprimento  $d \frac{l(S)}{2^n}$ ,  $n \geq 1$ , é tal que seu arco oposto tem o mesmo comprimento.*

Essa afirmação segue por indução sobre  $n$ . Como os casos  $n = 1$  e  $n = 2$  são imediatos, vamos fazer o caso  $n = 3$ . Consideremos o arco  $l_1$  compreendido entre  $\gamma(s_1)$  e  $\gamma(s_2)$  de comprimento  $d \frac{l(S)}{2^3}$ . Seja  $l_2$  o arco compreendido entre  $\gamma(s'_1)$  e  $\gamma(s'_2)$ , oposto à  $l_1$ .

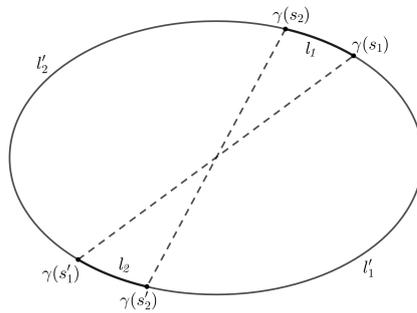
Como  $\gamma(s_1)$  é oposto à  $\gamma(s'_1)$ , então, por hipótese, o comprimento do arco compreendido entre  $\gamma(s_1)$  e  $\gamma(s'_1)$  é  $\frac{l(\gamma)}{2}$ . Da mesma forma, o comprimento do arco compreendido entre  $\gamma(s_2)$  e  $\gamma(s'_2)$  é  $\frac{l(\gamma)}{2}$ . Consideremos  $l'_1$  o comprimento do arco compreendido entre  $\gamma(s'_2)$  e  $\gamma(s_1)$ . Então, por hipótese,

$$l(l_1) + l(l'_1) = \frac{l(\gamma)}{2} = l(l_2) + l(l'_1),$$

e daí,

$$l(l_1) = l(l_2) = d \frac{l(S)}{2^3}.$$

**Figura 3.9:**  $l(l_1) = l(l_2)$ .



Fonte: Compilação do autor.

Suponhamos que valha a afirmação para todo  $k < n$ . Queremos mostrar que vale para  $n$ . Consideremos  $l_n$  o arco de comprimento  $d \frac{l(S)}{2^n}$  e  $l'_n$  o seu arco oposto. Como

$$d \frac{l(S)}{2^n} = \left( d \frac{l(S)}{2^{n-1}} \right) \frac{1}{2},$$

então temos que se  $L_n$  é o arco de comprimento  $d \frac{l(S)}{2^{n-1}}$  que contém  $l_n$  (tendo o mesmo ponto inicial), o seu arco oposto  $L'_n$  também tem comprimento  $d \frac{l(S)}{2^{n-1}}$ , por hipótese de indução, e contém  $l'_n$  (tendo mesmo ponto inicial). Usando o mesmo argumento utilizado no caso  $n = 3$ , concluímos que  $l'_n$  tem comprimento  $d \frac{l(S)}{2^n}$ . Provando assim a afirmação.

Agora vamos supor, por absurdo, que  $\gamma$  não é um círculo de Minkowski. Então, pelo Teorema 3.4, sua curvatura circular não é constante. Pelo Corolário 3.3,  $\gamma$  está contida no seu maior círculo de curvatura. Digamos que tal círculo seja aquele que tem raio  $\rho(u_0)$ ,  $u_0 \in [0, 2\lambda(S)]$ . Daí, este círculo deve ter largura em qualquer direção maior que  $d$  (pois este círculo contém  $\gamma$  que tem largura constante igual a  $d$ ). Portanto,  $\rho(u_0) > \frac{d}{2}$ .

Por continuidade, podemos escolher  $\epsilon > 0$  tal que  $\rho(u) > \frac{d}{2}$  em  $[u_0, u_0 + \epsilon]$  e o comprimento de  $\gamma$  entre  $\gamma(u_0)$  e  $\gamma(u_0 + \epsilon)$  é igual à  $d \frac{l(S)}{2^n}$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ . Logo, pela afirmação feita, temos que o arco compreendido entre  $\gamma(u_0 + \lambda(S))$  e  $\gamma(u_0 + \epsilon + \lambda(S))$  também possui comprimento  $d \frac{l(S)}{2^n}$ . Além disso, pela Proposição 3.15, como  $\rho(u) > \frac{d}{2}$  para todo  $u \in [u_0, u_0 + \epsilon]$ , então

$\rho(u) < \frac{d}{2}$  para todo  $u \in [u_0 + \lambda(S), u_0 + \epsilon + \lambda(S)]$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{u_0}^{u_0+\epsilon} \rho(u) \|\varphi'(u)\| du &> \int_{u_0}^{u_0+\epsilon} \frac{d}{2} \|\varphi'(u)\| du > \int_{u_0}^{u_0+\epsilon} \rho(u + \lambda(S)) \|\varphi'(u)\| du \\ &= \int_{u_0+\lambda(S)}^{u_0+\epsilon+\lambda(S)} \rho(u) \|\varphi'(u)\| du. \end{aligned}$$

Como a primeira e a última integral são comprimentos de dois arcos opostos, temos uma contradição. Portanto,  $\gamma$  é um círculo de Minkowski. ■

**Observação 3.16.** O mesmo vale para uma curva com antilargura constante (isto é, a largura na antinorma) se considerarmos o raio da anticurvatura (ou seja, o inverso da curvatura normal).

### 3.7 Evolutas, Involutas e Paralela

Como temos a noção do círculo osculatório relacionado com a curvatura circular (e, claro, a noção de anticírculo osculatório relacionado com a curvatura normal), é natural definirmos e estudarmos a **evoluta** de uma dada curva regular (isto é, uma curva cujo campo tangente não se anula). As principais referências para esta seção são: [2], [4], [5] e [12].

Seja  $\gamma : [0, c] \rightarrow X$  uma curva regular suave cuja curvatura circular não se anula (então as curvaturas de Minkowski e normal também não se anulam). Suponhamos, por simplicidade, que  $\gamma$  esteja parametrizada pelo comprimento de arco  $s$  e assumamos que  $t(s)$  é a função tal que

$$\gamma'(s) = \frac{d\varphi}{dt}(t(s)),$$

onde  $t$  é o parâmetro pelo comprimento de arco do círculo unitário.

**Definição 3.16.** A **evoluta** de  $\gamma$  é definida como sendo a curva  $\xi : [0, c] \rightarrow X$  dada por

$$\xi(s) = \gamma(s) - \rho(s)\varphi(t(s)), \tag{3.52}$$

onde  $\rho(s) = k_c^{-1}(s)$  é o raio de curvatura de  $\gamma$  em  $\gamma(s)$ .

Em outras palavras, a evoluta de  $\gamma$  é a união de todos os seus centros de curvatura (isto é, centros de seus círculos osculatórios).

Vamos dar um exemplo para ilustrar a ideia.

**Exemplo 3.6** ([4], Exemplo 9.1). Consideremos o plano normado  $(\mathbb{R}^2, l_p)$  onde  $1 < p < +\infty$ . Seja  $q \in \mathbb{R}$  tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  e consideremos a parametrização  $t \in [0, 1] \mapsto (t^{1/p}, (1-t)^{1/p})$  da parte do círculo unitário que fica no primeiro quadrante (as outras partes são simples reflexões deste). Fazendo bastante cálculos mostra-se que a evoluta da parte do primeiro quadrante do círculo unitário em  $l_q$

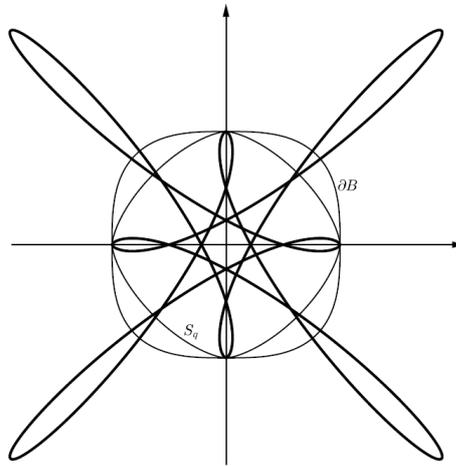
$$S_q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x|^q + |y|^q = 1\},$$

é a curva cujas coordenadas são

$$\begin{aligned} x(t) &= t^{1/q} - \left(\frac{p}{q}\right)^2 \frac{t^{p/q-1/q}}{(1-t)^{p/q-1/q+1}} \left(1 + \left(\frac{t}{1-t}\right)^{p/q}\right)^{1/p-2} \\ y(t) &= (1-t)^{1/q} - \left(\frac{p}{q}\right)^2 \frac{t^{p/q-1}}{(1-t)^{p/q}} \left(1 + \left(\frac{t}{1-t}\right)^{p/q}\right)^{1/p-2}, \end{aligned}$$

onde  $t \in (0, 1)$ , e tomamos limite para definir a evoluta nas extremidades do intervalo. Para obtermos a evoluta de todo o círculo em  $l_q$ , basta refletirmos a curva acima com relação aos eixos e com relação à origem. A Figura 3.10 ilustra essa evoluta para o caso  $p = 3$ .

**Figura 3.10:** A evoluta do círculo  $l_{\frac{3}{2}}$  na norma  $l_3$ .



Fonte: Concepts of curvatures in normed planes, 2018.

Ainda considerando a parametrização usual para a curva  $\gamma$  e para o círculo unitário, para cada  $s \in [0, c]$ , chamamos a reta

$$r \mapsto \gamma(s) + r\varphi(t(s))$$

de **reta normal esquerda** de  $\gamma$  em  $\gamma(s)$ .

Vale a pena dizer que Biberstein [5] e Craizer [12] definiram a evoluta de uma curva para ser a envoltória da família de retas normais esquerdas da curva. É fácil ver que as definições coincidem. Basta derivarmos (3.52),

$$\begin{aligned} \xi'(s) &= \gamma'(s) - \rho'(s)\varphi(t(s)) - t'(s)\rho(s)\frac{d\varphi}{dt}(t(s)) \\ &= \gamma'(s) - \rho'(s)\varphi(t(s)) - k_c(s)k_c^{-1}(s)\gamma'(s) \\ &= -\rho'(s)\varphi(t(s)). \end{aligned} \tag{3.53}$$

Então,  $\xi'(s) \perp_B \gamma'(s)$ . Em outras palavras, a reta tangente da evoluta em  $\xi(s)$  é exatamente a reta normal esquerda de  $\gamma$  em  $\gamma(s)$ .

Uma terceira definição equivalente para a evoluta de uma curva foi dada por Craizer [12] e vêm do ponto de vista da teoria de singularidades (ver [25]).

**Definição 3.17.** A função distância quadrada de  $\gamma$  para um ponto  $a \in X \setminus \{\gamma\}$  é definida por  $f(s) = \|\gamma(s) - a\|^2$ .

**Proposição 3.16.** O ponto  $a \in X \setminus \{\gamma\}$  encontra-se na reta normal esquerda de  $\gamma$  em  $s_0$  se e só se  $f'(s_0) = 0$ . Além disso,  $a$  é o centro de curvatura de  $\gamma$  em  $s_0$  se e só se  $f'(s_0) = f''(s_0) = 0$ .

**Demonstração:** Consideremos a função  $D_a : X \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $D_a(x) = \|x - a\|^2$ . Então as curvas de nível de  $D_a$  são os círculos centrados em  $a$ . Pelo Teorema 2.14, o núcleo da derivada de  $D_a$  em um ponto  $b \in X \setminus \{\gamma\}$  é dado pela direção tangente em  $b$  no círculo com centro em  $a$  e passando por  $b$ .

Como  $f(s) = D_a \circ \gamma(s)$ , então

$$f'(s) = dD_a(\gamma(s))\gamma'(s).$$

Logo,  $f'(s_0) = 0$  se e só se  $\gamma'(s_0)$  está na direção tangente ao círculo de centro  $a$  que passa por  $\gamma(s_0)$ . Mas isso é equivalente à  $\gamma(s_0) - a \perp_B \gamma'(s_0)$ . Portanto,  $\gamma(s_0) - a$  encontra-se na linha normal esquerda de  $\gamma$  em  $s_0$  se e só se  $f'(s_0) = 0$ . Conseqüentemente,  $a$  encontra-se na linha normal esquerda de  $\gamma$  em  $s_0$  se e só se  $f'(s_0) = 0$ .

Agora vamos assumir que  $f'(s_0) = 0$  (e conseqüentemente  $\gamma(s_0) - a \perp_B \gamma'(s_0)$ ) e provaremos que, nesse caso,  $f''(s_0) = 0$  se e somente se  $a$  é o centro de curvatura de  $\gamma$  em  $\gamma(s_0)$ . Como  $a$  não pertence a  $\gamma$ , podemos escrever

$$a = \gamma(s) - g(s)\varphi(\theta(s)), \tag{3.54}$$

onde  $g$  é uma função positiva e  $\theta$  é o mesmo parâmetro comprimento de arco  $t$ . Essa distinção ocorre para indicarmos que  $t(s)$  é a função tal que  $\gamma'(s) = \frac{d\varphi}{dt}(t(s))$  e a função  $\theta(s)$  é tal que  $\varphi(\theta(s))$  está na direção (orientada) de  $\gamma(s) - a$ . Derivando (3.54), temos

$$\gamma'(s) = g'(s)\varphi(\theta(s)) + g(s)\theta'(s)\frac{d\varphi}{d\theta}(\theta(s)). \tag{3.55}$$

Como  $\gamma'(s_0) = \frac{d\varphi}{dt}(t(s_0))$ , então  $\left\{ \varphi(t(s_0)), \frac{d\varphi}{dt}(t(s_0)) \right\}$  forma uma base para  $\mathbb{R}^2$  e vale que  $\gamma(s_0) - a \perp_B \gamma'(s_0)$ . Conseqüentemente,  $\theta(s_0) = t(s_0)$  e pela equação (3.55),

$$\begin{cases} g'(s_0) = 0 \\ g(s_0)\theta'(s_0) = 1 \end{cases}. \tag{3.56}$$

Derivando (3.55),

$$\gamma''(s) = g''(s)\varphi(\theta(s)) + 2\theta'(s)g'(s)\frac{d\varphi}{d\theta}(\theta(s)) + g(s)\theta''(s)\frac{d\varphi}{d\theta}(\theta(s)) + g(s)(\theta'(s))^2\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}(\theta(s)).$$

Usando as informações obtidas em (3.56), temos que

$$\gamma''(s_0) = g''(s_0)\varphi(t(s_0)) + g(s_0)\theta''(s_0)\frac{d\varphi}{dt}(t(s_0)) + \theta'(s_0)\frac{d^2\varphi}{dt^2}(t(s_0)). \tag{3.57}$$

Como  $\gamma'(s) = \frac{d\varphi}{dt}(t(s))$ , então

$$\gamma''(s_0) = k_c(s_0) \frac{d^2\varphi}{dt^2}(t(s_0)).$$

Como quaisquer dois vetores dentre  $\left\{ \varphi(t(s_0)), \frac{d\varphi}{dt}(t(s_0)), \frac{d^2\varphi}{dt^2}(s_0) \right\}$  formam uma base de  $\mathbb{R}^2$  e vale

$$k_c(s_0) \frac{d^2\varphi}{dt^2}(t(s_0)) = \gamma''(s_0) = g''(s_0)\varphi(t(s_0)) + g(s_0)\theta''(s_0) \frac{d\varphi}{dt}(t(s_0)) + \theta'(s_0) \frac{d^2\varphi}{dt^2}(t(s_0)),$$

então

$$g''(s_0) = 0 \Leftrightarrow \theta'(s_0) = k_c(s_0).$$

Observemos que valendo a equivalência acima, também vale que  $\theta''(s_0) = 0$  (essa informação será utilizada na demonstração da próxima proposição). Além disso,

$$a = \gamma(s) - g(s)\varphi(\theta(s)) \Rightarrow \gamma(s) - a = g(s)\varphi(\theta(s)) \Rightarrow g(s) = \|\gamma(s) - a\|, \forall s.$$

Portanto,  $f(s) = g^2(s)$ . Como  $g'(s_0) = 0$  e

$$f''(s) = 2g''(s)g(s) + 2(g'(s))^2,$$

então

$$f''(s_0) = 0 \Leftrightarrow g''(s_0) = 0.$$

Por outro lado,

$$\theta'(s_0) = k_c(s_0) \Leftrightarrow g(s_0)k_c(s_0) = 1 \Leftrightarrow g(s_0) = k_c^{-1}(s_0).$$

Portanto,

$$f''(s_0) = 0 \Leftrightarrow g''(s_0) = 0 \Leftrightarrow \theta'(s_0) = k_c(s_0) \Leftrightarrow g(s_0) = k_c^{-1}(s_0) \Leftrightarrow \|\gamma(s_0) - a\| = \rho(s_0),$$

ou seja,  $a$  é o centro de curvatura de  $\gamma$  em  $s_0$  se e só se  $f'(s_0) = f''(s_0) = 0$ . ■

Seguindo nessa direção, um ponto  $\gamma(s)$  de  $\gamma$  é dito **vértice** se  $k_c(s) \neq 0$  e  $k'_c(s) = 0$ . Um vértice é dito **vértice ordinário** se  $k''_c(s) \neq 0$ . Analogamente ao caso Euclidiano (ver [25]), temos o seguinte resultado.

**Proposição 3.17.** *Seja  $f(s) = \|\gamma(s) - a\|^2$  a função distância quadrada de  $\gamma$  com respeito à  $a$ . Então,*

$$f'(s_0) = f''(s_0) = f'''(s_0) = 0$$

*se e só se o ponto  $a$  é o centro de curvatura de  $\gamma$  em  $\gamma(s_0)$  e  $\gamma(s_0)$  é um vértice de  $\gamma$ .*

**Demonstração:** Pela Proposição 3.16, é suficiente assumirmos que  $a$  é o centro de curvatura de  $\gamma$  em  $\gamma(s_0)$  e mostrarmos que  $f'''(s_0) = 0$  se e só se  $k'_c(s_0) = 0$ . Usaremos a mesma notação da Proposição 3.16.

Vimos que no caso em que  $a$  é o centro de curvatura de  $\gamma$  em  $\gamma(s_0)$ , vale que

$$g'(s_0) = g''(s_0) = 0, \quad \theta(s_0) = t(s_0), \quad g(s_0)\theta'(s_0) = 1, \quad \theta'(s_0) = k_c(s_0), \quad \theta''(s_0) = 0.$$

Como

$$\gamma''(s) = k_c(s) \frac{d^2\varphi}{dt^2}(t(s))$$

e

$$\gamma''(s) = g''(s)\varphi(\theta(s)) + \theta'(s)g'(s)\frac{d\varphi}{d\theta}(\theta(s)) + g(s)\theta''(s)\frac{d\varphi}{d\theta}(\theta(s)) + g(s)(\theta'(s))^2\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}(\theta(s)),$$

então temos por um lado

$$\gamma'''(s) = k'_c(s)\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}(\theta(s)) + k_c(s)\theta'(s)\frac{d^3\varphi}{d\theta^3}(\theta(s))$$

e por outro lado

$$\begin{aligned} \gamma'''(s) &= g'''(s)\varphi(\theta(s)) + g''(s)\theta'(s)\frac{d\varphi}{d\theta}(\theta(s)) + g'(s)\theta''(s)\frac{d\varphi}{d\theta}(\theta(s)) + g(s)\theta'''(s)\frac{d\varphi}{d\theta}(\theta(s)) + \\ &+ g(s)\theta'(s)\theta''(s)\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}(\theta(s)) + 2g'(s)(\theta'(s))^2\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}(\theta(s)) + 2g(s)\theta'(s)\theta''(s)\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}(\theta(s)) + \\ &+ g(s)(\theta'(s))^3\frac{d^3\varphi}{d\theta^3}(\theta(s)) + 2\theta''(s)g'(s)\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}(\theta(s)). \end{aligned}$$

Portanto, usando as duas igualdades de  $\gamma'''$  em  $s_0$  e usando as relações em  $s_0$ , temos

$$k'_c(s_0)\frac{d^2\varphi}{dt^2}(t(s_0)) = g'''(s_0)\varphi(t(s_0)) + g(s_0)\theta'''(s_0)\frac{d\varphi}{dt}(t(s_0)).$$

Como quaisquer dois vetores do conjunto  $\left\{ \varphi(t(s_0)), \frac{d\varphi}{dt}(t(s_0)), \frac{d^2\varphi}{dt^2}(t(s_0)) \right\}$  formam uma base de  $\mathbb{R}^2$ , segue que

$$g'''(s_0) = 0 \Leftrightarrow k'_c(s_0) = 0.$$

Observemos que a equivalência acima também implica que  $\theta'''(s_0) = 0$  (essa informação será utilizada na próxima proposição). E como

$$f'''(s) = 2g'''(s)g(s) + 6g'(s)g''(s)$$

e  $g'(s_0) = g''(s_0) = 0$ , então

$$f'''(s_0) = 0 \Leftrightarrow g'''(s_0) = 0.$$

Portanto,

$$f'''(s_0) = 0 \Leftrightarrow g'''(s_0) = 0 \Leftrightarrow k'_c(s_0) = 0,$$

ou seja,

$$f'(s_0) = f''(s_0) = f'''(s_0) = 0$$

se e só se o ponto  $a$  é o centro de curvatura de  $\gamma$  em  $\gamma(s_0)$  e  $\gamma(s_0)$  é um vértice de  $\gamma$ . ■

No plano Euclidiano, um ponto  $\gamma(s_0)$  é um vértice ordinário de  $\gamma$  se e só se  $f'(s_0) = f''(s_0) = f'''(s_0) = 0$  e  $f^{(4)}(s_0) \neq 0$ . Em um plano normado, temos um resultado parecido, como veremos a seguir.

**Proposição 3.18.** *Seja  $\gamma(s_0)$  um vértice de  $\gamma$  e  $a \in X \setminus \{\gamma\}$  o centro de curvatura associado. Consideremos  $f(s) = \|\gamma(s) - a\|^2$ . Então,  $\gamma(s_0)$  é um vértice ordinário se e só se  $f'(s_0) = f''(s_0) = f'''(s_0) = 0$  e  $f^{(4)}(s_0) \neq 0$ .*

**Demonstração:** Se  $\gamma(s_0)$  é um vértice de  $\gamma$  e o ponto  $a$  é o centro de curvatura associado, então temos que

$$f'(s_0) = f''(s_0) = f'''(s_0) = 0,$$

pela Proposição 3.17. Queremos mostrar que se  $\gamma(s_0)$  é um vértice ordinário, então  $f^{(4)}(s_0) \neq 0$ . Para tanto, lembremos que sobre essas hipóteses, temos

$$g'(s_0) = g''(s_0) = g'''(s_0) = 0 = \theta''(s_0) = \theta'''(s_0), \quad \theta(s_0) = t(s_0), \quad g(s_0)\theta'(s_0) = 1, \quad \theta'(s_0) = k_c(s_0).$$

Derivando  $\gamma'''$  obtida na Proposição 3.17, temos por um lado

$$\begin{aligned} \gamma^{(4)}(s) &= k_c''(s) \frac{d^2\varphi}{d\theta^2}(\theta(s)) + 2k_c'(s)\theta'(s) \frac{d^3\varphi}{d\theta^3}(\theta(s)) + k_c(s)\theta''(s) \frac{d^3\varphi}{d\theta^3}(\theta(s)) + \\ &+ k_c(s)(\theta'(s))^2 \frac{d^4\varphi}{d\theta^4}(\theta(s)) \end{aligned}$$

e por outro lado,

$$\begin{aligned} \gamma^{(4)}(s) &= 2\theta'(s)g'''(s) \frac{d\varphi}{d\theta}(\theta(s)) + 2g''(s)\theta''(s) \frac{d\varphi}{d\theta}(\theta(s)) + 2g''(s)(\theta'(s))^2 \frac{d^2\varphi}{d\theta}(\theta(s)) + \\ &+ 2g'(s)\theta'''(s) \frac{d\varphi}{d\theta}(\theta(s)) + 6g'(s)\theta'(s)\theta''(s) \frac{d^2\varphi}{d\theta^2}(\theta(s)) + g(s)\theta^{(4)}(s) \frac{d\varphi}{d\theta}(\theta(s)) + \\ &+ 3g(s)\theta'(s)\theta'''(s) \frac{d^2\varphi}{d\theta^2}(\theta(s)) + 3g(s)(\theta''(s))^2 \frac{d^2\varphi}{d\theta^2}(\theta(s)) + g^{(4)}(s)\varphi(\theta(s)) + \\ &+ 2g'(s)(\theta'(s))^3 \frac{d^3\varphi}{d\theta^3}(\theta(s)) + 6g(s)(\theta'(s))^2\theta''(s) \frac{d^3\varphi}{d\theta^3}(\theta(s)) + g(s)(\theta'(s))^4 \frac{d^4\varphi}{d\theta^4}(\theta(s)). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} k_c''(s_0) \frac{d^2\varphi}{dt^2}(t(s_0)) + k_c^3(s_0) \frac{d^4\varphi}{dt^4}(t(s_0)) &= \gamma^{(4)}(s_0) = \\ &= g^{(4)}(s_0)\varphi(t(s_0)) + g(s_0)\theta^{(4)}(s_0) \frac{d\varphi}{dt}(t(s_0)) + (\theta'(s_0))^3 \frac{d^4\varphi}{dt^4}(t(s_0)), \end{aligned}$$

donde segue que,

$$k_c''(s_0) \frac{d^2\varphi}{dt^2}(t(s_0)) = g^{(4)}(s_0)\varphi(t(s_0)) + g(s_0)\theta^{(4)}(s_0) \frac{d\varphi}{dt}(t(s_0)).$$

Como quaisquer dois vetores dentre  $\left\{ \varphi(t(s_0)), \frac{d\varphi}{dt}(t(s_0)), \frac{d^2\varphi}{dt^2}(t(s_0)) \right\}$  formam uma base de  $\mathbb{R}^2$ , segue que

$$k_c''(s_0) \neq 0 \Leftrightarrow g^{(4)}(s_0) \neq 0.$$

Por fim, como

$$f^{(4)}(s) = 8g'(s)g''(s) + 6(g''(s))^2 + 2g(s)g^{(4)}(s)$$

e

$$g'(s_0) = g''(s_0) = g'''(s_0) = 0,$$

então

$$f^{(4)}(s_0) \neq 0 \Leftrightarrow g^{(4)}(s_0) \neq 0 \Leftrightarrow k_c''(s_0) \neq 0,$$

como queríamos. ■

Pela equação (3.53), temos que a evoluta de uma curva regular é regular, exceto nos pontos associados aos vértices de  $\gamma$ . Examinemos com mais cautela as singularidades da evoluta (isto é, os pontos onde  $\xi'(s) = 0$ ).

**Definição 3.18.** Uma curva  $\sigma : J \rightarrow X$  tem uma **cúspide ordinária** em  $t_0 \in J$  se  $\sigma'(t_0) = 0$  e se  $\sigma''(t_0)$  e  $\sigma'''(t_0)$  são linearmente independentes.

No plano Euclidiano, a evoluta tem cúspides ordinária em pontos correspondentes aos vértices ordinários de  $\gamma$  e isso também é verdade em um plano normado, como mostra a proposição a seguir.

**Proposição 3.19.** *Seja  $\gamma : [0, c] \rightarrow X$  uma curva regular suave e  $\xi : [0, c] \rightarrow X$  sua evoluta. Se  $\gamma(s_0)$  é um vértice ordinário de  $\gamma$ , então  $s_0$  é uma cúspide ordinária de  $\xi$ .*

**Demonstração:** Primeiramente, observemos que

$$\begin{aligned} \xi'(s) &= \rho'(s)\varphi(t(s)) \\ \xi''(s) &= \rho''(s)\varphi(t(s)) + \rho'(s)t'(s)\frac{d\varphi}{dt}(t(s)) \\ \xi'''(s) &= \rho'''(s)\varphi(t(s)) + 2\rho''(s)t'(s)\frac{d\varphi}{dt}(t(s)) + \rho'(s)t''(s)\frac{d\varphi}{dt}(t(s)) + \rho'(s)(t'(s))^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}(t(s)). \end{aligned}$$

Daí, se  $\gamma(s_0)$  é um vértice de  $\gamma$ , então  $k_c'(s_0) = t''(s_0) = 0$  e

$$\rho'(s_0) = -\frac{k_c'(s_0)}{k_c^2(s_0)} = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \xi'(s_0) &= 0 \\ \xi''(s_0) &= \rho''(s_0)\varphi(t(s_0)) \\ \xi'''(s_0) &= \rho'''(s_0)\varphi(t(s_0)) + 2\rho''(s_0)t'(s_0)\frac{d\varphi}{dt}(t(s_0)). \end{aligned}$$

Como  $\xi'''(s_0)$  tem uma componente na direção de  $\frac{d\varphi}{dt}(t(s_0))$  e  $\xi''(s_0)$  não o têm, então  $s_0$  é uma cúspide ordinária de  $\xi$ . ■

Agora queremos considerar as cúspides da evoluta de um ponto de vista geométrico. Para fazer isso, seja  $\gamma(s_0)$  um vértice ordinário de  $\gamma$ , e assumamos que  $s_0 \in (0, c)$ . Então sabemos que

$\xi'(s_0) = 0$ . Como  $\xi$  é a envoltória das retas normais esquerda de  $\gamma$ , segue que os limites

$$\lim_{s \rightarrow s_0^\pm} \frac{\xi'(s)}{\|\xi'(s)\|}$$

existem e apontam na direção de  $\varphi(t(s_0))$ . Por outro lado, observemos que

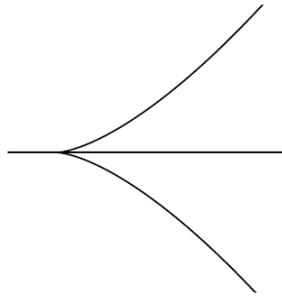
$$\left[ \xi'(s), \frac{d\varphi}{dt}(t(s_0)) \right] = -\rho'(s) \left[ \varphi(t(s)), \frac{d\varphi}{dt}(t(s_0)) \right].$$

Como  $\gamma(s_0)$  é um vértice ordinário, segue que  $\rho'(s)$  muda de sinal em  $s_0$ . Assim sendo,  $\left[ \xi'(s), \frac{d\varphi}{dt}(t(s_0)) \right]$  muda de sinal em  $s_0$ , ou seja,

$$\lim_{s \rightarrow s_0^+} \frac{\xi'(s)}{\|\xi'(s)\|} = - \lim_{s \rightarrow s_0^-} \frac{\xi'(s)}{\|\xi'(s)\|}.$$

O significado geométrico dessa mudança de sinal é que a evoluta muda sua orientação em uma cúspide ordinária (veja Figura 3.11).

**Figura 3.11:** Uma cúspide ordinária.



Fonte: Concepts of curvatures in normed planes, 2018.

Isso pode ser entendido através da equação (3.53), uma vez que o sinal de  $\rho'(s)$  muda quando passamos por uma cúspide ordinária. Como consequência, temos aqui, como no caso Euclidiano, que o comprimento da evoluta de uma curva fechada com curvatura positiva é zero.

De fato, como

$$\rho'(s) = -\frac{k'_c(s)}{k_c^2(s)}$$

e  $k_c(s) > 0$  para todo  $s$ , então

$$\|\xi'(s)\| = \|-\rho'(s)\varphi(t(s))\| = |\rho'(s)| = -\rho'(s).$$

Daí,

$$\int_0^c -\rho'(s)ds = -\rho(c) + \rho(0) = 0.$$

Isso significa que a soma dos dois comprimentos separados pela cúspide são iguais.

**Definição 3.19.** Uma curva  $\eta : [0, c] \rightarrow X$  é dita **involuta** de uma curva  $\gamma : [0, c] \rightarrow X$  se  $\gamma$  é a evoluta de  $\eta$ .

Para encontrar as involutas de uma curva em um plano normado, Balestro, Martini e Shonoda [4] seguiram [12]. Suponhamos  $\gamma(s)$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e, para evitar qualquer confusão, consideremos  $u$  o parâmetro comprimento de arco do círculo unitário. Seja  $u(s) : [0, c] \rightarrow [0, l(\gamma)]$  tal que  $\gamma'(s) = \varphi(u(s))$  para cada  $s \in [0, c]$ . Afirmamos que  $\eta : [0, c] \rightarrow X$  dada por

$$\eta(s) = \gamma(s) + (a - s)\varphi(u(s)), \quad (3.58)$$

onde  $a \in \mathbb{R}$ , é uma involuta de  $\gamma$ . Para verificarmos isso, notemos que

$$\eta'(s) = \gamma'(s) - \varphi(u(s)) + (a - s)\frac{d}{ds}\varphi(u(s)) = (a - s)\frac{d}{ds}\varphi(u(s)).$$

Então,  $(a - s)$  é o raio de curvatura de  $\eta$  em  $\eta(s)$ . Mais ainda, a direção normal esquerda de  $\eta$  em  $\eta(s)$  é  $\varphi(u(s))$ . Por definição, temos que a evoluta  $\xi_\eta$  de  $\eta$  é dada por

$$\xi_\eta(s) = \eta(s) - (a - s)\varphi(u(s)) = \gamma(s).$$

A Proposição a seguir mostra que todas as involutas de  $\gamma$  são parametrizadas pela equação (3.58) para algum  $a \in \mathbb{R}$ .

**Proposição 3.20.** *Seja  $\gamma : [0, c] \rightarrow X$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e seja  $u(s) : [0, c] \rightarrow [0, l(S)]$  tal que  $\gamma'(s) = \varphi(u(s))$  para cada  $s \in [0, c]$ . Então qualquer involuta de  $\gamma$  deve estar na forma (3.58) para algum  $a \in \mathbb{R}$ .*

**Demonstração:** Seja  $\eta$  uma involuta de  $\gamma$ . Como  $\gamma$  é a envoltória das retas normais esquerda de  $\eta$ , segue que  $\gamma'(s) \perp_B \eta'(s)$  para qualquer  $s \in [0, c]$ . Portanto,  $\eta'(s) = f(s)\frac{d}{ds}\varphi(u(s))$  para alguma função  $f : [0, c] \rightarrow \mathbb{R}$ . A evoluta  $\gamma$  de  $\eta$  é então dada por

$$\gamma(s) = \eta(s) - f(s)\varphi(u(s)).$$

Derivando essa última igualdade,

$$\varphi(u(s)) = \gamma'(s) = \eta'(s) - f'(s)\varphi(u(s)) - f(s)\frac{d}{ds}\varphi(u(s)) = -f'(s)\varphi(u(s)),$$

e portanto,  $f'(s) = -1$ , ou seja,  $f(s) = a - s$  para algum  $a \in \mathbb{R}$ . Logo,

$$\eta(s) = \gamma(s) + (a - s)\varphi(u(s)).$$

■

**Definição 3.20.** Seja  $\gamma$  uma curva regular. Como de costume, assumamos que  $s$  é o parâmetro pelo comprimento de arco de  $\gamma$  e que  $\gamma'(s) = \frac{d\varphi}{dt}(t(s))$ . A curva obtida movendo todos os pontos de  $\gamma$  à mesma distância ao longo de cada campo normal esquerdo é chamada de **paralela esquerda** de  $\gamma$ .

Formalmente, uma curva paralela esquerda de  $\gamma$  é uma curva da forma

$$\gamma_d(s) = \gamma(s) + d\varphi(t(s)),$$

### 3.7. EVOLUTAS, INVOLUTAS E PARALELA

---

para alguma constante  $d \in \mathbb{R}$ . Observemos que, todas as involutas de uma determinada curva são paralelas esquerda da curva. Além disso, como

$$\gamma'_d(s) = (1 + dk_c(s))\gamma'(s),$$

temos que uma curva paralela esquerda de  $\gamma$  é singular quando  $d = -k_c^{-1}(s)$ . Segue daí que a evoluta de  $\gamma$  é exatamente a curva cujos pontos são as singularidades da paralela esquerda de  $\gamma$  (como no caso Euclidiano, veja [25]).

É claro que nossa pequena teoria acima pode ser completamente analisada para a antinorma, apenas substituindo a curvatura circular pela curvatura normal e o campo de reta normal esquerda pelo campo de reta normal direita.

## Capítulo 4

# A evolução de Curvas Planas pela Curvatura de Minkowski

Na década de 80, Gage e Hamilton [19] estudaram a evolução de curvas planas pela curvatura Euclidiana. Eles provaram que no plano Euclidiano, o fluxo pela curvatura Euclidiana converge homoteticamente para o círculo Euclidiano. Gage [20], em 1993, também estudou a evolução de curvas planas pela curvatura normal em planos de Minkowski e, como a curvatura circular é a curvatura normal na antinorma, ele também estudou a evolução de curvas planas pela curvatura circular. Em particular, Gage provou que o fluxo pela curvatura normal converge homoteticamente para o anticírculo de Minkowski. Nosso objetivo neste capítulo é mostrar que o fluxo pela curvatura de Minkowski converge para as curvas de curvatura de Minkowski constante, isto é, para as curvas homotéticas a curva centróide da bola unitária. Esta é uma contribuição nova na literatura.

Levi [14] exibiu um estudo sobre a evolução de curvas planas pela curvatura Euclidiana usando fortemente EDP, diferente de Gage e Hamilton [19] que utilizaram a desigualdade isoperimétrica. Deste modo, como a curva centróide da bola unitária não resolve o problema isoperimétrico em planos normados, iremos seguir a abordagem de Levi [14].

As referências utilizadas nessa seção são: [14], [15], [16], [17], [19], [20], [26], [29], [37] e [38].

### 4.1 Preliminares

Nesta seção, apresentaremos ferramentas necessárias para as seções seguintes. Iremos iniciar com alguns exemplos de espaços vetoriais normados que serão utilizados ao longo do capítulo.

1. Seja  $C^0(\mathbb{T})$  o espaço vetorial das funções contínuas  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ , onde  $\mathbb{T} = [0, 2\pi]$ . Então

$$\|f\|_{C^0(\mathbb{T})} = \sup_{\theta \in \mathbb{T}} |f(\theta)|$$

define uma norma em  $C^0(\mathbb{T})$ .

2. Se  $k \geq 1$  e  $C^k(\mathbb{T})$  é o subespaço de  $C^0(\mathbb{T})$  formado pelas funções de classe  $C^k$ , então

$$\|f\|_{C^k(\mathbb{T})} = \sum_{i=0}^k \|f^{(i)}\|_{C^0(\mathbb{T})}$$

define uma norma em  $C^k(\mathbb{T})$ .

3. Sejam  $0 < \alpha < 1$  e  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ . Se  $\theta_0 \in \mathbb{T}$ , dizemos que  $f$  é **Hölder-contínua** com expoente  $\alpha$  em  $\theta_0$  se a quantidade

$$[[f]]_{\alpha;\theta_0} = \sup_{\theta \neq \theta_0} \frac{|f(\theta) - f(\theta_0)|}{|\theta - \theta_0|^\alpha}$$

é finita. Se isso vale para qualquer  $\theta_0 \in \mathbb{T}$ , diremos que  $f$  é de classe  $C^\alpha$ . Definimos então

$$[[f]]_{C^\alpha(\mathbb{T})} = \sup_{\theta \neq \theta'} \frac{|f(\theta) - f(\theta')|}{|\theta - \theta'|^\alpha},$$

e o espaço vetorial formado pelas funções  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  tais que  $[[f]]_{C^\alpha(\mathbb{T})} < +\infty$  é denotado por  $C^\alpha(\mathbb{T})$ . Mais ainda,

$$\|f\|_{C^\alpha(\mathbb{T})} = \|f\|_{C^0(\mathbb{T})} + [[f]]_{C^\alpha(\mathbb{T})}$$

define uma norma em  $C^\alpha(\mathbb{T})$ . Além disso, para  $k \geq 1$ , seja  $C^{k+\alpha}(\mathbb{T})$  o subespaço de  $C^k(\mathbb{T})$  constituído pelas funções cuja derivada de ordem  $k$  é de classe  $C^\alpha$ . Então

$$\|f\|_{C^{k+\alpha}(\mathbb{T})} = \|f\|_{C^k(\mathbb{T})} + [[f]]_{C^\alpha(\mathbb{T})}$$

define uma norma em  $C^{k+\alpha}(\mathbb{T})$ .

4. No cilindro  $[0, T) \times \mathbb{T}$ , introduzimos a **distância parabólica**

$$d_p((t_1, \theta_1), (t_0, \theta_0)) = (|t_1 - t_0| + (\theta_1 - \theta_0)^2)^{1/2},$$

que pode ser usada para definir espaços de Hölder para funções no cilindro. Com efeito, se  $0 < \alpha < 1$ ,  $u : [0, T) \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  e  $(t_0, \theta_0) \in [0, T) \times \mathbb{T}$ , dizemos que  $u$  é Hölder-contínua com expoente  $(\alpha/2, \alpha)$  em  $(t_0, \theta_0)$  se a quantidade

$$[[u]]_{(\alpha/2, \alpha); (t_0, \theta_0)} = \sup_{(t, \theta) \neq (t_0, \theta_0)} \frac{|u(t, \theta) - u(t_0, \theta_0)|}{d_p((t, \theta), (t_0, \theta_0))^\alpha}$$

é finita. Se isto vale para qualquer  $(t_0, \theta_0) \in [0, T) \times \mathbb{T}$ , diremos que  $u$  é de classe  $C^{\alpha/2, \alpha}$ . Definimos então

$$[[u]]_{C^{\alpha/2, \alpha}([0, T) \times \mathbb{T})} = \sup_{(t_1, \theta_1) \neq (t_2, \theta_2)} \frac{|u(t_1, \theta_1) - u(t_2, \theta_2)|}{d_p((t_1, \theta_1), (t_2, \theta_2))^\alpha}$$

e o espaço vetorial formado pelas funções  $u : [0, T) \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  tais que  $[[u]]_{C^{\alpha/2, \alpha}([0, T) \times \mathbb{T})} < +\infty$  é denotado por  $C^{\alpha/2, \alpha}([0, T) \times \mathbb{T})$ . Mais ainda,

$$\|u\|_{C^{\alpha/2, \alpha}([0, T) \times \mathbb{T})} = \|u\|_{C^0([0, T) \times \mathbb{T})} + [[u]]_{C^{\alpha/2, \alpha}([0, T) \times \mathbb{T})}$$

define uma norma em  $C^{\alpha/2, \alpha}([0, T) \times \mathbb{T})$ . Além disso, de maneira análoga ao item 3, definimos para  $k \geq 1$  e  $0 \leq \alpha < 1$  o espaço  $C^{(k+\alpha)/2, k+\alpha}([0, T) \times \mathbb{T})$  com a respectiva norma  $\|\cdot\|_{C^{(k+\alpha)/2, k+\alpha}([0, T) \times \mathbb{T})}$ .

**Teorema 4.1** ([26], Teorema 1). (*Ascoli-Arzelà*) Se  $k+\alpha < k'+\alpha'$  então a inclusão  $C^{k'+\alpha'}(\mathbb{T}) \hookrightarrow C^{k+\alpha}(\mathbb{T})$  é compacta.

Seja  $F : [0, +\infty) \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função que suporemos suave em cada um de seus argumentos. Nas próximas seções será necessário analisarmos o comportamento local e global (no tempo) de soluções de equações diferenciais do tipo

$$u_t = u_{\theta\theta} + F(t, u(\theta), u_{\theta}(\theta)). \quad (4.1)$$

Tais equações são denominadas **quase-lineares** pois as não linearidades concentram-se nas derivadas até primeira ordem de  $u$  e não afetam  $u_{\theta\theta}$ .

Consideremos o PVI

$$\begin{cases} u_t = u_{\theta\theta} + F(t, u(\theta), u_{\theta}(\theta)) \\ u(0, \theta) = g(\theta) \end{cases}, \quad (4.2)$$

onde  $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  é suave.

**Teorema 4.2** ([14], Teorema 2.1.1). *Se  $F$  e  $g$  são ambas suaves, então existem  $T > 0$  e uma aplicação  $u \in C^0([0, T] \times \mathbb{T}) \cap C^\infty((0, +\infty) \times \mathbb{T})$  que satisfaz (4.1) identicamente em  $(0, T) \times \mathbb{T}$ . Mais ainda,  $u$  é uma solução do PVI (4.2) no sentido de condição inicial*

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \|u(t, \cdot) - g(\cdot)\|_{C^\infty(\mathbb{T})} = 0. \quad (4.3)$$

*Finalmente, se existem  $T' > 0$  e  $v \in C^0([0, T'] \times \mathbb{T}) \cap C^\infty((0, T') \times \mathbb{T})$  solução de (4.2), então  $u \equiv v$  em  $[0, \bar{T})$ ,  $\bar{T} = \min \{T, T'\}$ , isto é,  $u$  é única.*

**Proposição 4.1.** *Seja  $u \in C^0([0, T] \times \mathbb{T}) \cap C^\infty((0, T) \times \mathbb{T})$  uma solução local de (4.2) e suponhamos que para cada  $k \geq 0$  e  $0 < \alpha < 1$  existe  $C_{k, \alpha} > 0$ , que depende de  $k$  e  $\alpha$ , mas não de  $T$ , tal que*

$$\|u\|_{C^{(k+\alpha)/2, k+\alpha}([0, T] \times \mathbb{T})} \leq C_{k, \alpha}. \quad (4.4)$$

*Então  $u$  estende-se unicamente a uma solução global.*

**Demonstração:** Suponhamos que  $u$  não se estende unicamente a uma solução global. Seja  $T^* < +\infty$  o tempo maximal de definição de  $u$ . Pelo Teorema 4.1, as estimativas (4.4) implicam que, quando  $t \rightarrow T^*$ ,  $u(t, \cdot)$  converge em  $C^\infty(\mathbb{T})$  para uma função que denotaremos por  $u(T^*, \cdot)$ , de modo que na verdade temos uma solução em  $[0, T^*]$ . Podemos então, usando o Teorema 4.2, resolver o PVI (4.2) com dado inicial  $u(T^*, \cdot)$  e encontrar uma solução local  $v \in C^0([T^*, T^* + \eta] \times \mathbb{T}) \cap C^\infty((T^*, T^* + \eta) \times \mathbb{T})$ ,  $\eta > 0$ . Por (4.3),

$$\lim_{t \rightarrow T^*} \|v(t, \cdot) - u(T^*, \cdot)\|_{C^\infty(\mathbb{T})} = 0,$$

de modo que a justaposição de  $u$  e  $v$  define uma solução de (4.2) em  $[0, T^* + \eta)$ . Isso contradiz a hipótese de  $T^*$  ser o tempo maximal. ■

Agora consideremos o PVI

$$\begin{cases} u_t = D(t, \theta)u_{\theta\theta} + E(t, \theta)u_\theta + F(t, \theta)u + G(t, \theta) \\ u(0, \theta) = g(\theta) \end{cases} \quad (4.5)$$

que suporemos ser **uniformemente parabólico** no sentido que existem  $0 < \lambda < \Lambda$  tais que

$$\lambda \leq D(t, x) \leq \Lambda, \quad (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}.$$

*Notação:*  $U_T = [0, T] \times \mathbb{T}$ ,  $T > 0$ .

**Teorema 4.3.** (*Estimativas de Schauder*) Suponhamos que  $G \in C^{\alpha/2, \alpha}(U_T)$ ,  $g \in C^{2+\alpha}(\mathbb{T})$  e

$$\|D\|_{C^{\alpha/2, \alpha}(U_T)} + \|E\|_{C^{\alpha/2, \alpha}(U_T)} + \|F\|_{C^{\alpha/2, \alpha}(U_T)} \leq M,$$

para algum  $M > 0$ . Então existe  $C = C(\alpha, M, \lambda, \Lambda) > 0$  tal que

$$\|u\|_{C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}(U_T)} \leq C \left( \|u\|_{C^0(U_T)} + \|g\|_{C^{2+\alpha}(\mathbb{T})} + \|G\|_{C^{\alpha/2, \alpha}(U_T)} \right), \quad (4.6)$$

para qualquer  $u \in C^0(U_T)$  solução de (4.5).

Além disso, se  $G \in C^{(k+\alpha)/2, k+\alpha}(U_T)$ ,  $g \in C^{k+2+\alpha}(\mathbb{T})$  e

$$\|D\|_{C^{(k+\alpha)/2, k+\alpha}(U_T)} + \|E\|_{C^{(k+\alpha)/2, k+\alpha}(U_T)} + \|F\|_{C^{(k+\alpha)/2, k+\alpha}(U_T)} \leq M_k,$$

para  $k \geq 1$ , então existe  $C = C(k, \alpha, M_k, \lambda, \Lambda) > 0$  tal que

$$\|u\|_{C^{(k+2+\alpha)/2, k+2+\alpha}(U_T)} \leq C \left( \|u\|_{C^0(U_T)} + \|g\|_{C^{k+2+\alpha}(\mathbb{T})} + \|G\|_{C^{(k+\alpha)/2, k+\alpha}(U_T)} \right), \quad (4.7)$$

para qualquer  $u \in C^0(U_T)$  solução de (4.5).

**Demonstração:** A demonstração destas estimativas é bastante técnica. Na seção 2.3 de [14] existe a estratégia a ser adotada para se demonstrar este resultado tendo como referência auxiliar a seção 3.8 de [17]. ■

**Observação 4.1.** Chamemos a atenção para o fato de  $C = C(\alpha, M, \lambda, \Lambda)$  e  $C = C(k, \alpha, M_k, \lambda, \Lambda)$  dependerem das constantes explicitadas mas não de  $T$  ou  $u$ .

**Teorema 4.4.** (*Estimativas de De Giorgi-Nash*) Seja  $u \in C^\infty(U_T)$  uma solução suave da equação

$$u_t = a(t, \theta)u_{\theta\theta} + b(t, \theta)u_\theta + d(t, \theta), \quad (4.8)$$

onde supomos que (4.8) é uniformemente parabólica, ou seja, existem  $0 < \lambda < \Lambda$  tais que

$$\lambda \leq a(t, \theta) \leq \Lambda,$$

para  $(t, \theta) \in [0, T] \times \mathbb{T}$ , e que vale

$$\|b\|_{C^0(U_T)} + \|d\|_{C^0(U_T)} \leq C'.$$

Admitamos ainda que

$$\|u\|_{C^0(U_T)} \leq C.$$

Então existem  $0 < \alpha < 1$  e  $\tilde{C} > 0$ , dependendo somente de  $\lambda, \Lambda, C$  e  $C'$ , mas não de  $T$ , tal que

$$\|u\|_{C^{\alpha/2, \alpha}(U_T)} \leq \tilde{C}. \quad (4.9)$$

**Demonstração:** Semelhante as estimativas de Schauder, a demonstração deste resultado é bastante técnica e pode ser encontrada em [29]. ■

Seja  $\gamma$  uma curva convexa. Então  $\gamma$  delimita um subconjunto do plano, digamos  $K$ , que é convexo. Neste caso, definimos para  $\delta > 0$ ,

$$K_\delta = \bigcup_{p \in K} \{q \in \mathbb{R}^2; |q - p| \leq \delta\}.$$

A **distância de Hausdorff** (ver mais em [16], página 60) entre convexos  $K^{(1)}$  e  $K^{(2)}$  é definida por

$$d_H(K^{(1)}, K^{(2)}) = \inf \left\{ \delta > 0; K^{(1)} \subset K_\delta^{(2)} \text{ e } K^{(2)} \subset K_\delta^{(1)} \right\}.$$

**Teorema 4.5** ([16], pág 64). (*Teorema de seleção de Blaschke*) *Seja  $\{K^{(i)}\}$  uma sequência de subconjuntos compactos e convexos de  $\mathbb{R}^2$  com a propriedade que  $K^{(i)} \subset D$ , para qualquer  $i$ , onde  $D$  é limitado. Então existe uma subsequência de  $\{K^{(i)}\}$  que converge, na distância de Hausdorff, para algum convexo compacto  $K \subset \mathbb{R}^2$ .*

Seja

$$\mathcal{L}u = \mathcal{F}(t, \theta, u, u_\theta, u_{\theta\theta}) - u_t$$

um operador não-linear, onde

$$\mathcal{F} : [0, T) \times \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}(t, \theta, u, p, q),$$

é suave em seus argumentos. Diremos que  $\mathcal{L}$  é parabólico em  $[0, T) \times \mathbb{T}$  com respeito a  $u : [0, T) \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ , se vale

$$\mathcal{F}_q(t, \theta, u, u_\theta, u_{\theta\theta}) > 0$$

em  $[0, T) \times \mathbb{T}$ .

**Teorema 4.6.** *Suponhamos que  $u$  é solução de  $\mathcal{L}u = H$  em  $[0, T) \times \mathbb{T}$  com  $u(0, \cdot) = g(\cdot)$ . Sejam ainda  $v$  e  $V$  satisfazendo*

$$\mathcal{L}V \leq H \leq \mathcal{L}v$$

*em  $[0, T) \times \mathbb{T}$  e suponhamos que  $\mathcal{L}$  é parabólico em  $[0, T) \times \mathbb{T}$  com respeito a qualquer função da forma  $\eta u + (1 - \eta)v$  ou  $\eta u + (1 - \eta)V$ , com  $0 \leq \eta \leq 1$ . Assumamos também que,  $v(0, \theta) \leq g(\theta) \leq V(0, \theta)$ ,  $\theta \in \mathbb{T}$ . Então,*

$$v \leq u \leq V$$

*em  $[0, T) \times \mathbb{T}$ .*

**Demonstração:** Este resultado pode ser encontrado no Apêndice C de [14], onde faz-se necessário o uso do princípio do máximo parabólico que pode ser encontrado em [37]. ■

**Teorema 4.7** ([38], Teorema 3.5). (*Desigualdade de Hölder*) Sejam  $1 < p, q < +\infty$  com  $1/p + 1/q = 1$ . Sejam  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  funções com  $f \in L^p$  e  $g \in L^q$ . Então

$$\left| \int_D f(x)g(x)dx \right| \leq \left( \int_D |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left( \int_D |g(x)|^q dx \right)^{1/q}.$$

**Proposição 4.2** ([38], Teorema 3.3). (*Desigualdade de Jensen*) Seja  $\varphi : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  convexa e  $f : K \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mensurável no compacto  $K$ , com  $f(x) \in (a, b)$ , para todo  $x \in K$ . Então vale a desigualdade:

$$\varphi \left( \int_K f(x)dx \right) \leq \frac{1}{\lambda(K)} \int_K \varphi(f(x))dx,$$

onde  $\lambda(K)$  é a medida de Lebesgue de  $K \subset \mathbb{R}$ .

**Teorema 4.8** ([15]). Considere a equação

$$u_{\theta\theta} + u - \frac{a(\theta)}{u} = 0 \tag{4.10}$$

em  $\mathbb{R}$ . Se  $a(\theta)$  é uma função positiva, contínua e  $\pi$ -periódica em  $\mathbb{R}$ , então existe uma única solução  $2\pi$ -periódica de (4.10).

**Proposição 4.3** ([19], Teorema 4.3.3). (*Desigualdade de Wirtinger*) Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^1$ , com  $f(a) = f(b) = 0$  e  $b - a \leq \pi$ , então vale:

$$\int_a^b f^2 d\theta \leq \int_a^b \left( \frac{df}{d\theta} \right)^2 d\theta.$$

## 4.2 O fluxo pela curvatura de Minkowski

**Definição 4.1.** Seja  $\gamma : I \rightarrow X$  uma curva fechada. Uma variação de  $\gamma$  é uma aplicação suave  $Z : (-\delta, \delta) \times I \rightarrow X$  satisfazendo:

1.  $Z(0, u) = \gamma(u)$ , para qualquer  $u \in I$ ;
2. Para qualquer  $t \in (-\delta, \delta)$ , a aplicação que a cada  $u \in I$  associa  $Z(t, u)$  é uma curva fechada regular.

Sendo assim, uma variação descreve uma família a um parâmetro, no caso  $t \in (-\delta, \delta) \mapsto Z(t, \cdot)$ , de curvas. É instrutivo pensar em  $t$  como o tempo ao longo do qual  $\gamma$  evolui.

Para determinarmos a velocidade de evolução de  $\gamma$  ao longo de  $Z$ , basta derivarmos  $Z$  em relação a  $t$ . Derivando esta curva em relação a  $t$ , obtemos a velocidade com que as curvas da variação evoluem.

Se  $T$  e  $N$  são, respectivamente, os vetores tangente e normal direito das curvas da variação, então podemos descrever a variação através da lei de evolução

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = aN + bT. \quad (4.11)$$

Aqui  $a$  e  $b$  são funções de  $(t, u)$  que representam as velocidades de evolução nas direções normal e tangente, respectivamente.

Iremos deformar a curva na direção do vetor curvatura de Minkowski  $f(\theta)k_m N$ , onde  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  é solução do PVI:

$$\begin{cases} f_{\theta\theta} - \frac{2f_\theta}{p} \frac{dp}{d\theta} + \left( -\frac{1}{p} \frac{d^2 p}{d\theta^2} + \frac{2}{p^2} \left( \frac{dp}{d\theta} \right)^2 + 1 \right) f = p^4 \\ f(0) = f(\pi), f_\theta(0) = f_\theta(\pi) \end{cases}, \quad (4.12)$$

lembrando que  $p$  é a função que satisfaz (3.24).

Isso dá origem ao **fluxo pela curvatura de Minkowski**

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = f k_m N, \quad (4.13)$$

que será nosso objeto de estudo a partir de agora. Observemos que  $\theta = \theta(s_t)$  devido a (3.28).

Vamos pensar em (4.13) como um problema de valor inicial, ou seja, começaremos com uma curva fechada  $\gamma$  e tentaremos encontrar uma aplicação  $Z : [0, T) \times I \rightarrow X$  satisfazendo (4.13) e  $Z(0, \cdot) = \gamma(\cdot)$ . Noutras palavras, estudaremos o fluxo determinado pelo PVI:

$$\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial t} = f k_m N \\ Z(0, \cdot) = \gamma(\cdot) \end{cases}. \quad (4.14)$$

Será conveniente definir, neste contexto,  $\gamma^{(t)}(\cdot) = Z(t, \cdot)$  de forma que  $\gamma^{(0)} = \gamma$ .

**Observação 4.2.** Na Seção 3.4, estudamos o problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} y_{\theta\theta} + y = p^3 \\ y(0) = y(\pi), y_\theta(0) = y_\theta(\pi) \end{cases}$$

e verificamos que sua solução é dada por

$$y(\theta) = \frac{1}{2} \int_\theta^{\theta+\pi} \text{sen}(u - \theta) p^3(u) du.$$

Deste modo, a solução deste problema é positiva para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ . A solução de (4.12) é dada por  $f = py$ . Como  $p$  é uma função positiva para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ , segue que  $f > 0$  para todo  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

As questões que surgem são:

1. O problema (4.14) possui uma solução local no tempo, isto é, existe  $\delta > 0$  tal que (4.14) terá solução  $Z : [0, \delta) \times \mathbb{T} \rightarrow X$ ? Se este for o caso, esta solução é única?

2. Se as perguntas acima tiverem respostas positivas, é imediato que existe uma única solução maximal definida em  $t \in [0, T^*)$ . Como devido a seu caráter não-linear, (4.14) em geral não pode ser resolvida explicitamente para dados iniciais arbitrários, é natural questionar ao menos sobre o que acontece com  $\gamma^{(t)}$  quando  $t \rightarrow T^*$ ? Dito de outro modo, qual é o comportamento assintótico das soluções de (4.14)?

Nosso objetivo é estender para a curvatura de Minkowski um dos mais belos resultados da Geometria Diferencial nas últimas décadas devido a Gage e Hamilton [19], que oferece uma resposta perfeitamente satisfatória às questões acima.

**Teorema 4.9.** *Seja  $\gamma$  uma curva estritamente convexa. Então o fluxo pela curvatura de Minkowski (4.14) contrai  $\gamma$  a um ponto em tempo finito igual a  $T^* = \frac{A_0}{2A(R)}$ , onde  $A_0$  é a área de  $\gamma$  e  $2A(R) = \int_{\mathbb{T}} fp^2 d\theta$ , a curva permanecendo simples e estritamente convexa ao longo da contração. Mais ainda, se para cada  $t \in [0, T^*)$  aplicarmos uma homotetia a  $\gamma^{(t)}$  de modo a obter uma curva  $\Gamma^{(t)}$  que possua a mesma área que  $\gamma$ , então  $\Gamma^{(t)}$  converge em  $C^\infty$  para uma curva homotética a curva centróide da bola unitária de mesma área que  $\gamma$ .*

Uma demonstração deste resultado será apresentada nas próximas seções.

### 4.3 Existência de soluções

Na seção anterior, introduzimos o fluxo pela curvatura de Minkowski

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = fk_m N, \quad (4.15)$$

onde  $Z = Z(t, u) : [0, T^*) \times I \rightarrow X$  é uma família a um parâmetro de curvas fechadas no plano,  $k_m = k_m(t, u)$  e  $N = N(t, u)$  são a curvatura de Minkowski e o vetor normal direito de cada uma destas curvas, respectivamente, e  $f$  é solução de (4.12).

O propósito desta seção é iniciar a análise do comportamento assintótico de soluções de (4.15) correspondentes às primeiras etapas da demonstração do Teorema 4.9.

**Observação 4.3.** Quando a curva é estritamente convexa,  $k_e > 0$ . Como  $k_e = \frac{d\theta}{ds_e} > 0$ , então  $\theta \in \mathbb{T}$  é um parâmetro regular para a curva, isto é,  $Z_\theta$  nunca se anula. A partir de agora, entenderemos por curva convexa uma curva que é fechada, regular e estritamente convexa.

Estudaremos então soluções  $Z = Z(t, \theta) : [0, T^*) \times \mathbb{T} \rightarrow X$  de

$$Z_t = aN, \quad (4.16)$$

onde para futura referência suporemos que  $a$  é uma função arbitrária de  $(t, \theta)$  e que depende da curva  $Z$ .

Por simplicidade, diferente da Seção 3.3, iremos denotar por  $h$  a função suporte Euclidiana de  $Z(t, \cdot)$  e será conveniente utilizar a outra definição de  $h$ , onde  $h = \langle Z, -N_e \rangle$ . É claro que esta definição coincide com a definição dada na Seção 3.3.

Pela equação (5.38) de [14],

$$h_{\theta\theta}(\theta) + h(\theta) = \frac{1}{k_e(s_e)}. \quad (4.17)$$

### 4.3. EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES

Como por (3.32) vale  $k_m(s) = p^3(\theta(s))k_e(s_e(s))$ , então

$$h_{\theta\theta}(\theta) + h(\theta) = \frac{p^3(\theta)}{k_m(s)}. \quad (4.18)$$

Esta equação será muito importante na análise de (4.15).

**Proposição 4.4.** *Uma função positiva de classe  $C^1$  e  $2\pi$ -periódica  $k_m$  representa a função curvatura de Minkowski de uma curva plana, simples, fechada, estritamente convexa de classe  $C^2$  se e somente se*

$$\int_0^{2\pi} \frac{p^3 \cos \theta}{k_m} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{p^3 \operatorname{sen} \theta}{k_m} d\theta = 0.$$

**Demonstração:** Suponhamos primeiro que  $k_m$  seja a função curvatura de Minkowski de uma curva com as características mencionadas. Uma vez que a curva é fechada, vale que

$$\int_Z T(s) ds = 0.$$

Isso significa por (3.28) que

$$\int_Z p(\theta(s)) \cos \theta(s) ds = \int_Z p(\theta(s)) \operatorname{sen}(\theta(s)) ds = 0,$$

e por (3.30), fazendo uma mudança de variável,

$$\int_0^{2\pi} \frac{p^3 \cos \theta}{k_m} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{p^3 \operatorname{sen} \theta}{k_m} d\theta = 0.$$

Agora, dada uma função  $k_m$  conforme o enunciado da proposição, a curva associada (isto é, aquela cuja função curvatura é  $k_m$ ), a menos de translação, fica inteiramente determinada por  $\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) : [0, 2\pi] \rightarrow X$ , onde

$$x(\theta) = \int_0^\theta \frac{p^3 \cos \sigma}{k_m} d\sigma, \quad y(\theta) = \int_0^\theta \frac{p^3 \operatorname{sen} \sigma}{k_m} d\sigma.$$

Com efeito, como  $\frac{d\gamma}{d\theta} = \frac{p^3 e^{i\theta}}{k_m}$ , então  $\gamma$  é uma curva regular. Além disso, como

$$\gamma'(s) = p(\theta(s))(\cos \theta(s), \operatorname{sen} \theta(s))$$

e

$$\frac{d\gamma}{d\theta}(\theta) = \left( \frac{p^3 \cos \theta}{k_m}, \frac{p^3 \operatorname{sen} \theta}{k_m} \right)$$

então, se  $\bar{k}_m$  é a curvatura de Minkowski de  $\gamma$ , temos novamente por (3.30),

$$\begin{aligned} \gamma'(s) &= \frac{d\theta}{ds} \frac{d\gamma}{d\theta}(\theta) \\ &= \frac{\bar{k}_m}{p^2} \left( \frac{p^3 \cos \theta}{k_m}, \frac{p^3 \operatorname{sen} \theta}{k_m} \right). \end{aligned}$$

### 4.3. EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES

Logo,  $\frac{\bar{k}_m}{k_m} = 1$ , isto é,  $\bar{k}_m = k_m$ . A hipótese

$$\int_0^{2\pi} \frac{p^3 \cos \theta}{k_m} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{p^3 \sin \theta}{k_m} d\theta = 0$$

garante que a curva é fechada, pois

$$x(0) = x(2\pi) = 0 = y(2\pi) = y(0).$$

E pelo Teorema 2.11, a curva  $\gamma$  é simples. ■

Agora vamos expressar a área de  $Z$  em termos da função suporte. Pelo Teorema 2.13,

$$A(Z) = \int_Z dx dy = \frac{1}{2} \int_Z (xy_{s_e} - yx_{s_e}) ds_e = \frac{1}{2} \int_Z \langle Z, -N_e \rangle ds_e = \frac{1}{2} \int_Z h ds_e = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} \frac{h}{k_e} d\theta.$$

Daí, por (4.17),

$$A(Z) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} h(h + h_{\theta\theta}) d\theta = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} (h^2 - h_{\theta}^2) d\theta, \quad (4.19)$$

onde estamos usando integração por partes na última igualdade e a periodicidade de  $h$ .

Da mesma forma, o comprimento de Minkowski de  $Z$  é dado em função de  $h$

$$L(Z) = \int_Z ds = \int_{\mathbb{T}} \frac{p^2}{k_m} d\theta = \int_{\mathbb{T}} \frac{(h + h_{\theta\theta})}{p} d\theta.$$

Como a função  $p$  admite mínimo  $p_{min} > 0$  e  $h_{\theta}$  é  $2\pi$ -periódica, então

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{h_{\theta\theta}}{p} d\theta \leq \frac{1}{p_{min}} \int_{\mathbb{T}} h_{\theta\theta} d\theta = \frac{1}{p_{min}} h_{\theta} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Da mesma forma, como  $p$  admite máximo  $p_{max} > 0$ , então

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{h_{\theta\theta}}{p} d\theta \geq \frac{1}{p_{max}} \int_{\mathbb{T}} h_{\theta\theta} d\theta = \frac{1}{p_{max}} h_{\theta} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{h_{\theta\theta}}{p} d\theta = 0$$

e daí,

$$L(Z) = \int_{\mathbb{T}} \frac{h}{p} d\theta. \quad (4.20)$$

Retornemos ao cálculo da evolução dos invariantes de  $Z$  por (4.16). Começemos calculando a variação temporal de  $h$ . Já vimos que  $s'_e(s) = p(\theta(s))$ , então  $T = pT_e$ . Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  reais tais que

$$N = \alpha T_e + \beta N_e = \frac{\alpha}{p} T + \beta N_e.$$

Daí,

$$1 = [T, N] = \left[ T, \frac{\alpha}{p}T + \beta N_e \right] = \beta [T, N_e],$$

donde  $\beta = \frac{1}{[T, N_e]}$ . Por outro lado,

$$[T, N_e] = [pT_e, N_e] = p[T_e, N_e] = p.$$

Assim,  $\beta = \frac{1}{p}$ . Logo,

$$\langle N, N_e \rangle = \left\langle \alpha T_e + \frac{1}{p} N_e, N_e \right\rangle = \left\langle \frac{1}{p} N_e, N_e \right\rangle = \frac{1}{p}.$$

Sendo  $\theta$  e  $t$  variáveis independentes, temos  $(N_e)_t = (-\text{sen } \theta, \text{cos } \theta)_t = -\theta_t(\text{cos } \theta, \text{sen } \theta) = 0$ . Como  $h = \langle Z, -N_e \rangle$ , temos

$$\begin{aligned} h_t &= \langle Z_t, -N_e \rangle + \langle Z, (-N_e)_t \rangle \\ &= \langle aN, -N_e \rangle \\ &= -\frac{a}{p}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Observemos que isto nos permite calcular a variação do comprimento

$$\frac{dL}{dt} = \int_{\mathbb{T}} \frac{h_t}{p} d\theta = \int_{\mathbb{T}} -\frac{a}{p^2} d\theta. \tag{4.22}$$

Podemos agora calcular a variação de  $k_m$ . Derivando a equação (4.18) em relação a  $t$ , e usando que  $\frac{dp}{dt} = 0$  e (4.21), obtemos

$$\begin{aligned} (k_m)_t &= -p^3 \frac{(h_{\theta\theta t} + h_t)}{(h_{\theta\theta} + h)^2} \\ &= -p^3 \frac{k_m^2}{p^6} (h_{\theta\theta t} + h_t) \\ &= \frac{k_m^2}{p^3} \left( \left( \frac{a}{p} \right)_{\theta\theta} + \left( \frac{a}{p} \right) \right). \end{aligned} \tag{4.23}$$

Quando a evolução é pela curvatura de Minkowski temos que  $a = fk_m$ , daí

$$\begin{aligned} h_t &= -\frac{a}{p} = -\frac{fk_m}{p}; \\ h_{t\theta} &= -\frac{f_{\theta}k_m}{p} - \frac{f(k_m)_{\theta}}{p} + \frac{fk_m}{p^2} \frac{dp}{d\theta}; \\ h_{t\theta\theta} &= -\left( \frac{f_{\theta}k_m}{p} \right)_{\theta} - \left( \frac{f(k_m)_{\theta}}{p} \right)_{\theta} + \left( \frac{fk_m}{p^2} \frac{dp}{d\theta} \right)_{\theta} \\ &= -\frac{f}{p} (k_m)_{\theta\theta} + \left\{ -\frac{f_{\theta\theta}}{p} + \frac{2f_{\theta}}{p^2} \frac{dp}{d\theta} + \left( \frac{1}{p^2} \frac{d^2p}{d\theta^2} - \frac{2}{p^3} \left( \frac{dp}{d\theta} \right)^2 \right) f \right\} k_m + \\ &\quad + \left( \frac{2f}{p^2} \frac{dp}{d\theta} - \frac{2f_{\theta}}{p} \right) (k_m)_{\theta}. \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
 (k_m)_t &= \frac{k_m^2}{p^3} \left\{ \left( \frac{fk_m}{p} \right)_{\theta\theta} + \frac{fk_m}{p} \right\} \\
 &= \frac{fk_m^2}{p^4} (k_m)_{\theta\theta} + \left( \frac{2f_{\theta}k_m^2}{p^4} - \frac{2fk_m^2}{p^5} \frac{dp}{d\theta} \right) (k_m)_{\theta} + \left( \frac{f_{\theta\theta}}{p^4} - \frac{2f_{\theta}}{p^5} \frac{dp}{d\theta} + \frac{2f}{p^6} \left( \frac{dp}{d\theta} \right)^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{f}{p^5} \frac{d^2p}{d\theta^2} + \frac{f}{p^4} \right) k_m^3 \\
 &= \frac{fk_m^2}{p^4} (k_m)_{\theta\theta} + \left( \frac{2f_{\theta}k_m^2}{p^4} - \frac{2fk_m^2}{p^5} \frac{dp}{d\theta} \right) (k_m)_{\theta} + k_m^3.
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

A última igualdade deve-se por (4.12).

A proposição a seguir ilustra a importância de (4.24).

**Proposição 4.5.** *Existe uma correspondência biunívoca entre soluções  $Z(t, \theta) : [0, T^*) \times \mathbb{T} \rightarrow X$  de*

$$Z_t = fk_m N, \tag{4.25}$$

onde cada curva  $Z(t, \cdot)$  é convexa, e soluções positivas  $k_m = k_m(t, \theta) : [0, T^*) \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  da equação de evolução

$$(k_m)_t = \frac{k_m^2}{p^3} \left( \left( \frac{fk_m}{p} \right)_{\theta\theta} + \frac{fk_m}{p} \right) \tag{4.26}$$

satisfazendo a condição

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{p^3 e^{i\theta}}{k_m} d\theta = 0, \quad t \in [0, T^*). \tag{4.27}$$

Mais ainda,  $Z$  está bem definida a partir de  $k_m$ , a menos de movimentos rígidos.

**Demonstração:** Seja  $Z$  uma solução de (4.25). Se  $k_m$  é a curvatura de Minkowski de  $Z = Z(t, \theta)$ , então cada  $k_m(t, \cdot)$  é positiva e satisfaz (4.26) por (4.23). Pela Proposição 4.4, a condição (4.27) simplesmente expressa o fato de que a curva na evolução é fechada e regular.

Reciprocamente, se  $k_m = k_m(t, \theta)$  é uma solução positiva de (4.26), definamos

$$Z(t, \theta) = \int_0^\theta \frac{p^3 e^{i\tilde{\theta}}}{k_m} d\tilde{\theta} + \left( - \int_0^t \left( \frac{fk_m}{p} \right)_{\theta} \Big|_{\theta=0} d\tilde{t}, \int_0^t \frac{fk_m}{p} \Big|_{\theta=0} d\tilde{t} \right). \tag{4.28}$$

Então, (4.27) e a Proposição 4.4 implicam que cada  $Z(t, \cdot)$  é fechada e convexa e a curvatura de  $Z(t, \cdot)$  é exatamente  $k_m(t, \cdot)$ .

Falta mostrarmos que  $Z_t = fk_m N$ . Temos

$$\begin{aligned}
 Z_t &= \int_0^\theta \frac{d}{dt} \left( \frac{p^3 e^{i\tilde{\theta}}}{k_m} \right) d\tilde{\theta} + \left( - \left( \frac{fk_m}{p} \right) \Big|_{\theta=0}, \frac{fk_m}{p} \Big|_{\theta=0} \right) \\
 &= \int_0^\theta - \frac{p^3 e^{i\tilde{\theta}} (k_m)_t}{k_m^2} d\tilde{\theta} + \left( - \left( \frac{fk_m}{p} \right) \Big|_{\theta=0}, \frac{fk_m}{p} \Big|_{\theta=0} \right) \\
 &= \int_0^\theta - \frac{p^3 e^{i\tilde{\theta}} k_m^2}{k_m^2 p^3} \left( \left( \frac{fk_m}{p} \right)_{\tilde{\theta}\tilde{\theta}} + \frac{fk_m}{p} \right) d\tilde{\theta} + \left( - \left( \frac{fk_m}{p} \right) \Big|_{\theta=0}, \frac{fk_m}{p} \Big|_{\theta=0} \right) \\
 &= - \int_0^\theta e^{i\tilde{\theta}} \left( \frac{fk_m}{p} \right)_{\tilde{\theta}\tilde{\theta}} d\tilde{\theta} - \int_0^\theta e^{i\tilde{\theta}} \frac{fk_m}{p} d\tilde{\theta} + \left( - \left( \frac{fk_m}{p} \right) \Big|_{\theta=0}, \frac{fk_m}{p} \Big|_{\theta=0} \right).
 \end{aligned}$$

Usando o método de integração por partes, temos que

$$\int e^{i\tilde{\theta}} \left( \frac{fk_m}{p} \right)_{\tilde{\theta}\tilde{\theta}} d\tilde{\theta} = e^{i\tilde{\theta}} \left( \frac{fk_m}{p} \right)_{\tilde{\theta}} - \int i e^{i\tilde{\theta}} \left( \frac{fk_m}{p} \right)_{\tilde{\theta}} d\tilde{\theta}$$

e

$$\int e^{i\tilde{\theta}} \left( \frac{fk_m}{p} \right) d\tilde{\theta} = \frac{e^{i\tilde{\theta}}}{i} \left( \frac{fk_m}{p} \right) - \int \frac{e^{i\tilde{\theta}}}{i} \left( \frac{fk_m}{p} \right)_{\tilde{\theta}} d\tilde{\theta}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 Z_t &= - e^{i\tilde{\theta}} \left( \frac{fk_m}{p} \right)_{\tilde{\theta}} \Big|_0^\theta + \int_0^\theta i e^{i\tilde{\theta}} \left( \frac{fk_m}{p} \right)_{\tilde{\theta}} d\tilde{\theta} - \frac{e^{i\tilde{\theta}}}{i} \left( \frac{fk_m}{p} \right) \Big|_0^\theta + \int_0^\theta \frac{e^{i\tilde{\theta}}}{i} \left( \frac{fk_m}{p} \right)_{\tilde{\theta}} d\tilde{\theta} + \\
 &\quad + \left( - \left( \frac{fk_m}{p} \right) \Big|_{\theta=0}, \frac{fk_m}{p} \Big|_{\theta=0} \right) \\
 &= \frac{i e^{i\theta} fk_m}{p} - e^{i\theta} \left( \frac{fk_m}{p} \right)_{\theta}.
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Vimos que

$$N = \alpha T_e + \beta N_e = \alpha T_e + \frac{N_e}{p}.$$

Por [18], Proposição 1.1, temos que  $\alpha = - \left( \frac{1}{p} \right)_{\theta}$ . Além disso, sabemos que  $T_e = e^{i\theta}$  e  $N_e = i e^{i\theta}$ , então

$$\begin{aligned}
 \frac{i e^{i\theta} fk_m}{p} - e^{i\theta} \left( \frac{fk_m}{p} \right)_{\theta} &= (N - \alpha T_e) fk_m - T_e \left( \frac{fk_m}{p} \right)_{\theta} \\
 &= fk_m N - \left( \alpha fk_m + \left( \frac{fk_m}{p} \right)_{\theta} \right) \frac{T}{p} \\
 &= fk_m N - \left( - \left( \frac{1}{p} \right)_{\theta} fk_m + \left( \frac{fk_m}{p} \right)_{\theta} \right) \frac{T}{p}.
 \end{aligned}$$

De maneira similar a Proposição 4.6 abaixo, é possível mostrarmos que adicionando termos tangenciais como  $\left( - \left( \frac{1}{p} \right)_{\theta} fk_m + \left( \frac{fk_m}{p} \right)_{\theta} \right) \frac{T}{p}$  a velocidades geométricas como  $fk_m N$ , os traços das curvas da evolução não são afetados e os fluxos associados são geometricamente equivalentes.

### 4.3. EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES

Com efeito, consideremos o PVI:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t}(t, u) = \frac{k_m}{p^3} \left( - \left( \frac{1}{p} \right)_\theta f k_m + \left( \frac{f k_m}{p} \right)_\theta \right) \\ \theta(0, u) = 2\pi u \end{cases}, \quad u \in [0, 1].$$

Observemos que

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}(t, u) = \frac{k_m}{p^4} (f k_m)_\theta. \quad (4.30)$$

Para cada  $u \in [0, 1]$ , definamos

$$g_u(t) = \frac{\partial \theta}{\partial u}(u, t).$$

Notemos que  $g_u(0) = 2\pi$ . Derivando em  $u$ , a equação (4.30), encontramos

$$\frac{d}{dt} g_u(t) = \zeta(t) g_u(t),$$

onde

$$\zeta(t) = \left( \frac{k_m}{p^4} \right)_\theta (f k_m)_\theta + \frac{k_m}{p^4} (f k_m)_{\theta\theta}.$$

Deste modo,

$$\frac{d}{dt} \ln g_u(t) = \zeta(t).$$

Integrando em  $t$ , esta última equação, temos

$$g_u(t) = 2\pi e^{\int_0^t \zeta(\xi) d\xi} > 0.$$

Logo,

$$\frac{\partial \theta}{\partial u} > 0,$$

isto é,  $\theta = \theta(t, u)$  é uma mudança regular de parâmetros. Deste modo, definindo  $Y(t, u) = Z(t, \theta)$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial t} \\ &= \frac{\partial Z}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} + f k_m N - \left( - \left( \frac{1}{p} \right)_\theta f k_m + \left( \frac{f k_m}{p} \right)_\theta \right) \frac{T}{p} \\ &= f k_m N + \left( \frac{p^3}{k_m} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \left( \frac{1}{p} \right)_\theta f k_m - \left( \frac{f k_m}{p} \right)_\theta \right) \\ &= f k_m N. \end{aligned}$$

E pelo Teorema 3.6, a curva  $Z$  está bem definida, a menos de movimentos rígidos. ■

**Proposição 4.6** ([14], Proposição 5.4.1). *Seja  $Y = Y(t, v)$  uma família a um parâmetro de curvas fechadas que é solução da equação de evolução*

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \bar{f} N_e + \bar{g} T_e, \quad (4.31)$$

onde  $\bar{f}$  é geométrica no sentido que depende somente da curva e não de uma particular parametrização da curva (por exemplo,  $\bar{f} = k_e$ ) e  $\bar{g}$  é qualquer função. Então existe uma mudança regular de parâmetros  $w = w(t, v)$ , isto é,  $\frac{\partial w}{\partial v} > 0$ , tal que  $Z = Z(t, w) = Y(t, w(t, v)) = Y(t, v)$  é uma solução de

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \bar{f}N_e. \quad (4.32)$$

Em outras palavras, os traços das curvas da evolução não são afetados adicionando termos tangenciais como  $\bar{g}T_e$  e velocidades geométricas como  $\bar{f}N_e$  e os fluxos (4.31) e (4.32) são geometricamente equivalentes.

A Proposição 4.5 é uma ferramenta para estabelecer a existência e unicidade de soluções locais do PVI (4.14) associado ao fluxo pela curvatura de Minkowski. Começamos com uma curva convexa  $Z_0 : \mathbb{T} \rightarrow X$  e seja  $k_{m_0} > 0$  sua curvatura de Minkowski. A ideia consiste em resolver o PVI

$$\begin{cases} (k_m)_t = \frac{k_m^2}{p^3} \left( \left( \frac{fk_m}{p} \right)_{\theta\theta} + \frac{fk_m}{p} \right) \\ k_m(0, \cdot) = k_{m_0}(\cdot) \end{cases} \quad (4.33)$$

obtendo-se uma função  $k_m = k_m(t, \theta)$ ,  $t \in [0, \delta)$  para algum  $\delta > 0$  e  $\theta \in \mathbb{T}$ . Lembrando que  $f$  é solução positiva do problema de contorno (4.12).

Por continuidade, podemos admitir que  $k_m(t, \theta) > 0$  para todo  $(t, \theta) \in [0, \delta) \times \mathbb{T}$ . Definimos então  $Z : [0, \delta) \times \mathbb{T} \rightarrow X$  por (4.28), de modo que a curvatura de Minkowski de  $Z(t, \cdot)$  é exatamente  $k_m(t, \cdot)$ . Pela Proposição 4.4,  $Z$  é simples, fechada, estritamente convexa e de classe  $C^2$ .

**Teorema 4.10.** *Se  $k_{m_0} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  é positiva e suave, então existem  $T^* > 0$  e  $k_m \in C^\infty([0, T^*) \times \mathbb{T})$  que é solução única de (4.33).*

Em [14], Teorema D.0.13, é provado que o PVI

$$\begin{cases} u_t = A(u)u_{\theta\theta} + B(u) \\ u(0, \cdot) = g(\cdot) \end{cases}, \quad (4.34)$$

onde  $A, B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são suaves e  $g \in C^{2+\alpha}(\mathbb{T})$ , admite uma única solução suave em  $[0, T^*) \times \mathbb{T}$  para algum  $T^* > 0$ , sempre que o PVI (4.34) é parabólico relativamente a  $g$ , isto é, sempre que  $A(g) > 0$ . Se substituirmos em [14], Teorema D.0.13, o PVI (4.34) pelo PVI

$$\begin{cases} u_t = A(u)u_{\theta\theta} + B(u)u_\theta + C(u) \\ u(0, \cdot) = g(\cdot) \end{cases},$$

onde  $A, B, C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são suaves e  $g \in C^{2+\alpha}(\mathbb{T})$ , a demonstração do Teorema 4.10 segue de maneira análoga.

Como consequência do Teorema 4.10, o PVI (4.33) possui uma solução maximal definida em  $[0, T^*)$ . Infelizmente, para qualquer dado inicial convexo, temos  $T^* < +\infty$ , ou seja, o fluxo pela

### 4.3. EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES

curvatura de Minkowski sempre desenvolve uma singularidade em tempo finito. Para vermos isso, observemos que para  $k_{m_0}$  uma constante positiva,

$$k_m(t) = \frac{1}{\sqrt{k_{m_0}^{-2} - 2t}} \quad (4.35)$$

é uma solução de (4.33) com  $k_m(0, \cdot) = k_{m_0}$ .

Com efeito, como  $k_{m_0} = \text{cte}$ , então  $(k_m)_\theta = 0$ . E,  $(k_m)_t = k_m^3$ . Por outro lado, por (4.24),

$$\frac{k_m^2}{p^3} \left( \left( \frac{fk_m}{p} \right)_{\theta\theta} + \frac{fk_m}{p} \right) = k_m^3 = (k_m)_t.$$

Portanto, (4.35) é solução de (4.33).

Isso corresponde a evolução pela curvatura de Minkowski das curvas homotéticas a curva centróide da bola unitária. Concluimos então que estas curvas contraem-se em tempo finito, a saber  $T^* = \frac{1}{2k_{m_0}^2}$ , para um ponto, pois quando  $t \rightarrow T^*$ , então  $k_m(t) \rightarrow +\infty$  e conseqüentemente  $k_e(t, \theta) \rightarrow +\infty$ . Noutras palavras, (4.35) torna-se singular para  $t = T^*$ . A proposição a seguir é uma consequência importante da existência desta solução especial.

**Proposição 4.7.** *Para quaisquer  $t \in [0, T^*)$  e  $\theta \in \mathbb{T}$ , vale*

$$k_m(t, \theta) \geq k_{\min}(0). \quad (4.36)$$

*Em particular, as curvas da evolução permanecem convexas.*

**Demonstração:** Por (4.24), a equação de evolução para a curvatura de Minkowski  $k_m$  pode ser colocada na forma

$$\mathcal{F}(t, \theta, k_m, p, q) = \mathcal{F}(t, \theta, k_m, (k_m)_\theta, (k_m)_{\theta\theta}) = \frac{fk_m^2}{p^4} (k_m)_{\theta\theta} + A_1 (k_m)_\theta + k_m^3,$$

onde  $A_1 = \frac{2f_\theta k_m^2}{p^4} - \frac{2fk_m^2}{p^5} \frac{dp}{d\theta}$ , de modo que

$$\mathcal{F}_q = \frac{fk_m^2}{p^4} > 0. \quad (4.37)$$

Como a curva inicial é estritamente convexa, por continuidade, qualquer solução de (4.33) permanece positiva para  $0 \leq t < t_0$ ,  $t_0 > 0$  e isso implica por (4.37) e o Teorema 4.6, não somente que a solução é única, mas também que a equação é parabólica em  $[0, t_0) \times \mathbb{T}$  em relação a solução. Seja

$$k_0 = \min\{k_m(0, \theta); \theta \in \mathbb{T}\} > 0.$$

Então

$$\tilde{k}_m(t, \theta) = \tilde{k}_m(t) = \frac{k_0}{\sqrt{1 - 2k_0^2 t}}$$

é solução de (4.33) com condição inicial  $\tilde{k}_m(0, \theta) = k_0$ . Tal função é estritamente crescente e está definida no intervalo  $\left[0, \frac{1}{2k_0^2}\right)$ . Podemos agora comparar as soluções em  $[0, t_1)$ , onde  $t_1 = \min\left\{t_0, \frac{1}{2k_0^2}\right\}$ .

Para qualquer  $\eta \in (0, 1)$ , temos

$$\eta k_m + (1 - \eta)\tilde{k}_m \geq \min\{\eta, (1 - \eta)\}(k_m + \tilde{k}_m) > 0$$

donde

$$\mathcal{F}_q(\xi) = \frac{f}{p^4}(\eta k_m + (1 - \eta)\tilde{k}_m)^2 > 0,$$

de modo que pelo Teorema 4.6,

$$k_0 \leq \tilde{k}_m(t, \theta) \leq k_m(t, \theta), \quad 0 \leq t < t_1,$$

o que implica

$$0 < k_{\min}(0) = k_0 \leq \min_{\theta \in \mathbb{T}} k_m(t, \theta).$$

E isso não somente comprova que a convexidade é preservada, mas fornece uma demonstração da estimativa (4.36). ■

Verifiquemos como a área evolui ao longo de (4.15). Por (4.19),

$$\frac{dA}{dt} = \int_{\mathbb{T}} (h_t h - h_{t\theta} h_\theta) d\theta = \int_{\mathbb{T}} \left( -\frac{a}{p} h + \left( \frac{a}{p} \right)_\theta h_\theta \right) d\theta = - \int_{\mathbb{T}} \frac{a}{p} (h + h_{\theta\theta}) d\theta,$$

onde usamos integração por partes na última igualdade e a periodicidade de  $a, p$  e  $h$ . Por (4.18),

$$\frac{dA}{dt} = - \int_{\mathbb{T}} \frac{ap^2}{k_m} d\theta.$$

Se  $a = f k_m$ , temos finalmente

$$\frac{dA}{dt} = - \int_{\mathbb{T}} f p^2 d\theta = -2A(R). \quad (4.38)$$

Logo,  $A(t) = A(0) - 2A(R)t$ .

**Definição 4.2.** Seja  $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow X$  uma curva cuja curvatura de Minkowski é  $k_m : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ . Definimos a **curvatura mediana**  $k_m^*$  de  $\gamma$  como sendo:

$$k_m^* = \sup \left\{ b : \frac{f k_m}{p} > b \text{ em algum intervalo de comprimento } \pi \right\}.$$

**Proposição 4.8.** (*Estimativa Geométrica*) Nas condições da Definição 4.2 a curvatura mediana satisfaz  $k_m^* \leq f_{\max} p_{\max}^2 \frac{L_e}{A}$ .

**Demonstração:** Seja  $0 < M < k_m^*$ . Daí, existe um intervalo  $(a, a + \pi)$  no qual temos  $\frac{f k_m}{p} > M$ . Da convexidade vem que a curva está inteiramente contida entre as retas paralelas tangentes em  $a$  e  $a + \pi$ . A distância Euclidiana entre essas retas, que é uma das larguras da curva, é dada em termos da função suporte  $h$ , por

$$w(\theta) = h(\theta) + h(\pi + \theta).$$

Noutros termos, fixado  $a$ , temos

$$\begin{aligned}
 w(a) &= -\cos(\theta - a)h|_a^{\pi+a} \\
 &= \int_a^{\pi+a} (-\cos(\theta - a)h_\theta + \text{sen}(\theta - a)h)d\theta \\
 &= \int_a^{\pi+a} \text{sen}(\theta - a)(h_{\theta\theta} + h)d\theta \\
 &= \int_a^{a+\pi} \frac{p^3(\theta) \text{sen}(\theta - a)}{k_m(\theta)} d\theta.
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

Deste modo,

$$\begin{aligned}
 \int_a^{a+\pi} \frac{p^3(\theta) \text{sen}(\theta - a)}{k_m(\theta)} d\theta &\leq \left| \int_a^{a+\pi} \frac{p^3(\theta) \text{sen}(\theta - a)}{k_m(\theta)} d\theta \right| \leq \frac{f_{\max} p_{\max}^2}{M} \left| \int_a^{a+\pi} \text{sen}(\theta - a) d\theta \right| \\
 &= \frac{2}{M} f_{\max} p_{\max}^2.
 \end{aligned}$$

Agora, seja  $D$  o diâmetro Euclidiano da curva, isto é, a máxima distância Euclidiana entre dois pontos no traço da curva. Sabemos que

$$D \leq \frac{L_e}{2},$$

onde  $L_e$  é o comprimento Euclidiano da curva, e que a área é limitada pelo produto entre o diâmetro Euclidiano e uma largura Euclidiana qualquer. Assim,

$$A \leq D \int_a^{a+\pi} \frac{p^3(\theta) \text{sen}(\theta - a)}{k_m(\theta)} d\theta \leq \frac{L_e}{2} \frac{2}{M} f_{\max} p_{\max}^2 = \frac{L_e}{M} f_{\max} p_{\max}^2.$$

Donde seque que  $M \leq \frac{L_e}{A} f_{\max} p_{\max}^2$ . Como  $M$  foi tomado arbitrariamente, fazendo  $M \rightarrow k_m^*$  temos o desejado. ■

Iremos denotar por  $k_m^*(t)$  a curvatura mediana da curva correspondente  $k_m(t, \cdot)$ .

**Proposição 4.9.** (*Estimativa Integral*) *Se  $k_m^*(t)$  é limitada em  $[0, T^*)$ , então temos que*

$$\int_{\mathbb{T}} f p^2 \log k_m(t, \theta) d\theta$$

também o é.

**Demonstração:** Usando a equação de evolução (4.24) e integração por partes temos, para cada  $t$ ,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{T}} f p^2 \log k_m(t, \theta) d\theta &= \int_{\mathbb{T}} f p^2 \frac{(k_m)_t}{k_m} d\theta \\
 &= \int_{\mathbb{T}} \frac{f k_m}{p} \left( \left( \frac{f k_m}{p} \right)_{\theta\theta} + \frac{f k_m}{p} \right) d\theta \\
 &= \int_{\mathbb{T}} \left( \left( \frac{f k_m}{p} \right)^2 - \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{f k_m}{p} \right)^2 \right) d\theta.
 \end{aligned}$$

### 4.3. EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES

Vamos fixar  $t$  e estimar a última integral no conjunto  $J = \left\{ \theta : \frac{fk_m}{p} > k_m^* \right\}$  e no seu complementar  $J^c$  em  $[0, 2\pi]$ . Como  $J$  é um conjunto aberto, então  $J$  pode ser escrito como uma união enumerável de intervalos abertos disjuntos, digamos  $J = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$ . Pela definição de  $k_m^*$  segue imediatamente que cada um desses intervalos deve ter comprimento menor ou igual a  $\pi$ , e que nas extremidades dos fechos desses intervalos devemos ter  $k_m^*(t) = \frac{fk_m}{p}$ .

Dessa forma, podemos usar a Desigualdade de Wirtinger (Proposição 4.3) para as restrições da função  $\theta \mapsto \frac{fk_m}{p} - k_m^*$  a cada um desses intervalos  $I_i$

$$\begin{aligned} \int_{I_i} \left( \frac{fk_m}{p} \right)^2 d\theta - 2k_m^*(t) \int_{I_i} \frac{fk_m}{p} d\theta + \int_{I_i} (k_m^*(t))^2 d\theta &= \int_{I_i} \left( \frac{fk_m}{p} - k_m^*(t) \right)^2 d\theta \\ &\leq \int_{I_i} \left( \frac{fk_m}{p} - k_m^*(t) \right)_\theta^2 d\theta \\ &= \int_{I_i} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{fk_m}{p} \right)^2 d\theta. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} \int_{I_i} \left( \left( \frac{fk_m}{p} \right)^2 - \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{fk_m}{p} \right)^2 \right) d\theta &\leq 2k_m^*(t) \int_{I_i} \frac{fk_m}{p} d\theta - \int_{I_i} (k_m^*(t))^2 d\theta \\ &\leq 2k_m^*(t) \int_{I_i} \frac{fk_m}{p} d\theta, \end{aligned}$$

uma vez que  $\int_{I_i} (k_m^*(t))^2 d\theta$  é não negativa. Agora, somando as integrais, obtemos

$$\begin{aligned} \int_J \left( \left( \frac{fk_m}{p} \right)^2 - \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{fk_m}{p} \right)^2 \right) d\theta &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{I_i} \left( \left( \frac{fk_m}{p} \right)^2 - \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{fk_m}{p} \right)^2 \right) d\theta \\ &\leq 2k_m^*(t) \sum_{i \in \mathbb{N}} \int_{I_i} \frac{fk_m}{p} d\theta \\ &= 2k_m^*(t) \int_J \frac{fk_m}{p} d\theta \\ &\leq 2k_m^*(t) \int_{\mathbb{T}} \frac{fk_m}{p} d\theta. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Em  $J^c$ , vale  $\frac{fk_m}{p} \leq k_m^*$ . Daí

$$\begin{aligned} \int_{J^c} \left( \left( \frac{fk_m}{p} \right)^2 - \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{fk_m}{p} \right)^2 \right) d\theta &\leq \int_{J^c} \left( \frac{fk_m}{p} \right)^2 d\theta \\ &\leq \int_{J^c} (k_m^*(t))^2 d\theta \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} (k_m^*(t))^2 d\theta \\ &= 2\pi (k_m^*(t))^2. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Somando (4.40) e (4.41) e usando (4.22), ficamos com

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{T}} fp^2 \log k_m d\theta &\leq 2k_m^*(t) \int_{\mathbb{T}} \frac{fk_m}{p} d\theta + 2\pi(k_m^*(t))^2 \\ &\leq -2k_m^*(t) \frac{\partial L}{\partial t} p_{max} + 2\pi(k_m^*(t))^2. \end{aligned}$$

Finalmente, como  $k_m^*(t)$  é limitada por hipótese, seja  $M$  cota superior para  $k_m^*(t)$ . Temos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} fp^2 \log k_m d\theta &= \int_0^t \left( \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{T}} fp^2 \log k_m d\theta \right) dt \\ &\leq \int_0^t \left( -2k_m^*(t) \frac{\partial L}{\partial t} p_{max} + 2\pi(k_m^*(t))^2 \right) dt \\ &\leq \int_0^t \left| -2k_m^*(t) \frac{\partial L}{\partial t} p_{max} \right| dt + \int_0^t 2\pi(k_m^*(t))^2 dt \\ &\leq 2Mp_{max} \int_0^t \left| \frac{\partial L}{\partial t} \right| dt + 2\pi M^2 t \\ &= -2Mp_{max} \int_0^t \frac{\partial L}{\partial t} dt + 2\pi M^2 t \\ &= 2Mp_{max}(L(0) - L(t)) + 2\pi M^2 t \\ &\leq 2Mp_{max}L(0) + 2\pi M^2 T^*, \end{aligned}$$

pois  $\frac{\partial L}{\partial t} \leq 0$  e  $L(t) \geq 0$ . Logo, temos o desejado. ■

**Proposição 4.10.** (*Estimativa Pontual*) Se  $\int_{\mathbb{T}} fp^2 \log k_m d\theta$  é limitada em  $[0, T^*)$ , então  $k_m$  é uniformemente limitada em  $[0, T^*)$ .

Para demonstrarmos a Proposição 4.10 vamos precisar de dois Lemas.

**Lema 4.1.** Se  $\int_{\mathbb{T}} fp^2 \log k_m d\theta$  é limitada em  $[0, T^*)$ , então para todo  $\delta > 0$  existe uma constante  $C$  tal que não existe intervalo de comprimento maior do que  $\delta$  onde  $k_m > C$  em todo o intervalo.

**Demonstração:** Seja  $[a, b] \subseteq \mathbb{T}$  intervalo de comprimento maior do que  $\delta$ . Suponhamos que  $k_m > C$  em  $[a, b]$ . Daí, por (4.36), temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} fp^2 \log k_m d\theta &= \int_0^a fp^2 \log k_m d\theta + \int_a^b fp^2 \log k_m d\theta + \int_b^{2\pi} fp^2 \log k_m d\theta \\ &\geq af_{min}p_{min}^2 \log k_{min}(0) + \delta f_{min}p_{min}^2 \log C + (2\pi - b)f_{min}p_{min}^2 \log k_{min}(0) \\ &= \delta f_{min}p_{min}^2 \log C + (2\pi - \delta)f_{min}p_{min}^2 \log k_{min}(0). \end{aligned}$$

Dessa forma, tomando  $C$  suficientemente grande temos uma contradição, uma vez que  $\int_{\mathbb{T}} fp^2 \log k_m d\theta$  é limitada em  $[0, T^*)$ . ■

**Lema 4.2.** A função

$$\mathcal{F} = \int_{\mathbb{T}} \left( \left( \frac{fk_m}{p} \right)^2 - \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{fk_m}{p} \right)^2 \right) d\theta$$

### 4.3. EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES

é não decrescente. Em particular existe uma constante  $D$  tal que para todo  $t \in [0, T^*)$  vale a desigualdade

$$\int_{\mathbb{T}} \left( \frac{\partial f k_m}{\partial \theta} \frac{1}{p} \right)^2 d\theta \leq \int_{\mathbb{T}} \left( \frac{f k_m}{p} \right)^2 d\theta + D.$$

**Demonstração:** Observemos que

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = 2 \int_{\mathbb{T}} \left( \frac{f k_m}{p} \frac{f}{p} (k_m)_t - \left( \frac{f k_m}{p} \right)_\theta \left( \frac{f k_m}{p} \right)_{\theta t} \right) d\theta. \quad (4.42)$$

Usando que  $(k_m)_t$  é  $2\pi$ -periódica na variável  $\theta$  para cada  $t$  e aplicando o método de integração por partes, temos

$$\int_{\mathbb{T}} \left( \frac{f k_m}{p} \right)_\theta \left( \frac{f k_m}{p} \right)_{\theta t} d\theta = - \int_{\mathbb{T}} \left( \frac{f k_m}{p} \right)_{\theta\theta} \left( \frac{f k_m}{p} \right)_t d\theta,$$

donde segue que

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{F}}{dt} &= 2 \int_{\mathbb{T}} \left( \frac{f k_m}{p} \frac{f}{p} (k_m)_t + \left( \frac{f k_m}{p} \right)_{\theta\theta} \left( \frac{f k_m}{p} \right)_t \right) d\theta \\ &= 2 \int_{\mathbb{T}} \frac{f}{p} \left( \left( \frac{f k_m}{p} \right) + \left( \frac{f k_m}{p} \right)_{\theta\theta} \right) (k_m)_t d\theta \\ &= \int_{\mathbb{T}} \frac{f p^3 (k_m)_t}{p k_m^2} (k_m)_t d\theta \\ &= 2 \int_{\mathbb{T}} \frac{f p^2 (k_m)_t^2}{k_m^2} d\theta \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

A terceira igualdade segue de (4.23). Logo,  $\mathcal{F}$  é não decrescente. Em particular,  $\mathcal{F}(0) \leq \mathcal{F}(t)$  para todo  $t \in [0, T^*)$ , ou seja,

$$\int_{\mathbb{T}} \left( \left( \frac{f k_m}{p} \right)^2 - \left( \frac{\partial f k_m}{\partial \theta} \frac{1}{p} \right)^2 \right) d\theta \geq \int_{\mathbb{T}} \left( \left( \frac{f k_m}{p} \right)^2 \Big|_{t=0} - \left( \frac{\partial f k_m}{\partial \theta} \frac{1}{p} \right)^2 \Big|_{t=0} \right) d\theta.$$

Dessa forma, pondo

$$D = - \int_{\mathbb{T}} \left( \left( \frac{f k_m}{p} \right)^2 \Big|_{t=0} - \left( \frac{\partial f k_m}{\partial \theta} \frac{1}{p} \right)^2 \Big|_{t=0} \right) d\theta,$$

temos que

$$\int_{\mathbb{T}} \left( \frac{\partial f k_m}{\partial \theta} \frac{1}{p} \right)^2 d\theta \leq \int_{\mathbb{T}} \left( \frac{f k_m}{p} \right)^2 d\theta + D$$

em  $[0, T^*)$ . ■

Para provarmos a Estimativa Pontual 4.10 encontraremos uma cota superior para a função  $t \mapsto k_{max}(t)$ . Sabemos que  $f$  admite máximo positivo e  $p$  admite mínimo positivo. Logo, existe uma constante positiva  $N$  tal que  $\left( \frac{f}{p} \right)^2 \leq N$ . Tomemos  $\delta < \frac{1}{2\pi N} \frac{f_{min}^2}{p_{max}^2}$  e seja  $C'$  como no Lema

### 4.3. EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES

4.1. Por essa lema, existe  $a \in \mathbb{T}$  tal que  $\frac{f(a)k_m(t, a)}{p(a)} \leq \frac{f_{max}}{p_{min}} C' = C = C(\delta)$  e  $0 < |a - \theta_0| \leq \delta$ . Sem perda de generalidade, podemos supor  $a < \theta_0$ . Daí, em  $\theta_0$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{fk_m}{p} &= \left( \frac{fk_m}{p} \right) \Big|_{\theta=a} + \int_a^{\theta_0} \left( \frac{fk_m}{p} \right)_{\theta} d\theta \leq C + \sqrt{\delta} \left( \int_{\mathbb{T}} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{fk_m}{p} \right)^2 d\theta \right)^{1/2} \\ &\leq C + \sqrt{\delta} \left( \int_{\mathbb{T}} \left( \frac{fk_m}{p} \right)^2 d\theta + D \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

onde a desigualdade de Holder (Teorema 4.7) foi usada na primeira desigualdade.

Logo,

$$\frac{fk_{max}}{p} \leq C + \sqrt{\delta} (2\pi N k_{max}^2 + D)^{1/2} \leq C + \sqrt{2\pi N} \sqrt{\delta k_{max}^2} + \sqrt{\delta D},$$

onde usamos  $\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ,  $a, b \geq 0$ . Daí,

$$k_{max} \leq \frac{p_{max}}{f_{min}} \left( C + \sqrt{2\pi N} \sqrt{\delta k_{max}^2} + \sqrt{\delta D} \right).$$

Como  $\delta < \frac{1}{2\pi N} \frac{f_{min}^2}{p_{max}^2}$ , então

$$k_{max} \left( 1 - \sqrt{2\pi N} \delta \frac{p_{max}}{f_{min}} \right) \leq \frac{p_{max}}{f_{min}} \left( C + \sqrt{\delta D} \right)$$

e portanto,

$$k_{max} \leq \frac{(C + \sqrt{\delta D})}{\left( \frac{f_{min}}{p_{max}} - \sqrt{2\pi N} \delta \right)}.$$

Como o lado direito da desigualdade não depende de  $t$  segue a Estimativa Pontual 4.10.

As estimativas anteriores resultam na seguinte Proposição.

**Proposição 4.11.** *(Estimativa de área) Seja  $k_m : [0, T^*) \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  uma solução de (4.33) e suponhamos que existe  $\tilde{A} > 0$  tal que  $A(t) \geq \tilde{A}$  para  $0 \leq t < T^*$ . Então existe  $C > 0$  tal que  $|k_m(t, \cdot)| \leq C$ ,  $0 \leq t < T^*$ .*

**Demonstração:** Uma vez que o comprimento de Minkowski das curvas diminuem com o tempo (4.22), então o comprimento Euclidiano das curvas também diminuem com o tempo. Então, pela Estimativa Geométrica 4.8, temos que uma cota inferior positiva para a área nos dá uma cota superior para  $k_m^*(t)$  em  $[0, T^*)$ . Daí, temos o desejado como consequência das estimativas Integral e Pontual. ■

**Proposição 4.12.** *O tempo maximal  $T^*$  é dado por  $\frac{A_0}{2A(R)}$ , para qualquer solução de (4.33).*

**Demonstração:** Enquanto as curvas da evolução limitarem alguma área, a curvatura de Minkowski permanece limitada, pela Proposição 4.11. Isso significa, em particular, que  $k_m$  é

solução limitada da equação

$$(k_m)_t = \frac{fk_m^2}{p^4}(k_m)_{\theta\theta} + \left( \frac{2f_{\theta}k_m^2}{p^4} - \frac{2fk_m^2}{p^5} \frac{dp}{d\theta} \right) (k_m)_{\theta} + k_m^3,$$

cujos coeficientes são uniformemente limitados, pois  $p$ ,  $\frac{dp}{d\theta}$ ,  $f$  e  $f_{\theta}$  são limitados e  $k_m^2, k_m^3$  são uniformemente limitados. Logo,

$$A_1 = \frac{fk_m^2}{p^4} > 0, \quad A_2 = \left( \frac{2f_{\theta}k_m^2}{p^4} - \frac{2fk_m^2}{p^5} \frac{dp}{d\theta} \right), \quad A_3 = k_m^3$$

são uniformemente limitadas.

Pela estimativa de De Giorgi-Nash (Teorema 4.4),  $k_m$  é uniformemente limitada na norma  $C^{\alpha/2, \alpha}$ . Usando indutivamente as estimativas de Schauder (Teorema 4.3), concluímos que  $k_m$  é controlada na topologia  $C^l$  para qualquer  $l \geq 0$ . Pelo argumento usado na demonstração da Proposição 4.1, a solução existe enquanto existir área limitada pelas curvas da evolução. Como em  $T^* = \frac{A_0}{2A(R)}$  temos  $A = 0$ , segue que este é o tempo maximal. ■

**Proposição 4.13.** *Para qualquer solução de (4.33), as curvas da evolução convergem na topologia de Hausdorff para um ponto quando  $t \rightarrow T^*$ .*

**Demonstração:** Pela Proposição 4.11, necessariamente  $A(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow T^*$ . Assim, pelo Teorema de seleção de Blaschke (Teorema 4.5), existe uma sequência  $t_i \rightarrow +\infty$  ao longo da qual as curvas da evolução convergem para uma curva convexa de área nula. Temos então duas possibilidades para a curva limite: um segmento de reta ou um ponto. No primeiro caso, a curvatura de Minkowski convergiria para zero, o que contraria (4.36). ■

## 4.4 Normalizando o fluxo

Vimos na seção anterior, Proposição 4.13, que o fluxo pela curvatura de Minkowski

$$Z_t = fk_m N \tag{4.43}$$

contraí uma curva convexa a um ponto em tempo finito, no sentido que a área delimitada pelas curvas da evolução se anula precisamente em  $t = T^*$ . O propósito desta seção é iniciar a análise do comportamento assintótico da solução quando  $t \rightarrow T^*$ . Normalizaremos o fluxo de tal forma que as curvas da evolução possuam todas a mesma área.

Seja  $Z = Z(t, \theta) : [0, T^*) \times \mathbb{T} \rightarrow X$  uma solução maximal de (4.43). Definamos o fluxo  $\bar{Z} = \bar{Z}(\tau, \theta) : [0, +\infty) \times \mathbb{T} \rightarrow X$  por

$$\bar{Z}(\tau, \theta) = \mu Z(t, \theta), \tag{4.44}$$

onde  $\mu(t) = \sqrt{\frac{A(R)}{A(t)}}$  e o novo parâmetro temporal relaciona-se com o tempo original através de

$\frac{dt}{d\tau} = \mu^{-2}$ . Logo,

$$\begin{cases} A = A(t) = 2A(R)(T^* - t) \\ \mu = (2T^* - 2t)^{-1/2} \\ \tau = -\frac{1}{2} \log(2T^* - 2t) \end{cases} . \quad (4.45)$$

**Observação 4.4.** O fluxo  $\bar{Z}$  está definido para  $\tau \in [0, +\infty)$ . Geometricamente, o que fizemos foi aplicar uma homotetia de fator  $\mu$  às curvas do fluxo original  $Z$ , de tal modo que

$$A(\bar{Z}) = \mu^2 A(Z) = A(R).$$

**Observação 4.5.** Embora o parâmetro espacial que aparece em  $\bar{Z}$  seja denotado por  $\theta$ , ele não corresponde necessariamente a algum parâmetro angular definido sobre as curvas normalizadas, já que homotetias não preservam ângulos em geral.

Sendo assim, vamos escrever a normalização como

$$\bar{Z}(\tau, \bar{\theta}) = \mu Z(t, \theta),$$

onde  $\bar{\theta} = \bar{\theta}(\theta)$  é uma mudança regular de parâmetros. Sejam  $\bar{k}_m$  e  $\bar{k}_e$  as curvaturas de Minkowski e Euclidiana das curvas normalizadas, respectivamente. Sabemos que, no caso Euclidiano,  $\bar{k}_e = \frac{k_e}{\mu}$ , já que  $\bar{Z}$  e  $Z$  são homotéticas com fator de homotetia  $\mu$ . Daí, por (3.32),

$$\bar{k}_m = p^3 \bar{k}_e = p^3 \frac{k_e}{\mu} = \frac{k_m}{\mu}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \tau} &= \frac{\partial \bar{Z}}{\partial t} \frac{dt}{d\tau} = \left( \frac{d\mu}{dt} Z + \mu \frac{\partial Z}{\partial t} \right) \mu^{-2} \\ &= (\mu^3 Z + \mu f k_m N) \mu^{-2} \\ &= \mu Z + \frac{f k_m N}{\mu} \\ &= \bar{Z} + f \bar{k}_m N. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Pela equação (5.36) de [14], se  $\bar{h}$  é a função suporte Euclidiana de  $\bar{Z}$ , então

$$\bar{Z} = \bar{h}_\theta T_e - \bar{h} N_e.$$

Como já vimos,  $T = pT_e$  e  $N = \alpha T_e + \beta N_e$ , com  $\beta = \frac{1}{p}$ , daí

$$\langle T, N \rangle = \langle pT_e, \alpha T_e + \beta N_e \rangle = \alpha p.$$

Deste modo,

$$N_e = pN - \frac{\alpha p T}{p} = pN - \frac{\langle T, N \rangle T}{p}$$

e

$$\bar{Z} = \left( \frac{\bar{h}_\theta}{p} + \frac{\bar{h}\langle T, N \rangle}{p} \right) T - \bar{h}pN.$$

Donde segue,

$$\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \tau} = \left( \frac{\bar{h}_\theta}{p} + \frac{\bar{h}\langle T, N \rangle}{p} \right) T + (f\bar{k}_m - \bar{h}p)N. \quad (4.47)$$

Como  $f\bar{k}_m - \bar{h}p$  é geométrica, pela Proposição 4.6, o fluxo (4.47) é geometricamente equivalente ao fluxo

$$\bar{Z}_\tau = (f\bar{k}_m - \bar{h}p)N, \quad (4.48)$$

onde agora o parâmetro espacial em  $\bar{Z}$  voltou a ser o parâmetro angular  $\theta$  e o subíndice  $\tau$  representará, a partir de agora, derivadas com relação a  $\tau$  com  $\theta$  fixado.

Diremos que o fluxo (4.48) é o **fluxo pela curvatura de Minkowski normalizado**. Notemos que esta normalização implica que a convergência de uma curva convexa pelo fluxo original a um ponto “redondo” é equivalente a convergência da normalização desta curva a uma curva  $\Gamma$  homotética a curva centróide da bola unitária, de área  $A(R)$ , pelo fluxo normalizado. Nosso objetivo será então mostrar que, para qualquer curva inicial convexa  $\bar{Z}(0, \cdot)$  de área  $A(R)$ ,  $\bar{Z}(\tau, \cdot)$  converge em  $C^\infty$  para  $\Gamma$  quando  $\tau \rightarrow +\infty$ .

Antes de começar a análise assintótica de (4.48), determinemos as equações de evolução dos diversos invariantes geométricos de uma curva que evolui de acordo com (4.48). Estas equações são obtidas fazendo  $a = f\bar{k}_m - \bar{h}p$  nas fórmulas correspondentes para (4.16).

**Proposição 4.14.** *A função suporte, a curvatura de Minkowski, o comprimento e a área das curvas normalizadas evoluem por (4.48) de acordo com*

$$a. \quad \bar{h}_\tau = -\frac{f\bar{k}_m}{p} + \bar{h}; \quad (4.49)$$

$$b. \quad (\bar{k}_m)_\tau = \frac{f\bar{k}_m^2}{p^4} (\bar{k}_m)_{\theta\theta} + \left( \frac{2f_\theta \bar{k}_m^2}{p^4} - \frac{2f\bar{k}_m^2}{p^5} \frac{dp}{d\theta} \right) (\bar{k}_m)_\theta + \bar{k}_m^3 - \bar{k}_m; \quad (4.50)$$

$$c. \quad \frac{d\bar{L}}{d\tau} = \bar{L} - \int_{\mathbb{T}} \frac{f\bar{k}_m}{p^2} d\theta; \quad (4.51)$$

$$d. \quad \frac{d\bar{A}}{d\tau} = 0. \quad (4.52)$$

**Demonstração:** Temos:

a. Por (4.21),

$$\bar{h}_\tau = -\frac{a}{p} = -\frac{f\bar{k}_m}{p} + \bar{h}.$$

b. Como

$$\bar{h}_{\tau\theta} = -\frac{f_\theta \bar{k}_m}{p} - \frac{f(\bar{k}_m)_\theta}{p} + \frac{f\bar{k}_m}{p^2} \frac{dp}{d\theta} + \bar{h}_\theta,$$

então

$$\bar{h}_{\tau\theta\theta} = -\left( \frac{f_\theta \bar{k}_m}{p} \right)_\theta - \left( \frac{f(\bar{k}_m)_\theta}{p} \right)_\theta + \left( \frac{f\bar{k}_m}{p^2} \frac{dp}{d\theta} \right)_\theta + \bar{h}_{\theta\theta},$$

e por (4.23) e (4.24),

$$\begin{aligned} (\bar{k}_m)_\tau &= \frac{f\bar{k}_m^2}{p^4}(\bar{k}_m)_{\theta\theta} + \left( \frac{2f\theta\bar{k}_m^2}{p^4} - \frac{2f\bar{k}_m^2}{p^5} \frac{dp}{d\theta} \right) (\bar{k}_m)_\theta + \bar{k}_m^3 - \frac{\bar{k}^2}{p^3}(\bar{h}_{\theta\theta} + \bar{h}) \\ &= \frac{f\bar{k}_m^2}{p^4}(\bar{k}_m)_{\theta\theta} + \left( \frac{2f\theta\bar{k}_m^2}{p^4} - \frac{2f\bar{k}_m^2}{p^5} \frac{dp}{d\theta} \right) (\bar{k}_m)_\theta + \bar{k}_m^3 - \bar{k}_m. \end{aligned}$$

c. Por (4.20) e (4.22),

$$\frac{d\bar{L}}{d\tau} = \int_{\mathbb{T}} \left( \bar{h} - \frac{f\bar{k}_m}{p} \right) \frac{1}{p} d\theta = \int_{\mathbb{T}} \frac{\bar{h}}{p} d\theta - \int_{\mathbb{T}} \frac{f\bar{k}_m}{p^2} d\theta = \bar{L} - \int_{\mathbb{T}} \frac{f\bar{k}_m}{p^2} d\theta.$$

d. Como  $A(\bar{Z}) = A(R)$ , então  $\frac{dA}{d\tau} = 0$ . ■

Vimos que o fluxo pela curvatura de Minkowski desenvolve uma singularidade em tempo finito. Agora queremos demonstrar que, para qualquer curva convexa de área  $A(R)$  como dado inicial, a solução correspondente ao fluxo normalizado (4.48) converge, quando  $\tau \rightarrow +\infty$ , para uma solução estacionária do problema, ou seja, um dado inicial que possui a propriedade de permanecer invariante ao longo da evolução. Dito isso, tentaremos então classificar as soluções estacionárias de (4.48), pois isto apontará que possíveis comportamentos assintóticos podem efetivamente ocorrer. A proposição a seguir caracteriza as soluções estacionárias de (4.48).

**Proposição 4.15.** *Seja  $\gamma_0$  uma curva estritamente convexa de área  $A(R)$  e seja  $\bar{Z} = \bar{Z}(\tau, \theta)$  a solução maximal de (4.48) com condição inicial  $\bar{Z}(0, \cdot) = \gamma_0(\cdot)$ . Então são equivalentes:*

(1)  $\gamma_0$  é uma solução estacionária de (4.48), ou seja,  $\bar{Z}_\tau = 0$ ;

(2)  $\bar{h} = \frac{f\bar{k}_m}{p}$ ;

(3)  $(\bar{k}_m)_\tau = 0$ , ou seja,  $\frac{f\bar{k}_m^2}{p^4}(\bar{k}_m)_{\theta\theta} + \left( \frac{2f\theta\bar{k}_m^2}{p^4} - \frac{2f\bar{k}_m^2}{p^5} \frac{dp}{d\theta} \right) (\bar{k}_m)_\theta + \bar{k}_m^3 = \bar{k}_m$ ;

(4)  $\gamma_0$  é uma solução homotética de (4.43), isto é, se  $Z = Z(t, \theta)$ ,  $t \in [0, T^*)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ , é solução de (4.43) com  $Z(0, \cdot) = \gamma_0(\cdot)$ , então cada  $Z(t, \cdot)$  difere de  $\gamma_0$  por uma homotetia centrada em algum ponto que não depende de  $t$ .

**Demonstração:** Mostremos que (1) implica (2). Se  $\bar{Z}_\tau = 0$ , então por (4.48),  $f\bar{k}_m - \bar{h}p = 0$ , isto é,

$$\bar{h} = \frac{f\bar{k}_m}{p}.$$

Mostremos que (2) implica (3). Como  $\bar{k}_m = \frac{p\bar{h}}{f}$ , então

$$(\bar{k}_m)_\tau = \frac{p}{f} \bar{h}_\tau.$$

Por (4.49),

$$\bar{h}_\tau = \bar{h} - \frac{f\bar{k}_m}{p} = \frac{f\bar{k}_m}{p} - \frac{f\bar{k}_m}{p} = 0.$$

Logo,  $(\bar{k}_m)_\tau = 0$ .

Mostremos que (3) implica (4). Como  $(\bar{k}_m)_\tau = 0$ , então as curvas  $\bar{Z}(\tau, \cdot)$  são invariantes ao longo da evolução. Sendo  $\bar{Z} = \mu Z$ , então as curvas  $Z(t, \cdot)$  são homotéticas à  $\gamma_0$  com fator de homotetia  $\frac{1}{\mu}$  e estão centradas em algum ponto que não depende de  $t$ .

Por fim, mostremos que (4) implica (1). Como  $\gamma_0$  é uma solução homotética de (4.43) e as curvas  $Z(0, \cdot)$  estão centradas num ponto que não depende de  $t$ , então

$$Z = a(t)\gamma_0$$

para alguma função positiva  $a$ . Daí,

$$A(Z(t, \cdot)) = a^2(t)A(\gamma_0(\cdot)).$$

Como  $A(\gamma_0(\cdot)) = A(R)$ , então

$$\mu = \sqrt{\frac{A(R)}{a^2(t)A(\gamma_0)}} = \frac{1}{a(t)} \sqrt{\frac{A(R)}{A(\gamma_0)}} = \frac{1}{a(t)}.$$

Daí,

$$\bar{Z} = \mu Z = \frac{1}{a(t)} Z = \frac{1}{a(t)} a(t)\gamma_0 = \gamma_0,$$

donde segue que  $(\bar{Z})_\tau = (\gamma_0)_\tau = 0$ . ■

A conclusão é que a análise assintótica do fluxo pela curvatura e, portanto, a demonstração do Teorema 4.9 estará concluída se demonstrarmos os seguintes resultados.

**Teorema 4.11.** *Sejam  $\gamma_0$  uma curva convexa de área  $A(R)$  e  $\bar{Z} = \bar{Z}(\tau, \theta)$  a solução de (4.48) com condição inicial  $\bar{Z}(0, \cdot) = \gamma_0(\cdot)$ . Então  $\bar{Z}(\tau, \cdot)$  converge em  $C^\infty$  para uma solução estacionária de (4.48) quando  $\tau \rightarrow +\infty$ .*

**Teorema 4.12.** *Seja  $\gamma$  uma curva simples que é uma solução homotética de (4.43). Então  $\gamma$  é homotética a curva centróide da bola unitária.*

Na próxima seção demonstraremos estes resultados.

## 4.5 Comportamento no infinito

Como, pela Proposição 4.15, a caracterização de soluções estacionárias do fluxo normalizado (4.48) envolve tanto a função suporte como a curvatura de Minkowski, a correspondente análise assintótica depende do estabelecimento de controles uniformes para estas quantidades quando  $\tau \rightarrow +\infty$ .

**Proposição 4.16.**  *$\bar{k}_m$  é uniformemente limitada para todo  $(\tau, \theta) \in [0, +\infty) \times \mathbb{T}$ .*

**Demonstração:** A demonstração desta proposição não é simples, mas segue de maneira análoga ao Teorema 7.5 em [20], tomando  $\gamma = fp^2$ . ■

**Proposição 4.17.** *Para cada  $l \geq 0$ , existe  $C_l > 0$  tal que  $\|\bar{k}_m\|_{C^l([0,+\infty) \times \mathbb{T})} \leq C_l$ .*

**Demonstração:** Sabemos que

$$(\bar{k}_m)_\tau = \frac{f\bar{k}_m^2}{p^4}(\bar{k}_m)_{\theta\theta} + \left( \frac{2f\theta\bar{k}_m^2}{p^4} - \frac{2f\bar{k}_m^2}{p^5} \frac{dp}{d\theta} \right) (\bar{k}_m)_\theta + \bar{k}_m^3 - \bar{k}_m, \quad (4.53)$$

onde  $\frac{f\bar{k}_m^2}{p^4} > 0$ . Como, pela Proposição 4.16,  $\bar{k}_m$  é limitada, então  $\bar{k}_m^2$  e  $\bar{k}_m^3$  também são limitadas.

Logo,  $\left( \frac{2f\theta\bar{k}_m^2}{p^4} - \frac{2f\bar{k}_m^2}{p^5} \frac{dp}{d\theta} \right)$  e  $(\bar{k}_m^3 - \bar{k}_m)$  estão controladas na norma  $C^0(U_T)$ .

Podemos então aplicar De Giorgi-Nash (Teorema 4.4), que garante que existe  $\alpha \in (0, 1)$  tal que  $\bar{k}_m$  está controlada na norma  $C^{\alpha/2, \alpha}(U_T)$ . Deste modo,  $\bar{k}_m^3 \in C^{\alpha/2, \alpha}(U_T)$ ,  $\bar{k}_m(0, \cdot) \in C^{2+\alpha}(\mathbb{T})$  e

$$\left\| \frac{f\bar{k}_m^2}{p^4} \right\|_{C^{\alpha/2, \alpha}(U_T)} + \left\| \frac{2f\theta\bar{k}_m^2}{p^4} - \frac{2f\bar{k}_m^2}{p^5} \frac{dp}{d\theta} \right\|_{C^{\alpha/2, \alpha}(U_T)} + \| -1 \|_{C^{\alpha/2, \alpha}(U_T)} \leq M,$$

para algum  $M > 0$ . Portanto, podemos aplicar Schauder (Teorema 4.3) a (4.53).

Aplicando recursivamente estas estimativas, concluímos o desejado. ■

**Proposição 4.18.** *Existe uma escolha da origem para  $\mathbb{R}^2$  tal que  $h_1 \leq \bar{h}(\tau, \theta) \leq h_2$  para qualquer  $(\tau, \theta) \in [0, +\infty) \times \mathbb{T}$ , para algumas constantes positivas  $h_1$  e  $h_2$ .*

Vimos em (4.39) que a largura Euclidiana de uma curva  $\bar{Z}$  na direção  $(\cos \theta_0, \sin \theta_0)$  é dada por

$$w^{(\tau)}(\theta_0) = \int_{\theta_0}^{\pi+\theta_0} \frac{\text{sen}(\theta - \theta_0)p^3}{\bar{k}_m} d\theta.$$

Pela desigualdade de Jensen (Proposição 4.2) aplicada a  $\varphi = -\log$ ,

$$\begin{aligned} \log w^{(\tau)}(\theta_0) &= \log \left( \frac{1}{\pi} \int_{\theta_0}^{\pi+\theta_0} \frac{\text{sen}(\theta - \theta_0)p^3(\theta)}{\bar{k}_m(\tau, \theta)} d\theta \right) + \log \pi \\ &= \log \left( \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\text{sen} \theta p^3(\theta + \theta_0)}{\bar{k}_m(\tau, \theta + \theta_0)} d\theta \right) + \log \pi \\ &\geq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log(\text{sen} \theta p^3(\theta + \theta_0)) d\theta + \log \pi - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log \bar{k}_m(\tau, \theta + \theta_0) d\theta. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \log w^{(\tau)}(\theta_0 + \pi) &= \log \left( \frac{1}{\pi} \int_{\pi+\theta_0}^{2\pi+\theta_0} \frac{\text{sen}(\theta - \pi - \theta_0)p^3(\theta)}{\bar{k}_m(\tau, \theta)} d\theta \right) + \log \pi \\ &= \log \left( \frac{1}{\pi} \int_\pi^{2\pi} \frac{\text{sen}(\theta - \pi)p^3(\theta + \theta_0)}{\bar{k}_m(\tau, \theta + \theta_0)} d\theta \right) + \log \pi, \end{aligned}$$

donde, novamente pela desigualdade de Jensen,

$$\log w^{(\tau)}(\theta_0 + \pi) \geq \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \log(\sin(\theta - \pi)p^3(\theta + \theta_0))d\theta + \log \pi - \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \log \bar{k}_m(\tau, \theta + \theta_0)d\theta.$$

Como  $\log w^{(\tau)}(\theta_0) = \log w^{(\tau)}(\theta_0 + \pi)$ , temos

$$\begin{aligned} \log w^{(\tau)}(\theta_0) &= \frac{1}{2} \left[ \log w^{(\tau)}(\theta_0) + \log w^{(\tau)}(\theta_0 + \pi) \right] \\ &\geq \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log(\sin \theta p^3(\theta + \theta_0))d\theta + \log \pi - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log \bar{k}_m(\tau, \theta + \theta_0)d\theta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \log(\sin(\theta - \pi)p^3(\theta + \theta_0))d\theta + \log \pi - \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \log \bar{k}_m(\tau, \theta + \theta_0)d\theta \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \log(\sin \theta p^3(\theta + \theta_0))d\theta + \log \pi - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \log \bar{k}_m(\tau, \theta)d\theta. \end{aligned}$$

Queremos mostrar que

$$\int_{\mathbb{T}} \log \bar{k}_m(\tau, \theta)d\theta > -\infty,$$

para obtermos uma cota inferior independente de  $\tau$  para a largura de  $\bar{Z}$ .

Para tanto, iremos precisar de alguns resultados.

**Lema 4.3.** *Seja  $u = (\log k_m)_t$ . Então  $u$  satisfaz*

$$u_t = \frac{fk_m^2}{p^4}u_{\theta\theta} + \frac{2k_m}{p^3} \left( \frac{fk_m}{p} \right)_{\theta} u_{\theta} + 2u^2.$$

**Demonstração:** Como  $u = (\log k_m)_t$ , então pela equação (4.24),

$$u = \frac{(k_m)_t}{k_m} = \frac{fk_m}{p^4}(k_m)_{\theta\theta} + \left( \frac{2f_{\theta}k_m}{p^4} - \frac{2fk_m}{p^5} \frac{dp}{d\theta} \right) (k_m)_{\theta} + k_m^2$$

e daí,

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{f}{p^4}(k_m)_t(k_m)_{\theta\theta} + \frac{f}{p^4}k_m(k_m)_{\theta\theta t} + \left( \frac{2f_{\theta}}{p^4} - \frac{2f}{p^5} \frac{dp}{d\theta} \right) (k_m)_t(k_m)_{\theta} + \\ &\quad + \left( \frac{2f_{\theta}}{p^4} - \frac{2f}{p^5} \frac{dp}{d\theta} \right) k_m(k_m)_{\theta t} + 2k_m(k_m)_t. \end{aligned}$$

Usando novamente que  $u = \frac{(k_m)_t}{k_m}$ ,

$$\begin{aligned}
u_t &= k_m \left( \frac{f}{p^4} (k_m)_{\theta\theta} + \left( \frac{2f\theta}{p^4} - \frac{2f}{p^5} \frac{dp}{d\theta} \right) (k_m)_\theta + k_m \right) \frac{(k_m)_t}{k_m} + k_m (k_m)_t + \\
&\quad + \frac{f}{p^4} k_m (k_m)_{\theta\theta t} + \left( \frac{2f\theta}{p^4} - \frac{2f}{p^5} \frac{dp}{d\theta} \right) k_m (k_m)_{\theta t} \\
&= u^2 + k_m^2 u + \frac{f}{p^4} k_m (uk_m)_{\theta\theta} + \left( \frac{2f\theta}{p^4} - \frac{2f}{p^5} \frac{dp}{d\theta} \right) k_m (uk_m)_\theta \\
&= u^2 + k_m^2 u + \frac{f}{p^4} (k_m^2 u_{\theta\theta} + k_m (k_m)_{\theta\theta} u + 2k_m (k_m)_\theta u_\theta) + \left( \frac{2f\theta}{p^4} - \frac{2f}{p^5} \frac{dp}{d\theta} \right) (k_m^2 u_\theta + \\
&\quad + k_m (k_m)_\theta u) \\
&= u^2 + u \left( k_m^2 + \frac{fk_m}{p^4} (k_m)_{\theta\theta} + \left( \frac{2f\theta k_m}{p^4} - \frac{2fk_m}{p^5} \frac{dp}{d\theta} \right) (k_m)_\theta \right) + \frac{fk_m^2}{p^4} u_{\theta\theta} + \\
&\quad + \frac{2k_m}{p^3} \left( \frac{fk_m}{p} \right)_\theta u_\theta \\
&= 2u^2 + \frac{fk_m^2}{p^4} u_{\theta\theta} + \frac{2k_m}{p^3} \left( \frac{fk_m}{p} \right)_\theta u_\theta,
\end{aligned}$$

como queríamos. ■

Consideremos o funcional entropia

$$\varepsilon(t) = \int_{\mathbb{T}} fp^2 \log k_m d\theta.$$

**Proposição 4.19.**

$$\varepsilon_t = \int_{\mathbb{T}} fp^2 (\log k_m)_t d\theta \leq \frac{\int_{\mathbb{T}} fp^2 d\theta}{2} \frac{1}{T^* - t}, \quad (4.54)$$

onde  $T^*$  é o tempo em que a curvatura se torna infinita.

**Demonstração:** Usando o Lema 4.3, a demonstração desta proposição segue de maneira análoga a demonstração da Proposição 5.1 em [20]. ■

**Proposição 4.20.**

$$\bar{\varepsilon}(\tau) = \int_{\mathbb{T}} fp^2 \log \bar{k}_m d\theta \leq C, \quad (4.55)$$

onde  $C$  depende somente da curva inicial, e

$$\bar{\varepsilon}_\tau(\tau) = \left( \int_{\mathbb{T}} fp^2 \log \bar{k}_m d\theta \right)_\tau \leq 0. \quad (4.56)$$

**Demonstração:** Demonstraremos primeiro (4.56).

$$\bar{\varepsilon}_\tau(\tau) = \left( \int_{\mathbb{T}} fp^2 \log \bar{k}_m d\theta \right)_\tau = \left( \int_{\mathbb{T}} fp^2 \frac{(\bar{k}_m)_\tau}{\bar{k}_m} d\theta \right).$$

Daí, pela equação (4.50), e usando que  $\bar{k}_m = \frac{k_m}{\mu}$ , temos

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_\tau(\tau) &= \int_{\mathbb{T}} fp^2 \left( \frac{f\bar{k}_m}{p^4} (\bar{k}_m)_{\theta\theta} + \left( \frac{2f\theta\bar{k}_m}{p^4} - \frac{2f\bar{k}_m}{p^5} \frac{dp}{d\theta} \right) (\bar{k}_m)_\theta + \bar{k}_m^2 - 1 \right) d\theta \\ &= \int_{\mathbb{T}} \frac{fp^2}{\mu^2} \left( \frac{fk_m}{p^4} (k_m)_{\theta\theta} + \left( \frac{2f\theta k_m}{p^4} - \frac{2fk_m}{p^5} \frac{dp}{d\theta} \right) (k_m)_\theta + k_m^2 \right) d\theta - \int_{\mathbb{T}} fp^2 d\theta \\ &= \int_{\mathbb{T}} \frac{fp^2}{\mu^2} u d\theta - \int_{\mathbb{T}} fp^2 d\theta.\end{aligned}$$

Por (4.45) e (4.54), temos

$$\bar{\varepsilon}_\tau(\tau) \leq \frac{\int_{\mathbb{T}} fp^2 d\theta}{2} \frac{(2T^* - 2t)}{T^* - t} - \int_{\mathbb{T}} fp^2 d\theta \leq 0.$$

Resta demonstrarmos (4.55). Como  $\bar{\varepsilon}_\tau \leq 0$ , então  $\bar{\varepsilon}$  é não-crescente. Daí, para todo  $\tau \in [0, +\infty)$ , existe  $C > 0$ , que depende somente da curva inicial, tal que

$$\bar{\varepsilon}(\tau) \leq \bar{\varepsilon}(0) = \int_{\mathbb{T}} fp^2 \log \bar{k}_m(0, \theta) d\theta \leq C,$$

pois  $f, p$  e  $\bar{k}_m(0, \cdot)$  são limitadas em  $[0, 2\pi]$ . ■

Como consequência desta proposição,

$$f_{\min} p_{\min}^2 \int_{\mathbb{T}} \log \bar{k}_m d\theta \leq \bar{\varepsilon}(\tau) \leq C.$$

Definindo  $\tilde{C} := \frac{C}{f_{\min} p_{\min}^2}$  temos que  $\tilde{C}$  não depende de  $\tau$  e  $\int_{\mathbb{T}} \log \bar{k}_m d\theta \leq \tilde{C}$ . Logo,

$$\begin{aligned}\log w^{(\tau)}(\theta) &\geq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log \sin \theta p^3(\theta + \theta_0) d\theta + \log \pi - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \log \bar{k}_m d\theta \\ &\geq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log p^3(\theta + \theta_0) d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log \sin \theta d\theta + \log \pi - \frac{2\pi}{2\pi} \tilde{C} \\ &\geq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log p^3(\theta + \theta_0) d\theta + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \log \sin \theta d\theta + \log \pi - \tilde{C} > -\infty,\end{aligned}$$

já que  $\int_0^\pi \log \sin \theta d\theta > -2.2$ .

Portanto, existe uma cota inferior positiva para a largura mínima  $w_{\min}^{(\tau)} = \min_{\theta} w(\tau, \theta)$  das curvas da evolução que independe de  $\tau$ ,

$$w_{\min}^{(\tau)} \geq C' > 0, \quad 0 \leq \tau < +\infty.$$

Em particular, existe  $\rho > 0$  tal que para cada  $\tau > 0$  existe um disco aberto Euclidiano  $D_\tau$  de raio  $\rho$  inteiramente contido no interior de  $\bar{Z}^{(\tau)}$ .

*Afirmção: Este disco pode ser escolhido independentemente de  $\tau$ .*

Existe uma demonstração dessa afirmação em [20], Teorema 7.2, para o caso da evolução de

curvas planas pela curvatura Euclidiana. O nosso caso é verificado de maneira análoga, tendo uma pequena variação nos cálculos e por isso, será omitida.

Deste modo, se usarmos o centro deste disco como origem teremos automaticamente a cota inferior

$$\bar{h}^{(\tau)} \geq h_1 = \frac{\rho}{2},$$

onde  $\bar{h}^{(\tau)}(\cdot) = \bar{h}(\tau, \cdot)$  e  $h_1$  aparece na Proposição 4.18.

Para estimarmos  $\bar{h}^{(\tau)}$  superiormente vamos precisar do seguinte resultado:

**Lema 4.4** ([20], Lema 6.4). *Seja  $\gamma$  uma curva convexa. Então*

$$D \leq \frac{2\bar{A}}{\min_{\theta} w(\theta)},$$

onde  $D$  é o diâmetro Euclidiano de  $\gamma$  e  $\bar{A}$  é a área de  $\gamma$ .

Pelo Lema 4.4 e pela escolha da origem, se  $D^{(\tau)}$  é o diâmetro de  $\bar{Z}(\tau, \cdot)$ , então

$$\bar{h}^{(\tau)} \leq D^{(\tau)} \leq \frac{2A(R)}{C'} = h_2,$$

como queríamos.

Infelizmente, o controle obtido na norma  $C^0$  sobre a função suporte não é suficiente para controlarmos suas derivadas. A razão é que a equação de evolução para  $\bar{h}$  não é muito tratável. De fato, em (4.18) e (4.49), vimos que

$$\bar{h}_{\tau} = -\frac{f}{p}p^3(\bar{h}_{\theta\theta} + \bar{h})^{-1} + \bar{h} = -fp^2(\bar{h}_{\theta\theta} + \bar{h})^{-1} + \bar{h}. \quad (4.57)$$

Derivando a equação acima com respeito a  $\theta$ , temos

$$\bar{h}_{\tau\theta} = (-fp^2)_{\theta}(\bar{h}_{\theta\theta} + \bar{h})^{-1} + fp^2 \frac{(\bar{h}_{\theta\theta\theta} + \bar{h}_{\theta})}{(\bar{h}_{\theta\theta} + \bar{h})^2} + \bar{h}_{\theta}.$$

Fazendo  $v = \bar{h}_{\theta}$ , encontramos

$$\begin{aligned} v_{\tau} &= (-fp^2)_{\theta} \frac{\bar{k}_m}{p^3} + fp^2 \frac{\bar{k}_m^2}{p^6} v_{\theta\theta} + fp^2 \frac{\bar{k}_m^2}{p^6} v + v \\ &= \frac{f\bar{k}_m^2}{p^4} v_{\theta\theta} + \left( \frac{f\bar{k}_m^2}{p^4} + 1 \right) v - (fp^2)_{\theta} \frac{\bar{k}_m}{p^3}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

**Proposição 4.21.** *Para cada  $l \geq 0$ , existe  $D_l > 0$  tal que  $\|\bar{h}\|_{C^l([0,+\infty) \times \mathbb{T})} \leq D_l$ .*

**Demonstração:** Por (4.58), a Proposição 4.16 e as estimativas de De Giorgi-Nash e Schauder, basta estimarmos  $v = \bar{h}_{\theta}$  uniformemente no tempo. Como, para cada  $\tau$ ,  $\bar{h}$  assume um máximo em algum  $\theta_{\tau}$ , podemos integrar (4.18) entre  $\theta_{\tau}$  e  $\theta$  e obter, uniformemente em  $\tau$ ,

$$|\bar{h}_{\theta}| \leq \int_{\mathbb{T}} \frac{p^3}{\bar{k}_m} d\theta + \int_{\mathbb{T}} \bar{h} d\theta = \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{\bar{k}_e} d\theta + \int_{\mathbb{T}} \bar{h} d\theta \leq 2\pi(D^{(\tau)} + h_2) \leq 4\pi h_2,$$

pela Proposição 4.18 e pelo Lema 4.4. ■

De posse das estimativas sobre  $\bar{h}$  e  $\bar{k}_m$ , podemos agora estudar o comportamento assintótico de soluções de (4.48). Consideremos o funcional

$$\mathcal{I}(\tau) = \int_{\mathbb{T}} (\bar{h}_\theta^2 - \bar{h}^2 + 2fp^2 \log \bar{h}) d\theta.$$

Pela Proposição 4.18 e por (4.19),

$$\mathcal{I}(\tau) = -2\bar{A} + 2 \int_{\mathbb{T}} fp^2 \log \bar{h} d\theta \geq -2A(R) + 4\pi \log h_1 f_{min} p_{min}^2$$

e

$$\mathcal{I}(\tau) = -2\bar{A} + 2 \int_{\mathbb{T}} fp^2 \log \bar{h} d\theta \leq -2A(R) + 4\pi \log h_2 f_{max} p_{max}^2,$$

isto é,  $\mathcal{I}$  é limitado inferiormente e superiormente por constantes independentes de  $\tau$ . Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\tau &= 2 \int_{\mathbb{T}} \left( \bar{h}_\theta \bar{h}_{\theta\tau} - \bar{h} \bar{h}_\tau + fp^2 \frac{\bar{h}_\tau}{\bar{h}} \right) d\theta \\ &= -2 \int_{\mathbb{T}} \left( (\bar{h}_{\theta\theta} + \bar{h}) \bar{h}_\tau - fp^2 \frac{\bar{h}_\tau}{\bar{h}} \right) d\theta \\ &= -2 \int_{\mathbb{T}} \left( \frac{p^3}{\bar{k}_m} \bar{h}_\tau - fp^2 \frac{\bar{h}_\tau}{\bar{h}} \right) d\theta \\ &= -2 \int_{\mathbb{T}} \frac{p^3 \bar{h} \bar{h}_\tau - fp^2 \bar{k}_m \bar{h}_\tau}{\bar{k}_m \bar{h}} d\theta \\ &= -2 \int_{\mathbb{T}} \frac{p}{\bar{k}_m \bar{h}} \bar{h}_\tau (p^2 \bar{h} - fp \bar{k}_m) d\theta. \end{aligned}$$

Usando (4.49),

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\tau &= -2 \int_{\mathbb{T}} \frac{p}{\bar{k}_m \bar{h}} \left( -\frac{f \bar{k}_m}{p} + \bar{h} \right) (p^2 \bar{h} - fp \bar{k}_m) d\theta \\ &= -2 \int_{\mathbb{T}} \frac{p}{\bar{k}_m \bar{h}} (-fp \bar{k}_m \bar{h} + f^2 \bar{k}_m^2 + p^2 \bar{h}^2 - fp \bar{k}_m \bar{h}) d\theta \\ &= -2 \int_{\mathbb{T}} \frac{p}{\bar{k}_m \bar{h}} (p \bar{h} - f \bar{k}_m)^2 d\theta, \end{aligned}$$

e como  $\bar{h}, \bar{k}_m$  e  $p$  estão controladas na norma  $C^l$ , existe uma constante  $\tilde{C} > 0$  tal que

$$\mathcal{I}_\tau \leq -\tilde{C} \|\bar{s}^{(\tau)}\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \leq 0,$$

onde  $\bar{s}^{(\tau)} = p \bar{h}^{(\tau)} - f \bar{k}_m^{(\tau)}$ , ou seja,  $\mathcal{I}$  é uma quantidade monótona para o fluxo normalizado. Daí, como  $\mathcal{I}$  é limitado inferiormente e superiormente e é não-crescente,

$$\int_0^{+\infty} \|\bar{s}^{(\tau)}\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 d\tau < +\infty,$$

donde segue que existe uma sequência  $\tau_i \rightarrow +\infty$  tal que  $\|\bar{s}^{(\tau_i)}\|_{L^2(\mathbb{T})} \rightarrow 0$ . Pelas Proposições 4.17 e 4.21 temos estimativas do tipo  $\|\bar{s}^{(\tau_i)}\|_{C^l(\mathbb{T})} \leq \tilde{D}_l$  para todo  $l \geq 0$ , então, pelo Teorema 4.1,  $\bar{s}^{(\tau_i)}$  converge em  $C^s(\mathbb{T})$  para todo  $s < l$ . Como  $\|\bar{s}^{(\tau_i)}\|_{L^2(\mathbb{T})} \rightarrow 0$ , então devemos ter  $\|\bar{s}^{(\tau_i)}\|_{C^l(\mathbb{T})} \rightarrow 0$  para qualquer  $l \geq 0$ . Novamente, pelas Proposições 4.17 e 4.21, podemos usar Ascoli-Arzelà (Teorema 4.1) para, eventualmente passando a uma subsequência, concluir que  $p\bar{h}^{(\tau_i)} \rightarrow p\tilde{h}$  e  $f\bar{k}_m^{(\tau_i)} \rightarrow f\tilde{k}_m$  em  $C^\infty(\mathbb{T})$ , onde  $\tilde{h}$  e  $\tilde{k}_m$  são funções positivas satisfazendo

$$p\tilde{h} = f\tilde{k}_m. \quad (4.59)$$

Mais ainda, como valem

$$\bar{h}_{\theta\theta} + \bar{h}^{(\tau_i)} = \frac{p^3}{\bar{k}_m^{(\tau_i)}}, \quad \int_{\mathbb{T}} \frac{p^3 e^{i\theta}}{\bar{k}_m^{(\tau_i)}} d\theta = 0,$$

no limite também valem

$$\tilde{h}_{\theta\theta} + \tilde{h} = \frac{p^3}{\tilde{k}_m}, \quad \int_{\mathbb{T}} \frac{p^3 e^{i\theta}}{\tilde{k}_m} d\theta = 0,$$

donde pela Proposição 4.4,  $\tilde{h}$  e  $\tilde{k}_m$  são, respectivamente, a função suporte e a curvatura de Minkowski de uma curva convexa que é uma solução estacionária de (4.48), em virtude de (4.59) e da Proposição 4.15. Com isso demonstramos o Teorema 4.11.

Resta demonstrarmos o Teorema 4.12, ou equivalentemente, pela Proposição 4.15, entendermos a estrutura do espaço de soluções periódicas  $\bar{k}_m : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  da equação diferencial ordinária

$$\frac{f\bar{k}_m^{-2}}{p^4} (\bar{k}_m)_{\theta\theta} + \left( \frac{2f_{\theta}\bar{k}_m^{-2}}{p^4} - \frac{2f\bar{k}_m^{-2}}{p^5} \frac{dp}{d\theta} \right) (\bar{k}_m)_{\theta} + \bar{k}_m^3 = \bar{k}_m. \quad (4.60)$$

Desenvolvendo a equação

$$\left( \frac{f\bar{k}_m}{p} \right)_{\theta\theta} + \frac{f\bar{k}_m}{p} = \frac{p^3}{\bar{k}_m} \quad (4.61)$$

e usando (4.12), verificamos que (4.60) e (4.61) são equivalentes.

Sendo assim, para demonstrarmos o Teorema 4.12, basta mostrarmos que a única solução de (4.61) com período  $2\pi$  é  $\bar{k}_m \equiv 1$ .

Com efeito, considere a função positiva, contínua e  $\pi$ -periódica  $\tilde{a}(\theta) = f(\theta)p^2(\theta)$ . Daí, a equação (4.61) pode ser reescrita como

$$\left( \frac{f\bar{k}_m}{p} \right)_{\theta\theta} + \frac{f\bar{k}_m}{p} = \frac{\tilde{a}(\theta)}{p}.$$

Pelo Teorema 4.8,  $\frac{f\bar{k}_m}{p}$  é a única solução  $2\pi$ -periódica de

$$u_{\theta\theta} + u - \frac{\tilde{a}(\theta)}{u} = 0, \quad (4.62)$$

onde  $\bar{k}_m$  é solução de (4.61). Como  $\bar{k}_m = 1$  é solução  $2\pi$ -periódica de (4.60), então também é

#### 4.5. COMPORTAMENTO NO INFINITO

---

solução  $2\pi$ -periódica de (4.61) e portanto deve ser única, caso contrário (4.62) possuiria mais de uma solução  $2\pi$ -periódica, contrariando o Teorema 4.8.

Demonstramos portanto o Teorema 4.12.

# Referências Bibliográficas

- [1] R. Ait-Haddou, L. Biard, and M. Slawinski. *Minkowski isoperimetric-hodograph curves*. Comput. Aided Geom. Design, 17:835–861, 2000.
- [2] H. Alencar e W. Santos. *Geometria das Curvas Planas*. Goiás, Brasil: CEGRAF-UFG, 2002.
- [3] J. Alonso and C. Benítez. *Area orthogonality in normed linear spaces*. Arch. Math., 68(1):70–76, 1997.
- [4] V. Balestro, H. Martini and E. Shonoda, *Concepts of curvatures in normed planes*. Expositiones Mathematicae., v. 37, p. 347-381, 2018.
- [5] O. A. Biberstein. *Elements de géométrie différentielle minkowskienne*. PhD thesis, Université de Montreal, 1957.
- [6] W. E. Boyce e R. C. diPrima. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- [7] H. Busemann. *The isoperimetric problem in the Minkowski plane*. Amer. J. Math., 69(4):863–871, 1947.
- [8] H. Busemann. *The foundations of Minkowskian geometry*. Comment. Math. Helvet., 24(1):156–187, 1950.
- [9] M. S. Carakushansky e G. M. S. M. de La Penha. *Introdução à álgebra linear linear*. São Paulo: Mcgrawhill,1976.309p.
- [10] G. D. Chakerian and H. Groemer. *Bodies of constant width*. In *Convexity and its Applications*, pages 49–96. Birkhäuser, Basel, 1983.
- [11] E. Coddington and N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations*. Tata McGraw-Hill Education, 1955.
- [12] M. Craizer. *Iteration of involutes of constant width curves in the Minkowski plane*. Beitr. Algebra Geom., 55(2):479–496, 2014.
- [13] M. Craizer, R. Teixeira, and V. Balestro. *Closed cycloids in a normed plane*. Monatshefte für Mathematik., v. 185, p. 43-60, 2017.
- [14] L. L. de Lima. *Fluxos Geométricos: uma introdução com exemplos*. I Colóquio de Matemática da Região Nordeste. 2011

- [15] C. Dohmen and Y. Giga. *Selfsimilar shrinking curves for anisotropic curvature flow equations*. (1994).
- [16] H. G. Eggleston, *Convexity*, Cambridge University Press, New York 1958.
- [17] A. Friedman, *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1983.
- [18] M. E. Gage. *Evolving plane curves by curvature in relative geometries*. Duke Math. J., 72(2):441–466, 1993.
- [19] M. Gage and R. S. Hamilton, *The heat equation shrinking convex plane curves*, J. Diff. Geometry, 23, 69-96 (1986).
- [20] M. E. Gage and Y. Li. *Evolving plane curves by curvature in relative geometries II*. Duke Math. J., 75(1):79–98, 1994.
- [21] M. Ghandehari. *Controlling curvature in Minkowski planes*. J. Math. Anal. Appl., 252:951–958, 2000.
- [22] M. Ghandehari. *Total curvature in Minkowski planes*. Libertas Math., 20:107–112, 2000.
- [23] H. Guggenheimer. *On plane Minkowski geometry*. Geom. Dedicata, 12(4):371–381, 1982.
- [24] Á. G. Horváth. *Isometries of Minkowski geometries*. ArXiv:<https://arxiv.org/abs/1401.4898>.
- [25] S. Izumiya, M. d. C. R. Fuster, M. A. S. Ruas, and F. Tari. *Differential Geometry from a Singularity Viewpoint*. World Scientific, 2015.
- [26] M. R. Jahnke, M. V. P. Garcia, e S. R. L. Garcia, *O Teorema de Arzelà-Ascoli e Aplicações à Análise*. IME-USP. Disponível em: <[https://www.ime.usp.br/arquivos/4congresso/12%20Max%20Reinhold%20Jahnke\\_N](https://www.ime.usp.br/arquivos/4congresso/12%20Max%20Reinhold%20Jahnke_N)>.
- [27] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons, Inc., (1978).
- [28] E. N. Lages. *Centro de Tecnologia da Universidade Federal de Alagoas*. Disponível em: <<http://www.ctec.ufal.br/professor/enl/mecsol1/7>>
- [29] G. M. Lieberman, *Second order parabolic differential equations*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1996.
- [30] E. L. Lima. *Curso de Análise, Volume 2*. Rio de Janeiro, Brasil: Projeto Euclides, 2015.
- [31] H. Martini and K. J. Swanepoel. *Equiframed curves—a generalization of Radon curves*. Monatsh. Math., 141(4):301–314, 2004.
- [32] H. Martini and K. J. Swanepoel. *The geometry of Minkowski spaces – a survey*. Part II. Expo. Math., 22(2):93–144, 2004.
- [33] H. Martini and K. J. Swanepoel. *Antinorms and Radon curves*. Aequationes Math., 72(1-2):110–138, 2006.

- [34] H. Martini, K. J. Swanepoel, and G. Weiß. *The geometry of Minkowski spaces – a survey*. Part I. Expo. Math., 19(2):97–142, 2001.
- [35] C. M. Petty. *On the geometry of the Minkowski plane*. Riv. Mat. Univ. Parma, 6:269–292, 1955.
- [36] D. Pinto e M. C. F. Morgado. *Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis*. 3. ed. Editora UFRJ, 2000.
- [37] M. H. Protter, H. F. Weinberger. *Maximum principles in differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [38] W. Rudin. *Real and complex analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, 1974.
- [39] I. Şerb. *Rectangular modulus, Birkhoff orthogonality and characterizations of inner product spaces*. Comment. Math. Univ. Carolin. 40(1), 107–119 (1999).
- [40] E. Shonoda and G. Weiß. *Brauner’s angle formula and the theory of curves in Minkowski planes and spaces*. In Proc. ICGG 2014, pages 121–129, Innsbruck, 2014.
- [41] W. Süss. *Kurzer Beweis eines Satzes von W. Blaschke über Eiliniien*. Tôhoku Math. J., 24:66–67, 1925.
- [42] A. C. Thompson. *Minkowski Geometry*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.