

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
Instituto de Ciências Exatas  
Programa de Pós-graduação em Estatística

Diego Dias de Carvalho Calazans

**AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DA CARTA  $\bar{X}$  COM USO DA REGRA  
SUPLEMENTAR 2-2 DE KHOO POR MEIO DE SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO**

**Belo Horizonte  
2021**

Diego Dias de Carvalho Calazans

**AVALIAÇÃO DA CARTA DE  $\bar{X}$  COM USO DA REGRA SUPLEMENTAR 2-2 DE  
KHOO POR MEIO DE SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO**

Monografia apresentada ao Programa de Especialização em Estatística da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) como requisito parcial para a obtenção do título de Especialista em Estatística.

Orientador: Prof. Dr. Roberto da Costa Quinino

**Belo Horizonte**

**2021**

2021, Diego Dias de Carvalho Calazans.  
Todos os direitos reservados

Calazans, Diego Dias de Carvalho.

C143a Avaliação do desempenho da carta  $\bar{X}$ -bar com uso da Regra Suplementar 2-2 de Khoo por meio de simulação de Monte Carlo [manuscrito]. / Diego Dias de Carvalho Calazans — 2021.  
35.f. : il. ; 29cm.

Orientador: Roberto da Costa Quinino.  
Monografia (especialização) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Estatística.  
Referências: 30-31.

1. Estatística. 2. Carta de controle  $\bar{X}$  de Shewhart 3. Comprimento médio de sequência; I. Quinino, Roberto da Costa. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Estatística. III. Título.

CDU 519.2 (043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende Costa CRB 6ª Região nº 1510



Universidade Federal de Minas Gerais  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Estatística  
Programa de Pós-Graduação / Especialização  
Av. Pres. Antônio Carlos, 6627 - Pampulha  
31270-901 – Belo Horizonte – MG

E-mail: [pgest@ufmg.br](mailto:pgest@ufmg.br)  
Tel: 3409-5923 – FAX: 3409-5924

### ATA DO 230º. TRABALHO DE FIM DE CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ESTATÍSTICA DE DIEGO DIAS DE CARVALHO CALAZANS.

Aos trinta dias do mês de julho de 2021, às 18:00 horas, com utilização de recursos de videoconferência a distância, reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pela Comissão do Curso de Especialização em Estatística, para julgar a apresentação do trabalho de fim de curso do aluno **Diego Dias de Carvalho Calazans**, intitulado: “*Avaliação do desempenho da Carta X-bar com uso da Regra Suplementar 2-2 de Khoo por meio de Simulação de Monte Carlo*”, como requisito para obtenção do Grau de Especialista em Estatística. Abrindo a sessão, O Presidente da Comissão, Professor Roberto da Costa Quinino – Orientador, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares, passou a palavra ao candidato para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa do candidato. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se sem a presença do candidato e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: o candidato foi considerado Aprovado condicional às modificações sugeridas pela banca examinadora no prazo de 30 dias a partir da data de hoje por unanimidade. O resultado final foi comunicado publicamente ao candidato pelo Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 30 de julho de 2021.

Prof. Roberto da Costa Quinino (Orientador)  
Departamento de Estatística / ICEx / UFMG

Prof. Anderson Laércio Galindo Trindade  
Departamento de Engenharia de Produção / ESCOLA de ENGENHARIA / UFMG

Prof. Álvaro Ledo Ferreira  
Departamento de Engenharia de Produção / PPGE/ ESCOLA de ENGENHARIA / UFMG



Universidade Federal de Minas Gerais  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Estatística  
Programa de Pós-Graduação / Especialização  
Av. Pres. Antônio Carlos, 6627 - Pampulha  
31270-901 – Belo Horizonte – MG

E-mail: [pgest@ufmg.br](mailto:pgest@ufmg.br)  
Tel: 3409-5923 – FAX: 3409-5924

### DECLARAÇÃO DE CUMPRIMENTO DE REQUISITOS PARA CONCLUSÃO DO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ESTATÍSTICA.

Declaro para os devidos fins que o **Diego Dias de Carvalho Calazans**, número de registro 2019705740, cumpriu todos os requisitos necessários para conclusão do curso de Especialização em Estatística. Como seu orientador, recebi a versão final do trabalho de conclusão de curso e aprovei a versão final. O trabalho foi apresentado no dia 30 de julho de 2021 com o título "*Avaliação do desempenho da Carta  $\bar{X}$ -bar com uso da Regra Suplementar 2-2 de Khoo por meio de Simulação de Monte Carlo*".

Belo Horizonte, 19 de agosto de 2021

Prof. Roberto da Costa Quinino  
Coordenador da Comissão  
do Curso de Especialização  
em Estatística

Prof. Roberto da Costa Quinino  
Coordenador do curso de  
Especialização em Estatística  
Departamento de Estatística / UFMG

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus por estar comigo a todo momento me dando força para continuar.

Agradeço aos meus pais, Clêides e Márcio, e ao Vagner por sempre me apoiarem e acreditarem na minha capacidade.

Agradeço a minha família pelo apoio incondicional e pelas palavras amigas que sempre me incentivam a continuar.

Agradeço a Fernanda por ser o meu presente da especialização e por todo conhecimento compartilhado seja nas madrugadas, nos momentos de descontração ou durante as aulas.

Agradeço aos professores do Departamento de Estatística por todo conhecimento compartilhado.

Agradeço também ao Professor Roberto por todo suporte fornecido durante a orientação desta monografia.

“Onde quer que haja mulheres e homens, há sempre o que fazer, há sempre o que ensinar, há sempre o que aprender.”

Paulo Freire

## Resumo

A carta de controle  $\bar{X}$  é uma importante ferramenta para detectar mudanças na média de um processo. No entanto não apresenta bom desempenho para deslocamentos pequenos na média. Nesse sentido o presente trabalho pretende avaliar o desempenho da carta de controle  $\bar{X}$  utilizando a regra suplementar de Khoo & Ariffin (2006) proposta para medidas individuais. Os resultados obtidos na monografia mostram que com o uso da regra proposta por Khoo & Ariffin (2006) o Comprimento Médio de Sequência (CMS) fora de controle é menor ou similar aos obtidos quando usamos a carta de controle  $\bar{X}$ .

**Palavras-chave:** CMS; Carta de controle  $\bar{X}$  de Shewhart; regra suplementar *two-of-two*;

## Abstract

The  $\bar{X}$  control chart is an important tool to detect changes in the stability of a process. However, it does not perform well for small shift displacements. Thus, the present monograph aims to evaluate the performance of  $\bar{X}$  control chart using the supplementary rule proposed by Khoo & Ariffin (2006) for individual measures. The results achieved on the monograph evidence that using the rule proposed by Khoo & Ariffin (2006) the Average Run Length (ARL) is smaller or similar to those obtained when using the  $\bar{X}$  control chart.

**Keywords:** ARL; Shewhart  $\bar{X}$  Control chart; two-of-two supplementary rule;

## Lista de ilustrações

Figura 1 - Adequação de um processo aos limites de especificação .....	16
Figura 2 - Carta controle.....	17
Figura 3 - Representação gráfica do modelo <i>two-of-two</i> .....	19
Figura 4 - Descrição dos ARLs obtidos por simulação de Monte Carlo versus <i>shifts</i>	23
Figura 5 – Comparação dos resultados da carta $\bar{X}$ com provas suplementares versus $\bar{X}$ Shewhart tradicional (n=4) .....	26

## Lista de quadros

Quadro 1 - Resultados das corridas e resultados obtidos no <i>paper</i> .....	21
Quadro 2 – Novos limites definidos para valores de n variando entre 3,4 e 5.....	23
Quadro 3 – Cálculo dos valores de ARL .....	24
Quadro 4 - Algoritmo para cálculo do ARL da carta de controle <i>two-of-two</i> para n com limites de controle definidos no Apêndice 2. ....	32
Quadro 5 - Algoritmo para determinação dos limites de controle para n variando entre 3,4 e 5 .....	34

## **Lista de abreviaturas e siglas**

CEP - Controle Estatístico de processo

CMS - Comprimento Médio de Sequência

ARL - *Average Run Length*

## Sumário

1 INTRODUÇÃO .....	13
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	15
2.1 Carta de controle.....	15
2.2 Carta X.....	17
2.3 Modelo <i>two-of-two</i> de Khoo e Ariffin (2006) .....	19
3 METODOLOGIA - SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO .....	20
4 DISCUSSÃO DE RESULTADOS .....	21
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	29
REFERÊNCIAS .....	30
APÊNDICE .....	32

## 1 INTRODUÇÃO

Processos industriais existem com o objetivo de transformar matérias-primas em produtos, agregando valor aos mesmos. Embora muitas vezes os processos sejam lineares, durante a transformação pode ser necessário o controle de variáveis a fim de se obter um produto dentro das especificações para o qual foi desenvolvido e manter a padronização, garantindo assim uma qualidade assegurada e um custo efetivo.

Em se tratando de padronização, a estatística exerce papel fundamental através do Controle estatístico de processos (CEP). Henning et. al. (2011) afirma sobre as vantagens de utilização do CEP como ferramenta de qualidade possibilitando um ganho na confiabilidade do processo e refletindo em um maior rendimento e consequentemente uma produção mais eficiente.

As cartas de controle são gráficos que fazem acompanhamento de um processo ao longo do tempo e se baseiam em uma linha central que representa a média do processo e duas linhas: uma superior e outra inferior, que representam os limites de variabilidade do processo. Ou seja, à medida que o processo é avaliado ao longo do tempo, os valores das variáveis são plotados no gráfico de controle em forma de ponto e faz-se uma rápida avaliação visual se o processo está sob controle ou não. Para o modelo de  $\bar{X}$  de Shewhart, para qualquer ponto que exceda esses limites é considerado que o processo está fora de controle.

A carta de controle  $\bar{X}$  de Shewhart é baseada na média do processo e tem usualmente como limites de processo a variação superior e inferior de 3 desvios padrão da média. Klein (2000) defende que a carta definida por Shewhart é bastante útil, por ser de fácil desenvolvimento, utilização e avaliação, mas que apresenta uma maior incerteza para pequenas variações da média (para pequenos *shifts*) e por isso é importante a busca por um modelo mais assertivo que consiga operar mais eficientemente para pequenas variações da média.

Neste contexto, em 2006, Khoo e Ariffin apresentaram melhorias na carta de Shewhart através da criação de um modelo que possui dois limites inferiores e dois limites superiores e se baseiam na média do processo para criar esses limites num processo chamado *two-of-two*. Neste modelo, para um processo ser considerado fora de controle, um ponto deve exceder ambos os limites, inferiores ou superiores, mais

amplos ou apresentar dois pontos consecutivos na área entre os limites, sejam inferiores ou superiores.

Diante dos resultados satisfatórios obtidos pelos autores Khoo & Ariffin (2006) e visto que o estudo só contempla o valor de  $n$  igual a 1, o objetivo deste trabalho é avaliar o desempenho da regra suplementar *two-of-two* na carta de controle  $\bar{X}$ . Assim, será avaliado o desempenho da carta de controle  $\bar{X}$  com valores de  $n$  iguais a 4,5 e 6 e regra suplementar *two-of-two*.

O trabalho será apresentado em 4 seções destinadas ao referencial teórico: Carta de controle; Carta  $\bar{X}$ ; Comprimento médio de sequência; Modelo *two-of-two*.; Consecutivamente serão apresentados a metodologia de realização da monografia e a discussão dos resultados baseados nos dois modelos avaliados culminando na conclusão desta monografia.

## **2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

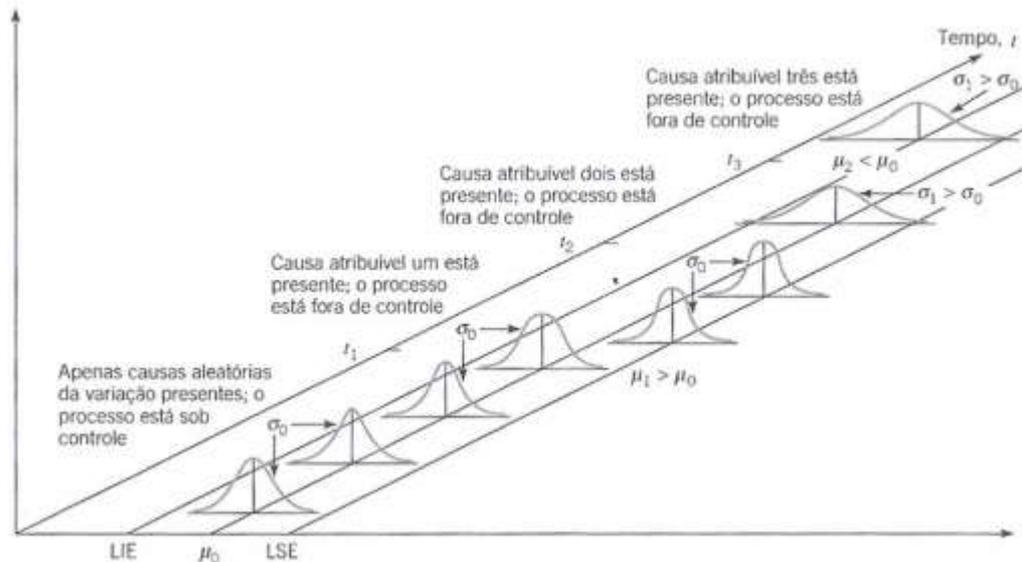
### **2.1 Carta de controle**

Como forma de introduzir o que é e qual o objetivo de uma carta de controle, inicialmente será feita uma avaliação geral do CEP e o porquê ele é necessário.

Ramos (2007) relata que a preocupação pela qualidade é antiga e que junto a ela vem associada a ideia de produtividade. No passado, a ideia de qualidade estava muito relacionada ao defeito de um produto unitário, entretanto essa ideia foi sobreposta pela avaliação do processo como um todo e de agir na prevenção de defeitos e não na correção deles. Para tal, a estatística se tornou uma aliada através do CEP.

Ramos (2007) ainda define que todo processo tem um nível de variabilidade e que é importante entender o que é aceitável ou não para um processo. A Figura 1 mostra a relação entre a variabilidade de um processo e os seus limites de controle; na figura é possível observar que nem todos os processos são capazes de atender sua especificação e nesse caso ações de otimização devem ser tomadas. Ribeiro e Caten (2012) finalizam com a ideia de que a variabilidade pode ocorrer por causas comuns, que são naturalmente compreensíveis e não impactam os limites de controle, e causas especiais que são danosas ao funcionamento do processo e nesse caso são necessárias intervenções.

**Figura 1 - Adequação de um processo aos limites de especificação**



Fonte: Corrêa e Neto (2009)

Diante do cenário apresentado, as cartas de controle nasceram como uma alternativa simples para verificação da adequação do processo. Os dados podem se comportar de diferentes formas, como por exemplo dados de variáveis e atributos, e com isso surge a necessidade de diferentes tipos de cartas que podem ser utilizadas de diferentes modos.

Campos (2019) listou e descreveu alguns tipos de cartas para diferentes interesses; como exemplo de cartas para controle de variáveis, onde cita-se as de média (Cartas  $\bar{X}$ -R e  $\bar{X}$ -S) e a de zona (Carta Z). Já para controle de atributos existem cartas para monitoramento de conformidades (Carta P), cartas de conformidade por unidade (Carta U), entre outras. Além disso, existem cartas para controles ponderadas no tempo, tal como a carta de média móvel ponderada exponencialmente (Carta EWMA) e cartas para eventos raros, como a de intervalo entre intervalo entre eventos raros (Carta T).

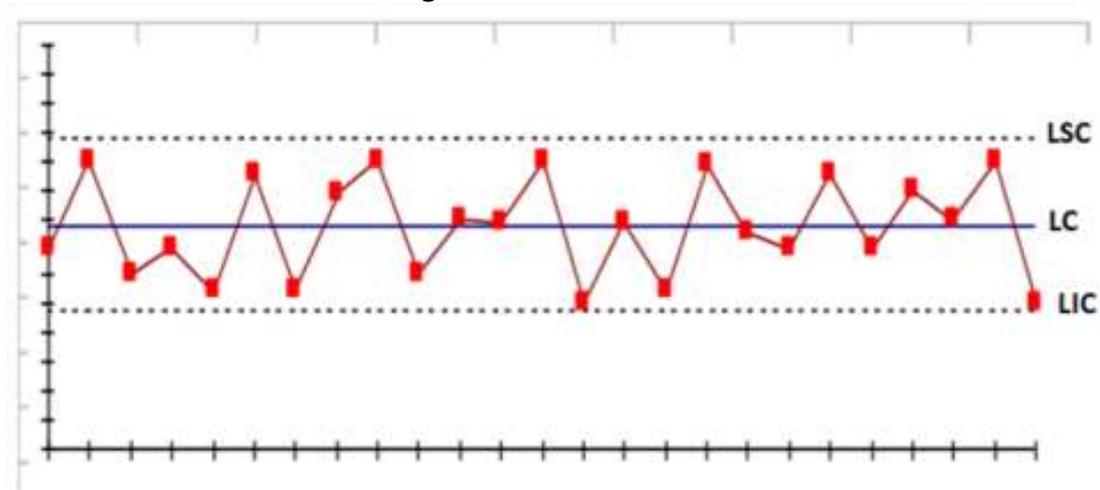
Diante da infinidade dos tipos de carta, essa dissertação irá dedicar-se às cartas de média (Carta  $\bar{X}$ ), que é o foco de estudo na simulação e é um dos modelos mais utilizados.

## 2.2 Carta $\bar{X}$

A carta  $\bar{X}$ , como dito na seção anterior, refere-se ao controle da média dos dados e pode ser do tipo  $\bar{X}$ -R, que avalia a média e a amplitude dos dados, e a  $\bar{X}$ -S, que mede média e desvio padrão. Sendo que ambas as cartas lidam com dados de variáveis.

De uma forma geral, as cartas de controle seguem o mesmo formato (Figura 2), onde na abscissa encontra-se a unidade de contagem das amostras e na ordenada encontra-se a unidade numérica do que está sendo observado pela carta. A linha central, representada na Figura 2 pela linha azul, é a média do processo, enquanto as linhas tracejadas são os limites de controle superior e inferior. Por fim, os pontos em vermelho tratam-se da representação dos dados obtidos.

Figura 2 - Carta controle



Fonte: Gomes (s.d.) (Modificado)

Por fim, Oliveira et. al. (2013) afirma que a carta  $\bar{X}$  faz o controle da média de um processo e que a variabilidade do processo é medida pela amplitude (R) ou pelo desvio padrão (S). Dessa forma, o mais prudente para se avaliar um processo com base em sua média é relacionar este resultado com a variabilidade, gerando-se assim a carta  $\bar{X}$ -R e  $\bar{X}$ -S. Nesse trabalho discutir-se-á exclusivamente o desempenho da carta de controle  $\bar{X}$  e tendo em consideração que a variância não se alterará.

A linha central (LC) representa o valor médio da característica de qualidade monitorada ( $\mu_0$ ). O limite superior de controle (LSC) e o limite inferior de controle (LIC) são os limites estatísticos de tolerância da média dos valores da característica de qualidade baseado em uma amostra aleatória de tamanho  $n$ . Em geral, se o processo está sob controle, os pontos (média amostral) cairão entre o LSC e LIC. Um modelo geral para se obter LSC, LC e LIC está descritos nas equações 1.1, 1.2 e 1.3 respectivamente:

$$LSC = \mu_0 + k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (1.1)$$

$$LC = \mu_0 \quad (1.2)$$

$$LIC = \mu_0 - k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (1.3)$$

em que  $\mu_0$  deve ser entendido como a média do processo sob controle,  $k$  é a constante indicativa da largura do intervalo,  $\sigma$  é o desvio padrão do processo sob controle e  $n$  o fator de construção de gráfico de controle para variáveis. Sendo que  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$  intervalo que engloba 99,7% dos valores de  $X$ .

Uma abordagem comum é definir  $k=3$  (Shewhart) com objetivo de observarmos  $ARL_0=370$ . Martins *et al.* (2006) define que o Comprimento Médio de Sequência, CMS, comumente conhecido pela sigla em inglês ARL, que significa *Average Run Length*, é o número de amostras que em média são necessárias para identificar que houve um desajuste de processo ou que houve um alarme falso. Dessa forma, o ARL é um valor que consegue estimar a estabilidade da carta de controle e demonstrar se ela é estável.

A avaliação da eficiência de uma carta pode ser medida por sua capacidade de não identificar, ou demorar a identificar, alarmes falsos e sua capacidade de indicar rapidamente a presença de desvios, uma importante forma de avaliação é o uso do comprimento médio de sequência (CMS), comumente chamado de *Average Run Length* (ARL). A análise desenvolvida por Khoo e Ariffin (2006) baseia-se justamente na comparação dos valores de ARL entre o modelo desenvolvido por eles e a carta de Shewhart tradicional com  $n=1$ .

### 2.3 Modelo *two-of-two* de Khoo e Ariffin (2006)

Toda essa seção será destinada a abordar a regra discutida no *paper* “*Two Improved Run Rules for the Shewhart  $\bar{X}$  Control Chart*” escrito por Khoo e Ariffin (2006) e que irá determinar as simulações realizadas.

Buscando ter um resultado mais assertivo para o controle de um processo, o autor observou que a carta de Shewhart apresentava uma perda de eficiência para desvios pequenos e médios da média (*shift*) e por isso propôs um método chamado *two-of-two* para cartas do tipo  $\bar{X}$ .

O conceito do teste é gerar dois limites inferiores e dois limites superiores, como pode ser visto na Figura 3, e a partir daí avaliar os resultados obtidos. Para o autor, o processo é considerado fora de controle quando os limites  $UCL_2$  ou  $LCL_2$  são superados; ou com dois resultados consecutivos entre  $UCL_1$  e  $UCL_2$  ou entre  $LCL_1$  e  $LCL_2$ . O cálculo dos limites é definido de tal forma que o  $ARL_0$  com  $n=1$  seja aproximadamente igual a 370.

Figura 3 - Representação gráfica do modelo *two-of-two*



Fonte: Khoo e Ariffin (2006)

### 3 METODOLOGIA - SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO

As seções anteriores deste trabalho destinaram-se a pesquisa bibliográfica para a construção do conhecimento teórico que permitiu o desenvolvimento de um modelo simulado da carta de controle *two-of-two com  $n>1$  utilizando simulação de Monte Carlo*.

A metodologia da construção e simulação é desenvolvida nesta pesquisa de forma quantitativa, com o intuito de descrever através de simulação, no R, o modelo *two-of-two* desenvolvido por Khoo e Ariffin (2006) como alternativa para carta de controles  $\bar{X}$ . A viabilidade da carta de controle será baseada na comparação do CMS (*ARL*) obtido entre o algoritmo criado e a carta de Shewhart.

O algoritmo criado para simulação de um modelo que descreva a carta de controle, no software R, foi elaborado a fim de reproduzir o método *two-of-two* e está disponível no Apêndice 1. Foram trabalhados dados padronizados, sem perda de generalidade, e feitas 500.000 simulações para determinação do limite de controle. O procedimento se dá da seguinte forma:

- (i) Define-se o tamanho  $n$  da amostra a ser utilizada e utiliza-se o Algoritmo do Apêndice 2 para obter os limites de controle  $UCL_2$  ( $LCL_2$ ) e  $UCL_1$  ( $LCL_1$ ). O Algoritmo 2 é um procedimento de busca em que se varia os limites de controle de tal forma a obter um  $ARL_0$  próximo de 370 quando  $u=0$ .
- (ii) No Algoritmo 1, são inseridos os limites de controle, valor  $n$  e  $u$  (*shift*) para obtermos o valor do *ARL* para o deslocamento (*shift*) especificado. O procedimento de simulação de Monte Carlo acumulará o valor da quantidade de amostras necessárias para detectar o deslocamento (*shift*). Por se tratar de um experimento aleatório então haverá várias quantidades diferentes.
- (iii) Ao final, a média dos valores acumulados em  $D$  constituirá em uma estimativa do valor do *ARL* para o deslocamento (*shift*) desejado.

## 4 DISCUSSÃO DE RESULTADOS

Inicialmente, os valores de ARL foram obtidos pelo algoritmo, descrito no Apêndice 1, com  $n=1$  com o intuito de verificar se o algoritmo era capaz de obter os resultados descritos no artigo de Khoo e Ariffin (2006). Os resultados utilizando  $UCL_2=3.4$  e  $UCL_1=1.843$  (valores citados no artigo dos autores) podem ser vistos no Quadro 1. Observe que os resultados mais satisfatórios entre a carta  $\bar{X}$  de Shewhart, Khoo e Ariffin e o algoritmo criado para simular Khoo e Ariffin (2006) foi sombreado no Quadro 1, a seguir, e que para essa conclusão foi considerado o menor ARL para cada desvio da média. Ao fim, as cartas alternativas a  $\bar{X}$  de Shewhart mostraram-se mais eficientes para pequenos desvios da média.

**Quadro 1 - Resultados das corridas e resultados obtidos no *paper***

Desvio da média ( <i>shift</i> )	Shewhart	ARL Khoo e Ariffin	ARL calculado	Desvio padrão
0	371,20	373,22	370,371	2,015
0.2	311,66	281,48	278,924	1,807
0.4	204,13	156,50	152,295	2,973
0.6	120,22	81,97	79,918	1,451
0.8	71,86	45,30	43,938	0,963
1	44,28	26,40	25,604	0,563
1.2	28,38	16,38	15,973	0,288
1.4	18,03	10,68	10,587	0,066
1.6	12,51	7,48	7,421	0,042
1.8	9,00	5,41	5,479	0,049
2	6,39	4,14	4,219	0,056
2.2	4,72	3,32	3,387	0,047
2.4	3,65	2,80	2,815	0,011
2.6	2,92	2,40	2,412	0,008
2.8	2,36	2,12	2,114	0,004
3	1,98	1,90	1,890	0,007
4	1,19	1,27	1,285	0,011

Desvio da média ( <i>shift</i> )	Shewhart	ARL Khoo e Ariffin	ARL calculado	Desvio padrão
5	1,02	1,05	1,056	0,004
6	1,00	1,01	1,005	0,004

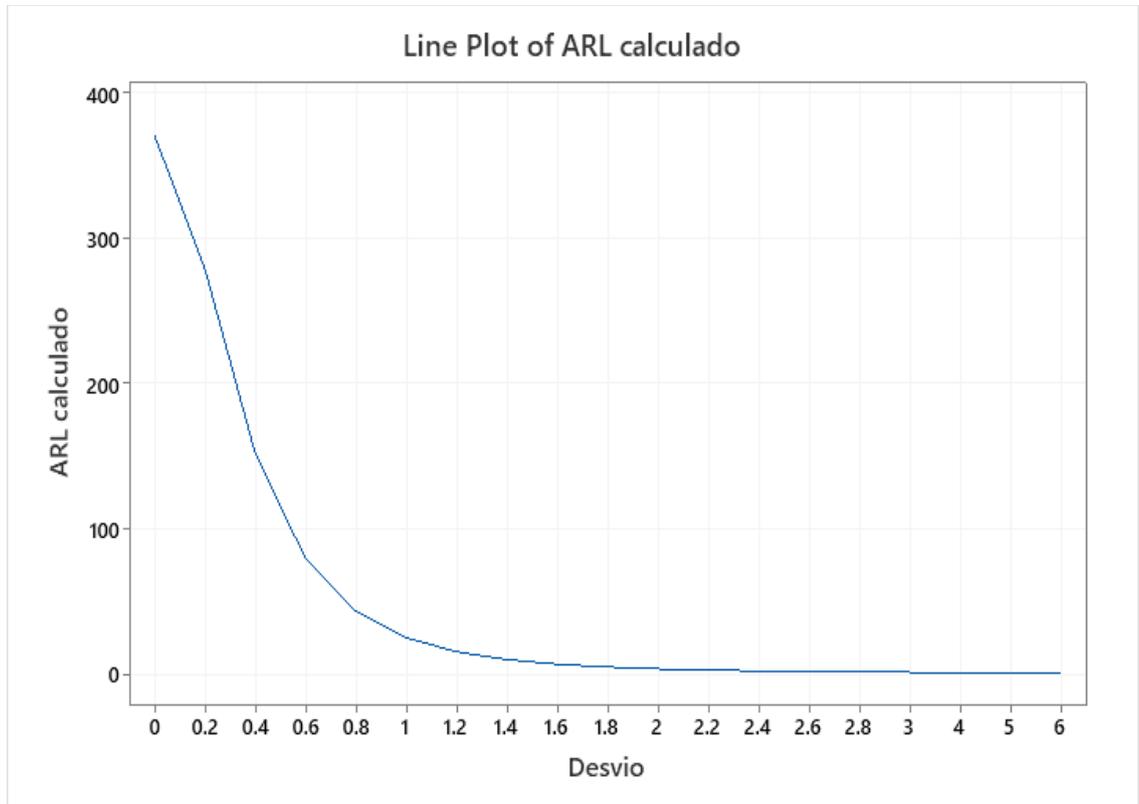
Fonte: Elaborado pelo autor.

Ao observar os resultados obtidos pelo Algoritmo 1 (Quadro 1) e comparar com os dados obtidos no artigo de Khoo e Ariffin (2006), para limites de controle superior  $[-3,4;3,4]$  e inferior  $[-1,843;1,843]$  concluiu-se que os resultados foram satisfatórios. O algoritmo criado apresentou resultados semelhantes aos obtidos no *paper*.

Como descrito por Nasser (2012), os resultados obtidos via método de Monte-Carlo nunca serão iguais, pois se trata de um método estocástico de simulações de inúmeras saídas possíveis que proporciona uma aproximação do valor real. Diante desse cenário, a fim de diminuir o erro de aproximação, as simulações foram feitas considerando um número elevado de repetições; 500.000 para o algoritmo do Apêndice #1 e 50 milhões para o apêndice #2.

Ao plotar os resultados obtidos ao rodar o algoritmo do *two-of-two*, foi construído o Gráfico 1 que apresenta curva semelhante a um gráfico exponencial negativo, tal qual obtido por Mazocco et. al. (2014); indicando assim a adequabilidade da simulação realizada.

**Figura 4 - Descrição dos ARLs obtidos por simulação de Monte Carlo versus *shifts***



Fonte: Elaborado pelo autor.

Khoo e Ariffin (2006) estudou apenas o caso  $n=1$  e assim esta monografia avaliará agora os casos  $n=4, 5$  e  $6$  tradicionalmente utilizados nas cartas de controle  $\bar{X}$ . Utilizando o Algoritmo 2 obtivemos os resultados descritos no Quadro 2.

**Quadro 2 – Novos limites definidos para valores de  $n$  variando entre 3,4 e 5**

	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
Limites de controle superior U ( $UCL_2$ )	1.65	1.5	1.35
Limites de controle superior Ua ( $UCL_1$ )	0.9378	0.83002	0.76456
Limites de controle superior L ( $LCL_2$ )	-1.65	-1.5	-1.35
Limites de controle superior La ( $LCL_1$ )	-0.9378	-0.83002	-0.76456

Fonte: Elaborado pelo autor.

Diante dos resultados obtidos, esta monografia passou então a dedicar-se ao seu principal objetivo: verificar se a adaptação do método de Khoo e Ariffin (2006) é mais eficiente que o método de Shewhart para valores de  $n$  diferentes de 1, já que esse foi o único valor avaliado pelos autores em sua publicação de 2006. Para tal, substituiu-se os resultados

obtidos no Quadro 2 no Algoritmo presente no Apêndice 1 e seus resultados estão disponíveis no Quadro 3. Novamente no quadro 3 os resultados mais satisfatórios foram sombreados, neste caso para n igual a 4 em cinza, n igual a 5 em vermelho e n igual a 6 em verde. Mais uma vez, as cartas suplementares de  $\bar{X}$  usando o modelo de Khoo e Ariffin (2006) se mostraram mais satisfatórios para pequenos desvios da média quando comparados aos resultados da carta  $\bar{X}$  de Shewhart, sendo que o método tomou como base o menor ARL da linha.

**Quadro 3 – Cálculo dos valores de ARL**

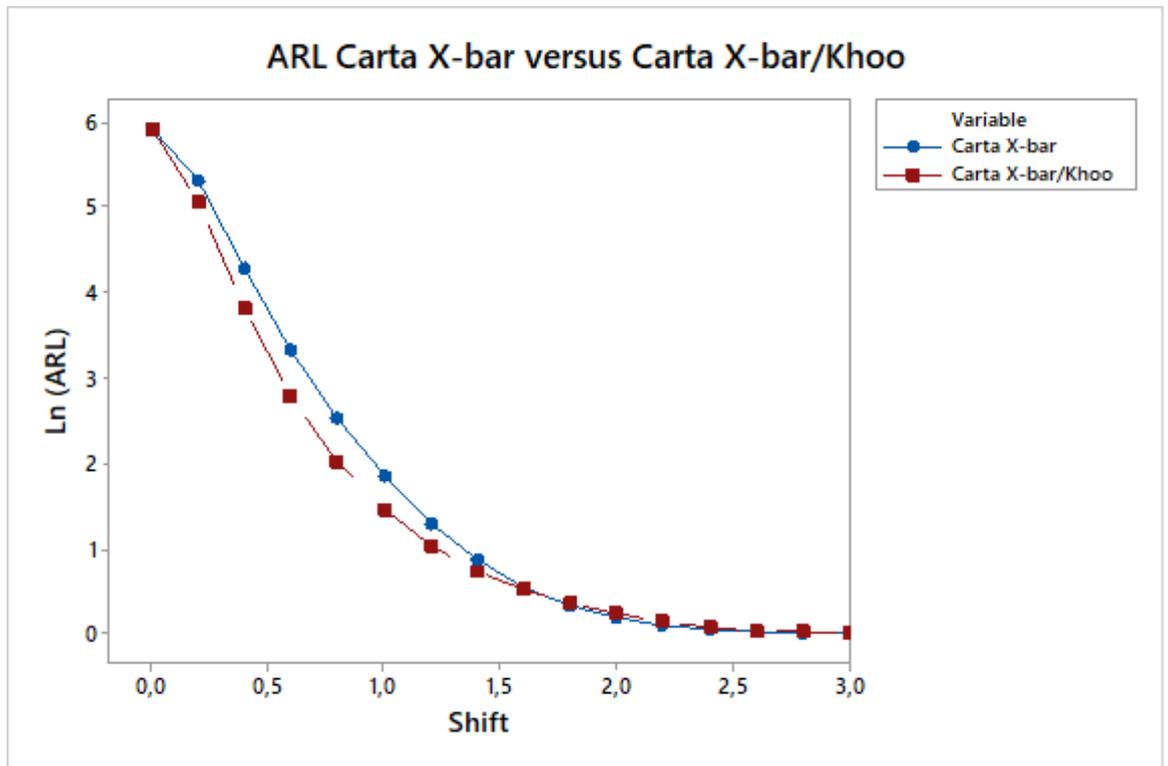
Deslocamentos na média	Shewhart			Adaptação do método de Khoo		
	n=4	n=5	n=6	n=4	n=5	n=6
0	370,398	370,398	370,398	369,914	370,105	370,380
0,2	200,075	177,732	159,327	155,280	131,361	115,648
0,4	71,552	56,593	46,050	44,817	34,001	27,518
0,6	27,821	20,564	15,879	16,259	11,924	9,390
0,8	12,383	8,856	6,708	7,461	5,554	4,421
1	6,303	4,495	3,437	4,207	3,251	2,668
1,2	3,646	2,661	2,102	2,777	2,256	1,910
1,4	2,377	1,812	1,501	2,070	1,753	1,519
1,6	1,726	1,392	1,218	1,672	1,454	1,282
1,8	1,378	1,180	1,086	1,421	1,260	1,136
2	1,189	1,076	1,030	1,251	1,133	1,056
2,2	1,088	1,028	1,009	1,137	1,060	1,019
2,4	1,037	1,009	1,002	1,067	1,022	1,005
2,6	1,014	1,002	1,000	1,029	1,002	1,001
2,8	1,005	1,001	1,000	1,011	1,000	1,000
3	1,001	1,000	1,000	1,003	1,000	1,000

Fonte: Elaborado pelo autor.

Com base nos resultados encontrados no Quadro 3, é possível verificar que para desvios menores da média (*shift*), a carta de controle  $\bar{X}$  com as provas suplementares de Khoo e Ariffin (2006) apresentou resultados mais satisfatórios que os apresentados na carta de Shewhart. Dessa forma, a carta avaliada nesta monografia consegue identificar desvios mais rapidamente e com isso consegue gerar demandas de intervenção de processo também mais rapidamente minimizando assim custos.

A fim de tornar o resultado mais visual, foram plotados nos Gráficos 2, 3 e 4 os resultados dos ARLs obtidos pelo algoritmo criado na monografia e os resultados obtidos por carta  $\bar{X}$  Shewhart respectivamente, para os valores de n igual a 4, 5 e 6. Todos os três gráficos mostram que os resultados obtidos na monografia (usando uma escala logarítmica para os ARLs), com base no modelo de Khoo e Ariffin (2006), foram mais eficientes que os obtidos pela carta tradicional de Shewhart. Notou-se também que para deslocamentos grandes a carta de controle  $\bar{X}$  de Shewhart tradicional e com o uso de provas suplementares se mostram similares.

Figura 5 – Comparação dos resultados da carta  $\bar{X}$  com provas suplementares versus  $\bar{X}$  Shewhart tradicional (n=4)



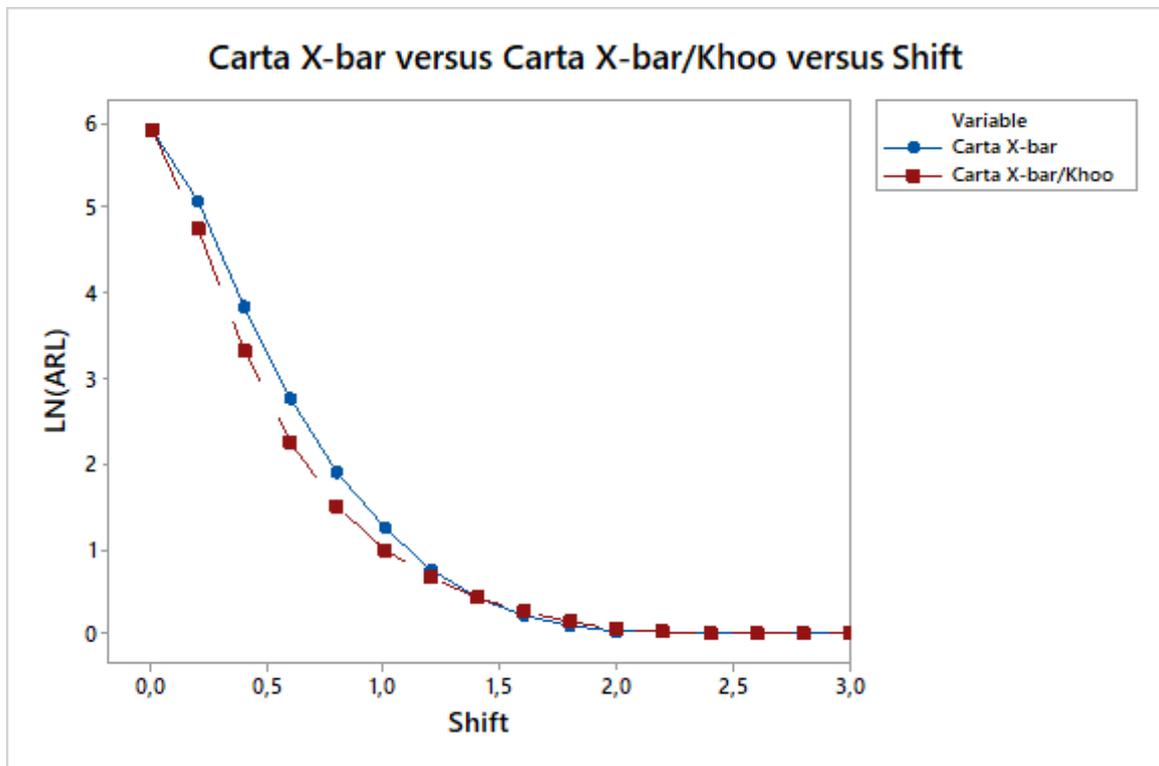
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura – Comparação dos resultados da carta  $\bar{X}$  com provas suplementares versus  $\bar{X}$  Shewhart tradicional (n=5)



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura – Comparação dos resultados da carta  $\bar{X}$  com provas suplementares versus  $\bar{X}$  Shewhart tradicional (n=6)



Fonte: Elaborado pelo autor.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A utilização da carta  $\bar{X}$  com as provas suplementares de Khoo e Ariffin (2006) se mostrou mais eficiente que as cartas  $\bar{X}$  de Shewhart tradicional para os valores de  $n$  iguais a 4, 5 e 6, que foram simulados nesta monografia. Desta forma, o uso da carta desenvolvida neste trabalho tem potencial de ser usado frente as cartas  $\bar{X}$  de Shewhart quando é sabido que os desvios da média são pequenos, o que é cada vez mais comum, vide que os processos industriais estão cada vez mais robustos e apresentam cada vez desvios menores da média. Além disso, o algoritmo criado e apresentado no Apêndice 2 se mostrou bastante eficiente na determinação de novos limites em relação ao tamanho amostral, o que permite que os resultados desse trabalho possam ser extrapolados para diferentes valores de  $n$ .

Como trabalho futuro, é sugerido a extrapolação do método *two-of-three*, utilizando simulação de Monte Carlo, também apresentado por Khoo e Ariffin (2006) em seu paper “Two Improved Runs Rules for the Shewhart  $\bar{X}$  Control Chart” e a definição de cenários para uso dos modelos de Shewhart, *two-of-two* e *two-of-three*, para se ter uma otimização dos resultados obtidos.

## REFERÊNCIAS

- CAMPOS, Magno Silvério. **Controle Estatístico de Processos: Cartas de Controle**. Departamento de Engenharia de Produção, Administração e Economia, Universidade Federal de Ouro Preto. 77p. 2019. Disponível em: [http://professor.ufop.br/sites/default/files/magno/files/capitulo\\_3\\_-\\_cep\\_0.pdf](http://professor.ufop.br/sites/default/files/magno/files/capitulo_3_-_cep_0.pdf). Acesso em: 10 abr. 2021.
- CORRÊA, Jairo Marlon; NETO, Anselmo Chaves. **Estudo do controle e análise da capacidade do processo de produção de água potável**. XLI SBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, n. 106, set., p. 1414-1424. ISSN 1808-4435. 2009.
- GOMES, Fabrício Maciel. **Cartas de Controle: dados contínuos**. S.d. Disponível em: [https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4145169/mod\\_resource/content/1/CEP%20-%20cartas%20de%20controle.pdf](https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/4145169/mod_resource/content/1/CEP%20-%20cartas%20de%20controle.pdf). Acesso em: 15 abr. 2021.
- HENNING, Elisa; WALTER, Olga Maria Carvalho Formigoni; SOUZA, Nadine Santos de; SAMOBYL, Robert Wayne. **Um estudo para a aplicação de gráficos de controle estatístico de processo em indicadores de qualidade da água potável**. VII Congresso Nacional de Excelência em Gestão, ISSN 1984-9354. 2011. Disponível em: <https://www.inovarse.org/filebrowser/download/8481>. Acesso em: 10 abr. 2021.
- KHOO, Michael Boon Chong; ARIFFIN, Khotrun Nada bt. **Two Improved Runs Rules for the Shewhart  $\bar{X}$  Control Chart**. Quality Engineering, v. 18, n. 2, 2006.
- KLEIN, Morton. **Two Alternatives to the Shewhart  $\bar{X}$  Control Chart**. Journal of Quality Technology, v. 32, n. 4, p. 427-431, 2000.
- MARTINS, Felipe; RIBEIRO, Jaciane do Carmo; ALMEIDA, Sílvia dos Santos; RAMOS, Edson Marcos Leal Soares. **ARL para o gráfico de controle da mediana quando o estimador do desvio padrão é baseado nos quartis amostrais**. SPOLM - Simpósio de Pesquisa Operacional e Logística da Marinha, 2006, Rio de Janeiro. Disponível em: <http://www.marinha.mil.br/spolm/sites/www.marinha.mil.br.spolm/files/arq0048.pdf>. Acesso em: 11 ago. 2021
- MAZOCCO, Flavio Luiz; ROSA, Germano Mendes; LOURENCO, Guilherme Dandrade; RADICCHI, Lucas Augusto; OPRIME, Pedro Carlos. **Comparação do desempenho entre gráficos de controle X-barra e t-student variando-se o número e o tamanho das amostras**. XXXIV Congresso Nacional de Engenharia de Produção, 2014. Disponível em: [http://www.abepro.org.br/biblioteca/enegep2014\\_TN\\_STO\\_196\\_109\\_25044.pdf](http://www.abepro.org.br/biblioteca/enegep2014_TN_STO_196_109_25044.pdf). Acesso: 27 jun. 2021.
- NASSER, Rafael Barbosa. **McCloud service framework: arcabouço para desenvolvimento de serviços baseados na simulação de Monte Carlo na Cloud**. Pós-graduação em Informática da PUC-Rio. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio). Rio de Janeiro, 2012.

OLIVEIRA, Camila Cardoso de; GRANATO, Daniel; CARUSO, Miriam Solange Fernandes; SAKUMA, Alice Momoyo. **Manual para elaboração de cartas de controle para monitoramento de processos de medição quantitativos em laboratórios de ensaio**. Instituto Adolfo Lutz, Secretaria de Estado de Saúde, 76p. São Paulo, 2013. Disponível em:  
[http://redsang.ial.sp.gov.br/site/docs\\_leis/pd/pd11.pdf](http://redsang.ial.sp.gov.br/site/docs_leis/pd/pd11.pdf). Acesso: 18 abr. 2021.

RAMOS, Alberto Wunderler. Controle Estatístico do Processo. *In*: CONTADOR, José Celso. **Gestão de Operações: A Engenharia de Produção a Serviço da Modernização da Empresa**. São Paulo: Edgard Blücher, p. 169-179. 2007.

RIBEIRO, José Luis Duarte; CATEN, Carla Schwengber ten. **Controle Estatístico do Processo**. Série monográfica Qualidade. Porto Alegre: Fundação Empresa Escola de Engenharia da UFRGS, Universidade Federal do Rio Grande do Sul - FEENG/ UFRGS, 2012. Disponível em:  
[http://www.producao.ufrgs.br/arquivos/disciplinas/388\\_apostilacep\\_2012.pdf](http://www.producao.ufrgs.br/arquivos/disciplinas/388_apostilacep_2012.pdf). Acesso em: 10 abr. 2021.

## APÊNDICE

### Apêndice1

**Quadro 4 - Algoritmo para cálculo do ARL da carta de controle *two-of-two* para n com limites de controle definidos no Apêndice 2.**

```
#####  
# Algoritmo para simular modelo two-of-two  
#####  
corridas<-500000  
GG<-matrix(0, corridas, 1)  
n<-5; #Tamanho da amostra  
u<-2; #Shift  
cont<-1;  
#####  
# Limites da carta de xbar  
#####  
Ua<-0.83002  
U<-1.5;  
L<--U;  
La<--Ua;  
#####  
#Definindo a probabilidade do resultado estar em cada região da carta  
#p1 - (1- área abaixo de 3.4)+ (área abaixo de -3.4)  
#p2 - a probabilidade de obter um resultado no intervalo [1.843, 3.4]  
#p3 - a probabilidade de obter um resultado no intervalo [-3.4, -1.843]  
#p4 - a probabilidade de obter um resultado no intervalo [-1.843, 1.843]  
#####  
p1<-1-pnorm(U, u, 1/ (n^0.5)) +pnorm(L, u, 1/ (n^0.5));  
p2<-pnorm(U, u, 1/ (n^0.5)) -pnorm(Ua, u, 1/ (n^0.5));  
p3<-pnorm(La, u, 1/ (n^0.5)) -pnorm(L, u, 1/ (n^0.5));  
p4<-pnorm(Ua, u, 1/ (n^0.5)) -pnorm(La, u, 1/ (n^0.5));  
#####  
# Criação dos vetores w e v  
#####  
w<-c(p1, p2, p3, p4)  
v<-c(1,2,3,4)  
#####  
# Realizar um loop até o fim das corridas  
#####  
for(i in 1:corridas){  
# Vetor vazio que será alimentado a cada nova corrida  
D<-c()  
s<-0  
s1<-0  
s2<-0  
# O loop irá continuar enquanto s=0, s1<2 e s2<2  
while(s==0 & s1<2 & s2<2){  
R<-sample(v, 1, prob=w)  
# Caso R=1 (p1), o algoritmo para o loop  
if (R==1){  
D<-rbind(D, 1)  
s<-1  
}  
# Caso R=4 (p4), o algoritmo continua a rodar o programa  
if (R==4) {
```

```

    D<-rbind(D,1)
    s1<-0;
    s2<-0;
    s<-0;
  }
  # Caso 2 corridas consecutivas de R=2 (p2), o algoritmo irá parar
  if (R==2) {
    D<-rbind(D,1)
    s2<-0
    s1<-s1+1
    s<-0
  }
  # Caso 2 corridas consecutivas de R=3 (p3), o algoritmo irá parar
  if (R==3) {
    D<-rbind(D,1)
    s1<-0;
    s2<-s2+1
    s<-0
  }
}
GG[i,1]=sum(D)
}
ARL<-mean(GG[,1])
print(ARL) # Imprimirá o valor do ARL

```

Fonte: Elaborado pelo autor.

## Apêndice 2

**Quadro 5 - Algoritmo para determinação dos limites de controle para n variando entre 3,4 e 5**

```
#####  
# Algoritmo para determinar novos limites de controle  
#####  
library(pracma)  
clear()  
tic()  
Ut<-seq(0.829,0.832,0.001) #Possíveis Ua - por tentativa  
corridas1<-size(Ut)  
GGA<-matrix(0, corridas1[2], 3)  
cont<-1  
corridas<-500000  
#####  
# n é o elemento que irá variar  
# u é o shift  
# o valor de U e L foram definidos e este algoritmo retornará Ua e La  
# para n=4 U=1.65 e L=-1.65  
# para n=5 U=1.50 e L=-1.50  
# para n=6 U=1.35 e L=-1.35  
#####  
n<-5;  
u<-0;  
U<-1.5;  
L<--U;  
for(j in Ut){  
  Ua<-j;  
  #####  
  # Repetição do algoritmo do apêndice 1  
  #####  
  GG<-matrix(0, corridas, 1)  
  La<--Ua;  
  p1<-1-pnorm(U,u,1/(n^0.5))+pnorm(L,u,1/(n^0.5));  
  p2<-pnorm(U,u,1/(n^0.5))-pnorm(Ua,u,1/(n^0.5));  
  p3<-pnorm(La,u,1/(n^0.5))-pnorm(L,u,1/(n^0.5));  
  p4<-pnorm(Ua,u,1/(n^0.5))-pnorm(La,u,1/(n^0.5));  
  w<-c(p1, p2, p3, p4)  
  v<-c(1,2,3,4)  
  for(i in 1:corridas){  
    D<-c()  
    s<-0  
    s1<-0  
    s2<-0  
    while(s==0 & s1<2 & s2<2){  
      R<-sample(v,1,prob=w)  
      if (R==1){  
        D<-rbind(D,1)  
        s<-1  
      }  
      if (R==4) {  
        D<-rbind(D,1)  
        s1<-0;  
        s2<-0;  
        s<-0;  
      }  
    }  
  }  
}
```

```

if (R==2) {
  D<-rbind(D,1)
  s2<-0
  s1<-s1+1
  s<-0
}
if (R==3) {
  D<-rbind(D,1)
  s1<-0;
  s2<-s2+1
  s<-0
}
}
GG[i,1]=sum(D)
}
#####
# Determinação da saída do programa que retornará Ua e La
#####
GGA[cont,1]=j
GGA[cont,2]=mean(GG[,1])
cont<-cont+1
}
GGA[,3]<-abs(GGA[,2]-370.4)
Saida<-sortrows(GGA,3)
print(Saida[1,])
Uafinal<-Saida[1,1]
print(Uafinal)
plot(Saida[,1],Saida[,3])
toc()

```

Fonte: Elaborado pelo autor.