

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

Everthon de Souza Oliveira

**ONLINE NEURO-FUZZY CONTROLLER:  
Projeto para Estabilidade Robusta**

Belo Horizonte  
2021

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica  
Universidade Federal de Minas Gerais  
Av. Antônio Carlos 6627, 31270-901, Belo Horizonte-MG, Brasil



---

# Online Neuro-Fuzzy Controller: Projeto para Estabilidade Robusta

---

**Everthon de Souza Oliveira**

Tese submetida à banca examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

**Orientadores:** Prof. Walmir Matos Caminhas  
Prof. Ricardo Hiroshi Caldeira Takahashi

Belo Horizonte, junho de 2021.

;

O48o	<p>Oliveira, Everthon de Souza. Online Neuro-Fuzzy Controller [recurso eletrônico]: projeto para estabilidade robusta / Everthon de Souza Oliveira. - 2021. 1 recurso online (xv, 97 f. : il., color.) : pdf.</p> <p>Orientador: Walmir Matos Caminhas. Coorientador: Ricardo Hiroshi Caldeira Takahashi.</p> <p>Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.</p> <p>Anexos: f. 94-97. Bibliografia: f.88-93.</p> <p>Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.</p> <p>1. Engenharia Elétrica - Teses. 2. Sistemas difusos – Teses. 3. Processamento de sinais – Teses. I. Caminhas, Walmir Matos. II. Takahashi, Ricardo Hiroshi Caldeira. III. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. IV. Título.</p>
------	--

CDU: 621.3(043)

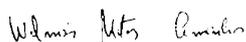
# "Online Neuro-fuzzy Controller: Projeto Para Estabilidade Robusta"

Everthon de Souza Oliveira

Tese de Doutorado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica.

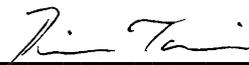
Aprovada em 17 de junho de 2021.

Por:



---

**Prof. Dr. Walmir Matos Caminhas**  
DELT (UFMG) - Orientador



---

**Prof. Dr. Ricardo Hiroshi Caldeira Takahashi**  
DMAT (UFMG) - Co-Orientador



---

**Prof. Dr. Fernando Antonio Campos Gomide**  
DCA (UNICAMP)



---

**Prof. Dr. Mario Cesar Mello Massa de Campos**  
CENPES (Petrobras)



---

**Prof. Dr. Valter Júnior de Souza Leite**  
DEMDV (CEFET-MG)



---

**Prof. Dr. Leonardo Amáral Mozelli**  
(UFMG)

---

# Agradecimentos

---

Agradeço ao Deus único e verdadeiro, fonte de toda a Vida, antiga e nova, e ao Seu Filho, Nosso Senhor Jesus, a quem tudo devo e ofereço de quem tudo espero. Obrigo-me ainda à Santíssima Virgem Maria, sede da Sabedoria, sob a guarda de quem me confio e me encontro.

Agradeço aos meus orientadores, o prof. Walmir Matos Caminhas e o prof. Ricardo Hiroshi Caldeira Takahashi, por todo aprendizado e convivência ao longo desse percurso formativo.

Agradeço aos meus ex-orientadores, os professores Luis Aguirre, Leonardo Torres, Erivelton Nepomuceno e Gleison Amaral, cujas lições me são sempre presentes.

Aos meus pais, Maria das Graças e Elton Souza, meus primeiros e eternos mestres, por serem exemplo de luta, dignidade e humildade e objetos de todo meu orgulho. Aos meus irmãos Welington e Patrícia pelo carinho e amizade desde sempre.

Toda gratidão a minha amada esposa Neila Oliveira pela cumplicidade irrestrita, pelo apoio incondicional e pelo dom precioso de nossos filhos, Maria, Ana e João, que são fonte de realidade e o sentido mais sublime de nossas vidas.

Aos meus irmãos do Ministério Universidades Renovadas e da Sociedade Brasileira de Cientistas Católicos pelo sustento nas orações, pela vida fraterna e pela construção dos ideais que escolhi serem os meus.

Aos amigos e colegas dos vários grupos de pesquisa que tive a oportunidade de participar: GCOM (UFSJ), MACSIN (UFMG), LEACOP (CEFET-MG) e, especialmente nestes tempos, D!FCOM (UFMG), pela partilha sempre aprazível dos dramas e conquistas da vida acadêmica e pelos auxílios e dicas valiosos para o trabalho.

Obrigado aos membros banca examinadora e aos engenheiros da Petrobrás Leonardo C. Oliveira, Lucas A. D. Oliveira e Mateus A. Carvalho que oportunamente contribuíram com os resultados e conclusões deste trabalho.

Aos amigos e colegas do Departamento de Engenharia Elétrica do CEFET-MG, o qual tenho a honra de integrar, pelo apoio e exemplo de profissionalismo e excelência. E aos alunos dessa instituição que são minha grande motivação e obrigação moral na busca constante por aprimoramento.

À Capes e ao CEFET-MG pelo apoio financeiro.

---

---

# Epígrafe

---

*“A esperança tem duas filhas lindas, a indignação e a coragem;  
a indignação nos ensina a não aceitar as coisas como estão; a  
coragem, a mudá-las.”*

Santo Agostinho

---

# Resumo

---

Controle adaptativo é um paradigma de controle já consagrado na solução de problemas que envolvam não linearidades, variância ou incerteza paramétrica, desafios patentes à prática de Engenharia de Controle. Um sistema de controle adaptativo procura realizar de modo simultâneo a identificação de uma planta (implícita ou explicitamente) e o ajuste recursivo dos parâmetros de um controlador designado a controlar essa mesma planta. Devido à característica de aproximadores universais, sistemas fuzzy servem como elemento(s) de um controlador adaptativo. A análise de estabilidade e de robustez de um controlador adaptativo é um problema central no desenvolvimento dessas técnicas e, via de regra, exige o uso de ferramentas de análise não linear. O objetivo deste trabalho foi investigar o problema de estabilidade robusta do *Online Neuro Fuzzy Controller* (ONFC), um controlador adaptativo baseado em sistema fuzzy com uma estrutura simples e que pode ser aplicado a diversos tipos de processos. Sua eficiência e baixo custo computacional permitiram aplicações bem sucedidas no controle de diversas plantas industriais. Embora muitos trabalhos apresentaram melhorias desde a versão original do ONFC, restava pendente um procedimento de projeto dotado de garantias formais de estabilidade. Além disso, problemas de robustez à perturbações e dificuldades de sintonia dos parâmetros foram apontados em diversas aplicações práticas. Neste trabalho, são apresentadas as condições para a estabilidade robusta do ONFC, aplicado a uma planta linear de única entrada e única saída, considerando as incertezas politópicas do sistema e perturbações externas. É proposto um modelo generalizado, baseado em *Model Reference Adaptive Control* (MRAC), que inclui uma forma de especificação do desempenho dinâmico desejado. Uma nova lei de adaptação dos parâmetros do controlador é proposta, com taxa de adaptação dinâmica, que garante estabilidade e robustez a ruídos de medição e apresenta melhor desempenho em relação à versão original do ONFC. As condições limiares são dadas na forma de um problema LMI (*Linear Matrix Inequality*), baseadas no método direto de Lyapunov para o caso discreto. Foram desenvolvidas diretrizes objetivas de projeto do ONFC para aplicação em uma planta linear parcialmente desconhecida, utilizando somente realimentação de saída. Testes numéricos foram realizados aplicando o controlador proposto e outros concorrentes em problemas típicos a fim de indicar suas possibilidades de aplicação. Os resultados de simulação mostram que as modificações propostas conservam a simplicidade e o baixo custo computacional do ONFC, ao passo que lhe dão significativo ganho de desempenho no controle de diferentes tipos de problemas e formalismo de projeto.

**Palavras-Chave:** Online Neuro-Fuzzy Controller; Controle Adaptativo; Estabilidade Robusta; Sistemas Fuzzy

---

# Abstract

---

Adaptive control is a control paradigm already established in the solution of problems involving nonlinearities, variance, or parametric uncertainty, known challenges in the practice of Control Engineering. An adaptive control system tries to simultaneously carry out the identification of a plant (implicitly or explicitly) and the recursive adjustment of the parameters of a controller designed to control that same plant. Due to the characteristic of universal approximators, Fuzzy systems serve as an element of an adaptive controller. The analysis of stability and robustness of an adaptive controller is a central problem in the development of these techniques and ordinarily, requires the use of non-linear analysis tools. The objective of this work was to investigate the stability problem of Online Neuro-Fuzzy Controller (ONFC), an adaptive controller based on Fuzzy systems with a simple structure and that can be applied to different types of processes. Its efficiency and low computational cost have enabled applications in several industrial plants to be successful. In spite of the fact that many works have improved the original version of the ONFC, a design procedure with formal stability guarantees was still pending. Besides, problems of robustness to disturbances and difficulties in tuning the parameters were pointed out in several practical applications. In this work, the conditions for the robust stability of the ONFC are presented, applied to a linear plant with a single entrance and single exit, considering the polytopic uncertainties of the system and external disturbances. A generalized model is proposed, based on Model Reference Adaptive Control (MRAC), which includes a way of specifying the desired dynamic performance. A new rule for adapting the controller parameters is proposed, with dynamic adaptation gain, which ensures stability and robustness to measurement noise and presents better performance compared to the original version. The threshold conditions are given in the form of an LMI (Linear Matrix Inequality) problem, based on Lyapunov's direct method for the discrete case. Objective ONFC design guidelines have been developed for application in a partially unknown linear plant, using only output feedback. Numerical tests were performed by applying the proposed controller and other competitors in typical problems to indicate their application possibilities. The simulation results show that the proposed modifications retain the simplicity and low computational cost of the ONFC while giving it a significant performance gain in controlling different types of problems and design formalism.

**Keywords:** Online Neuro-Fuzzy Controller; Adaptive Control; Robust Stability; Fuzzy Systems

---

# Lista de Figuras

---

2.1	Esquema de controle por escalonamento de ganho. . . . .	10
2.2	Esquema do controle tipo MRAC paralelo. . . . .	11
2.3	Esquema do controle tipo MRAC série de alto ganho. . . . .	11
2.4	Esquema de Reguladores Auto-Sintonizável. . . . .	12
2.5	A estrutura de um sistema de inferência fuzzy aplicada ao controle de processo. . . . .	16
2.6	Esquema original do controlador ONFC. . . . .	20
2.7	Representação gráfica da ação de controle do controlador neuro-fuzzy. . . . .	22
2.8	Evolução dos sinais do ONFC para os cenários com e sem ruídos. . . . .	24
2.9	Esquema do controlador ONFC proposto neste trabalho. . . . .	26
3.1	Região de factibilidade do problema LMI do Teorema 3.1 para um sistema exemplo. . . . .	42
3.2	Séries temporais de um sistema controlado pelo ONFC. . . . .	43
3.3	Comparação de desempenho do controlador ONFC utilizando lei de adaptação dinâmica e estática. . . . .	44
3.4	Evolução das variáveis do controlador ONFC aplicado a um sistema estável. . . . .	45
3.5	Evolução das variáveis do controlador ONFC aplicado a um sistema instável. . . . .	45
3.6	Controle de um sistema com variação paramétrica. . . . .	46
4.1	Região de factibilidade da solução do problema LMI do Teorema 4.1 para um sistema exemplo. . . . .	60
4.2	Simulação de um sistema incerto com ruído de medição controlado pelo ONFC. . . . .	61
4.3	Evolução dos sinais do sistema incerto com ruído de medição controlado pelo ONFC. . . . .	62
4.4	Exemplo de sistema variante no tempo controlado pelo ONFC. . . . .	63
4.5	Evolução dos sinais de um sistema variante no tempo controlado pelo ONFC. . . . .	64
5.1	Comparação entre o desempenho do controlador ONFC com o do controlador PI aplicados a um sistema incerto. . . . .	69
5.2	Erro de referência e componentes da ação de controle do controlador ONFC e do controlador PI. . . . .	70
5.3	Comparação entre resposta do controle ONFC com a do controle PI para diferentes valores de parâmetros da planta. . . . .	71
5.4	Comparação entre os índices de desempenho obtidos pelo controlador ONFC e pelo controlador PI. . . . .	72

5.5	Curva estática do sistema (5.3) e ganho estático em função da entrada. . . . .	73
5.6	Comparação de desempenho de controle de planta não linear utilizando ONFC e PID. . . . .	74
5.7	Elementos da ação de controle do ONFC e do PID. . . . .	75
5.8	Comparação do desempenho e robustez do controle ONFC proposto em relação aos controladores ONFC <sub>dw</sub> e MRAC. . . . .	78
5.9	Comparação da convergência do ganho proporcional do ONFC com modificação-d e do ONFC <sub>dw</sub> para diferentes valores de $\sigma$ . . . . .	79
5.10	Erro de saída e norma dos parâmetros dos controladores adaptativos ONFC proposto, ONFC <sub>dw</sub> e o MRAC. . . . .	80
5.11	Comparação da norma IAE em relação ao parâmetros $\sigma$ para os controladores ONFC <sub>DW</sub> e MRAC. A mesma norma é calculada para o ONFC proposto para fins de comparação. . . . .	81

---

## Lista de Símbolos

---

$w_1, w_2$	Consequentes de ordem zero do sistema de inferência fuzzy;
$\alpha$	Ganho de adaptação do ONFC;
$\gamma$	Taxa de adaptação do ONFC;
$\sigma$	Ganho da modificação $\sigma$
$\mu_1, \mu_2$	Funções de pertinência a um conjunto fuzzy;
$J$	Função custo genérica;
$e_r$	Erro de referência no instante $k$ ;
$e_x$	Erro entre os estados do sistema e do modelo referência;
$e_y$	Erro entre a saída do sistema e do modelo referência;
$T_s$	Intervalo de amostragem;
$\theta$	Parâmetro genérico de um controlador adaptativo;
$\sigma_\omega^2$	Variância de uma variável aleatória;
$\xi_0$	Amplitude máxima de perturbação eterna;
$A_1, A_2$	Antecedentes fuzzy;
$E_M$	Parâmetro das funções de pertinência do ONFC que representa o erro de referência máximo considerado;
$K_p$	Ganho proporcional do controlador;
$K_i$	Ganho proporcional do controlador;
$K_d$	Ganho proporcional do controlador;
$V$	Função de Lyapunov (candidata);
$\Delta V$	Varição da função de Lyapunov;
$\Delta V_e$	Parcela da variação da função de Lyapunov referente ao erro dos estados do sistema;
$\Delta V_w$	Parcela da variação da função de Lyapunov referente ao erro dos parâmetros do controlador;
$\Lambda$	Máximo valor do produto $CB$ no politopo de incerteza.

---

## Lista de Acrônimos

---

ANFIS	<i>Adaptive Network-based Fuzzy Inference System;</i>
FMRAC	Controle Fuzzy Adaptativo por Modelo Referência ( <i>Fuzzy Model-Reference Adaptive Control</i> );
GS	Escalonamento de Ganho ( <i>Gain Scheduling</i> );
IAE	Integral do Erro Absoluto ( <i>Integral of the Absolute magnitude of the Error</i> );
ISE	Integral do Erro Quadrático ( <i>Integral Square Error</i> );
ITAE	Integral do Erro Absoluto Ponderado pelo Tempo ( <i>Integral Time Absolute Error</i> );
ITSE	Integral do Erro Quadrático Ponderado pelo Tempo ( <i>Integral Time Square Error</i> );
LMI	Desigualdade Matricial Linear ( <i>Linear Matrix Inequality</i> );
LQG	Controle Linear Quadrático-Gaussiano ( <i>Linear-Quadratic-Gaussian</i> );
MQ	Estimador de Mínimos Quadrados;
MRC	Controle por Modelo Referência ( <i>Model-Reference Control</i> );
MRAC	Controle Adaptativo por Modelo Referência ( <i>Model-Reference Adaptive Control</i> );
NFN	<i>Neo Fuzzy Neuron</i> ;
ONFC	<i>Online Neuro Fuzzy Controller</i> ;
ONFC <sub>DW</sub>	<i>Online Neuro Fuzzy Controller</i> com ponderação para a diferença dos pesos;
ONFC <sub>DWd</sub>	<i>Online Neuro Fuzzy Controller</i> com parcela derivativa e ponderação para a diferença dos pesos;
PI	Controle Proporcional e Integral;
PID	Controle Proporcional, Integral e Derivativo;
SISO	<i>Single-Input Single-Output</i> ;
SRT	Regulador Auto-Sintonizável ( <i>Self-Tuning Regulator</i> );
TS	Takagi-Sugeno.

---

---

# Sumário

---

<b>Resumo</b>	<b>vii</b>
<b>Abstract</b>	<b>viii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Acrônimos</b>	<b>xii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Revisão Bibliográfica . . . . .	2
1.2 Justificativa . . . . .	5
1.3 Objetivos . . . . .	6
1.4 Organização do Texto . . . . .	7
<b>2 Controle Adaptativo e Nebuloso</b>	<b>8</b>
2.1 Descrição do Problema . . . . .	9
2.2 Esquemas Clássicos de Controle Adaptativo . . . . .	9
2.2.1 Escalonamento de Ganho . . . . .	10
2.2.2 Controle Adaptativo por Modelo Referência . . . . .	11
2.2.3 Reguladores Auto-Sintonizável . . . . .	12
2.3 Problema da Sensibilidade ao Ruído . . . . .	13
2.3.1 Zona Morta . . . . .	14
2.3.2 Modificação $\sigma$ . . . . .	14

2.3.3	Modificação <i>e</i> . . . . .	14
2.4	Controle Fuzzy . . . . .	15
2.4.1	Estrutura do Controle Fuzzy . . . . .	15
2.4.2	Controle Fuzzy Tipo Mamdani . . . . .	16
2.4.3	Fuzzy Gain Schedling . . . . .	17
2.4.4	Controle Fuzzy Baseado em Modelo TS . . . . .	17
2.4.5	Controle Neurofuzzy . . . . .	18
2.4.6	Controle Fuzzy Adaptativo . . . . .	18
2.5	Controlador ONFC . . . . .	19
2.5.1	Esquema Original . . . . .	20
2.5.2	Esquemas Modificados . . . . .	23
2.5.3	Esquema Proposto . . . . .	25
2.6	Conclusão . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Análise de Estabilidade do ONFC para o Caso Ideal</b>	<b>30</b>
3.1	Estabilidade em Sistemas Variantes no Tempo . . . . .	30
3.2	Estabilidade do ONFC . . . . .	34
3.2.1	Descrição do Problema Idealizado . . . . .	34
3.2.2	Teorema de Estabilidade para o Caso Ideal . . . . .	36
3.3	Experimentos Numéricos . . . . .	41
3.3.1	Região de Factibilidade da LMI . . . . .	41
3.3.2	Sensibilidade às Condições Iniciais . . . . .	42
3.3.3	Variação Paramétrica . . . . .	45
3.4	Conclusão . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Projeto para Estabilidade Robusta</b>	<b>48</b>
4.1	Controle de Sistema Incerto . . . . .	49
4.1.1	Descrição do Problema . . . . .	49
4.1.2	Teorema de Estabilidade Robusta . . . . .	51
4.2	Estabilidade Quadrática . . . . .	52
4.3	Convergência e Limitação dos Sinais . . . . .	56

<i>LISTA DE FIGURAS</i>	xv
4.4 Experimentos Numéricos . . . . .	58
4.4.1 Planta com Incertezas . . . . .	58
4.4.2 Processo Variante no Tempo . . . . .	60
4.5 Conclusão . . . . .	62
<b>5 Análise Numérica Comparativa</b>	<b>65</b>
5.1 Procedimento para Projeto do Controlador ONFC . . . . .	65
5.2 Controle de Sistema Incerto . . . . .	66
5.3 Controle de Sistemas Não Linear . . . . .	70
5.4 Robustez a Ruídos de Medição . . . . .	74
5.5 Conclusão . . . . .	80
<b>6 Conclusão</b>	<b>82</b>
6.1 Principais Contribuições . . . . .	85
6.2 Propostas de Continuidade . . . . .	86
<b>Bibliografia</b>	<b>93</b>
<b>A Apêndice</b>	<b>94</b>
A.1 Desigualdade matricial . . . . .	94
A.2 Estabilidade Entrada-Saída do Controlador ONFC . . . . .	94
A.3 Procedimento de Execução do Método MRAC . . . . .	95

# Introdução

---

*“Se chegaram a tão vasta ciência, a ponto de investigarem o universo, como que não encontraram mais facilmente o seu Senhor?”*

Livro da Sabedoria 13,1-9

Problemas práticos em engenharia estão essencialmente sujeitos a algum tipo de incerteza. Limitações no sistema de instrumentação, erros na modelagem e variações paramétricas dos sistemas reais estão entre as principais fontes de tais incertezas.

O desenvolvimento e aplicação de técnicas capazes de lidar com incertezas representaram boa parte da produção científica em teoria de controle nas três últimas décadas (Lamnabhi-Lagarrigue et al., 2017). Embora métodos de controle clássico ainda sejam os mais utilizados nos processos industriais, a engenharia de controle se utiliza cada vez mais das ferramentas modernas de projeto. Isso, porque algumas não linearidades do processo, falta de acurácia dos modelos ou perturbações externas, podem não ser satisfatoriamente tratadas com os métodos de controle clássico.

Entre os paradigmas mais difundidos para tratar essas questões estão: Controle Robusto, Controle Adaptativo e Controle Inteligente (Ioannou and Fidan, 2006; Aström and Kumar, 2014). Em todos eles as incertezas, em suas diversas tipologias, são consideradas no processamento da informação. A teoria de Controle Robusto propõe que o projeto de controladores leve em conta as possíveis variações e perturbações às quais a planta possa estar sujeita, de sorte que o conjunto de parâmetros definidos para o controlador seja capaz de produzir um desempenho mínimo em cada uma dessas condições. Controladores inteligentes se valem de ferramentas da computação inteligente para a identificação do processo ou no projeto e seleção de estrutura do controlador. Controladores adaptativos, por sua vez, procuram ajustar-se iterativamente, como uma forma de contornar a variação ou incerteza paramétrica. Muitos trabalhos ainda procuraram combinar diferentes métodos de modo a tratarem simultaneamente diferentes tipos de incertezas.

Nos problemas em que a variação ou incerteza da planta é de tal ordem que um único controlador com parâmetros fixos não é capaz de garantir um desempenho mínimo em todas as condições de operação, o controlador adaptativo pode ser uma alternativa viável. As

estratégias de controle adaptativo atuam no sentido de automatizar o processo de (re)sintonia do controlador por meio de uma segunda malha de realimentação. Esse ajuste pode ser feito de maneira indireta passando pela identificação online da planta, ou ainda, pela sintonia direta dos parâmetros do controlador, utilizando o sinal do erro. Ainda, podem ser adotados diferentes mecanismos de adaptação dos parâmetros. Técnicas de controle adaptativo inteligente, por exemplo, utilizam-se das propriedades de aprendizagem dos sistemas inteligentes como maneira de adaptar, direta ou indiretamente, os parâmetros dos controladores.

Sistemas adaptativos são, de uma maneira geral, do tipo não linear. A dupla realimentação aumenta a complexidade do sistema em malha fechada e coloca no centro do problema de projeto de controladores adaptativos a questão da análise de estabilidade. Tal análise deve envolver tanto as características gerais da planta e a estrutura do controlador, como o(s) mecanismo(s) de adaptação adotado(s). Usualmente, a análise de estabilidade é feita utilizando ferramentas baseadas na teoria de Lyapunov e nos conceitos de Passividade e Hiperestabilidade (Slotine and Li, 1991; Landau et al., 2011). A própria evolução da área de controle adaptativo se dá ao passo do avanço nas técnicas de análise de estabilidade para sistemas não lineares e do desenvolvimento dos métodos de identificação de sistemas, como é mostrado a seguir.

Para além da estabilidade e para relevância prática, os mecanismos de adaptação precisam portar garantias de robustez. Um controlador adaptativo é dito ser robusto se assegura limitação dos sinais na presença de uma determinada classe de dinâmica não modelada e sob uma limitada perturbação externa. Por conta disso, mecanismos de adaptação com garantias de robustez, foram desenvolvidos há muito e ainda recentemente, sendo campo corrente de investigação (Bierling, 2014).

Nesse sentido, este trabalho pretende analisar a estabilidade de um controlador fuzzy adaptativo denominado ONFC (*Online Neuro-Fuzzy Controller*), proposto por Gouvêa (2005), aplicado a um sistema linear discreto SISO, utilizando o método de análise de estabilidade de Lyapunov. Também é desenvolvida uma nova lei de adaptação, com uso de chaveamento tipo zona-morta, com garantia de robustez a perturbações. Também se busca, seja no projeto, seja na implementação, manter a simplicidade e baixo custo computacional do controlador ONFC.

## 1.1 Revisão Bibliográfica

Controle adaptativo é um paradigma consagrado na teoria de controle (Sastry and Bodson, 1989; Åström, 1983). As primeiras aplicações remontam ao início da década de 50 no projeto de reguladores por escalonamento de ganhos (Aseltine et al., 1958). Após a divulgação dos primeiros métodos formais de sintonia de controladores, como o de Ziegler and Nichols (1995), houve propostas para a sintonia automática dos parâmetros. Em Whitaker et al. (1958),

os autores desenvolveram controladores adaptativos baseados em modelos de referências (MRAC<sup>1</sup>) para aplicações em piloto automático de aeronaves, utilizando a chamada regra MIT baseada no método do gradiente. Em R. E. Kalman (1958), é proposto um tipo de controle adaptativo para alocação de polos baseado no problema linear quadrático ótimo.

Na década de 1960, surgiram algumas das principais contribuições da área de controle. As técnicas de espaços de estados foram inseridas. A programação dinâmica de Bellman, o controle estocástico e grandes avanços na teoria de identificação de sistemas (Bellman and Kalaba, 1959) ajudaram a desenvolver a área de controle adaptativo. Contudo, sem garantias de estabilidade, alguns testes em sistemas reais mostraram os riscos dessa abordagem e fizeram diminuir o interesse na área (Dydek et al., 2010). De fato, à época não se tinham disponíveis as teorias necessárias ou mesmo hardwares confiáveis para desenvolvimento e aplicação do controle adaptativo.

O principal desafio dos controladores adaptativos passou a ser definir a região de operação que garantisse estabilidade para uma possível variação dos parâmetros do processo. Foi P. Parks quem, em 1966, propôs o projeto de controladores adaptativos baseados no método direto de Lyapunov (Parks, 1966). Desta forma, a lei de adaptação e as condições de estabilidade eram determinadas em um único cálculo. Este método se estabeleceu como principal ferramenta de análise de convergência dos sistemas adaptativos nos anos seguintes. Embora houvesse formalização matemática, a demonstração continha fortes restrições, tais como a exigência de equivalência entre modelo e processo (Ampsefidis et al., 1993), o problema da persistência de excitação (Anderson, 1985) e da condição de positividade-real estrita da planta (Barkana, 2014). A análise de estabilidade baseada no trabalho de Popov (1963, 1973) utilizando os conceitos de passividade e hiperestabilidade aparece em Landau (1969) e Feng (1981). Em Monopoli (1974) aparece o conceito de erro aumentado, em que se estabeleceu um esquema de adaptação utilizando apenas informação de entrada-saída. As extensões para o formato em espaço de estados e para o caso discreto multivariável aparecem em Narendra et al. (1980) e em Goodwin et al. (1979), respectivamente. Uma nova estrutura de controlador adaptativo é proposta em Åström and Wittenmark (1973), denominada *self-tuning regulator* (STR), cuja novidade foi a separação dos problemas de identificação do processo e ajuste dos parâmetros do controlador, resultando em uma adaptação indireta.

No fim da década de 1980 a questão da robustez ganha espaço na área de controle. A emergente área de Controle Robusto evidenciava as limitações práticas de projetos que negligenciavam variações típicas dos processos reais. Foram desenvolvidas técnicas de controle que procuravam garantir o funcionamento (ou o desempenho mínimo) para todos os diferentes cenários possíveis de um dado processo. As ferramentas baseadas em Desigualdades Matriciais

---

<sup>1</sup>MRAC - *Model reference adaptive control*, do inglês: Controle Adaptativo por Modelo de Referência.

Lineares, as LMIs<sup>2</sup>, popularizaram a análise e o projeto de controle robusto. Muitas das técnicas de controle adaptativo desenvolvidas até então, mesmo com as garantias de estabilidade, não apresentavam robustez a perturbações mínimas, o que colocou óbice a sua viabilidade prática. Alguns trabalhos inauguraram a subárea de controle adaptativo robusto que buscavam garantir a estabilidade do sistema e a convergência e limitação de sinais sob uma perturbação limitada (Kokotovic and Ioannou, 1981; Ioannou and Kokotovic, 1982; Narendra and Annaswamy, 1984). O tema se tornou eminente na área de sistemas adaptativos e trabalhos recentes têm proposto técnicas alternativas às ferramentas de controle robusto do tipo *leakage* (Tansel and Anthony, 2011; Bierling et al., 2013).

A respeito da evolução das estruturas e dos mecanismos de adaptação do controlador, a área de Controle Adaptativo se serviu da emergente área de Sistemas Inteligentes para criar formas iterativas de adaptação, por meio do aprendizado de máquina. Controle adaptativo inteligente compreende abordagens que se utilizam do processo de inferência das técnicas de inteligência artificial para adaptar os parâmetros do controlador ou ainda versões adaptáveis dos controladores inteligentes.

Na década de 70 as teorias de conjuntos fuzzy, propostas por Zadeh (1965), foram aplicadas com sucesso no controle de sistemas no trabalho de Mamdani and Assilian (1975). O chamado controle fuzzy tipo Mamdani não exige conhecimento da planta, é projetado de maneira heurística e foi largamente aplicado em diversos processos industriais nos anos seguintes. Em 1985, são propostas novas estruturas de controle fuzzy em que os consequentes são funções polinomiais e não mais conjuntos nebulosos (T. Takagi and M. Sugeno, 1985). Essa proposta trazia maior rigor metodológico e uma sistemática de projeto que não dependia do conhecimento de especialista, sendo aplicada a problemas de diferentes áreas como robótica (dos Santos et al., 2016), sistemas elétricos (Abdelazim and Malik, 2005) e ainda reator nuclear (Rastovic, 2011). A simplicidade de projeto e a capacidade de aplicação em sistemas não lineares ou incertos fizeram do controle fuzzy uma relevante categoria de controladores (Gomide and Gudwin, 1994). Controladores fuzzy apresentam alguma forma de aprendizado e capacidade de tratar a incerteza do modelo. Alguns trabalhos, contudo, adicionam mecanismo de adaptação online aos algoritmos de controle fuzzy. Um dos primeiros nessa linha foi proposto por Wang (1993), apresentando um modelo de controle fuzzy adaptativo tipo TS e feita a análise de estabilidade por meio de Lyapunov. Em Golea et al. (2002), um controle fuzzy é desenvolvido com um modelo de referência e denominado FMRAC (Fuzzy Model Reference Adaptive Control).

A par do desenvolvimento de sistemas fuzzy, as redes neurais também foram aplicadas ao problema de controle. O controle fuzzy e o controle por redes neurais são possivelmente

---

<sup>2</sup>do inglês, *Linear Matrix Inequalities*.

as duas técnicas mais populares de controle inteligente. Elas apresentam características complementares, o que confere vantagem ainda maior para as chamadas redes neuro-fuzzy (Feng, 2006). Trata-se da combinação de um sistema de inferência fuzzy do tipo Takagi-Sugeno (TS) associada a uma rede neural o que, na prática, automatiza a criação das regras do sistema fuzzy. As principais propostas de redes tipo neuro-fuzzy são NFN (*Neo Fuzzy Neuron*) (Yamakawa et al., 1992a) e ANFIS (*Adaptive-Network-Based Fuzzy Inference System*) (Jang, 1993b). Diversas estruturas neuro-fuzzy demonstraram ser aproximadores universais e tiveram inúmeras aplicações nas áreas de identificação, classificação e controle adaptativo (Jang and Chuen-Tsai Sun, 1995; Lemos et al., 2011; Shihabudheen and Pillai, 2018).

Controladores neuro-fuzzy adaptativo surgem nos trabalhos de Liu et al. (2004) sobre controladores MRAC baseados em redes neuro-fuzzy e de Gouvêa (2005) com o Online Neuro-Fuzzy Controller, denominado ONFC. Esse último, tema deste trabalho, tem como principal vantagem sua simplicidade de implementação e mostrou grande eficiência em diversas aplicações (dos Santos et al., 2016; Spadini et al., 2013; Carvalho et al., 2010).

Controladores neuro-fuzzy adaptativos são exemplos de controladores não lineares e a análise de estabilidade dessas estruturas tem sido tema de pesquisa recorrente (Feng, 2006).

## 1.2 Justificativa

As duas últimas décadas da pesquisa em controle (e talvez em engenharia de um modo geral) foi marcada por uma difusão das ferramentas de computação inteligente em diversos aspectos. Áreas emergentes da inteligência artificial deverão influenciar ainda mais a teoria de controle nos próximos anos. Algumas dessas novas áreas já estão sendo incorporadas à engenharia de controle, como sistemas cognitivos (Fatemi and Haykin, 2014), *deeplearning* (Khargonekar and Dahleh, 2018), entre outros. Outrossim, os desafios da Indústria 4.0 e o desenvolvimento de sistemas autônomos exigirá que os processos controlados remotamente tenham cada vez maior grau de adaptação e inteligência embarcadas (Aström and Kumar, 2014; Lamnabhi-Lagarrigue et al., 2017).

Métodos de controle inteligente com aprendizado online são usualmente aplicados em controle de sistemas incertos ou não lineares. Em alguns casos é possível obter o desempenho desejado, a despeito do conhecimento prévio ou integral do modelo da planta. Controladores neuro-fuzzy, por exemplo, que são capazes de controlar sistemas não lineares a partir da interpolação de controladores lineares locais. Isso, por um lado, permite o projeto de controladores utilizando técnicas simples para a solução de problemas de grande complexidade. Por outro, resulta em estruturas intrincadas e que impõem dificuldades para analisar sistematicamente a estabilidade e convergência desses algoritmos (Feng, 2006). A validação dessas técnicas, não

raramente, é feita por meio de testes empíricos e evidenciação numérica.

O controlador ONFC é um tipo de controle neuro-fuzzy adaptativo que reúne duas vantagens importantes: mantém o desempenho em larga faixa de operação mesmo para sistemas não lineares e guarda simplicidade estrutural, facilitando a análise. Seu sucesso no controle de processos reais demonstrou o potencial de aplicação. Porém, não havia, até então, uma análise matemática formal de sua estabilidade ou a definição das condições em que é garantido o seu devido funcionamento.

Cumprir destacar que a análise de estabilidade é o principal problema no projeto de controladores adaptativos. É por meio dela que são estabelecidas as premissas sobre a estrutura da planta e/ou a faixa de valores possíveis dos seus parâmetros e avalia-se as fronteiras de aplicação do controlador. Tal análise deverá ainda ter em conta as não idealidades típicas dos processos industriais, como perturbações e ruídos de medição.

Nas aplicações em que foi utilizado, o ONFC evidenciou a sensibilidade à presença de ruído e os problemas dela derivados, qual seja, o crescimento ilimitado dos parâmetros e a consequente instabilidade do sistema. Alguns trabalhos propuseram modificações na lei de adaptação a fim de conferir robustez ao controlador. Em que pese o notável apelo prático do ONFC, a ausência de diretriz clara de projeto torna hermética a gama de problemas em que se poderia aplicá-lo e exige-se boa experiência do projetista para o adequado funcionamento. Ademais, as modificações na versão original, a fim de conferir robustez, trouxeram novos parâmetros de projetos e terminaram por dificultar sua sintonia, comprometendo sua vantagem prática.

A delimitação do escopo de problemas, por meio da definição das premissas de funcionamento, bem como, a construção de metodologia sistemática de projeto têm potencial de habilitar o ONFC como alternativa viável e segura na solução de problemas industriais de controle que exigem adaptação e baixo custo computacional.

### 1.3 Objetivos

Este trabalho analisa matematicamente as premissas e condições de estabilidade robusta do controlador ONFC. É aplicada a técnica de análise para sistemas não lineares utilizando funções de Lyapunov. Faz-se uma breve revisão dos conceitos relativos ao controle adaptativo e das ferramentas matemáticas de análise de sistemas não lineares variantes no tempo.

Propõe-se ainda, uma melhoria no mecanismo de adaptação e apresenta-se uma metodologia de projeto com indicativos práticos. Isso, sob a condição de se manter as vantagens preeminente do ONFC: a simplicidade de implementação aliada ao baixo custo computacional e desempenho equivalente ao de controladores concorrente.

## 1.4 Organização do Texto

A presente tese está organizada da seguinte forma. No Capítulo 2 é feita uma revisão a respeito da área de Controle Adaptativo e Controle Nebuloso. São apresentadas brevemente as principais técnicas e ainda alguns paradigmas de controle frequentemente associados a esses temas. O controlador ONFC, como exemplo de controlador fuzzy adaptativo, é revisado em suas últimas versões e uma nova versão generalizada é proposta. O objetivo é situar o ONFC na literatura de controle adaptativo e apresentar a estrutura do controlador utilizada neste trabalho.

No Capítulo 3, os conceitos e técnicas de análise de estabilidade são apresentados. O controlador ONFC é analisado por meio de funções de Lyapunov para o caso discreto idealizado, aqui entendido como o caso sem perturbações e com condições específicas da planta a serem apresentadas. A prova de estabilidade baseada na análise de Lyapunov é apresentada em forma de condições de desigualdades matriciais lineares (LMI). Um novo algoritmo de controle com garantia de estabilidade é apresentado, bem como o resultado de simulações em alguns sistemas.

No Capítulo 4 é realizada a análise para o caso não ideal, com incerteza politópica dos parâmetros e presença de ruídos de medição e de processo. A principal contribuição é a prova de estabilidade do ONFC aplicado ao sistema considerado, com garantia de limitação dos sinais envolvidos, fazendo uso da técnica de zona-morta na etapa de adaptação. O Capítulo 5 traz o compêndio do procedimento de projeto desenvolvido no trabalho. Ainda é avaliado o desempenho do ONFC em comparação a controladores concorrentes quando aplicados aos mesmos problemas. Esta análise determina de maneira criteriosa em quais contextos o controle ONFC pode ser aplicado e as condições necessárias para seu correto funcionamento. Por fim, são feitas algumas conclusões e apresentadas propostas de continuidade deste trabalho no Capítulo 6.

## Controle Adaptativo e Nebuloso

---

*“O Senhor completará o que em meu auxílio começou. Senhor, eterna é a vossa bondade: não abandoneis a obra de vossas mãos.”*

Salmos 138:7-8

Um controlador adaptativo é um tipo de controlador com parâmetros ajustáveis e um mecanismo de ajuste automático desses parâmetros (Åström and Wittenmark, 1995). A combinação de diferentes técnicas e ferramentas nas estruturas do controlador adaptativo gera uma diversidade de tipologias desses controladores. São especialmente úteis para controle de plantas sobre as quais não se tem um modelo preciso ou, ainda, naquelas cujos os parâmetros varie mais lentamente que os estados. Um sistema de controle adaptativo é essencialmente não linear, mesmo que a planta ou a estrutura interna do controlador sejam lineares. Isso, pois a adaptação em malha fechada torna o sistema resultante em um sistema não linear e variante no tempo, visto que os parâmetros do controlador tornam-se dependentes dos estados.

Um controlador adaptativo contém essencialmente dois elementos acoplados: um identificador recursivo e um controlador com parâmetros ajustáveis. Tanto um como outro podem ser realizados com base em algoritmos de inteligência artificial. Não raramente, são utilizadas estruturas fuzzy para compor um ou mais itens do controlador adaptativo. É nesse contexto que pode ser descrito o ONFC: um controlador adaptativo com estrutura fuzzy. E é também desse modo que pretende-se descrevê-lo aqui, situando-o na literatura clássica de controle adaptativo.

Neste capítulo é feita uma breve revisão dos conceitos fundamentais em controle adaptativo. São apresentadas as principais estruturas e suas características. Apresenta-se ainda como a lógica fuzzy é comumente aplicada em controle, de uma forma geral, e ao controle adaptativo, de modo particular; ora como identificadores não paramétricos, ora como controladores ajustáveis. Por fim, apresentam-se o controlador ONFC propriamente dito, suas versões anteriores e aquela que é objeto de estudo deste trabalho.

## 2.1 Descrição do Problema

Considere o sistema linear, de ordem  $n$  descrito pelas equações:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (2.1)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (2.2)$$

Em que  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times q}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  são matrizes constantes desconhecidas,  $u(k) \in \mathbb{R}^q$  é a entrada de controle e  $y(k) \in \mathbb{R}^m$  é a saída medida.

O problema de controle adaptativo consiste em determinar o sinal  $u(k)$  em cada instante  $k$  que garanta convergência de  $y(k)$  para um sinal de referência  $r(k)$  com um desempenho predefinido. O desenvolvimento de controladores adaptativos segue, usualmente, as seguintes etapas:

- Definição dos requisitos de desempenho em malha fechada;
- Determinação da estrutura do controlador com parâmetros ajustáveis;
- Determinação de mecanismo de ajuste;
- Análise de estabilidade em malha fechada.

O modo como o desempenho desejado entra no projeto do controlador varia conforme a estrutura adotada. O mecanismo de ajuste estabelece a maneira como serão alterados os parâmetros do controlador. Podem ser ajustados diretamente a partir do sinal de erro, ou a partir da estimação recursiva do modelo da planta e conseguinte sintonia do controlador. Esses dois casos, tratam respectivamente do método de ajuste direto e indireto.

## 2.2 Esquemas Clássicos de Controle Adaptativo

Nesta seção são apresentados os esquemas clássicos e as principais estruturas de controle adaptativo presentes na literatura. De uma maneira geral, as três estruturas mais comumente utilizadas são: a Técnica de Escalonamento de Ganho (*Gain Scheduling* - GS), o Controle Adaptativo por Modelo Referência (*Model-Reference Adaptive Control* - MRAC) e os Reguladores Auto-Sintonizáveis (*Self-Tuning Regulator* - SRT). Sob certa análise, as demais estruturas adaptativas, podem ser vistas como uma extensão, combinação ou caso particular de uma dessas três (Sastry and Bodson, 1989).

### 2.2.1 Escalonamento de Ganho

Em determinados problemas de controle é possível identificar variáveis auxiliares que são correlacionadas com as variações do processo. Nestes casos, pode-se reduzir os efeitos dessas variações sobre o desempenho esperado a partir do ajuste dos parâmetros do controlador em função de variáveis auxiliares, por exemplo, as variáveis de entrada e saída do processo. Esta técnica é denominada Escalonamento (ou mapeamento) de Ganho e o esquema geral é representado na Figura 2.1.

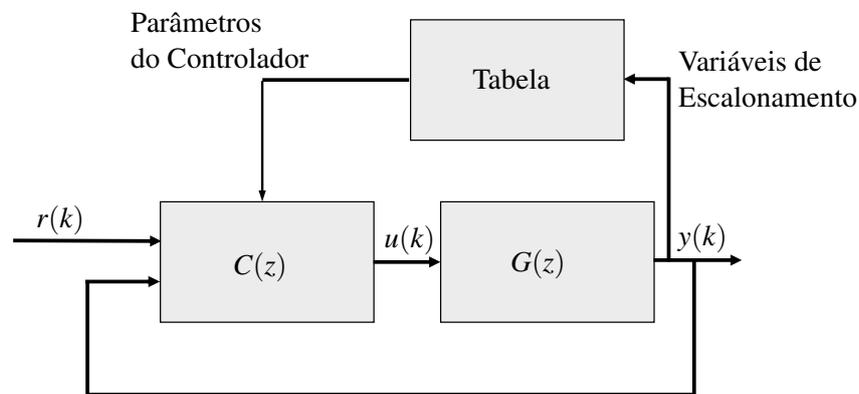


Figura 2.1: Esquema de controle por escalonamento de ganho.

O principal desafio nessa técnica é determinar adequadamente quais e de que modo as variáveis auxiliares serão utilizadas na adaptação dos ganhos, exigindo que as não linearidades e variâncias do processo sejam precisamente conhecidas e modeladas (Rugh and Shamma, 2000). Um número de condições (ou regras) de operação são determinadas para o ajuste dos parâmetros. Essencialmente, são projetados diversos controladores para cada condição de operação, selecionando-os apropriadamente em cada instante de tempo. A adaptação dos parâmetros é realizada em malha aberta, ou seja, o mapeamento dos ganhos do controlador não sofre alteração ao longo do tempo. Tem como principal vantagem a rapidez de ajuste perante uma variação do processo e, para alguns casos, a simplicidade de projeto, sendo muito utilizado na prática para o controle de sistemas não lineares (Vesely and Ilka, 2013). Contudo, para alguns processos, a tabela de ganhos pode ser de tal modo extensa, que aumenta demasiadamente o projeto de todos os controladores locais. Além disso, não é simples garantir a estabilidade global desse controlador. Mais recentemente, controles com múltiplos modelos foram desenvolvidos em um esquema de chaveamento de controladores, ou de adaptação composta, chaveando não apenas os parâmetros, mas a própria estrutura do controlador (Narendra and Han, 2012).

### 2.2.2 Controle Adaptativo por Modelo Referência

O controle por modelo referência (MRC - *Model Reference Control*) é uma metodologia de sintonia que ajusta os parâmetros do controlador de tal maneira, que a dinâmica equivalente do sistema em malha fechada se aproxime da dinâmica de um modelo predefinido em projeto. Na versão adaptativa desse esquema (denominado MRAC - *Model Reference Adaptive Control*), os parâmetros são ajustados recursivamente até que a diferença entre a saída da planta controlada e a do modelo referência seja zero. Isso é possível por meio de uma segunda realimentação em que a variável utilizada para realizar o ajuste dos parâmetros é o próprio sinal de erro (Landau et al., 2011). O modelo referência pode ser colocado em paralelo com a planta controlada como na Figura 2.2, ou ainda na configuração em série, mostrada na Figura 2.3, denominada

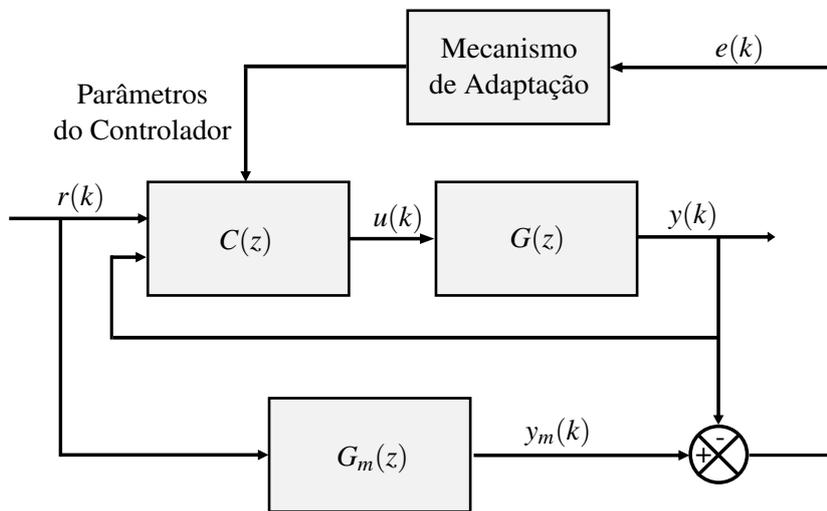


Figura 2.2: Esquema do controle tipo MRAC paralelo.

esquema em série de alto ganho. Nesse esquema, tanto a adaptação quanto a ação de controle

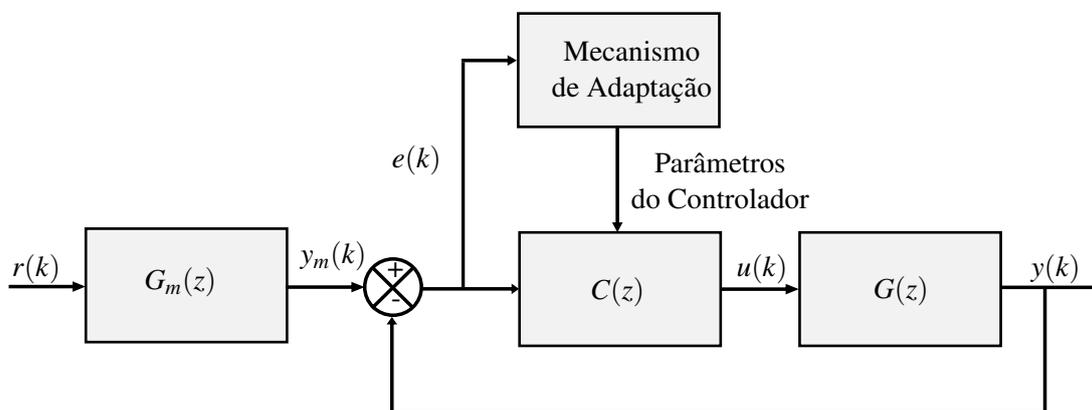


Figura 2.3: Esquema do controle tipo MRAC série de alto ganho.

são determinadas por um único sinal de erro. Em geral, para uma boa aproximação com o modelo referência em série é necessário um alto ganho direto, o que pode levar à saturação dos sinais e à instabilidade do sistema mais facilmente (Sastry and Bodson, 1989).

O projeto do MRAC consiste em definir a dinâmica do modelo de referência (que especifica o desempenho desejado em malha fechada), bem como os mecanismos de adaptação dos parâmetros do controlador. Essas escolhas estão sujeitas a restrições em sua estrutura como, por exemplo, ordem e grau relativo do processo, que dependem de conhecimento prévio da estrutura do modelo da planta. Esse mecanismo de ajuste do controlador deve ter relação linear com seus parâmetros. Originalmente, equação de adaptação do MRAC era obtida pelo método do gradiente, a chamada regra MIT (Whitaker et al., 1958). O problema é que esse método não apresentava as garantias de estabilidade. O primeiro trabalho a tratar isso é creditado a Parks (1966) que utiliza o método de Lyapunov para determinar as condições limiars de estabilidade.

### 2.2.3 Reguladores Auto-Sintonizável

O regulador auto-sintonizável (STR - *Self-tuning Regulators*) foi proposto por R. E. Kalman (1958) e analisado por Åström and Wittenmark (1973). Como o MRAC, é tido como um método baseado em identificação, porém, do tipo indireto. Isso porque, realiza a estimação online dos parâmetros da planta e só então sintoniza o controlador de forma recursiva. Assim sendo, o problema de identificação e sintonia são separados e resolvidos distintamente. O esquema deste tipo de controle é mostrado na Figura 2.4.

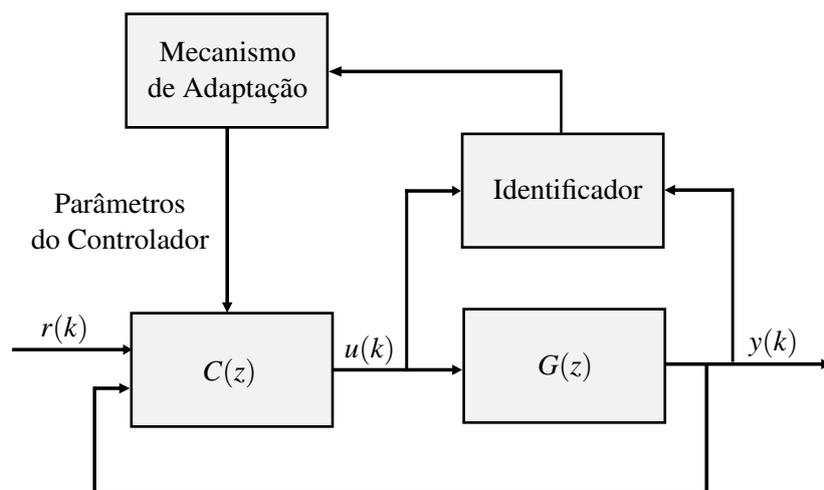


Figura 2.4: Esquema de Reguladores Auto-Sintonizável.

Combinando diferentes métodos de estimação e de controle, é possível obter diversos tipos de controle STR. A primeira proposta foi baseada em um controle linear quadrático-gaussiano

(*linear-quadratic-Gaussian* - LQG) discreto e, neste caso, busca-se otimizar algum índice de desempenho. Contudo, outras estruturas de controle já foram testadas, como por exemplo, controle de variância mínima, alocação de polos e controle preditivo.

O objetivo é fazer com que os sinais de referência e de saída da planta se igualem e não há um sinal de erro explícito na lei de adaptação. Uma reparametrização pode possibilitar o ajuste direto dos parâmetros do controlador, tornando um caso de adaptação direta. É possível mostrar que o esquema MRAC é um caso particular do esquema STR (Åström and Wittenmark, 1995). Algumas desvantagens é que a estrutura do modelo do processo tem de ser conhecida e as premissas para garantir a estabilidade são mais restritivas, como a exigência de que seja possível a convergência da estimação dos parâmetros para os seus valores reais, conhecido como princípio de equivalência à certeza.

## 2.3 Problema da Sensibilidade ao Ruído

Como dito anteriormente, os mecanismos de adaptação se utilizam, direta ou indiretamente, de técnicas de estimação de parâmetros. A maioria dessas estruturas são baseadas no método do gradiente ou no método de mínimos quadrados e ambos apresentam problemas de estimação na presença de incertezas não paramétricas. A robustez dos métodos de estimação envolvidos nos mecanismos de adaptação influencia diretamente na robustez dos controladores adaptativos. A maioria dos mecanismos de adaptação baseados em integração pura são sensíveis a presença de perturbações ou ruído de medição e podem levar os parâmetros do controlador a um crescimento indefinido. Este problema é extensamente tratado em diversos textos na literatura especializada (Åström and Kumar, 2014; Ioannou and Fidan, 2006; Slotine and Li, 1991). Para sanar tais problemas, parece lógico aumentar a complexidade do controlador com modificações da lei de adaptação original. Isso, contudo, irá significar um aumento nas exigências ou condições de projeto. A maioria das técnicas procuram artifícios para decrementar continuamente o valor do parâmetro estimado ou desligar a lei de adaptação em uma dada condição garantindo a delimitação de todos os sinais do sistema em malha fechada.

Para explicar esse problema, considere  $\theta$  o parâmetro de um controlador a ser estimado e uma regra de adaptação baseada no método do gradiente que busca minimizar um sinal erro  $e$ . Essa regra tem a seguinte forma geral:

$$\theta(k+1) = \theta(k) - \gamma e(k) \nabla e(\theta) \quad (2.3)$$

em que  $\gamma$  é a velocidade de adaptação e  $\nabla e(\theta)$  é o gradiente do erro em relação ao parâmetro que se deseja ajustar. A seguir são apresentadas algumas dessas técnicas presentes na literatura.

### 2.3.1 Zona Morta

A técnica de zona morta, proposta por Peterson and Narendra (1982) consiste em definir uma região  $\xi_0$  em que a lei de adaptação é desligada. Como fora dessa região, o controle demonstra convergência dos sinais e dentro dela não há garantia de convergência dos parâmetros, uma saída é desligar a adaptação, conforme a regra:

$$\theta(k+1) = \theta(k) - \gamma e(k) \nabla e(\theta) \quad (2.4)$$

$$\gamma = \begin{cases} 0, & \text{se } |e(k)| \leq \xi_0 \\ \gamma, & \text{se } |e(k)| \geq \xi_0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Com isso, sempre que o erro encontra-se dentro do limite projetado, o controlador deixa de adaptar e só o fará novamente caso o módulo do erro ultrapasse esse limite. Esta técnica tem como vantagem a simplicidade de implementação. Tem como principal desvantagem, porém, a exigência de se conhecer a região  $\xi_0$  previamente.

### 2.3.2 Modificação $\sigma$

Para contornar a necessidade de se conhecer os limites das perturbações do processo, foi proposta a técnica denominada modificação  $\sigma$  (Ioannou and Kokotovic, 1983). Ela consiste em adicionar um termo recursivo na lei de adaptação da seguinte forma:

$$\theta(k+1) = \theta(k) + \gamma e^2(k) - \gamma \sigma \theta(k) \quad (2.6)$$

Esta modificação tem como vantagem a correção automática do parâmetro  $\theta$  sem a necessidade de se ter informações prévias sobre os parâmetros da planta. Porém, desloca do ponto de equilíbrio da origem ( $e(\infty) \neq 0$ ). O ajuste de  $\sigma$  também é um passo a mais no projeto e é bastante relevante para o desempenho do controle. A definição desse fator é crítica e não há um método formal para sua definição, sendo que, um valor excessivamente elevado gera um desempenho ruim e um valor demasiado baixo não é capaz de evitar a deriva do parâmetro  $\theta$ . Uma indicação prática de ajuste é utilizar um valor próximo à variância do sinal de erro, ou ainda, à variância do ruído envolvido.

### 2.3.3 Modificação $e$

Se o valor do erro  $e$  permanecer baixo por muito tempo a modificação  $\sigma$  pode atenuar desnecessariamente o valor do parâmetro  $\theta$ . A técnica de *e-modification* proposta por (Narendra and Annaswamy, 1987), corrige esse problema a partir da seguinte modificação na lei de

adaptação:

$$\theta(k+1) = \theta(k) + \gamma e^2(k) - \gamma \sigma |e(k)|(\theta(k)) \quad (2.7)$$

Note-se que nessa equação o equilíbrio volta a ser a origem do sinal de erro. Embora o valor de  $\sigma$  seja menos crítico utilizando essa modificação, a modificação  $e$  amortece a velocidade de adaptação de  $\theta$  e torna a convergência da estimação desse parâmetro mais lenta.

Diversas outras técnicas modificações robustas nas lei de adaptação são encontradas atualmente e são temas recentes de muitas publicações (Bierling et al., 2013; Tansel and Anthony, 2011). Além das modificações das leis de adaptação, diversos métodos como normalização de sinais, adaptação ótima ou na filtragem estocásticas desses sinais são utilizados em controle adaptativo para conferir robustez a incertezas não estruturadas (Ioannou and Baldi, 2010).

As técnicas de robustez são aplicáveis aos mecanismos de adaptação de praticamente todos os controladores adaptativos. Na seção seguinte é introduzida brevemente a área de controle fuzzy e em seguida será mostrado um caso de aplicação de modificação robusta aplicada a um controlador fuzzy adaptativo.

## 2.4 Controle Fuzzy

A inteligência computacional é uma área que compreende técnicas de processamento de dados por meio de estruturas que mimetizam algum aspecto do processamento natural ou biológico da informação. Entre as técnicas de inteligência artificial mais comuns estão as Redes Neurais, a Computação Evolucionária, os Sistemas Nebulosos (ou Fuzzy), entre outras. Por controle inteligente entende-se o uso dessas técnicas no desenvolvimento ou na estrutura de controladores.

Nesta seção é tratado sobre o controle fuzzy, um tipo de controle inteligente baseado em lógica fuzzy para determinação da ação de controle. As regras são definidas em termos de expressões linguísticas e conferem ao controlador fuzzy a vantagem da interpretabilidade das ações de controle. Desde as primeiras propostas, muitas outras estruturas de controle fuzzy foram desenvolvidas com notáveis avanços teóricos e aplicações, firmando esta técnica em lugar de destaque na área de controle. A seguir, são apresentadas algumas estruturas de controle fuzzy, a fim de caracterizar o tipo de controlador avaliado neste trabalho.

### 2.4.1 Estrutura do Controle Fuzzy

A ideia básica em controle fuzzy é modelar as ações de controle a partir de conhecimento especialista, ao invés de, necessariamente, modelar o processo em si. Isso leva a uma abordagem

diferente dos métodos convencionais de controle de processos, que são desenvolvidos via modelagem matemática dos processos de modo a derivar as ações de controle como função dos estados do processo. A motivação para esta nova abordagem veio de casos em que o conhecimento especialista de controle era disponível, seja por meio de operadores ou de projetistas, e os modelos matemáticos envolvidos eram muito custosos ou muito complicados para serem obtidos.

A estrutura de um processo controlado por um controlador fuzzy é mostrada na Figura 2.5, enfatizando seus componentes básicos: a interface de fuzzyficação, a base de conhecimento, a base de dados, o procedimento de inferência e a interface de defuzzyficação.

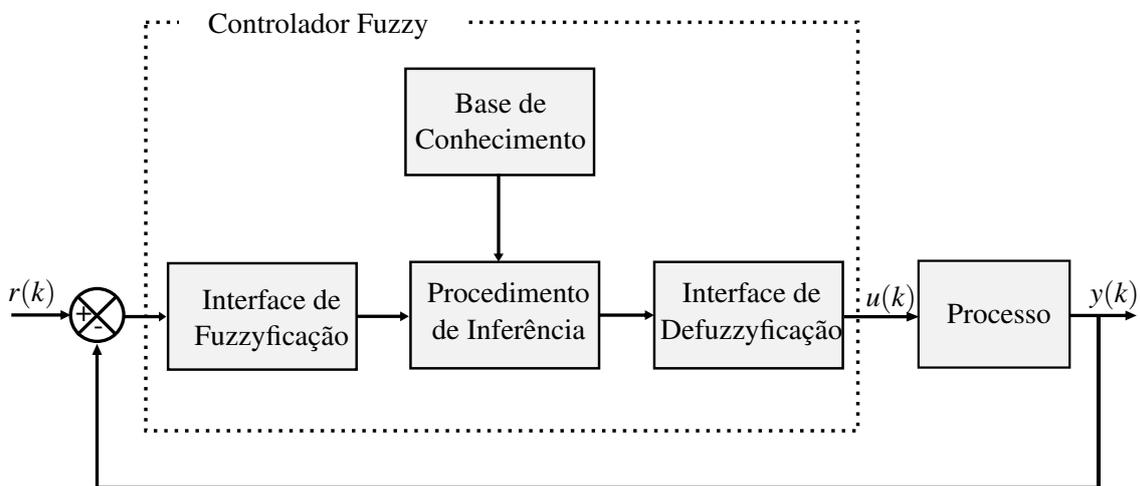


Figura 2.5: A estrutura de um sistema de inferência fuzzy aplicada ao controle de processo.

Embora tenham a mesma estrutura básica, os controladores fuzzy se diferenciam quanto ao método de inferência e aplicação no problema de controle. A seguir, são apresentados os tipos principais de controle fuzzy, salientando que esses tipos guardam alguma sobreposição ou equivalência entre si.

### 2.4.2 Controle Fuzzy Tipo Mamdani

Também chamado de controle fuzzy convencional, foi o primeiro tipo de controle fuzzy aplicado com sucesso em uma planta industrial (Mamdani and Assilian, 1975). Suas aplicações vão desde reatores a aparelhos eletrônicos. O projeto é essencialmente heurístico e dispensam modelo matemático da planta. Ao invés disso, baseiam-se no conhecimento de um especialista para construir a base de regras linguísticas que irão gerar a ação de controle. A estrutura básica é formada por uma série de regras do tipo *SE-ENTÃO* em que os antecedentes fuzzy de entrada ativam os consequentes fuzzy de saída. O resultado é um novo conjunto fuzzy, que necessita ser convertido em valor numérico para assim gerar a ação de controle.

Um sistema de inferência tipo Mamdani pode ser visto como uma interpolação ponderada de pontos de uma função contínua qualquer (Cao et al., 2001). No problema de controle, essa função é a função do controlador conhecida apenas de maneira vaga ou imprecisa pelo especialista e completamente aproximada pelo sistema de inferência fuzzy projetado. Deste modo, é possível implementar um controle com características não linear com muito menos conhecimento *a priori* que as técnicas não lineares convencionais. Embora alguns autores tenham demonstrado as condições para estabilidade do controle tipo Mamdani como em Calcev (1998), é uma análise pouco comum na prática.

### 2.4.3 Fuzzy Gain Scheduling

Neste formato são projetados controladores locais para vários pontos de operação da planta. Os sinais medidos da planta são os antecedentes e os parâmetros do controlador são os consequentes. A principal diferença para o controle apresentado na Subseção 2.2.1 é que em sua versão fuzzy as regras são interpoladas, conferindo suavidade na transição entre elas. Após a defuzzificação, o resultado é um controle não linear resultado da fusão de diversos controladores lineares locais.

O controle Fuzzy PID pode ser visto como um caso de fuzzy gain scheduling e é talvez o mais utilizado desse tipo (Carvajal et al., 2000). Via de regra, apresentam desempenho superior ao PID convencional quando operam com sistemas não lineares, desde que o modelo do sistema seja bem conhecido na etapa de projeto.

### 2.4.4 Controle Fuzzy Baseado em Modelo TS

A estrutura de controle tipo Takagi-Sugeno foi proposta em T. Takagi and M. Sugeno (1985). A diferença para o tipo mandani é que os consequentes podem ser uma função qualquer (geralmente polinomial) e não mais um conjunto fuzzy. Este tipo de representação fuzzy permite criar modelos locais como consequentes e assim compor uma aproximação semiglobal de funções contínuas. Pode-se dizer que modelos TS incluem dois tipos de conhecimento: um qualitativo, representado pelos antecedentes fuzzy e outro quantitativo, representados pelos modelos locais ou consequentes. Sistemas TS foram provados ser aproximadores universais de funções (Wang, 1992).

Sua aplicação em controle normalmente se utiliza da aproximação local da planta para projetar controladores locais lineares que são suavemente conectados por meio da inferência fuzzy. Assim qualquer técnica de controle linear pode ser aplicada a sistemas não lineares contínuos com possibilidade de demonstração formal de estabilidade e robustez (Buckley, 1993). O controle baseado em modelo TS é atualmente umas das principais técnicas de controle

não linear.

As técnicas de análise de estabilidade mais comumente aplicadas em sistemas TS são: Lyapunov quadrática globais, Lyapunov quadrática por partes e Lyapunov não-quadráticas fuzzy. Em todas elas o uso de Desigualdades Matriciais Lineares (*Linear Matrix inequalities - LMIs*) é a forma mais comum de resolução (Mozelli and Palhares, 2011).

### 2.4.5 Controle Neurofuzzy

Redes Neuro-fuzzy combinam as técnicas de redes neurais e lógica fuzzy para construção de algoritmos de aproximação de sistemas. Basicamente, um sistema de inferência fuzzy TS é montado sobre uma rede neural apresentando as vantagens complementares dessas duas técnicas (Jang and Chuen-Tsai Sun, 1995). A base de regras que representa um conhecimento linguístico é automaticamente gerada por meio do treinamento típico das redes neurais. Assim, a estrutura e os parâmetros dos modelos lineares locais são gerados e ajustados automaticamente.

Duas das estruturas mais conhecidas de sistemas neuro-fuzzy são encontradas nos trabalhos de Yamakawa et al. (1992b), em que se apresenta o *Neo Fuzzy Neuron* (NFN), e no trabalho de Jang (1993a), com as redes ANFIS (*Adaptive-Neuro-based Fuzzy Inference System*). Essas técnicas possibilitaram um grande número de aplicações em diferentes áreas de processamento de sinais e ambas apresentam característica de aproximadores universais. Utilizando-se técnicas de controle linear sobre os modelos locais encontrados em uma rede neuro-fuzzy é possível automatizar a construção de controladores universais baseados em modelos TS. O treinamento da rede é feito com aprendizado por reforço, *back-propagation* ou alguma técnica de otimização.

### 2.4.6 Controle Fuzzy Adaptativo

Baseado na característica de aproximadores universais dos sistemas fuzzy, mecanismos de estimação online de sistemas podem ser adotados para construção de controles adaptativos. Muitos autores citam o controle fuzzy clássico como um tipo de controle adaptativo, mesmo quando são tratadas apenas as não linearidades de forma recursiva. Nestes casos, a incerteza e/ou a variância paramétrica não são consideradas. Entretanto, tais controladores precisariam apresentar mecanismos de auto ajuste de sua estrutura ou de seus parâmetros para serem tidos como um caso de controle adaptativo. Sistemas fuzzy podem ser utilizados para estimar o modelo da planta e então ajustar os parâmetros de um controlador com estrutura fixa ou desempenhar o papel de um controlador fuzzy, cujos parâmetros são ajustados pelo sinal de erro.

Um dos primeiros trabalhos sobre controle adaptativo fuzzy é o de Wang (1993). A característica de aprendizagem tornam esse esquema independente de se conhecer o modelo matemático da planta a priori e capaz de processar variações paramétricas que o sistema venha a apresentar. Redes neuro-fuzzy são especialmente úteis nesse cenário, uma vez que são capazes de estimar modelos do processo de modo recursivo e com estrutura adaptativa (Feng, 2006). É neste contexto que se pode classificar o ONFC: um controlador neuro-fuzzy adaptativo, como é melhor apresentado na seção seguinte.

## 2.5 Controlador ONFC

O controlador ONFC (*Online Neuro Fuzzy Controller*) proposto por Gouvêa (2005) pretende ser um controlador adaptativo de baixo custo computacional, simplicidade de implementação e aplicável a sistemas SISO. Pela sua estrutura, pode ser interpretado como exemplo de um Neo-Fuzzy-Neuron (NFN) (Yamakawa et al., 1992b), com uma entrada, uma saída e apenas dois neurônios.

Os parâmetros desse controlador são adaptados de maneira direta, sem a necessidade de conhecimento do modelo e de modo a minimizar o erro de saída da planta em malha fechada, conforme descrito a seguir. Uma grande vantagem do ONFC é o fato de processar não os estados do sistema, mas apenas o erro de saída. Assim, mantendo-se o sinal de erro sempre limitado em uma região compacta do domínio, é possível processá-lo corretamente com poucos conjuntos antecedentes. Por outro lado, se fosse utilizado um controlador fuzzy que realiza a linearização por partes, seriam necessárias várias funções de pertinência para descrever, corretamente, a planta em múltiplos pontos de operação.

O uso de mais neurônios traz melhorias de desempenho no controle de plantas não lineares, a despeito do incremento no custo computacional. Exemplos de aplicações de ONFC com mais de dois neurônios podem ser encontradas em Dos Santos et al. (2016) e Spadini et al. (2013). Entretanto, mesmo plantas não lineares são satisfatoriamente controladas com uso de duas regras apenas. Por isso, neste trabalho será avaliado apenas o caso do ONFC com apenas dois neurônios, a fim de conservar sua simplicidade e baixo custo característicos.

A seguir é detalhada a estrutura original proposta em Gouvêa (2005), algumas modificações desenvolvidas posteriormente e, por fim, a versão do ONFC que se deseja analisar neste trabalho.

### 2.5.1 Esquema Original

Considere uma planta de única entrada e única saída, em que se deseja conduzir a saída  $y$  dessa planta a um sinal de referência  $r$ , minimizando a amplitude do erro dado por:

$$e_r(k) = y(k) - r(k). \quad (2.8)$$

Para isso, deve-se calcular uma entrada  $u(k)$  em cada instante de tempo  $k$  de modo a garantir que  $e(k) \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ .

A estrutura do controlador ONFC utilizada para sintetizar o sinal  $u(k)$  é ilustrada no diagrama da Figura 2.6. Ela consiste de um Sistema de Inferência Fuzzy Takagi-Sugeno (TS-FIS) com conseqüente *singleton* de ordem zero, composto pelas seguintes regras:

1. SE  $e_r(k)$  é  $A_1$  ENTÃO  $u(k)$  é  $u_1(k) = w_1(k)$ .
2. SE  $e_r(k)$  é  $A_2$  ENTÃO  $u(k)$  é  $u_2(k) = w_2(k)$ .

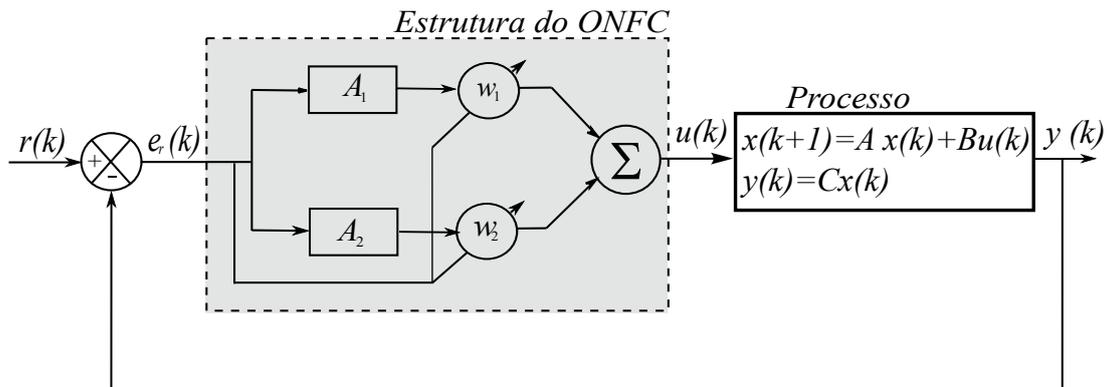


Figura 2.6: Esquema original do controlador ONFC. A estrutura do controlador é uma rede NFN com apenas dois neurônios. Um único sinal de erro é utilizado na adaptação dos pesos e na construção da ação de controle.

Os graus de pertinência do erro  $e_r$  aos conjuntos fuzzy  $A_1$  e  $A_2$  são dados pelas funções  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , respectivamente, que são funções de pertinência triangulares e complementares entre si, definidas por:

$$\mu_1(k) = \begin{cases} 1, & \text{se } e_r(k) \leq -E_M \\ \frac{E_M - e_r(k)}{2E_M}, & \text{se } -E_M < e_r(k) < E_M \\ 0, & \text{se } e_r(k) \geq E_M \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\mu_2(k) = 1 - \mu_1(k). \quad (2.10)$$

em que  $E_M$  é um parâmetro fixo. Como  $\mu_2(k) + \mu_1(k) = 1$ , a ação de controle  $u(k)$ , que é dada por uma média ponderada (de acordo com o método Takagi-Sugeno), torna-se:

$$u(k) = \mu_1(k)w_1(k) + \mu_2(k)w_2(k). \quad (2.11)$$

Os consequentes do controlador ONFC  $w_1$  e  $w_2$  são ajustados em cada instante  $k$  de modo a minimizar o quadrado do erro  $e_r(k)$ . A lei de adaptação desses pesos é obtida a partir do método do gradiente, como apresentado a seguir.

Seja a seguinte função custo  $J$ :

$$J = \frac{e_r^2(k)}{2}. \quad (2.12)$$

A variação de  $w_1$  e  $w_2$  que gera a redução de  $J$  é dada por:

$$\begin{bmatrix} \Delta w_1(k) \\ \Delta w_2(k) \end{bmatrix} = -\psi \nabla J = -\psi \begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial w_1} \\ \frac{\partial J}{\partial w_2} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

em que  $\psi$  determina a velocidade de adaptação e

$$\frac{\partial J}{\partial w_i} = \frac{\partial J}{\partial e_r} \frac{\partial e_r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial w_i} \quad (2.14)$$

com  $\frac{\partial J}{\partial e_r} = e_r(k)$ ,  $\frac{\partial e_r}{\partial y} = 1$ ,  $\frac{\partial u}{\partial w_i} = \mu_i(e_r)$  e  $i = 1, 2$ , de acordo com (2.12), (2.8), (2.11), respectivamente. Obviamente, o termo  $\frac{\partial y}{\partial u}$  depende da dinâmica do sistema. Desta forma, o seguinte parâmetro de projeto é definido:

$$\gamma = \psi \frac{\partial y}{\partial u} \quad (2.15)$$

denominado taxa de adaptação. Assim, a variação dos consequentes  $w_1$  e  $w_2$  que gera a redução do erro quadrático, torna-se:

$$\begin{aligned} w_1(k) &= w_1(k-1) - \gamma e_r(k) \mu_1(k) \\ w_2(k) &= w_2(k-1) - \gamma e_r(k) \mu_2(k) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Deve-se notar que, não importa qual seja o valor exato de  $\frac{\partial y}{\partial u}$ , esta lei de adaptação irá induzir a diminuição da função objetivo  $J$  desde que  $\gamma$  tenha o mesmo sinal do ganho de malha aberta da planta e que o valor implícito de  $\psi$  seja escolhido adequadamente.

Uma desvantagem desse método é que ao se adotar um  $\gamma$  fixo a velocidade de adaptação dada por  $\psi$  varia conforme se alteram os parâmetros da planta, podendo não apenas modificar o desempenho da adaptação, como levar o sistema controlado à instabilidade. Também não é possível especificar o desempenho dinâmico desejado para o sistemas em malha fechada, sendo que o único objetivo estabelecido é o erro nulo em regime permanente.

Como analisado em (Carvalho, 2010) e mostrado a seguir, o ONFC é um controlador adaptativo com ação proporcional e integral (PI). A fim de evidenciar a analogia com um controlador tipo PI, considere as equações (2.9), (2.10) e (2.11), avaliadas sob a condição  $-E_M < e_r < E_M$ . A ação de controle  $u(k)$  pode ser reescrita na forma da seguinte equação afim:

$$u(k) = \frac{w_2(k) - w_1(k)}{2E_M} e_r(k) + \frac{w_2(k) + w_1(k)}{2}, \quad (2.17)$$

e representada graficamente pela Figura 2.7 para um dado instante  $k$ . Os valores instantâneos do coeficiente angular e do coeficiente linear da curva afim compreendida no intervalo  $-E_M < e_r < E_M$  é proporcional à diferença dos consequentes e à soma dos consequentes, respectivamente.

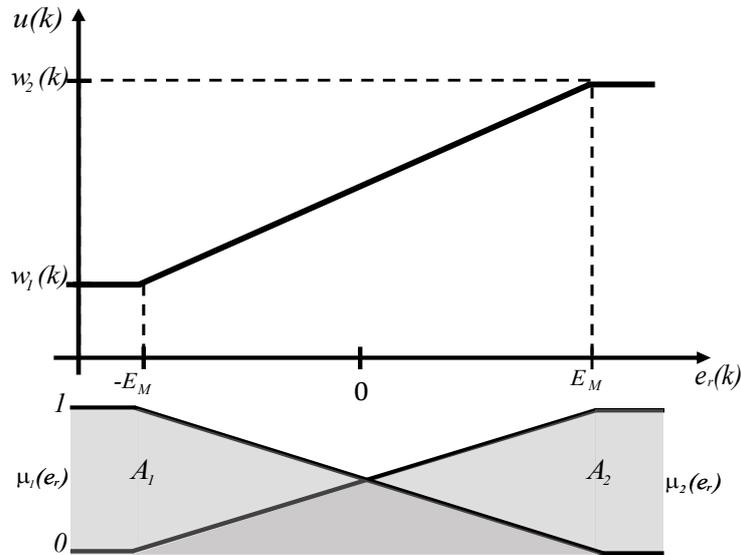


Figura 2.7: Representação gráfica da ação de controle do controlador neuro-fuzzy  $u$  em função do erro de referência  $e_r$  em um dado instante de tempo  $k$ . Na parte inferior da imagem, os conjuntos fuzzy  $A_1$  e  $A_2$ , antecedentes do sistema de inferência.

Avaliando-se os valores de  $w_2(k)$  e  $w_1(k)$  segundo a lei de adaptação (2.16), a Equação (2.17) pode ser reescrita como:

$$u(k) = \frac{w_2(0) - w_1(0) + \gamma \sum_{i=1}^k e_r(i) (\mu_2(i) - \mu_1(i))}{2E_M} e_r(k) + \gamma \frac{\sum_{i=1}^k e_r(i) (\mu_2(i) + \mu_1(i))}{2} + \frac{w_2(0) + w_1(0)}{2}, \quad (2.18)$$

substituindo as equações (2.9) e (2.10) e considerando nulas as condições iniciais, tem-se que:

$$u(k) = \frac{\gamma \sum_{i=1}^k e_r^2(i)}{2E_M^2} e_r(k) + \gamma \frac{\sum_{i=1}^k e_r(i)}{2} . \quad (2.19)$$

Uma forma de analisar o controlador ONFC é interpretar os termos de  $u(k)$  como se o primeiro fosse uma modificação da parcela proporcional de um controlador PI, sendo o segundo correspondente à parcela integral. Os ganhos instantâneos do ONFC, análogos aos ganhos de um PI, são dados por:

$$K_p(k) = \frac{\gamma}{2E_M^2} \sum_{i=1}^k e_r^2(i) , \quad (2.20)$$

$$K_i(k) = \frac{\gamma}{2} , \quad (2.21)$$

em que  $K_p$  e  $K_i$  são, respectivamente, os ganhos proporcional e integral equivalentes. A lei de adaptação no ONFC, portanto, modifica apenas o ganho  $K_p$  do controlador e mantém o ganho  $K_i$  fixo e definido por  $\gamma/2$ , para todo  $k > 0$ .

## 2.5.2 Esquemas Modificados

Na ocorrência de ruídos de medição no sinal de erro  $e_r$ , a diferença dos pesos conforme a Equação (2.17) ou, de modo equivalente, o valor do ganho proporcional dado na Equação (2.20) tendem a crescer indefinidamente. O crescimento ilimitado dessa diferença leva o sistema à instabilidade. Como mostrado na Seção 2.3, na presença de ruídos, a estimação dos parâmetros baseada em um integrador puro está sujeita ao fenômeno conhecido como *drift parameter*, ou deriva paramétrica. Para ilustrar esse fenômeno, uma simulação do controlador ONFC com a lei de adaptação (2.16) aplicada em uma planta de primeira ordem com parâmetros arbitrários, foi realizada em duas situações: com e sem ruído de medição. Foram avaliados os sinais  $e_r(k)$ ,  $K_p(k)$  e  $K_i \sum e_r(i)$  segundo, (2.8), (2.20) e (2.21), em cada uma delas. Na Figura 2.8 é mostrada a evolução desse sinais envolvidos na ação de controle do ONFC. Embora o erro  $e_r$  convirja para a origem, mesmo com a presença de ruídos, o valor de  $K_p$ , atinge um valor fixo numa situação sem ruído de medição, mas cresce indefinidamente na presença de ruídos. Por conta disso, alguma medida de redução do ganho proporcional deve ser adotada a fim de evitar a instabilização do sistema.

No trabalho original de Gouvêa (2005), foram propostas duas técnicas para eliminar o crescimento desordenado dos pesos. A primeira delas foi a técnica de Zona Morta apresentada na Seção 2.3. A segunda, foi a reinicialização dos pesos que força o valor de  $w_1$  e  $w_2$  para zero, reiniciando o aprendizado periodicamente. Ambas as técnicas exigem do projetista uma boa informação a priori do sistema e comprometem o desempenho do controle.

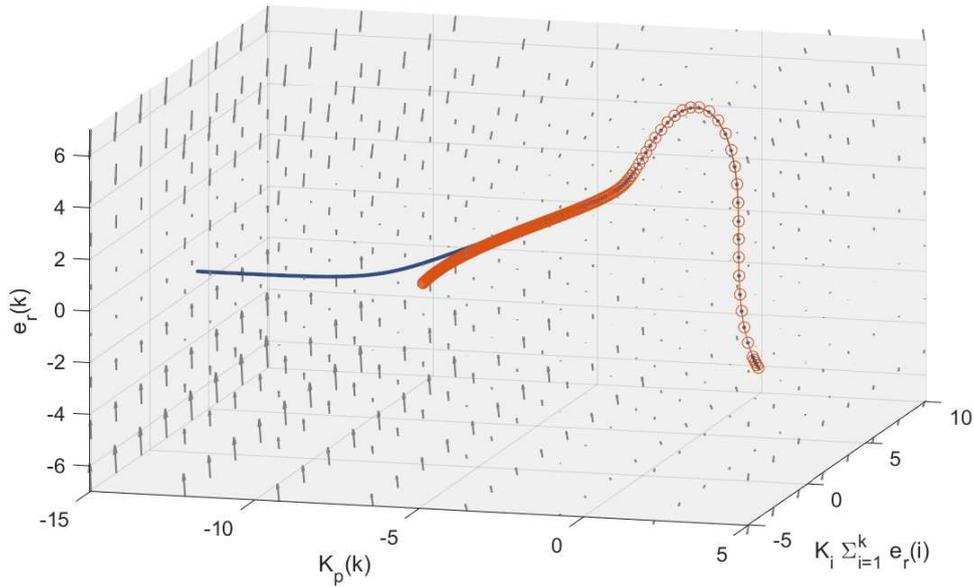


Figura 2.8: Evolução dos sinais do ONFC para os cenários com e sem ruídos. A linha em azul (contínua) define o caso com ruídos e a linha vermelho (o) o caso sem ruídos de medição. Pode-se observar que erro  $e_r$  converge para zero nos dois casos, entretanto, o parâmetro  $K_p$  começa a crescer indefinidamente no cenário com ruído de processo.

Em Carvalho (2010) é proposta uma outra adaptação, equivalente à técnica de modificação  $\sigma$  (ou  $\sigma$ -modification), para minimizar o crescimento da diferença entre  $w_1$  e  $w_2$ . Denominada  $ONFC_{dw}$ , a técnica é desenvolvida a partir do método do gradiente alterando, contudo, a função objetivo (2.12) para o seguinte formato:

$$J = \frac{e_r^2(k)}{2} + \sigma \frac{(w_2(k) - w_1(k))^2}{2}, \quad (2.22)$$

em que  $\sigma$  é o parâmetro que pondera o custo relativo à diferença dos pesos. Seguindo os passos da formulação original, a lei de adaptação torna-se:

$$\begin{aligned} w_1(k) &= w_1(k-1) - \gamma e_r(k) \mu_1(k) - \gamma \sigma (w_2(k-1) - w_1(k-1)); \\ w_2(k) &= w_2(k-1) - \gamma e_r(k) \mu_2(k) + \gamma \sigma (w_2(k-1) - w_1(k-1)); \end{aligned} \quad (2.23)$$

Esse parâmetro  $\sigma$  define o decremento da diferença dos pesos e limita o valor absoluto dessa diferença. Quando o valor de  $e_r$  for muito pequeno, o fator de esquecimento poderá reduzir excessivamente a diferença dos pesos. Com isso, a lei de adaptação irá, amiúde, anular o efeito do ganho proporcional do controlador e o aprendizado adquirido na estimação.

Uma maneira de reduzir esse efeito é aplicando a modificação  $e$ , conforme a Subseção 2.3.3,

alterando a lei de adaptação da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} w_1(k) &= w_1(k-1) - \gamma e_r(k) \mu_1(k) - \gamma |e_r(k)| \sigma (w_2(k-1) - w_1(k-1)); \\ w_2(k) &= w_2(k-1) - \gamma e_r(k) \mu_2(k) + \gamma |e_r(k)| \sigma (w_2(k-1) - w_1(k-1)). \end{aligned} \quad (2.24)$$

As vantagens dessa alteração são descritas na Subseção 2.3.3.

Em que pese a melhoria na robustez a ruídos, a sintonia do parâmetro  $\sigma$  não é trivial. Se mal dimensionado, pode piorar o desempenho ou não ser capaz de corrigir a deriva dos parâmetros. Uma indicação prática é que seu valor seja escolhido ligeiramente maior que a variância do ruído e ainda que  $\sigma \ll \gamma$ .

Sobre a definição do valor de  $\gamma$ , em Gomes et al. (2019) é apresentada uma taxa de adaptação dinâmica, dada por:

$$\gamma = \frac{\alpha}{\mu_1^2(k) + \mu_2^2(k)} \quad (2.25)$$

em que  $\alpha$  é um ganho de adaptação definido em projeto. Essa alteração produz melhoria no desempenho da adaptação, porém permanece desconhecido o limite de escolha para  $\alpha$  (Gomes et al., 2019).

Uma outra modificação foi proposta ao ONFC a fim de que o controlador apresentasse ação derivativa. Em de Oliveira (2017) foi desenvolvido o ONFC<sub>dwd</sub> adicionando dois neurônios para tratar o sinal da derivada do erro. A adaptação segue a mesma formulação do ONFC<sub>DW</sub> e possibilita a aplicação a um número maior de processos. O ONFC<sub>dwd</sub> foi aplicado com sucesso no controle de uma planta de levitação magnética. Foi introduzido um filtro passa-baixa na entrada do processo a fim de induzir o desempenho desejado do sistema em malha fechada. Esse modelo permite especificar o desempenho desejado do sistema em malha fechada. Esse esquema é semelhante ao apresentado na Figura 2.3, também chamado modelo série ou de alto ganho. Uma desvantagem desse tipo de esquema no controle adaptativo é que pode provocar mudanças desnecessárias na sintonia do controlador sob qualquer variação do sinal de referência.

### 2.5.3 Esquema Proposto

Nesta subseção é apresentada uma versão do ONFC com duas novas modificações. A primeira trata da generalização da estrutura para uma equivalência com o controle tipo MRAC semelhante ao apresentado na Subseção 2.2.2. A segunda é sobre uma nova lei de adaptação dos pesos, a ser avaliada nos próximos capítulos.

Um modelo referência pode ser utilizado para definir a dinâmica desejada do sistema em malha fechada. No caso do ONFC, o sinal gerado por esse modelo pode avaliar até que ponto o controlador precisará adaptar, independentemente da variação do sinal de referência do

processo. Considere, portanto, que deseja-se aproximar a dinâmica equivalente do sistema em malha fechada ao seguinte modelo referência:

$$\begin{aligned} x_m(k+1) &= A_m x_m(k) + B_m r(k), \\ y_m(k) &= C x_m(k), \end{aligned} \quad (2.26)$$

em que  $r(k)$  é um sinal de referência limitado,  $A_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é Schur, e  $B_m \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  é definido de tal modo que o sistema (2.26) tenha ganho unitário. A matriz  $A_m$  especifica o desempenho desejado para o sistema realimentado e é definida por projeto. O sinal de erro entre a saída do modelo e a saída do sistema é dado por:

$$e_y = y_m - y, \quad (2.27)$$

que quantifica o erro de aproximação entre as dinâmicas dos dois sistemas. Esse novo sinal de erro será utilizado no ajuste dos pesos, uma vez que se deseja alterar a dinâmica em malha fechada sempre que houver diferença com o modelo referência. Deste modo, o erro gerado por variação de referência terá menos influência na adaptação dos pesos. A estrutura proposta é mostrada na Figura 2.9.

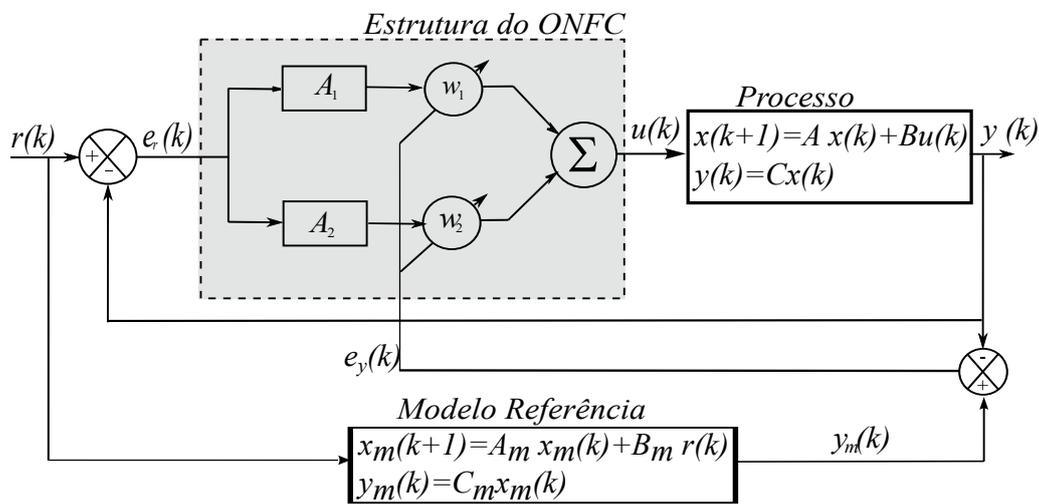


Figura 2.9: Esquema do controlador ONFC proposto neste trabalho. A principal diferença aqui é que o erro utilizado na lei de adaptação dos pesos é gerado pela diferença entre a saída do processo e a saída de um modelo referência.

O esquema original de Gouvêa (2005) pode ser visto como um caso particular deste agora proposto. Basta considerar um modelo referência específico dado pela função de transferência:

$$G_m(z) = C(zI - A_m)^{-1} B_m = 1, \quad (2.28)$$

Ou, de outro modo, definir  $y_m = r$ , ou seja,  $e_r = e_y$ .

A lei de adaptação dos pesos  $w_1$  e  $w_2$  é projetada para diminuir o erro  $e_y(k)$  a fim de forçar a saída do sistema em malha fechada a aproximar da saída do modelo de referência. Esta lei de adaptação empregada aqui é dada por:

$$\begin{aligned} w_1(k) &= w_1(k-1) - \gamma e_y(k) \mu_1(k-1); \\ w_2(k) &= w_2(k-1) - \gamma e_y(k) \mu_2(k-1); \end{aligned} \quad (2.29)$$

em que  $\gamma$  é a taxa de adaptação e tem o mesmo sinal do ganho de malha aberta da planta. Note-se que a diferença dessa lei para a anterior em (2.16) é o uso de um valor atrasado de  $\mu_1$  e  $\mu_2$ .

Para esse modelo também é possível estabelecer uma relação de analogia ao controlador PI. Considere novamente a ação de controle  $u(k)$  dada na Equação (2.17) e as equações (2.9), (2.10) avaliadas no intervalo  $-E_M < e_r < E_M$ . Aplicando a lei de adaptação (2.29) e considerando as condições iniciais de  $w_1$  e  $w_2$  nulas, a ação de controle é dada por:

$$u(k) = \gamma \frac{\sum_{i=1}^k e_y(i) e_r(i-1)}{2E_M^2} e_r(k) + \gamma \frac{\sum_{i=1}^k e_y(i)}{2} \quad (2.30)$$

Os ganhos análogos aos de um controlador PI são:

$$K_p(k) = \frac{\gamma}{2E_M^2} \sum_{i=1}^k e_y(i) e_r(i-1); \quad (2.31)$$

$$K_i = \frac{\gamma}{2}; \quad (2.32)$$

O ganho instantâneo, análogo ao ganho  $K_p$  apresenta uma importante diferença em relação àquele dado na Equação (2.20). Aqui, existe uma forte analogia entre a Equação (2.31) e a definição de correlação cruzada entre os erros  $e_r$  e  $e_y$ . Nesse sentido, o ganho proporcional  $K_p(k)$  sofrerá variação até que a correlação cruzada dos erros no atraso  $d = 1$  seja nula, independente do erro  $e_r$  ser nulo. Isso pode ser interpretado do seguinte modo. Quando  $y_m \rightarrow r$ , o ganho  $K_p$  é adaptado até que a autocorrelação do erro de saída seja  $r_{e_y, e_y}(d) = 0$ , com  $d = 1$ . Nessas condições, as dinâmicas do sistema em malha fechada e do modelo referência teriam uma equivalência e o ganho  $K_p(k) = K_p^*$  não necessitaria de alteração. A presença de um ruído autocorrelacionado poderia polarizar a estimativa de  $K_p^*$ , todavia, não levaria o ganho a valores ilimitados.

A ação integral de (2.30) também tem diferenças em relação à de (2.19), porém, de menor importância. A mais relevante é a perda de equivalência com a ação integral de um controlador PI, que integra o erro entre as saídas  $e_r$  ao invés de  $e_y$ . Entretanto, como por premissa  $y_m \rightarrow r$  e,

deste modo,  $e_y \rightarrow e_r$ , o efeito prático dessa diferença na ação integral é desprezível.

O ganho da ação integral  $K_i$  novamente é fixo e definido como metade da taxa de adaptação. Uma maneira de distinguir o ganho integral do valor de  $\gamma$  é realizando a seguinte modificação na lei de adaptação:

$$\begin{aligned} w_1(k+1) &= w_1(k) + \gamma e_y(k+1) \left[ \mu_1(k) + \frac{\hat{K}_i}{\gamma} - 0.5 \right] \\ w_2(k+1) &= w_2(k) + \gamma e_y(k+1) \left[ \mu_2(k) + \frac{\hat{K}_i}{\gamma} - 0.5 \right] \end{aligned} \quad (2.33)$$

em que  $\hat{K}_i$  é o ganho integral desejado. Submetendo essa lei à mesma análise envolvida na Equação (2.30), resulta em um ganho  $K_i = \hat{K}_i$ . Obviamente, ao se escolher  $\hat{K}_i = \gamma/2$ , a lei de adaptação (2.33) se torna idêntica a (2.29). Essa explicitação do ganho dentro da lei de adaptação é interessante, pois, permite desacoplar o ganho integral e aumenta a margem de escolha da taxa de adaptação, para plantas que exigem um ganho integral menor. Entretanto, nas análises dos próximos capítulos será considerada apenas a lei de adaptação (2.29) a fim de se concentrar na avaliação do efeito daquela modificação.

## 2.6 Conclusão

Neste capítulo é feita uma revisão dos conceitos básicos encontrados na literatura de controle adaptativo e controle fuzzy, bem como, as estruturas e métodos mais usuais. O problema geral do controle adaptativo é apresentado, listando as principais vantagens das técnicas quem tentam solucioná-lo. O problema chave no controle adaptativo é a definição da lei de ajuste dos parâmetros do controlador que suporte as não idealidades dos problemas em que são empregadas.

Os principais tipos de controle fuzzy são apresentados, em especial os neuro-fuzzy. Estas estruturas têm boa capacidade de aproximação e são muito úteis no contexto de controle adaptativo, seja como identificador recursivo, seja como controlador com parâmetros ajustáveis. Controle fuzzy é frequentemente associado a características adaptativas, mas em geral, tratam apenas a questão da não linearidade. Isso justifica se falar em fuzzy adaptativo. Esse tipo de controle trata ao mesmo tempo não linearidade ou incerteza e a variação paramétrica da planta com um tipo de sintonia *online* do controlador. São apresentados, neste capítulo, os tipos mais comuns de controladores nebulosos.

O Controlador ONFC é descrito desde sua versão original, passando por algumas versões modificadas, até se chegar a versão que é tratada neste trabalho. Pelo exposto, pode-se classificar o controlador ONFC analisado neste trabalho, como um controle neuro-fuzzy com

---

consequente *singleton* de valor ajustável. É considerado um caso em que se procura aproximar a dinâmica em malha fechada à de um modelo referência, conectado em paralelo. Trata-se, portanto, de um tipo MRAC Neuro-fuzzy.

A questão a ser tratada é: em que condições esta estrutura apresenta garantias de estabilidade? E como, baseado nessas condições, se pode projetar um controlador ONFC para fins práticos, considerando ao menos perturbações limitadas? Estas perguntas são temas dos capítulos a seguir.

# Análise de Estabilidade do ONFC para o Caso Ideal

---

*“Tudo é instável para que amemos as coisas estáveis.”*

- São Gregório de Nazianzo -

A efetividade do controlador ONFC é atestada por várias aplicações industriais bem sucedidas. Ainda que diferentes trabalhos tenham apresentado modificações e aprimoramentos, o método carecia de análise formal de estabilidade e indicativos limiares de projeto baseados nos parâmetros da planta. Devido a dupla realimentação no controle adaptativo, os sistemas realimentados por esses controladores apresentam comportamento não linear e variante no tempo, sendo necessária a utilização de técnicas de análise de estabilidade próprias para tal.

Neste capítulo são apresentados os principais conceitos e definições de estabilidade utilizados ao longo do trabalho. O caso analisado aqui, dito ideal, é restrito ao caso sem ruído de medição e considerando a condição de *matching*, definida nas seções seguintes. Embora esse cenário tenha pouca relevância prática, será importante para construção da técnica a ser apresentada no próximo capítulo. Será apresentada a análise de estabilidade quadrática do controle tipo ONFC, como apresentado na Subseção 2.5.3, aplicado a um sistema linear discreto.

## 3.1 Estabilidade em Sistemas Variantes no Tempo

Nesta seção apresenta-se alguns conceitos e definições a respeito da estabilidade de uma classe de sistemas não lineares de tempo discreto. Essas definições foram baseadas principalmente em Ioannou and Fidan (2006), Slotine and Li (1991) e Aström and Kumar (2014).

Considere um sistema discreto do tipo:

$$x(k+1) = f(k, x(k)) \tag{3.1}$$

sendo  $x \in \mathbb{R}^n$  o vetor de estados, e  $f : \mathbb{Z}^+ \times D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , uma função contínua em  $x$  tal que para cada condição inicial  $x_0 = x(k_0)$  com  $x_0 \in D$  existe uma única solução  $x(k; k_0, x_0) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\forall k \geq k_0$ , sendo  $k \in \mathbb{Z}^+$  um inteiro positivo.

**Definição 1** (Ponto de Equilíbrio). *Uma solução  $x(k) = x_e$  é dita ser um ponto de equilíbrio de (3.1) se  $x_e = f(k, x_e)$ ,  $\forall k \geq k_0$ .*

É de interesse avaliar se uma dada solução particular ou ponto de equilíbrio do sistema (3.1) é estável, ao menos, em uma região em torno dele. Alheio ao rigor, um ponto de equilíbrio de um sistema é dito ser estável se todas as soluções começando em pontos próximos a ele permanecem próximos. Formalmente definimos:

**Definição 2** (Estabilidade). *O ponto de equilíbrio ou solução  $x_e$  é dito ser estável (no sentido de Lyapunov) se dado  $\varepsilon > 0$  qualquer, existe um  $\delta(\varepsilon, k_0) > 0$ , tal que*

$$\|x(k_0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(k) - x_e\| < \varepsilon, \quad \forall k > k_0 \quad (3.2)$$

**Definição 3** (Estabilidade Assintótica). *O ponto de equilíbrio ou solução  $x_e$  é dito ser assintoticamente estável (no sentido de Lyapunov) se é estável e se existe  $\delta(k_0) > 0$ , tal que*

$$\|x(k_0) - x_e\| < \delta \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k) - x_e\| = 0. \quad (3.3)$$

**Definição 4** (Estabilidade Uniforme). *Se na Definição 2 (ou na Definição 3)  $\delta(\varepsilon, k_0) = \delta(\varepsilon)$  (ou  $\delta(k_0) = \delta_0$ ) para qualquer  $k_0 \in [0, \infty)$ , então o ponto de equilíbrio ou solução é dito ser uniformemente estável (ou uniformemente assintoticamente estável).*

Para enunciar o teorema de estabilidade para soluções de (3.1), apresentam-se as seguintes definições para funções variantes no tempo.

**Definição 5** (Função de Classe  $K$ ). *Uma função contínua  $\varphi : [0, a) \rightarrow [0 : \infty)$  é dita ser de classe  $K$  ( $\varphi \in K$ ) se é estritamente crescente e  $\varphi(0) = 0$ . Se  $a = \infty$ , então é dita ser função de classe  $K_\infty$ .*

**Definição 6** (Função Definida Positiva). *Uma função  $V(k, x) : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  contínua em  $x$  é dita ser definida positiva na região  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  que contém a origem, se existe uma função  $\varphi$  de classe  $K$  de tal modo que:*

- I.  $V(k, 0) = 0, \quad \forall k > 0,$
- II.  $V(k, x) \geq \varphi(|x|), \quad \forall k > 0 \text{ e } x \in D.$

Desta forma, uma função variante no tempo é localmente definida positiva se for maior ou igual a uma outra função localmente definida positiva invariante no tempo. Os conceitos de definida negativa e semidefinida positiva (ou negativa) podem ser definidos da mesma forma.

**Definição 7** (Função Definida Negativa). *Uma função  $V(k,x) : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  contínua em  $x$  é dita ser definida negativa na região  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  que contém a origem, se  $-V(k,x)$  é definida positiva  $\forall k > 0$  e  $x \in D$ .*

**Definição 8** (Função Semidefinida Positiva (Negativa)). *Uma função  $V(k,x) : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  contínua em  $x$  com  $V(k,0) = 0, \forall k > 0$  é dita ser semidefinida positiva (negativa) na região  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  que contém a origem, se  $V(k,x) \geq V_H(x)$  ( $-V(k,x) \geq V_H(x)$ ), sendo  $V_H(0) = 0, V_H(x) \geq 0, \forall k > 0$  e  $\forall x \in D$ .*

Assim,  $V(x,k)$  é localmente semidefinida positiva se domina uma função localmente semidefinida positiva invariante no tempo e  $V(x,k)$  é semidefinida negativa se  $-V(x,k)$  é semidefinida positiva. As definições globais são estabelecidas de modo semelhante (Slotine and Li, 1991).

Na análise de Lyapunov de sistemas não autônomos, o conceito de função decrescente também é necessário.

**Definição 9** (Função decrescente).  *$V(k,x) : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  com  $V(0,k) = 0$  é dita ser decrescente se  $\exists \varphi(\cdot) \in K_\infty$ , tal que*

$$|V(k,x)| \leq \varphi(|x|), \quad \forall k \geq 0 \quad (3.4)$$

Posto isso, apresenta-se o Teorema de Estabilidade de Lyapunov.

**Teorema 3.1** (Estabilidade de Lyapunov). *Considere que  $x_e$  seja um ponto de equilíbrio de (3.1). Supondo que exista uma função escalar definida positiva  $V(k,x)$  e a variação ao longo da solução de (3.1):*

$$\Delta V(k,x(k),x(k+1)) = V(k+1,x(k+1)) - V(k,x(k))$$

$\forall k \in [0, \infty)$ . *É verdade que:*

1. *Se  $\Delta V$  é semidefinida negativa, então  $x_e$  é estável.*
2. *Se  $V$  é decrescente e  $\Delta V$  semidefinida negativa, então  $x_e$  é uniformemente estável.*
3. *Se  $V$  é decrescente e  $\Delta V$  definida negativa, então  $x_e$  é uniformemente assintoticamente estável.*
4. *Se  $V$  é decrescente e existem constantes  $c_1, c_2, c_3 > 0$  tal que*
  - (i)  $c_1|x|^2 \leq V(k,x) \leq c_2|x|^2$ ,
  - (ii)  $\Delta V(k,x) \leq -c_3|x|^2$ , em que  $c_3 < c_2$*então  $x_e$  é exponencialmente estável.*

A partir de alguns sistemas não-autônomos instáveis é possível obter um outro, realimentado, com característica de estabilidade. A técnica de Lyapunov pode servir tanto para análise do projeto de um controlador por realimentação (de saída ou estados), como para síntese deste controlador.

Para tanto, uma característica deve acompanhar o sistema que se deseja controlar: a estabilizabilidade. Ela compreende o conjunto de condições sob as quais assegura-se a existência de uma lei de controle realimentado  $u(k)$ , com alguma característica de regularidade, que torna estável a origem do sistema equivalente em malha-fechada.

**Definição 10** (Estabilizabilidade de sistemas não lineares). *Um sistema  $x(k+1) = f(x(k), u(k))$ , com  $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $u \in \mathbb{R}^m$  é dito ser localmente  $C^k$ -estabilizável se existir  $u(k)$  de classe  $C^k$  em uma vizinhança  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  de  $x = 0$ , tal que a origem do sistema em malha fechada é localmente assintoticamente estável.*

A estabilizabilidade local de um sistema não linear pode ser verificada a partir de sua linearização. Considere o sistema linearizado em torno da origem:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (3.5)$$

em que

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$$

**Proposição 3.1** (Estabilizabilidade). *O sistema 3.5 é dito ser completamente controlável se a matriz  $\mathbf{C} = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$  tiver posto completo. O sistema será estabilizável se os modos não controláveis do sistema forem estáveis.*

**Proposição 3.2** (Estabilizabilidade por Linearização). *Se o sistema linearizado 3.5 for estabilizável, então  $x(k+1) = f(x(k), u(k))$ , é localmente estabilizável por uma realimentação linear de estados.*

No caso do controle de sistemas SISO, a estabilização da planta precisa ser possível utilizando apenas as informações de entrada e saída e dependerá da propriedade de observabilidade definida a seguir.

**Proposição 3.3** (Observabilidade). *Considere  $y(k) = Cx(k)$  com  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a saída do sistema (3.5). O sistema 3.5 é dito ser completamente observável se a matriz  $\mathbf{O} = [C, AC, A^2C, \dots, A^{n-1}C]^T$  tiver posto completo. O sistema será detectável se os modos não observáveis do sistema forem estáveis.*

Caso um sistema linear estabilizável for também observável, então ele é dito ser estabilizável por realimentação (dinâmica) de saída.

**Definição 11** (Estabilizável por Realimentação de Saída). *Caso o sistema (3.5) for estabilizável e observável. Então o sistema (3.5) é dito estabilizável por realimentação (dinâmica) de saída.*

**Definição 12** (Estabilizável por Realimentação Estática de Saída). *Considere  $y(k) = Cx(k)$  com  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a saída do sistema (3.5). O sistema 3.5 é dito estabilizável por realimentação estática de saída se existe um  $K$ , tal que  $(A - BKC)$  seja estável.*

## 3.2 Estabilidade do ONFC

A partir dos conceitos apresentados na seção anterior será avaliada a estabilidade do ONFC segundo a estrutura apresentada na Seção 2.5.3.

### 3.2.1 Descrição do Problema Idealizado

Considere o seguinte sistema discreto:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k); \\ y(k) &= Cx(k); \end{aligned} \tag{3.6}$$

em que  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  são matrizes com coeficientes constantes,  $u(k)$  é a entrada de controle e  $y(k)$  é a saída medida.

O primeiro passo do projeto do controlador envolve a escolha, pelo projetista, de um modelo referência estável e invariante no tempo dado por:

$$\begin{aligned} x_m(k+1) &= A_m x_m(k) + B_m r(k); \\ y_m(k) &= C x_m(k); \end{aligned} \tag{3.7}$$

em que  $r(k)$  é um sinal de referência limitado,  $A_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é Schur, e  $B_m \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  é definida de tal modo que o sistema (3.7) tenha ganho unitário.

Neste capítulo é considerado o controle de sistemas que atendam a condição de *matching*, um requisito tipicamente utilizado em controle adaptativo e definido a seguir.

**Definição 13** (Condição de Matching). *Considere os sistemas 3.6 e 3.7. Se existirem valores escalares  $\mathbf{k}_1$  e  $\mathbf{k}_2$  que satisfaçam:*

(1)  $A_m = A - B\mathbf{k}_1$

(2)  $B_m = B\mathbf{k}_2$

então, a tripla  $(A, B, C)$  apresenta condições de matching. □

Note-se que se  $A_m$  é Schur, então, a estabilizabilidade por realimentação de saída é uma condição necessária para garantir condição de matching (equivaleria a condição (1) da Definição 13). Observe que é uma condição ainda mais restritiva quando se trata do controle por realimentação de saída, pois alguns dos elementos da matriz  $A$  precisam ser perfeitamente conhecidos.

Ainda sobre os sistema 3.6, as seguintes premissas são consideradas:

**(A1)** As matrizes  $B$  e  $C$  são precisamente conhecidas;

**(A2)** A tripla  $(A,B,C)$  apresenta condição de *matching*;

**(A3)**  $C \cdot B \neq 0$ . Por simplicidade, apenas o caso  $C \cdot B > 0$  é considerado. Por analogia, a construção para o caso  $C \cdot B < 0$  é trivial.

**(A4)** O sistema formado pelas matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  é de fase mínima.

O problema de controle consiste na síntese de um sinal limitado  $u(k)$  que conduza a dinâmica do sistema realimentado próxima à do modelo referência, fazendo com que o erro

$$e_y(k) = y(k) - y_m(k) \quad (3.8)$$

seja limitado por

$$|e_y| \leq \varepsilon, \quad (3.9)$$

para um dado  $\varepsilon > 0$  e para todo  $k > k_0$ , sendo  $k_0$  um inteiro finito.

Essa entrada é definida pela lei de controle do ONFC:

$$u(k) = \mu_1(k)w_1(k) + \mu_2(k)w_2(k) \quad (3.10)$$

A lei de adaptação dos pesos empregados aqui é a mesma definida em 2.16, repetida aqui por conveniência:

$$\begin{aligned} w_1(k) &= w_1(k-1) - \gamma e_y(k) \mu_1(k-1) \\ w_2(k) &= w_2(k-1) - \gamma e_y(k) \mu_2(k-1) \end{aligned} \quad (3.11)$$

em que  $\gamma$  é a taxa de adaptação definida por:

$$\gamma = \frac{\alpha}{CB[\mu_1^2(k) + \mu_2^2(k)]} \quad (3.12)$$

em que  $0 < \alpha < 2$  é o ganho de adaptação.

### 3.2.2 Teorema de Estabilidade para o Caso Ideal

Considerando a condição de que  $-E_M < e_r(k) < E_M$ , o controlador ONFC é estável de acordo com o teorema a seguir.

**Teorema 3.1** (ONFC Caso Ideal). *Considere o sistema (3.6) sob as premissas (A1) a (A4), realimentado com ação de controle definida pela lei (3.10) e a lei de adaptação de parâmetros fornecida por (3.11) e (3.12). Se existe uma matriz  $P = P^T > 0$  e uma constante  $\alpha \in (0,2)$  tal que  $M < 0$ , sendo*

$$M = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Com as submatrizes:

$$\begin{aligned} Q &= A_m^T [P + \alpha C^T C / (CB)] A_m - P \\ S &= A_m^T P B - A_m^T C^T (1 - \alpha) \\ R &= B^T P B - CB(2 - \alpha) \end{aligned} \quad (3.14)$$

então o sistema é localmente estável, o erro  $e_y(k)$  converge assintoticamente para zero e os parâmetros  $w_1$  e  $w_2$  são limitados.  $\square$

*Demonstração.* A prova desse teorema é apresentada nas seções seguintes.

A análise de estabilidade pelo método de Lyapunov é realizada sobre o modelo do erro estendido do sistema controlado. O erro  $e_x$  entre as variáveis de estado do sistema e do modelo referência é definido como:

$$e_x(k) = x(k) - x_m(k). \quad (3.15)$$

Considerando a Equação (3.15) no instante  $k + 1$ , adicionando e subtraindo o termo  $A_m x(k)$ , tem-se:

$$e_x(k+1) = x(k+1) + A_m x(k) - A_m x(k) - x_m(k+1) \quad (3.16)$$

e em seguida, substituindo (3.6) e (3.7) na Equação (3.16), segue que:

$$e_x(k+1) = A_m e_x(k) + (A - A_m)x(k) - B_m r(k) + B u(k). \quad (3.17)$$

O modelo completo é dado por:

$$\begin{cases} e_x(k+1) = A_m e_x(k) + (A - A_m)x(k) - B_m r(k) + B u(k) \\ w_1(k+1) = w_1(k) - \gamma e_y(k+1) \mu_1(k) \\ w_2(k+1) = w_2(k) - \gamma e_y(k+1) \mu_2(k) \end{cases} \quad (3.18)$$

O ponto de equilíbrio de (3.18),  $\left[ e_x^* \quad w_1^* \quad w_2^* \right]^T$ , ocorre quando  $e_x^* = 0$  (que implica em  $e_y = 0$ ) e

$$(A - A_m)x(k) - B_m r(k) + Bu(k) = 0 \quad (3.19)$$

quando  $u(k) = u^*(k)$ , sendo  $u^*(k)$  uma função de  $w_1^*$  e  $w_2^*$ . Por sua vez, a condição suficiente para existência de  $w_1(k) = w_1(k+1) = w_1^*$  e  $w_2(k) = w_2(k+1) = w_2^*$  é que  $Ce_x(k) = e_y(k) = 0$ .

Considerando que em torno do ponto  $e_x(k+1) \simeq 0$ , em que  $-E_M < e_r < E_M$ , a Equação (2.17) torna-se:

$$u(k) = \frac{w_2^* - w_1^*}{2E_M} [Cx(k) - r(k)] + \frac{w_2^* + w_1^*}{2} \quad (3.20)$$

e substituindo-a na Equação (3.19), tem-se:

$$\left[ -A_m + A + B \frac{w_2^* - w_1^*}{2E_M} C \right] x(k) - B_m r(k) + B \left[ \frac{w_2^* + w_1^*}{2} - \frac{w_2^* - w_1^*}{2E_M} r(k) \right] = 0 \quad (3.21)$$

Portanto, para garantir que o erro nulo seja um ponto de equilíbrio, é suficiente que a condição:

$$\begin{cases} A_m = A + B \frac{(w_2^* - w_1^*)}{2E_M} C \\ B_m = B \left[ \frac{(w_2^* + w_1^*)}{2r^*} - \frac{(w_2^* - w_1^*)}{2E_M} \right] \end{cases} \quad (3.22)$$

seja factível. Essa relação é equivalente à condição de *matching* do sistema garantida pela premissa (A2). Os valores  $w_1^*$  e  $w_2^*$  são desconhecidos e são utilizados apenas para fins de prova. O conhecimento a priori de  $w_1^*$  e  $w_2^*$  não é necessário na etapa de projeto.

Substituindo a relação de  $A_m$  e  $B_m$  em (3.22) na Equação (3.18), o modelo de erro dos estados torna-se:

$$e_x(k+1) = A_m e_x(k) + B[u(k) - u^*(k)]. \quad (3.23)$$

O modelo (3.18) é reescrito em relação à sua diferença com o ponto de equilíbrio, fazendo-se a seguinte mudança de variáveis:  $\tilde{u}(k) = u(k) - u^*(k)$  e  $\tilde{w}_i(k) = w_i(k) - w_i^*$ ,  $i = 1, 2$ . Torna-se, portanto:

$$\begin{cases} e_x(k+1) = A_m e_x(k) + B\tilde{u}(k) \\ \tilde{w}_1(k+1) = \tilde{w}_1(k) - \gamma e_y(k+1)\mu_1(k) \\ \tilde{w}_2(k+1) = \tilde{w}_2(k) - \gamma e_y(k+1)\mu_2(k) \end{cases} \quad (3.24)$$

em que:

$$\tilde{u}(k) = \begin{cases} \tilde{w}_1 - \frac{(w_2^* - w_1^*)}{2E_M}(e_r + E_M), & \text{se } e_r \leq -E_M \\ \mu_1(k)\tilde{w}_1 + \mu_2(k)\tilde{w}_2, & \text{se } -E_M < e_r < E_M \\ \tilde{w}_2 - \frac{(w_2^* - w_1^*)}{2E_M}(e_r - E_M), & \text{se } e_r \geq E_M \end{cases} \quad (3.25)$$

A estabilidade o sentido de Lyapunov de (3.24) é avaliada na subsecção a seguir.

**Observação 1.** *É possível notar que no ponto de equilíbrio, a dinâmica do sistema em malha fechada é equivalente ao modelo referência. Aplicando a Equação 3.20 ao modelo do sistema, a dinâmica do sistema em malha fechada torna-se:*

$$x(k+1) = \left[ A + B \frac{(w_2^* - w_1^*)}{2E_M} C \right] x(k) + B \left[ \frac{(w_2^* + w_1^*)}{2r^*} - \frac{(w_2^* - w_1^*)}{2E_M} \right] r(k). \quad (3.26)$$

Considerando que a condição em (3.22) seja factível, na região do ponto de equilíbrio a Equação (3.26) é equivalente a:

$$x(k+1) \simeq A_m x(k) + B_m r(k). \quad (3.27)$$

Seja a seguinte função de Lyapunov candidata:

$$V(k) = e_x^T(k) P e_x(k) + \frac{\tilde{\omega}_2^2(k)}{\gamma} + \frac{\tilde{\omega}_1^2(k)}{\gamma} \quad (3.28)$$

em que  $P = P^T > 0$  e  $\gamma > 0$ . A condição suficiente para estabilidade é que:

$$\Delta V(k) = V(k+1) - V(k) < 0 \quad (3.29)$$

para todo  $k > 0$ . Defina:

$$\Delta V = \Delta V_e(k) + \Delta V_w(k) \quad (3.30)$$

em que:

$$\begin{aligned} \Delta V_e(k) &= e_x^T(k+1) P e_x(k+1) - e_x^T(k) P e_x(k) \\ &= [A_m e_x(k) + B \tilde{u}(k)]^T P [A_m e_x(k) + B \tilde{u}(k)] - e_x^T(k) P e_x(k) \\ &= e_x^T(k) (A_m^T P A_m - P) e_x(k) + (B^T P B) \tilde{u}^2(k) + e_x^T(k) (A_m^T P B) \tilde{u}(k) + \tilde{u}^T(k) (B^T P A_m) e_x(k) \\ &= \begin{bmatrix} e_x(k) \\ \tilde{u}(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_m^T P A_m - P & A_m^T P B \\ B^T P A_m & B^T P B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x(k) \\ \tilde{u}(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.31)$$

e considerando o intervalo  $e_r(k) \in \{-E_M, E_M\}$  em que, conforme (3.25),  $\tilde{u}(k) = \mu_1(k)\tilde{w}_1(k) + \mu_2(k)\tilde{w}_2(k)$ :

$$\begin{aligned} \Delta V_w(k) &= \frac{\tilde{w}_1^2(k+1)}{\gamma} + \frac{\tilde{w}_2^2(k+1)}{\gamma} - \frac{\tilde{w}_1^2(k)}{\gamma} - \frac{\tilde{w}_2^2(k)}{\gamma} \\ &= -2e_y(k+1)[\mu_1(k)\tilde{w}_1(k) + \mu_2(k)\tilde{w}_2(k)] + \gamma e_y^2(k+1)[\mu_1^2(k) + \mu_2^2(k)] \\ &= -2C[A_m e_x(k) + B\tilde{u}(k)]\tilde{u}(k) + \gamma\{C[A_m e_x(k) + B\tilde{u}(k)]\}^2[\mu_1^2(k) + \mu_2^2(k)] \\ &\leq \frac{\alpha}{CB}[CA_m e_x(k)]^2 + 2CA_m e_x(k)\tilde{u}(k)(\alpha - 1) + \tilde{u}^2(k)(\alpha CB - 2CB) \end{aligned} \quad (3.32)$$

em que  $\alpha$  é o ganho de adaptação de acordo com a Equação (3.12). Uma vez que  $0.5 \leq [\mu_1^2(k) + \mu_2^2(k)] \leq 1$ , também é possível estabelecer uma taxa de adaptação fixa em que:

$$\gamma \leq \frac{\alpha}{CB}. \quad (3.33)$$

Contudo, a Equação (3.12) com  $\gamma$  dinâmico garante uma adaptação mais rápida quando  $e_r \simeq 0$ , i.e.,  $[\mu_1^2(k) + \mu_2^2(k)] \rightarrow 0.5$ , o que melhora a performance dinâmica da adaptação.

Levando-se em conta que  $CA_m e_x(k) = e_x^T(k)A_m^T C^T$ , segue que

$$\Delta V_w \leq \begin{bmatrix} e_x(k) \\ \tilde{u}(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \alpha A_m^T C^T CA_m / CB & -A_m^T C^T + \alpha A_m^T C^T \\ -CA_m + \alpha CA_m & -2CB + \alpha CB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x(k) \\ \tilde{u}(k) \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Finalmente, tomando (3.31) e (3.34), a Equação (3.30) torna-se:

$$\Delta V \leq \begin{bmatrix} e_x(k) \\ \tilde{u}(k) \end{bmatrix}^T M \begin{bmatrix} e_x(k) \\ \tilde{u}(k) \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

em que  $M$  é definido por (3.13). Se  $M$  é definida negativa, então  $Q, R$  (fornecido em (3.14)) e, especialmente,  $\Delta V$  são definidas negativas. Como na Equação (3.35), a função  $\Delta V$  está definida em relação a  $e_x$  e  $\tilde{u}(k)$  é possível, a partir de uma transformação, garantir que o sistema é estável e que os sinais  $e_x, e_y$  e  $\tilde{u}(k)$  convergem assintoticamente para zero. O detalhamento dessa transformação é apresentado na Seção A.2 do Apêndice. Como  $B^T P B > 0$ , então  $\alpha < 2$  é necessário para satisfazer a condição  $R < 0$ . Além disso, a condição  $\gamma > 0$  implica que  $\alpha > 0$ .

Note-se que a partir da Equação (3.35) não é possível ter informação explícita sobre a convergência dos sinais  $\tilde{w}_1$  e  $\tilde{w}_2$ . Para tanto, pode-se reescrever a equação em termos desses sinais do seguinte modo.

Considere a ação de controle dada pela Equação (3.25), no intervalo  $-E_M < e_r(k) < E_M$ ,

reescrita na forma vetorial

$$\tilde{u}(k) = \begin{bmatrix} \mu_1(k) & \mu_2(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_1(k) & \tilde{w}_2(k) \end{bmatrix}^T. \quad (3.36)$$

A Equação (3.35) pode ser então redefinida como se segue

$$\Delta V \leq \begin{bmatrix} e_x(k) \\ \tilde{w}_1(k) \\ \tilde{w}_2(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1(k) & \mu_2(k) \end{bmatrix}^T M \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1(k) & \mu_2(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_x(k) \\ \tilde{w}_1(k) \\ \tilde{w}_2(k) \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

em que  $I_n$  é uma matriz identidade de ordem  $n$ . Substituindo as submatrizes de  $M$  dadas em (3.14), tem-se

$$\Delta V \leq \begin{bmatrix} e_x(k) \\ \tilde{w}_1(k) \\ \tilde{w}_2(k) \end{bmatrix}^T \mathcal{M} \begin{bmatrix} e_x(k) \\ \tilde{w}_1(k) \\ \tilde{w}_2(k) \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

sendo

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} Q & \mu_1(k)S & \mu_2(k)S \\ \mu_1(k)S^T & \mu_1^2(k)R & \mu_1(k)\mu_2(k)R \\ \mu_2(k)S^T & \mu_1(k)\mu_2(k)R & \mu_2^2(k)R \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

A estabilidade dos sinais  $e_x(k)$ ,  $\tilde{w}_1(k)$ ,  $\tilde{w}_2(k)$  envolvidos na definição de (3.38) pode ser assegurada por meio de  $\mathcal{M}$ . A matriz  $\mathcal{M}$  tem posto incompleto por que ela é o produto de matrizes não quadradas. A partir da análise de (3.37) é possível ver que, porquanto  $M$  seja definida negativa, a matriz  $\mathcal{M}$  será semidefinida negativa para todo  $k > 0$  e, portanto, só é possível garantir a estabilidade e limitação dos sinais  $\tilde{w}_1$  e  $\tilde{w}_2$ , mas não sua convergência assintótica para zero.

Cabe salientar que a convergência dos parâmetros do controlador para um valor específico não é o objetivo do controle, mas antes, a minimização do erro de referência. Entretanto, a garantia de limitação desses sinais é uma característica importante, uma vez que o crescimento ilimitado dos consequentes tornará o sistema realimentado instável e eventualmente  $e_r \gg E_M$ , região cuja estabilidade não é analisada neste trabalho.

A premissa (A4) de fase mínima é uma condição comum em controle adaptativo. Ela implica que um sistema com saída limitada terá, por sua vez, uma ação de controle realimentado também limitada. Essa condição aparece implicitamente na LMI 3.13 em que, para sistemas de fase não-mínima, não se encontra uma solução factível.  $\square$

Para evidenciar numericamente as propriedades demonstradas, são realizados alguns testes numéricos na Seção 3.3.

### 3.3 Experimentos Numéricos

Nesta seção, são apresentados alguns resultados de simulação para avaliar o desempenho do controlador ONFC sob condições idealizadas. Sistemas de tempo discreto com e sem variação paramétrica são empregados em simulações, ambos considerando condição de *matching* e ausência de perturbações externas.

#### 3.3.1 Região de Factibilidade da LMI

O ONFC foi avaliado para o controle do seguinte sistema de tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0,7 & 0 \\ 0 & 1,1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} r(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 0,5 & 1 \end{bmatrix} x(k) \end{aligned}$$

O problema LMI apresentado no Teorema 3.1 foi resolvido para este sistema usando o toolbox Yalmip do *Matlab*<sup>®</sup> e o *solver* SDPT3. Modelos de referência com a seguinte estrutura são usados no projeto do controle:

$$\begin{aligned} x_m(k+1) &= \begin{bmatrix} \lambda_{Am} & 0 \\ 0 & \lambda_{Am} \end{bmatrix} x_m(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix} r(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 0,5 & 1 \end{bmatrix} x_m(k) \end{aligned}$$

Para ilustrar a factibilidade da solução da LMI, foram avaliadas 10.000 combinações de  $\lambda_{Am} \in [-2,0; 2,0]$  e  $\alpha \in [0; 4,0]$ , com o parâmetro antecedente  $E_M = 15$  e  $b = 0,8$ . A Figura 3.1 mostra a região do plano  $\lambda_{Am} \times \alpha$  que exibe viabilidade de  $M < 0$  e  $P = P^T > 0$ . Como esperado, qualquer solução da LMI (3.13) requer uma matriz  $A_m$  com  $|\lambda_{max}(A_m)| < 1$  e  $0 < \alpha < 2$ .

O Teorema 3.1 requer que o sistema atenda à condição de *matching*. Essa condição é atendida se for escolhido um modelo de referência no qual  $\lambda_{Am} = 0,7$ . A Equação (3.12) foi empregada para a adaptação de  $\gamma$ . Da solução LMI, o valor de  $\alpha$  deve satisfazer  $\alpha < 0,6$ . O controlador ONFC foi aplicado ao sistema usando  $\alpha = 0,4$ . A simulação de  $y(t)$  é mostrada na Figura 3.2.a. Pode-se observar que o controlador é capaz de conduzir a resposta da planta ao modelo de referência. A Figura 3.2.b mostra a evolução dos consequentes  $w_1$  e  $w_2$  ao longo do tempo. Simulações com  $\alpha = 2,1$ , por exemplo, (fora da região apresentada na Figura 3.1) exibem comportamento instável conforme o esperado.

Para comparar o desempenho do controlador utilizando a taxa de adaptação  $\gamma$  dinâmica em relação à versão estática (equações (3.12) e (3.33), respectivamente), o teste anterior foi repetido alterando apenas a lei de adaptação, utilizando agora a Equação (3.33). A norma IAE (*Integral*

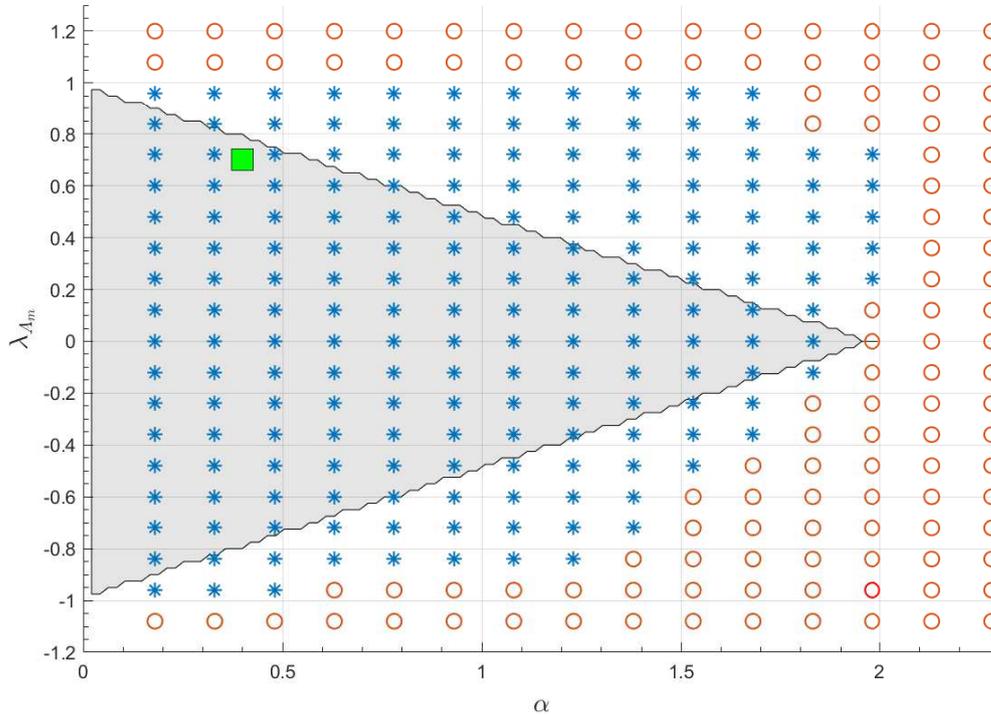


Figura 3.1: Região de factibilidade do problema LMI do Teorema 3.1 para o sistema exemplo da Subseção 3.3.1. Dentro da área destacada, a estabilidade do controlador é garantida. Os pontos sobre o gráfico indicam a evidência numérica de estabilidade, sendo que os pontos (\*) indicam convergência do sinal de erro e os pontos (o) indicam divergência. O ponto (■) indica a escolha dos parâmetros para a simulação apresentada na Figura 3.2.

*Absolute Error*)<sup>1</sup> é utilizada como critério de desempenho para comparar os dois testes e o resultado é mostrado na Figura 3.3. Como pode ser observado, a taxa de adaptação dinâmica permite uma maior atenuação do sinal de erro, garantindo uma convergência mais rápida do sistema realimentado ao modelo referência.

### 3.3.2 Sensibilidade às Condições Iniciais

As condições iniciais  $w_1(0)$  e  $w_2(0)$  afetam o tempo de convergência e os valores finais dos consequentes ( $w_1(\infty)$  e  $w_2(\infty)$ ). Para mostrar este fenômeno, algumas simulações são realizadas considerando o mesmo sistema do exemplo anterior e utilizando os parâmetros de

<sup>1</sup>O cálculo da norma IAE no instante  $k$  é dado por:

$$IAE = \sum_{i=1}^k |e_y(i)|.$$

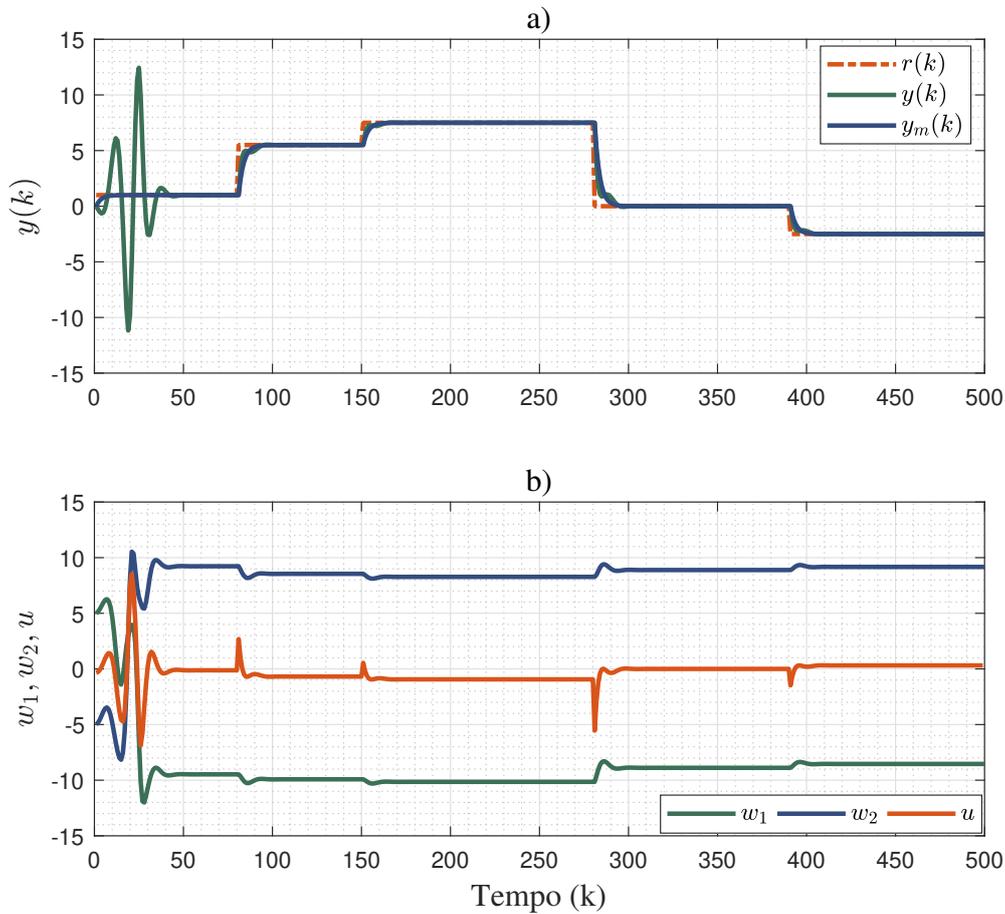


Figura 3.2: Séries temporais do sistema controlado pelo ONFC com  $\alpha = 0,4$ . (a) Saída do sistema  $y(k)$  e do modelo de referência  $y_m(k)$  em relação ao sinal de referência  $r(k)$ . (b) Variação dos consequentes do sistema nebuloso  $w_1$  e  $w_2$  ao longo do tempo.

projeto:  $\lambda_{Am} = 0,7$ ,  $E_M = 15$  e  $\alpha = 0,15$ . O teste é feito para diferentes condições iniciais de  $w_1$  e  $w_2$  todas próximas da curva definida por:

$$\frac{w_2(\infty) + w_1(\infty)}{2} \rightarrow u^* = \frac{r^*}{C(I-A)^{-1}B} \quad (3.40)$$

que define a situação de equilíbrio da ação de controle, tendo em conta que o ganho do modelo referência é unitário por premissa (vide Equação (3.20)). A evolução dos consequentes para essas diferentes condições iniciais é mostrada na Figura 3.4. Os sinais  $w_1$  e  $w_2$  convergem para a curva de equilíbrio. Cada par de valores de condição inicial evolui de maneira diferente e é atraído para um ponto diferente na curva.

Para sistemas instáveis, condições iniciais excessivamente distantes do ponto de equilíbrio podem fazer com que o erro divirja antes que o sistema adapte adequadamente os valores de

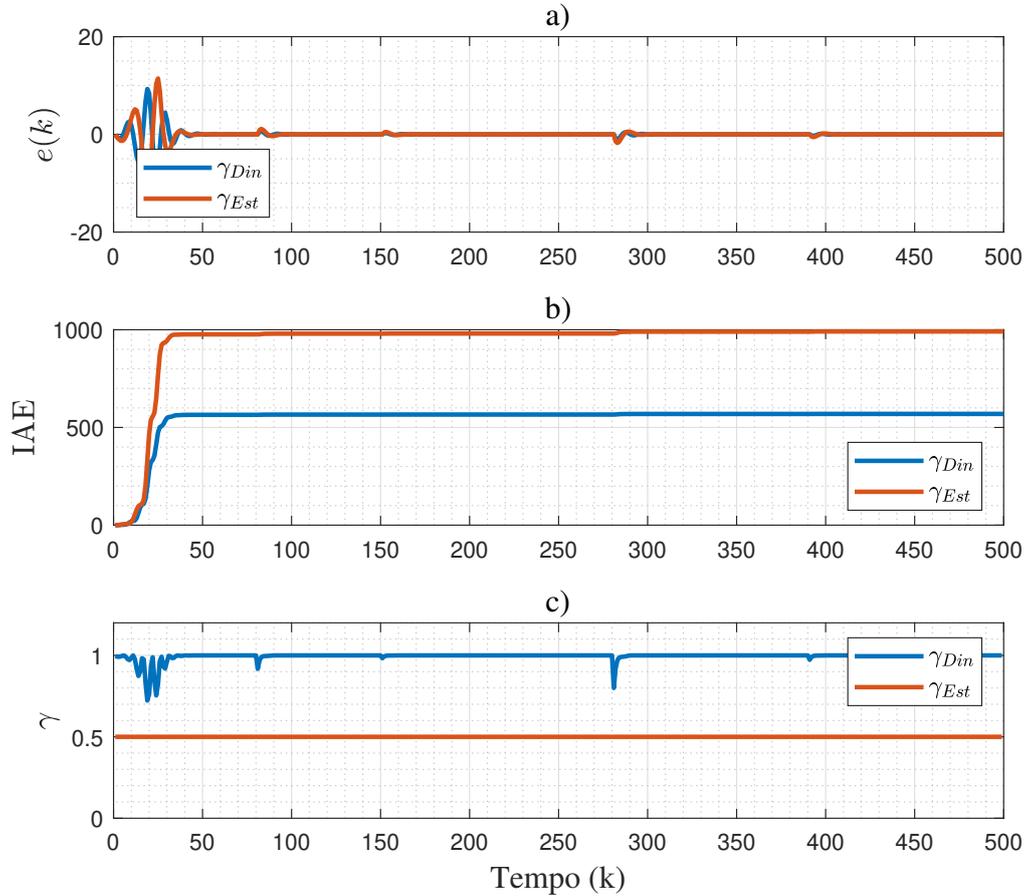


Figura 3.3: Comparação de desempenho do controlador ONFC utilizando adaptação dinâmica e estática. a) Erro entre a saída do sistema  $y(k)$  e a do modelo de referência  $y_m(k)$ . b) Norma IAE para cada lei de adaptação. c) Variação da taxa de adaptação  $\gamma$ .

$w_1$  e  $w_2$ . Assim, como mencionado, quando  $e_r \gg E_M$  o controlador perde as garantias de estabilidade e o erro pode divergir. A simulação anterior foi repetida para um sistema instável cuja matriz  $A$  é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0,7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

A Figura 3.5 mostra os estados do modelo dinâmico de erro para diferentes condições iniciais. Isso mostra que as condições iniciais devem estar suficientemente próximas do equilíbrio ( $\tilde{w}_1(0), \tilde{w}_2(0) \rightarrow 0$ ), especialmente para sistemas instáveis. Uma indicação prática é que, nesses casos, etapas de pré-identificação podem ser necessárias para apontar uma região aproximada de  $w_1^*$  e  $w_2^*$  a fim de evitar instabilidades.

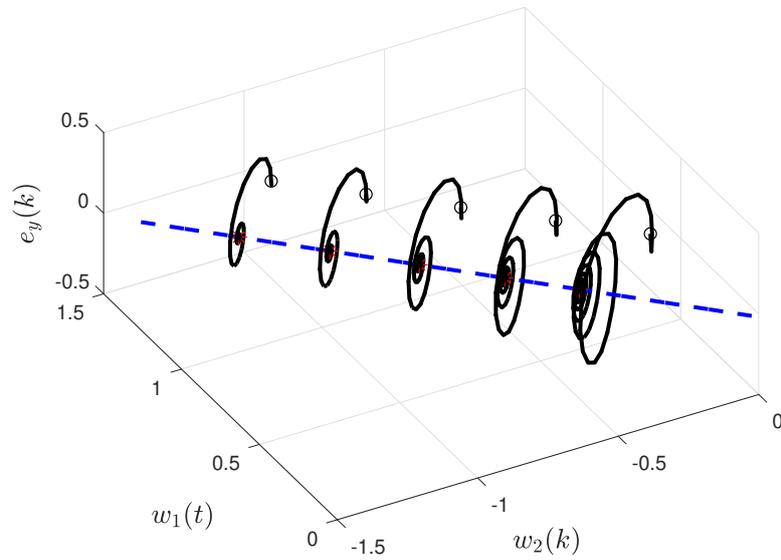


Figura 3.4: Evolução das variáveis do controlador ONFC aplicado a um sistema estável. (o) Condição inicial, (\*) Equilíbrio, (-) Trajetória, (- -) Curva (3.40).

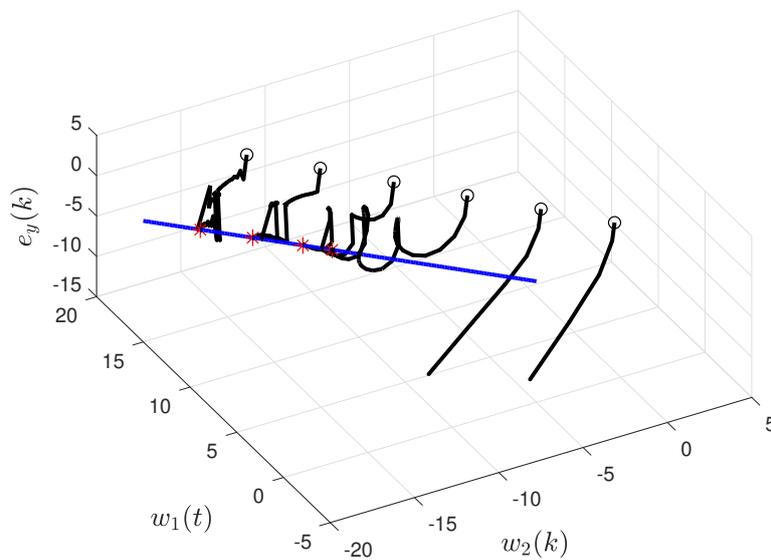


Figura 3.5: Evolução das variáveis do controlador ONFC aplicado a um sistema instável. (o) Condição inicial, (\*) Equilíbrio, (-) Trajetória, (- -) Curva (3.40).

### 3.3.3 Variação Paramétrica

Um outro teste para avaliar a capacidade de adaptação em plantas variantes no tempo foi implementado da seguinte forma. Considere o sistema linear com um parâmetro variável no

tempo:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,1 \\ 0,4 & a(k) \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix} x(k)$$

em que  $a(k)$  é uma entrada da matriz  $A$  cuja variação de tempo é mostrada na Figura 3.6. c. Ao longo do tempo, o sistema torna-se, por vezes, instável. Neste exemplo, o seguinte modelo de referência é usado:

$$x_m(k+1) = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,1 \\ 0,4 & 0,2 \end{bmatrix} x_m(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,65 \end{bmatrix} r(k)$$

$$y_m(k) = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix} x_m(k)$$

Repetindo os procedimentos de projeto, os parâmetros utilizados foram  $\alpha = 0,9$  e  $E_M = 5$  e as condições iniciais consideradas foram  $w_1(0) = w_2(0) = 0$  e  $x(0) = [0,0,0]^T$ . Os sinais do sistema controlado são mostrados na Figura 3.6.a e 3.6.b. A resposta do sistema permanece

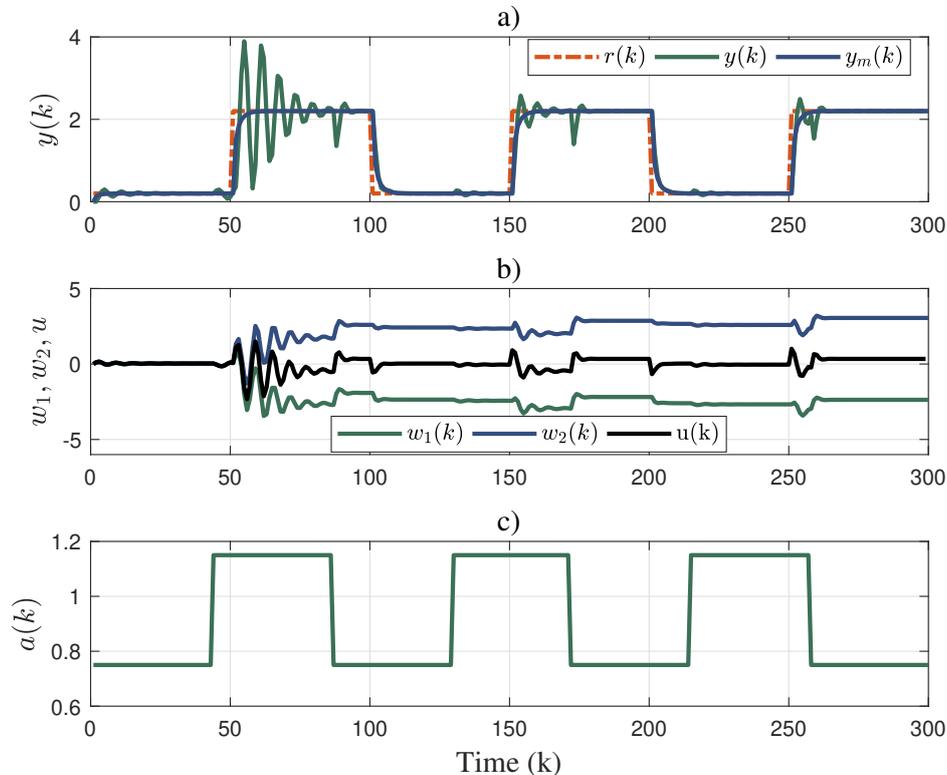


Figura 3.6: Controle de um sistema com variação paramétrica. a) Sinais de saída do modelo referência e do sistema. b) Evolução dos consequentes e da ação de controle. c) Variação do parâmetro do sistema.

próxima ao sinal de referência  $y_m$ , mesmo com mudanças bruscas no parâmetro  $a(k)$ . Aqui, novamente, a condição de correspondência de modelo (condição de *matching*) é satisfeita. No entanto, este exemplo ilustra o potencial de aplicação nos casos em que um dos parâmetros do sistema é desconhecido e variante no tempo.

### 3.4 Conclusão

Neste capítulo são apresentados os conceitos e técnicas aplicadas na análise de estabilidade do ONFC para o caso discreto considerando condições idealizadas. Os resultados aqui obtidos aludem para diretrizes de projeto do ONFC com garantias de estabilidade. Além de observadas as premissas apresentadas neste capítulo, a definição do modelo referência e da taxa de adaptação devem tornar factível o problema LMI construído, com base no conhecimento de alguns parâmetros do processo a ser controlado.

Mesmo quando aplicado ao controle de plantas instáveis, o ONFC apresenta bom desempenho. Deve-se notar que, no equilíbrio,  $Ce_x = \mathbf{0}$  é bem definido, mas  $w_1^*$  e  $w_2^*$  não são definidos de maneira única, possivelmente dependentes das condições iniciais. Os resultados foram testados em plantas com parâmetros desconhecidos, fixos ou variantes no tempo, ambas apresentando condição de *matching*.

Também foi proposto mecanismo de adaptação dos parâmetros do ONFC obtido por meio do método direto de Lyapunov com garantia de estabilidade. Simulações mostraram que essa nova lei de adaptação aumenta a velocidade de convergência do erro para zero. É possível estimar um limite robusto da taxa de adaptação a partir da incerteza dos parâmetros da planta.

Como discutido no Capítulo 2, alguns métodos de controle adaptativo apresentam sensibilidade à presença de ruído de medição. É que devido à integração implícita envolvida na estimação dos parâmetros do controlador, a presença de ruído pode levar esses parâmetros à deriva e o seu conseqüente crescimento indesejável. É necessário, portanto, analisar a estabilidade robusta do controlador ONFC com a lei de adaptação proposta. Os resultados obtidos neste capítulo são estendidos para o caso não ideal, de maior significância prática. Isso é tratado no próximo capítulo.

## Projeto para Estabilidade Robusta

---

*“Considerai que é suma alegria, meus irmãos, quando passais por diversas provações, sabendo que a prova da vossa fé produz a paciência. Mas é preciso que a paciência efetue a sua obra, a fim de serdes perfeitos e íntegros, sem fraqueza alguma.”*

São Tiago 1, 2-4

A questão da robutez é notadamente um problema fundamental em controle adaptativo. O fim a que se destina, exige do controlador adaptativo certa capacidade de funcionamento inobstante a uma determinada incerteza sobre o processo. Do mesmo modo, deve resguardar em boa medida, as características de desempenho ainda que sob a presença de ruídos e perturbações.

Os requisitos para a estabilidade robusta do ONFC modificado são objeto de estudo neste capítulo. O problema de controle de uma planta linear utilizando o ONFC é revisitado, considerando agora a presença de ruídos de medição, ruídos de processo e incerteza sobre alguns parâmetros da planta. Tais condições, ditas aqui como não ideais, aproximam-se daquelas normalmente encontradas em problemas práticos de controle. Utilizando o método de Lyapunov e o modelo de erro estendido, são avaliadas as premissas da planta a ser controlada e os limites de escolha dos parâmetros de projeto que garantem estabilidade robusta ao sistema controlado.

O desenvolvimento da prova é bastante semelhante ao do Capítulo 3, mas é novamente detalhado aqui por conveniência. A premissa de condição de *matching* é substituída por outra menos restritiva, a saber: a de estabilizabilidade por realimentação de saída, descrita na Definição 11. Em especial, neste capítulo é apresentada a prova de estabilidade robusta a perturbações e incertezas utilizando a lei de adaptação com atraso associada à técnica de zona-morta. Os resultados de experimentos numéricos considerando essas condições são apresentados e corroboram os resultados teóricos obtidos.

## 4.1 Controle de Sistema Incerto

### 4.1.1 Descrição do Problema

Considere o seguinte sistema linear de tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + \xi(k) \\ y(k) &= Cx(k) + v(k) \end{aligned}, \quad (4.1)$$

em que  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  são matrizes com coeficientes constantes,  $u(k) \in \mathbb{R}$  é a entrada de controle,  $y(k) \in \mathbb{R}$  é a saída medida e  $\xi(k) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  e  $v(k) \in \mathbb{R}$  são perturbações externas limitadas.

As seguintes premissas são necessárias aqui:

**(A1)** A matriz  $C$  é precisamente conhecida e o par  $(A, B)$  é incerto e pertence a um politopo convexo  $(A_i, B_i)$  com  $n_p$  vértices conhecidos:

$$\begin{aligned} (A, B) &= \sum_{i=1}^{n_p} \beta_i (A_i, B_i); \\ \beta_i &\geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n_p} \beta_i = 1. \end{aligned} \quad (4.2)$$

**(A2)** A tripla  $(A, B, C)$  é estabilizável por realimentação de saída para todas as instâncias do sistema desconhecido dentro do politopo (4.2).

**(A3)** A matriz  $A$  não apresenta autovalores unitários para nenhuma das instâncias do sistema desconhecido dentro do politopo (4.2).

**(A4)**  $C \cdot B_i > 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n_p\}$ . Sem perda de generalidade, apenas o caso  $C \cdot B_i > 0$  é considerado. Por analogia, a construção para o caso  $C \cdot B_i < 0$  é trivial.

**(A5)** O sistema formado pelas matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  é de fase mínima em todo o politopo<sup>1</sup>.

**(A6)** Os sinais  $|\xi(k)|$  e  $|v(k)|$  são limitados e os respectivos limites superiores  $\xi_0$  e  $v_0$  são conhecidos.

Considere o modelo referência estável e invariante no tempo dado por:

$$\begin{aligned} x_m(k+1) &= A_m x_m(k) + B_m r(k), \\ y_m(k) &= C x_m(k), \end{aligned} \quad (4.3)$$

<sup>1</sup>Ver comentário no fim da prova do Teorema 3.1 na Seção 3.2.2.

sendo  $r(k)$  qualquer sinal de referência limitado,  $A_m \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é Schur e  $B_m \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  é definida de forma que o sistema do modelo de referência tenha ganho unitário.

A partir da premissa A2 e considerando a matriz  $A_m$  é possível estabelecer uma nova variável  $\Gamma_A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  que representa a diferença entre o sistema realimentado e a dinâmica desejada. Essa matriz é dada por:

$$\Gamma_A = A - BCK - A_m, \quad (4.4)$$

em que  $K$  é um ganho qualquer que torna estável o sistema realimentado e minimiza os autovalores da matriz  $(\Gamma_A + A_m)$  em cada vértice do politopo (4.2).  $\Gamma_A$  pode ser escrita como uma matriz pertencente ao politopo:

$$\begin{aligned} \Gamma_A &= \sum_{j=1}^{n_p^2} \delta_j \Gamma_{Aj}; \\ \delta_j &\geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n_p^2} \delta_j = 1. \end{aligned} \quad (4.5)$$

O problema de controle é definido como o problema de síntese de um sinal limitado  $u(k)$  tal que o erro  $e_y$  dado por

$$e_y(k) = y(k) - y_m(k) \quad (4.6)$$

torna-se limitado por

$$|e_y(k)| < \varepsilon, \quad (4.7)$$

para um dado  $\varepsilon$  limitado para todo  $k > k_0$ , com  $k_0$  sendo um inteiro finito. O sinal de controle  $u(k)$  é dado por:

$$u(k) = \mu_1(k)w_1(k) + \mu_2(k)w_2(k) \quad (4.8)$$

em que as funções  $\mu_1(k)$  e  $\mu_2(k)$  são dependentes de  $e_r(k)$  e dadas por (2.9) e (2.10), respectivamente, sendo

$$e_r(k) = r(k) - y(k). \quad (4.9)$$

Os pesos  $w_1(k)$  e  $w_2(k)$  são adaptados seguindo as equações:

$$\begin{aligned} w_1(k) &= w_1(k-1) - \gamma e_y(k) \mu_1(k-1), \\ w_2(k) &= w_2(k-1) - \gamma e_y(k) \mu_2(k-1), \end{aligned} \quad (4.10)$$

em que  $\gamma$  é a taxa de atualização e tem o mesmo sinal do ganho de malha aberta da planta.

Seja  $\Lambda$  o valor máximo do escalar  $CB$  no politopo de incerteza:

$$\Lambda = \max_{i=1,\dots,n_p} C \cdot B_i. \quad (4.11)$$

Agora, considere as matrizes  $M_{ij}$  definidas por:

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} Q_{ij} & S_{ij}^T \\ S_{ij} & R_{ij} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

com as submatrizes:

$$\begin{aligned} Q_{ij} &= (A_m + \Gamma_{Aj})^T [P + \alpha C^T C / \Lambda] (A_m + \Gamma_{Aj}) - \rho_1 P; \\ S_{ij} &= (A_m + \Gamma_{Aj})^T P B_i - (A_m + \Gamma_{Aj})^T C^T (\rho_2 - \alpha); \\ R_{ij} &= B_i^T P B_i - C B_i (2\rho_2 - \alpha) + 1 - \rho_2; \end{aligned} \quad (4.13)$$

para  $i = 1, \dots, n_p$  e  $j = 1, \dots, n_p^2$ , sendo  $P = P^T$  uma matriz definida positiva e  $\rho_1, \rho_2 \in (0,1)$  e  $\alpha \in (0,2)$  constantes quaisquer.

A seguinte regra de adaptação para  $\gamma$  é definida:

$$\gamma = \begin{cases} \frac{\alpha}{\Lambda[\mu_1^2(k) + \mu_2^2(k)]}, & \text{se } e_y^2(k) > v_0 C C^T \\ 0, & \text{se } e_y^2(k) \leq v_0 C C^T \end{cases}, \quad (4.14)$$

em que  $v_0$  é dado por:

$$v_0 = \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} \frac{\lambda_{\max}(P) \xi_0^T \xi_0}{\|\lambda_{\max}(M)\|} + \frac{\eta [C \xi_0 + v_0]^T [C \xi_0 + v_0]}{\|\lambda_{\max}(M)\|}, \quad (4.15)$$

sendo  $\lambda_{\max}(P)$  e  $\lambda_{\max}(M)$  são os maiores autovalores de  $P$  e  $M$ , respectivamente,  $\xi_0$  e  $v_0$  são os limites superiores das perturbações e  $\eta$ , uma constante dada por:

$$\eta = \frac{\alpha \rho_2}{\min(C B_i)} + \frac{2\rho_2^2}{1 - \rho_2} \quad (4.16)$$

para  $i = 1, \dots, n_p$ .

### 4.1.2 Teorema de Estabilidade Robusta

Dentro do intervalo  $e_r(k) \in \{-E_M, E_M\}$ , o controlador ONFC é estável de acordo com o seguinte teorema:

**Teorema 4.1.** *Considere o sistema (4.1) para o qual as premissas (A1) a (A6) são válidas, com realimentação de saída definida pela lei de controle (4.8) e a lei de adaptação do parâmetro dada por (4.10) sujeita a (4.14). Suponha que exista uma matriz simétrica  $P$  e três escalares  $\rho_1, \rho_2 \in (0,1)$  e  $\alpha \in (0,2)$  de modo que as seguintes Desigualdades Matriciais Lineares sejam válidas:*

$$\begin{aligned} P &> 0; \\ M_{ij} &< 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n_p\}, j \in \{1, \dots, n_p^2\}; \end{aligned} \quad (4.17)$$

*com as matrizes  $M_{ij}$  definidas por (4.12) e (4.13). Então, o sistema em malha fechada é estável para o valor de  $\alpha$  dado e para qualquer instância da planta dentro do politopo (4.2). Além disso,  $|e_y(k)|$  converge para o intervalo  $(0, \sqrt{v_0 CC^T})$ , com  $v_0$  dado em (4.15), em tempo finito e os sinais  $w_1$  e  $w_2$  são limitados.  $\square$*

*Demonstração.* A prova deste teorema é apresentada nas seções 4.2 e 4.3.

## 4.2 Estabilidade Quadrática

Para obter o modelo do erro estendido do sistema controlado, considere o erro de saída  $e_y(k)$  definido por 4.6 e reescrito como:

$$e_y(k) = Ce_x(k), \quad (4.18)$$

em que:

$$e_x(k) = x(k) - x_m(k) \quad (4.19)$$

é o erro entre as variáveis de estado do sistema e do modelo de referência.

Tomando (4.19) no instante  $k + 1$ , o termo  $A_mx(k)$  é adicionado e subtraído, levando a:

$$e_x(k+1) = x(k+1) + A_mx(k) - A_mx(k) - x_m(k+1) \quad (4.20)$$

Substituindo (4.1) e (4.3) em (4.20) e considerando (4.10), segue-se que:

$$\begin{cases} e_x(k+1) = A_me_x(k) + (A - A_m)x(k) - B_mr(k) + Bu(k) \\ w_1(k+1) = w_1(k) - \gamma Ce_x(k+1)\mu_1(k) \\ w_2(k+1) = w_2(k) - \gamma Ce_x(k+1)(1 - \mu_1(k)) \end{cases} \quad (4.21)$$

Este modelo descreve a dinâmica do erro do sistema em malha fechada em relação ao modelo de referência (4.3), considerando as variáveis  $r(k)$ ,  $u(k)$ ,  $x(k)$  e  $\mu_1(k)$  como entradas exógenas.

Qualquer ponto de equilíbrio do sistema (4.21), definido por:

$$\begin{bmatrix} e_x(k+1) \\ w_1(k+1) \\ w_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_x(k) \\ w_1(k) \\ w_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_x^* \\ w_1^* \\ w_2^* \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

deve satisfazer:

$$|Ce_x^*| \leq v_0 . \quad (4.23)$$

A condição (4.23) é necessária para o equilíbrio porque, de acordo com (4.21),  $w_1(k+1) = w_1(k)$  e  $w_2(k+1) = w_2(k)$  ocorrem simultaneamente quando  $|Ce_x^*| \leq v_0$  (vide (4.14)) ou quando  $|Ce_x(k+1)| = 0$ . Observe que os valores possíveis de  $w_1^*$  e  $w_2^*$  não são únicos.

Deve-se notar que (com  $\xi(k) = v(k) = 0$ ), o sistema (4.1) implica que para qualquer  $u(k) = u^*$  fixo, haverá um ponto fixo  $x(k) = x^*$ , desde que a matriz  $A$  não tenha autovalores unitários, o que é admitido pela premissa (A3). Do mesmo modo, tomando qualquer valor fixo de  $r(k) = r^*$  haverá um ponto fixo  $x_m(k) = x_m^*$ , para qualquer  $A_m$  com  $\lambda_{A_m} \neq 1$ . Isso significa que, dados  $u^*$  e  $r^*$ , haverá um  $e_x(k) = e_x^*$  que representa um ponto fixo da primeira equação de (4.21). O problema a ser mostrado nesta prova é a estabilidade do ponto fixo indicado em (4.22).

Defina as matrizes  $\Gamma_A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\Gamma_B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  de modo que as seguintes relações são mantidas:

$$\begin{cases} A_m + \Gamma_A = A + B \frac{(w_2^* - w_1^*)}{2E_M} C, \\ B_m - \Gamma_B = B \left[ \frac{(w_2^* + w_1^*)}{2r^*} - \frac{(w_2^* - w_1^*)}{2E_M} \right]. \end{cases} \quad (4.24)$$

Assim, considerando essa relação e os valores no equilíbrio das variáveis envolvidas, o erro entre os estados dos sistemas dado em (4.21) tem o ponto fixo definido por:

$$e_x^* = (I_n - A_m - \Gamma_A)^{-1} (\Gamma_A x_m^* + \Gamma_B r^*) . \quad (4.25)$$

Note-se que aqui é admitida a hipótese de que o erro entre os estados não seja nulo no equilíbrio, mas apenas limitado. Para verificar sua estabilidade, o ponto fixo é transladado para a origem (subtraindo o ponto (4.22) de ambos os lados do sistema (4.21)) e a relação (4.24) é assumida. Definindo  $\tilde{e}_x = e_x - e_x^*$  e analogamente para  $\tilde{w}_1$ ,  $\tilde{w}_2$ ,  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{e}_y$ ,  $\tilde{x}_m$  e  $\tilde{r}$ , obtém-se o seguinte modelo:

$$\begin{cases} \tilde{e}_x(k+1) = (A_m + \Gamma_A) \tilde{e}_x(k) + B \tilde{u}(k) + \Gamma_A \tilde{x}_m(k) + \Gamma_B \tilde{r}(k) \\ \tilde{w}_1(k+1) = \tilde{w}_1(k) - \gamma \tilde{e}_y(k+1) \mu_1(k) \\ \tilde{w}_2(k+1) = \tilde{w}_2(k) - \gamma \tilde{e}_y(k+1) \mu_2(k) \end{cases} \quad (4.26)$$

em que:

$$\tilde{u}(k) = \begin{cases} \tilde{w}_1 - \frac{(w_2^* - w_1^*)}{2E_M}(e_r + E_M), & \text{se } e_r \leq -E_M \\ \mu_1(k)\tilde{w}_1 + \mu_2(k)\tilde{w}_2, & \text{se } -E_M < e_r < E_M \\ \tilde{w}_2 - \frac{(w_2^* - w_1^*)}{2E_M}(e_r - E_M), & \text{se } e_r \geq E_M \end{cases} \quad (4.27)$$

A equação (4.26) representa a dinâmica do erro de estado  $e_x$  em relação ao ponto de equilíbrio. Como  $e_x^*$  e  $w_j^*$  são constantes, então  $\tilde{e}_x(k+1) - \tilde{e}_x(k) = e_x(k+1) - e_x(k)$  e  $\tilde{w}_j(k+1) - \tilde{w}_j(k) = w_j(k+1) - w_j(k)$ , com  $j = 1, 2$ .

Para avaliar a estabilidade do sistema (4.1) em malha fechada, considere o modelo dinâmico completo do erro  $\tilde{e}_x$ :

$$\tilde{e}_x(k+1) = (A_m + \Gamma_A)\tilde{e}_x(k) + B\tilde{u} + v(k), \quad (4.28)$$

com  $v(k)$  dado por:

$$v(k) = \Gamma_A \tilde{x}_m(k) + \Gamma_B \tilde{r}(k) + \xi(k). \quad (4.29)$$

Por definição, quando  $k \rightarrow \infty$ , tem-se que  $\tilde{x}_m(k) \rightarrow 0$  e  $\tilde{r}(k) \rightarrow 0$  e, portanto,  $v(k) \rightarrow \xi(k)$ .

Seja a seguinte função de Lyapunov candidata:

$$V(k) = \rho_1 \tilde{e}_x^T(k) P \tilde{e}_x(k) + \frac{\rho_2 \tilde{w}_1^2(k)}{\gamma} + \frac{\rho_2 \tilde{w}_2^2(k)}{\gamma} \quad (4.30)$$

em que  $P = P^T > 0$ ,  $\gamma > 0$ , e  $\rho_1, \rho_2 \in (0, 1)$ .

O sistema é estável se, para todo  $k > 0$ :

$$\Delta V = V(k+1) - V(k) < 0. \quad (4.31)$$

Defina:

$$\Delta V = \Delta V_e(k) + \Delta V_w(k) \quad (4.32)$$

em que:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V_e(k)}{\rho_1} &= \tilde{e}_x^T(k+1) P \tilde{e}_x(k+1) - \tilde{e}_x^T(k) P \tilde{e}_x(k) \\ &= [(A_m + \Gamma_A)\tilde{e}_x(k) + B\tilde{u}(k) + v(k)]^T P [(A_m + \Gamma_A)\tilde{e}_x(k) + B\tilde{u}(k) + v(k)] - \tilde{e}_x^T(k) P \tilde{e}_x(k) \end{aligned} \quad (4.33)$$

e, considerando o intervalo  $e_r(k) \in \{-E_M, E_M\}$  em que  $\tilde{u}(k) = \mu_1(k)\tilde{w}_1(k) + \mu_2(k)\tilde{w}_2(k)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V_w(k)}{\rho_2} &= \frac{\tilde{w}_1^2(k+1)}{\gamma} + \frac{\tilde{w}_2^2(k+1)}{\gamma} - \frac{\tilde{w}_1^2(k)}{\gamma} - \frac{\tilde{w}_2^2(k)}{\gamma} \\ &= -2\tilde{e}_y(k+1)[\mu_1(k)\tilde{w}_1(k) + \mu_2(k)\tilde{w}_2(k)] + \gamma\tilde{e}_y^2(k+1)[\mu_1^2(k) + \mu_2^2(k)] \\ &\leq -2[C((A_m + \Gamma_A)\tilde{e}_x(k) + B\tilde{u}(k) + v(k)) + v(k+1)]\tilde{u}(k) \\ &\quad + \frac{\alpha}{CB}\{C[(A_m + \Gamma_A)\tilde{e}_x(k) + B\tilde{u}(k) + v(k)] + v(k+1)\}^2 \end{aligned} \quad (4.34)$$

em que  $\alpha$  é o ganho de adaptação definido de acordo com (4.14). Assumi-se que o valor de  $\alpha > 0$  e que  $C \cdot B > 0$  para todas as instâncias do politopo, conforme premissa (A4)

Aplicando em (4.33) a relação (A.1) apresentada no Anexo A.1, segue que:

$$\begin{aligned} &[(A_m + \Gamma_A)\tilde{e}_x(k) + B\tilde{u}(k)]^T P[v(k)] + [v(k)]^T P[(A_m + \Gamma_A)\tilde{e}_x(k) + B\tilde{u}(k)] + [v(k)]^T P[v(k)] \leq \\ &\frac{1}{1-\rho_1}[v(k)]^T P[v(k)] + \frac{1-\rho_1}{\rho_1} [(A_m + \Gamma_A)\tilde{e}_x(k) + B\tilde{u}(k)]^T P[(A_m + \Gamma_A)\tilde{e}_x(k) + B\tilde{u}(k)] \end{aligned} \quad (4.35)$$

com  $0 < \rho_1 < 1$ , então

$$\begin{aligned} \Delta V_e(k) &\leq \begin{bmatrix} \tilde{e}_x(k) \\ \tilde{u}(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (A_m + \Gamma_A)^T P(A_m + \Gamma_A) - \rho_1 P & (A_m + \Gamma_A)^T P B \\ B^T P(A_m + \Gamma_A) & B^T P B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e}_x(k) \\ \tilde{u}(k) \end{bmatrix} \\ &\quad + \frac{\rho_1}{1-\rho_1}[v(k)]^T P[v(k)] \end{aligned} \quad (4.36)$$

Aplicando a relação (A.1) em (4.34), tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V_w(k)}{\rho_2} &\leq -2C[(A_m + \Gamma_A)\tilde{e}_x(k) + B\tilde{u}(k)]\tilde{u}(k) + \frac{\alpha}{\rho_2 CB}\{C[(A_m + \Gamma_A)\tilde{e}_x(k) + B\tilde{u}(k)]\}^2 + \frac{1-\rho_2}{\rho_2}\tilde{u}(k)^2 \\ &\quad + \left(\frac{\alpha}{CB} + \frac{2\rho_2}{1-\rho_2}\right)[Cv(k) + v(k+1)]^T [Cv(k) + v(k+1)] \end{aligned} \quad (4.37)$$

com  $0 < \rho_2 < 1$ , então

$$\begin{aligned} \Delta V_w &\leq \begin{bmatrix} \tilde{e}_x(k) \\ \tilde{u}(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{CB}(A_m + \Gamma_A)^T C^T C(A_m + \Gamma_A) & (\alpha - \rho_2)(A_m + \Gamma_A)^T C^T \\ (\alpha - \rho_2)C(A_m + \Gamma_A) & 1 - \rho_2 + [\alpha - 2\rho_2]CB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{e}_x(k) \\ \tilde{u}(k) \end{bmatrix} \\ &\quad + \left(\frac{\alpha\rho_2}{CB} + \frac{2\rho_2^2}{1-\rho_2}\right)[Cv(k) + v(k+1)]^T [Cv(k) + v(k+1)] \end{aligned} \quad (4.38)$$

Agora, considere (4.32), (4.36) e (4.38). Então, pode-se reescrever  $\Delta V$  como:

$$\Delta V \leq \begin{bmatrix} \tilde{e}_x(k) \\ \tilde{u}(k) \end{bmatrix}^T M \begin{bmatrix} \tilde{e}_x(k) \\ \tilde{u}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v(k) \\ v(k+1) \end{bmatrix}^T N \begin{bmatrix} v(k) \\ v(k+1) \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

em que

$$M = \sum_{i=1}^{n_p} \sum_{j=1}^{n_p^2} \beta_i \delta_j M_{ij}, \quad (4.40)$$

com  $\beta_i$  e  $\delta_j$  dado por (4.2) e (4.5), respectivamente, as matrizes  $M_{ij}$  definidas por (4.12) e

$$N = \begin{bmatrix} \frac{\rho_1}{1-\rho_1} P + C^T \eta C & C^T \eta \\ \eta C & \eta \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

em que o escalar  $\eta$  é definido por (4.16).

A matriz  $N$  é definida positiva e, portanto, o último termo de (4.39) é positivo. Caso  $v(k)$  e  $v(k+1)$  sejam nulos, basta que  $M$  seja definida negativa para que  $\Delta V < 0$ . No entanto, condições adicionais podem garantir estabilidade mesmo na presença de distúrbios ou incertezas como é mostrado na seção seguinte conforme apresentado em Oliveira et al. (2020).

### 4.3 Convergência e Limitação dos Sinais

Considere uma função estritamente positiva  $f(\tilde{e}_x(k), \tilde{u}(k))$  tal que:

$$f(\tilde{e}_x(k), \tilde{u}(k)) < \tilde{e}_x(k)^T \tilde{e}_x(k) + \tilde{u}(k)^T \tilde{u}(k) \quad (4.42)$$

e uma constante desconhecida e limitada  $v_0$  tal que:

$$v_0 \geq \frac{1}{\|\lambda_{\max}(M)\|} \begin{bmatrix} v(k) \\ v(k+1) \end{bmatrix}^T N \begin{bmatrix} v(k) \\ v(k+1) \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

ou ainda:

$$v_0 \|\lambda_{\max}(M)\| > \frac{\rho_1}{1-\rho_1} v^T(k) P v(k) + \eta [Cv(k) + v(k+1)]^T [Cv(k) + v(k+1)] \quad (4.44)$$

em que  $\lambda_{\max}(M)$  é o maior autovalor de  $M^2$ . É possível notar que a premissa A6 torna possível a existência de uma  $v_0$  limitada.

<sup>2</sup>Ou, alternativamente, o autovalor de  $M$  de menor módulo.

Supondo que  $M$  seja definida negativa, é verdade que:

$$\begin{bmatrix} \tilde{e}_x(k) \\ \tilde{u}(k) \end{bmatrix}^T M \begin{bmatrix} \tilde{e}_x(k) \\ \tilde{u}(k) \end{bmatrix} < -\|\lambda_{\max}(M)\|[\tilde{e}_x(k)^T \tilde{e}_x(k) + \tilde{u}(k)^T \tilde{u}(k)] < -\|\lambda_{\max}(M)\|f[\tilde{e}_x(k), \tilde{u}(k)] \quad (4.45)$$

Portanto, de (4.39), (4.45) e (4.44):

$$\Delta V < \|\lambda_{\max}(M)\|\{-f[\tilde{e}_x(k), \tilde{u}(k)] + v_0(k)\} \quad (4.46)$$

Assim, uma condição suficiente para garantir que  $\Delta V(k) < 0$  é:

$$\tilde{e}_x(k)^T \tilde{e}_x(k) + \tilde{u}(k)^T \tilde{u}(k) > f[\tilde{e}_x(k), \tilde{u}(k)] > v_0(k) \quad (4.47)$$

Isso mostra que os sinais  $\tilde{e}_x$  e  $\tilde{u}$  convergem para um conjunto fechado e garante que  $e_x$ ,  $e_y$  e  $u$  são limitados.

Entretanto, tal condição não garante a limitação dos sinais  $\tilde{w}_1$  e  $\tilde{w}_2$ . Como mostrado no Capítulo 3, esses sinais apresentam estabilidade quando  $\Delta V \leq 0$ , mas podem crescer indefinidamente se a lei de adaptação permanecer ativa para  $f < v_0$ . Esse fenômeno é conhecido como deriva paramétrica (Carvalho et al., 2010). Uma forma de lidar com o crescimento indesejado de  $\tilde{w}_1$  e  $\tilde{w}_2$  é desligar a adaptação quando não se tem a garantia de  $f > v_0$ . A regra de adaptação (4.14), conhecida como técnica de modificação da zona morta, garante a limitação dos pesos mesmo sob ruído de medição.

Para isso, defina uma função  $f$  sob a condição (4.42) na forma<sup>3</sup>:

$$f[\tilde{e}_x(k), \tilde{u}(k)] = \frac{\tilde{e}_y^2(k)}{CC^T} \leq \tilde{e}_x(k)^T \tilde{e}_x(k) + \tilde{u}(k)^T \tilde{u}(k) \quad (4.48)$$

e uma função  $v_0$  de acordo com (4.44):

$$v_0 = \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} \frac{\lambda_{\max}(P) \xi_0^T \xi_0}{\|\lambda_{\max}(M)\|} + \frac{\eta [C\xi_0 + v_0]^T [C\xi_0 + v_0]}{\|\lambda_{\max}(M)\|} \quad (4.49)$$

em que  $\lambda_{\max}(P)$  e  $\lambda_{\max}(M)$  são os maiores autovalores de  $P$  e  $M$ , respectivamente,  $\eta$  dado por (4.16);  $\xi_0$  e  $v_0$  são os limites superiores das perturbações.

<sup>3</sup>As seguintes equivalências podem ser usadas por conveniência para calcular o escalar:

$$CC^T = \lambda_{\max}(C^T C) = \sum_{j=1}^n c_j^2 = \text{tr}(C^T C)$$

para qualquer  $C = [c_1, \dots, c_n] \in R^{1 \times n}$ .

Desta forma, sempre que:

$$e_y^2 > v_0 CC^T \quad (4.50)$$

a adaptação dos pesos os mantém limitados. Caso essa condição não aconteça a lei de adaptação é desligada até que o sinal de erro volte a crescer. Portanto, a regra (4.10) garante que os sinais  $w_1$  e  $w_2$  são limitados e que o erro de saída  $e_y$  é atraído para o intervalo  $(-\sqrt{v_0 CC^T}, \sqrt{v_0 CC^T})$ .

□

Os valores de  $\rho_1$  e  $\rho_2$  podem ser ajustados para minimizar os autovalores de  $M_{ij}$  e, portanto, os requisitos do sistema. No entanto, isso pode aumentar os autovalores de  $N$ , o valor de  $v_0$  e o valor absoluto máximo de  $e_x$ . Na fase de projeto,  $\rho_1$  e  $\rho_2$  são escolhidos arbitrariamente perto de 1,0 quando a condição de *matching* é satisfeita ou quando as perturbações são próximas de zero. Embora o Teorema 4.1 apresente uma maneira formal para especificação do parâmetro de ajuste da zona-morta, o valor de  $v_0$  pode ser encontrado de modo empírico avaliando as exigências de projeto e monitorando a convergência dos pesos no início da operação.

## 4.4 Experimentos Numéricos

Nesta seção, alguns resultados de simulação são apresentados a fim de avaliar o desempenho do controlador ONFC sob as condições apresentadas neste capítulo. O ONFC foi aplicado no controle de plantas com incerteza ou variância paramétrica, ambas com ruído de medição e sem a condição de *matching*. Avalia-se ainda, para os sistemas considerados, a factibilidade da solução do problema LMI 4.1 para um conjunto de valores de  $\alpha$  e  $A_m$ . Pretende-se, assim, evidenciar a validade dos resultados teóricos obtidos nas seções anteriores.

### 4.4.1 Planta com Incertezas

Considere o seguinte sistema de tempo discreto incerto:

$$x(k+1) = (1 + \Delta A) \begin{bmatrix} 0.88 & -0.25 & -0.10 \\ 0.06 & 0.39 & -0.09 \\ -0.49 & -0.12 & 0.69 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + v(k)$$

em que  $v(k)$  é um ruído de medição gaussiano com média nula e variância  $\sigma_v^2 = 0,05$ ,  $\Delta A = \pm 0,1$  é a incerteza sobre a matriz  $A$  e a matriz incerta  $B$  é tal que  $b_1 \in [0,8; 1]$  e  $b_2 \in [0,6; 0,8]$ . A dinâmica desejada para esse sistema em malha fechada é descrita pelo modelo de referência

escolhido na forma:

$$\begin{aligned} x_m(k+1) &= \begin{bmatrix} 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{Am} \end{bmatrix} x_m(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_m \end{bmatrix} r(k) \\ y_m(k) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_m(k) \end{aligned}$$

em que  $|\lambda_{Am}| \in (-1,1)$  e  $b_m$  são definidos de modo que o ganho do modelo de referência seja unitário.

A fim de ilustrar a factibilidade da solução do problema LMI (4.17), 10.000 combinações de  $\lambda_{Am} \in [-1,0;1,0]$  e  $\alpha \in [0;4,0]$  são avaliadas, com o parâmetro dos antecedentes fuzzy  $E_M = 15$ . Para comparar, o problema LMI (4.17) é resolvido empregando os mesmos parâmetros anteriores e considerando duas situações: a)  $\rho_1 = \rho_2 = 0,98$  e b)  $\rho_1 = \rho_2 = 0,75$ . A Figura 4.4.1 mostra a região do plano  $\lambda_{Am} \times \alpha$  que exibe a factibilidade das desigualdades  $M < 0$  e  $P = P^T > 0$  sobre todo polítopo  $(A,B)$ . Como esperado, a factibilidade da LMI requer  $0 < \alpha < 2$ .

A lei de controle (4.8) é implementada usando a lei de adaptação (4.10) com os parâmetros  $\alpha = 0,4$ ,  $E_M = 15$ , e  $v_0 = 0,8$ . As condições iniciais são definidas como  $w_1(0) = w_2(0) = 1,0$ ,  $x(0) = [0,0,0]^T$  e os parâmetros do modelo de referência são escolhidos como  $\lambda_{Am} = 0,5$  e  $b_m = 0,5$ . Observe que, neste caso, não é possível atender à condição de *matching*. Os sinais  $y(k)$  e  $r(k)$  são mostrados na Figura 4.2.a. Pode-se observar que o controlador é capaz de conduzir a resposta da planta ao modelo de referência, apesar da presença de ruído e que o sinal de controle  $u(k)$  permanece limitado conforme a Figura 4.2.b.

O algoritmo tende a minimizar a diferença entre as dinâmicas durante um transiente na entrada, e o erro  $e_y$  converge para perto de  $v_0$ . A taxa de adaptação  $\gamma$  varia conforme a lei (4.14) reduzindo o valor da taxa quando o módulo do erro é próximo de  $E_M$  e aumentando a velocidade de adaptação próximo da região de equilíbrio. Como mostrado na Figura 4.2.c, a lei de adaptação (4.14) desliga a variação de  $w_1$  e  $w_2$  quando o sistema está em estado estacionário para evitar a influência indesejada do ruído sobre o crescimento dos pesos.

Uma janela de dados maior foi avaliada a fim de observar a convergência dos pesos  $w_2$  e  $w_1$  nas condições do teste descritas. Na Figura 4.3 são apresentados os sinais do erro  $e_y$ , a evolução dos pesos ao longo do tempo e o erro dos estados  $e_x$ . Percebe-se a robustez do algoritmo de adaptação quanto à presença de ruído de medição e incerteza paramétrica, evitando que os consequentes do sistema fuzzy cresçam indefinidamente. Também é possível ver que o erro entre os estados não se anula, mas permanecem limitados.

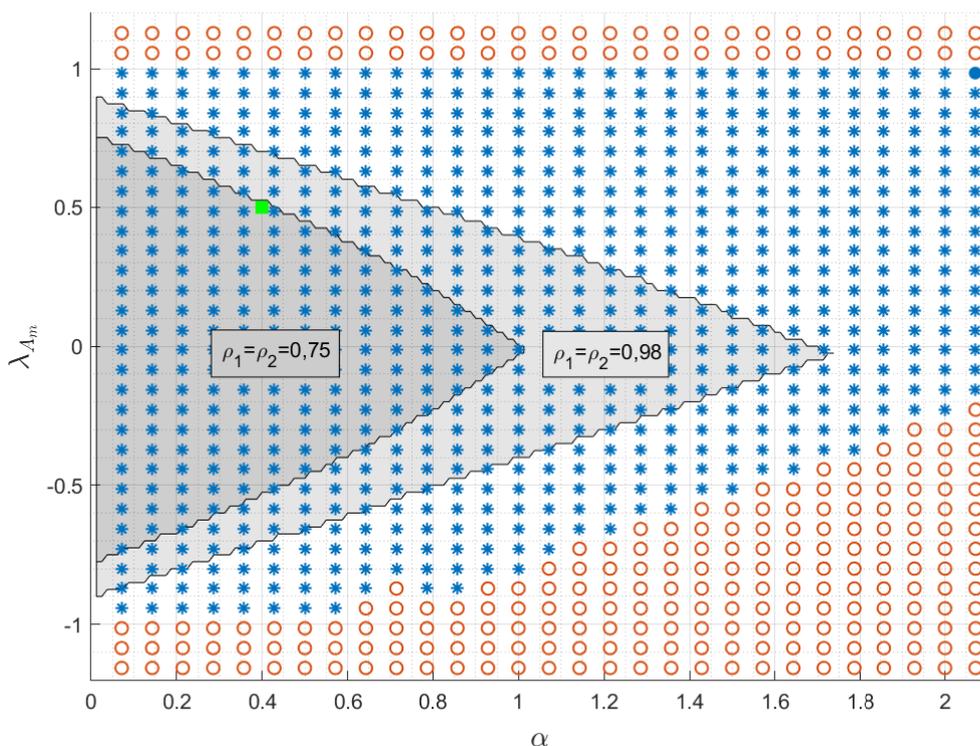


Figura 4.1: Região de factibilidade da solução do problema LMI do Teorema 4.1 para o sistema exemplo com  $\rho_1 = \rho_2 = 0,98$  (área maior) e  $\rho_1 = \rho_2 = 0,75$  (área menor). Se a combinação de  $\alpha$  e  $\lambda_{Am}$  estiver dentro das áreas destacadas, a estabilidade do sistema realimentado é garantida. Os pontos sobre o gráfico indicam a evidência numérica de estabilidade, sendo que os pontos (\*) indicam convergência do sinal de erro e os pontos (o) indicam divergência. O ponto (■) indica a escolha dos parâmetros para a simulação apresentada na Figura 4.2.

#### 4.4.2 Processo Variante no Tempo

Outro teste para avaliar a capacidade de adaptação a uma planta variável com o tempo é implementado como segue. Utiliza-se no teste o sistema linear com um parâmetro variável no tempo dado por:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.4 & a(k) \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} x(k) + v(k)$$

em que  $a(k)$  é uma entrada da matriz  $A$  cuja variação no tempo é mostrada pela Figura 4.4.c e  $v(k)$  é uma perturbação aleatória de distribuição gaussiana, com média nula e variância  $\sigma_v^2 = 0,1$ . Os parâmetros de projeto são escolhidos como  $\alpha = 0.7$ ,  $E_M = 5$ ,  $v_0 = 0.8$  e as condições iniciais são definidas como  $w_1(0) = w_2(0) = 0$  e  $x(0) = [0,0,0]^T$ . Ao longo do tempo,  $a(k)$

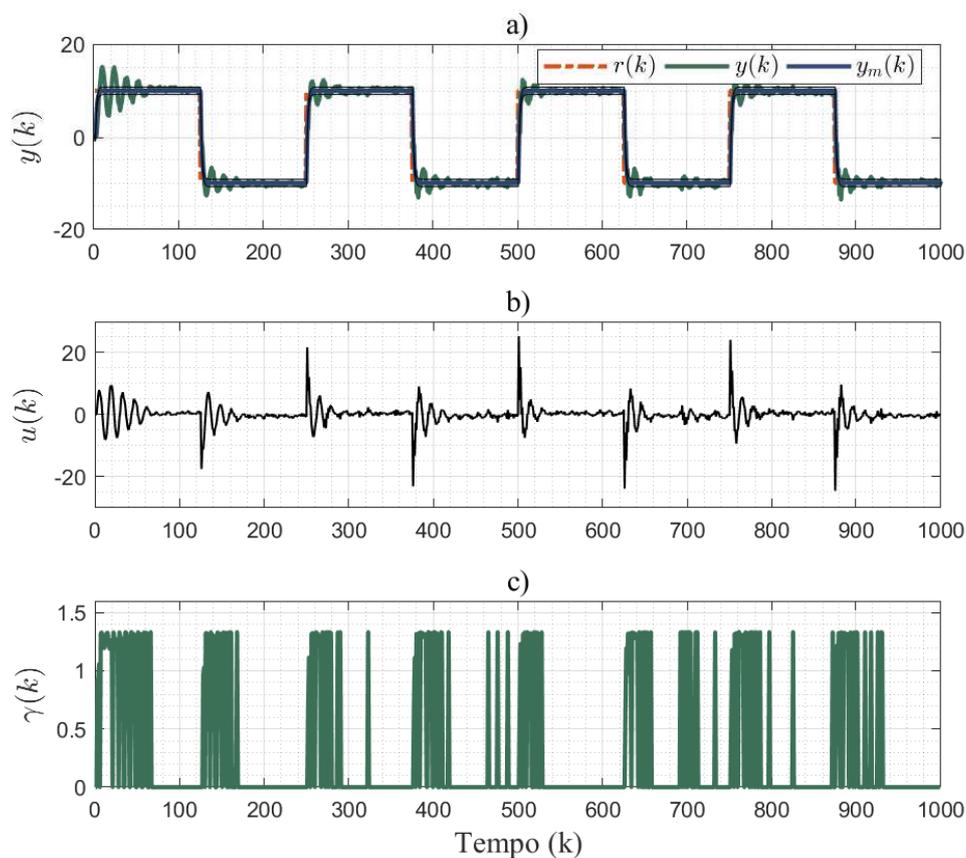


Figura 4.2: Simulação de um sistema incerto com ruído de medição controlado pelo ONFC. (a) Saída do sistema controlado e sinais de referência. (b) Ação de controle. (c) Taxa de adaptação dinâmica dos parâmetros  $w_1$  e  $w_2$ .

faz com que o sistema de malha aberta alterne entre um formato estável e um instável. Neste exemplo, o seguinte modelo de referência é adotado:

$$x_m(k+1) = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix} x_m(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.6 \end{bmatrix} r(k)$$

$$y_m(k) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} x_m(k)$$

Os sinais do sistema controlado são mostrados na Figura 4.4.a e 4.4.b. A saída do sistema  $y(k)$  permanece próxima ao sinal de referência  $y_m(k)$  mesmo sob mudanças abruptas no parâmetro  $a(k)$ , mantendo o desempenho. Repare que os sinais de  $a(k)$  e  $r(k)$  tem frequências distintas e os problemas de seguimento de referência e adaptação paramétrica são resolvidos

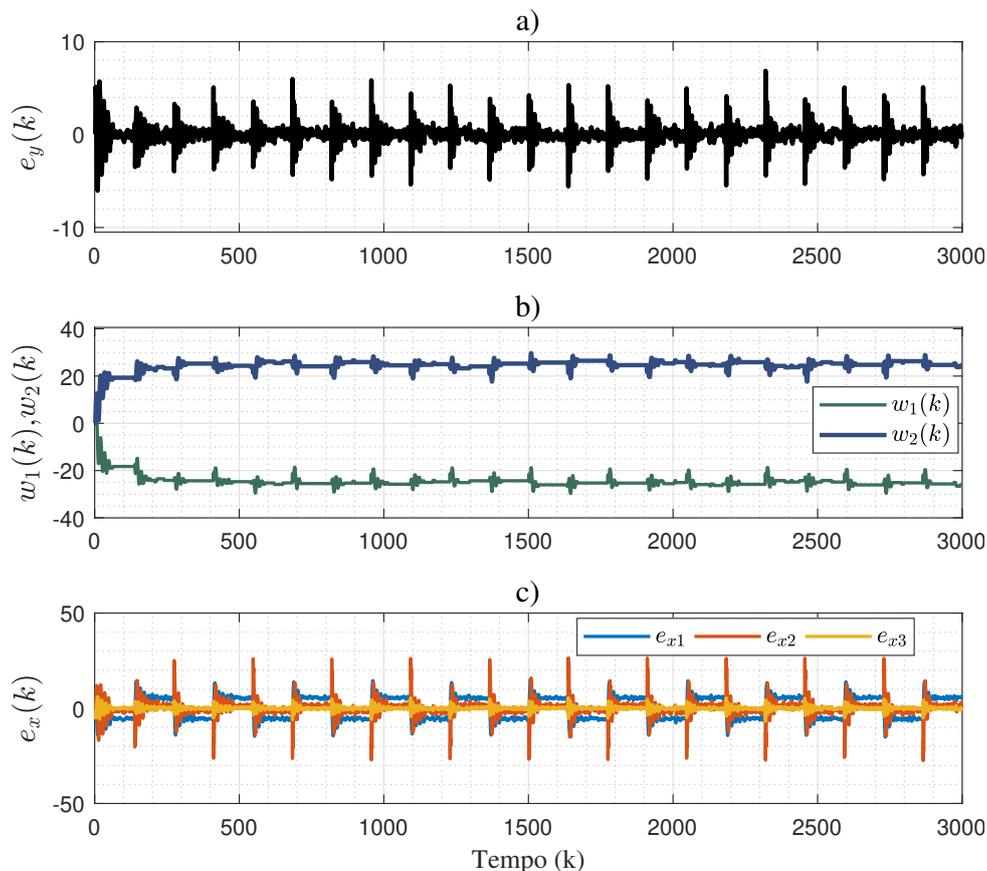


Figura 4.3: Evolução dos sinais do sistema incerto com ruído de medição controlado pelo ONFC. (a) Sinal de erro de saída do sistema controlado em relação à saída do modelo referência. (b) Parâmetros do Controlador. (c) Erros dos estados do sistema controlado em relação aos do modelo referência.

simultaneamente.

Na Figura 4.5 são apresentados os sinais do erro  $e_y$ , a evolução dos pesos e o erro entre os estados. Pode-se observar também neste teste a limitação de todos os sinais envolvidos.

## 4.5 Conclusão

Neste capítulo foi apresentada a prova de estabilidade do ONFC modificado aplicado a sistemas lineares com incerteza paramétrica e presença de perturbações. A incerteza aqui analisada é do tipo politópica e as perturbações são pressupostas limitadas. Além disso, o sistema avaliado é do tipo estabilizável por saída, uma premissa menos restritiva que a condição de *matching*. Foi acrescida à lei de adaptação uma zona-morta que desliga a variação dos pesos quando o erro de aproximação alcança um valor mínimo definido em projeto. Essa alteração tem por objetivo garantir a limitação do sinal dos pesos mesmo na presença de perturbações.

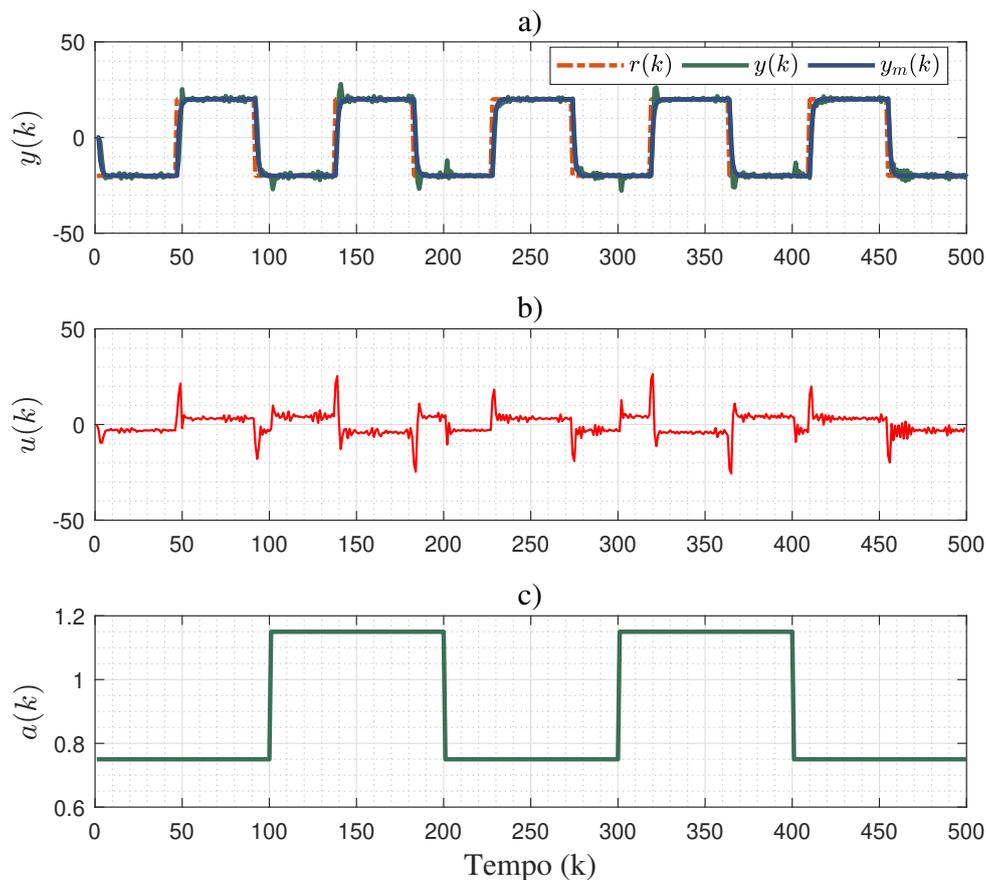


Figura 4.4: Exemplo de sistema variante no tempo controlado pelo ONFC. a) Saída do sistema controlado. b) Ação de controle. c) Parâmetro variante da planta.

Nos experimentos numéricos foram avaliados o desempenho do ONFC modificado aplicado a exemplos de plantas sem a condição de *matching* e com variância no tempo. A região de factibilidade da LMI para um exemplo foi apresentada considerando duas condições de aproximação desejadas entre as dinâmicas do sistema em malha fechada e do modelo referência. Os resultados evidenciam que a taxa de adaptação deve ser menor quando não se tem a condição de *matching* ou quando se exige um limite menor para o tamanho da região de convergência do erro dos estados. Um valor menor desse ganho implica que o controlador levará mais tempo para alcançar os valores finais dos parâmetros considerando uma mesma excitação dos sinais da planta.

Foi evidenciado o efeito na dinâmica do erro quando a planta não atende a condição de *matching* e demonstrado que tanto o erro quanto os pesos do controlador convergem para regiões limitadas do espaço de estados. A modificação apresentada neste trabalho, qual seja, o uso de variáveis  $\mu_1$  e  $\mu_2$  atrasadas na adaptação dos parâmetros associada à técnica de zona-morta, exibiu garantia de limitação dos pesos do controlador mesmo para uma planta variante

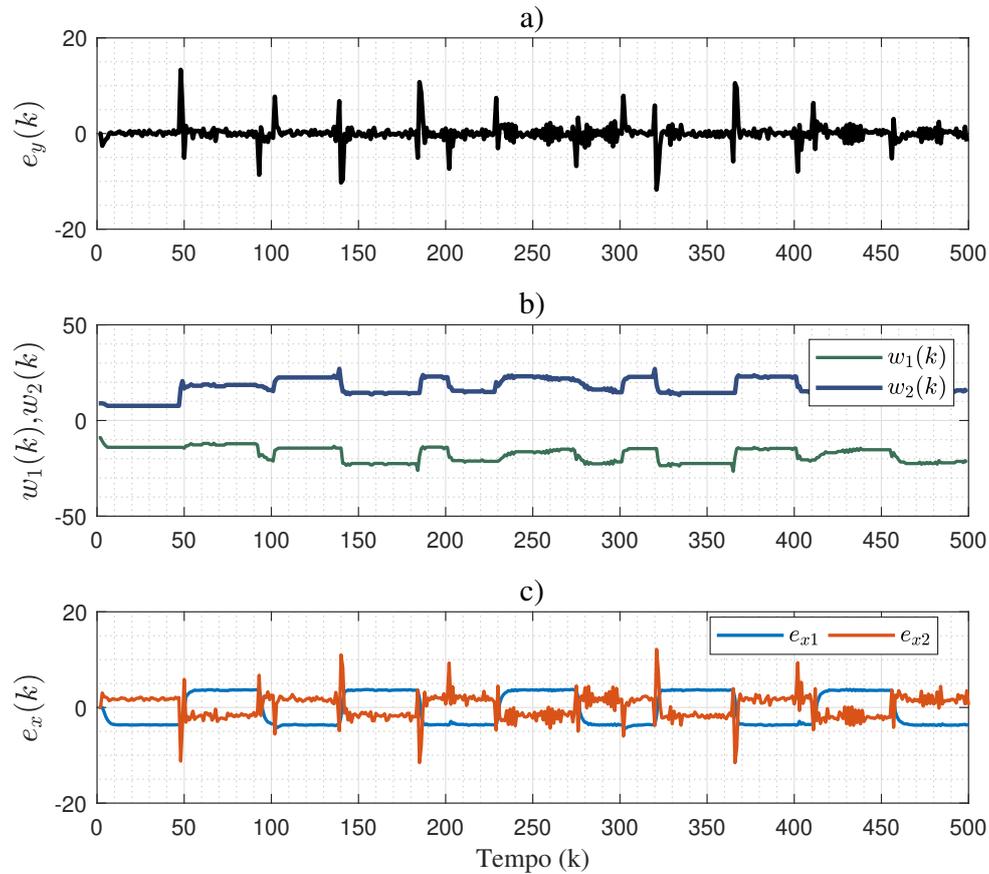


Figura 4.5: Evolução dos sinais do sistema variante no tempo controlado pelo ONFC. (a) Sinal de erro de saída do sistema controlado em relação à saída do modelo referência. (b) Parâmetros do Controlador. (c) Erros dos estados do sistema controlado em relação aos do modelo referência.

no tempo e instável. O ajuste na lei de adaptação para alcançar a robustez é relativamente mais simples que o utilizado em outros controladores adaptativos e será avaliado no próximo capítulo o desempenho do ONFC em comparação com controladores concorrentes.

# Análise Numérica Comparativa

---

*“Nossa alma escapou como um pássaro, dos laços do caçador. Rompeu-se a armadilha, e nos achamos livres. Nosso socorro está no nome do Senhor, criador do céu e da terra.”*

Salmo 123, 7-8

Neste capítulo, o controlador ONFC com a lei adaptativa desenvolvida neste trabalho é submetido a testes numéricos para avaliação do seu desempenho comparativamente a outros controladores. As etapas de síntese são resumidas em um procedimento de projeto, a fim de indicar os passos que o projetista deverá seguir na implementação do ONFC. O procedimento foi utilizado para aplicação do controle em problemas nos quais o ONFC estaria apto para ser empregado. Foram escolhidos e aplicados aos mesmos problemas alguns controladores concorrentes do ONFC, isto é, capazes de lidar com determinada incerteza e/ou variação paramétrica. As comparações são feitas em relação a um controlador PI/PID, ao ONFC<sub>dw</sub> e ao controle MRAC com a modificação  $\sigma$ . Em alguns casos, índices são calculados para quantificar o desempenho de cada estratégia. O objetivo desta análise é indicar em que contexto o ONFC poderá ser mais vantajoso que outros controladores. Os resultados desses testes são detalhados nas seções seguintes.

## 5.1 Procedimento para Projeto do Controlador ONFC

O procedimento de projeto para o controlador ONFC desenvolvido neste trabalho e utilizado nas simulações deste capítulo é resumido nos passos a seguir.

1. Escolha as matrizes do modelo de referência  $A_m$  e  $B_m$ ;
2. Escolha  $E_M \simeq \max\|y(k) - r(k)\|$ ,  $\xi_0 > |\xi(k)|$  e  $v_0 > |v(k)|$ ;

3. Considere a matriz  $M$  dada por (4.40). Escolha  $\rho_1, \rho_2 \in (0,1)$  e  $\alpha$  tal que as seguintes LMIs sejam satisfeitas:

$$\begin{cases} P > 0 \\ M_{ij} < 0, \quad \forall i = 1, \dots, n_p; \quad j = 1, \dots, n_p^2 \end{cases}$$

As definições das matrizes são repetidas aqui por conveniência:

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} Q_{ij} & S_{ij}^T \\ S_{ij} & R_{ij} \end{bmatrix}$$

$$Q_{ij} = (A_m + \Gamma_{Aj})^T [P + \alpha C^T C / \Lambda] (A_m + \Gamma_{Aj}) - \rho_1 P;$$

$$S_{ij} = (A_m + \Gamma_{Aj})^T P B_i - (A_m + \Gamma_{Aj})^T C^T (\rho_2 - \alpha);$$

$$R_{ij} = B_i^T P B_i - C B_i (2\rho_2 - \alpha) + 1 - \rho_2;$$

4. A implementação do controlador segue (2.9), (2.10), (4.8) e (4.10), com  $\gamma$  fornecido por (4.14) e  $v_0$  dado por (4.15). Caso o valor de  $v_0$  não satisfaça as exigências de projeto, volte ao Passo 3, escolhas novas constantes  $\alpha, \rho_1$  e  $\rho_2$  e avalie novamente. Essas fórmulas e a sequência de execução são resumidas no Algoritmo 1.

## 5.2 Controle de Sistema Incerto

Nesta seção é apresentado um teste numérico de controle de uma planta com parâmetros incertos a fim de comparar o desempenho do ONFC em relação ao de um controlador PI robusto. O problema considerado é descrito no trabalho de Hao et al. (2019) em que é apresentado o controle de um processo de moldagem por injeção. Durante a operação em lote, incertezas variam com o tempo e exigem que o controlador mantenha o desempenho para garantir a qualidade esperada em cada aplicação. A pressão do bico, uma variável chave do processo, deve ser controlada pela manipulação da abertura de uma válvula hidráulica para seguir um determinado perfil. A dinâmica do processo foi identificada como um modelo incerto, dado por:

$$x(k+1) = \left( \begin{bmatrix} 1.607 & 1 \\ -0.6086 & 0 \end{bmatrix} + \Delta A(k) \right) x(k) + \left( \begin{bmatrix} 0.239 \\ -0.9282 \end{bmatrix} + \Delta B(k) \right) u(k) + \omega(k)$$

$$y(t,k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

**Algoritmo 1:** Pseudo-código do ONFC proposto

---

**Entrada:**  $A_m, B_m, C, \alpha, \Lambda, E_M, v_0, n$   
**Dados:**  $y(k), r(k)$   
**Resultado:**  $u(k)$

- 1 **Condições Iniciais:**  $w_1(0), \mu_1(0), w_2(0), \mu_2(0), x_m(1)$
- 2 **para**  $k = 1$  até  $n$  **faça**
- 3      $y(k) \leftarrow$  leitura do sensor  
       /\* Cálculo dos erros \*/
- 4      $y_m(k) = Cx_m(k);$
- 5      $e_r(k) = r(k) - y(k);$
- 6      $e_y(k) = y(k) - y_m(k);$   
       /\* Adaptação dos pesos \*/
- 7     **se**  $e_y^2(k) > v_0CC^T$  **então**
- 8         |  $\gamma = \frac{\alpha}{\Lambda[\mu_1^2(k-1) + \mu_2^2(k-1)]};$
- 9     **senão**
- 10        |  $\gamma = 0$
- 11     **fim**
- 12      $w_1(k) = w_1(k-1) - \gamma e_y(k)\mu_1(k-1);$
- 13      $w_2(k) = w_2(k-1) - \gamma e_y(k)\mu_2(k-1);$   
       /\* Cálculo do sinal de controle \*/
- 14     **se**  $e_r(k) \geq E_M$  **então**
- 15         |  $\mu_1(k) = 1;$
- 16     **se**  $e_r(k) \leq -E_M$  **então**
- 17         |  $\mu_1(k) = 0;$
- 18     **senão**
- 19         |  $\mu_1(k) = \frac{E_M - e_r(k)}{2E_M};$
- 20     **fim**
- 21      $\mu_2(k) = 1 - \mu_1(k);$
- 22      $u(k) = \mu_1(k)w_1(k) + \mu_2(k)w_2(k);$
- 23     **retorna**  $[u(k)]$
- 24      $x_m(k+1) = A_mx_m(k) + B_mr(k);$
- 25 **fim**

---

$$\Delta A(k) = \begin{bmatrix} 0.0804\delta(k) & 0 \\ -0.0304\delta(k) & 0 \end{bmatrix}; \Delta B(k) = \begin{bmatrix} 0.062\delta(k) \\ -0.0464\delta(k) \end{bmatrix}$$

em que  $\omega(k)$  é o ruído de processo com distribuição normal e variância  $\sigma_\omega^2 = 0,1$ ,  $\Delta A(k)$  e  $\Delta B(k)$  são matrizes que descrevem as variações dos parâmetros durante a operação e são modeladas por uma função  $\delta(k)$  que varia entre  $-1$  e  $1$ . O sinal de referência para esse processo é bem

específico e é dado por:

$$r(k) = \begin{cases} 200, & 0 \leq k \leq 100; \\ 200 + 5(k - 100), & 100 < k \leq 120; \\ 300, & 120 < k \leq 200. \end{cases}$$

Em Hao et al. (2019), os autores apresentam um controlador PI robusto projetado para essa planta, que garante estabilidade e desempenho para toda a faixa de variação dos parâmetros. A equação do controlador adotado em (Hao et al., 2019) é:

$$u(k) = K_p e_r(k) + K_i \sum_{i=1}^k e_r(i) \quad (5.1)$$

com  $e_r = y - r$ . Os ganhos encontrados para este controlador são:  $K_p = 0,6104$  e  $K_i = 0,0037$ .

O ONFC é aplicado ao problema descrito e comparado ao controlador PI que é utilizado em Hao et al. (2019). A construção do modelo referência, utilizado no ONFC, foi baseada nos requisitos de desempenho do processo e é dado por:

$$G_m(z) = \frac{0,3}{z^2 - 1,4z + 0,5} \cdot \quad (5.2)$$

O algoritmo foi implementado utilizando os seguintes parâmetros:  $\alpha = 0,95$ ,  $v_0 = 5$ ,  $E_M = 30$  e as condições iniciais são nulas. Primeiramente foi simulado o controle da planta durante 3 ciclos completos do sinal de referência  $r(k)$  utilizando apenas no modelo nominal, ou seja, considerando  $\delta(k) = 0$ . Ainda, para avaliar a rejeição a um distúrbio  $d(k)$ , é simulada uma perturbação na saída do processo do tipo degrau com valor  $d = -100$  para  $k > 350$ . O desempenho de cada controlador é comparado quantitativamente utilizando os critérios IAE (*Integral Absolute Error*), ISE (*Integral Square Error*), ITAE (*Integral Time Absolute Error*) e ITSE (*Integral Time Square Error*). Os índices estão normalizados em relação ao tempo de simulação.

As respostas do sistema controlado, bem como, as ações de controle de cada controlador são mostradas na Figura 5.1. A Figura 5.2 mostra o sinal de erro, o ganho proporcional adotado no controlador PI e a evolução do ganho proporcional equivalente do controlador ONFC, e a ação integral de cada controlador. Conforme discutido na Subseção 2.5.3 do Capítulo 2, o ganho proporcional equivalente é relacionado à diferença dos pesos e a ação integral dada pela média dos pesos.

Um outro teste foi realizado desta vez variando  $\delta(k)$  em 3 valores dentro da faixa de incerteza:  $\delta(k) = -1$ ,  $\delta(k) = 0$  e  $\delta(k) = 1$  para todo  $k > 0$ . Os controladores foram aplicados novamente na planta para cada valor de  $\delta$  e considerando um sinal de referência tipo onda

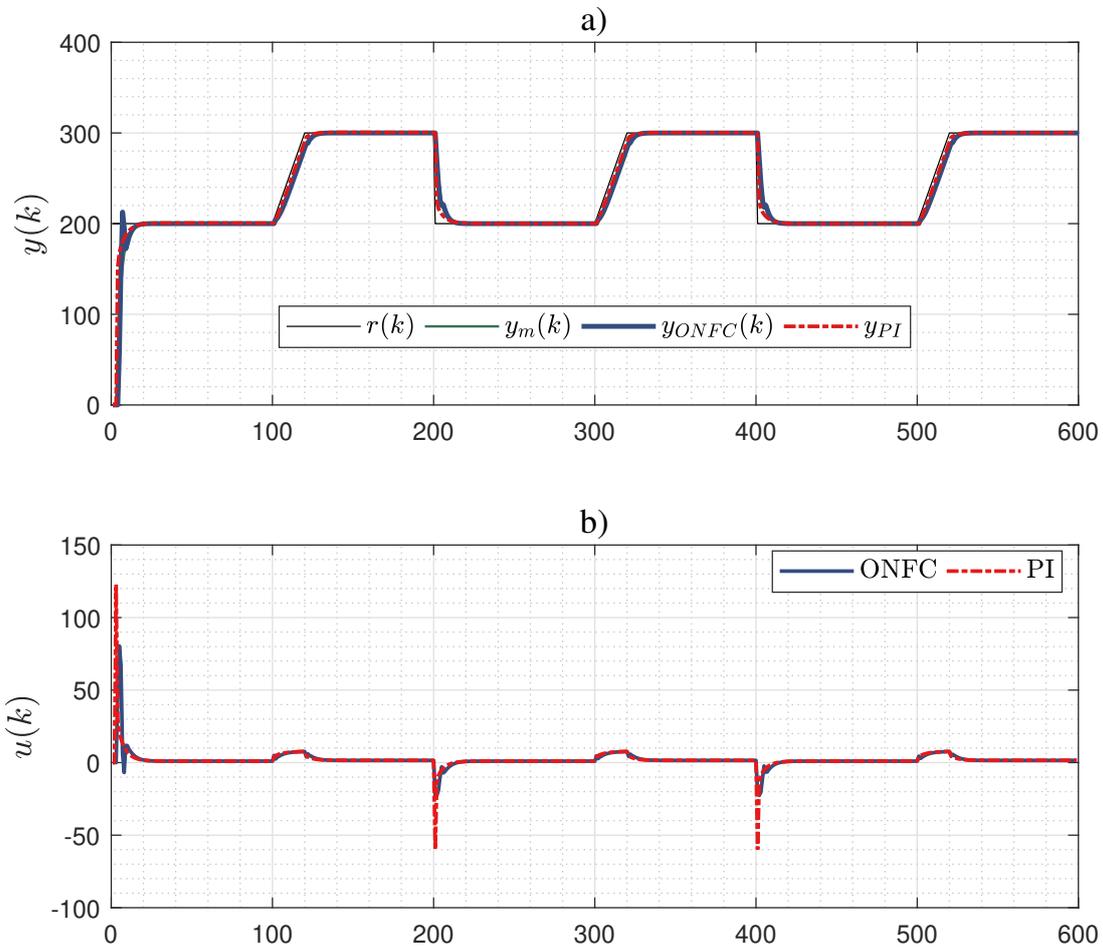


Figura 5.1: Comparação do desempenho do controlador ONFC com um controlador PI aplicados a um sistema incerto. *a)* Saída do sistema controlado. *b)* ação de controle de cada controlador.

quadrada. O resultado referente a cada controlador é mostrado na Figura 5.3.

Os índices de desempenho foram calculados para cada um dos testes e a variação desses índices longo do tempo de simulação são mostradas na Figura 5.4. O valor final dos índices em cada teste é mostrado na Tabela 5.1. Como pode ser observado, o controlador PI projetado para uma planta com valores de parâmetros precisamente conhecidos apresenta um desempenho superior ao ONFC, considerando os índices apresentados. Entretanto, o controle adaptativo confere melhor desempenho quando os valores dos parâmetros estão nos valores limiares das incertezas modeladas para o problema. Isso corrobora a hipótese de que um controlador robusto tenha melhor desempenho para pequenas incertezas e que incertezas maiores possam ser melhor tratadas com o uso de controladores adaptativos, como o ONFC proposto.

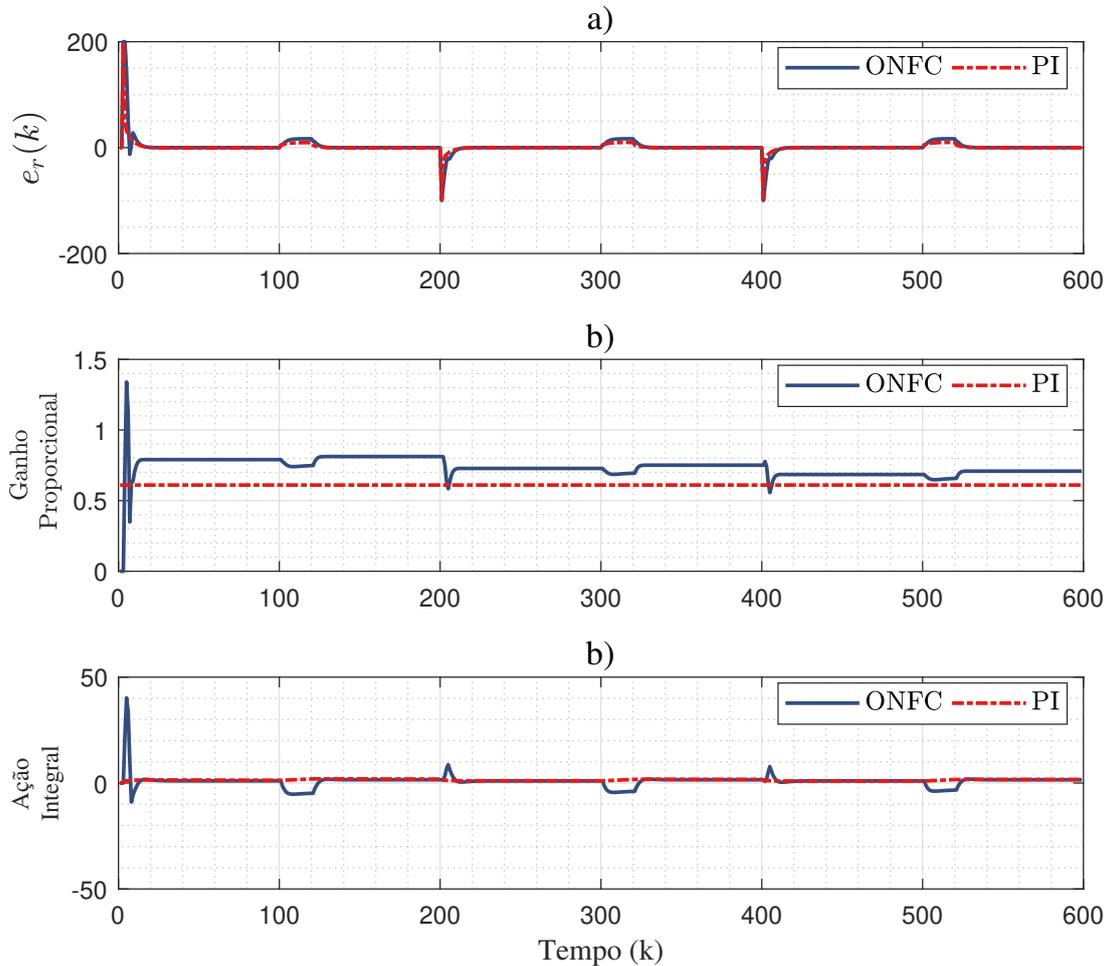


Figura 5.2: Erro de referência e componentes da ação de controle do controlador ONFC e do controlador PI. *a)* Erro de referência. *b)* Ganho proporcional ao erro de cada controlador ( $K_p$ , para o controle PI e  $(w_2 - w_1)/(2E_M)$ , para o ONFC). *c)* Ação integral de cada controlador.

### 5.3 Controle de Sistemas Não Linear

Problemas em que as não linearidades não são desprezíveis podem ser solucionados por controle adaptativo ou outros controladores não lineares. Embora o Teorema 4.1 considere um sistema linear, o ONFC pode ser aplicado em sistemas com algum tipo de não linearidade, como é mostrado nesta seção. Para isso, o projeto do controlador é construído sobre uma versão linearizada desse sistema e o erro de aproximação da linearização pode ser tratado como uma incerteza do modelo.

Seja o sistema não linear discreto:

$$y(k+1) = 1.4y(k) - 0.6y(k-1) - 3u^3(k) + 2u(k) - 1u^3(k-1) + 2u(k-1) + v(k) \quad (5.3)$$

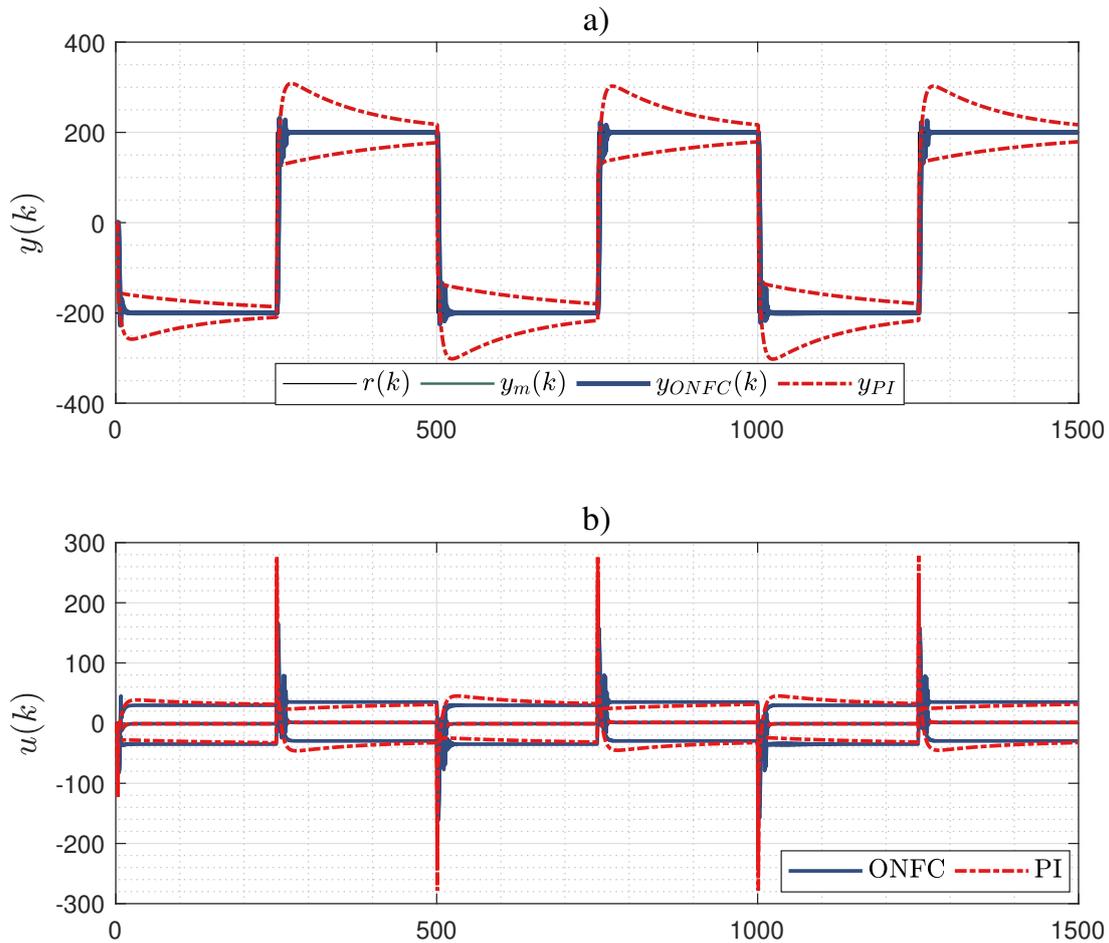


Figura 5.3: Comparação entre resposta do controle ONFC com o do controle PI para diferentes valores de parâmetros da planta. *a)* Saída do sistema controlado em relação a referência. *b)* Ação de controle de cada controlador em três diferentes cenários.

em que  $v(k)$  é um ruído de medição gaussiano. A não linearidade entre a entrada e a saída é expressa pela curva estática desse sistema, dada pela função:

$$y = \frac{10}{3}(u - u^3) \quad (5.4)$$

e graficamente pela Figura 5.5.a. O ganho estático do sistema é positivo para  $-\sqrt{1/3} < u < \sqrt{1/3}$  e negativa para os demais valores de  $u$ , mostrado graficamente na Figura 5.5.b.

O controle é aplicado no modelo não linear do sistema e é avaliada a capacidade de adaptação do ONFC proposto. Para comparação, um controlador PID projetado para a mesma aproximação linear é utilizado nas mesmas condições que o ONFC. O modelo linearizado em torno de uma entrada nominal  $u_n$  é dado por:

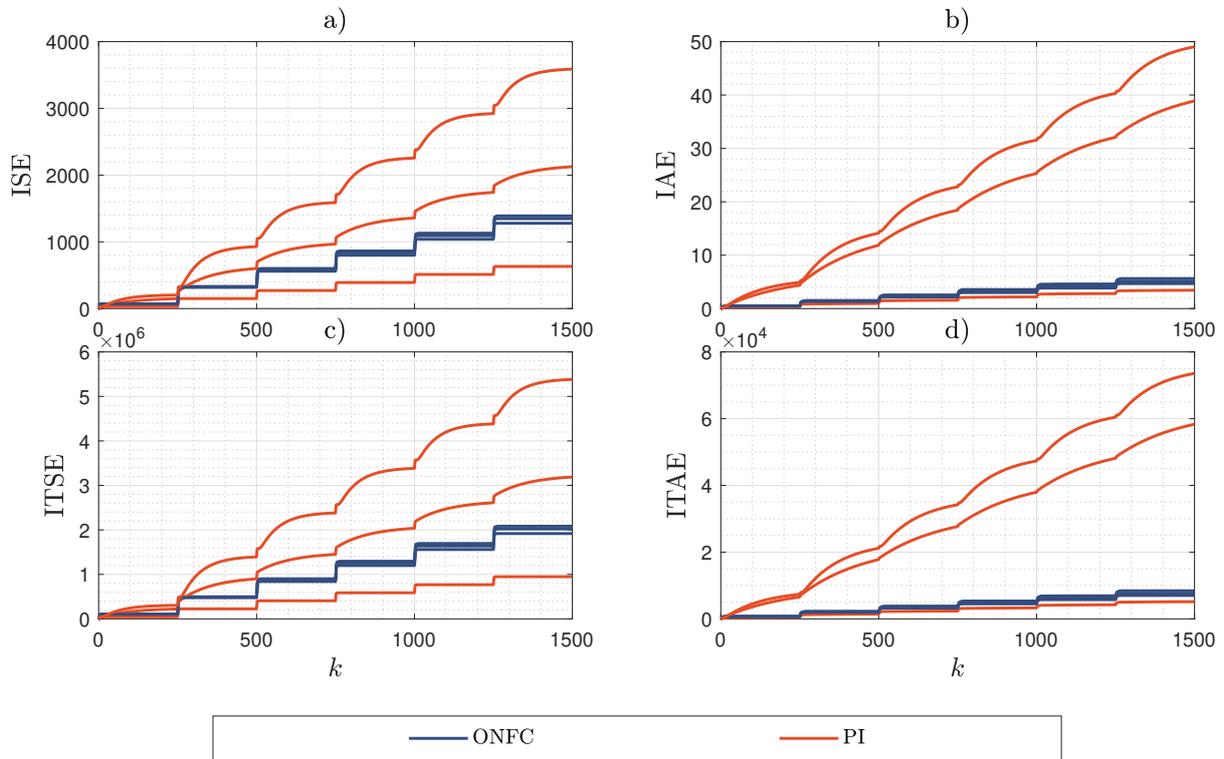


Figura 5.4: Comparação entre os índices de desempenho obtidos pelo controlador ONFC e pelo controlador PI para três valores possíveis de parâmetros do processo. a) Índice ISE. b) Índice IAE. c) Índice ITSE. c) Índice ITAE.

Tabela 5.1: Índice de desempenho dos controladores ONFC e PI em cada condição paramétrica avaliada no exemplo da Seção 5.2.

Condição	Controlador	ISE	IAE	ITSE	ITAE
$\delta(k) = -1$	ONFC	$1,3 \cdot 10^3$	4,7	$1,92 \cdot 10^6$	$7,0 \cdot 10^3$
	PI	$3,6 \cdot 10^3$	49,03	$5,4 \cdot 10^6$	$73,54 \cdot 10^3$
$\delta(k) = 0$	ONFC	$1,4 \cdot 10^3$	5,108	$2,02 \cdot 10^6$	$7,7 \cdot 10^3$
	PI	$0,63 \cdot 10^3$	3,436	$9,48 \cdot 10^6$	$5,15 \cdot 10^3$
$\delta(k) = 1$	ONFC	$1,28 \cdot 10^3$	4,6778	$1,92 \cdot 10^6$	$7,02 \cdot 10^3$
	PI	$3,58 \cdot 10^3$	4,027	$5,38 \cdot 10^6$	$73,54 \cdot 10^3$

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & -0,6 \\ 1 & 1,4 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 2 - 3u_n^2 \\ 2 - 9u_n^2 \end{bmatrix} u(k) + \Delta B(k)u(k) \\
 y(k) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(k) + v(k)
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

em que  $\sigma_v^2 = 0,01$  é a variância do ruído de medição de distribuição normal e média nula

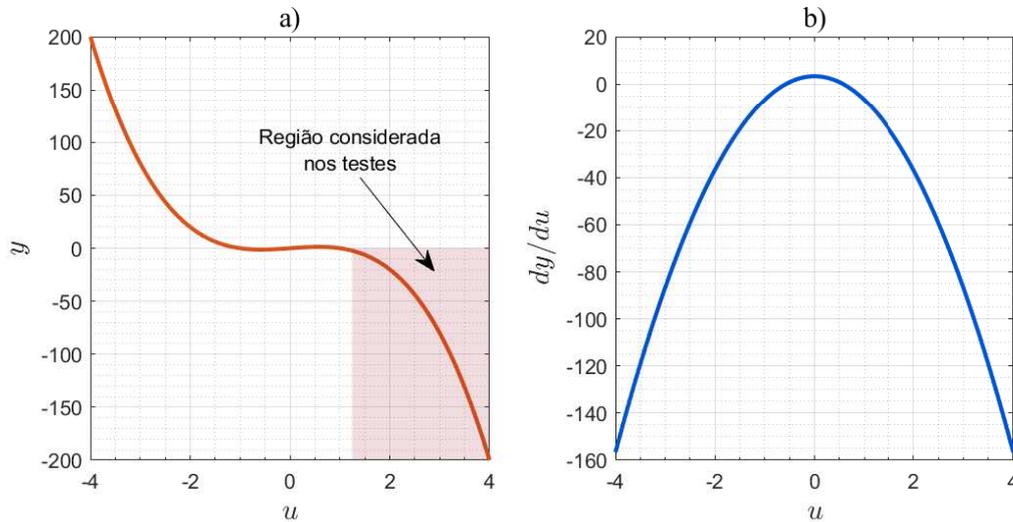


Figura 5.5: Curva estática do sistema (5.3) em *a*) e ganho estático do sistema em função da entrada em *b*).

e  $\Delta B(k)$ , representa os termos de ordem superior da aproximação de Taylor que foram negligenciados na linearização. Utilizando essa aproximação linear em torno do ponto  $y_n = -4,0$  e  $u_n = 1,37$ , foram projetados os controladores PID e ONFC e aplicados na realimentação do sistema 5.3. No caso do PID, a equação discreta utilizada foi:

$$u(k) = u(k-1) + (K_p + K_i + K_d)e(k) - (K_p + 2K_d)e(k-1) + K_d e(k-2); \quad (5.6)$$

com  $K_p = -0,00522$ ,  $K_i = -0,00522$ ,  $K_d = -0,00130$ . Para o ONFC utilizou-se  $\alpha = 0,04$ ,  $E_M = 40$ ,  $v_0 = 0,5$ . O sinal de referência foi variado em diferentes níveis e os resultados são mostrados no gráfico da Figura 5.6. É possível notar que o ONFC é capaz de se adaptar à variação do ganho da planta (mantido o mesmo sinal desse ganho) e manter o desempenho definido pelo modelo referência com  $\lambda_{A_m} = 0,2$ . Contudo, uma leve variação no desempenho da adaptação é sofrida dado que a taxa  $\gamma$  é projetada utilizando o valor máximo do produto das matrizes  $C$  e  $B$  considerado, conforme a Equação (4.11). Vale destacar que um pior desempenho na adaptação, não implica necessariamente em uma piora no desempenho final do sistema controlado, mas sim que esse será obtido após a convergência dos parâmetros. A evolução do ganho proporcional equivalente do ONFC (relacionado à diferença dos pesos) é mostrado na Figura 5.7.b. É possível notar que o ONFC reduz o ganho proporcional equivalente após o aumento do ganho da planta. O ganho  $K_p$  do controlador PID é mostrado apenas a título de ilustração. Como não há analogia direta entre a versão do ONFC utilizada e o controlador PID (e sim com um PI), os respectivos ganhos proporcional não necessariamente deveriam se aproximar mutuamente.

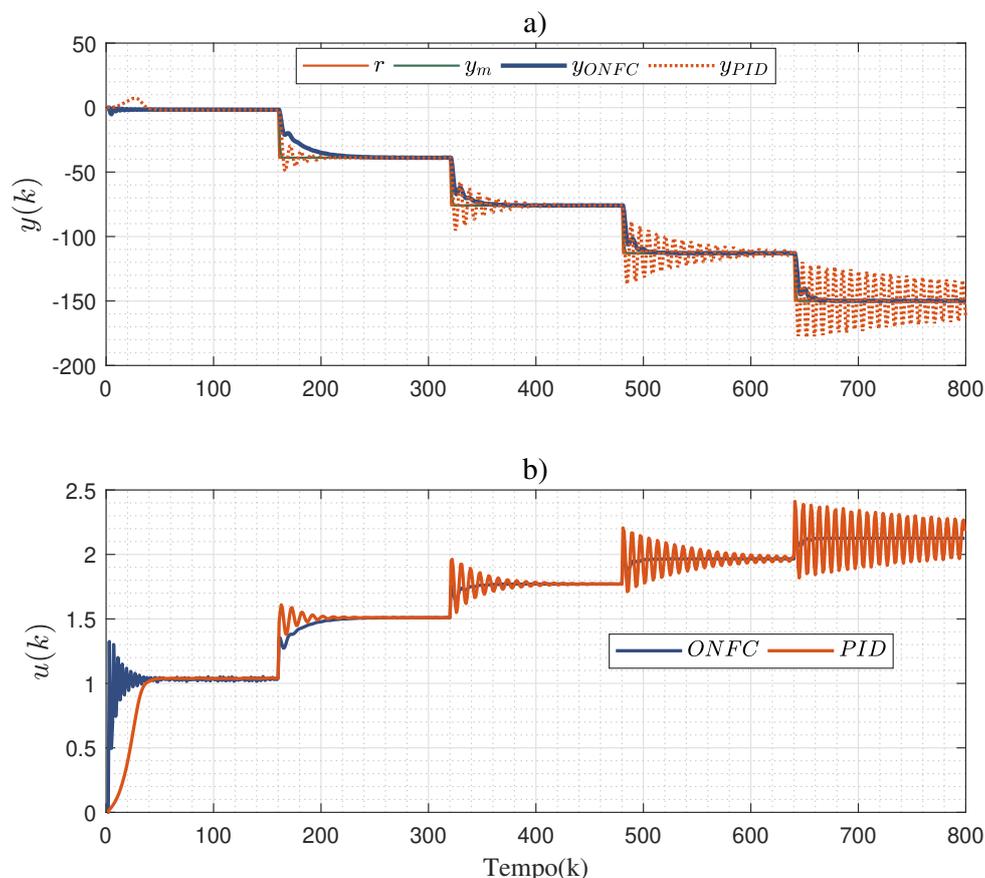


Figura 5.6: Comparação de desempenho de controle de planta não linear utilizando ONFC e PID. *a)* Saída do sistema e valores de referência para cada simulação. *b)* Ação de controle. Para valores distantes do ponto de linearização o PID perde sintonia, enquanto o ONFC é capaz de se ajustar.

Na próxima seção será comparada a capacidade de adaptação do ONFC em relação a outros controladores adaptativos concorrentes, considerando ainda a robustez a ruídos de medição.

## 5.4 Robustez a Ruídos de Medição

A robustez a ruídos de medição é uma característica essencial em controladores adaptativos. Como dito anteriormente, ruídos e perturbações podem levar os parâmetros estimados a um crescimento indesejado e, possivelmente, à instabilidade. Diversas metodologias de controle adaptativos adotam alguma modificação na lei de adaptação para prover robustez aos controladores.

Para avaliar a robustez do controle adaptativo com a modificação proposta foi realizado um teste comparativo entre o ONFC, conforme a descrição na Seção 5.1, a versão do  $ONFC_{dw}$  de (Gomes et al., 2019), que reúne as principais contribuições feitas ao ONFC até então e o MRAC com modificação robusta tipo  $\sigma$ -modification seguindo o procedimento apresentado

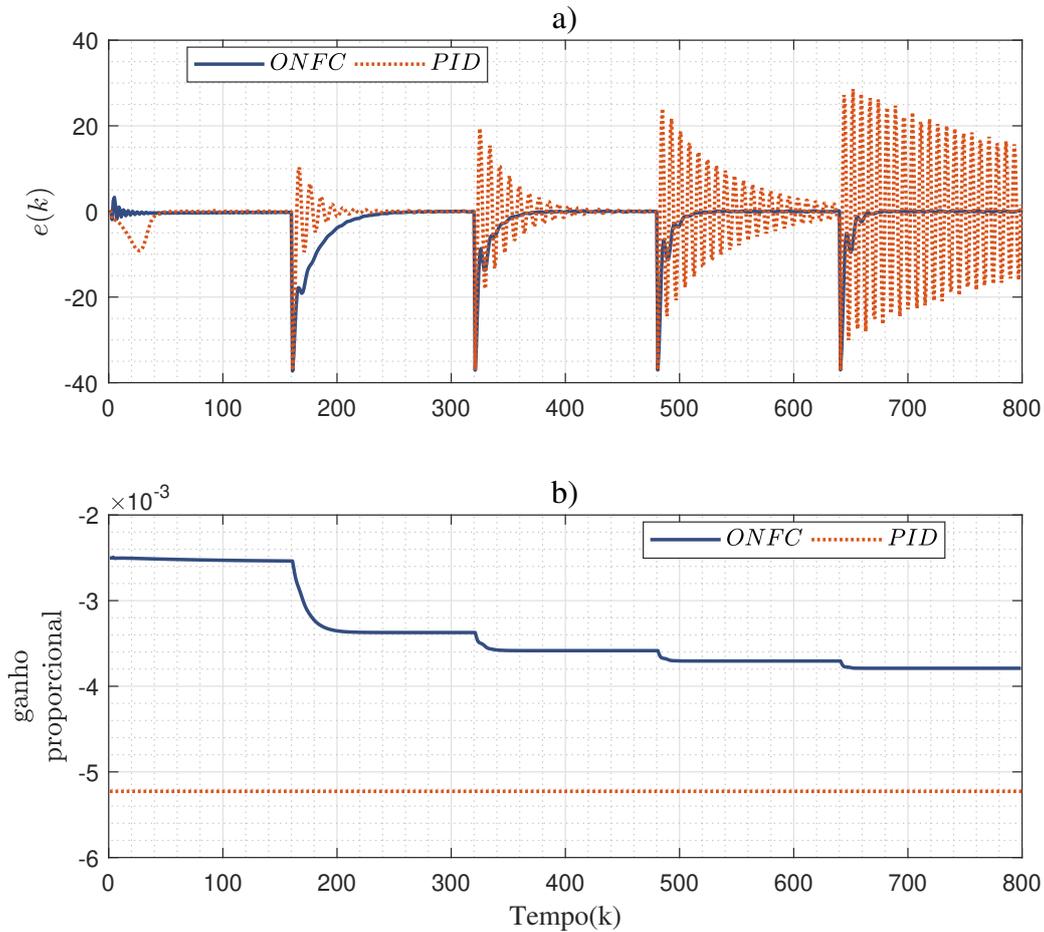


Figura 5.7: Elementos da ação de controle do ONFC e do PID. a) Erro de referência e b) ganho proporcional dos controladores.

em (Tambara et al., 2017), possivelmente a configuração mais utilizada em controle adaptativo.

O processo considerado aqui é dado por:

$$\begin{aligned}
 x(k+1) &= \begin{bmatrix} 0,95 & 0,1 \\ 0,0 & ,30 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0,9 \\ 0,28 \end{bmatrix} u(k) \\
 y(k) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x(k) + v(k)
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

em que o ruído de medição  $v(k)$  tem variância  $\sigma_v^2 = 0,05$ .

Os três controladores foram projetados para esse problema seguindo as metodologias indicadas. O controlador ONFC foi projetado seguindo os parâmetros da Tabela 5.2. O ONFC<sub>dw</sub> descrito em (Gomes et al., 2019) tem o procedimento de execução semelhante ao apresentado no Algoritmo 1. As leis de adaptação são dadas por:

Tabela 5.2: Parâmetros do Controlador ONFC Proposto.

Descrição	Símbolo	Valor
Ganho de adaptação	$\alpha$	0,5
Erro Máximo	$E_M$	2
Raio Zona-Morta	$v_0$	0,8
Cond. Iniciais dos Parâmetros	$w_1(0), w_2(0)$	(0,0)

$$\begin{aligned} w_1(k) &= w_1(k-1) - (1-\sigma)\gamma e_r(k)\mu_1(k) + \sigma\gamma[w_2(k-1) - w_1(k-1)]; \\ w_2(k) &= w_2(k-1) - (1-\sigma)\gamma e_r(k)\mu_2(k) - \sigma\gamma[w_2(k-1) - w_1(k-1)]; \end{aligned} \quad (5.8)$$

em que  $\sigma$  é o parâmetro que penaliza o crescimento dos pesos e fornece robustez aos controlador. A taxa de adaptação  $\gamma$  é dinâmica e definida por:

$$\gamma = \frac{\alpha_0}{\mu_1^2(k) + \mu_2^2(k)} \quad (5.9)$$

Os parâmetros do ONFC<sub>dw</sub> foram definidos de modo semelhante ao do ONFC proposto a fim de analisar apenas a diferença de desempenho causada pela modificação para robustez. Deste modo, o parâmetro  $\alpha_0$  é definido por:

$$\alpha_0 = \frac{\alpha}{CB} \quad (5.10)$$

em que o valor de  $\alpha$  adotado em todas as simulações é o mesmo que o utilizado no ONFC proposto.

No caso do MRAC é seguido o procedimento apresentado na Seção A.3 do Apêndice. Os parâmetros adotados para esse controlador são dados na Tabela 5.3.

Os três controladores foram projetados para esse problema seguindo as metodologias indicadas. As equações dos três métodos adotados nesta seção são resumidos a Tabela 5.4.

Tabela 5.3: Parâmetros do Controlador MRAC.

Descrição	Símbolo	Valor
Ganho de adaptação	$\gamma$	0,15
Parâmetro do Filtro	F	0,513
Parâmetro do Filtro	q	0,487
Parâmetro da Modificação $\sigma$	$\sigma$	0,05
Intervalo de amostragem	T	0,1 s
Cond. Iniciais dos Parâmetros	$\theta(0)$	0
Cond. Iniciais dos estados do filtro	$\omega_1(0), \omega_2(0)$	(0,0)

Tabela 5.4: Resumo comparativo das equações de adaptação dos métodos com modificação robusta.

Controlador	Equação de adaptação	Parâmetros
ONFC	$w_1(k) = w_1(k-1) - \gamma e_y(k) \mu_1(k-1);$ $w_2(k) = w_2(k-1) - \gamma e_y(k) \mu_2(k-1);$ $\gamma = \frac{\alpha/\Lambda}{\mu_1^2(k) + \mu_2^2(k)}$	$\alpha, \nu_0$
ONFC <sub>dw</sub>	$w_1(k) = w_1(k-1) - \gamma e_r(k) \mu_1(k) + \sigma[w_2(k-1) - w_1(k-1)];$ $w_2(k) = w_2(k-1) - \gamma e_r(k) \mu_2(k) - \sigma[w_2(k-1) - w_1(k-1)];$ $\gamma = \frac{\alpha_0}{\mu_1^2(k) + \mu_2^2(k)}$	$\alpha_0, \sigma$
MRAC	$\theta(k+1) = (I - T\sigma\Gamma)\theta(k) - T \frac{\Gamma\zeta(k)\varepsilon_1(k)\text{sign}(\rho^*)}{m^2(k)}$ $\zeta(k) = W_m(z)\omega(k);$ $\varepsilon_1(k) = e_y(k) + \theta^T(k)\zeta(k) - W_m(z)[\theta^T(k)\omega(k)];$ $m^2(k) = 1 + \zeta^T(k)\Gamma\zeta(k);$ $\omega_1(k+1) = F\omega_1(k) + qu(k);$ $\omega_2(k+1) = F\omega_2(k) + qy(k);$	$\Gamma, \sigma, F, q$

O modelo referência adotado para o ONFC proposto e para o MRAC é:

$$x_m(k+1) = \begin{bmatrix} 0,6 & 0 \\ 0 & 0,6 \end{bmatrix} x_m(k) + \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0 \end{bmatrix} r(k) \quad (5.11)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_m(k)$$

Para o ONFC<sub>dw</sub>, não é possível escolher um valor para  $A_m$ , conforme é proposto em Gomes et al. (2019) ou, equivalentemente, pode-se impor  $A_m = 0$ . Segundo os autores, o valor do parâmetro  $\sigma$  deve ser proporcional à variância do erro, o que inclui a variância do sinal de referência e das perturbações. Para problemas em que o sinal de referência sofre poucas variações, o valor da amplitude máxima do ruído do processo é uma boa indicação de projeto

para sintonia de  $\sigma$ . O valor adotado foi  $\sigma = 0,05$  tanto para MRAC quanto para o ONFC<sub>dw</sub>.

O resultado do sistema controlado para cada um dos três controladores é mostrado na Figura 5.8. Na Figura 5.9 são apresentadas os critérios de desempenho dos controladores avaliados.

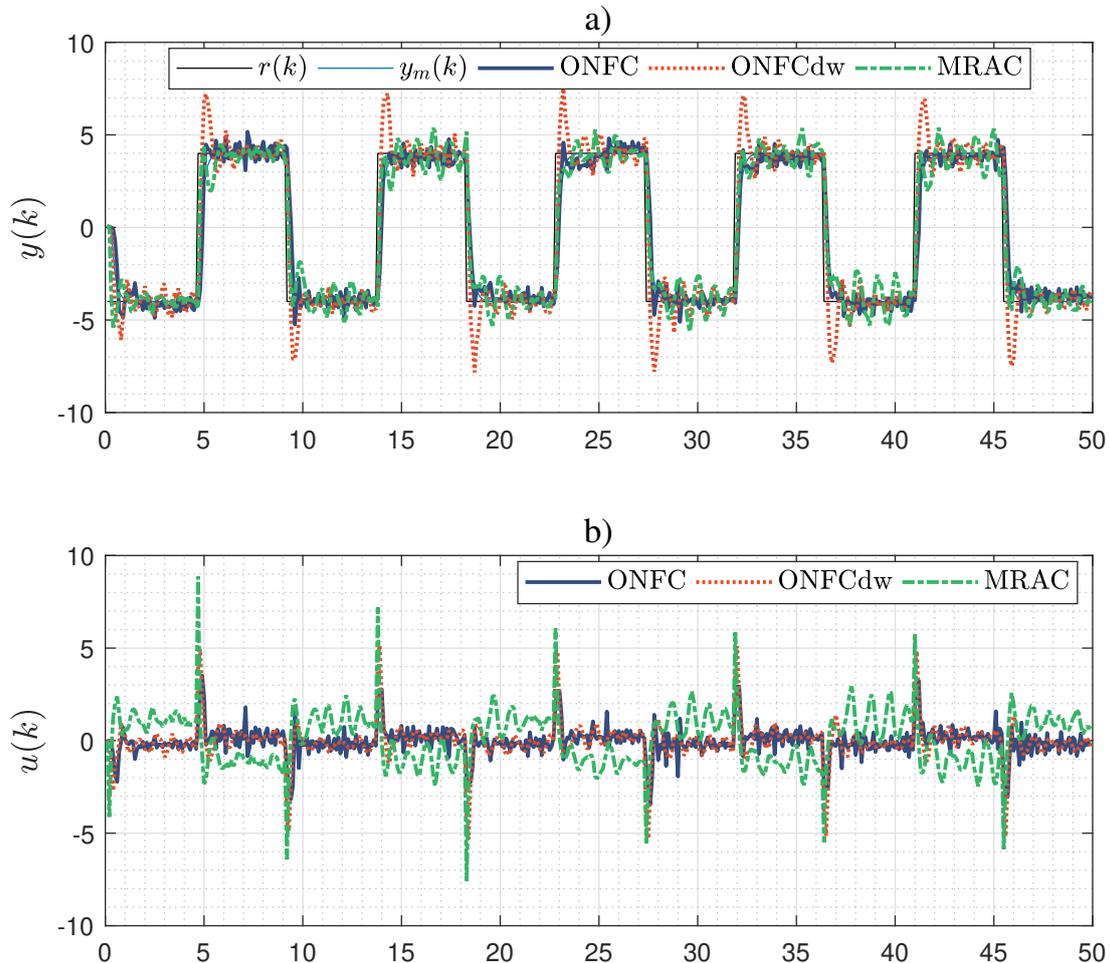


Figura 5.8: Comparação do desempenho e robustez do controle ONFC proposto em relação aos controladores ONFC<sub>dw</sub> e MRAC. *a)* Saída do sistema controlado. *b)* Ação de controle.

Pode-se observar que o MRAC tem um desempenho equivalente ao ONFC proposto e ambos alcançaram índices menores que o ONFC<sub>dw</sub>. Na Figura 5.10 apresenta-se a evolução da norma euclidiana dos parâmetros de cada controlador. Os valores e o significado desses parâmetros não tem, necessariamente, equivalência direta entre si. A análise da norma euclidiana dos parâmetros é útil apenas para avaliar a convergência e limitação de cada um. Como observado, os parâmetros do ONFC<sub>dw</sub> são mais sensíveis à variação do sinal de referência. Isso se deve ao fato de que a adaptação dos parâmetros e a ação de controle são dadas pelo mesmo sinal de erro e a estabilização dos parâmetros só é possível na ausência de variação da referência.

A sintonia do parâmetro  $\sigma$  é dependente da variância dos sinais externos ao processo e afeta o desempenho dos controladores ONFC<sub>dw</sub> e MRAC, uma vez que seu valor pode atenuar

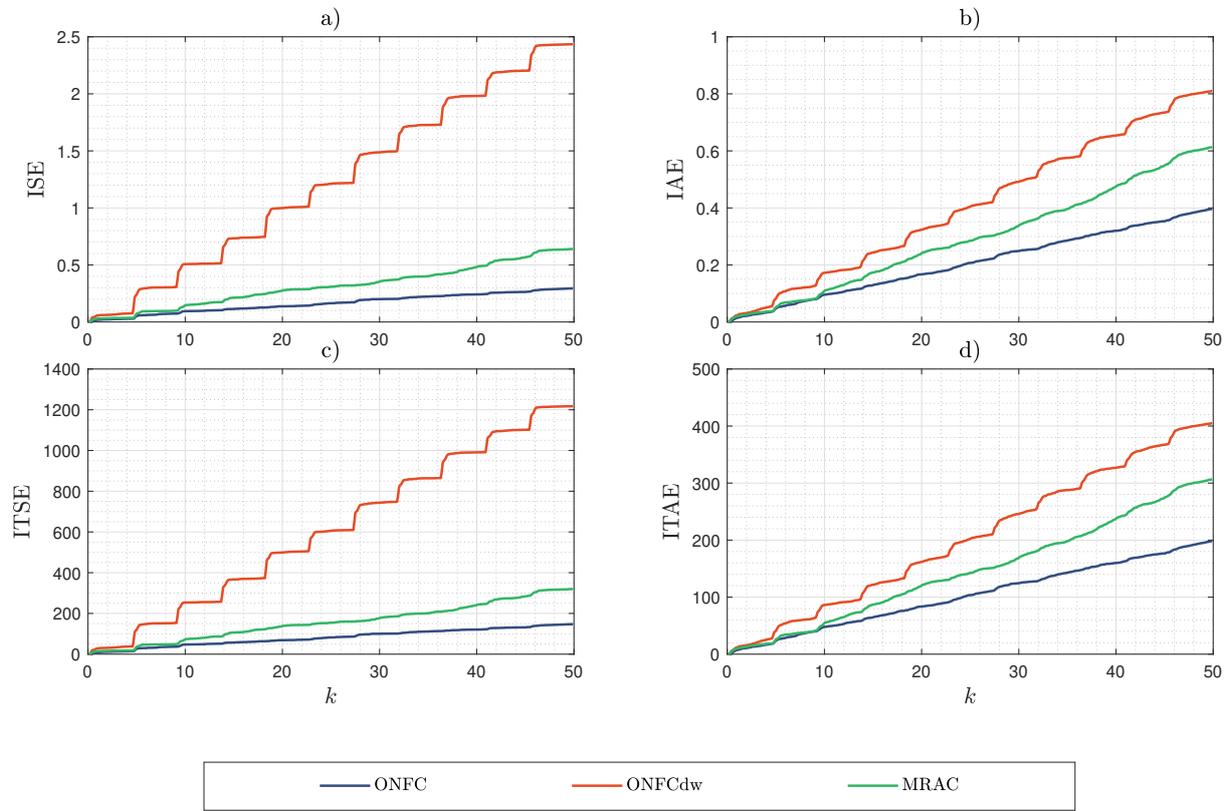


Figura 5.9: Comparação da convergência do ganho proporcional do ONFC com modificação-d e do ONFCdw para diferentes valores de  $\sigma$ .

inadequadamente o valor dos parâmetros de cada controlador. Para avaliar a sensibilidade desse ajuste, o teste anterior foi repetido variando-se apenas o valor de  $\sigma$  para o ONFC<sub>dw</sub> e o MRAC. O intuito é avaliar a convergência dos sinais e o desempenho obtido por esses controladores para cada valor de  $\sigma$ . Para comparação, o critério IAE é utilizado como métrica de desempenho e foi calculada em cada teste também para o ONFC proposto. A Figura 5.11 mostra o resultado dessa avaliação. É possível ver que para uma faixa de valores de  $\sigma$ , o MRAC obtém desempenho superior ao ONFC proposto, mas uma escolha de  $\sigma$  demasiadamente grande piora o seu desempenho e pode inclusive levá-lo à instabilidade. No caso do ONFC<sub>dw</sub> nenhum valor de  $\sigma$  gerou desempenho superior ao esquema proposto no teste realizado. Além disso, a faixa de valores que permitem a estabilidade é desconhecida, dependente da variabilidade do sinal de referência e também das perturbações e usualmente ajustada a partir de métodos heurísticos. Isso mostra que adotando-se o mesmo ganho de adaptação, a estratégia de robustez proposta neste trabalho supera a da versão anterior do ONFC em desempenho, qualquer que seja o valor de  $\sigma$  adotado. A modificação proposta para a robustez do ONFC independe desse parâmetro, o que torna menos crítica a sintonia da lei de adaptação robusta. Essa vantagem do ONFC

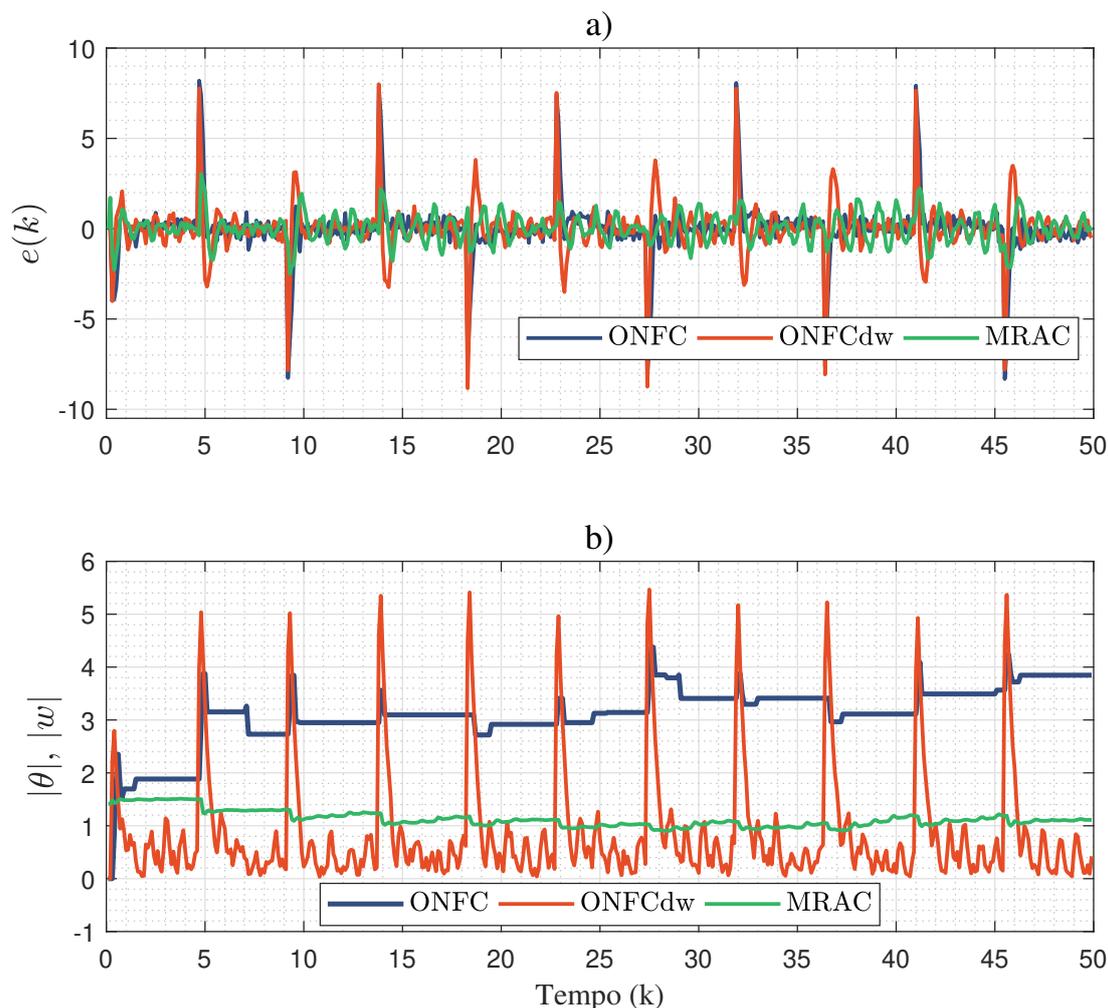


Figura 5.10: Erro de saída e norma dos parâmetros dos controladores adaptativos ONFC proposto, ONFC<sub>dw</sub> e o MRAC. Em *a*) Erro de saída  $e_y(k)$  para cada controlador. Em *b*) Norma euclidiana dos parâmetros estimados para cada controlador.

proposto também é observada mesmo quando comparado ao MRAC.

## 5.5 Conclusão

Neste capítulo, é apresentado um procedimento de projeto do ONFC com a alteração proposta, compilando os resultados dos capítulos anteriores e estabelecendo um formalismo na escolha dos parâmetros de projeto.

Avaliou-se o desempenho do ONFC comparativamente a outros controladores a fim de evidenciar seu potencial de aplicação. Em relação ao controlador PI/PID, foi mostrado que para problemas com grande incerteza nos parâmetros da planta, o ONFC, posto que é adaptativo, tem algumas vantagens em relação à abordagem do PID com sintonia robusta. Também se

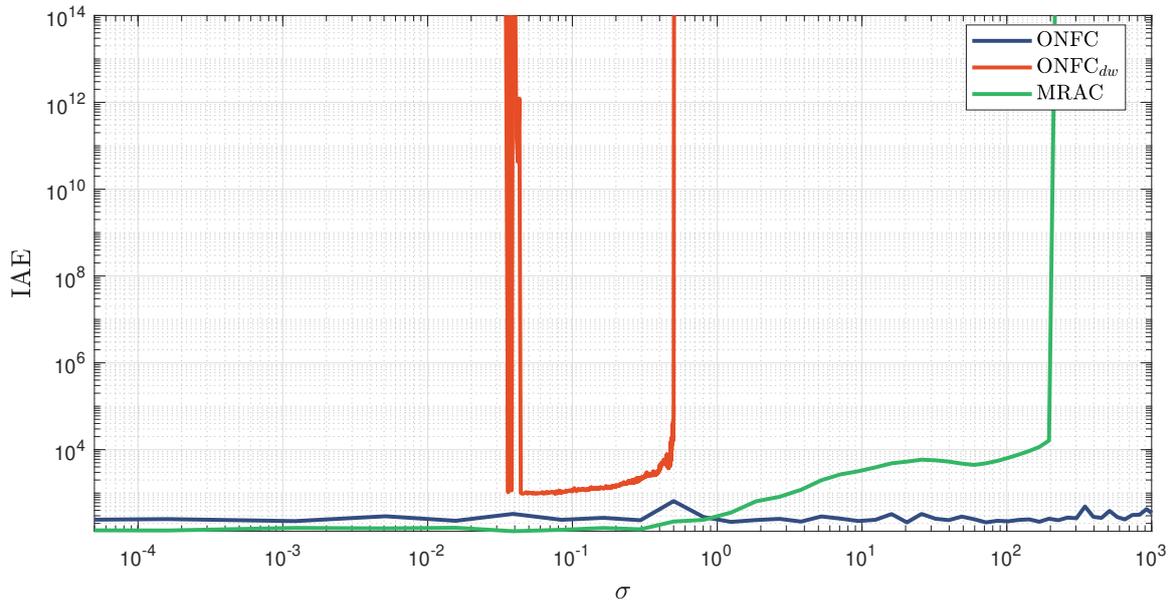


Figura 5.11: Comparação da norma IAE em relação ao parâmetros  $\sigma$  para os controladores  $\text{ONFC}_{DW}$  e MRAC. A mesma norma é calculada para o ONFC proposto para fins de comparação.

pode apresentar a aplicação do ONFC em alguns tipos de plantas não lineares. O projeto pode ser desenvolvido a partir do modelo linearizado, sendo necessário estimar o valor máximo do produto  $CB$ . Quando o ganho da planta sofre alteração, o desempenho do sistema em malha fechada é recuperado após a convergência dos parâmetros. Tal resultado indica ser promissora a investigação de estabilidade do ONFC para outros tipos de não linearidades.

Ainda comparou-se o ONFC proposto com outros dois controladores adaptativos: a última versão do ONFC com as modificações de robustez e taxa de adaptação dinâmica e o controlador MRAC com modificação  $\sigma$ , o mais usual dos controladores adaptativos. O desempenho do controlador proposto foi semelhante ao MRAC nos exemplos apresentados, tendo como diferencial algumas vantagens na etapa de projeto e de implementação. Resta evidente que a lei de adaptação proposta neste trabalho garante a robustez em aplicações práticas e tem como vantagem uma via formal de definição do principal parâmetro para robustez, muito embora a escolha desse parâmetro não é crítica. Por outro lado, nas modificações robustas encontradas na literatura, não há formalismo para definição do valor de  $\sigma$  e como mostrado, uma escolha ruim desse valor pode implicar em perda de desempenho ou mesmo de estabilidade.

## Conclusão

---

*“Vivendo, se aprende; mas o que se aprende, mais, é a fazer outras maiores perguntas.”*

João Guimarães Rosa

As técnicas de controle adaptativo se prestam a resolver problemas com desafios patentes à prática de Engenharia de Controle. Não linearidades, variação ou incerteza paramétrica estão entre os desafios que consagraram a aplicação de controladores adaptativos. O problema chave em controle adaptativo é a definição de lei de ajuste dos parâmetros do controlador com garantias de estabilidade, mesmo sob não idealidades do processo. A interdependência entre os parâmetros do controlador e os estados da planta resulta em um sistema não linear variante no tempo. Tipicamente, a análise de estabilidade para esses problemas é feita pelo método de Lyapunov. As premissa da planta e as condições de estabilidade obtidas são, por vezes, tão restritivas ou complexas que o controle adaptativo é preterido por abordagens clássicas de controle, mesmo sob o custo de um pior desempenho. A pouca popularidade nas aplicações industriais relegou o uso dos controladores adaptativos a problemas específicos.

Nesse sentido, o ONFC é uma interessante alternativa. Trata-se de um controlador nebuloso adaptativo desenvolvido para processos com uma única entrada e única saída e cuja eficiência é atestada por diversas aplicações industriais bem sucedidas. Sua principal vantagem está na sua simplicidade de implementação e no baixo custo computacional para operação. Entretanto, a ausência de prova de estabilidade não permitia determinar em quais problemas e de que modo ele deveria ser adequadamente aplicado.

Neste trabalho é apresentada uma análise de estabilidade do controlador ONFC por meio do método de Lyapunov para o caso discreto. O objetivo foi avaliar as condições que garantem estabilidade robusta, fornecer diretrizes claras de projeto e os limites para sintonia dos parâmetros. Adotou-se o critério de preservar a simplicidade estrutural avaliando em quais contextos seria vantajosa sua aplicação. Uma versão generalizada que permite a inserção do desempenho desejado, e uma modificação na lei de adaptação são propostas que simplificaram a etapa de projeto e mantiveram o baixo custo computacional.

---

Com o intuito de contextualizar o ONFC na literatura de controle, no Capítulo 2 é apresentada uma breve revisão a respeito da área de controle adaptativo e de controle fuzzy, trazendo os conceitos básicos, as estruturas e métodos mais usuais dessas áreas. Sistemas de controle adaptativo procuram tratar do problema de identificação de uma planta (parcialmente) desconhecida e do controle realimentado dessa mesma planta. Há estratégias que resolvem simultaneamente esses dois problemas (adaptação direta), enquanto outras tratam o problema de identificação e controle separadamente (adaptação indireta). Em ambos os casos isso é feito recursivamente adaptando os parâmetros do controlador sempre que algum critério não é atendido, ou buscando minimizar o erro de saída. Devido às suas características de aproximadores universais, sistemas fuzzy podem ser utilizados para desempenhar algum papel em sistemas de controle adaptativo. Controladores neuro-fuzzy adaptativos são exemplos destas estruturas que, construídas a partir de elementos simples, podem constituir-se como um modelo global complexo. Por outro lado, o ONFC apresenta uma simplicidade em sua estrutura, pois a lei de adaptação fuzzyfica o domínio do sinal de erro, ao invés de fuzzyficar o domínio dos sinais de entrada/saída. O controlador ONFC original é revisitado e é apresentada uma versão estendida para sistemas lineares de tempo discreto SISO. Esta versão inclui um modelo de referência que serve para a especificação da dinâmica de malha fechada desejada. Tal como considerado neste trabalho, ele pode ser visto como um controlador neurofuzzy adaptativo por modelo referência com adaptação direta, baseado em um sistema nebuloso tipo Takagi-Sugeno de ordem zero.

No Capítulo 3 são apresentados os conceitos e técnicas comumente utilizados na análise de estabilidade do ONFC para o caso discreto considerando condições idealizadas. O objetivo foi mostrar que, sob condições específicas, o controlador é capaz de conduzir assintoticamente para zero o erro do sistema em relação ao modelo referência. Foi estabelecida uma relação entre a taxa de adaptação e os parâmetros da planta e definido o limite do ganho de adaptação a partir de um problema LMI. Também foi proposto um mecanismo de adaptação dinâmica do ONFC obtido por meio do método direto de Lyapunov com garantia de estabilidade. Simulações mostraram que essa nova lei de adaptação aumenta a velocidade de convergência do erro para zero. Deve-se notar que os valores finais dos parâmetros do controlador não são definidos de maneira única, sendo possivelmente dependentes das condições iniciais. Mesmo quando testado em plantas instáveis, o ONFC apresenta bom desempenho. Entretanto, nesses casos, poderão ser necessárias etapas de pré-sintonia a fim de evitar divergências excessivas do erro no início da adaptação levando à instabilidade. A análise realizada não garante a convergência desses parâmetros para um valor específico. Para tanto, é necessária a premissa adicional de que o sistema tenha persistência de excitação no sinal de referência. A não convergência, contudo, não é crítica, uma vez que, o objetivo do controle é obter erro de saída nulo. Como foi discutido, devido à integração envolvida na lei de adaptação dos parâmetros do controlador, a presença

de ruído pode levar esses parâmetros à deriva. Isso significa que  $w_1$  e  $w_2$  podem aumentar indefinidamente, instabilizando o sistema. É necessário, portanto, analisar a robustez das leis de adaptação utilizadas quanto à presença de perturbações externas. Este problema foi abordado no Capítulo 4 e apresentada a prova de estabilidade do ONFC modificado aplicado a sistemas lineares com incerteza paramétrica e presença de perturbações. A incerteza aqui analisada é do tipo politópica e as perturbações são pressupostas aleatórias e limitadas. Além disso, o sistema avaliado é do tipo estabilizável por saída, uma premissa menos restrita que a condição de *matching*. Tais condições representam uma gama maior de problemas comuns no contexto industrial. Novamente os limites de projeto dos parâmetros são determinados por um problema LMI. Nos experimentos numéricos foram avaliados o desempenho do método em plantas sem a condição de *matching*, com e sem variação paramétrica. A região de factibilidade da LMI para um dado exemplo foi apresentada considerando as possíveis condições de aproximação do modelo em malha fechada ao modelo referência. Foi evidenciado o efeito na dinâmica do erro quando a planta não atende a condição de *matching* e demonstrado que tanto o erro quanto os pesos do controlador convergem para regiões limitadas do espaço de estados. A definição do valor de  $\alpha$  se converte em uma escolha entre uma mais rápida convergência ou uma maior região de atração do erro dos estados e parâmetros. É possível especificar um limite seguro da taxa de adaptação a partir do conhecimento dos limites máximos de alguns parâmetros da planta. Os resultados permitem estabelecer condições seguras de projeto e compreender os limites de aplicação do ONFC.

No Capítulo 5, os resultados obtidos são resumidos em um procedimento de projeto, listando os passos para devida implementação do ONFC. Para averiguar sua eficiência, o controlador é posto em comparação a outros candidatos na solução dos mesmos problemas. São avaliados os controladores PI/PID, o MRAC e  $\text{ONFC}_{dw}$  em processos não lineares, variantes no tempo ou com incertezas nos parâmetros. A comparação com o PID segue o já observado em outros controladores adaptativos: desempenho equivalente em controle de plantas com baixa incerteza e parâmetros fixos e superior para sistemas não lineares ou com elevadas variações paramétricas. Nos exemplos apresentados fica evidente que a técnica proposta apresenta desempenho semelhante à técnica MRAC com modificação  $\sigma$ , a mais utilizada, e tem como grande vantagem a simplicidade de projeto e implementação. Em relação ao  $\text{ONFC}_{dw}$ , evita a intrincada etapa de sintonia do parâmetro  $\sigma$ . A modificação apresentada neste trabalho, qual seja, o uso de variáveis em atraso na adaptação dos parâmetros associada à técnica de zona morta, exibiu garantia de limitação dos pesos do controlador, mesmo na presença de ruído. Além disso, se mostrou superior em desempenho nos testes avaliados, uma vez que a modificação  $\sigma$  pode reduzir demasiadamente a ação proporcional na ausência de excitação do sinal. Esses resultados elucidam as vantagens e possibilidades de aplicação do algoritmo proposto.

O ONFC (e qualquer outro controlador adaptativo), naturalmente, não pode ser visto como uma ferramenta universal. Seu uso é aconselhado para processos de ordem reduzida (especialmente sistemas superamortecidos) e cuja variação paramétrica seja significativamente mais lenta que a dinâmica do processo. Ainda deve ser considerado sua utilização nos casos em que abordagens clássicas e robustas pareçam insuficientes para lidar com as incertezas. Respeitadas essas indicações, a escolha do ONFC poderá poupar uma identificação exaustiva e complexa do processo e substituir ferramentas de controle avançadas e menos acessíveis.

## 6.1 Principais Contribuições

As principais contribuições obtidas neste trabalho são listadas a seguir.

- Uma versão melhorada do controlador ONFC é proposta. Este controlador passou a ser dotado de um mecanismo de especificação explícita da dinâmica em malha fechada desejada por meio de um modelo de referência.
- Foi desenvolvida uma nova lei de adaptação baseada em um atraso da função de pertinência e na técnica de zona morta que garante estabilidade robusta do controlador e limitação dos sinais envolvidos, sem prejudicar a simplicidade de implementação e o baixo custo computacional. Além de aumentar a robustez, a modificação proposta torna mais simples a etapa projeto.
- Ainda na lei de adaptação foi inserida uma taxa de adaptação dinâmica dependente do erro, que torna menos conservador o limite do ganho de adaptação  $\alpha$  (Gomes et al., 2019). Essa alteração normaliza o sinal de erro na lei de adaptação e faz com que a taxa de adaptação seja reduzida quando o erro é muito grande e aumentada para valores de erro próximos de zero. Também foi estabelecida a relação da taxa de adaptação com os parâmetros da planta. O ganho de adaptação pode ser determinado dentro de um limite robusto considerando a incerteza sobre os parâmetros da planta.
- Há uma prova formal de estabilidade robusta do sistema controlado pelo ONFC, que depende da delimitação da diferença entre a dinâmica real do sistema e a dinâmica de referência do modelo. A condição de estabilidade é declarada em termos de Desigualdades de Matriciais Lineares (LMIs), permitindo a escolha dos parâmetros de projeto que garantem estabilidade robusta para as incertezas do modelo de sistema delimitado por um politopo
- É desenvolvida uma metodologia formal de projeto deste controlador. Ela passa por apresentar as premissas da planta a ser controlada e as margens de escolha de parâmetros

pelo projetista. O procedimento de projeto de controle é bastante intuitivo, sendo executado em um compromisso entre a taxa de adaptação e o tamanho da região de convergência limitada estável.

As vantagens mais importantes do controlador ONFC são a simplicidade de implementação e o baixo custo computacional. Essas vantagens ainda são válidas para o controlador ONFC com a modificação proposta. Além disso, essa modificação simplifica a etapa de projeto e traz ganhos substanciais ao desempenho do controlador em relação às outras versões do ONFC. Do ponto de vista computacional, acrescenta apenas uma memória na variável do erro, além do armazenamento e atualização das variáveis do modelo de referência.

A técnica desenvolvida apresenta robustez a ruídos de medição, ruídos de processo e incertezas paramétricas. A condição de matching não é exigida, o que contempla uma gama maior de problemas, incluindo alguns tipos de não linearidades. Mesmo no caso de haver poucas informações disponíveis sobre o modelo da planta, o controlador ONFC proposto pode ser colocado em operação facilmente, pois os parâmetros de projeto possuem interpretação simples e não requerem ajustes finos para implantação em planta real.

## 6.2 Propostas de Continuidade

Os resultados obtidos servem de ensejo para interessantes extensões. A partir sua estrutura original simples, pequenas modificações poderiam abrir um leque de novos resultados. Nesse sentido são propostos alguns temas de continuidade.

### Plantas com atraso puro de tempo

A construção de uma lei de adaptação capaz de estabilizar sistemas com grau relativo maior que um habilita a aplicação em plantas com atraso puro de tempo, por exemplo. Evidências numéricas indicam que adotar o grau relativo da planta como valor do atraso do regressor da função de pertinência na lei de adaptação é suficiente para estabilização de plantas com atraso. Uma análise de estabilidade definindo os limites da ganho de adaptação para esse caso, encontraria grande aplicabilidade em problemas industriais. Seria interessante, ainda, investigar o aumento do custo computacional para o uso de regressores com elevado atraso.

### Melhoria de Desempenho

Outra melhoria interessante é estabelecer o desempenho desejado da adaptação, isto é, a qualidade com que o sistema controlado se aproxima do modelo referência. Isso pode ser

feito diretamente através da escolha de funções de Lyapunov específicas. O desenvolvimento de algoritmos para busca ótima do parâmetro  $\alpha$  e da definição do melhor modelo referência possível para um problema pode resultar em um ganho significativo na performance do controlador.

Etapas de pré-sintonia podem evitar instabilidades no início da operação do controlador e melhorar o desempenho inicial, acelerando a convergência dos parâmetros para os valores adequados. Sugere-se elaborar procedimento para aquisição de informações a priori da planta e modos de inseri-las na etapa de projeto.

Ainda é possível importar outras soluções disponíveis na literatura de controle adaptativo. Entre elas está o uso de leis de adaptação com parcela integral. Deste modo a adaptação dos parâmetros do controlador não ocorreria apenas de modo proporcional às variáveis do processo mas com uma parcela integral dessas variáveis.

## Generalizações

Algumas generalizações naturais a se investigar dizem respeito ao uso do ONFC para o caso de múltiplas entradas e múltiplas saídas. Também é interessante a investigação para outros tipos de não linearidades que não podem ser cobertas pelos resultados deste trabalho, como histerese ou dinâmica caótica, por exemplo.

A utilização de mais de duas funções de pertinência para modelar a ação de controle parece ser promissora. Isso poderá melhorar o desempenho do controle sob variações paramétricas abruptas ou não linearidades de elevada ordem. Além disso, é possível implementar uma rede neuro-fuzzy com estrutura auto-organizável. A definição do número de regras e dos parâmetros das funções de pertinência podem ser determinados automaticamente e de modo recursivo.

## Testes em Plantas Reais

É interessante, a partir das premissas definidas neste trabalho, caracterizar os tipos de processos industriais mais comuns que são passíveis de serem controlados pelo ONFC. Na sequência, a implementação em plantas reais pode destacar limites e vantagens dessa técnica.

---

## Referências Bibliográficas

---

- Abdelazim, T. and Malik, O. (2005). Power system stabilizer based on model reference adaptive fuzzy control. *Electric Power Components and Systems*, 33(9).
- Ampsefidis, A. J., Bialasiewicz, J. T., and Wall, E. T. (1993). Lyapunov design of a new model reference adaptive control system using partial a priori information. *Kybernetika*, 29(4):337–348.
- Anderson, B. D. O. (1985). Adaptive systems, lack of persistency of excitation and bursting phenomena. *Automatica*, 21(3):247–258.
- Aseltine, J. A., Mancini, A. R., and Sarture, C. W. (1958). A survey of adaptive control systems. *IRE Transactions on Automatic Control*, 6(1):102–108.
- Åström, K. and Wittenmark, B. (1995). *Adaptive control*. Dover Publications.
- Åström, K. J. (1983). Theory and Applications of Adaptive Control – A Survey. *Automatica*, 19(5):471–486.
- Aström, K. J. and Kumar, P. R. (2014). Control: A Perspective. *Automaticaabnt*, 50(1):3–43.
- Åström, K. J. and Wittenmark, B. (1973). On self tuning regulators. *Automatica*, 9(2):185–199.
- Barkana, I. (2014). Simple adaptive control - A stable direct model reference adaptive control methodology - Brief survey. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 28(7-8):567–603.
- Bellman, R. and Kalaba, R. (1959). a Mathematical Theory of Adaptive Control Processes. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 45(8):1288–1290.
- Bierling, T. (2014). *Comparative Analysis of Adaptive Control Techniques for Improved Robust Performance*. PhD thesis.

- Bierling, T., Mühlegg, M., Holzapfel, F., and Maier, R. (2013). Reference model modification for robust performance conservation of model reference adaptive controllers. In *AIAA Guidance, Navigation, and Control (GNC) Conference*.
- Buckley, J. J. (1993). Sugeno type controllers are universal controllers. *Fuzzy Sets and Systems*, 53(3):299–303.
- Calcev, G. (1998). Some remarks on the stability of Mamdani fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 6(3):436–442.
- Cao, S. G., Rees, N. W., and Feng, G. (2001). Mamdani-type fuzzy controllers are universal fuzzy controllers. *Fuzzy Sets and Systems*, 123(3):359–367.
- Carvajal, J., Chen, G., and Ogmen, H. (2000). Fuzzy PID controller: Design, performance evaluation, and stability analysis. *Information sciences*, 123(3):249–270.
- Carvalho, M. A., Bomfim, C. H., and Souza, D. A. (2010). Desenvolvimento do controlador não linear on-line neuro fuzzy controler - onfc. pages 403–410. CBA2010.
- Carvalho, M. d. A. (2010). *Controlador Neurofuzzy Com Aprendizado on-Line: Teoria E Aplicação Na Indústria De Petróleo*. PhD thesis, UFMG.
- de Oliveira, L. C. (2017). *Contribuições ao controlador ONFC: inclusão de ação derivativa e metodologia de estimativa das taxas de aprendizagem*. Dissertação de curso de especialização em automação industrial, UFMG.
- dos Santos, S. R., Amaral, J. F. M. J. L. M., Amaral, J. F. M. J. L. M., Rocha dos Santos, S., Amaral, J. F. M. J. L. M., and Amaral, J. F. M. J. L. M. (2016). Adaptive intelligent systems applied to two-wheeled robot. In *2016 IEEE Conference on Evolving and Adaptive Intelligent Systems (EAIS)*, volume 2, pages 146–150.
- Dos Santos, S. R., Amaral, J. L., and Amaral, J. F. M. (2016). Adaptive intelligent systems applied to two-wheeled robot. In *Proceedings of the 2016 IEEE Conference on Evolving and Adaptive Intelligent Systems, EAIS 2016*, pages 146–150. Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc.
- Dydek, Z. T., Annaswamy, A. M., and Lavretsky, E. (2010). Adaptive Control and the NASA X-15-3 Flight Revisited: Lessons learned and Lyapunov-stability-based design. *IEEE Control Systems*, 30(3):32–48.
- Fatemi, M. and Haykin, S. (2014). Cognitive control: Theory and application. *IEEE Access*, 2:698–710.

- Feng, C.-b. (1981). Extension of V.M. Popov's Hyperstability Theory and its Application in Adaptive System Design. *IFAC Proceedings Volumes*, 14(2):177–182.
- Feng, G. (2006). A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14(5):676–697.
- Golea, N., Golea, A., and Benmahammed, K. (2002). Fuzzy model reference adaptive control. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 10(4):436–444.
- Gomes, H., Ferreira, C., Oliveira, E., Reis, A., and Caminhas, W. (2019). A Water Flow Control with OnLine Neurofuzzy Controller using a Dynamic Learning Rate. In *Anais do XV Encontro Nacional de Inteligência Artificial e Computacional - ENIAC*, pages 859–870, Porto Alegre, RS, Brasil. SBC.
- Gomide, F. and Gudwin, R. (1994). Modelagem, Controle, Sistemas e Lógica Fuzzy. *SBA Controle & Automação*, 4(3):97–115.
- Goodwin, G., Ramadge, P. J., and Caines, P. (1979). Discrete time multivariable adaptive control. *Decision and Control including the Symposium on Adaptive Processes, 1979 18th IEEE Conference on*, 18(June):335–340.
- Gouvêa, M. R. (2005). *Controle Neurofuzzy de Motor de Indução com Estimação de Parâmetros Fluxo de Estado*. PhD thesis, UFMG.
- Hao, S., Liu, T., and Gao, F. (2019). PI based indirect-type iterative learning control for batch processes with time-varying uncertainties: A 2D FM model based approach. *Journal of Process Control*, 78:57–67.
- Ioannou, P. and Baldi, S. (2010). Robust adaptive control. In *The Control Systems Handbook: Control System Advanced Methods, Second Edition*, pages 835–856.
- Ioannou, P. and Fidan, B. (2006). *Adaptive Control Tutorial*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA.
- Ioannou, P. and Kokotovic, P. (1982). Singular perturbations and robust redesign of adaptive control. In *1982 21st IEEE Conference on Decision and Control*, pages 24–29. IEEE.
- Ioannou, P. A. and Kokotovic, P. V., editors (1983). *Adaptive Systems with Reduced Models*, volume 47 of *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg.
- Jang, J.-S. and Chuen-Tsai Sun (1995). Neuro-fuzzy modeling and control. *Proceedings of the IEEE*, 83(3):378–406.

- Jang, J.-s. R. (1993a). ANFIS : Adaptive-Ne twork-Based Fuzzy Inference System. 23(3).
- Jang, J. S. R. (1993b). ANFIS: Adaptive-Network-Based Fuzzy Inference System. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 23(3):665–685.
- Khargonekar, P. P. and Dahleh, M. A. (2018). Advancing systems and control research in the era of ML and AI. *Annual Reviews in Control*.
- Kokotovic, P. and Ioannou, P. (1981). Robustness redesign of continuous-time adaptive schemes. In *1981 20th IEEE Conference on Decision and Control including the Symposium on Adaptive Processes*, pages 522–527. IEEE.
- Lamnabhi-Lagarrigue, F., Annaswamy, A., Engell, S., Isaksson, A., Khargonekar, P., Murray, R. M., Nijmeijer, H., Samad, T., Tilbury, D., and den Hof, P. V. (2017). Systems & Control for the future of humanity, research agenda: Current and future roles, impact and grand challenges. *Annual Reviews in Control*, 43:1–64.
- Landau, I. (1969). A hyperstability criterion for model reference adaptive control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 14(5):552–555.
- Landau, I., Lozano, R., M'Saad, M., and Karim, A. (2011). *Adaptive control. Algorithms, analysis and applications*.
- Lemos, A., Kreinovich, V., Caminhas, W., and Gomide, F. (2011). Universal approximation with uninorm-based fuzzy neural networks. *Annual Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society - NAFIPS*.
- Liu, X. J., Lara-Rosano, F., and Chan, C. W. (2004). Model-reference adaptive control based on neurofuzzy networks. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics Part C: Applications and Reviews*, 34(3):302–309.
- Mamdani, E. H. and Assilian, S. (1975). An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *International Journal of Man-Machine Studies*, 7(1):1–13.
- Monopoli, R. (1974). Model reference adaptive control with an augmented error signal. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19(5):474–484.
- Mozelli, L. A. and Palhares, R. M. (2011). Stability analysis of takagi-sugeno fuzzy systems via LMI: Methodologies based on a new Fuzzy Lyapunov Function. *Controle y Automacao*, 22(6):664–676.
- Narendra, K. and Han, Z. (2012). A new approach to adaptive control using multiple models. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 26(8):778–799.

- Narendra, K., Yuan-Hao Lin, and Valavani, L. (1980). Stable adaptive controller design, part II: Proof of stability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25(3):440–448.
- Narendra, K. S. and Annaswamy, A. M. (1984). Robust Adaptive Control. In *1984 American Control Conference*, pages 333–335. IEEE.
- Narendra, K. S. and Annaswamy, A. M. (1987). A New Adaptive Law for Robust Adaptation Without Persistent Excitation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 32(2):134–145.
- Oliveira, E. D. S., Takahashi, R. H., and Caminhas, W. M. (2020). Online Neuro-Fuzzy Controller: Design for Robust Stability. *IEEE Access*, 8:193768–193776.
- Parks, P. (1966). Liapunov redesign of model reference adaptive control systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 11(3):362–367.
- Peterson, B. B. and Narendra, K. S. (1982). Bounded Error Adaptive Control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27(6):1161–1168.
- Popov, V. M. (1963). The solution of a new stability problem for controlled systems. *Automation and Remote Control*, 24:1–23.
- Popov, V.-M. (1973). *Hyperstability of control systems*, volume 0. Editura Academiei.
- R. E. Kalman (1958). Design of a Self-Optimizing Control Systems. *Transactions of ACME*, 80:468–478.
- Rastovic, D. (2011). Applications of artificial intelligence and multi-variable control of chaos on tokamak equilibriums. In *Glow Discharges and Tokamaks*, pages 407–418. Nova Science Publishers.
- Rugh, W. J. and Shamma, J. S. (2000). Research on gain scheduling.
- Sastry, S. and Bodson, M. (1989). *Adaptive Control- Stability, Convergence, and Robustness*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Shihabudheen, K. V. and Pillai, G. N. (2018). Recent advances in neuro-fuzzy system: A survey. *Knowledge-Based Systems*, 152:136–162.
- Slotine, J.-J. and Li, W. (1991). *Applied Nonlinear Control*.
- Spadini, L. M., da Silva, P. E., de Campos, L. F. F., de Araujo, C. j. F., and Nied, A. (2013). Desenvolvimento de controle neurofuzzy para plantas não lineares : aplicação em tanque acoplados. In *XI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente (SBAI)*.

- T. Takagi and M. Sugeno (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Trans. Syst., Man, Cybernetics*, 15(pp):116132.
- Tambara, R. V., Kanieski, J. M., Massing, J. R., Stefanello, M., and Gründling, H. A. (2017). A Discrete-Time Robust Adaptive Controller Applied to Grid-Connected Converters with LCL Filter. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, 28(3):371–379.
- Tansel, Y. and Anthony, C. (2011). Derivative-free model reference adaptive control. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 34(4):933–950.
- Veselý, V. and Ilka, A. (2013). Gain-scheduled PID controller design. *Journal of Process Control*, 23(8):1141–1148.
- Wang, L.-X. (1993). Stable adaptive fuzzy control of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1(2):146–155.
- Wang, L.-X. X. (1992). Fuzzy systems are universal approximators. In *[1992 Proceedings] IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pages 1163–1170. IEEE.
- Whitaker, H., Yamron, J., and Kezer, A. (1958). Design of model-reference adaptive control systems for aircraft. *Inst. of Aeronautical Sciences*.
- Yamakawa, T., Uchino, E., Miki, T., and Kusanagi, H. (1992a). A neo fuzzy neuron and its applications to system identification and prediction of the system behavior. In *Proc. 2nd Int. Conf. on Fuzzy Logic and Neural Networks*, pages 477–483.
- Yamakawa, T., Uchino, E., Miki, T., and Kusanagi, H. (1992b). A neo fuzzy neuron and its applications to system identification and prediction of the system behavior. In *Proc. 2nd Int. Conf. on Fuzzy Logic and Neural Networks*, pages 477–483.
- Zadeh, L. H. (1965). Fuzzy Sets. *Information and Control*, 8:338–353.
- Ziegler, J. G. and Nichols, N. B. (1995). Optimum settings for automatic controllers. *InTech*, 42(6):94–100.

# Apêndice

## A.1 Desigualdade matricial

Dadas duas matrizes A e B, temos que:

$$A^T B + B^T A \leq \rho A^T A + \frac{1}{\rho} B^T B, \quad \forall \rho > 0. \quad (\text{A.1})$$

Prova:

$$(A^T - \frac{1}{\rho} B^T) \rho (A - \frac{1}{\rho} B) \geq 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\rho A^T A + \frac{1}{\rho} B^T B - A^T B - B^T A \geq 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\rho A^T A + \frac{1}{\rho} B^T B \geq A^T B + B^T A \quad (\text{A.4})$$

## A.2 Estabilidade Entrada-Saída do Controlador ONFC

Nesta seção é apresentada a prova de estabilidade entrada-saída do controlador ONFC, sendo  $e_x$  é a entrada e  $\tilde{u}$  é a saída, a partir dos resultados mostrados na Seção 3.2.2. Essa estabilidade pode ser analisada considerando a seguinte função de Lyapunov candidata:

$$V(k, e_x(k), \tilde{u}(k)) = e_x^T(k) P e_x(k) + \frac{\tilde{u}^2(k)}{\gamma} \quad (\text{A.5})$$

em que  $P = P^T > 0$  e  $\gamma > 0$ . A condição suficiente para garantir a estabilidade é que:

$$\Delta V(k, e_x(k), \tilde{u}(k)) = V(k+1, e_x(k+1), \tilde{u}(k+1)) - V(k, e_x(k), \tilde{u}(k)) < 0 \quad (\text{A.6})$$

para todo  $k > 0$ . Por simplificação, defina:

$$\Delta V = \Delta V_e(k) + \Delta V_u(k) \quad (\text{A.7})$$

em que  $\Delta V_e(k)$  é dado pela Equação 3.31 e  $\Delta V_u(k)$  é definido por:

$$\Delta V_u(k) = \frac{\tilde{u}^2(k+1)}{\gamma} - \frac{\tilde{u}^2(k)}{\gamma} \quad (\text{A.8})$$

Considerando o sinal  $\tilde{u}(k)$  no intervalo  $-E_M < e_r(k) < E_M$ , pode-se reescrever a Equação A.8 na forma:

$$\begin{aligned} \gamma \Delta V_u(k) = & \begin{bmatrix} \tilde{w}_1(k+1) \\ \tilde{w}_2(k+1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mu_1^2(k+1) & \mu_1(k+1)\mu_2(k+1) \\ \mu_1(k+1)\mu_2(k+1) & \mu_2^2(k+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_1(k+1) \\ \tilde{w}_2(k+1) \end{bmatrix} - \\ & \begin{bmatrix} \tilde{w}_1(k) \\ \tilde{w}_2(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mu_1^2(k) & \mu_1(k)\mu_2(k) \\ \mu_1(k)\mu_2(k) & \mu_2^2(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_1(k) \\ \tilde{w}_2(k) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Para garantir a convergência dos sinais  $e(k)$  e  $\tilde{u}$ , considerando o resultado apresentado na Equação 3.35, basta mostrar que:

$$\Delta V(k, e_x(k), \tilde{u}(k)) = \Delta V_e(k) + \Delta V_u(k) \leq \Delta V_e(k) + \Delta V_w(k) \leq 0 \quad (\text{A.10})$$

O que é verdade desde que

$$\Delta V_u(k) \leq \Delta V_w(k), \quad (\text{A.11})$$

para todo  $k$ . Reescrevendo a Equação 3.35 nos moldes da Equação A.9 tem-se que:

$$\gamma \Delta V_w(k) = \begin{bmatrix} \tilde{w}_1(k+1) \\ \tilde{w}_2(k+1) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_1(k+1) \\ \tilde{w}_2(k+1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \tilde{w}_1(k) \\ \tilde{w}_2(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_1(k) \\ \tilde{w}_2(k) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

Comparando a Equação A.12 com A.9, é possível ver que a Equação A.8 é definida negativa desde que:

$$\begin{bmatrix} \mu_1^2(k) & \mu_1(k)\mu_2(k) \\ \mu_1(k)\mu_2(k) & \mu_2^2(k) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.13})$$

O que é verdade para qualquer  $k > 0$ .

### A.3 Procedimento de Execução do Método MRAC

O método MRAC introduzido na Seção 2.2.2 é detalhado a seguir conforme indicado em Tambara et al. (2017).

Seja um sistema SISO (4.1) de ordem  $n$  conhecida e grau relativo  $n^* = 1$ , i.e. com o produto  $CB \neq 0$ , e o modelo de referência (4.3) também de ordem  $n$  e mesmo grau relativo  $n^* = 1$ .

Defina o erro entre as saídas dos dois sistemas como sendo  $e_y(k) = y(k) - y_m(k)$ . A ação de controle que tenta reduzir o erro  $e_y$  definida pelo controlador MRAC é dada por:

$$u(k) = \theta^T(k)\omega(k), \quad (\text{A.14})$$

em que o vetor de ganhos  $\theta(k) = [\theta_1^T(k); \theta_2^T(k); \theta_y(k); \theta_r(k)]^T$ , são os ganhos do controlador com  $\theta_1(k); \theta_2(k) \in \mathbb{R}^{n-1}$  e  $\omega(k) = [\omega_1^T(k); \omega_2^T(k); y(k); r(k)]^T$ , os estados do controlador com  $\omega_1(k); \omega_2(k) \in \mathbb{R}^{n-1}$ . A atualização de  $\omega_1(k)$  e  $\omega_2(k)$  é realizada através das seguintes equações

$$\begin{aligned} \omega_1(k+1) &= F\omega_1(k) + qu(k) \\ \omega_2(k+1) &= F\omega_2(k) + qy(k) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

com  $\omega_1(0) = 0$ ,  $\omega_2(0) = 0$ , O par  $(F, q)$  é controlável,  $F \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$  e  $q \in \mathbb{R}^{n-1}$  e seus valores escolhidos em projeto.

A estimação dos parâmetros do controlador é definida pela lei de adaptação:

$$\theta(k+1) = (I - T\sigma\Gamma)\theta(k) - T \frac{\Gamma\zeta(k)\varepsilon_1(k)\text{sign}(\rho^*)}{m^2(k)} \quad (\text{A.16})$$

em que  $\Gamma = \gamma I$  é a matriz de ganhos, sendo  $\gamma$  o ganho de adaptação, e  $T$  é o tempo de amostragem (podendo ser incorporado ao ganho de adaptação e, por isso, omitido). O termo  $\text{sign}(\rho^*)$  é o sinal do ganho da planta, considerado nos exemplos deste trabalho como sendo positivo.

A lei de adaptação (A.16), utiliza o sinal de erro aumentado  $\varepsilon_1$ , dado por:

$$\varepsilon_1(k) = e_y(k) + \theta^T(k)\zeta(k) - W_m(z)(\theta^T(k)\omega(k)) \quad (\text{A.17})$$

em que o termo  $W_m(z)(\theta^T(k)\omega(k))$  representa a filtragem do escalar  $(\theta^T(k)\omega(k))$  pelo modelo referência  $W_m(z) = C_m(zI - A_m)B_m$ , e o sinal  $\zeta(k)$  é gerado a partir da filtragem dos sinais  $\omega$ , sendo  $\zeta(k) = W_m(z)\omega(k)$ .

Por fim, o sinal de normalização  $m^2(k)$  é dado por:

$$m^2 = 1 + \zeta^T(k)\Gamma\zeta(k). \quad (\text{A.18})$$

A sequência de execução do algoritmo utilizada pode ser assim resumida:

1. Defina  $r$  e  $y_m$  no instante  $k$ ;
2. Obtenha da saída da planta  $y(k)$ ;
3. Calcule  $\zeta(k) = W_m(z)\omega(k)$ ;

4. Calcule  $e_y(k) = y(k) - y_m(k)$ ;
5. Calcule erro aumentado  $\varepsilon_1(k) = e_y(k) + \theta^T(k)\zeta(k) - W_m(z)(\theta^T(k)\omega(k))$ ;
6. Calcule  $m^2(k) = 1 + \zeta^T(k)\Gamma\zeta(k)$ ;
7. Calcule  $\theta(k+1) = (I - T\sigma\Gamma)\theta(k) - T\frac{\Gamma\zeta(k)\varepsilon_1(k)\text{sign}(\rho^*)}{m^2(k)}$
8. Atualize  $\omega_1(k+1) = F\omega_1(k) + qu(k)$  e  $\omega_2(k+1) = F\omega_2(k) + qy(k)$
9. Realize ação de controle  $u(k) = \theta^T(k)\omega(k)$ ;