



Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Sarah Faria Monteiro Mazzini Costa

Interseções completas e pontos de Weierstrass

Belo Horizonte
outubro de 2021

Sarah Faria Monteiro Mazzini Costa

Interseções completas e pontos de Weierstrass

Tese de Doutorado apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Luís Contiero

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Belo Horizonte
outubro de 2021

Costa, Sarah Faria Monteiro Mazzini.

C837i Interseções completas e pontos de Weierstrass [manuscrito] /
Sarah Faria Monteiro Mazzini Costa – 2021.
74 f. il.

Orientador: André Luís Contiero.
Tese (doutorado) – Universidade Federal de Minas Gerais,
Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f. 73-74

1. Matemática – Teses. 2. Weierstrass, pontos de – Teses.
3. Curvas modulares – Teses. 4. Singularidades (Matemática) –
Teses. 5. Teoria de interseção – Teses. I. Contiero, André Luís.
II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de
Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51 (043)



FOLHA DE APROVAÇÃO

Interseções Completas e Pontos de Weierstrass

SARAH FARIA MONTEIRO MAZZINI COSTA

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Prof. André Luís Contiero
UFMG

Prof. Aline Vilela Andrade
UFF

Prof. Cecília Salgado Guimarães da Silva
University of Groningen

Prof. Letterio Gatto
Politecnico di Torino

Prof. Marcelo Escudero Hernandez
UEM

Prof. Renato Vidal da Silva Martins
UFMG

Belo Horizonte, 08 de outubro de 2021.

Resumo

Existem alguns avanços relacionados à racionalidade do espaço de moduli $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ de curvas algébricas pontuadas de gênero g com semigrupo de Weierstrass \mathcal{H} . Os semigrupos estudados nos resultados existentes ou têm gênero $g \leq 6$ ou são simétricos e gerados por no máximo quatro elementos. A presente tese tem como objetivo mostrar dois resultados sobre a geometria do espaço $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ que podem ser descritos da seguinte forma: dado um semigrupo \mathcal{H} de gênero $g \geq 1$, se a curva monomial afim $\text{Spec} \mathbb{k}[\mathcal{H}]$ é interseção completa, então é possível mostrar que $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ admite uma compactificação que é isomorfa a projetivização da parte negativamente graduada do primeiro módulo de cohomologia do complexo cotangente de $\mathbb{k}[\mathcal{H}]$. A hipótese de interseção completa pode ser enfraquecida assumindo que a curva $\text{Spec} \mathbb{k}[\mathcal{H}]$ é uma interseção completa local, porém devemos assumir também que $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ é não vazio. Sob essas novas condições mostramos a mesma conclusão do primeiro resultado. São feitos muitos exemplos, inclusive para famílias de semigrupos. Um resultado clássico sobre a realização de semigrupos é obtido de maneira independente através de uma simples aplicação do critério Jacobiano e um outro resultado acerca da suavização de curvas monomiais, sem quaisquer obstruções, declina imediatamente do segundo resultado descrito.

Palavras Chaves e Frases: Pontos de Weierstrass, Moduli de Curvas, Deformações de Singularidades, Interseções Completas.

Abstract

There are many advances related to the the rationality of the moduli space $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ parametrising pointed smooth projective curves of genus $g \geq 0$ and Weierstrass semigroup \mathcal{H} at the marked point. The semigroups studied in the results have genus $g \leq 6$ or they are symmetric semigroups generated by at most four elements. This thesis is concerned to show two results about the geometry of $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ that can be described as follows: given a numerical semigroup \mathcal{H} of genus $g \geq 1$, if the monomial affine curve $\text{Spec } \mathbb{k}[\mathcal{H}]$ is a complete intersection, then we can show that $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ admits a compactification that is isomorphic to the projectivization of the negatively graded part of the first cohomology moduli of $\mathbb{k}[\mathcal{H}]$. The complete intersection hypothesis can be interchanged by the hypothesis that the curve $\text{Spec } \mathbb{k}[\mathcal{H}]$ is a local complete intersection, but in this case we have to assume that $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ is non-empty. Under these new conditions we show the same conclusion as the first result. Many examples are made, including for families of semigroups. A classical result of realizable semigroups is obtained independently through a simple application of the Jacobian criterion, and another result on the smoothing of monomial curves, without any obstructions, immediately declines from the second result described above.

Key-words and Phrases: Weierstrass points, Moduli of Curves, Deformation of Singularities, Complete Intersections.

Sumário

1	Introdução	5
2	Preliminares	10
2.1	Semigrupos numéricos e pontos de Weierstrass	10
2.2	O primeiro módulo de cohomologia do complexo cotangente \mathbf{T}^1	11
2.2.1	O \mathbf{T}^1 para curvas monomiais	14
2.3	O Complexo de Koszul	15
3	Sobre o espaço $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$	18
3.1	A construção por Pinkham	18
3.2	A construção da compactificação por Stöhr	21
4	Interseções completas e pontos de Weierstrass	34
4.1	$\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ é interseção completa	34
4.2	$\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ é interseção completa local	39
4.3	Exemplos	43
4.3.1	Exemplo em \mathbb{A}^3	43
4.3.2	Exemplo em \mathbb{A}^4	45
4.3.3	Exemplo em \mathbb{A}^5	50
4.3.4	Exemplo em \mathbb{A}^6	51
4.4	Exemplos para famílias de semigrupos	53
A	O módulo de Tjurina e $\mathbf{T}^1(\mathbb{k}[\mathcal{H}])$	58
B	O ideal de uma curva monomial afim interseção completa	60
C	Algoritmo para calcular as equações do Moduli	63
	Referências	72

1 Introdução

Problemas de classificação estão presentes no estudo da matemática há muito tempo. Provavelmente o primeiro problema de classificação encontrado é o das cônicas não degeneradas com coeficientes reais, que são dadas pelo lugar geométrico dos pontos que anulam equações da forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

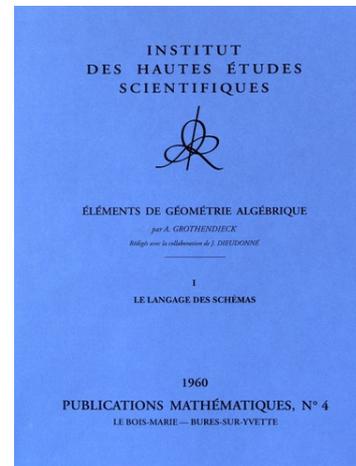
onde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Podemos determinar se uma cônica real não degenerada é uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola analisando o discriminante. Dessa maneira, todas as cônicas estão classificadas. Se considerarmos as cúbicas o problema se torna mais difícil. Consta no livro *Lexicon Technicum* de John Harris, publicado em 1710, que Newton classificou as cúbicas em 72 tipos, esquecendo-se de 6 delas. Posteriormente, Plucker deu uma classificação mais detalhada, classificando-as em 219 tipos. Se os coeficientes da equação forem complexos o problema se torna mais fácil, mas mesmo assim muito difícil de ser resolvido para curvas de graus maiores. Dessa forma, mesmo sendo explícita e calculável, a teoria clássica de invariantes se torna inviável quando se quer classificar outros tipos de objetos geométricos, como por exemplo aqueles que possuem graus maiores, sendo necessária uma nova abordagem para o problema de classificação.

O termo moduli foi introduzido por Riemann em 1857 [25, pp. 79-134], onde ele mostrou que as classes de isomorfismos das superfícies compactas de Riemann dependiam de $3g - 3$ moduli, mesmo sem ter conhecimento da estrutura desse espaço. A formalização dos *espaços de moduli* só foi possível com o surgimento da Geometria Algébrica moderna, introduzida por nomes como Grothendieck, Mumford, Serre e Deligne em meados da década de 60. A obra mais importante desse tempo é a coleção EGA - *Éléments de Géométrie Algébrique*, composta de 13 volumes e escrita entre 1960 e 1967. Outra obra impor-

ante é o SGA - *Séminaire de Géométrie Algébrique*, notas de um seminário em Geometria Algébrica liderado por Grothendieck.

Os espaços de moduli são espaços de parâmetros onde cada ponto corresponde a um objeto geométrico da coleção de objetos que estamos interessados. Podemos, por exemplo, considerar o espaço de moduli \mathcal{M}_g , formado pelas classes de isomorfismos de curvas lisas projetivas de gênero $g > 0$, ou ainda o espaço $\mathcal{M}_{g,1}$, que é o espaço de moduli de curvas suaves projetivas pontuadas de gênero $g > 0$. Particularmente, estamos interessados nos espaços de moduli da forma

$$\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}} := \{[C, p] \in \mathcal{M}_{g,1}; \mathcal{H}_p = \mathcal{H}\},$$



formado pelas classes de isomorfismos de curvas irredutíveis lisas que possuem semigrupo de Weierstrass \mathcal{H} no ponto P . Como a i -ésima lacuna de \mathcal{H} define uma função semicontínua superiormente em $\mathcal{M}_{g,1}$ é possível verificar que esse moduli é um subesquema localmente fechado em $\mathcal{M}_{g,1}$. Sabendo desse fato, surgem perguntas naturais, como qual é a geometria do espaço, se ele é ou não irredutível, qual é sua dimensão e sua compactificação. Vamos estabelecer os principais resultados que conhecemos sobre $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ em ordem cronológica, começando com a dimensão, que já possui uma longa história.

Começamos com a fórmula estabelecida por Pierre Deligne para a dimensão das componentes suavizantes do espaço de deformações versais onde a característica do corpo é arbitrária [11, Teorema 2.27]. Denotemos por $\delta := \dim_{\mathbb{k}} \overline{\mathcal{O}}/\mathcal{O}$ o grau de singularidade de uma curva reduzida \mathcal{C} em P e $m_1 := \dim(\text{coker}(\text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathcal{O}, \mathcal{O}) \rightarrow \text{Der}_{\mathbb{k}}(\overline{\mathcal{O}}, \overline{\mathcal{O}})))$, em que $\text{Der}_{\mathbb{k}}(R, M)$ é o módulo das \mathbb{k} -derivações de R em M . A Fórmula de Deligne garante que para cada componente suavizante E do espaço de deformações versais de $\text{Spec } \mathcal{O}$, temos

$$\dim E = 3\delta - m_1.$$

Quando a curva é quase-homogênea, a fórmula acima admite uma simplificação, resultando na fórmula de Greuel, c.f. [14], que garante que para cada componente suavizante E da curva quase-homogênea $\text{Spec } \mathcal{O}$, vale

$$\dim E = \mu + t - 1,$$

onde $\mu = 2\delta - r + 1$ é o número de Milnor e t é o seu tipo $\dim_{\mathbb{k}} \text{Ext}_{\mathcal{O}}^1(\mathbb{k}, \mathcal{O})$. No caso particular de singularidade Gorenstein temos $t = 1$.

Quando consideramos curvas monomiais, que é o caso de interesse nesta tese, a fórmula para a dimensão das componentes suavizantes também aparece no artigo de Buchweitz [6, Teorema 4.1.2], em que é enunciada para t a seguinte fórmula combinatória:

$$t = \lambda(\mathcal{H}) = [\text{End}(\mathcal{H}) : \mathcal{H}],$$

com $\text{End}(\mathcal{H}) = \{n \in \mathbb{N} \mid n + \mathcal{H} \setminus \{0\} \subset \mathbb{N}\}$.

Como cada componente suavizante de $\text{Spec } \mathbb{k}[\mathcal{H}]$ está contida na componente suavizante do espaço total versal de deformações, temos uma cota superior, chamada cota superior de Deligne-Pinkham, que primeiramente foi enunciada por D. Rim e M. Vitulli [26, §6], que garante que para qualquer semigrupo numérico \mathcal{H} vale

$$\dim \mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}} \leq 2g - 2 + \lambda(\mathcal{H}).$$

Rim e Vitulli [26, Cor. 5.14] mostraram que a cota de Deligne-Pinkham é atingida quando o primeiro grupo de cohomologia do complexo cotangente associado à álgebra de semigrupo $\mathbb{k}[\mathcal{H}]$ não tem parte graduada positiva, ou seja, quando \mathcal{H} é um semigrupo negativamente graduado. Então, nesse caso, $\dim \mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}} = 2g - 2 + \lambda(\mathcal{H})$. Uma lista completa dos semigrupos negativamente graduados foi obtida por Rim e Vitulli [26, Thm. 4.7].

Na década de oitenta, utilizando um simples argumento com Grassmannianas, David Eisenbud e Joe Harris [13] obtiveram uma cota superior para a codimensão de $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$, visto como

um subespaço localmente fechado de $\mathcal{M}_{g,1}$. Mostraram que se $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ é não vazio, então para qualquer componente irredutível X de $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ vale

$$\dim X \geq 3g - 2 - \text{wt}(\mathcal{H}),$$

onde $\text{wt}(\mathcal{H}) := \sum \ell_i - i$ é o peso do semigrupo \mathcal{H} .

Mais de duas décadas depois, André Contiero e Karl-Otto Stöhr [10, Teorema 3.1 e Corolário 4.5] obtiveram uma cota superior para a dimensão de $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ menor que a cota superior de Deligne-Pinkham para o caso de famílias infinitas de semigrupos. Pouco tempo depois, N. Pflueger [22, Teorema 1.2] obteve uma cota superior para a codimensão de $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$, melhorando a cota de Eisenbud-Harris. Fixando um sistema mínimo de geradores $S = \langle n_1, \dots, n_r \rangle$ para \mathcal{H} , Pflueger introduziu o *peso efetivo* de um semigrupo numérico \mathcal{H} , c.f. [22, Def. 1.1],

$$\text{ewt}(\mathcal{H}) := \sum_{\text{lacunas } \ell_i} (\# \text{ geradores } n_j < \ell_i),$$

como um substituto para o peso clássico $\text{wt}(\mathcal{H})$, e concluindo que se $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ é não vazio e X é uma componente irredutível, então

$$\dim X \geq 3g - 2 - \text{ewt}(\mathcal{H}).$$

Em um preprint que ainda será submetido, A. Contiero, J. Stevens, A. Fontes e J. Vargas melhoram a cota inferior de Pflueger utilizando as mesmas ferramentas de Pinkham. Tem-se que se \mathcal{H} é um semigrupo numérico de gênero maior que 1 e $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ é não vazio, então para qualquer componente irredutível X of $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ vale

$$2g - 2 + \lambda(\mathcal{H}) - \dim \mathbf{T}^{1,+} \leq \dim X. \quad (1.1)$$

Além disso,

$$3g - 2 - \text{ewt}(\mathcal{H}) \leq 2g - 2 + \lambda(\mathcal{H}) - \dim \mathbf{T}_{\mathbb{k}[\mathcal{H}]}^{1,+} \leq \dim \mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}} \leq 2g - 2 + \lambda(\mathcal{H}).$$

Vejamos agora os resultados referentes à geometria de $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$. Utilizando Critério Jacobiano e Teoria de eliminação é possível concluir que $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ é um subespaço aberto ¹ de $\overline{\mathcal{M}}_{g,1}^{\mathcal{H}}$. Se o semigrupo $\mathcal{H} = \langle n_1, n_2, n_3, n_4 \rangle$ é simétrico e gerado por 4 elementos, utilizando a Teoria de deformações equivariantes de Pinkham [24], Teoria de interseção completa e uma versão quase-homogênea do Teorema de Buchsbaum- Eisenbud para ideais Gorenstein em dimensão 3 [6, p. 466], é possível deduzir que a curva monomial afim $\text{Spec } \mathbb{k}[\mathcal{H}] = \text{Spec } \mathbb{k}[t^{n_1}, t^{n_2}, t^{n_3}, t^{n_4}]$ pode ser negativamente suavizada sem obstruções ([6], [31] [32, Satz 7.1]). Então $\dim \mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}} = \dim \mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathbb{k}[\mathcal{H}]}^{1,-})$ e daí

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,1}^{\mathcal{H}} = \mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathbb{k}[\mathcal{H}]}^{1,-}).$$

Se \mathcal{H} é gerado por mais de 4 elementos, como $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ é um aberto denso em $\overline{\mathcal{M}}_{g,1}^{\mathcal{H}}$, este é um subespaço de $\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathbb{k}[\mathcal{H}]}^{1,-})$.

¹Uma compactificação de $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ pode ser encontrada em [29] ou ainda na Seção 4.2 desta tese.

Em [19], Nakano mostrou que se \mathcal{H} é gerado por no máximo 4 elementos e tem gênero $g \leq 6$ então, exceto para o semigrupo $\langle 4, 9, 10, 11 \rangle$, $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ é irredutível e racional. Esse resultado foi demonstrado calculando o moduli de cada semigrupo individualmente. Baseado nesse trabalho, Bullock [7] mostrou que para todo semigrupo \mathcal{H} de gênero $g \leq 6$, exceto para $\langle 5, 7, 8, 9, 11 \rangle$ e $\langle 6, 7, 8, 9, 10 \rangle$, o espaço de moduli $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ é racionalmente estável, um conceito mais fraco que o conceito de racionalidade.

Os primeiros exemplos de semigrupos tais que o espaço de moduli $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ não possui dimensão pura foram dados por Pfluger [23]. Se um semigrupo de Castelnuovo

$$S_{r,d} := \langle d + r - 1, \dots, d \rangle$$

com $d \geq 2r + 1$ e gênero g é tal que $r \geq 4$ e $(r - 1)|(d - 1)$ ou $r = 5$ e d é par, então $\mathcal{M}_{g,1}^{S_{r,d}}$ tem duas componentes irredutíveis de dimensões distintas. Ao final desta tese apresentaremos um resultado que envolve esse tipo de semigrupo.

Esta tese tem como objetivo abordar a geometria do espaço $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ e está organizada da seguinte forma: No Capítulo 2 estão os conceitos preliminares necessários para a compreensão da tese, que são semigrupos numéricos e pontos de Weierstrass, o primeiro módulo de cohomologia do complexo cotangente $\mathbf{T}_{\mathbb{k}[\mathcal{H}]}^1$ e o complexo de Koszul. No Capítulo 3 serão abordadas as construções do espaço $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ feita por Pinkham [24] e a compactificação $\overline{\mathcal{M}}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ feita por Stöhr. A compactificação está feita em mais detalhes pois é a base para o resultado principal da tese. No Capítulo 4 são apresentados os resultados principais, c.f. Teorema 4.1.2 e o Teorema 4.2.5. Os teoremas principais da tese pode ser enunciados da seguinte forma:

Teorema Principal A. *Seja \mathcal{H} um semigrupo simétrico não hiperelítico de gênero $g \geq 2$ gerado minimamente por r elementos. Se $\text{Spec } \mathbb{k}[\mathcal{H}] \hookrightarrow \mathbb{A}^r$ é interseção completa, então $\overline{\mathcal{M}}_{g,1}^{\mathcal{H}} = \mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathbb{k}[\mathcal{H}]}^{1,-})$.*

Teorema Principal B. *Seja \mathcal{H} um semigrupo numérico tal que a curva monomial afim $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ associada é não-hiperelítica e uma interseção completa local. Se $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ é não vazio, então $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ admite uma compactificação tal que $\overline{\mathcal{M}}_{g,1}^{\mathcal{H}} = \mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathbb{k}[\mathcal{H}]}^{1,-})$.*

Cada uma das compactificações obtidas nos Teoremas acima é feita acrescentando curvas inteiras no bordo.

Na seção 4.3 são feitos muitos exemplos do Teorema principal para determinados semigrupos e famílias de semigrupos. Por fim, o Apêndice contém informações e resultados obtidos no decorrer do estudo que não se encaixam no assunto principal da tese mas que valem a pena serem citados. Destacamos o Lema B.0.1 e o Teorema B.0.2, que calculam de maneira algorítmica a sequência regular do ideal de uma curva monomial afim associada a uma classe particular de semigrupo que é interseção completa. Vale ressaltar que é um problema aberto, e ainda intratável, determinar algoritmicamente a sequência regular do ideal de uma curva monomial que é interseção completa. E também a Seção C, que traz algoritmos implementados no software MAPLE em que entrando com a sequência canônica de geradores de um semigrupo simétrico qualquer \mathcal{H} , o algoritmo retorna as bases P -hermitianas dos espaços $H^0(\mathcal{C}, \omega^n)$, para $n = 1, 2, 3$, onde \mathcal{C} é a curva monomial associada à \mathcal{H} e ω é seu feixe dualizante, o ideal da curva monomial

projetiva em \mathbb{P}^{g-1} induzida por seu mergulho canônico, a dimensão de cada parte graduada do primeiro módulo de cohomologia do complexo cotangente $\mathbf{T}_{\mathbb{k}[\mathcal{H}]}^1$, bem como sua dimensão total, que é igual ao número de Tjurina da singularidade de $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$, e as equações do moduli compactificado $\overline{\mathcal{M}}_{g,1}^{\mathcal{H}}$.

2 Preliminares

Neste capítulo introduziremos os principais objetos e daremos os principais resultados necessários para o entendimento da tese.

2.1 Semigrupos numéricos e pontos de Weierstrass

Um semigrupo numérico \mathcal{H} é um subconjunto de \mathbb{N} que contém o zero, é fechado para a soma e cujo complemento em \mathbb{N} é finito. Os elementos de $\mathbb{N} \setminus \mathcal{H}$ são chamados *lacunas* e serão denotados por ℓ_1, \dots, ℓ_g . A quantidade de lacunas de \mathcal{H} é chamada *gênero* de \mathcal{H} . Os elementos de \mathcal{H} são chamados *não lacunas* de \mathcal{H} e serão denotados por $0 = n_0, n_1, n_2, \dots$. O semigrupo é dito *simétrico* se seu número de Frobenius ℓ_g (sua última lacuna) é $2g - 1$. Uma caracterização deste tipo de semigrupo é que um inteiro n pertence a \mathcal{H} se e somente se $\ell_g - n$ não pertence a \mathcal{H} , ou seja,

$$\ell_j = 2g - 1 - n_{g-j}, \quad j = 1, \dots, g.$$

Seja \mathcal{C} uma curva algébrica inteira projetiva de gênero $g > 1$ definida sobre um corpo algebricamente fechado \mathbb{k} de característica zero. Dado um ponto $P \in \mathcal{C}$ suave, chamamos de *semigrupo de Weierstrass* de \mathcal{C} em P o semigrupo $\mathcal{H} := \mathcal{H}_P$ formado pelos inteiros não negativos $n \in \mathbb{N}$ tais que existe uma função regular f em \mathcal{C} que possui polo de ordem n em P . Equivalentemente, $n \in \mathcal{H}$ se, e somente se,

$$H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}((n-1)P)) \subsetneq H^0(\mathcal{C}, \mathcal{O}(nP)).$$

Segue do Teorema de Riemann–Roch para curvas singulares que o gênero do semigrupo de Weierstrass coincide com o gênero (aritmético) da curva \mathcal{C} .

Um ponto suave P de \mathcal{C} é chamado *ponto de Weierstrass* se o semigrupo de Weierstrass em P é diferente de $\langle g+1, g+2, \dots \rangle$, ou seja, suas lacunas são diferentes de $1, 2, \dots, g$. A sequência ℓ_1, \dots, ℓ_g é chamada *sequência de lacunas*.

Um semigrupo numérico é dito realizável se ele é realizado como o semigrupo de Weierstrass de uma curva lisa.

É sabido que nem todos os semigrupos numéricos são realizáveis. Buchweitz [5] obteve um critério para determinar quando um semigrupo numérico não é um semigrupo de Weierstrass, que hoje conhecemos como *Critério de Buchweitz*. Durante algum tempo acreditava-se que todos os semigrupos numéricos simétricos fossem realizáveis. Contudo, F. Torres, num artigo resultante de sua tese de doutorado [30], obteve um resultado garantindo a existência de um semigrupo simétrico de gênero maior de 100 que não é realizável.

A crença citada acima acerca da realização de um semigrupo simétrico pode ser explicada a partir da tese de Pinkham [24]. Em sua tese, Pinkham constrói o moduli $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ a partir de

deformações equivariantes de curvas monomiais (veja Seção 3.1 para mais detalhes sobre essa construção). Portanto, se uma curva monomial associada a um semigrupo numérico \mathcal{H} pode ser suavizada, então \mathcal{H} é realizável. Acreditava-se que toda curva monomial Gorenstein poderia ser suavizada, e tais curvas são obtidas a partir de semigrupos simétricos. Ainda é um problema muito difícil e aberto determinar se uma curva monomial pode ser suavizada.

2.2 O primeiro módulo de cohomologia do complexo cotangente \mathbf{T}^1

Os resultados dessa seção podem ser encontrados no artigo de Lichtembaum-Schlessinger [18].

Seja $A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis. Uma **extensão** de B sobre A é uma sequência exata de R -módulos

$$(\epsilon) : 0 \longrightarrow E_2 \xrightarrow{e_2} E_1 \xrightarrow{e_1} R \xrightarrow{e_0} B \longrightarrow 0$$

onde e_0 é uma sobrejeção de A -álgebras e e_1, e_2 são homomorfismos de R -módulos tais que $e_1(x)y = e_1(y)x, \forall x, y \in E_1$.

Seja A' uma A -álgebra, B' uma A' -álgebra e ϵ' uma extensão de B' sobre A' . Um *homomorfismo de extensões* $\alpha : \epsilon \rightarrow \epsilon'$ é uma coleção $(b, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ em que b e α_0 são homomorfismos de A -álgebras e α_1, α_2 são homomorfismos de R módulos que comutam o diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & E_2 & \xrightarrow{e_2} & E_1 & \xrightarrow{e_1} & R & \xrightarrow{e_0} & B & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_0 & & \downarrow b & & \\ 0 & \longrightarrow & E'_2 & \xrightarrow{e'_2} & E'_1 & \xrightarrow{e'_1} & R' & \xrightarrow{e'_0} & B' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Seja $A \rightarrow B$ um homomorfismo de anéis e M um B -módulo. Definimos

$$Der_A(B, M) := \{D : B \rightarrow M \mid D \text{ é } A\text{-linear e } D(xy) = xD(y) + yD(x), \forall x, y \in B\}.$$

O B -módulo $Der_A(B, M)$ é chamado *módulo das A -derivadas de B em M* . Seja F um B -módulo gerado por $\{dx \mid x \in B\}$ e L o submódulo de F gerado pelas expressões

$$d(ax + a'x) - a dx - a' dx \quad \text{e} \quad d(xy) - x dy - y dx,$$

com $a, a' \in A$ e $x, y \in B$. O B -módulo $\Omega_{B/A} = F/L$ é chamado *módulo de diferenciais de Kähler de B sobre A* . O homomorfismo natural $d : B \rightarrow \Omega_{B/A}$ satisfaz a seguinte propriedade universal: Dado $D \in Der_A(B, M)$, existe um único homomorfismo $D^* : \Omega_{B/A} \rightarrow M$ que comuta o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{d} & \Omega_{B/A} \\ & \searrow D & \downarrow D^* \\ & & M \end{array}$$

A derivação universal d induz o isomorfismo de A -módulos

$$Hom_B(\Omega_{B/A}, M) \simeq Der_A(B, M).$$

A cada extensão ϵ de B sobre A , associamos um complexo, denotado $L \cdot (\epsilon)$ de B -módulos

$$L \cdot (\epsilon) : 0 \longrightarrow E_2 \xrightarrow{d_2} E_1 \otimes_R B \xrightarrow{d_1} \Omega_{R/A} \otimes_R B \longrightarrow 0$$

Definição 2.2.1. *Uma extensão da forma*

$$0 \longrightarrow U/U_0 \longrightarrow F/U_0 \longrightarrow R \longrightarrow B \longrightarrow 0 \quad (\star)$$

onde R é uma álgebra polinomial sobre A e F é um R -módulo livre é chamada **extensão livre** de B sobre A .

Considere os homomorfismos de anéis $a : A \rightarrow A'$ e $b : B \rightarrow B'$ e o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & B' \\ \downarrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & A' \end{array}$$

Se ϵ e ϵ' são, respectivamente, uma extensão livre e uma extensão arbitrária de B sobre A , existe um homomorfismo $\alpha : \epsilon \rightarrow \epsilon'$ estendendo b e então um homomorfismo $\bar{\alpha} : L \cdot (\epsilon) \otimes_B B' \rightarrow L \cdot (\epsilon')$.

Definição 2.2.2. *Seja A um anel, $K_0 := \{\dots \rightarrow K_n \rightarrow K_{n-1} \rightarrow K_{n-2} \rightarrow \dots\}$ e $K'_0 = \{\dots \rightarrow K'_n \rightarrow K'_{n-1} \rightarrow K'_{n-2} \rightarrow \dots\}$ dois complexos de A -módulos. Dados dois homomorfismos $f, g : K_0 \rightarrow K'_0$, dizemos que f é **homotópico** a g quando existirem homomorfismos de A -módulos $h_n : K_n \rightarrow K'_{n+1}$ tais que $f_n - g_n = d' \circ h_n + h_{n-1} \circ d, \forall n \in \mathbb{Z}$.*

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & K_{n+1} & \xrightarrow{d} & K_n & \longrightarrow & K_{n-1} \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow f_{n+1, g_{n+1}} & \swarrow h_n & \downarrow h_{n-1} & \swarrow h_{n-1} & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & K'_{n+1} & \xrightarrow{d'} & K'_n & \longrightarrow & K'_{n-1} \longrightarrow \dots \end{array}$$

Proposição 2.2.1. *Seja*

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & B' \\ \downarrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & A' \end{array}$$

um diagrama comutativo de homomorfismos de anéis, ϵ uma extensão de B sobre A e ϵ' uma extensão de B' sobre A' . Se ϵ é livre, então

1. Existe um homomorfismo $\alpha : \epsilon \rightarrow \epsilon'$ estendendo b .
2. Se $\beta : \epsilon \rightarrow \epsilon'$ é outro homomorfismo que estende b , então $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ são mapas homotópicos de $L \cdot (\epsilon) \otimes_B B'$ em $L \cdot (\epsilon')$.

Definição 2.2.3. *Se B é uma A -álgebra e ϵ é uma extensão livre de B sobre A , chamamos $L \cdot (\epsilon)$ de **complexo cotangente** de B sobre A .*

Observe que a Proposição 2.2.1 garante que dois complexos cotangentes de B são homotopicamente equivalentes.

Definição 2.2.4. *Seja B uma A -álgebra, ϵ uma extensão livre de B sobre A e M um B -módulo. Chamamos $T^i(B/A, M) = H^i(\text{Hom}_B(L \cdot (\epsilon), M))$ de **i -ésima potência superior do funtor cotangente de B sobre A** .*

Temos pela Proposição 2.2.1, que os grupos de cohomologia $T^i(B/A, M)$ são independentes da escolha da extensão ϵ . Além disso, temos $T^0(B/A, M) = \text{Der}_A(B, M)$ e para toda potência i , $T^i(B/A, M)$ é um B -módulo.

Se $A \rightarrow B \rightarrow C$ é uma sequência de homomorfismos de anéis e M é um C -módulo, então existe uma sequência exata

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow T^0(C/B, M) &\longrightarrow T^0(C/A, M) \longrightarrow T^0(B/A, M) \\ &\longrightarrow T^1(C/B, M) \longrightarrow T^1(C/A, M) \longrightarrow T^1(B/A, M) \\ &\longrightarrow T^2(C/B, M) \longrightarrow T^2(C/A, M) \longrightarrow T^2(B/A, M) \end{aligned}$$

É possível transformar a sequência de módulos acima em uma sequência de feixes quase-coerentes: Seja $Z \rightarrow Y \rightarrow X$ uma sequência de homomorfismos de esquemas e \mathcal{F} um feixe quase-coerente em Z . Então temos a sequência exata

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow T^0(Z/Y, \mathcal{F}) &\longrightarrow T^0(Z/X, \mathcal{F}) \longrightarrow T^0(Y/X, \mathcal{F}) \\ &\longrightarrow T^1(Z/Y, \mathcal{F}) \longrightarrow T^1(Z/X, \mathcal{F}) \longrightarrow T^1(Y/X, \mathcal{F}) \\ &\longrightarrow T^2(Z/Y, \mathcal{F}) \longrightarrow T^2(Z/X, \mathcal{F}) \longrightarrow T^2(Y/X, \mathcal{F}) \end{aligned}$$

Além disso, dada uma sequência exata $0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2 \rightarrow \mathcal{F}_3 \rightarrow 0$ de feixes quase-coerentes em Z , temos a sequência exata

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow T^0(Y/X, \mathcal{F}_1) &\longrightarrow T^0(Y/X, \mathcal{F}_2) \longrightarrow T^0(Y/X, \mathcal{F}_3) \\ &\longrightarrow T^1(Y/X, \mathcal{F}_1) \longrightarrow T^1(Y/X, \mathcal{F}_2) \longrightarrow T^1(Y/X, \mathcal{F}_3) \\ &\longrightarrow T^2(Y/X, \mathcal{F}_1) \longrightarrow T^2(Y/X, \mathcal{F}_2) \longrightarrow T^2(Y/X, \mathcal{F}_3) \end{aligned}$$

Vamos agora analisar algumas condições para o anulamento do primeiro módulo de cohomologia do complexo cotangente. A partir daqui utilizaremos a notação \mathbf{T}^1 para denotar esse módulo.

Lema 2.2.2. *Seja P um anel de polinômios sobre A e M um P -módulo. Então $\mathbf{T}^1(P/A, M) = 0$.*

De fato, como \mathbf{T}^1 independe da escolha da extensão de P sobre A que tomamos, podemos escolher a extensão (\star) em que $R = P$ e $e_0 = \text{Id}$. Assim, $F = 0$ e portanto $\mathbf{T}^1(P/A, M) = 0$.

Lema 2.2.3. *Seja B uma A -álgebra, P um anel de polinômios sobre A e I um ideal em P tal que B é isomorfo a P/I . Então o mapa canônico*

$$\text{Coker}(\text{Hom}_P(\Omega_{P/A}, M) \rightarrow \text{Hom}_B(I/I^2, M)) \rightarrow \mathbf{T}^1(B/A, M)$$

é um isomorfismo.

Proposição 2.2.4. *Seja B uma A -álgebra. Então $\mathbf{T}^1(B/A, M) = 0$ para todo B -módulo M se e somente se B satisfaz a propriedade de levantamento sobre A , ou seja, se C e C' são duas*

A -álgebras tais que $C' \simeq C/I$ com $I^2 = 0$ e $g' : B \rightarrow C'$ é um homomorfismo de A -álgebras, então existe um homomorfismo de A -álgebras $g : B \rightarrow C$ que induz g' .

$$\begin{array}{ccccc} & & B & & \\ & \nearrow & \downarrow g & \searrow g' & \\ A & \longrightarrow & C & \longrightarrow & C' \end{array}$$

Definição 2.2.5. *Seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo de esquemas. Dizemos que f é **formalmente liso** se para todo $x \in X$ existirem vizinhanças afins $\text{Spec } B$ de x e $\text{Spec } A$ de $f(x)$ tais que B/A satisfaz a condição da Proposição 2.2.4.*

Teorema 2.2.5. *Seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo de tipo finito de esquemas localmente noetherianos. Então f é formalmente liso se e somente se $\mathbf{T}^1(X/Y, \mathcal{F}) = 0$ para todo feixe quase-coerente \mathcal{F} em X .*

Seja X um esquema sobre \mathbb{k} . Com os resultados obtidos acima para um feixe quase-coerente \mathcal{F} em X , concluímos que $\mathbf{T}^1(X, \mathcal{F})$ é um skyscraper, ou seja, um feixe suportado apenas nas singularidades de X . Para esta tese, a sequência que irá nos importar é a sequência do feixe tangente. Se $X \subset \mathbb{P}^n$ é uma variedade singular, temos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_X \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{N}_X \longrightarrow \mathbf{T}_X^1 \longrightarrow 0$$

em que \mathbf{T}^1 é não nulo apenas em vizinhanças da singularidade.

2.2.1 O \mathbf{T}^1 para curvas monomiais

Em sua tese de doutorado, Pinkham [24] mostra que o primeiro módulo de cohomologia do complexo cotangente de variedades que possuem uma ação do grupo multiplicativo $\mathbb{G}_m(\mathbb{k}) = \mathbb{k}^*$ admite uma graduação induzida pela ação de $\mathbb{G}_m(\mathbb{k})$. Em particular, curvas monomiais possuem uma ação natural deste grupo multiplicativo. Para descrever uma fórmula para $\mathbf{T}^1(\mathbb{k}[\mathcal{H}])_\ell$, onde ℓ denota a parte homogênea de grau ℓ , utilizamos um resultado de Herzog que garante que o ideal de $\mathcal{D}_{\mathcal{H}} := \{(t^{n_1}, \dots, t^{n_r}); t \in \mathbb{k}\} \subset \mathbb{A}^r$ pode ser gerado por polinômios isobáricos F_i em $\mathbb{k}[X_1, \dots, X_r]$ que são dados pela diferença de dois monômios:

$$F_i := X_1^{\alpha_{i1}} \dots X_r^{\alpha_{ir}} - X_1^{\beta_{i1}} \dots X_r^{\beta_{ir}},$$

com $\alpha_i \cdot \beta_i = 0$. O peso de cada forma F_i é $d_i := \sum_j n_j \alpha_{ij} = \sum_j n_j \beta_{ij}$. Para cada i , seja $v_i := (\alpha_{i1} - \beta_{i1}, \dots, \alpha_{ir} - \beta_{ir})$ um vetor em \mathbb{k}^r induzido por F_i . Seja o conjunto

$$\text{End}(\mathcal{H}) := \{a \in \mathbb{N} \mid a + n \in \mathcal{H}, \forall n \in \mathcal{H}\}.$$

Veremos algumas propriedades sobre ele no Capítulo 4.

Teorema 2.2.6 ([6], Teorema 2.2.1). *Para cada $\ell \notin \text{End}(\mathcal{H})$,*

$$\dim \mathbf{T}^1(\mathbb{k}[\mathcal{H}])_\ell = \#\{i \in \{1, \dots, r\}; n_i + \ell \notin \mathcal{H}\} - \dim V_\ell - 1$$

onde V_ℓ é subespaço vetorial de \mathbb{k}^r gerado pelos vetores v_i tais que $d_i + \ell \notin \mathcal{H}$. Também temos

$$\dim \mathbf{T}^1(\mathbb{k}[\mathcal{H}])_s = 0, \forall s \in \text{End}(\mathcal{H}).$$

2.3 O Complexo de Koszul

Os resultados dessa seção podem ser encontrados em [21].

Definição 2.3.1. *Seja R um anel e seja M um R -módulo. Uma sequência de elementos $x_1, \dots, x_n \in R$ é dita uma **sequência regular** em M se:*

1. $(x_1, \dots, x_n)M \neq M$;
2. Para $i = 1, \dots, n$, x_i é não divisor de zero em $M/(x_1, \dots, x_{i-1})M$.

Sejam f_1, \dots, f_r elementos em R . Seja E a álgebra exterior sobre \mathbb{k} nos elementos e_1, \dots, e_r :

$$E = \mathbb{k} \langle e_1, \dots, e_r \rangle / \{e_i^2, 1 \leq i \leq r\}, \{e_i e_j + e_j e_i, 1 \leq i < j \leq r\}.$$

Para cada e_i definimos $\deg(e_i) = 1$. Segue então da definição que $e^2 = 0, \forall e \in E$ e, denotando a multiplicação em E por \wedge , $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$ para $i \neq j$. Seja $\mathbf{f} := \{f_1, \dots, f_r\} \subset R$ e $\mathbf{K}(\mathbf{f})$ o R -módulo graduado $R \otimes E$, com a graduação dada por $\deg(e_1 \wedge \dots \wedge e_r) = r$ e munido da diferencial d dada por

$$d(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_i}) = \sum_{1 \leq p \leq i} (-1)^{p+1} f_{j_p} e_{j_1} \wedge \dots \wedge \hat{e}_{j_p} \wedge \dots \wedge e_{j_i},$$

onde o símbolo $\hat{}$ significa que o elemento é omitido do produto. Temos $d^2 = 0$. De fato,

$$d^2(e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_i}) = \sum_{1 \leq p < s \leq i} (-1)^{p+1} \gamma_{p,s} e_{j_1} \wedge \dots \wedge \hat{e}_{j_p} \wedge \dots \wedge \hat{e}_{j_s} \wedge \dots \wedge e_{j_i},$$

onde o coeficiente $\gamma_{p,s}$ é igual a

$$(-1)^{p+1} (-1)^{s+1} f_{j_p} f_{j_s} + (-1)^{p+1} (-1)^s f_{j_p} f_{j_s} = 0.$$

Definição 2.3.2. *O complexo*

$$\mathbf{K}(\mathbf{f}) : 0 \rightarrow K_r \rightarrow \dots \rightarrow K_1 \rightarrow K_0 \rightarrow 0$$

é chamado **Complexo de Koszul** em f_1, \dots, f_r .

Os elementos $\{e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_i} | 1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_i \leq r\}$ formam uma base para o R -módulo K_i . Se W é um R -módulo finitamente gerado, denotamos $\mathbf{K}(\mathbf{f}; W) := \mathbf{K}(\mathbf{f}) \otimes_R W$.

Exemplo 2.3.1. *Seja $A = \mathbb{k}[x, y, z]$, $f_1 = x^3$ e $f_2 = y^3$. Então K_0 tem base 1, K_1 tem base $\{e_1, e_2\}$ e K_2 tem base $e_1 \wedge e_2$. A diferencial age nos elementos da base da seguinte forma:*

$$d(e_1) = x^3, \quad d(e_2) = y^3 \quad d(e_1 \wedge e_2) = x^3 e_2 - y^3 e_1.$$

Então o complexo de Koszul é

$$K(x^3, y^3) : \begin{array}{ccccccc} & & \begin{pmatrix} -y^3 \\ x^3 \end{pmatrix} & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & K_2 & \xrightarrow{(x^3 \ y^3)} & K_1 & \longrightarrow & K_0 \end{array}$$

Lema 2.3.1. *Seja $\bar{\mathbf{f}} = \{f_1, \dots, f_{r-1}\} \subset R$ e $f_r \in R$. Seja $\mathbf{f} = \{\bar{\mathbf{f}}, f_r\}$. Então existe uma seqüência exata de complexos*

$$0 \longrightarrow \mathbf{K}(\bar{\mathbf{f}}) \longrightarrow \mathbf{K}(\mathbf{f}) \longrightarrow \mathbf{K}(\bar{\mathbf{f}})[-1] \longrightarrow 0.$$

A seqüência longa em homologia desse complexo é dada por

$$\dots \longrightarrow H_i(\mathbf{K}(\bar{\mathbf{f}})) \longrightarrow H_i(\mathbf{K}(\mathbf{f})) \longrightarrow H_{i-1}(\mathbf{K}(\bar{\mathbf{f}})) \xrightarrow{(-1)^{i+1}f_r} H_{i-1}(\mathbf{K}(\mathbf{f})) \longrightarrow \dots$$

Teorema 2.3.2. *Seja $W \neq 0$ um R -módulo graduado finitamente gerado e $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_r\}$ uma seqüência de elementos homogêneos de R de grau positivo. As seguintes propriedades são equivalentes:*

1. $H_i(\mathbf{K}(\mathbf{f}; W)) = 0$ para $i > 0$ e $H_0(\mathbf{K}(\mathbf{f}; W)) = W/(\mathbf{f})W$.
2. $H_0(\mathbf{K}(\mathbf{f}; W)) = 0$.
3. \mathbf{f} é uma seqüência regular em W .

Demonstração. (1) \Rightarrow (2) é trivial.

(2) \Rightarrow (3): Vamos provar por indução em r sendo f_1, \dots, f_r uma seqüência regular em W . Precisamos mostrar, primeiramente, que $W/(f_1, \dots, f_r)W \neq 0$. De fato, suponha $W/(f_1, \dots, f_r)W = 0$. Pelo Lema de Nakayama, se I é um ideal graduado próprio de um anel R , J um R -módulo graduado finitamente gerado e $J = IJ$, então $J = 0$. Como W é um módulo graduado e f_1, \dots, f_r têm graus positivos, segue por Nakayama que $W = 0$, o que é uma contradição. Assim $W/(f_1, \dots, f_r)W \neq 0$. Denote $\bar{\mathbf{K}} := \mathbf{K}(\bar{\mathbf{f}}; W)$. Pelo Lema 2.3.1, temos a seqüência exata

$$H_1(\bar{\mathbf{K}}) \xrightarrow{f_r} H_1(\bar{\mathbf{K}}) \longrightarrow H_1(\mathbf{K}(\mathbf{f}; W)),$$

onde $H_1(\mathbf{K}(\mathbf{f}; W)) = 0$ por hipótese. Então $H_1(\bar{\mathbf{K}}) = (f_r)H_1(\bar{\mathbf{K}})$ e novamente pelo Lema de Nakayama, temos $H_1(\bar{\mathbf{K}}) = 0$. Pela hipótese de indução, $\bar{\mathbf{f}} = \{f_1, \dots, f_{r-1}\}$ é uma seqüência W -regular. Além disso, novamente pelo Lema 2.3.1, temos a seqüência

$$0 = H_1(\mathbf{K}(\mathbf{f}; W)) \longrightarrow H_0(\bar{\mathbf{K}}) \xrightarrow{f_r} H_0(\bar{\mathbf{K}}),$$

com $H_0(\bar{\mathbf{K}}) = W/(\bar{\mathbf{f}})W$, ou seja, f_r não é divisor de zero em $W/(\bar{\mathbf{f}})W$, e portanto $\bar{\mathbf{f}}$ é uma seqüência regular.

(3) \Rightarrow (1) Por construção temos $H_0(\mathbf{K}(\mathbf{f}; W)) = W/(\mathbf{f})W$. Vamos mostrar essa implicação por indução sobre r . Para $r = 1$ o complexo de Koszul é

$$\mathbf{K}(f_1; W) : 0 \longrightarrow W \xrightarrow{f_1} W \longrightarrow 0.$$

Daí,

$$H_1(\mathbf{K}(f_1; W)) = \{m \in W \mid f_1 m = 0\} = 0.$$

Suponha que isso seja válido para $r - 1$ e seja $\bar{\mathbf{f}} = \{f_1, \dots, f_{r-1}\}$. Pelo Lema 2.3.1, temos a sequência

$$H_1(\bar{\mathbf{K}}) \longrightarrow H_1(\mathbf{K}(\mathbf{f}; W)) \longrightarrow H_0(\bar{\mathbf{K}}) \xrightarrow{f_r} H_0(\bar{\mathbf{K}}),$$

onde $H_1(\bar{\mathbf{K}}) = 0$ e $H_0(\bar{\mathbf{K}}) = W/(\bar{\mathbf{f}})W$. Como f_r é um elemento regular em $W/(\bar{\mathbf{f}})W$, temos $H_1(\mathbf{K}(\mathbf{f}; W)) = 0$. Seja $i > 1$. Pelo Lema 2.3.1, temos a sequência

$$0 = H_i(\bar{\mathbf{K}}) \longrightarrow H_i(\mathbf{K}(f; W)) \longrightarrow H_{i-1}(\bar{\mathbf{K}}) = 0,$$

e daí temos $H_i(\mathbf{K}(\mathbf{f}; W)) = 0$.

□

Se uma curva afim $\mathcal{C} \subset \mathbb{A}^r$ é interseção completa, então os geradores do seu ideal formam uma sequência regular em $\mathbb{k}[X_1, \dots, X_r]$. Estamos interessados nas primeiras syzygies dos geradores de \mathcal{C} , ou seja, em $H_1(\mathbf{f}, \mathbb{k}[X_1, \dots, X_r])$, que pelo Teorema anterior é nulo. Isso significa que as syzygies de primeira ordem existentes entre os geradores do ideal de \mathcal{C} são triviais.

3 Sobre o espaço $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$

Neste capítulo iremos apresentar duas diferentes construções do espaço $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$. A primeira delas, feita por Henry Pinkham [24], constrói o moduli através de deformações equivariantes de curvas monomiais e apresentaremos de maneira breve. A segunda, feita por Karl-Otto Stöhr [29], constrói uma compactificação de $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ adicionando curvas Gorenstein no bordo. Esta última construção será feita em detalhes na segunda seção deste capítulo pois o resultado principal da tese se baseia nessa construção.

3.1 A construção por Pinkham

De maneira muito simplificada, a construção de Pinkham pode ser descrita da seguinte forma. Seja \mathcal{C} uma curva projetiva lisa definida sobre um corpo algebricamente fechado \mathbb{k} . Seja $P \in \mathcal{C}$ um ponto de Weierstrass com semigrupo $\mathcal{H} = \langle n_1, \dots, n_r \rangle$ e considere o fibrado $L = \mathcal{O}(P)$. Construa o anel de seções globais $\mathcal{S} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} H^0(\mathcal{C}, L^i)$. Isso permite um mergulho de \mathcal{C} no espaço projetivo com coordenadas X_{n_0}, \dots, X_{n_r} em que são considerados os pesos dessas coordenadas, a saber, $\omega \deg X_{n_0} = 1$ e $\omega \deg X_{n_i} = n_i$ para $i > 0$. Considere agora o cone quase-afim correspondente $\text{Spec}(\mathcal{S})$. Assumindo $X_{n_0} = 0$ temos uma curva monomial e todas as outras fibras são isomorfas a $\mathcal{C} \setminus \{P\}$, logo temos uma suavização da curva monomial. Por outro lado, dada a deformação miniversal em pesos negativos, é possível compactificar as fibras sem compactificar o espaço base, e assim obter uma correspondência biunívoca entre pontos de $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ e as G_m -órbitas na deformação miniversal em pesos negativos.

De maneira mais precisa, seja $\mathcal{H} = \langle n_1, \dots, n_r \rangle$ um semigrupo numérico de gênero $g > 1$ e $\mathcal{C}_{\mathcal{H}} := \text{Spec} \mathbb{k}[\mathcal{H}]$ sua curva monomial afim associada, com $\mathbb{k}[\mathcal{H}] := \bigoplus_{n \in \mathcal{H}} \mathbb{k} t^n$.

Como $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ tem um único ponto singular, a saber, a origem, seu espaço total de deformações versais existe,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_{t_0} \cong \mathcal{C}_{\mathcal{H}} & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{t_0\} = \text{Spec } \mathbb{k} & \longrightarrow & \mathcal{V} \end{array} \quad (3.1)$$

onde $\mathcal{V} = \text{Spec } R$, $R := \mathbb{k}[\mathbf{t}]/\mathbf{J}$, onde \mathbf{t} denota uma quantidade finita de indeterminadas e $\mathcal{X} = \text{Spec } A$ com $A := R[[X_{n_1}, \dots, X_{n_r}]]/(\mathbf{F}^{\infty})$, conforme tese de Schlessinger [27].

Como $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ tem uma ação natural de \mathbb{G}_m dada por $(\alpha, X_i) \mapsto \alpha^{n_i} X_i$, essa ação pode ser estendida aos espaços total e de parâmetros \mathcal{X} e \mathcal{V} , respectivamente, o que pode ser verificado em [24]. O subespaço vetorial $\mathbf{T}^1(\mathbb{k}[\mathcal{H}]) \subset R$, que corresponde ao espaço tangente de \mathcal{V} em $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$, c.f. [27], tem uma graduação natural (Teorema 2.2.6). Escolhendo uma base $\{\beta_{s_i}\}$, $i \geq 1$, para cada parte homogênea graduada de grau $s \in \mathbb{Z}$ de $\mathbf{T}^1(\mathbb{k}[\mathcal{H}])$, existe uma correspondência biunívoca

entre as indeterminadas de \mathbf{t} e os elementos da base de \mathbf{T}^1 , a saber, $\bigcup_{s \in \mathbb{Z}} \beta_{s_i}$, onde o peso de um t_{s_i} em \mathbf{t} correspondente a $\{\beta_{s_i}\}$ é $-\omega \deg(\beta_{s_i}) = -s_i$, enquanto o peso de X_{n_i} é n_i .

Toda a teoria de deformação equivariante de Pinkham é desenvolvida para deformações negativamente graduadas. Porém, com as condições acima, deformações em graus positivos podem aparecer. Vejamos um exemplo.

Exemplo 3.1.1. Tome o semigrupo $\mathcal{H} = \langle 4, 5 \rangle$ de gênero 6 e a curva monomial afim associada $\mathcal{C}_{\mathcal{H}} = \{(a^4, a^5); a \in \mathbb{k}\}$, cujo ideal em \mathbb{A}^2 é gerado pela forma isobárica $F = X_4^5 - X_5^4$ de peso 20. Usando o Teorema 2.2.6, ou o algoritmo apresentado na seção C do Apêndice, pode-se ver que $\dim \mathbf{T}^1(\mathbb{k}[\mathcal{H}]) = 12$, e denotando $\mathbf{T}^1 := \mathbf{T}^1(\mathbb{k}[\mathcal{H}])$, temos

$$\dim \mathbf{T}_2^1 = 1 \text{ e } \dim \mathbf{T}_j^1 = 1, \quad j \in \{-20, -16, -15, -12, -11, -10, -8, -7, -6, -3, -2\} .$$

Assim \mathbf{T}^1 tem contribuição positiva somente na parte homogênea de grau 2. Com isso é esperado que existam deformações positivamente graduadas. De fato, a deformação de $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ induzida pela forma isobárica de peso 20

$$F := X_4^5 - X_5^4 + t_{-2}X_4^3X_5^2,$$

somente intersecta a parte positivamente graduada, em que o peso de $t_{-2} = -2$ que é o peso do elemento base β_2 correspondente em \mathbf{T}_2^1 . Enquanto que, por exemplo, a deformação dada por

$$F := X_4^5 - X_5^4 + t_{-2}X_4^3X_5^2 + t_1X_4X_5^3 - t_2X_4^2X_5^2,$$

intersecta as partes positiva e negativamente graduadas, onde declaramos o peso de $t_i = i$.

Podemos ainda determinar o espaço total de deformações versais, que é dado pelos coeficientes t_i do unfold da forma $F = X_4^5 - X_5^4$, a saber

$$F := X_4^5 - X_5^4 + t_{-2}X_4^3X_5^2 + t_2X_4^2X_5^2 + t_3X_4^3X_5 + t_6X_4X_5^2 + t_7X_4^2X_5 + t_8X_4^3 + t_{10}X_5^2 + t_{11}X_4X_5 + t_{12}X_4^2 + t_{15}X_5 + t_{16}X_4 + t_{20},$$

fato que poderá ser explicado com o Teorema Principal desta tese.

Vale ressaltar ainda que os coeficientes nas variáveis X_4, X_5 que acompanham cada t_i no unfold acima, formam uma base para a álgebra de Tjurina, c.f. Seção A.

Para evitar deformações positivamente graduadas, tomamos R' e A' obtidos de R e A , respectivamente, fazendo $t_{s_i} = 0$ sempre que o peso de β_{s_i} for maior que zero. Como $\mathbf{T}^1(\mathbb{k}[\mathcal{H}])_0 = 0$, todas as variáveis restantes tem pesos positivos. De maneira formal, seja \mathbf{I} o ideal de R gerado pelas imagens dos t'_i s de peso negativo, ou seja, dos elementos de R que correspondem aos elementos na parte positivamente graduada de $\mathbf{T}^1(\mathbb{k}[\mathcal{H}])$. Sejam $R' := R/\mathbf{I}$ e $A' := R[[X_{n_1}, \dots, X_{n_r}]]/(\mathbf{I}\mathbf{F}^\infty)$. Geometricamente, basta intersectar $\text{Spec } R$ com o subespaço linear de $\text{Spec } \mathbb{k}[[\mathbf{t}]]$ em graus negativos.

Denote $\mathcal{T} = \text{Spec } R'$ e $\mathcal{X}' = \text{Spec } A'$. Pinkham mostra em [24, Seção 2.9] que os geradores dos ideais de R' e A' são polinômios, e portanto podemos trocar R' e A' por seus respectivos anéis de polinômios $\mathbb{k}[\mathbf{t}]$ e $\mathbb{k}[\mathbf{t}, X_{n_1}, \dots, X_{n_r}]$, mas mantemos a mesma notação R' e A' . Como J e

F^∞ podem ser gerados por elementos isobáricos, F^∞ é dado pelo *unfold* dos geradores isobáricos de $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ em $\mathbb{k}[X_{n_1}, \dots, X_{n_r}]$, c.f. [28].

Temos assim um homomorfismo $R' \rightarrow A'$ que induz uma mapa birracional $\text{Proj}A' \rightarrow \text{Proj}R'$, que não está definido exatamente no ideal irrelevante R_+ . Uma estratégia usual seria considerar o blowup de $\text{Proj}A'$ ao longo do lugar dado pelo ideal irrelevante R_+A' , mas geralmente a propriedade flat não é mantida. Pinkham então projetiviza as fibras da deformação miniversal

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_{t_0} \cong \mathcal{C}_{\mathcal{H}} & \longrightarrow & \mathcal{X}' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{t_0\} = \text{Spec } \mathbb{k} & \longrightarrow & \mathcal{T} \end{array} \quad (3.2)$$

sem projetivizar o espaço. Para cada equação f^∞ de A' , trocamos t_{s_i} por $t^i X_0^{-s}$, em que X_0 é uma nova variável, e lembrando que $s > 0$, pois estamos em graus negativos. Denotamos esse novo polinômio por \tilde{f}^∞ . Tomando então o anel

$$\mathbf{N} := R'[X_{n_1}, \dots, X_{n_r}, X_0]/(\tilde{f}_i^\infty).$$

Com isso Pinkham mostra (c.f. [24, Seção 4.1]) que \mathbf{N} é flat sobre R' . A estrutura de álgebra graduada para \mathbf{N} é dada atribuindo peso 1 para X_0 e mantendo todos os outros pesos. Temos assim a

Proposição 3.1.1 (Teorema 13.4 de [24]). *O mapa*

$$\pi : \mathcal{Y} := \text{Proj } \mathbf{N} \longrightarrow \mathcal{T}$$

é próprio, flat e suas fibras são curvas projetivas.

Na construção da compactificação das fibras feita por Pinkham, a curva monomial $\mathcal{C}_{\mathcal{H}} \subset \mathbb{A}^r$ é compactificada para a curva monomial projetiva em \mathbb{P}^r adicionando um único ponto no infinito.

Considere σ a seção do morfismo π obtida fazendo $X_0 = 0$. Denote ainda por U o aberto de \mathcal{T} tais que suas fibras por $\text{Spec } \mathbf{N} \rightarrow \mathcal{T}$ são lisas. Note que tanto $\text{Spec } \mathbf{N}$ quanto \mathcal{T} são quase-cones. A fibra sobre o vértice dada pelo mapa $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{T}$ é curva a monomial $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$, enquanto a fibra sobre o vértice no mapa $\text{Proj } \mathbf{N} \rightarrow \mathcal{T}$ é a compactificação de $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ em \mathbb{P}^r .

Teorema 3.1.2 (Teorema 13.9 de [24]). *Seja \mathcal{H} um semigrupo numérico de gênero $g(\mathcal{H}) > 0$. Considere o morfismo $\pi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{T}$ e a seção σ como anteriormente. Vale que as fibras de $\mathcal{Y} \times_{\mathcal{T}} U \rightarrow U$ são curvas lisas de gênero $g = g(\mathcal{H})$ e a seção σ escolhe em cada fibra um ponto P cujo semigrupo de Weierstrass associado é \mathcal{H} . Logo o morfismo $U \rightarrow \mathcal{M}_{g,1}$ se fatora por $\bar{U} := U/\mathbb{G}_m$ e assim temos uma bijeção*

$$\bar{U} \longrightarrow \mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}.$$

A prova do Teorema acima é feita a partir de dois outros resultados também presentes na tese de Pinkham [24]. Assuma as mesmas hipóteses do Teorema acima.

Teorema 3.1.3 (Teorema 13.10 de [24]). *Considere a família $\mathcal{W} := \text{Spec } \mathbf{N} \rightarrow \mathcal{T}$. Dado um ponto $t \in \mathcal{T}$, sua fibra \mathcal{W}_t é uma superfície afim com singularidades normais. Além disso, \mathcal{W}_t é obtida de \mathcal{Y}_t da seguinte forma: Tome $P := \sigma(t)$ um ponto na fibra, mergulhe \mathcal{Y}_t no conjunto algébrico afim \mathbf{Z} dado pelos zeros do fibrado $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_t}(-P)$. Vale que \mathcal{Y}_t tem auto-intersecção -1 em \mathbf{Z} e então \mathcal{W}_t é isomorfo a \mathbf{Z} contraindo \mathcal{Y}_t em um ponto (como no Teorema de contratilidade de Castelnuovo). Assim $P \in \mathcal{Y}_t$ tem semigrupo de Weierstrass \mathcal{H} e portanto $g(\mathcal{Y}_t) = g(\mathcal{H})$.*

Lema 3.1.4 (Lema 13.11 de [24]). *Seja \mathcal{C} uma curva projetiva lisa e $P \in \mathcal{C}$ tal que seu semigrupo de Weierstrass é \mathcal{H} . Existe um única órbita \mathfrak{o} de \mathbb{G}_m em $U \subset \mathcal{T}$ tal que para todo $t \in \mathfrak{o}$, \mathcal{Y}_t é isomorfo a \mathcal{C} e $\sigma(t) = P$.*

Apesar da construção de Pinkham ser válida para qualquer corpo algebricamente fechado \mathbb{k} de característica arbitrária e para qualquer semigrupo numérico \mathcal{H} de gênero maior que zero, ela não traz nenhum indicativo de como é possível encontrar equações que definem a variedade $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$. Uma maneira explícita para encontrar as equações de $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ foi iniciada por Stöhr [29], seguida por Contiero–Stöhr [10] e Contiero–Fontes [8] para semigrupos simétricos.

3.2 A construção da compactificação por Stöhr

Nesta seção vamos exibir a compactificação do espaço de moduli $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ das curvas pontuadas com gênero g e semigrupo de Weierstrass \mathcal{H} dada por Contiero e Stöhr em [10]. Para compactificar esse espaço acrescentaremos as curvas Gorenstein.

Seja \mathcal{C} uma curva Gorenstein inteira completa de gênero g definida sobre um corpo algebricamente fechado \mathbb{k} e seja P um ponto suave de \mathcal{C} . Denote por \mathcal{H} o semigrupo de Weierstrass das não lacunas n_i da curva pontuada (\mathcal{C}, P) . Então para cada $n \in \mathcal{H}$ existe uma função racional x_n em \mathcal{C} com divisor de polo nP que é regular em $\mathcal{C} \setminus \{P\}$. Vamos supor que \mathcal{H} é um semigrupo simétrico, ou seja, $\ell_g = 2g - 1$, e que $\ell_2 = 2$, o que é equivalente a dizer que o semigrupo é não-hiperelíptico. Dessa forma, como $n_{g-j} = 2g - 1 - \ell_j$, temos que $n_{g-1} = 2g - 2$, e portanto $H^0(\mathcal{C}, (2g-2)P)$ é gerado pelas g funções racionais $x_{n_0}, \dots, x_{n_{g-1}}$. Portanto $h^0(\mathcal{C}, (2g-2)P) = g$ e $(2g-2)P$ é um divisor canônico. Com essas hipóteses, o morfismo canônico

$$(x_{n_0} : \dots : x_{n_{g-1}}) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$$

é um mergulho e \mathcal{C} pode ser vista como uma curva de grau $2g - 2$ no espaço projetivo \mathbb{P}^{g-1} , onde os inteiros $\ell_i - 1$, para $i = 1, \dots, g$, são as ordens de contato da curva com os hiperplanos $V(X_i)$, $i = 1, \dots, g$ em $P = (0 : \dots : 0 : 1)$.

Por outro lado, todo semigrupo simétrico não-hiperelíptico pode ser realizado pela curva monomial canônica

$$\mathcal{C}^{(0)} := \{(a^{n_0} b^{\ell_{g-1}} : a^{n_1} b^{\ell_{g-1}-1} : \dots : a^{n_{g-1}} b^{\ell_1-1}) \mid (a : b) \in \mathbb{P}^1\} \subset \mathbb{P}^{g-1}$$

no ponto $P = (0 : 0 : \dots : 1)$ (veja [29]). A curva $\mathcal{C}^{(0)}$ é racional e seu único ponto singular é $(1 : 0 : \dots : 0)$ de multiplicidade n_1 e grau de singularidade g . Com isso teremos a garantia de que o espaço $\overline{\mathcal{M}}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ que iremos construir é não vazio, já que existem semigrupos simétricos que não são realizáveis por curvas lisas (veja [30]).

Precisamos descobrir relações entre os geradores da curva canônica \mathcal{C} . Para isso vamos considerar o espaço das seções globais $H^0(\mathcal{C}, r(2g-2)P)$, com $r > 0$, dos divisores multicanônicos $r(2g-2)P$, e construir bases r -monomiais P -hermitianas, que são bases para $H^0(\mathcal{C}, r(2g-2)P)$ formadas por monômios de grau r nas variáveis $x_{n_0}, \dots, x_{n_{g-1}}$ em que todos os elementos tem ordens de polo distintas em P . Temos o seguinte lema:

Lema 3.2.1. *Seja τ o maior inteiro tal que $n_\tau = \tau n_1$. Uma base P -hermitiana para $H^0(\mathcal{C}, (4g-4)P)$ é dada pelos produtos*

$$\begin{aligned} x_{n_0}x_{n_j} & \quad (j = 0, \dots, g-1) \\ x_{n_i}x_{n_{g-j}} & \quad (i = 1, \dots, \tau, j = 1, \dots, n_1-1) \\ x_{n_i}x_{n_{g-j}} & \quad (i = \tau+1, \dots, g-1, j = 1, \dots, n_i-n_{i-1}) \\ x_{n_{\tau+1}}x_{\ell_{g-\tau-1+kn_1}} & \quad (k = 1, \dots, \tau-1) \end{aligned}$$

Demonstração. Pelo teorema de Riemann temos que $h^0(\mathcal{C}, (4g-4)P) = 3g-3$. Então para verificar que esses produtos formam uma base para esse espaço basta notar que todos eles têm ordens de polo distintas em P e que são, em número, $3g-3$. \square

Para cada não lacuna $s \leq 4g-4$ podemos escrever s como soma de duas não lacunas menores ou iguais a $2g-2$. A maneira de se escrever s como soma de duas não lacunas não é única. Utilizaremos a seguinte notação:

$$s = a_{s_0} + b_{s_0} = a_{s_1} + b_{s_1} = \dots = a_{s_\nu} + b_{s_\nu},$$

com as condições de que $a_{s_0} < a_{s_1} < \dots < a_{s_\nu}$ e $a_{s_j} \leq b_{s_j}, \forall j = 0, \dots, \nu$. Assim podemos fixar $a_{s_0} := a_s$ e $b_{s_0} := b_s$ e daí os elementos $\{x_{a_s}x_{b_s}\}$ formam exatamente a base do Lema 3.2.1.

Exemplo 3.2.1. *Considere o semigrupo simétrico $\mathcal{H} = \langle 6, 8, 9, 10, 11 \rangle$, com $g = 7$. Seja $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^6$ uma curva que realiza \mathcal{H} num ponto liso P . A base P -hermitiana para $H^0(\mathcal{C}, (2g-2)P) = H^0(\mathcal{C}, 12P)$ é dada por*

$$\{x_0, x_6, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}\}$$

e a base para $H^0(\mathcal{C}, 4g-4) = H^0(\mathcal{C}, 24P)$ é dada por

$$\{x_0^2, x_0x_6, x_0x_8, x_0x_9, x_0x_{10}, x_0x_{11}, x_0x_{12}, x_6x_8, x_6x_9, x_6x_{10}, x_6x_{11}, x_6x_{12}, x_8x_{11}, x_8x_{12}, x_9x_{12}, x_{10}x_{12}, x_{11}x_{12}, x_{12}^2\}$$

De fato, basta observar a tabela abaixo, onde fazemos a soma dois a dois dos elementos do sistema canônico de geradores de \mathcal{H} :

$0+0$	$0+6$	$0+8$	$0+9$	$0+10$	$0+11$	$0+12$	$6+8$	$6+9$
						$6+6$		
$6+10$	$6+11$	$6+12$	$8+11$	$8+12$	$9+12$	$10+12$	$11+12$	$12+12$
$8+8$	$8+9$	$8+10$	$9+10$	$9+11$	$10+11$	$11+11$		
		$9+9$		$10+10$				

De maneira geral, é possível construir bases P -hermitianas para os espaços $H^0(\mathcal{C}, r(2g-2)P)$, para $r \geq 3$, utilizando os elementos $\{x_{n_0}, \dots, x_{n_{g-1}}\}$.

Lema 3.2.2. *Para cada inteiro $r \geq 3$ as expressões r -monomiais*

$$\begin{aligned} x_{n_0}^{r-1} x_{n_j} & \quad (j = 0, \dots, g-1) \\ x_{n_0}^{r-3-i} x_{n_1} x_{2g-n_1} x_{n_{g-2}} x_{n_{g-1}}^i & \quad (i = 1, \dots, r-3) \\ x_{n_0}^{r-2-i} x_{a_s} x_{b_s} x_{n_{g-1}}^i & \quad (i = 0, \dots, r-2, s = 2g, \dots, 4g-4) \end{aligned}$$

formam uma base P -hermitiana para o espaço $H^0(\mathcal{C}, r(2g-2)P)$.

Denote por $I(\mathcal{C}) \subset \mathbb{k}[X_{n_0}, \dots, X_{n_{g-1}}]$ o ideal da curva canônica $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^{g-1}$ no anel de polinômios nas variáveis $X_{n_0}, \dots, X_{n_{g-1}}$. Como $I(\mathcal{C})$ é um ideal homogêneo podemos escrever

$$I(\mathcal{C}) = \bigoplus_{r=2}^{\infty} I_r(\mathcal{C}),$$

onde $I_r(\mathcal{C})$ é o espaço das r -formas que se anulam nos pontos de \mathcal{C} . Como visto nos lemas acima, dado $r > 0$, existe uma base P -hermitiana r -monomial para o espaço de seções globais do divisor multicanônico $r(2g-2)P$, e isso induz um homomorfismo sobrejetor

$$\begin{aligned} \mathbb{k}[X_{n_0}, \dots, X_{n_{g-1}}]_r & \rightarrow H^0(\mathcal{C}, r(2g-2)P) \\ X_{n_i} & \mapsto x_{n_i} \end{aligned}$$

Pelo teorema de Riemann sabemos que $h^0(\mathcal{C}, r(2g-2)P) = 3g-3$. Daí, devido à sobrejetividade, temos, em particular,

$$\dim I_2(\mathcal{C}) = \binom{g+1}{2} - (3g-3) \Rightarrow \dim I_2(\mathcal{C}) = \frac{(g-2)(g-3)}{2}$$

Associamos a cada variável X_n o peso n e construímos para cada $r \geq 2$ o espaço vetorial em $\mathbb{k}[X_{n_0}, \dots, X_{n_{g-1}}]$, denotado por Λ_r , dado pelo "levantamento" da base P -hermitiana de $H^0(\mathcal{C}, r(2g-2)P)$, ou seja, o espaço vetorial gerado pelos r -monômios em $X_{n_0}, \dots, X_{n_{g-1}}$ cujos pesos são todos distintos e variam entre as não-lacunas menores ou iguais a $r(2g-2)$. Note então que os elementos de Λ_r não se anulam em \mathcal{C} , pois, caso contrário, os elementos da base P -hermitiana do Lema 3.2.2 se anulariam em P , o que não acontece. Dessa maneira temos $\Lambda_r \cap I_r(\mathcal{C}) = 0$ e

$$\dim \Lambda_r = \dim H^0(\mathcal{C}, r(2g-2)P) = \text{codim } I_r(\mathcal{C}),$$

e daí temos

$$\Lambda_r \oplus I_r(\mathcal{C}) = \mathbb{k}[X_{n_0}, \dots, X_{n_{g-1}}]_r \quad \text{para cada } r \geq 2.$$

Conhecendo a base P -hermitiana do espaço $H^0(\mathcal{C}, (4g-4)P)$, dado $s \leq 4g-4$, para cada produto $x_{a_{s_i}} x_{b_{s_i}}$, $i = 1, \dots, \nu_s$, podemos escrever

$$x_{a_{s_i}} x_{b_{s_i}} = \sum_{n=0}^s c_{s_i n} x_{a_n} x_{b_n},$$

onde os coeficientes c_{sin} são constantes unicamente determinadas e o somatório é tomado sobre as não-lacunas de \mathcal{H} menores ou iguais a s . Se necessário, podemos multiplicar as funções $x_{n_0}, \dots, x_{n_{g-1}}$ por constantes adequadas e considerar $c_{sin} = 1$ sempre que $n = s$. Considere então as formas quadráticas em $\mathbb{k}[X_{n_0}, \dots, X_{n_{g-1}}]$:

$$F_{si} := X_{a_{si}}X_{b_{si}} - X_{a_s}X_{b_s} - \sum_{n=0}^{s-1} c_{sin}X_{a_n}X_{b_n}. \quad (3.3)$$

Por construção, essas formas são identicamente nulas em \mathcal{C} . Elas são linearmente independentes e em número $\frac{1}{2}(g-2)(g-3)$. Portanto formam uma base para o espaço $I_2(\mathcal{C})$.

Associamos a cada variável c_{sin} o peso $s-n$. Assim, se considerarmos os coeficientes c_{sin} também como variáveis das formas F_{si} , estas serão polinômios isobáricos de peso s , já que cada termo do somatório tem peso s .

Note que as funções regulares geradoras de $H^0(\mathcal{C}, (2g-2)P)$ não são unicamente determinadas, pois são apenas funções que têm ordem de polo n no ponto P . Assim podemos, sem perda de generalidade, considerar $x_{n_0} = x_0 = 1$.

De acordo com o Teorema de Petri [1], se \mathcal{C} é uma curva canônica de gênero $g \geq 4$, então o ideal de \mathcal{C} é gerado pelas formas (3.3), a menos que \mathcal{C} seja trigonal ou isomorfa a uma quártica plana lisa. Então, no que segue, vamos considerar algumas restrições no semigrupo \mathcal{H} . O semigrupo \mathcal{H} deve ser simétrico,

$$3 < n_1 < g \quad \text{e} \quad \mathcal{H} \neq \langle 4, 5 \rangle,$$

pois no caso em que $n_1 = 3$ a curva canônica \mathcal{C} é trigonal e no caso $\mathcal{H} = \langle 4, 5 \rangle$ a curva é isomorfa a uma quártica plana. Essa mesma construção foi estendida para quaisquer semigrupo simétricos por Contiero e Fontes em [8].

Como mencionado anteriormente, a maneira de escrever uma não lacuna $s \leq 4g-4$ não é única. Em [20] temos o seguinte teorema:

Teorema 3.2.3. *Seja \mathcal{H} um semigrupo de gênero g com $\ell_3 = 3$. Se a sequência de lacunas é diferente de $\{1, \dots, g-2, 2g-4, 2g-3\}$ e $\{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$, então:*

1. $\ell_j < 2j - 2$ para cada $j \in \{4, \dots, g-1\}$;
2. Para cada inteiro $k \in \{3, \dots, g-1\}$ existem inteiros $i_k, j_k \in \{2, \dots, k-1\}$ tais que $\ell_k + 1 = \ell_{i_k} + \ell_{j_k}$.

Utilizando a caracterização dos semigrupos simétricos de que $\ell_j = 2g-1-n_{g-j}$, para $j = 1, \dots, g$, podemos reescrever o item 2 do Teorema acima utilizando as não lacunas:

$$\begin{aligned} 2g-1-n_{g-k}+1 &= 2g-1-n_{g-i_k}+2g-1-n_{g-j_k} \\ \Rightarrow -n_{g-k} &= (2g-2)-n_{g-i_k}-n_{g-j_k} \\ \Rightarrow n_{g-i_k}+n_{g-j_k} &= 2g-2+n_{g-k}. \end{aligned}$$

Assim, para cada não lacuna $s = 2g-2+n_i$, para $i = 0, \dots, g-3$, temos $\nu_s \geq 1$ e podemos supor $a_{s1} = n_i$ e $b_{s1} = 2g-2$. Dessa forma temos a garantia da existência das formas quadráticas

$F_{n_i+2g-2,1}, i = 0, \dots, g-3$. Como os pontos da curva $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^{g-1}$ anulam as formas $F_{n_i+2g-2,1}$ temos que \mathcal{C} está contida em cada uma das $g-2$ hipersuperfícies $V(F_{n_i+2g-2,1}), i = 0, \dots, g-3$.

Observação 3.2.1. *As $g-2$ hipersuperfícies $V(F_{n_i+2g-2,1}), i = 0, \dots, g-3$ se intersectam transversalmente no ponto de Weierstrass P . De fato, as formas $F_{n_i+2g-2,1}$ são do tipo*

$$F_{n_i+2g-2,1} = X_{n_i}X_{2g-2} - X_{a_s}X_{b_s} - \sum_{n=0}^{s-1} c_{sin} X_{a_n}X_{b_n},$$

onde a soma é tomada sobre as não-lacunas. Quando calculamos o vetor gradiente dessas formas e aplicamos em $P(0 : \dots : 0 : 1)$, teremos $g-2$ vetores linearmente independentes, o que nos leva a concluir que as $g-2$ hipersuperfícies $V(F_{n_i+2g-2,1}), i = 0, \dots, g-3$ se intersectam transversalmente no ponto de Weierstrass P . Além disso, concluimos também que curva $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^{g-1}$ é interseção completa numa vizinhança de P .

Até agora o que fizemos foi tomar uma curva Gorenstein \mathcal{C} que realiza o semigrupo de Weierstrass \mathcal{H} num ponto P e encontramos formas quadráticas que se anulam nos pontos de \mathcal{C} . Vamos agora fazer o processo inverso. Dado um semigrupo \mathcal{H} de gênero g tal que $3 < n_1 < g$ e $\mathcal{H} \neq \langle 4, 5 \rangle$, considere as $\frac{1}{2}(g-2)(g-3)$ formas quadráticas

$$F_{si} = X_{a_{si}}X_{b_{si}} - X_{a_s}X_{b_s} - \sum_{n=0}^{s-1} c_{sin} X_{a_n}X_{b_n}.$$

Queremos encontrar condições sob as constantes c_{sin} de maneira que a interseção das hipersuperfícies $V(F_{si})$ seja uma curva inteira Gorenstein. Observe que tanto as formas F_{si} quanto os Lemas 3.2.1 e 3.2.2 dependem apenas do semigrupo. Vamos definir as formas

$$F_{si}^{(0)} := X_{a_{si}}X_{b_{si}} - X_{a_s}X_{b_s}.$$

Temos então o seguinte resultado:

Lema 3.2.4. *O ideal $I(\mathcal{C}^{(0)})$ da curva monomial canônica é gerado pelos binômios quadráticos*

$$F_{si}^{(0)} := X_{a_{si}}X_{b_{si}} - X_{a_s}X_{b_s}.$$

Demonstração. Denote por $I^{(0)}$ o ideal gerado pelas formas isobáricas $F_{si}^{(0)}$. Como os pontos de $\mathcal{C}^{(0)}$ anulam essas formas, temos $I^{(0)} \subset I(\mathcal{C}^{(0)})$. Vamos agora mostrar que $I(\mathcal{C}^{(0)}) \subset I^{(0)}$. Como o ideal $I(\mathcal{C}^{(0)})$ é homogêneo e isobárico, para mostrar que um polinômio de $I(\mathcal{C}^{(0)})$ pertence a $I^{(0)}$ basta mostrar que a soma de seus coeficientes é igual a zero. Aplicando técnicas de bases de Gröebner é possível estender a base $\{F_{si}^{(0)}\}$ de $I^{(0)}$ em uma base de Gröebner (para mais detalhes, veja [29]).

Seja F um polinômio homogêneo de grau r . Dividindo F pela base de Groebner, obtemos uma decomposição

$$F = \sum_{si} G_{si} F_{si}^{(0)} + R,$$

onde R pertence ao levantamento da base P -hermitiana Λ_r e para cada duplo índice si , o polinômio G_{si} é homogêneo de grau $r-2$. Se F é isobárico de peso ω , então cada G_{si} é isobárico de peso $s-\omega$ e o resto R é o único monômio em Λ_r de peso ω cujo coeficiente é igual a soma dos coeficientes de F . Assim, se $F \in I(\mathcal{C}^{(0)})$, então $R = 0$ e $F \in I^{(0)}$. \square

Exemplo 3.2.2. *O ideal da curva monomial $\mathcal{C}^{(0)}$ que realiza o semigrupo $\mathcal{H} = \langle 6, 8, 9, 10, 11 \rangle$ do Exemplo 3.2.1 é gerado pelas 10 formas quadráticas*

$$\begin{aligned} F_{12,1}^{(0)} &= X_6^2 - X_0X_{12} & F_{16,1}^{(0)} &= X_8^2 - X_6X_{10} & F_{17,1}^{(0)} &= X_8X_9 - X_6X_{11} \\ F_{18,1}^{(0)} &= X_8X_{10} - X_6X_{12} & F_{18,2}^{(0)} &= X_9^2 - X_6X_{12} & F_{19,1}^{(0)} &= X_9X_{10} - X_8X_{11} \\ F_{20,1}^{(0)} &= X_9X_{11} - X_8X_{12} & F_{20,2}^{(0)} &= X_{10}^2 - X_8X_{12} & F_{21,1}^{(0)} &= X_{10}X_{11} - X_9X_{12} \\ & & F_{22,1}^{(0)} &= X_{11}^2 - X_{10}X_{12} & & \end{aligned}$$

Note que as formas quadráticas introduzidas em (3.3) dependem somente do semigrupo \mathcal{H} e da base P -hermitiana fixada no Lema 3.2.1. Desta forma, dado um semigrupo simétrico não-hiperelítico \mathcal{H} podemos considerar as formas quadráticas $F_{si}^{(0)}$, como no Lema 3.2.4, e tomar o desdobramento (*unfold*) de cada uma delas. O desdobramento consiste em *perturbar* $F_{si}^{(0)}$ através de combinações lineares dos elementos da base P -hermitiana do Lema 3.2.1 cujos pesos são menores que s e os coeficientes são considerados variáveis, obtendo assim formas quadráticas como em (3.3).

Exemplo 3.2.3. *Vamos exibir as formas quadráticas F_{si} para o semigrupo $\mathcal{H} = \langle 6, 8, 9, 10, 11 \rangle$ do Exemplo 3.2.1. Elas são construídas observando a tabela do exemplo. Note que como $g = 7$ elas são, em número, $\frac{(7-2)(7-3)}{2} = 10$. São elas:*

- $F_{12,1} = X_6^2 - X_0X_{12} - c_{12,1,1}X_0X_{11} - c_{12,1,2}X_0X_{10} - c_{12,1,3}X_0X_9 - c_{12,1,4}X_0X_8 - c_{12,1,6}X_0X_6 - c_{12,1,12}X_0^2$
- $F_{16,1} = X_8^2 - X_6X_{10} - c_{16,1,1}X_6X_9 - c_{16,1,2}X_6X_8 - c_{16,1,4}X_0X_{12} - c_{16,1,5}X_0X_{11} - c_{16,1,6}X_0X_{10} - c_{16,1,7}X_0X_9 - c_{16,1,8}X_0X_8 - c_{16,1,10}X_0X_6 - c_{16,1,16}X_0^2$
- $F_{17,1} = X_8X_9 - X_6X_{11} - c_{17,1,1}X_6X_{10} - c_{17,1,2}X_6X_9 - c_{17,1,3}X_6X_8 - c_{17,1,5}X_0X_{12} - c_{17,1,6}X_0X_{11} - c_{17,1,7}X_0X_{10} - c_{17,1,8}X_0X_9 - c_{17,1,9}X_0X_8 - c_{17,1,11}X_0X_6 - c_{17,1,17}X_0^2$
- $F_{18,1} = X_8X_{10} - X_6X_{12} - c_{18,1,1}X_6X_{11} - c_{18,1,2}X_6X_{10} - c_{18,1,3}X_6X_9 - c_{18,1,4}X_6X_8 - c_{18,1,6}X_0X_{12} - c_{18,1,7}X_0X_{11} - c_{18,1,8}X_0X_{10} - c_{18,1,9}X_0X_9 - c_{18,1,10}X_0X_8 - c_{18,1,12}X_0X_6 - c_{18,1,18}X_0^2$
- $F_{18,2} = X_9^2 - X_6X_{12} - c_{18,2,1}X_6X_{11} - c_{18,2,2}X_6X_{10} - c_{18,2,3}X_6X_9 - c_{18,2,4}X_6X_8 - c_{18,2,6}X_0X_{12} - c_{18,2,7}X_0X_{11} - c_{18,2,8}X_0X_{10} - c_{18,2,9}X_0X_9 - c_{18,2,10}X_0X_8 - c_{18,2,12}X_0X_6 - c_{18,2,18}X_0^2$
- $F_{19,1} = X_9X_{10} - X_8X_{11} - c_{19,1,1}X_6X_{12} - c_{19,1,2}X_6X_{11} - c_{19,1,3}X_6X_{10} - c_{19,1,4}X_6X_9 - c_{19,1,5}X_6X_8 - c_{19,1,7}X_0X_{12} - c_{19,1,8}X_0X_{11} - c_{19,1,9}X_0X_{10} - c_{19,1,10}X_0X_9 - c_{19,1,11}X_0X_8 - c_{19,1,13}X_0X_6 - c_{19,1,19}X_0^2$
- $F_{20,1} = X_9X_{11} - X_8X_{12} - c_{20,1,1}X_8X_{11} - c_{20,1,2}X_6X_{12} - c_{20,1,3}X_6X_{11} - c_{20,1,4}X_6X_{10} - c_{20,1,5}X_6X_9 - c_{20,1,6}X_6X_8 - c_{20,1,8}X_0X_{12} - c_{20,1,9}X_0X_{11} - c_{20,1,10}X_0X_{10} - c_{20,1,11}X_0X_9 - c_{20,1,12}X_0X_8 - c_{20,1,14}X_0X_6 - c_{20,1,20}X_0^2$
- $F_{20,2} = X_{10}X_{10} - X_8X_{12} - c_{20,2,1}X_8X_{11} - c_{20,2,2}X_6X_{12} - c_{20,2,3}X_6X_{11} - c_{20,2,4}X_6X_{10} - c_{20,2,5}X_6X_9 - c_{20,2,6}X_6X_8 - c_{20,2,8}X_0X_{12} - c_{20,2,9}X_0X_{11} - c_{20,2,10}X_0X_{10} - c_{20,2,11}X_0X_9 - c_{20,2,12}X_0X_8 - c_{20,2,14}X_0X_6 - c_{20,2,20}X_0^2$
- $F_{21,1} = X_{10}X_{11} - X_9X_{12} - c_{21,1,1}X_8X_{12} - c_{21,1,2}X_8X_{11} - c_{21,1,3}X_6X_{12} - c_{21,1,4}X_6X_{11} - c_{21,1,5}X_6X_{10} - c_{21,1,6}X_6X_9 - c_{21,1,7}X_6X_8 - c_{21,1,9}X_0X_{12} - c_{21,1,10}X_0X_{11} - c_{21,1,11}X_0X_{10} - c_{21,1,12}X_0X_9 - c_{21,1,13}X_0X_8 - c_{21,1,15}X_0X_6 - c_{21,1,21}X_0^2$

- $F_{22,1} = X_{11}^2 - X_{10}X_{12} - c_{22,1,1}X_9X_{12} - c_{22,1,2}X_8X_{12} - c_{22,1,3}X_8X_{11} - c_{22,1,4}X_6X_{12} - c_{22,1,5}X_6X_{11} - c_{22,1,6}X_6X_{10} - c_{22,1,7}X_6X_9 - c_{22,1,8}X_6X_8 - c_{22,1,10}X_0X_{12} - c_{22,1,11}X_0X_{11} - c_{22,1,12}X_0X_{10} - c_{22,1,13}X_0X_9 - c_{22,1,14}X_0X_8 - c_{22,1,16}X_0X_6 - c_{22,1,22}X_0^2$

Tome o espaço afim \mathbb{A}^N onde os coeficientes c_{sin} são suas funções coordenadas e considere \mathcal{X} o lugar dos zeros das formas desdobradas. Temos \mathcal{X} um fechado em $\mathbb{P}^{g-1} \times \mathbb{A}^N$ e tome π como a restrição de \mathcal{X} a segunda projeção $\mathbb{P}^{g-1} \times \mathbb{A}^N \rightarrow \mathbb{A}^N$. Dessa forma temos um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{(0)} & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ \text{Spec } \mathbb{k} & \longrightarrow & \mathbb{A}^N \end{array}$$

cujas fibras são fechados de \mathbb{P}^N e a fibra especial é $\mathcal{C}^{(0)}$. Queremos encontrar condições nos coeficientes c_{sin} de maneira que tomando uma fibra sobre π tenhamos uma curva canônica Gorenstein com um ponto cujo semigrupo de Weierstrass nesse ponto seja \mathcal{H} .

Chamamos de *syzygies* entre as formas quadráticas $F_{si}^{(0)}$ equações polinomiais da forma

$$\sum_{si} B_{si} F_{si}^{(0)} = 0.$$

Uma syzygy é dita *homogênea de grau n* quando os polinômios B_{si} são homogêneos de grau $n - 2$, é dita *isobárica de peso w* quando os polinômios B_{si} são isobáricos de peso $w - s$ e é dita *linear* quando os polinômios B_{si} são formas lineares. Dizemos que a syzygy é trivial se ela é dada por uma relação do tipo $BF - FB = 0$.

Lema 3.2.5 (Lema da Syzygy). *Para cada uma das $\frac{1}{2}(g-2)(g-5)$ formas quadráticas $F_{s'i'}^{(0)}$ diferentes de $F_{2g-2+n_i,1}^{(0)}$, $i = 0, \dots, g-3$, existe uma syzygy linear isobárica da forma*

$$X_{2g-2} F_{s'i'}^{(0)} + \sum_{nsi} \epsilon_{nsi}^{(s'i')} X_n F_{si}^{(0)} = 0$$

onde os coeficientes $\epsilon_{nsi}^{(s'i')}$ são inteiros iguais a 1, -1 ou 0, a soma é tomada sobre as não lacunas $n \leq 2g-2$ e os duplos índices si tais que $n+s = 2g-2+s'$, com $n < 2g-2$ sempre que $F_{si}^{(0)}$ for diferente de $F_{2g-2+n_i,1}^{(0)}$, $i = 0, \dots, g-3$.

Demonstração. Vamos analisar os casos e apresentar explicitamente as syzygies. Sejam n, m, n_i e n_j não lacunas de \mathcal{H} menores que $2g-2$. Para facilitar a notação, denotaremos $F := F_{si}^{(0)}$.

1º caso: Seja $F = X_{n_i}X_{n_j} - X_0X_n$, com $n < 2g-2$ e $0 < n_i \leq n_j < n$. Se $2g-2-n_i$ é uma não lacuna, temos a syzygy

$$X_{2g-2}(X_{n_i}X_{n_j} - X_0X_n) - X_n(X_{n_i}X_{2g-2-n_i} - X_0X_{2g-2}) + X_{n_i}(X_nX_{2g-2-n_i} - X_{n_j}X_{2g-2}) = 0.$$

Se $2g-2-n_j$ e $2g-2-n$ são não lacunas, encontramos as syzygies de maneira análoga. Precisamos agora analisar o caso em que $2g-2-n_i$, $2g-2-n_j$ e $2g-2-n$ são lacunas. Nesse caso, usando a simetria de \mathcal{H} , temos que

$$2g-1 - (2g-2-n_i) = n_i + 1$$

é uma não lacuna. Da mesma maneira verificamos que $n_j + 1$ e $n + 1$ também são não lacunas. Portanto temos a syzygy

$$X_{2g-2}(X_{n_i}X_{n_j} - X_0X_n) - X_0(X_{n+1}X_{2g-3} - X_nX_{2g-2}) - X_{2g-3}(X_{n_i+1}X_{n_j} - X_0X_{n+1}) + X_{n_j}(X_{n_i+1}X_{2g-3} - X_{n_i}X_{2g-2}) = 0$$

2º caso: Seja $F = X_{n_i}X_{n_j} - X_nX_m$, com $n < n_{g-2}$ e $m < 2g - 2$. Se $2g - 2 - n_i$ é uma não lacuna, então $n_k = 2g - 2 - n_i + n$ também é não lacuna e $n_k \leq 2g - 2$. Então temos a syzygy

$$X_{2g-2}(X_{n_i}X_{n_j} - X_nX_m) - X_m(X_{n_i}X_{n_k} - X_nX_{2g-2}) + X_{n_i}(X_{n_k}X_m - X_{n_j}X_{2g-2}) = 0.$$

Obtemos syzygies de maneira análoga para os casos em que $2g - 2 - n_j, 2g - 2 - n$ e $2g - 2 - m$ são não lacunas. Suponha então que $2g - 2 - n_i, 2g - 2 - n_j, 2g - 2 - n$ e $2g - 2 - m$ sejam lacunas. Pela simetria de \mathcal{H} temos que $n_i + 1, n_j + 1, n + 1$ e $m + 1$ são não lacunas. Nesse caso temos a syzygy

$$X_{2g-2}(X_{n_i}X_{n_j} - X_nX_m) - X_m(X_{n+1}X_{2g-3} - X_nX_{2g-2}) - X_{2g-3}(X_{n_i+1}X_{n_j} - X_{n+1}X_m) + X_{n_j}(X_{n_i+1}X_{2g-3} - X_{n_i}X_{2g-2}) = 0.$$

3º caso: Seja $F = X_{n_i}X_{n_j} - X_nX_{2g-2}$. Nesse caso, se considerarmos a soma

$$X_{2g-2}F - X_{2g-2}F_{s1}^{(0)},$$

anulamos os termos que contém X_{2g-2}^2 e o caso se reduz a um dos dois casos que já foram analisados. \square

Exemplo 3.2.4. Vamos encontrar as syzygies dos geradores da curva monomial do Exemplo 3.2.1. Como $g = 7$ elas são, em número, $\frac{(7-2)(7-5)}{2} = 5$. O Lema da Syzygy garante que para as formas $F_{16,1}^{(0)}, F_{17,1}^{(0)}, F_{18,2}^{(0)}, F_{19,1}^{(0)}$ e $F_{20,2}^{(0)}$ existe uma syzygy linear e isobárica como no Lema. São elas:

- $X_{12}F_{16,1} + X_8F_{20,2} - X_{10}F_{18,1} = 0;$
- $X_{12}F_{17,1} + X_8F_{21,1} - X_{11}F_{18,1} = 0;$
- $X_{12}F_{18,2} + X_9F_{21,1} - X_{12}F_{18,1} - X_{10}F_{20,1} = 0;$
- $X_{12}F_{19,1} + X_9F_{22,1} - X_{11}F_{20,1} = 0;$
- $X_{12}F_{20,2} + X_{10}F_{22,1} - X_{12}F_{20,1} - X_{11}F_{21,1} = 0.$

Lema 3.2.6. Seja I o ideal gerado pelas $\frac{1}{2}(g-2)(g-3)$ formas quadráticas F_{s_i} . Então

$$\mathbb{k}[X_{n_0}, \dots, X_{n_{g-1}}]_r = I_r + \Lambda_r, \quad \text{para cada } r \geq 2.$$

Demonstração. Seja F um polinômio homogêneo de grau r e peso ω . Vamos provar o resultado por indução sobre ω .

Se $\omega = 0$ então $F = \alpha X_0^r$, com $\alpha \in \mathbb{k}$. Assim $F \in \Lambda_r$ já que $x_0^r \in H^0(\mathcal{C}, r(2g-2)P)$. Suponha que o resultado seja válido para todo peso menor ou igual a $\omega - 1$. Seja G a componente

isobárica de peso ω de F e seja R o único monômio de Λ_r de peso ω cujo coeficiente é a soma dos coeficientes de G . Então a soma dos coeficientes de $G - R$ é zero e este é um polinômio isobárico de peso ω . Portanto $G - R \in I(\mathcal{C}^{(0)})$, ou seja, existem $G_{si} \in \mathbb{k}[X_{n_0}, \dots, X_{n_{g-1}}]$ tais que

$$G - R = \sum G_{si} F_{si}^{(0)}.$$

Se substituirmos G_{si} por sua parte homogênea de grau $r - 2$, podemos considerá-lo um polinômio homogêneo de grau $r - 2$. Da mesma maneira, se o substituirmos por sua parte isobárica de peso $s - \omega$, podemos considerá-lo um polinômio de peso $s - \omega$. Assim, o polinômio

$$F - G = F - \sum G_{si} F_{si}^{(0)} - R$$

é homogêneo de grau r e peso menor ou igual a $\omega - 1$. Então, considerando F_{si} como o *unfold* da forma $F_{si}^{(0)}$, temos que o polinômio

$$F - \sum G_{si} F_{si} - R$$

é homogêneo de grau r e peso menor ou igual a $\omega - 1$. Pela hipótese de indução, temos

$$F - \sum G_{si} F_{si} - R = \sum G'_{si} F_{si} + R',$$

onde G'_{si} é um polinômio homogêneo de peso $\omega - 1 - s$ e $R' \in \Lambda_r$ tem peso $\omega - 1$. Daí

$$F = \underbrace{\sum (G'_{si} + G_{si}) F_{si}}_{\in I_r} + \underbrace{R + R'}_{\in \Lambda_r}.$$

□

Vamos agora substituir no Lema da Syzygy as formas quadráticas $F_{si}^{(0)}$ e $F_{s'i'}^{(0)}$ pelas formas desdobradas F_{si} e $F_{s'i'}$. O que teremos é uma soma de monômios de grau três que não é igual a zero mas que, pelo Lema 3.2.6, possui uma decomposição como soma das formas F_{si} multiplicadas por uma variável e elementos de Λ_3 :

$$X_{2g-2} F_{s'i'} + \sum_{nsi} \epsilon_{nsi}^{(s'i')} X_n F_{si} = \sum_{nsi} \eta_{nsi}^{(s'i')} X_n F_{si} + R_{s'i'}$$

onde o somatório do lado direito da igualdade é tomado sobre as não lacunas $n \leq 2g - 2$ e os duplos índices si onde $n + s \leq s' + 2g - 2$, os termos $\eta_{nsi}^{(s'i')}$ são constantes inteiras e $R_{s'i'}$ são combinações lineares dos monômios cúbicos de Λ_3 que possuem pesos menores que $s' + 2g - 2$ distintos dois a dois.

Para cada não lacuna $m < s' + 2g - 2$, seja $\varrho_{s'i'm}$ o único coeficiente de $R_{s'i'}$ de peso m . Esses coeficientes são expressões polinomiais de peso $s' + 2g - 2 - m$ nas variáveis c_{sin} . Note que não perdemos informações sobre os coeficientes de $R_{s'i'}$ se substituirmos as variáveis X_n por potências t^n da variável t . Então, para facilitar a notação, vamos considerar o polinômio

$$R_{s'i'}(t^{n_0}, t^{n_1}, \dots, t^{n_{g-1}}) = \sum_{m=0}^{s'+2g-3} \varrho_{s'i'm} t^m,$$

onde o somatório varia apenas nas não lacunas m .

Teorema 3.2.7. *Seja $\mathcal{H} \subset \mathbb{N}$ um semigrupo numérico de gênero g satisfazendo $3 < n_1 < g$ e $\mathcal{H} \neq \langle 4, 5 \rangle$. Então as $\frac{1}{2}(g-2)(g-3)$ formas quadráticas $F_{si} = F_{si}^{(0)} - \sum_{n=0}^{s-1} c_{sin} X_{a_n} X_{b_n}$ se intersectam uma curva inteira canônica Gorenstein em \mathbb{P}^{g-1} se e somente se os coeficientes c_{sin} satisfazem as equações quase-homogêneas $\varrho_{s'i'm} = 0$. Nesse caso o ponto $P = (0 : 0 : \dots : 1)$ é um ponto liso da curva canônica com semigrupo de Weierstrass \mathcal{H} .*

Demonstração. Suponha que as $\frac{1}{2}(g-2)(g-3)$ formas quadráticas F_{si} se intersectem em uma curva inteira canônica Gorenstein em \mathbb{P}^{g-1} . Como

$$R_{s'i'} = X_{2g-2} F_{s'i'} + \sum_{nsi} \epsilon_{nsi}^{(s'i')} X_n F_{si} - \sum_{nsi} \eta_{nsi}^{(s'i')} X_n F_{si},$$

temos que cada $R_{s'i'}$ pertence ao ideal I gerado pelas formas F_{si} , o que implica $R_{s'i'}(x_{n_0}, \dots, x_{n_{g-1}}) = 0$ para todo $s'i'$. Temos também

$$R_{s'i'}(x_{n_0}, \dots, x_{n_{g-1}}) = \sum_{m=0}^{s'+2g-3} \varrho_{s'i'm} z_{s'i'm},$$

onde $z_{s'i'm}$ é um monômio de peso m nas funções-coordenada $x_{n_0}, \dots, x_{n_{g-1}}$, e portanto tem divisor de polo mP . Como é o único com esse peso e $R_{s'i'}(x_{n_0}, \dots, x_{n_{g-1}}) = 0$, segue $\varrho_{s'i'm} = 0$.

Reciprocamente, suponha que os coeficientes c_{sin} satisfaçam as equações $\varrho_{s'i'm} = 0$. Pela Observação 3.2.1, temos que as $g-2$ hipersuperfícies $V(F_{2g-2+n_i,1}) \subset \mathbb{P}^{g-1}$, $g=0, \dots, g-3$, se intersectam transversalmente em $P(0 : \dots : 0 : 1)$, ou seja, a interseção dessas hipersuperfícies é uma curva algébrica inteira projetiva, lisa no ponto P , que denotaremos por \mathcal{C} . Precisamos agora mostrar que essa curva é Gorenstein e canônica. Sejam $y_{n_0}, \dots, y_{n_{g-1}}$ as funções-coordenada de \mathcal{C} . Como as funções coordenada não são unicamente determinadas, podemos supor $y_{n_{g-1}} = 1$. Pela simetria de \mathcal{H} temos $n_{g-1} - n_{g-2} = \ell_2 - \ell_1 = 1$, e portanto, como a ordem de polo $y_{n_{g-1}}$ é zero em P , $t := y_{n_{g-2}}$ é um parâmetro local de \mathcal{C} em P e $y_{n_0}, \dots, y_{n_{g-3}}$ são séries de potências na variável t de ordem maior que 1. Analisando as $g-2$ equações $F_{2g-2+n_i,1} = 0$, como

$$F_{2g-2+n_i,1} = X_{n_j} X_{n_k} - X_{n_i} \cdot X_{n_{g-1}} \dots - (\text{termos de menor peso}),$$

temos

$$y_{n_i} = y_{n_j} \cdot y_{n_k} + \dots (\text{potências de grau maior}) = t^{n_{g-1}-n_i} + \dots = t^{\ell_{g-i}-1+\dots},$$

para $i=0, \dots, g-1$. Portanto os inteiros $\ell_i - 1, i=2, \dots, g$ são as ordens de contato de \mathcal{C} com os hiperplanos $V(X_i)$.

Por hipótese temos que os restos $R_{s'i'}$, que são em número $\frac{1}{2}(g-2)(g-5)$, são iguais a zero. Portanto as syzygies das formas quadráticas desdobradas são da forma

$$X_{2g-2} F_{s'i'} + \sum_{nsi} \epsilon_{nsi}^{(s'i')} X_n F_{si} - \sum_{nsi} \eta_{nsi}^{(s'i')} X_n F_{si} = 0.$$

Substituindo as variáveis $X_{n_0}, \dots, X_{n_{g-1}}$ pelas funções-coordenadas $y_{n_0}, \dots, y_{n_{g-1}}$ de \mathcal{C} , temos um sistema linear homogêneo de $\frac{1}{2}(g-2)(g-5)$ equações nas $\frac{1}{2}(g-2)(g-5)$ funções $F_{s'i'}(y_{n_0}, \dots, y_{n_{g-1}})$ com coeficientes em $\mathbb{k}[[t]]$. Como os índices triplos nsi de ϵ e η satisfazem $n < 2g-2, n+s = s'+2g-2$ e $n \leq 2g-2, n+s < s'+2g-2$, respectivamente, temos que

a diagonal principal da matriz do sistema é igual a 1 enquanto as demais entradas tem ordens positivas. Assim a matriz é invertível e $F_{si}(y_{n_0}, \dots, y_{n_{g-1}}) = 0$ para todo índice si .

Seja I o ideal gerado pelas $\frac{1}{2}(g-2)(g-3)$ formas F_{si} . Pela afirmação feita acima, como $F_{si}(y_{n_0}, \dots, y_{n_{g-1}}) = 0$, temos $I \subset I(\mathcal{C})$.

Pelo Lema 3.2.6, como $\mathbb{k}[X_{n_0}, \dots, X_{n_{g-1}}]_r = I_r + \Lambda_r$, temos

$$\dim \mathbb{k}[X_{n_0}, \dots, X_{n_{g-1}}]_r \leq \dim I_r + \dim \Lambda_r \Rightarrow \dim \Lambda_r \geq \text{codim } I_r,$$

para cada $r \geq 2$. Por outro lado, como $I_r(\mathcal{C}) \cap \Lambda_r = 0$, temos $\dim \Lambda_r = \text{codim } I_r(\mathcal{C})$, e daí

$$\begin{aligned} \text{codim } I_r &= \text{codim } I_r(\mathcal{C}) = \dim \Lambda_r &= (2r-1)(g-1) \\ & &= 2rg - 2r - g + 1 \\ & &= (2g-2)r + 1 - g. \end{aligned}$$

Portanto $I(\mathcal{C}) = I$ e a curva \mathcal{C} tem polinômio de Hilbert

$$h(r) = (2g-2)r + 1 - g,$$

ou seja, \mathcal{C} tem grau $2g-2$ e gênero aritmético g .

Intersectando a curva $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^{g-1}$ com o hiperplano $V(X_{n_{g-1}})$ temos o divisor $D := (2g-2)P$ de grau $2g-2$ cujo sistema linear completo $|D|$ tem dimensão $g-1$. Por Riemann-Roch para curvas completas inteiras, segue que o divisor D é canônico e \mathcal{C} é uma curva Gorenstein canônica. □

Como as funções x_n não são unicamente determinadas por seu divisor de polo nP , podemos normalizar (zerar) alguns coeficientes c_{sin} das formas quadráticas F_{si} . Dessa forma, se fizermos a transformação

$$X_n \mapsto X_n + \sum_{m=0}^{n-1} d_{nm} X_m,$$

onde os d_{nm} são constantes, não trocaremos a ordem da função em x_n em P . Assim é possível normalizar $\frac{1}{2}g(g-1)$ coeficientes c_{sin} . Dessa maneira, fazendo essa normalização, a única liberdade que temos é fazer $x_{n_i} \mapsto c^{n_i} x_{n_i}$, $i = 0, \dots, g-1$ para algum $c \in \mathbb{G}_m(\mathbb{k}) = \mathbb{k}^*$. Isso resulta na compactificação de $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$:

Teorema 3.2.8. *Seja $\mathcal{H} \subset \mathbb{N}$ um semigrupo simétrico de gênero g satisfazendo $3 < n_1 < g$ e $H \neq \langle 4, 5 \rangle$. As classes de isomorfismos de curvas Gorenstein completas inteiras pontuadas com semigrupo de Weierstrass \mathcal{H} correspondem bijetivamente às órbitas da ação de $\mathbb{G}_m(\mathbb{k})$*

$$(c, \dots, c_{sin}, \dots) \mapsto (\dots, c^{s-n} c_{sin}, \dots)$$

no cone quase-afim de vetores cujas coordenadas são os coeficientes c_{sin} das formas quadráticas normalizadas F_{si} que satisfazem as equações quase-homogêneas $\sigma_{s'i'm} = 0$.

Exemplo 3.2.5. Vamos agora concluir o Exemplo 3.2.1, ou seja, encontrar a dimensão do espaço projetivo em que a compactificação do espaço de moduli das curvas pontuadas de gênero $g = 7$ com semigrupo de Weierstrass $\mathcal{H} = \langle 6, 8, 9, 10, 11 \rangle$ está mergulhado.

Podemos normalizar $\frac{1}{2}g(g-1) = 21$ coeficientes das formas do exemplo 3.2.3. Como as funções-coordenadas não são unicamente determinadas, podemos fazer a mudança

$$\begin{aligned} X_6 &\mapsto X_6 + a_6 X_0 \\ X_8 &\mapsto X_8 + b_2 X_6 + b_8 X_8 \\ X_9 &\mapsto X_9 + c_1 X_8 + c_3 X_6 + c_9 X_0 \\ X_{10} &\mapsto X_{10} + d_1 X_9 + d_2 X_8 + d_4 X_6 + d_{10} X_0 \\ X_{11} &\mapsto X_{11} + e_1 X_{10} + e_2 X_9 + e_3 X_8 + e_5 X_6 + e_{11} X_0 \\ X_{12} &\mapsto X_{12} + f_1 X_{11} + f_2 X_{10} + f_3 X_9 + f_4 X_8 + f_6 X_6 + f_{12} X_0 \end{aligned}$$

onde os $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i \in \mathbb{k}$ e os índices representam os pesos dessas constantes vistas como variáveis. Isso significa que podemos normalizar (zerar) coeficientes das formas F_{s_i} com os pesos das 21 constantes $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i$. Os coeficientes normalizados podem ser escolhidos de maneira aleatória. Vamos então fazer:

- Para $F_{18,1}$: $c_{18,1,1} = c_{18,1,2} = c_{18,1,3} = c_{18,1,4} = c_{18,1,6} = c_{18,1,8} = c_{18,1,9} = c_{18,1,10} = c_{18,1,12} = 0$.
- Para $F_{20,1}$: $c_{20,1,1} = c_{20,1,2} = c_{20,1,3} = c_{20,1,4} = c_{20,1,5} = c_{20,1,6} = c_{20,1,11} = 0$
- Para $F_{21,1}$: $c_{21,1,1} = c_{21,1,2} = c_{21,1,3} = 0$
- Para $F_{22,1}$: $c_{22,1,1} = c_{22,1,2} = 0$

Substituindo as formas nas syzygies por seus unfolds com os coeficientes já normalizados, encontramos 27 equações que envolvem os coeficientes dos unfolds. Essas equações foram encontradas utilizando um algoritmo implementado no MAPLE que se encontra no Apêndice. Após uma análise vemos que algumas dessas equações podem ser desconsideradas por serem iguais a outras ou combinações de outras. A forma com o menor número de termos que envolve os coeficientes dos unfolds é

$$\begin{aligned} &c_{12,1,1}^2 c_{12,1,2} c_{16,1,4} c_{17,1,7} + c_{12,1,1} c_{12,1,2} c_{16,1,4} c_{18,2,8} + c_{12,1,1} c_{12,1,2} c_{16,1,5} c_{17,1,7} + 2 c_{12,1,2}^2 c_{16,1,4} c_{17,1,7} \\ &+ c_{12,1,1} c_{16,1,4} c_{18,2,10} - c_{12,1,1} c_{16,1,7} c_{17,1,7} + c_{12,1,1} c_{17,1,7}^2 + c_{12,1,2} c_{16,1,5} c_{18,2,8} + 2 c_{12,1,2} c_{16,1,6} c_{17,1,7} \\ &+ c_{12,1,3} c_{16,1,4} c_{18,2,8} + c_{12,1,3} c_{16,1,5} c_{17,1,7} + c_{12,1,4} c_{16,1,4} c_{17,1,7} + c_{16,1,5} c_{18,2,10} + c_{16,1,7} c_{18,2,8} \\ &+ c_{16,1,8} c_{17,1,7} \end{aligned}$$

As duas primeiras formas são iguais à forma acima. As demais formas tem, respectivamente, 44, 47, 52, 52, 52, 65, 67, 68, 75, 89, 105, 105, 114, 122, 135, 230, 340, 459, 482, 615, 836, 864, 1971, 2324 e 2922 termos e todas elas estão em função dos 17 coeficientes

$$\{c_{12,1,1}, c_{12,1,2}, c_{12,1,3}, c_{12,1,4}, c_{12,1,6}, c_{12,1,12}, c_{16,1,4}, c_{16,1,5}, c_{16,1,6}, c_{16,1,7}, c_{16,1,8}, c_{16,1,10}, c_{17,1,7}\}$$

$$c_{17,1,9}, c_{18,2,8}, c_{18,2,10}, c_{18,2,12}\},$$

que são um total de 17. Dessa forma, temos

$$\overline{\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}} \subseteq \mathbb{P}^{16}.$$

Para esse semigrupo, temos $\lambda(\mathcal{H}) = [\text{End}(\mathcal{H}) : \mathcal{H}] = 1$ e $2g - 2 + \lambda(\mathcal{H}) = 13$. Usando a cota superior de Deligne-Pinkham, temos $\dim \mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}} \leq 13$. Usando o Teorema 2.2.6, temos $\mathbf{T}^{1,+} = 0$ e usando a cota de Contiero-Fontes-Stevens-Vargas, temos $\dim \mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}} \geq 13$ e então $\dim \mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}} = 13$

4 Interseções completas e pontos de Weierstrass

O objetivo desta tese é estudar a geometria do espaço de moduli das curvas pontuadas com gênero g e semigrupo de Weierstrass simétrico \mathcal{H} a partir da geometria da curva monomial afim $\mathcal{C}_{\mathcal{H}} := \text{Spec } \mathbb{k}[\mathcal{H}]$. Serão demonstrados dois principais resultados. No primeiro deles assumiremos que a curva monomial $\mathcal{C}_{\mathcal{H}} \subset \mathbb{A}^r$, onde r é a dimensão de mergulho, é interseção completa. Para o segundo resultado assumimos que a curva monomial afim $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ é localmente interseção completa. Como as demonstrações são distintas, separamos esse capítulo em duas seções.

4.1 $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ é interseção completa

Nesta seção utilizaremos a compactificação de $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ feita em [10], apresentada na seção 4.2 do capítulo anterior.

Seja \mathcal{H} um semigrupo numérico simétrico e não hiperelítico de gênero g . Sabemos que esse semigrupo é realizado pela curva monomial canônica

$$\mathcal{C}^{(0)} := \{(a^{n_0} b^{\ell_{g-1}} : a^{n_1} b^{\ell_{g-1}-1} : \dots : a^{n_{g-1}} b^{\ell_1-1}) \mid (a : b) \in \mathbb{P}^1\} \subset \mathbb{P}^{g-1}$$

no ponto $P(0 : \dots : 0 : 1)$ e que seu único ponto singular é $(1 : 0 : \dots : 0)$.

Considerando a carta afim $X_0 = 1$, a parametrização de $\mathcal{C}^{(0)}|_{X_0=1}$ é dada por

$$\mathcal{C}^{(0)}|_{X_0=1} = \{(t^{n_1}, t^{n_2}, \dots, t^{n_{g-1}}) \mid t \in \mathbb{A}^1\} \subset \mathbb{A}^{g-1}$$

e seu anel de coordenadas é $\mathbb{k}[\mathcal{C}^{(0)}|_{X_0=1}] = \bigoplus_{n \in \mathcal{H}} \mathbb{k} t^n$.

Sejam a_1, \dots, a_r os geradores minimais de \mathcal{H} e considere a curva monomial afim

$$\mathcal{D} := \{(t^{a_1}, \dots, t^{a_r}) \mid t \in \mathbb{A}^1\} \subset \mathbb{A}^r.$$

Seu anel de coordenadas é $\mathbb{k}[\mathcal{D}] = \bigoplus_{n \in \mathcal{H}} \mathbb{k} t^n$ e portanto $\mathbb{k}[\mathcal{D}] \simeq \mathbb{k}[\mathcal{C}^{(0)}|_{X_0=1}]$. Como duas variedades afins são isomorfas se e somente se seus anéis de coordenadas são \mathbb{k} -álgebras isomorfas, temos $\mathcal{D} \simeq \mathcal{C}^{(0)}|_{X_0=1}$.

Note que se consideramos a carta afim $X_0 = 0$, o único ponto de $\mathcal{C}^{(0)}$ é $P(0 : \dots : 0 : 1)$, e portanto a projetivização de $\mathcal{C}^{(0)}|_{X_0=1}$ consiste em adicionar apenas o ponto ¹ P . De maneira análoga, a projetivização de \mathcal{D} consiste em adicionar apenas o ponto ² $Q(0 : \dots : 0 : 1)$. Com

¹O ponto P dado por $X_0 = 0$ coincide com o ponto escolhido através da seção σ na construção de Pinkham descrita na seção 3.1

²Este é o mesmo processo da compactificação das fibras feito por Pinkham na seção 3.1

isso concluímos que as curvas projetivas $\mathcal{C}^{(0)}$ e $\mathcal{D}^{(0)}$, que são as projetivizações de $\mathcal{C}^{(0)}|_{X_0=1}$ e \mathcal{D} , respectivamente, também são isomorfas. Dessa maneira podemos construir a projetivização do espaço de moduli $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ considerando a curva $\mathcal{D}^{(0)}$ no lugar da curva $\mathcal{C}^{(0)}$.

Observação 4.1.1. *Durante o texto utilizaremos as notações $\mathcal{C}^{(0)}$, \mathcal{D} e $\mathcal{D}^{(0)}$ para nos referir às curvas definidas acima.*

Seja \mathcal{C} uma curva projetiva inteira e Gorenstein de gênero g definida sobre um corpo algebricamente fechado \mathbb{k} , P um ponto liso de \mathcal{C} e \mathcal{H} o semigrupo de Weierstrass simétrico de gênero g de \mathcal{C} em P . Utilizando a mesma construção feita no capítulo anterior, supondo \mathcal{H} não hiperelítico, o morfismo canônico

$$(x_{n_0} : x_{n_1} : \dots : x_{n_{g-1}}) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$$

é um mergulho e \mathcal{C} pode ser vista como uma curva de grau $2g - 2$ no espaço projetivo \mathbb{P}^{g-1} , onde os inteiros $\ell_i - 1$, para $i = 1, \dots, g$, são as ordens de contato da curva com os hiperplanos $V(X_i)$, $i = 1, \dots, g - 1$, em $P = (0 : \dots : 0 : 1)$. Sabemos também que as formas quadráticas

$$F_{si} := X_{a_{si}} X_{b_{si}} - X_{a_s} X_{b_s} - \sum_{n=0}^{s-1} c_{sin} X_{a_n} X_{b_n}$$

construídas em (3.3) são identicamente nulas em \mathcal{C} e que as $g - 2$ hypersuperfícies quadráticas $V(F_{2g-2+n_i,1})$, $i = 0, \dots, g - 3$, se intersectam transversalmente no ponto de Weierstrass P , ou seja, numa vizinhança do ponto P a curva \mathcal{C} é interseção completa e seu ideal é gerado pelas $g - 2$ formas quadráticas $F_{2g-2+n_i,1}$, $i = 0, \dots, g - 3$.

Seja \mathcal{H} um semigrupo numérico, $0 = n_0, n_1, \dots, n_{g-1}$ seus geradores canônicos e a_1, \dots, a_r seus geradores minimais. Considere os anéis de polinômios $\mathbb{k}[X_{n_0}, \dots, X_{n_{g-1}}]$ e $\mathbb{k}[X_{a_1}, \dots, X_{a_r}]$ e associe para cada variável X_k o peso $\omega(X_k) = k$ tal que $\omega(X_k^\alpha) = \alpha \cdot \omega(X_k)$. Definimos o mapa

$$\begin{aligned} \Pi : \mathbb{k}[X_{n_0}, \dots, X_{n_{g-1}}] &\longrightarrow \mathbb{k}[X_{a_1}, \dots, X_{a_r}] \\ X_{n_0} &\longmapsto 1 \\ X_{n_i} &\longmapsto X_{a_1}^{\alpha_1} \dots X_{a_r}^{\alpha_r} \end{aligned}$$

onde $n_i = a_1 \alpha_1 + \dots + a_r \alpha_r$ e para os menores pesos n_i , as potências α_i devem ser as maiores possíveis. Então Π é um homomorfismo de álgebras graduadas em que a graduação é dada nos pesos das variáveis.

Definição 4.1.1. *Chamaremos o homomorfismo acima de **mapa de implosão**.*

Observe que o isomorfismo entre os anéis de coordenadas $\mathbb{k}[\mathcal{D}] = \bigoplus_{n \in \mathcal{H}} \mathbb{k} t^n$ e $\mathbb{k}[\mathcal{C}|_{X_0=1}] = \bigoplus_{n \in \mathcal{H}} \mathbb{k} t^n$ é induzido pelo mapa de implosão Π , já que para $n_i \in \mathcal{H}$, temos $t^{n_i} = t^{a_1 \alpha_1 + \dots + a_r \alpha_r}$, onde a_1, \dots, a_r são os geradores minimais de \mathcal{H} .

Como veremos a seguir, podemos fazer a construção da compactificação do espaço de moduli utilizando os polinômios "implodidos", ou seja, considerando um polinômio de $\mathbb{k}[X_{n_1}, \dots, X_{n_{g-1}}]$ como um polinômio de mesmo peso em $\mathbb{k}[X_{a_1}, \dots, X_{a_r}]$ via o mapa de implosão. Faremos isso

também com a base P -hermitiana de $H^0(\mathcal{C}, r(2g-2)P)$. Construímos essa base no capítulo anterior, formada por monômios de grau r em $x_{n_0}, \dots, x_{n_{g-1}}$ cujas ordens de polo em P são todas distintas. Tomando o levantamento desta base temos um espaço vetorial em $\mathbb{k}[X_{n_0}, \dots, X_{n_{g-1}}]$ gerado por monômios de grau r com pesos distintos e denotamos essa base por Λ_r . Se fizermos a implusão dos elementos de Λ_r teremos um espaço vetorial em $\mathbb{k}[X_{a_1}, \dots, X_{a_r}]$ e, apesar de termos perdido o controle sobre os graus desses monômios, temos a garantia de que os pesos são iguais aos pesos dos monômios originais, ou seja, todos distintos. Denotaremos por Γ_r o espaço vetorial em $\mathbb{k}[X_{a_1}, \dots, X_{a_r}]$ dado pelas implusões dos monômios de Λ_r .

Nosso objetivo é mostrar que se a curva \mathcal{D} é interseção completa, a compactificação do espaço de moduli pode ser construída através de relações lineares nos coeficientes dos *unfolds* dos geradores do ideal de \mathcal{D} .

Teorema 4.1.1. *Seja \mathcal{C} uma curva Gorenstein e \mathcal{H} um semigrupo que é interseção completa. Então \mathcal{C} realiza \mathcal{H} num ponto liso P se e somente se \mathcal{C} é obtida pelo *unfold* dos $r-1$ polinômios isobáricos que geram \mathcal{D} .*

Demonstração. Sejam \mathcal{C} uma curva Gorenstein, P um ponto liso de \mathcal{C} tal que \mathcal{C} realiza \mathcal{H} em P e seja

$$(x_0 : x_{n_1} : \dots : x_{n_{g-1}}) : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$$

o mergulho canônico. Pelo Teorema 3.2.7, sabemos que \mathcal{C} é dada por $\frac{1}{2}(g-2)(g-3)$ formas $F_{si} = F_{si}^{(0)} - \sum_{n=0}^{s-1} c_{sin} X_{a_n} X_{b_n}$, com c_{sin} elementos em \mathbb{k} unicamente determinados, ou seja, \mathcal{C} é dada pela deformação da curva monomial canônica $\mathcal{C}^{(0)}$. Disso concluímos que $\mathcal{C}|_{X_0=1}$ é dada pela deformação de $\mathcal{C}^{(0)}|_{X_0=1}$, já que quando fazemos $X_0 = 1$ não alteramos as condições sobre as formas F_{si} para que estas se intersectem em \mathcal{C} .

Por outro lado, se implodimos as formas F_{si} , ou seja, se fazemos $\Pi(F_{si})$, temos um mergulho $\Phi : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathbb{P}^r$, onde acrescentamos um único ponto no infinito na curva afim $V(\Pi(F_{si})) \subset \mathbb{A}^r$, onde r é exatamente a dimensão de mergulho. Então $\mathcal{C}|_{X_0=1} \simeq \Phi(\mathcal{C})|_{X_0=1} \subset \mathbb{A}^r$.

Seja

$$\mathcal{D} := \text{Spec } \mathbb{k}[\mathcal{H}] = \left\{ (t^{a_1}, \dots, t^{a_r}), t \in \mathbb{A}^1 \right\} \subset \mathbb{A}^r$$

a curva monomial afim interseção completa dada pelo semigrupo \mathcal{H} e sejam $G_{kj} \in \mathbb{k}[X_{a_1}, \dots, X_{a_r}]$, $j = 1, \dots, r-1$, os $r-1$ polinômios isobáricos de peso k que geram o ideal de \mathcal{D} . Como \mathcal{D} e $\mathcal{C}^{(0)}|_{X_0=1}$ são isomorfas e esse isomorfismo é induzido pelo mapa de implusão Π , temos

$$\Pi \left(F_{si}^{(0)} \right) = \sum_{j=1}^{r-1} M_{sij} G_{kj},$$

onde $M_{sij} \in \mathbb{k}[X_{a_1}, \dots, X_{a_r}]$ é um polinômio isobárico de peso $s-k$. Então temos

$$\Pi(F_{si}) = \sum_{j=1}^{r-1} M_{sij} G_{kj} + \sum_i d_i \beta_i,$$

onde i varia entre as não lacunas de \mathcal{H} menores ou iguais a s , $d_i \in \mathbb{k}$ e $\beta_i \in \Gamma_2$, que é a base P -hermitiana implodida de $H^0(\mathcal{C}^{(0)}, 2(g-2)P)$.

Seja N a cardinalidade do conjunto de todos os coeficientes dos unfolds dos polinômios $\Pi(F_{si})$. Então temos a deformação

$$\eta : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{(0)}|_{X_0=1} & \longrightarrow & \mathcal{C}^{(0)}|_{X_0=1} \times \mathbb{A}^N \\ \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ \text{Spec } \mathbb{k} & \longrightarrow & \mathbb{A}^N \end{array}$$

onde $\pi_1^{-1}((0, 0, \dots, 0)) = \mathcal{C}^{(0)}|_{X_0=1}$ e para algum $s \in \mathbb{A}^N$, $\pi_1^{-1}(s) = \mathcal{C}|_{X_0=1}$.

Seja

$$\widetilde{G}_{kj} = G_{kj} + \sum_i e_i \beta_i,$$

com i variando entre as não lacunas menores que k e $\beta_i \in \Gamma_2$, o unfold de um dos polinômios isobáricos geradores de \mathcal{D} . Como os polinômios G_{kj} são implosões de certos $F_{si}^{(0)}$, temos que o conjunto formado pelos coeficientes dos unfolds \widetilde{G}_{kj} é um subconjunto de \mathbb{A}^N , e portanto temos a deformação da curva \mathcal{D}

$$\xi : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{D} \times \mathbb{A}^N \\ \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ \text{Spec } \mathbb{k} & \longrightarrow & \mathbb{A}^N \end{array}$$

tal que para algum $z \in \mathbb{A}^N$, $\pi_1^{-1}(z) = \Phi(\mathcal{C})|_{X_0=1}$. Note que ξ é uma deformação isomorfa à η , já que temos o isomorfismo $\alpha : \mathcal{C}^{(0)}|_{X_0=0} \times \mathbb{A}^N \rightarrow \mathcal{D} \times \mathbb{A}^N$ induzido pelo mapa de implosão. Como a deformação de uma curva interseção completa é ainda uma curva interseção completa [2], $\Phi(\mathcal{C})|_{X_0=1}$ é interseção completa. Portanto $\Phi(\mathcal{C})|_{X_0=1}$ é dada pelo unfold \widetilde{G}_{kj} das G_{kj} . Projetivizando os unfolds \widetilde{G}_{kj} por X_0 obtemos a curva $\Phi(\mathcal{C})$. Como $\Phi(\mathcal{C})$ é isomorfa a \mathcal{C} , concluímos que \mathcal{C} é dada pela projetivização dos unfolds dos geradores da curva \mathcal{D} .

Reciprocamente, seja $\mathcal{D} \subset \mathbb{A}^r$ a curva monomial afim dada por \mathcal{H} e $\mathcal{C}^{(0)} \subset \mathbb{P}^{g-1}$ a curva monomial canônica que realiza \mathcal{H} em $P(0 : \dots : 0 : 1)$. Sejam $F_{si}^{(0)}$ as $\frac{1}{2}(g-2)(g-3)$ formas geradoras de $\mathcal{C}^{(0)}$. Considere as syzygies dessas formas dadas pelo Lema das Syzygy 3.2.5

$$S_{s'i'} := X_{2g-2} F_{s'i'}^{(0)} + \sum_{nsi} \epsilon_{nsi}^{(s'i')} X_n F_{si}^{(0)} = 0$$

e tome a implosão dessas syzygies. Como a curva \mathcal{D} é interseção completa, essas implosões são combinações dos geradores $G_{k1}, \dots, G_{k,r-1}$ de \mathcal{D} :

$$\Pi(S_{s'i'}) = \sum_{j=1}^{r-1} M_{s'i'j} G_{kj} = 0,$$

onde os $M_{s'i'j} \in \mathbb{k}[X_{a_1}, \dots, X_{a_r}]$ são polinômios isobáricos de peso $s' - k$. Como visto na seção 2.3, as relações entre os polinômios G_{ki} , $i = 1, \dots, r-1$, provém de relações triviais, ou seja, as implosões das syzygies das formas geradoras de $\mathcal{C}^{(0)}$ ou são identicamente nulas ou são syzygies triviais. Se a implosão for nula, não há o que fazer. Se a implosão for uma syzygy trivial, ou seja, uma syzygy do tipo $MG_{kj} - MG_{kj} = 0$, quando substituímos G_{kj} por seu unfold \widetilde{G}_{kj} , as

relações $\varrho_{s'i'm} = 0$ entre os coeficientes dos unfolds, dadas pelo Teorema 3.2.7, são trivialmente satisfeitas, já que cada monômio isobárico de peso ω da base Γ_2 terá coeficiente $c_{si} - c_{si}$, o que é trivialmente nulo. Com isso concluímos que não existem relações entre os coeficientes dos unfolds dos polinômios G_{kj} . Observe ainda que se projetivizamos esses unfolds por X_0 , não perdemos nenhuma informação dos coeficientes, já que X_0 tem peso zero. Portanto, quando a curva monomial afim é interseção completa, o Teorema 3.2.7 é satisfeito trivialmente, ou seja, a projetivização dos unfolds das formas geradoras da curva \mathcal{D} se intersectam numa curva Gorenstein em \mathbb{P}^r que realiza o semigrupo \mathcal{H} em $Q(0 : \dots : 0 : 1)$. \square

A construção da compactificação do espaço de moduli no capítulo anterior é feita em dois passos. Primeiro substituímos as formas quadráticas $F_{si}^{(0)}$ por seus unfolds nas syzygies dadas pelo Lema da Syzygy e encontramos relações entre os coeficientes c_{sin} . Pelo Teorema anterior, quando a curva monomial afim na dimensão de mergulho é interseção completa, não obtemos relações entre esses coeficientes, ou seja, para esse caso, não temos o primeiro passo da compactificação. O segundo passo consiste em normalizar (zerar) alguns coeficientes. Como as funções coordenadas $x_n, n \in \mathcal{H}$ e n gerador minimal, não são unicamente determinadas, pois são apenas funções que possuem ordem de polo n no ponto em que o Weierstrass é realizado, podemos fazer as seguintes mudanças:

$$X_n \mapsto X_n + \sum_{m=0}^{n-1} d_{nm} X_m,$$

onde os coeficientes d_{nm} são constantes. Como existem r geradores minimais em \mathcal{H} , podemos zerar $\frac{1}{2}r(r+1)$ coeficientes com pesos determinados nos unfolds dos polinômios geradores da curva afim interseção completa. Após essa normalização a única mudança que podemos fazer é transformar $x_{n_i} \mapsto c^{n_i} x_{n_i}, i = 1, \dots, r-1$, para algum $c \in \mathbb{G}_m(\mathbb{k}) = \mathbb{k}^*$. De acordo com [29], os coeficientes dos unfolds normalizados formam uma base para a parte negativamente graduada do primeiro módulo de cohomologia do complexo cotangente $\mathbf{T}_{\mathbb{k}[\mathcal{H}]}^{1,-}$. Com isso concluímos que a projetivização de $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ é um fechado de $\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathbb{k}[\mathcal{H}]}^{1,-})$. Em [29, Apêndice] existe a observação de que ainda não era conhecido, exceto para semigrupos gerados por 4 elementos, quando o espaço de moduli deixa de ser apenas um fechado em $\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathbb{k}[\mathcal{H}]}^{1,-})$ e passa a ser todo esse espaço. Com o teorema anterior somos capazes de responder a essa pergunta.

Teorema 4.1.2. *Seja \mathcal{H} um semigrupo simétrico de gênero $g \geq 2$ gerado minimamente por r elementos. Se $\text{Spec } \mathbb{k}[\mathcal{H}] \hookrightarrow \mathbb{A}^r$ é interseção completa, então $\overline{\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}} = \mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathbb{k}[\mathcal{H}]}^{1,-})$.*

Um corolário imediado do Teorema acima, obtido de maneira independente e sem utilização de deformações versais ou equivariantes, é conseguido através de uma simples aplicação do critério Jacobiano.

Corolário 4.1.3 (Schlessinger [27] and Pinkham [24]). *Se um semigrupo numérico é interseção completa, então ele é realizado como o semigrupo de Weierstrass de uma curva lisa.*

4.2 $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ é interseção completa local

Como dito no início deste capítulo, nesta segunda seção assumimos que a curva monomial afim $\mathcal{C}_{\mathcal{H}} := \text{Spec } \mathbb{k}[\mathcal{H}]$ é uma interseção completa local. Em toda essa tese qualquer compactificação de $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ em um espaço projetivo é sempre construída adicionando somente um único ponto liso no infinito. Além disso, a curva monomial afim tem um único ponto singular, a saber a origem $\mathbf{0}$, que é unirramificado e seu grau de singularidade é $g = g(\mathcal{H})$. Portanto, a curva monomial afim $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$, ou qualquer compactificação associada, é uma interseção completa local se, e somente se, $\text{Spec } \mathcal{O}_{\mathcal{C}_{\mathcal{H}}, \mathbf{0}}$ é uma interseção completa. Apesar do caráter local de nossa hipótese sobre $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$, a prova do resultado principal desta seção é feita por métodos mais globais.

Seja \mathcal{C} uma curva algébrica, inteira e projetiva de grau d definida sobre um corpo \mathbb{k} algebricamente fechado de característica zero. Seja P o único ponto singular de \mathcal{C} e \mathcal{O}_P o anel local de \mathcal{C} em P . Denote por $\tilde{\mathcal{O}}_P$ sua normalização. Definimos o grau de singularidade de \mathcal{C} em P como

$$\delta := \dim_{\mathbb{k}} \frac{\tilde{\mathcal{O}}_P}{\mathcal{O}_P}.$$

Considere a sequência exata

$$0 \rightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbb{P}^n|_{\mathcal{C}}} \rightarrow \mathcal{N}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbf{T}^1 \rightarrow 0.$$

Tomando a característica de Euler dos feixes dessa sequência, temos

$$\mathcal{X}(\mathbf{T}^1) = \mathcal{X}(\mathcal{T}_{\mathcal{C}}) - \mathcal{X}(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^n|_{\mathcal{C}}}) + \mathcal{X}(\mathcal{N}_{\mathcal{C}}).$$

O feixe $\Omega_{\mathcal{C}|\mathbb{k}}$ das diferenciais de \mathcal{C} pode não ser livre de torção, mas o feixe tangente $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ é um feixe de ideais fracionários. Assim, pelo Teorema de Riemann–Roch, temos:

$$\mathcal{X}(\mathcal{T}_{\mathcal{C}}) = \deg(\mathcal{T}_{\mathcal{C}}) + 1 - g,$$

onde g é o gênero aritmético de \mathcal{C} . Seja $\tilde{\mathcal{C}}$ o modelo não singular de \mathcal{C} e \tilde{g} seu gênero geométrico.

Em geral, $g = \tilde{g} + \sum_P \dim_{\mathbb{k}} \frac{\tilde{\mathcal{O}}_P}{\mathcal{O}_P}$. Como P é o único ponto singular de \mathcal{C} , temos

$$\tilde{g} = g - \delta.$$

O feixe de diferenciais $\Omega_{\tilde{\mathcal{C}}}$ do modelo não singular é localmente livre de posto 1 e grau $2\tilde{g} - 2$. Então $\mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{C}}}$ também é um feixe localmente livre de posto 1 e tem grau $2 - 2\tilde{g}$. Temos

$$\deg(\mathcal{T}_{\mathcal{C}}) - \deg(\mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{C}}}) = \sum_{Q \in \mathcal{C}} \dim_{\mathbb{k}} \frac{\mathcal{T}_{\mathcal{C}_Q}}{\mathcal{O}_Q} - \sum_{Q \in \tilde{\mathcal{C}}} \dim_{\mathbb{k}} \frac{\mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{C}}_Q}}{\tilde{\mathcal{O}}_Q}.$$

Como P é o único ponto singular de \mathcal{C} , temos

$$\deg(\mathcal{T}_{\mathcal{C}}) - \deg(\mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{C}}}) = \dim_{\mathbb{k}} \frac{\mathcal{T}_{\mathcal{C}_P}}{\mathcal{O}_P} - \dim_{\mathbb{k}} \frac{\mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{C}}_P}}{\tilde{\mathcal{O}}_P} = \dim_{\mathbb{k}} \frac{\text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathcal{O}_P)}{\mathcal{O}_P} - \dim_{\mathbb{k}} \frac{\text{Der}_{\mathbb{k}}(\tilde{\mathcal{O}}_P)}{\tilde{\mathcal{O}}_P}.$$

Como $\mathcal{O}_P \subset \tilde{\mathcal{O}}_P$ e $\text{Der}_{\mathbb{k}}(\tilde{\mathcal{O}}_P)$ é um $\tilde{\mathcal{O}}_P$ -módulo, temos

$$\dim_{\mathbb{k}} \frac{\text{Der}_{\mathbb{k}}(\tilde{\mathcal{O}}_P)}{\tilde{\mathcal{O}}_P} = \dim_{\mathbb{k}} \frac{\text{Der}_{\mathbb{k}}(\tilde{\mathcal{O}}_P)}{\mathcal{O}_P} - \dim_{\mathbb{k}} \frac{\tilde{\mathcal{O}}_P}{\mathcal{O}_P}.$$

Daí

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{k}} \frac{\mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathcal{O}_P)}{\mathcal{O}_P} - \dim_{\mathbb{k}} \frac{\mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\tilde{\mathcal{O}}_P)}{\tilde{\mathcal{O}}_P} &= \dim_{\mathbb{k}} \frac{\mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathcal{O}_P)}{\mathcal{O}_P} - \dim_{\mathbb{k}} \frac{\mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\tilde{\mathcal{O}}_P)}{\mathcal{O}_P} + \dim_{\mathbb{k}} \frac{\tilde{\mathcal{O}}_P}{\mathcal{O}_P} \\ &= -\dim_{\mathbb{k}} \frac{\mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\tilde{\mathcal{O}}_P)}{\mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathcal{O}_P)} + \dim_{\mathbb{k}} \frac{\tilde{\mathcal{O}}_P}{\mathcal{O}_P}. \end{aligned}$$

Assim, definindo

$$\mu := \dim_{\mathbb{k}} \frac{\mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\tilde{\mathcal{O}}_P)}{\mathrm{Der}_{\mathbb{k}}(\mathcal{O}_P)},$$

temos

$$\deg(\mathcal{T}_{\mathcal{C}}) = \deg(\mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{C}}}) - \mu + \delta \Rightarrow \deg(\mathcal{T}_{\mathcal{C}}) = 2 - 2\tilde{g} - \mu + \delta.$$

Então

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(\mathcal{T}_{\mathcal{C}}) &= 2 - 2\tilde{g} - \mu + \delta + 1 - g \\ &= 2 - 2g + 2\delta - \mu + \delta + 1 - g \\ &= 3 - 3g + 3\delta - \mu \end{aligned}$$

Para qualquer feixe coerente \mathcal{F} livre de torção sobre uma curva reduzida, temos

$$\mathcal{X}(\mathcal{F}) = \mathrm{rank}(\mathcal{F})(1 - g) + \deg \mathcal{F}.$$

O feixe normal $\mathcal{N}_{\mathcal{C}}$ tem posto igual a $\mathrm{codim}(\mathcal{C}, \mathbb{P}^n) = n - 1$ e o feixe $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^n|_{\mathcal{C}}}$ tem posto n . Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(\mathcal{N}_{\mathcal{C}}) - \mathcal{X}(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^n|_{\mathcal{C}}}) &= \mathrm{rank}(\mathcal{N}_{\mathcal{C}}) \cdot (1 - g) + \deg(\mathcal{N}_{\mathcal{C}}) - \mathrm{rank}(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^n|_{\mathcal{C}}}) \cdot (1 - g) - \deg(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^n|_{\mathcal{C}}}) \\ &= (n - 1)(1 - g) + \deg(\mathcal{N}_{\mathcal{C}}) - n(1 - g) - \deg(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^n|_{\mathcal{C}}}) \\ &= g - 1 + \deg(\mathcal{N}_{\mathcal{C}}) - \deg(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^n|_{\mathcal{C}}}). \end{aligned}$$

Como $\mathcal{T}_{\mathbb{P}^n|_{\mathcal{C}}} = \mathcal{T}_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{C}}$, tomando a n -ésima potência exterior, temos

$$\begin{aligned} \bigwedge^n \mathcal{T}_{\mathbb{P}^n|_{\mathcal{C}}} &= \bigwedge^n \mathcal{T}_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{C}} \\ &= (\omega_{\mathbb{P}^n})^{\vee} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{C}} \\ &= \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n + 1) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{C}}. \end{aligned}$$

Então $\deg(\bigwedge^n \mathcal{T}_{\mathbb{P}^n|_{\mathcal{C}}}) = \deg(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^n|_{\mathcal{C}}}) = \deg(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n + 1)) \cdot \deg(\mathcal{C})$, e portanto

$$\deg(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^n|_{\mathcal{C}}}) = d(n + 1).$$

Temos o seguinte resultado em [16, Teorema III.7.11]:

Teorema 4.2.1. *Seja X um subesquema fechado de $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^N$ que é interseção completa local de codimensão r . Seja \mathcal{I} o feixe de ideais de X . Então $\omega_X^{\circ} \cong \omega_{\mathbb{P}^N|_{\mathcal{C}}} \otimes \bigwedge^r (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^{\vee}$. Em particular, ω_X° é um feixe invertível em X .*

Assumindo que \mathcal{C} é uma curva que é interseção localmente completa, do teorema acima obtemos que $\deg(\omega_{\mathcal{C}}) = \deg(\omega_{\mathbb{P}^n|_{\mathcal{C}}}) + \deg(\bigwedge^r(\mathcal{N}_{\mathcal{C}}))$. Como $\deg(\bigwedge^r(\mathcal{N}_{\mathcal{C}})) = \deg(\mathcal{N}_{\mathcal{C}})$, temos

$$\begin{aligned} \deg(\mathcal{N}_{\mathcal{C}}) &= \deg(\omega_{\mathcal{C}}) - \deg(\omega_{\mathbb{P}^n|_{\mathcal{C}}}) \\ &= 2g - 2 + d(n + 1). \end{aligned}$$

Portanto $\mathcal{X}(\mathcal{N}_C) - \mathcal{X}(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^n|_C}) = 3g - 3$.

Como \mathbf{T}^1 é um skyscraper suportado na origem, $\mathcal{X}(\mathbf{T}^1) = h^0(\mathbf{T}^1)$. Então

$$\begin{aligned} h^0(\mathbf{T}^1) &= \mathcal{X}(\mathcal{N}_C) - \mathcal{X}(\mathcal{T}_{\mathbb{P}^n|_C}) + \mathcal{X}((T)_C) \\ &= 3g - 3 + 3 - 3g + 3\delta - \mu \\ &= 3\delta - \mu. \end{aligned}$$

Portanto acabamos de provar o seguinte resultado:

Lema 4.2.2. *Seja C uma curva projetiva inteira que é uma interseção completa local. Se P é o único ponto singular de C , então*

$$\deg(\mathbf{T}^1) = h^0(\mathbf{T}^1) = 3\delta - \mu,$$

onde δ é o grau de singularidade de P e $\mu := \dim_{\mathbb{k}} \frac{\text{Der}_{\mathbb{k}}(\tilde{\mathcal{O}}_P)}{\text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathcal{O}_P)}$.

Seja \mathcal{H} um semigrupo numérico e $\mathcal{C}_{\mathcal{H}} = \text{Spec } \mathbb{k}[\mathcal{H}]$. Vamos analisar o conjunto $\text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[\mathcal{H}])$. Uma \mathbb{k} -derivação $D : \mathbb{k}[\mathcal{H}] \rightarrow \mathbb{k}[\mathcal{H}]$ se prolonga a uma \mathbb{k} -derivação $D : \mathbb{k}[\mathcal{H}]_{x_1} \rightarrow \mathbb{k}[\mathcal{H}]_{x_1}$, onde $\mathbb{k}[\mathcal{H}]_{x_1} \simeq \mathbb{k}[t, t^{-1}]$. Para $F \in \mathbb{k}[t, t^{-1}]$ temos $D(F) = \frac{\partial F}{\partial t} D(t)$. Portanto, para que $D \in \text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[\mathcal{H}])$ devemos ter $D = h \frac{\partial}{\partial t}$, com $h := D(t) \in \mathbb{k}[t, t^{-1}]$ tal que $nh t^{n-1} \in \mathbb{k}[\mathcal{H}]$, já que, por definição, $D(t^n) = n t^{n-1} D(t)$. Assim, como $\text{char } \mathbb{k} = 0$, temos $h t^{n-1} \in \mathbb{k}[\mathcal{H}]$ para todo $n \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$.

O polinômio de Laurent h é da forma $h = \sum c_m t^{m+1} \in \mathbb{k}[t, t^{-1}]$ com $m \in \mathbb{Z}$ e c_m não nulo apenas para um número finito de termos. Para que $h t^{n-1}$ pertença a $\mathbb{k}[\mathcal{H}]$, devemos ter $m + n \in \mathcal{H}$ para todo $n \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$.

Portanto, se $D : \mathbb{k}[\mathcal{H}] \rightarrow \mathbb{k}[\mathcal{H}]$ é uma \mathbb{k} -derivação, então $D = h \frac{\partial}{\partial t}$, com $h = \sum c_m t^{m+1}$ e $m \in \text{End}(\mathcal{H})$, onde

$$\text{End}(\mathcal{H}) := \{a \in \mathbb{N} \mid a + n \in \mathcal{H}, \forall n \in \mathcal{H}\}.$$

Temos então o seguinte resultado:

Lema 4.2.3. *Seja \mathcal{H} um semigrupo numérico de gênero $g \geq 0$, vale*

$$\text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[\mathcal{H}]) = \mathbb{k}[\text{End}(\mathcal{H})] t \frac{\partial}{\partial t}.$$

Note que $\text{End}(\mathcal{H}) \subset \mathbb{N}$. De fato, seja c o condutor de \mathcal{H} . Então $\ell_g = c - 1$. Dado $m \in \text{End}(\mathcal{H})$, temos $m + c, m + c + 1, m + c + 2 \dots \in \text{End}(\mathcal{H})$, o que significa que $m + c > \ell_g$, e isso implica $m > \ell_g - c = -1$, ou seja, $m \in \mathbb{N}$.

Como $\text{End}(\mathcal{H}) \subset \mathbb{N}$, é fechado para a soma e contém o zero, $\text{End}(\mathcal{H})$ é um semigrupo numérico que contém \mathcal{H} . Além disso, $\text{End}(\mathcal{H}) \supset \mathcal{H} \cup \{\ell_g\}$. Para verificar essa informação basta mostrar que $\ell_g \in \text{End}(\mathcal{H})$. De fato, dado $n \in \mathcal{H} \setminus \{0\}$, temos $\ell_g + n \in \mathcal{H}$, ou seja, $\ell_g \in \text{End}(\mathcal{H})$.

Proposição 4.2.4. *$\text{End}(\mathcal{H}) = \mathcal{H} \cup \{\ell_g\}$ se e somente se \mathcal{H} é simétrico.*

Demonstração. Suponha que $\text{End}(\mathcal{H}) = \mathcal{H} \cup \{\ell_g\}$ e seja ℓ_i uma lacuna de \mathcal{H} . Para mostrar que \mathcal{H} é simétrico basta mostrar que $\ell_g - \ell_i \in \mathcal{H}$. Se $\ell_g = \ell_i$, está provado. Suponha então $\ell_i < \ell_g$. Como $\ell_i \notin \text{End}(\mathcal{H})$, existe $n \in \mathcal{H}$ tal que $\ell_i + n \notin \mathcal{H}$, e portanto $\ell_i + n = \ell_j$, com $j > i$. Se $j = g$, está demonstrado. Se não, repita o processo para ℓ_j até se esgotarem todas as lacunas. Portanto \mathcal{H} é simétrico.

Reciprocamente, suponha que exista $m \in \text{End}(\mathcal{H})$ tal que $m \notin \mathcal{H}$ e $m \neq \ell_g$. Então m é uma lacuna de \mathcal{H} estritamente menor que ℓ_g . Como \mathcal{H} é simétrico, $\ell_g - m$ pertence a \mathcal{H} . Assim $\ell_g = (\ell_g - m) + m \in \mathcal{H}$, o que é contradição. \square

Com o exposto acima, temos todas as condições necessárias para enunciar e demonstrar o Teorema principal.

Teorema 4.2.5. *Seja \mathcal{H} um semigrupo numérico tal que a curva monomial afim $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ associada é não-hiperelítica e uma interseção completa local. Se $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ é não vazio, então $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ admite uma compactificação tal que*

$$\overline{\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}} = \mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathbb{k}[\mathcal{H}]}^{1,-}).$$

Demonstração. Seja $\mathcal{C}_{\mathcal{H}} = \text{Spec } \mathbb{k}[\mathcal{H}]$ uma curva monomial que é uma interseção completa local. Então sua única singularidade $\mathbf{0}$ é do tipo Gorenstein e \mathcal{H} é um semigrupo simétrico, ou seja, a última lacuna de \mathcal{H} é $\ell_g = 2g - 1$. Seja \mathcal{C} o fecho projetivo de $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ em \mathbb{P}^r . A curva \mathcal{C} difere de $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ apenas do ponto no infinito e o feixe dualizante de \mathcal{C} é invertível. Por hipótese a curva \mathcal{C} é não-hiperelítica, ou seja, $\mathcal{H} \neq \langle 2, 2g - 1 \rangle$. Então, por [17, Teorema 4.3], o feixe dualizante induz um mergulho de \mathcal{C} em \mathbb{P}^{g-1} . Logo podemos considerar \mathcal{C} como uma curva monomial de gênero g e grau $2g - 2$ em \mathbb{P}^{g-1} . Tomando $0 = n_0 < n_1 < \dots < n_g$ o sistema canônico de geradores de \mathcal{H} e $1 = \ell_1 < 2 = \ell_2 < \dots < \ell_g = 2g - 1$ o conjunto de suas lacunas, uma parametrização de \mathcal{C} é dada por

$$\mathcal{C} := \{(a^{n_0} b^{\ell_{g-1}} : a^{n_1} b^{\ell_{g-1}-1} : \dots : a^{n_{g-1}} b^{\ell_1-1}) \mid (a : b) \in \mathbb{P}^1\} \subset \mathbb{P}^{g-1}$$

Como \mathcal{C} é uma curva racional com um único ponto singular unirramificado, o grau de singularidade em $\mathbf{0}$ é g , e pela Lema 4.2.2, temos que a dimensão do espaço das seções globais do primeiro módulo do complexo cotangente é

$$h^0(\mathbf{T}^1) = \dim \mathbf{T}^1(\mathbb{k}[\mathcal{H}]) = 3g - \mu.$$

Para calcular o invariante μ podemos substituir o anel local $\mathcal{O}_{\mathbf{0}}$ pela \mathbb{k} -álgebra das funções regulares da curva afim $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$. Então,

$$\mu = \dim_{\mathbb{k}} \frac{\text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[t])}{\text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[\mathcal{H}])}.$$

Como vimos anteriormente no Lema 4.2.3, $\text{Der}_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}[\mathcal{H}]) = \mathbb{k}[\text{End}(\mathcal{H})]t \frac{\partial}{\partial t}$ e então $\mu = g + 1 - \lambda(\mathcal{H})$, onde $\lambda(\mathcal{H}) = \#(\text{End}(\mathcal{H}) \setminus \mathcal{H})$. Pela Proposição 4.2.4, temos $\lambda(\mathcal{H}) = 1$. Assim,

$$\dim \mathbf{T}_{\mathbb{k}[\mathcal{H}]}^1 = 2g.$$

Como $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ possui uma ação natural do grupo multiplicativo $\mathbb{G}_m = \mathbb{k}^*$, o primeiro módulo do complexo cotangente $\mathbf{T}_{\mathbb{k}[\mathcal{H}]}^1$ é um módulo graduado e pode ser escrito como

$$\mathbf{T}_{\mathbb{k}[\mathcal{H}]}^1 = \mathbf{T}_{\mathbb{k}[\mathcal{H}]}^{1,-} \oplus \mathbf{T}_{\mathbb{k}[\mathcal{H}]}^{1,+},$$

e portanto

$$\dim_{\mathbb{k}} \mathbf{T}^{1,+} = 2g - \dim_{\mathbb{k}} \mathbf{T}_{\mathbb{k}[\mathcal{H}]}^{1,-}.$$

Como foi mostrado na seção , Stöhr construiu uma compactificação para o espaço de moduli $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ acrescentando as curvas Gorenstein no bordo, onde $\overline{\mathcal{M}}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathbb{k}[\mathcal{H}]}^{1,-})$. Como vimos na Introdução, c.f. (1.1), foi provado que se $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ é não vazio, então

$$\dim \mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}} \geq 2g - 2 + \lambda(\mathcal{H}) - \dim \mathbf{T}_{\mathbb{k}[\mathcal{H}]}^{1,+}.$$

Por hipótese $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ é não vazio e portanto $\overline{\mathcal{M}}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathbb{k}[\mathcal{H}]}^{1,-})$ tal que

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}} &\geq 2g - 2 + \lambda(\mathcal{H}) - \dim \mathbf{T}_{\mathbb{k}[\mathcal{H}]}^{1,+} \\ &= 2g - 2 + 1 - 2g + \dim \mathbf{T}_{\mathbb{k}[\mathcal{H}]}^{1,-} \\ &= \dim \mathbf{T}_{\mathbb{k}[\mathcal{H}]}^{1,-} - 1, \end{aligned}$$

ou seja, $\overline{\mathcal{M}}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{P}(\mathbf{T}_{\mathbb{k}[\mathcal{H}]}^{1,-})$ com dimensão maior ou igual a dimensão do ambiente, $\dim \mathbf{T}_{\mathbb{k}[\mathcal{H}]}^{1,-} - 1$, donde concluímos

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,1}^{\mathcal{H}} = \mathbb{P}(\mathbf{T}^{1,-}(\mathbb{k}[\mathcal{H}])).$$

□

Observação 4.2.1. *Observe que a principal diferença entre os Teoremas 4.1.2 e 4.2.5 é que a forte hipótese de que a curva monomial afim é interseção completa foi substituída pela hipótese mais fraca de que a curva é apenas localmente interseção completa. Contudo, o preço a se pagar é assumir que o semigrupo \mathcal{H} é realizável.*

O seguinte corolário decorre de maneira imediata:

Corolário 4.2.6. *Seja um semigrupo numérico não-hiperelíptico tal que $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ é uma interseção completa local. Se \mathcal{H} é realizável, então $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}$ pode ser negativamente deformada sem nenhuma obstrução.*

4.3 Exemplos

Vamos agora calcular o espaço de moduli de alguns semigrupos simétricos com geradores minimais a_1, \dots, a_r tais que a curva monomial afim em \mathbb{A}^r é interseção completa. A maioria dos resultados encontrados na literatura são para semigrupos com gênero baixo. O resultado demonstrado na seção anterior independe do gênero e para mostrar esse fato faremos exemplos com semigrupos de gênero alto.

4.3.1 Exemplo em \mathbb{A}^3

Considere o semigrupo simétrico $\mathcal{H} = \langle 4, 7, 10 \rangle$ de gênero $g = 7$. O sistema canônico de geradores de \mathcal{H} é $\{0, 4, 7, 8, 10, 11, 12\}$. Esse semigrupo foi obtido de [3] e a curva monomial afim cuja parametrização é

$$\mathcal{D} := \{(t^4, t^7, t^{10}), t \in \mathbb{k}\} \subset \mathbb{A}^3,$$

é interseção completa. A curva monomial projetiva canônica

$$C^{(0)} = \left\{ (b^{12} : a^4 b^8 : a^7 b^5 : a^8 b^4 : a^{10} b^2 : a^{11} b : a^{12}) \mid (a : b) \in \mathbb{P}^1 \right\} \subset \mathbb{P}^6$$

realiza \mathcal{H} no ponto $P(0 : \dots : 0 : 1)$. Vamos fixar a base P -hermitiana $\{x_0, x_4, x_7, x_8, x_{10}, x_{11}, x_{12}\}$ de $H^0(C^{(0)}, 12P)$, onde cada x_i tem ordem de polo i em P . A tabela das somas $n_i + n_j$ com $n_i, n_j \in \{0, 4, 7, 8, 10, 11, 12\}$ é dada por:

0+0	0+4	0+7	0+8	0+10	0+11
			4+4		4+7
0+12	4+10	4+11	4+12	7+10	7+11
4+8	7+7	7+8	8+8		8+10
7+12	8+12	10+11	10+12	11+12	12+12
8+11	10+10		11+11		

Assim a base P -hermitiana de $H^0(\mathcal{C}^{(0)}, (4g-4)P) = H^0(\mathcal{C}^{(0)}, 24P)$ é dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0^2, x_0 x_4, x_0 x_7, x_0 x_8, x_0 x_{10}, x_0 x_{11}, \\ x_0 x_{12}, x_4 x_{10}, x_4 x_{11}, x_4 x_{12}, x_7 x_{10}, x_7 x_{11}, \\ x_7 x_{12}, x_8 x_{12}, x_{10} x_{11}, x_{10} x_{12}, x_{11} x_{12}, x_{12}^2 \end{array} \right.$$

As $\frac{1}{2}(g-2)(g-3) = 10$ formas quadráticas que geram o ideal de $\mathcal{C}^{(0)}$ são

$$\begin{array}{lll} \bullet F_{8,1}^{(0)} = X_4^2 - X_0 X_8 & \bullet F_{11,1}^{(0)} = X_4 X_7 - X_0 X_{11} & \bullet F_{12,1}^{(0)} = X_4 X_8 - X_0 X_{12} \\ \bullet F_{14,1}^{(0)} = X_7^2 - X_4 X_{10} & \bullet F_{15,1}^{(0)} = X_7 X_8 - X_4 X_{11} & \bullet F_{16,1}^{(0)} = X_8^2 - X_4 X_{12} \\ \bullet F_{18,1}^{(0)} = X_8 X_{10} - X_7 X_{11} & \bullet F_{19,1}^{(0)} = X_8 X_{11} - X_7 X_{12} & \bullet F_{20,1}^{(0)} = X_{10}^2 - X_8 X_{12} \\ & \bullet F_{22,1}^{(0)} = X_{11}^2 - X_{10} X_{12} & \end{array}$$

Vamos considerar agora $x_0 = 1$ e o mapa de improplosão

$$\begin{array}{ll} \Pi : \mathbb{k}[X_4, X_7, X_8, X_{10}, X_{11}, X_{12}] & \longrightarrow \mathbb{k}[X_4, X_7, X_{10}] \\ & X_8 \longmapsto X_4^2 \\ & X_{11} \longmapsto X_4 X_7 \\ & X_{12} \longmapsto X_4^3 \end{array}$$

Implodindo também as formas quadráticas geradoras de $\mathcal{C}^{(0)}$, temos

$$\begin{array}{lll} \bullet G_{8,1}^{(0)} = X_4^2 - X_4^2 & \bullet G_{11,1}^{(0)} = X_4 X_7 - X_4 X_7 & \bullet G_{12,1}^{(0)} = X_4^3 - X_4^3 \\ \bullet G_{14,1}^{(0)} = X_7^2 - X_4 X_{10} & \bullet G_{15,1}^{(0)} = X_7 X_4^2 - X_4^2 X_7 & \bullet G_{16,1}^{(0)} = X_4^4 - X_4^4 \\ \bullet G_{18,1}^{(0)} = X_4^2 X_{10} - X_4 X_7^2 & \bullet G_{19,1}^{(0)} = X_4^3 X_7 - X_7 X_4^3 & \bullet G_{20,1}^{(0)} = X_{10}^2 - X_4^5 \\ & \bullet G_{22,1}^{(0)} = X_4^2 X_7^2 - X_{10} X_4^3 & \end{array}$$

Portanto

$$0 = G_{8,1}^{(0)} = G_{11,1}^{(0)} = G_{12,1}^{(0)} = G_{15,1}^{(0)} = G_{16,1}^{(0)} = G_{19,1}^{(0)}.$$

Temos também

$$G_{18,1}^{(0)} = X_4 \cdot (-G_{14,1}^{(0)}) \quad \text{e} \quad G_{22,1}^{(0)} = X_4^2 \cdot (G_{14,1}^{(0)}).$$

Então as formas $G_{14,1}^{(0)}$ e $G_{20,1}^{(0)}$ geram o ideal da curva \mathcal{D} . Os desdobramentos dessas duas formas são dados por

- $G_{14,1} = X_7^2 - X_4 X_{10} - c_{14,2} X_4^3 - c_{14,3} X_4 X_7 - c_{14,4} X_{10} - c_{14,6} X_4^2 - c_{14,7} X_7 - c_{14,10} X_4 - c_{14,14}$
- $G_{20,1} = X_{10}^2 - X_4^5 - c_{20,1} X_4^3 X_7 - c_{20,2} X_4 X_7^2 - c_{20,3} X_7 X_{10} - c_{20,4} X_4^4 - c_{20,5} X_4^2 X_7 - c_{20,6} X_4 X_{10} - c_{20,8} X_4^3 - c_{20,9} X_4 X_7 - c_{20,10} X_{10} - c_{20,12} X_4^2 - c_{20,13} X_7 - c_{20,16} X_4 - c_{20,20}$

Fazendo a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} X_4 &\mapsto X_4 + a_4 \\ X_7 &\mapsto X_7 + b_3 X_4 + b_7 \\ X_{10} &\mapsto X_{10} + d_2 X_8 + d_6 X_4 + d_{10} \end{aligned}$$

concluimos que podemos normalizar para zero um coeficiente de peso 2, um de peso 3, um de peso 4, um de peso 6, um de peso 7 e um de peso 10. Portanto faremos

$$0 = c_{14,2} = c_{14,3} = c_{14,6} = c_{14,7} = c_{14,10} = c_{20,4}.$$

O Lema da Syzygy 3.2.5 afirma que para as formas quadráticas diferentes das formas do tipo $F_{2g-2+n_i,1}^{(0)}$, $i = 0, \dots, g-3$, que nesse caso são as formas $F_{12,1}^{(0)}$, $F_{16,1}^{(0)}$, $F_{19,1}^{(0)}$, $F_{20,1}^{(0)}$ e $F_{22,1}^{(0)}$, existem syzygies. Portanto, para a forma $F_{14,1}^{(0)}$ temos a syzygy

$$X_{12} F_{14,1}^{(0)} - X_{10} F_{16,1}^{(0)} + X_7 F_{19,1}^{(0)} - X_8 F_{18,1}^{(0)} = 0.$$

Quando implodimos essa syzygy, ou seja, a consideramos em $\mathbb{k}[X_4, X_7, X_{10}]$, temos $G_{16,1}^{(0)} = G_{19,1}^{(0)} = 0$, o termo

$$X_{12} F_{14,1}^{(0)} = X_{12} X_7^2 - X_4 X_{10} X_{12}$$

se transforma em $X_4^3 X_7^2 - X_4^4 X_{10}$ e o termo

$$X_8 F_{18,1}^{(0)} = X_8 X_7 X_{11} - X_8^2 X_{10}$$

também se transforma em $X_4^3 X_7^2 - X_4^4 X_{10}$. Portanto a syzygy implodida é da forma

$$X_4^3 (X_7^2 - X_4 X_{10}) - X_4^3 (X_7^2 - X_4 X_{10}) = X_4^3 F_{14,1}^{(0)} - X_4^3 F_{14,1}^{(0)} = 0$$

que é uma syzygy trivial. Assim, como não existem syzygies não-triviais, temos que o espaço de parâmetros depende de 13 coeficientes, ou seja,

$$\overline{\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}} \simeq \mathbb{P}^{12}.$$

4.3.2 Exemplo em \mathbb{A}^4

Considere o semigrupo simétrico $\mathcal{H} = \langle 8, 10, 12, 13 \rangle$ de gênero $g = 14$. Esse semigrupo também foi obtido de [3] e a curva monomial afim cuja parametrização é

$$\mathcal{D} := \{(t^8, t^{10}, t^{12}, t^{13}), t \in \mathbb{k}\} \subset \mathbb{A}^4,$$

é interseção completa. A curva monomial projetiva canônica

$$C^{(0)} = \{(b^{26} : a^8b^{18} : a^{10}b^{17} : a^{12}b^{14} : a^{13}b^{13} : a^{16}b : a^{10} : a^{18}b^8 : a^{20}b^6 : a^{21}b^5 : a^{22}b^4 : a^{23}b^3 : a^{24}b^2 : a^{25}b : a^{26}) | (a : b) \in \mathbb{P}^1\} \subset \mathbb{P}^{13}$$

realiza \mathcal{H} no ponto $P(0 : \dots : 0 : 1)$. Vamos fixar a base P -hermitiana

$$\{x_0, x_8, x_{10}, x_{12}, x_{13}, x_{16}, x_{18}, x_{20}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{26}\}$$

de $H^0(C^{(0)}, 26P)$, onde cada x_i tem ordem de polo i em P . A tabela das somas $n_i + n_j$ com $n_i, n_j \in \{0, 8, 10, 12, 13, 16, 18, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26\}$ é dada por:

0+0	0+8	0+10	0+12	0+13	0+16	0+18	0+20	0+21	0+22
					8+8	8+10	8+12	8+13	10+12
							10+10		
0+23	0+24	0+25	0+26	8+20	8+21	8+22	8+23	8+24	8+25
10+13	8+16	12+13	8+18	10+18	13+16	10+20	10+21	10+22	10+23
	12+12		10+16	12+16		12+18	13+18	12+20	12+21
			13+13					16+16	13+20
8+26	10+25	10+26	12+25	12+26	13+26	16+24	16+25	16+26	18+25
10+24	12+23	12+24	13+24	13+25	16+23	18+22	18+23	18+24	20+23
12+22	13+22	13+23	16+21	16+22	18+21	20+20	20+21	20+22	21+22
13+21		16+20		18+20				21+21	
16+18		18+18							
18+26	20+25	20+26	21+26	22+26	23+26	24+26	25+26	26+26	
20+24	21+24	21+25	22+25	23+25	24+25	25+25			
21+23	22+23	22+24	23+24	24+24					
22+22		23+23							

Assim a base P -hermitiana de $H^0(C^{(0)}, (4g - 4)P) = H^0(C^{(0)}, 52P)$ é dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0^2, x_0x_8, x_0x_{10}, x_0x_{12}, x_0x_{13}, x_0x_{16}, x_0x_{18}, x_0x_{20}, x_0x_{21}, x_0x_{22} \\ x_0x_{23}, x_0x_{24}, x_0x_{25}, x_0x_{26}, x_8x_{20}, x_8x_{21}, x_8x_{22}, x_8x_{23}, x_8x_{24}, x_8x_{25} \\ x_8x_{26}, x_{10}x_{25}, x_{10}x_{26}, x_{12}x_{25}, x_{12}x_{26}, x_{13}x_{26}, x_{16}x_{24}, x_{16}x_{25}, x_{16}x_{26}, x_{18}x_{25} \\ x_{18}x_{26}, x_{20}x_{25}, x_{20}x_{26}, x_{21}x_{26}, x_{22}x_{26}, x_{23}x_{26}, x_{24}x_{26}, x_{25}x_{26}, x_{26}^2 \end{array} \right.$$

As $\frac{1}{2}(g - 2)(g - 3) = 66$ formas quadráticas que geram o ideal de $C^{(0)}$ são

$$\begin{array}{lll} \bullet F_{16,1}^{(0)} = X_8^2 - X_0X_{16} & \bullet F_{18,1}^{(0)} = X_8X_{10} - X_0X_{18} & \bullet F_{20,1}^{(0)} = X_8X_{12} - X_0X_{20} \\ \bullet F_{20,2}^{(0)} = X_{10}^2 - X_0X_{20} & \bullet F_{21,1}^{(0)} = X_8X_{13} - X_0X_{21} & \bullet F_{22,1}^{(0)} = X_{10}X_{12} - X_0X_{22} \\ \bullet F_{23,1}^{(0)} = X_{10}X_{13} - X_0X_{23} & \bullet F_{24,1}^{(0)} = X_8X_{16} - X_0X_{24} & \bullet F_{24,2}^{(0)} = X_{12}^2 - X_0X_{24} \\ \bullet F_{25,1}^{(0)} = X_{12}X_{13} - X_0X_{25} & \bullet F_{26,1}^{(0)} = X_8X_{18} - X_0X_{26} & \bullet F_{26,2}^{(0)} = X_{10}X_{16} - X_0X_{26} \\ \bullet F_{26,3}^{(0)} = X_{13}^2 - X_0X_{26} & \bullet F_{28,1}^{(0)} = X_{10}X_{18} - X_8X_{20} & \bullet F_{28,2}^{(0)} = X_{12}X_{16} - X_8X_{20} \\ \bullet F_{29,1}^{(0)} = X_{13}X_{16} - X_8X_{21} & \bullet F_{30,1}^{(0)} = X_{10}X_{20} - X_8X_{22} & \bullet F_{30,2}^{(0)} = X_{12}X_{18} - X_8X_{22} \\ \bullet F_{31,1}^{(0)} = X_{10}X_{21} - X_8X_{23} & \bullet F_{31,2}^{(0)} = X_{13}X_{18} - X_8X_{23} & \bullet F_{32,1}^{(0)} = X_{10}X_{22} - X_8X_{24} \\ \bullet F_{32,2}^{(0)} = X_{12}X_{20} - X_8X_{24} & \bullet F_{32,3}^{(0)} = X_{16}^2 - X_8X_{24} & \bullet F_{33,1}^{(0)} = X_{10}X_{23} - X_8X_{25} \\ \bullet F_{33,2}^{(0)} = X_{12}X_{21} - X_8X_{25} & \bullet F_{33,3}^{(0)} = X_{13}X_{20} - X_8X_{25} & \bullet F_{34,1}^{(0)} = X_{10}X_{24} - X_8X_{26} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\bullet F_{34,2}^{(0)} = X_{12}X_{22} - X_8X_{26} & \bullet F_{34,3}^{(0)} = X_{13}X_{21} - X_8X_{26} & \bullet F_{34,4}^{(0)} = X_{16}X_{18} - X_8X_{26} \\
\bullet F_{35,1}^{(0)} = X_{12}X_{23} - X_{10}X_{25} & \bullet F_{35,2}^{(0)} = X_{13}X_{22} - X_{10}X_{25} & \bullet F_{36,1}^{(0)} = X_{12}X_{24} - X_{10}X_{26} \\
\bullet F_{36,2}^{(0)} = X_{13}X_{23} - X_{10}X_{26} & \bullet F_{36,3}^{(0)} = X_{16}X_{20} - X_{10}X_{26} & \bullet F_{36,4}^{(0)} = X_{18}^2 - X_{10}X_{26} \\
\bullet F_{37,1}^{(0)} = X_{13}X_{24} - X_{12}X_{25} & \bullet F_{37,2}^{(0)} = X_{16}X_{21} - X_{12}X_{25} & \bullet F_{38,1}^{(0)} = X_{13}X_{25} - X_{12}X_{26} \\
\bullet F_{38,2}^{(0)} = X_{16}X_{22} - X_{12}X_{26} & \bullet F_{38,3}^{(0)} = X_{18}X_{20} - X_{12}X_{26} & \bullet F_{39,1}^{(0)} = X_{16}X_{23} - X_{13}X_{26} \\
\bullet F_{39,2}^{(0)} = X_{18}X_{21} - X_{13}X_{26} & \bullet F_{40,1}^{(0)} = X_{18}X_{22} - X_{16}X_{24} & \bullet F_{40,2}^{(0)} = X_{20}^2 - X_{16}X_{24} \\
\bullet F_{41,1}^{(0)} = X_{18}X_{23} - X_{16}X_{25} & \bullet F_{41,2}^{(0)} = X_{20}X_{21} - X_{16}X_{25} & \bullet F_{42,1}^{(0)} = X_{18}X_{24} - X_{16}X_{26} \\
\bullet F_{42,2}^{(0)} = X_{20}X_{22} - X_{16}X_{26} & \bullet F_{42,3}^{(0)} = X_{21}^2 - X_{16}X_{26} & \bullet F_{43,1}^{(0)} = X_{20}X_{23} - X_{18}X_{25} \\
\bullet F_{43,2}^{(0)} = X_{21}X_{22} - X_{18}X_{25} & \bullet F_{44,1}^{(0)} = X_{20}X_{24} - X_{18}X_{26} & \bullet F_{44,2}^{(0)} = X_{21}X_{23} - X_{18}X_{26} \\
\bullet F_{44,3}^{(0)} = X_{22}^2 - X_{18}X_{26} & \bullet F_{45,1}^{(0)} = X_{21}X_{24} - X_{20}X_{25} & \bullet F_{45,2}^{(0)} = X_{22}X_{23} - X_{20}X_{25} \\
\bullet F_{46,1}^{(0)} = X_{21}X_{25} - X_{20}X_{26} & \bullet F_{46,2}^{(0)} = X_{22}X_{24} - X_{20}X_{26} & \bullet F_{46,3}^{(0)} = X_{23}^2 - X_{20}X_{26} \\
\bullet F_{47,1}^{(0)} = X_{22}X_{25} - X_{21}X_{26} & \bullet F_{47,2}^{(0)} = X_{23}X_{24} - X_{21}X_{26} & \bullet F_{48,1}^{(0)} = X_{23}X_{25} - X_{22}X_{26} \\
\bullet F_{48,2}^{(0)} = X_{24}^2 - X_{22}X_{26} & \bullet F_{49,1}^{(0)} = X_{24}X_{25} - X_{23}X_{26} & \bullet F_{50,1}^{(0)} = X_{25}^2 - X_{24}X_{26}
\end{array}$$

Apenas para fins de notação, vamos denotar

$$\mathbb{k}[Y] := \mathbb{k}[X_0, X_8, X_{10}, X_{12}, X_{13}, X_{16}, X_{18}, X_{20}, X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{24}, X_{25}, X_{26}].$$

Vamos considerar agora $x_0 = 1$ e o mapa de impropção

$$\begin{array}{ll}
\Pi : \mathbb{k}[Y] & \longrightarrow \mathbb{k}[X_8, X_{10}, X_{12}, X_{13}] \\
X_{16} & \longmapsto X_8^2 \\
X_{18} & \longmapsto X_8X_{10} \\
X_{20} & \longmapsto X_8X_{12} \\
X_{21} & \longmapsto X_8X_{13} \\
X_{22} & \longmapsto X_{10}X_{12} \\
X_{23} & \longmapsto X_{10}X_{13} \\
X_{24} & \longmapsto X_8^3 \\
X_{25} & \longmapsto X_{12}X_{13} \\
X_{26} & \longmapsto X_8^2X_{10}
\end{array}$$

Implodindo também as formas quadráticas geradoras de $\mathcal{C}^{(0)}$, temos

$$\begin{array}{ll}
\bullet G_{16,1}^{(0)} = X_8^2 - X_8^2 & \bullet G_{18,1}^{(0)} = X_8X_{10} - X_8X_{10} \\
\bullet G_{20,1}^{(0)} = X_8X_{12} - X_8X_{12} & \bullet G_{20,2}^{(0)} = X_{10}^2 - X_8X_{12} \\
\bullet G_{21,1}^{(0)} = X_8X_{13} - X_8X_{13} & \bullet G_{22,1}^{(0)} = X_{10}X_{12} - X_{10}X_{12} \\
\bullet G_{23,1}^{(0)} = X_{10}X_{13} - X_{10}X_{13} & \bullet G_{24,1}^{(0)} = X_8^3 - X_8^3 \\
\bullet G_{24,2}^{(0)} = X_{12}^2 - X_8^3 & \bullet G_{25,1}^{(0)} = X_{12}X_{13} - X_{12}X_{13} \\
\bullet G_{26,1}^{(0)} = X_8^2X_{10} - X_8^2X_{10} & \bullet G_{26,2}^{(0)} = X_8^2X_{10} - X_8^2X_{10} \\
\bullet G_{26,3}^{(0)} = X_{13}^2 - X_8^2X_{10} & \bullet G_{28,1}^{(0)} = X_8X_{10}^2 - X_8^2X_{12} \\
\bullet G_{28,2}^{(0)} = X_8^2X_{12} - X_8^2X_{12} & \bullet G_{29,1}^{(0)} = X_8^2X_{13} - X_8^2X_{13} \\
\bullet G_{30,1}^{(0)} = X_8X_{10}X_{12} - X_8X_{10}X_{12} & \bullet G_{30,2}^{(0)} = X_8X_{10}X_{12} - X_8X_{10}X_{12}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\bullet G_{31,1}^{(0)} &= X_8 X_{10} X_{13} - X_8 X_{10} X_{13} \\
\bullet G_{32,1}^{(0)} &= X_{10}^2 X_{12} - X_8^4 \\
\bullet G_{32,3}^{(0)} &= X_8^4 - X_8^4 \\
\bullet G_{33,2}^{(0)} &= X_8 X_{12} X_{13} - X_8 X_{12} X_{13} \\
\bullet G_{34,1}^{(0)} &= X_8^3 X_{10} - X_8^3 X_{10} \\
\bullet G_{34,3}^{(0)} &= X_8 X_{13}^2 - X_8^3 X_{10} \\
\bullet G_{35,1}^{(0)} &= X_{10} X_{12} X_{13} - X_{10} X_{12} X_{13} \\
\bullet G_{36,1}^{(0)} &= X_8^3 X_{12} - X_8^2 X_{10}^2 \\
\bullet G_{36,3}^{(0)} &= X_8^3 X_{12} - X_8^2 X_{10}^2 \\
\bullet G_{37,1}^{(0)} &= X_8^3 X_{13} - X_{12}^2 X_{13} \\
\bullet G_{38,1}^{(0)} &= X_{12} X_{13}^2 - X_8^2 X_{10} X_{12} \\
\bullet G_{38,3}^{(0)} &= X_8^2 X_{10} X_{12} - X_8^2 X_{10} X_{12} \\
\bullet G_{39,2}^{(0)} &= X_8^2 X_{10} X_{13} - X_8^2 X_{10} X_{13} \\
\bullet G_{40,2}^{(0)} &= X_8^2 X_{12}^2 - X_8^5 \\
\bullet G_{41,2}^{(0)} &= X_8^2 X_{12} X_{13} - X_8^2 X_{12} X_{13} \\
\bullet G_{42,2}^{(0)} &= X_8 X_{10} X_{12}^2 - X_8^4 X_{10} \\
\bullet G_{43,1}^{(0)} &= X_8 X_{10} X_{12} X_{13} - X_8 X_{10} X_{12} X_{13} \\
\bullet G_{44,1}^{(0)} &= X_8^4 X_{12} - X_8^3 X_{10}^2 \\
\bullet G_{44,3}^{(0)} &= X_{10}^2 X_{12}^2 - X_8^3 X_{10}^2 \\
\bullet G_{45,2}^{(0)} &= X_{10}^2 X_{12} X_{13} - X_8 X_{12}^2 X_{13} \\
\bullet G_{46,2}^{(0)} &= X_8^3 X_{10} X_{12} - X_8^3 X_{10} X_{12} \\
\bullet G_{47,1}^{(0)} &= X_{10} X_{12}^2 X_{13} - X_8^3 X_{10} X_{13} \\
\bullet G_{48,1}^{(0)} &= X_{10} X_{12} X_{13}^2 - X_8^2 X_{10}^2 X_{12} \\
\bullet G_{49,1}^{(0)} &= X_8^3 X_{12} X_{13} - X_8^2 X_{10}^2 X_{13} \\
\bullet G_{31,2}^{(0)} &= X_8 X_{10} X_{13} - X_8 X_{10} X_{13} \\
\bullet G_{32,2}^{(0)} &= X_8 X_{12}^2 - X_8^4 \\
\bullet G_{33,1}^{(0)} &= X_{10}^2 X_{13} - X_8 X_{12} X_{13} \\
\bullet G_{33,3}^{(0)} &= X_8 X_{12} X_{13} - X_8 X_{12} X_{13} \\
\bullet G_{34,2}^{(0)} &= X_{10} X_{12}^2 - X_8^3 X_{10} \\
\bullet G_{34,4}^{(0)} &= X_8^3 X_{10} - X_8^3 X_{10} \\
\bullet G_{35,2}^{(0)} &= X_{10} X_{12} X_{13} - X_{10} X_{12} X_{13} \\
\bullet G_{36,2}^{(0)} &= X_{10} X_{13}^2 - X_8^2 X_{10}^2 \\
\bullet G_{36,4}^{(0)} &= X_8^2 X_{10}^2 - X_8^2 X_{10}^2 \\
\bullet G_{37,2}^{(0)} &= X_8^3 X_{13} - X_{12}^2 X_{13} \\
\bullet G_{38,2}^{(0)} &= X_8^2 X_{10} X_{12} - X_8^2 X_{10} X_{12} \\
\bullet G_{39,1}^{(0)} &= X_8^2 X_{10} X_{13} - X_8^2 X_{10} X_{13} \\
\bullet G_{40,1}^{(0)} &= X_8 X_{10}^2 X_{12} - X_8^5 \\
\bullet G_{41,1}^{(0)} &= X_8 X_{10}^2 X_{13} - X_8^2 X_{12} X_{13} \\
\bullet G_{42,1}^{(0)} &= X_8^4 X_{10} - X_8^4 X_{10} \\
\bullet G_{42,3}^{(0)} &= X_8^2 X_{13}^2 - X_8^4 X_{10} \\
\bullet G_{43,2}^{(0)} &= X_8 X_{10} X_{12} X_{13} - X_8 X_{10} X_{12} X_{13} \\
\bullet G_{44,2}^{(0)} &= X_8 X_{10} X_{13}^2 - X_8^3 X_{10}^2 \\
\bullet G_{45,1}^{(0)} &= X_8^4 X_{13} - X_8 X_{12}^2 X_{13} \\
\bullet G_{46,1}^{(0)} &= X_8 X_{12} X_{13}^2 - X_8^3 X_{10} X_{12} \\
\bullet G_{46,3}^{(0)} &= X_{10}^2 X_{13}^2 - X_8^3 X_{10} X_{12} \\
\bullet G_{47,2}^{(0)} &= X_8^3 X_{10} X_{13} - X_8^3 X_{10} X_{13} \\
\bullet G_{48,2}^{(0)} &= X_8^6 - X_8^2 X_{10}^2 X_{12} \\
\bullet G_{50,1}^{(0)} &= X_{12}^2 X_{13}^2 - X_8^5 X_{10}
\end{aligned}$$

Temos então as formas geradoras do ideal de \mathcal{D} :

$$\bullet G_{20,2}^{(0)} = X_{10}^2 - X_8 X_{12} \quad \bullet G_{24,2}^{(0)} = X_{12}^2 - X_8^3 \quad \bullet G_{26,3}^{(0)} = X_{13}^2 - X_8^2 X_{10}$$

As demais formas ou são identicamente nulas ou são as seguintes:

$$\begin{aligned}
\bullet G_{28,1}^{(0)} &= X_8 G_{20,2}^{(0)} & \bullet G_{32,1}^{(0)} &= X_{12} G_{20,2}^{(0)} + X_8 G_{24,2}^{(0)} & \bullet G_{32,2}^{(0)} &= X_8 G_{24,2}^{(0)} \\
\bullet G_{33,1}^{(0)} &= X_{13} G_{20,2}^{(0)} & \bullet G_{34,2}^{(0)} &= X_{10} G_{24,2}^{(0)} & \bullet G_{34,3}^{(0)} &= X_8 G_{26,3}^{(0)} \\
\bullet G_{36,1}^{(0)} &= -X_8^2 G_{20,2}^{(0)} & \bullet G_{36,2}^{(0)} &= X_{10} G_{26,3}^{(0)} & \bullet G_{36,3}^{(0)} &= -X_8^2 G_{20,2}^{(0)} \\
\bullet G_{37,1}^{(0)} &= -X_{13} G_{24,2}^{(0)} & \bullet G_{37,2}^{(0)} &= -X_{13} G_{24,2}^{(0)} & \bullet G_{38,1}^{(0)} &= X_{12} G_{26,3}^{(0)} \\
\bullet G_{40,1}^{(0)} &= X_8 X_{12} G_{20,2}^{(0)} + X_8^2 G_{24,2}^{(0)} & \bullet G_{40,2}^{(0)} &= X_8^2 G_{24,2}^{(0)} & \bullet G_{41,1}^{(0)} &= X_8 X_{13} G_{20,2}^{(0)} \\
\bullet G_{42,2}^{(0)} &= X_8 X_{10} G_{24,2}^{(0)} & \bullet G_{42,3}^{(0)} &= X_8^2 G_{26,3}^{(0)} & \bullet G_{44,1}^{(0)} &= -X_8^3 G_{20,2}^{(0)} \\
\bullet G_{44,2}^{(0)} &= X_8 X_{10} G_{26,3}^{(0)} & \bullet G_{44,3}^{(0)} &= X_{10}^2 G_{24,2}^{(0)} & \bullet G_{45,1}^{(0)} &= -X_8 X_{13} G_{24,2}^{(0)} \\
\bullet G_{45,2}^{(0)} &= X_{12} X_{13} G_{20,2}^{(0)} & \bullet G_{46,1}^{(0)} &= X_8 X_{12} G_{26,3}^{(0)} & \bullet G_{46,3}^{(0)} &= X_{10}^2 G_{26,3}^{(0)} + X_8^2 X_{10} G_{20,2}^{(0)} \\
\bullet G_{47,1}^{(0)} &= X_{10} X_{13} G_{24,2}^{(0)} & \bullet G_{48,1}^{(0)} &= X_{10} X_{12} G_{26,3}^{(0)} & \bullet G_{48,2}^{(0)} &= -X_8^3 G_{24,2}^{(0)} - X_8^2 X_{12} G_{20,2}^{(0)} \\
\bullet G_{49,1}^{(0)} &= -X_8^2 X_{13} G_{20,2}^{(0)} & \bullet G_{50,1}^{(0)} &= X_{13}^2 G_{24,2}^{(0)} + X_8^3 G_{26,3}^{(0)}
\end{aligned}$$

O desdobramento das formas geradoras do ideal de \mathcal{D} é dado por

- $G_{20,2} = X_{10}^2 - X_8 X_{12} - c_{20,2} X_8 X_{10} - c_{20,4} X_8^2 - c_{20,7} X_{13} - c_{20,8} X_{12} - c_{20,10} X_{10} - c_{20,12} X_8 - c_{20,20}$
- $G_{24,2} = X_{12}^2 - X_8^3 - c_{24,1} X_{10} X_{13} - c_{24,2} X_{10} X_{12} - c_{24,3} X_8 X_{13} - c_{24,4} X_8 X_{12} - c_{24,6} X_8 X_{10} - c_{24,8} X_8^2 - c_{24,11} X_{13} - c_{24,12} X_{12} - c_{24,14} X_{10} - c_{24,16} X_8 - c_{24,24}$
- $G_{26,3} = X_{13}^2 - X_8^2 X_{10} - c_{26,1} X_{12} X_{13} - c_{26,2} X_8^3 - c_{26,3} X_{10} X_{13} - c_{26,4} X_{10} X_{12} - c_{26,5} X_8 X_{13} - c_{26,6} X_8 X_{12} - c_{26,8} X_8 X_{10} - c_{26,10} X_8^2 - c_{26,13} X_{13} - c_{26,14} X_{12} - c_{26,16} X_{10} - c_{26,18} X_8 - c_{26,26}$

Fazendo a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} X_8 &\mapsto X_8 + a_8 \\ X_{10} &\mapsto X_{10} + b_2 X_8 + b_{10} \\ X_{12} &\mapsto X_{12} + d_2 X_{10} + d_4 X_8 + d_{12} \\ X_{13} &\mapsto X_{13} + e_1 X_{12} + e_3 X_{10} + e_5 X_8 + e_{13} \end{aligned}$$

concluimos que podemos normalizar para zero um coeficiente de peso 1, dois coeficientes de peso 2, um de peso 3, um de peso 4, um de peso 5, um de peso 8, um de peso 10, um de peso 12 e um de peso 13. Portanto faremos

$$0 = c_{24,1} = c_{24,2} = c_{26,2} = c_{24,3} = c_{24,4} = c_{26,5} = c_{24,8} = c_{26,10} = c_{24,12} = c_{26,13}.$$

O Lema da Syzygy 3.2.5 afirma que para as formas quadráticas diferentes das formas do tipo $F_{2g-2+n_i,1}^{(0)}$, $i = 0, \dots, g-3$ existem syzygies. Portanto, existem syzygies para as três formas $F_{20,2}^{(0)}$, $F_{24,2}^{(0)}$ e $F_{26,3}^{(0)}$. São elas:

1. $X_{26} F_{20,2}^{(0)} - X_{20} F_{26,1}^{(0)} - X_{18} F_{28,1}^{(0)} + X_{10} F_{36,4}^{(0)} = 0$
2. $X_{26} F_{24,2}^{(0)} - X_{24} F_{26,1}^{(0)} - X_{18} F_{32,2}^{(0)} + X_{12} F_{38,3}^{(0)} = 0$
3. $X_{26} F_{26,3}^{(0)} - X_{26} F_{26,1}^{(0)} - X_{18} F_{34,3}^{(0)} + X_{13} F_{39,2}^{(0)} = 0$

Vamos implodir essas syzygies, ou seja, considerá-las em $\mathbb{k}[X_8, X_{10}, X_{12}, X_{13}]$ através do mapa de implusão. O que temos é

1. $X_8^2 X_{10} (X_{10}^2 - X_8 - 8X_{12}) - X_8 X_{10} (X_8 X_{10}^2 - X_8^2 X_{12}) = X_8^2 X_{10} G_{20,2}^{(0)} - X_8^2 X_{10} G_{20,2}^{(0)} = 0$
2. $X_8^2 X_{10} (X_{12}^2 - X_8^3) - X_8 X_{10} (X_{12}^2 X_8 - X_8 X^4) = X_8^2 X_{10} G_{24,2}^{(0)} - X_8^2 X_{10} G_{24,2}^{(0)} = 0$
3. $X_8^2 X_{10} (X_{13}^2 - X_8^2 X_{10}) - X_8 X_{10} (X_8 X_{13}^2 - X_8^3 X_{10}) = X_8^2 X_{10} G_{26,3}^{(0)} - X_8^2 X_{10} G_{26,3}^{(0)} = 0$

que são todas syzygies triviais.

Assim, como não existem syzygies não-triviais, temos que o espaço de parâmetros depende de 21 coeficientes, ou seja,

$$\overline{\mathcal{M}}_{9,1}^{\mathcal{H}} \simeq \mathbb{P}^{20}.$$

4.3.3 Exemplo em \mathbb{A}^5

Considere o semigrupo simétrico $\mathcal{H} = \langle 16, 17, 18, 20, 24 \rangle$ de gênero $g = 32$. Esse semigrupo foi obtido utilizando o software **GAP**. Não faremos esse exemplo com detalhes devido à sua extensão, mas o raciocínio é o mesmo utilizado nos exemplos anteriores. A curva monomial afim cuja parametrização é

$$\mathcal{D} := \{(t^{16}, t^{17}, t^{18}, t^{20}, t^{24}), t \in \mathbb{k}\} \subset \mathbb{A}^5,$$

é interseção completa. Seja $\mathcal{C}^{(0)}$ a curva monomial projetiva canônica que realiza \mathcal{H} no ponto $P(0 : \dots : 0 : 1)$. Vamos fixar a base P -hermitiana

$$\{x_0, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{20}, x_{24}, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{35}, x_{36}, x_{37}, x_{38}, x_{40}, x_{41}, x_{42}, x_{44}, x_{48}, \\ x_{49}, x_{50}, x_{51}, x_{52}, x_{53}, x_{54}, x_{55}, x_{56}, x_{57}, x_{58}, x_{59}, x_{60}, x_{61}, x_{62}\}$$

de $H^0(\mathcal{C}^{(0)}, 62P)$, onde cada x_i tem ordem de polo i em P . As formas quadráticas geradoras do ideal de $\mathcal{C}^{(0)}$ são ao todo $\frac{1}{2}(g-2)(g-3) = \frac{1}{2}(30 \cdot 29) = 435$ formas.

Vamos considerar agora $X_0 = 1$ e o mapa de imlosão

$$\Pi : \mathbb{k}[X_{16}, X_{17}, \dots, X_{61}, X_{62}] \longrightarrow \mathbb{k}[X_{16}, X_{17}, X_{18}, X_{20}, X_{24}]$$

tal que

$$\begin{array}{lll} \Psi(X_{32}) = X_{16}^2 & \Psi(X_{33}) = X_{16}X_{17} & \Psi(X_{34}) = X_{16}X_{18} \\ \Psi(X_{35}) = X_{17}X_{18} & \Psi(X_{36}) = X_{16}X_{20} & \Psi(X_{37}) = X_{17}X_{20} \\ \Psi(X_{38}) = X_{18}X_{20} & \Psi(X_{40}) = X_{16}X_{24} & \Psi(X_{41}) = X_{17}X_{24} \\ \Psi(X_{42}) = X_{18}X_{24} & \Psi(X_{44}) = X_{20}X_{24} & \Psi(X_{48}) = X_{16}^3 \\ \Psi(X_{49}) = X_{16}^2X_{17} & \Psi(X_{50}) = X_{16}X_{17}^2 & \Psi(X_{51}) = X_{16}X_{17}X_{18} \\ \Psi(X_{52}) = X_{16}^2X_{20} & \Psi(X_{53}) = X_{16}X_{17}X_{20} & \Psi(X_{54}) = X_{16}X_{18}X_{20} \\ \Psi(X_{55}) = X_{17}X_{18}X_{20} & \Psi(X_{56}) = X_{16}X_{20}^2 & \Psi(X_{57}) = X_{16}X_{17}X_{24} \\ \Psi(X_{58}) = X_{16}X_{18}X_{24} & \Psi(X_{59}) = X_{17}X_{18}X_{24} & \Psi(X_{60}) = X_{16}X_{20}X_{24} \\ \Psi(X_{61}) = X_{17}X_{20}X_{24} & \Psi(X_{62}) = X_{18}X_{20}X_{24} & \end{array}$$

Fazendo a imlosão das formas quadráticas geradoras de $\mathcal{C}^{(0)}$ temos as formas geradoras do ideal de \mathcal{D} :

$$\bullet G_{34,2}^{(0)} = X_{17}^2 - X_{16}X_{18} \quad \bullet G_{36,2}^{(0)} = X_{18}^2 - X_{16}X_{20} \quad \bullet G_{40,2}^{(0)} = X_{20}^2 - X_{16}X_{24} \quad \bullet G_{48,2}^{(0)} = X_{24}^2 - X_{16}^3.$$

As demais formas implodidas ou são identicamente nulas ou são combinações com coeficientes em $\mathbb{k}[X_{16}, X_{17}, X_{18}, X_{20}, X_{24}]$ das formas geradoras.

O desdobramento das formas geradoras do ideal de \mathcal{D} é dado por

$$\begin{array}{l} \bullet G_{34,2} = X_{17}^2 - X_{16}X_{18} - c_{34,1}X_{16}X_{17} - c_{34,2}X_{16}^2 - c_{34,10}X_{24} - c_{34,14}X_{20} - c_{34,16}X_{18} - c_{34,17}X_{17} - \\ \quad - c_{34,18}X_{16} - c_{34,34} \\ \bullet G_{36,2} = X_{18}^2 - X_{16}X_{20} - c_{36,1}X_{17}X_{18} - c_{36,2}X_{16}X_{18} - c_{36,3}X_{16}X_{17} - c_{36,4}X_{16}^2 - c_{36,12}X_{24} - \\ \quad - c_{36,16}X_{20} - c_{36,18}X_{18} - c_{36,19}X_{17} - c_{36,20}X_{16} - c_{36,36} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\bullet G_{40,2} &= X_{20}^2 - X_{16}X_{24} - c_{40,2}X_{18}X_{20} - c_{40,3}X_{17}X_{20} - c_{40,4}X_{16}X_{20} - c_{40,5}X_{17}X_{18} - c_{40,6}X_{16}X_{18} - \\
&\quad - c_{40,7}X_{16}X_{17} - c_{40,8}X_{16}^2 - c_{40,16}X_{24} - c_{40,20}X_{20} - c_{40,22}X_{18} - c_{40,23}X_{17} - c_{40,24}X_{16} - c_{40,40} \\
\bullet G_{48,2} &= X_{24}^2 - X_{16}^3 - c_{48,4}X_{20}X_{24} - c_{48,6}X_{18}X_{24} - c_{48,7}X_{17}X_{24} - c_{48,8}X_{20}^2 - c_{48,10}X_{18}X_{20} - \\
&\quad - c_{48,11}X_{17}X_{20} - c_{48,12}X_{16}X_{20} - c_{48,13}X_{17}X_{18} - c_{48,14}X_{16}X_{18} - c_{48,15}X_{16}X_{17} - c_{48,16}X_{16}^2 - \\
&\quad - c_{48,24}X_{24} - c_{48,28}X_{20} - c_{48,30}X_{18} - c_{48,31}X_{17} - c_{48,32}X_{16} - c_{48,48}
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$\begin{aligned}
X_{16} &\longmapsto X_{16} + a_{16} \\
X_{17} &\longmapsto X_{17} + b_1X_{16} + b_{17} \\
X_{18} &\longmapsto X_{18} + d_1X_{17} + d_2X_{16} + d_{18} \\
X_{20} &\longmapsto X_{20} + e_2X_{18} + e_3X_{17} + e_4X_{16} + e_{20} \\
X_{24} &\longmapsto X_{24} + f_4X_{20} + f_6X_{18} + f_7X_{17} + f_8X_{16} + f_{24}
\end{aligned}$$

concluimos que podemos normalizar para zero dois coeficiente de peso 1, dois coeficientes de peso 2, um de peso 3, dois de peso 4, um de peso 6, um de peso 7, um de peso 8, um de peso 16, um de peso 17, um de peso 18, um de peso 20 e um de peso 24. Portanto faremos

$$\begin{aligned}
0 &= c_{34,1} = c_{36,1} = c_{34,2} = c_{36,2} = c_{36,3} = c_{36,4} = c_{40,4} = c_{40,6} = c_{40,7} = c_{40,8} = c_{34,16} = c_{34,17} = \\
&= c_{34,18} = c_{36,20} = c_{40,24}
\end{aligned}$$

As syzygies obtidas do lema da syzygy para as formas $F_{34,2}^{(0)}, F_{36,2}^{(0)}, F_{40,2}^{(0)}, F_{48,2}^{(0)}$ são

1. $X_{62}F_{34,2}^{(0)} - X_{62}F_{34,1}^{(0)} - X_{18}F_{78,1}^{(0)} + X_{17}F_{79,1}^{(0)} = 0$
2. $X_{62}F_{36,2}^{(0)} - X_{36}F_{62,1}^{(0)} + X_{18}F_{80,4}^{(0)} = 0$
3. $X_{62}F_{40,2}^{(0)} - X_{40}F_{62,2}^{(0)} + X_{20}F_{82,6}^{(0)} = 0$
4. $X_{62}F_{48,2}^{(0)} - X_{48}F_{62,3}^{(0)} + X_{24}F_{86,7}^{(0)} = 0$

As implosões dessas syzygies resultam em syzygies triviais. Assim, como não existem syzygies não-triviais, temos que o espaço de parâmetros depende de 33 coeficientes, ou seja,

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,1}^{\mathcal{H}} \simeq \mathbb{P}^{32}.$$

4.3.4 Exemplo em \mathbb{A}^6

Considere o semigrupo simétrico $\mathcal{H} = \langle 32, 33, 34, 36, 40, 48 \rangle$ de gênero $g = 80$. Esse semigrupo foi obtido utilizando o software **GAP**. A curva monomial afim cuja parametrização é

$$\mathcal{D} := \{(t^{32}, t^{33}, t^{34}, t^{36}, t^{40}, t^{48}) \mid t \in \mathbb{k}\} \subset \mathbb{A}^6,$$

é interseção completa. Seja $\mathcal{C}^{(0)}$ a curva monomial projetiva canônica que realiza \mathcal{H} no ponto $P(0 : \dots : 0 : 1)$. A base P -hermitiana de $H^{(0)}(\mathcal{C}, 158P)$ é dada por

$$\begin{aligned}
&\{x_0, x_{32}, x_{33}, x_{34}, x_{36}, x_{40}, x_{48}, x_{64}, x_{65}, x_{66}, x_{67}, x_{68}, x_{69}, x_{70}, x_{72}, x_{73}, x_{74}, x_{76}, x_{80}, x_{81}, x_{82}, x_{84}, \\
&x_{88}, x_{96}, x_{97}, x_{98}, x_{99}, x_{100}, x_{101}, x_{102}, x_{103}, x_{104}, x_{105}, x_{106}, x_{107}, x_{108}, x_{109}, x_{110}, x_{112}, x_{113}, x_{114}, \\
&x_{115}, x_{116}, x_{117}, x_{118}, x_{120}, x_{121}, x_{122}, x_{124}, x_{128}, x_{129}, x_{130}, x_{131}, x_{132}, x_{133}, x_{134}, x_{135}, x_{136}, x_{137},
\end{aligned}$$

$x_{138}, x_{139}, x_{140}, x_{141}, x_{142}, x_{143}, x_{144}, x_{145}, x_{146}, x_{147}, x_{148}, x_{149}, x_{150}, x_{151}, x_{152}, x_{153}, x_{154}, x_{155},$
 $x_{156}, x_{157}, x_{158}$ }

onde cada x_i tem ordem de polo i em P . As formas quadráticas geradoras do ideal de $\mathcal{C}^{(0)}$ são ao todo $\frac{1}{2}(g-2)(g-3) = \frac{1}{2}(78 \cdot 77) = 3003$ formas.

Vamos considerar agora $X_0 = 1$ e o mapa de imposição

$$\Pi : \mathbb{k}[X_{32}, X_{33}, \dots, X_{157}, X_{158}] \longrightarrow \mathbb{k}[X_{32}, X_{33}, X_{34}, X_{36}, X_{40}, X_{48}]$$

Fazendo a imposição das formas quadráticas geradoras do ideal de $\mathcal{C}^{(0)}$ temos as formas geradoras do ideal de \mathcal{D} :

$$\begin{aligned} \bullet G_{66,2} &= X_{33}^2 - X_{32}X_{34} & \bullet G_{68,2} &= X_{34}^2 - X_{32}X_{36} & \bullet G_{72,2} &= X_{36}^2 - X_{32}X_{40} \\ \bullet G_{80,2} &= X_{40}^2 - X_{32}X_{48} & \bullet G_{96,2} &= X_{48}^2 - X_{32}^3 \end{aligned}$$

As syzygies dessas formas são todas nulas ou triviais. Os desdobramentos dessas formas são dados por:

$$\begin{aligned} \bullet \tilde{G}_{66,2} &= X_{33}^2 - X_{32}X_{34} - c_{66,1}X_{32}X_{33} - c_{66,2}X_{32}^2 - c_{66,18}X_{48} - c_{66,26}X_{40} - c_{66,30}X_{36} - c_{66,32}X_{34} - \\ & c_{66,33}X_{33} - c_{66,34}X_{32} - c_{66,66} \\ \bullet \tilde{G}_{68,2} &= X_{34}^2 - X_{32}X_{36} - c_{68,1}X_{33}X_{34} - c_{68,2}X_{32}X_{34} - c_{68,3}X_{32}X_{33} - c_{68,4}X_{32}^2 - c_{68,20}X_{48} - \\ & c_{68,28}X_{40} - c_{68,32}X_{36} - c_{68,34}X_{34} - c_{68,35}X_{33} - c_{68,36}X_{32} - c_{68,68} \\ \bullet \tilde{G}_{72,2} &= X_{36}^2 - X_{32}X_{40} - c_{72,2}X_{34}X_{36} - c_{72,3}X_{33}X_{36} - c_{72,4}X_{32}X_{36} - c_{72,5}X_{33}X_{34} - c_{72,6}X_{32}X_{34} - \\ & c_{72,7}X_{32}X_{33} - c_{72,8}X_{32}^2 - c_{72,24}X_{48} - c_{72,32}X_{40} - c_{72,36}X_{36} - c_{72,38}X_{34} - c_{72,39}X_{33} - c_{72,40}X_{32} - c_{72,72} \\ \bullet \tilde{G}_{80,2} &= X_{40}^2 - X_{32}X_{48} - c_{80,4}X_{36}X_{40} - c_{80,6}X_{34}X_{40} - c_{80,7}X_{33}X_{40} - c_{80,8}X_{32}X_{40} - c_{80,10}X_{34}X_{36} - \\ & c_{80,11}X_{33}X_{36} - c_{80,12}X_{32}X_{36} - c_{80,13}X_{33}X_{34} - c_{80,14}X_{32}X_{34} - c_{80,15}X_{32}X_{33} - c_{80,16}X_{32}^2 - c_{80,32}X_{48} - \\ & c_{80,40}X_{40} - c_{80,44}X_{36} - c_{80,46}X_{34} - c_{80,47}X_{33} - c_{80,48}X_{32} - c_{80,80} \\ \bullet \tilde{G}_{96,2} &= X_{48}^2 - X_{32}^3 - c_{96,8}X_{40}X_{48} - c_{96,12}X_{36}X_{48} - c_{96,14}X_{34}X_{48} - c_{96,15}X_{33}X_{48} - c_{96,16}X_{32}X_{48} - \\ & c_{96,20}X_{36}X_{40} - c_{96,22}X_{34}X_{40} - c_{96,23}X_{33}X_{40} - c_{96,24}X_{32}X_{40} - c_{96,26}X_{34}X_{36} - c_{96,27}X_{33}X_{36} - \\ & c_{96,28}X_{32}X_{36} - c_{96,29}X_{33}X_{34} - c_{96,30}X_{32}X_{34} - c_{96,31}X_{32}X_{33} - c_{96,32}X_{32}^2 - c_{96,48}X_{48} - c_{96,56}X_{40} - \\ & c_{96,60}X_{36} - c_{96,62}X_{34} - c_{96,63}X_{33} - c_{96,64}X_{32} - c_{96,96} \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} X_{32} &\longmapsto X_{32} + a_{32} \\ X_{33} &\longmapsto X_{33} + b_1X_{32} + b_{33} \\ X_{34} &\longmapsto X_{34} + c_1X_{33} + c_2X_{32} + c_{34} \\ X_{36} &\longmapsto X_{36} + c_2X_{34} + c_3X_{33} + c_4X_{34} + c_{36} \\ X_{40} &\longmapsto X_{40} + c_4X_{36} + c_6X_{34} + c_7X_{33} + c_8X_{32} + c_{40} \\ X_{48} &\longmapsto X_{48} + c_8X_{40} + c_{12}X_{36} + c_{14}X_{34} + c_{15}X_{33} + c_{16}X_{32} + c_{48} \end{aligned}$$

concluimos que podemos normalizar para zero dois coeficientes de peso 1, dois de peso 2, um de peso 3, dois de peso 4, um de peso 6, um de peso 7, dois de peso 8, um de peso 12, um de peso 14, um de peso 15, um de peso 16, um de peso 32, um de peso 33, um de peso 34, um de peso 36, um de peso 40 e um de peso 48.

Dessa forma, o espaço de parâmetros depende de 54 coeficientes, ou seja,

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,1}^{\mathcal{H}} \simeq \mathbb{P}^{53}.$$

4.4 Exemplos para famílias de semigrupos

É possível fazer exemplos também para famílias de semigrupos. Vamos utilizar os exemplos feitos anteriormente acrescentando um parâmetro τ que pode variar entre os inteiros positivos. Dessa forma podemos calcular o espaço de moduli de curvas pontuadas com gêneros tão grandes quanto quisermos.

Exemplo em \mathbb{A}^3

Façamos primeiramente um exemplo em \mathbb{A}^3 . Seja τ um inteiro positivo. Vamos calcular o espaço de moduli para a família

$$\mathcal{H} = \langle 4, 3 + 4\tau, 6 + 4\tau \rangle = 4\mathbb{N} \sqcup (3 + 4\tau + 4\mathbb{N}) \sqcup (6 + 4\tau + 4\mathbb{N}) \sqcup (9 + 8\tau + 4\mathbb{N}).$$

Para calcular o gênero de \mathcal{H} vamos analisar quantas lacunas existem para cada classe de restos módulo 4:

- Congruentes a 1 módulo 4: $2 + 2\tau$ lacunas.
- Congruentes a 2 módulo 4: $1 + \tau$ lacunas.
- Congruentes a 3 módulo 4: τ lacunas.

Portanto o gênero do semigrupo \mathcal{H} é $g = 3 + 4\tau$. O número de Frobenius de \mathcal{H} é $\ell_g = 5 + 8\tau = 2g - 1$, e portanto \mathcal{H} é simétrico. A curva monomial afim

$$\mathcal{D} := \{(t^4, t^{3+4\tau}, t^{6+4\tau}), t \in \mathbb{k}\} \subset \mathbb{A}^3,$$

é interseção completa. Seja $\mathcal{C}^{(0)}$ a curva monomial canônica que realiza \mathcal{H} no ponto $P(0 : \dots : 0 : 1)$. Sejam $\{x_0, x_1, \dots, x_{n_{g-1}}\}$ as funções-coordenada $\mathcal{C}^{(0)}$ em P . Para facilitar a notação, denotaremos

$$x := x_4, \quad y_3 := x_{3+4\tau}, \quad y_6 := x_{6+4\tau}.$$

A base P -hermitiana de $H^0(\mathcal{C}^{(0)}, (2g - 2)P) = H^0(\mathcal{C}^{(0)}, (4 + 8\tau)P)$ é dada por

$$\begin{cases} x^0, x, \dots, x^{2\tau+1} \\ x^0 y_3, x y_3, \dots, x^\tau y_3 \\ x^0 y_6, x y_6, \dots, x^{\tau-1} y_6 \end{cases}, \quad \tau \geq 1$$

Podemos considerar $y_9 := x_{9+8\tau}$ como o produto $y_3 y_6$. Dessa forma, a base P -hermitiana para o divisor bicanônico $H^0(\mathcal{C}^{(0)}, 8 + 16\tau)$ é dada pelos $3g - 3$ elementos

$$\begin{cases} x^0, \dots, x^{2+4\tau} \\ x^0 y_3, x y_3, \dots, x^{1+3\tau} y_3 \\ x^0 y_6, x y_6, \dots, x^{3\tau} y_6 \\ x^0 y_3 y_6, x y_3 y_6, \dots, x^{2\tau-1} y_3 y_6 \end{cases}$$

Façamos agora o levantamento dos elementos da base P -hermitiana, associando a x, y_3 e y_6 as variáveis X, Y_3 e Y_6 de pesos $4, 3 + 4\tau$ e $6 + \tau$, respectivamente. Para facilitar a notação, faremos

$$Z_{4i} := X^i, \quad Z_{j+4\tau+4i} := X^i Y_j, \quad Z_{9+8\tau+4i} := X^i Y_3 Y_6.$$

Como a curva \mathcal{D} é interseção completa, temos dois polinômios em $\mathbb{k}[X, Y_3, Y_6]$ que se anulam em \mathcal{D} e geram seu ideal. São eles:

$$\bullet G_1 = Y_3^2 - Y_6 X^\tau \qquad \bullet G_2 := Y_6^2 - X^{3+2\tau}$$

Os unfolds desses dois polinômios são dados por

$$\begin{aligned} \bullet \tilde{G}_1 &= Y_3^2 - Y_6 X^\tau - \sum_{j=1}^{6+8\tau} g_j Z_{6+8\tau-j} \\ \bullet \tilde{G}_2 &:= Y_6^2 - X^{3+2\tau} - \sum_{j=k}^{12+8\tau} g_k Z_{12+8\tau-k} \end{aligned}$$

onde os somatórios variam entre os inteiros positivos j e k tais que $6+8\tau-j \in \mathcal{H}$ e $12+8\tau-k \in \mathcal{H}$. Podemos fazer as seguintes mudanças nas variáveis:

$$\begin{aligned} X &\longmapsto X + a_4 \\ Y_3 &\longmapsto Y_3 + b_{-1+4\tau} X + b_{3+4\tau} \\ Y_6 &\longmapsto Y_6 + c_3 Y_3 + c_{2+4\tau} X + c_{6+4\tau} \end{aligned}$$

Dessa forma podemos normalizar para zero 6 coeficientes. O unfold do polinômio G_1 possui $3+4\tau$ coeficientes e o unfold do polinômio G_2 possui $9+3\tau$ coeficientes. Como podemos normalizar 6 deles, temos que o espaço de parâmetros depende de $6+7\tau$ coeficientes, ou seja,

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,1}^{\mathcal{H}} \simeq \mathbb{P}^{5+7\tau}.$$

Exemplo em \mathbb{A}^4

Vamos agora fazer um exemplo em \mathbb{A}^4 . Considere o semigrupo

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \langle 8, 2+8\tau, 4+8\tau, 5+8\tau \rangle \\ &= 8\mathbb{N} \sqcup (9+16\tau) \sqcup (2+8\tau) \sqcup (11+24\tau) \sqcup (4+8\tau) \sqcup (5+8\tau) \sqcup (6+16\tau) \sqcup (7+16\tau). \end{aligned}$$

O gênero de \mathcal{H} é $2+12\tau$ e seu número de Frobenius é $\ell_g = 3+24\tau$. A curva monomial afim

$$\mathcal{D} := \{(t^8, t^{2+8\tau}, t^{4+8\tau}, t^{5+8\tau}), t \in \mathbb{k}\} \subset \mathbb{A}^4,$$

é interseção completa. Seja $\mathcal{C}^{(0)}$ a curva monomial canônica que realiza \mathcal{H} no ponto $P(0 : \dots : 0 : 1)$. Sejam $\{x_0, x_1, \dots, x_{n_g-1}\}$ as funções-coordenada $\mathcal{C}^{(0)}$ em P . Para facilitar a notação, denotaremos

$$x := x_8, \quad y_2 := x_{2+8\tau} \quad y_4 := x_{4+8\tau} \quad y_5 := x_{5+8\tau}.$$

A base P -hermitiana de $H^0(\mathcal{C}^{(0)}, (2g-2)P) = H^0(\mathcal{C}^{(0)}, (2+24\tau)P)$ é dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} x^0, \dots, x^{3\tau} \\ x^0 y_2, x y_2, \dots, x^{2\tau} y_2 \\ x^0 y_4, x y_4, \dots, x^{2\tau-1} y_4 \\ x^0 y_5, x y_5, \dots, x^{2\tau-1} y_5 \\ x^0 y_2 y_5, x y_2 y_5, \dots, x^{\tau-1} y_2 y_5 \\ x^0 y_2 y_4, x y_2 y_4, \dots, x^{\tau-1} y_2 y_4 \\ x^0 y_2 y_5, x y_2 y_5, \dots, x^{\tau-1} y_2 y_5 \end{array} \right.$$

Note que estamos considerando $y_6 := y_2 y_4$, $y_7 := y_2 y_5$. Podemos considerar $y_{11} := x_{11+24\tau}$ como o produto $y_2 y_4 y_5$. Dessa forma, a base P -hermitiana para o divisor bicanônico $H^0(\mathcal{C}^{(0)}, 4 + 48\tau)$ é dada pelos $3g - 3$ elementos

$$\left\{ \begin{array}{l} x^0, \dots, x^{6\tau} \\ x^0 y_2, x y_2, \dots, x^{5\tau} y_2 \\ x^0 y_4, x y_4, \dots, x^{5\tau} y_4 \\ x^0 y_5, x y_5, \dots, x^{5\tau-1} y_5 \\ x^0 y_2 y_5, x y_2 y_5, \dots, x^{4\tau-1} y_2 y_5 \\ x^0 y_2 y_4, x y_2 y_4, \dots, x^{4\tau-1} y_2 y_4 \\ x^0 y_2 y_5, x y_2 y_5, \dots, x^{4\tau-1} y_2 y_5 \\ x^0 y_2 y_4 y_5, x y_2 y_4 y_5, \dots, x^{3\tau-1} y_2 y_4 y_5 \end{array} \right.$$

Façamos agora o levantamento dos elementos da base P -hermitiana, associando a x, y_2, y_4 e y_5 as variáveis X, Y_2, Y_4 e Y_5 de pesos $8, 2 + 8\tau, 4 + 8\tau$ e $5 + 8\tau$, respectivamente. Para facilitar a notação, faremos

$$\begin{array}{lll} Z_{8i} := X^i & Z_{j+8\tau+8i} := X^i Y_j & Z_{6+8\tau+8i} := X^i Y_2 Y_4 \\ Z_{7+8\tau+8i} := X^i Y_2 Y_5 & Z_{9+8\tau+8i} := X^i Y_4 Y_5 & Z_{11+8\tau+8i} := X^i Y_2 Y_4 Y_5 \end{array}$$

Como a curva \mathcal{D} é interseção completa, temos três polinômios em $\mathbb{k}[X, Y_2, Y_4, Y_5]$ que se anulam em \mathcal{D} e geram seu ideal. São eles:

$$\bullet G_1 = Y_2^2 - Y_4 X^\tau \qquad \bullet G_2 = Y_4^2 - X^{1+2\tau} \qquad \bullet G_3 = Y_5^2 - Y_2 X^{\tau+1}$$

Os unfolds desses três polinômios são dados por

$$\begin{aligned} \bullet \tilde{G}_1 &= Y_2^2 - Y_4 X^\tau - \sum_{j=1}^{4+16\tau} g_j Z_{4+16\tau-j} \\ \bullet \tilde{G}_2 &= Y_4^2 - X^{1+2\tau} - \sum_{j=k}^{8+16\tau} g_k Z_{8+16\tau-k} \\ \bullet \tilde{G}_3 &= Y_5^2 - Y_2 X^{\tau+1} - \sum_{j=u}^{10+16\tau} g_u Z_{10+16\tau-u} \end{aligned}$$

onde os somatórios variam entre os inteiros positivos j, k e u tais que $4 + 16\tau - j, 8 + 16\tau - k \in \mathcal{H}$ e $10 + 16\tau \in \mathcal{H}$. Podemos fazer as seguintes mudanças nas variáveis:

$$\begin{aligned}
 X &\longmapsto X + a_8 \\
 Y_2 &\longmapsto Y_2 + b_{-6+8\tau}X + b_{2+8\tau} \\
 Y_4 &\longmapsto Y_4 + c_2Y_2 + c_{-4+8\tau}X + c_{4+8\tau} \\
 Y_5 &\longmapsto Y_5 + d_1Y_4 + d_3Y_2 + d_{-3+8\tau}X + d_{5+8\tau}
 \end{aligned}$$

Dessa forma podemos normalizar para zero 10 coeficientes. O unfold do polinômio G_1 possui $2 + 5\tau$ coeficientes, o unfold do polinômio G_2 possui $6 + 5\tau$ e o unfold do polinômio G_3 possui $8 + 5\tau$ coeficientes. Como podemos normalizar 10 deles, temos que o espaço de parâmetros depende de $6 + 15\tau$ coeficientes, ou seja,

$$\overline{\mathcal{M}}_{g,1}^{\mathcal{H}} \simeq \mathbb{P}^{5+15\tau}.$$

Exemplo em \mathbb{A}^5

Considere o semigrupo

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} &= \langle 16, 1 + 16\tau, 2 + 16\tau, 4 + 16\tau, 8 + 16\tau \rangle \\
 &= 16\mathbb{N} \sqcup (1 + 16\tau) \sqcup (2 + 16\tau) \sqcup (3 + 32\tau) \sqcup (4 + 16\tau) \sqcup (5 + 32\tau) \sqcup (6 + 32\tau) \sqcup (7 + 48\tau) \\
 &\quad \sqcup (8 + 16\tau) \sqcup (9 + 32\tau) \sqcup (10 + 32\tau) \sqcup (11 + 48\tau) \sqcup (12 + 32\tau) \sqcup (13 + 48\tau) \sqcup (14 + 48\tau) \\
 &\quad \sqcup (15 + 64\tau)
 \end{aligned}$$

de gênero $g = 32\tau$ e número de Frobenius $\ell_g = -1 + 64\tau$. Então \mathcal{H} é simétrico e a curva monomial afim

$$\mathcal{D} = \{(t^{16}, t^{1+16\tau}, t^{2+16\tau}, t^{4+16\tau}, t^{8+16\tau}) \mid t \in \mathbb{k}\} \subset \mathbb{A}^5$$

é interseção completa. Seja $\mathcal{C}^{(0)}$ a curva monomial canônica que realiza \mathcal{H} no ponto $P(0 : \dots : 0 : 1)$. Sejam $\{x_0, x_1, \dots, x_{n_{g-1}}\}$ as funções-coordenada $\mathcal{C}^{(0)}$ em P . Denote

$$x := x_{16} \quad y_1 := y_{1+16\tau} \quad y_2 := y_{2+16\tau} \quad y_4 := y_{4+16\tau} \quad y_5 := y_{5+16\tau}.$$

As bases P-hermitianas dos divisores $H^0(\mathcal{C}^{(0)}, (64\tau - 2)P)$ e $H^0(\mathcal{C}^{(0)}, (128\tau - 4)P)$ são dadas por monômios formados por produtos das funções-coordenada. Fazendo o levantamento dessa base, associamos a x, y_1, y_2, y_4 e y_8 as variáveis X, Y_1, Y_2, Y_4 e Y_8 de pesos $16, 1 + 16\tau, 2 + 16\tau, 4 + 16\tau$ e $8 + 16\tau$, respectivamente. Para facilitar a notação, faremos

$$\begin{aligned}
 Z_{16i} &:= X^i & Z_{1+16\tau+8i} &= X^i Y_1 & Z_{2+16\tau+8i} &= X^i Y_2 & Z_{3+32\tau+8i} &= X^i Y_1 Y_2 \\
 Z_{4+16\tau+8i} &= X^i Y_4 & Z_{5+32\tau+8i} &= X^i Y_1 Y_4 & Z_{6+32\tau+8i} &= X^i Y_2 Y_4 & Z_{7+48\tau+8i} &= X^i Y_1 Y_2 Y_4 \\
 Z_{8+16\tau+8i} &= X^i Y_8 & Z_{9+32\tau+8i} &= X^i Y_1 Y_8 & Z_{10+32\tau+8i} &= X^i Y_2 Y_8 & Z_{11+48\tau+8i} &= X^i Y_1 Y_2 Y_8 \\
 Z_{12+32\tau+8i} &= X^i Y_4 Y_8 & Z_{13+48\tau+8i} &= X^i Y_1 Y_4 Y_8 & Z_{14+48\tau+8i} &= X^i Y_2 Y_4 Y_8 & Z_{15+64\tau+8i} &= X^i Y_1 Y_2 Y_4 Y_8
 \end{aligned}$$

Como a curva \mathcal{D} é interseção completa, temos quatro polinômios em $\mathbb{k}[X, Y_1, Y_2, Y_4, Y_8]$ que se anulam em \mathcal{D} e geram seu ideal. São eles:

$$\bullet G_1 = Y_1^2 - Y_2 X^\tau \quad \bullet G_2 = Y_2^2 - Y_4 X^\tau \quad \bullet G_3 = Y_4^2 - Y_8 X^\tau \quad \bullet G_4 = Y_8^2 - X^{3\tau}$$

Os unfolds desses quatro polinômios são dados por

$$\bullet \tilde{G}_1 = Y_1^2 - Y_2 X^\tau - \sum_{j=1}^{2+32\tau} g_j Z_{2+32\tau-j}$$

$$\begin{aligned} \bullet \tilde{G}_2 &= Y_2^2 - Y_4 X^\tau - \sum_{j=k}^{4+32\tau} g_k Z_{4+32\tau-k} \\ \bullet \tilde{G}_3 &= Y_4^2 - Y_8 X^\tau - \sum_{j=u}^{8+32\tau} g_u Z_{8+32\tau-u} \\ \bullet \tilde{G}_4 &= Y_8^2 - X^{3\tau} - \sum_{j=v}^{16+32\tau} g_v Z_{16+32\tau-v} \end{aligned}$$

onde os somatórios variam entre os inteiros positivos j, k, u e v tais que $2 + 32\tau - j, 4 + 32\tau - k, 8 + 32\tau - u, 16 + 32\tau - v \in \mathcal{H}$. Podemos fazer as seguintes mudanças nas variáveis:

$$\begin{aligned} X &\longmapsto X + a_{16} \\ Y_1 &\longmapsto Y_1 + b_{-15+16\tau} X + b_{1+16\tau} \\ Y_2 &\longmapsto Y_2 + c_1 Y_1 + c_{-14+16\tau} X + c_{2+16\tau} \\ Y_4 &\longmapsto Y_4 + d_2 Y_2 + d_3 Y_1 + d_{-12+16\tau} X + d_{4+16\tau} \\ Y_8 &\longmapsto Y_8 + e_4 Y_4 + e_6 Y_2 + e_7 Y_1 + e_{-8+16\tau} X + e_{8+16\tau} \end{aligned}$$

Dessa forma podemos normalizar para zero 15 coeficientes. O unfold do polinômio G_1 possui $2 + 6\tau$ coeficientes, o do polinômio G_2 possui $4 + 6\tau$ coeficientes, o do polinômio G_3 possui $7 + 6\tau$ coeficientes e o unfold do polinômio G_4 possui $11 + 6\tau$ coeficientes. Como podemos normalizar 15 deles, temos que o espaço de parâmetros depende de $9 + 24\tau$ coeficientes, ou seja,

$$\overline{\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}} \simeq \mathbb{P}^{8+24\tau}.$$

A O módulo de Tjurina e $\mathbf{T}^1(\mathbb{k}[\mathcal{H}])$

Nesta seção vamos fazer, através de exemplos, a ligação entre o módulo de Tjurina de uma singularidade isolada que é interseção completa e o primeiro módulo de cohomologia do complexo cotangente de uma curva monomial afim $\mathbf{T}^1(\mathbb{k}[\mathcal{H}])$, onde \mathcal{H} é um semigrupo simétrico interseção completa.

Definição A.0.1. *Seja \mathbb{k} um corpo algebricamente fechado e $\mathcal{R} = \mathbb{k}[[X_1, \dots, X_n]]$ o anel das séries de potências formais em n indeterminadas com coeficientes em \mathbb{k} . Dado $f \in \mathcal{R}$, chamamos de **ideal de Tjurina** em \mathcal{R} de f o ideal*

$$\langle f, Df \rangle = \left\langle f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle.$$

A **álgebra de Tjurina** de f é a \mathbb{k} -álgebra $\frac{\mathcal{R}}{\langle f, Df \rangle}$ e sua dimensão como \mathbb{k} -espaço vetorial é chamada **Número de Tjurina** de f .

Em [[15], Thm II.1.16] temos o seguinte teorema:

Teorema A.0.1. *Seja $(X, \mathbf{0}) \subset (\mathbb{C}^n, \mathbf{0})$ uma singularidade isolada e interseção completa e $f := (f_1, \dots, f_k)$ um sistema minimal de geradores para o ideal de $(X, \mathbf{0})$. Sejam $g_1, \dots, g_k \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, \mathbf{0}}^k$, $g_i = (g_i^1, \dots, g_i^k)$ uma base (respectivamente, um sistema de geradores) para o \mathbb{C} -espaço vetorial de dimensão finita*

$$T_{(X, \mathbf{0})}^1 := \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, \mathbf{0}}^k}{Df \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, \mathbf{0}}^n + \langle f_1, \dots, f_k \rangle \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, \mathbf{0}}^k},$$

e seja $F = (F_1, \dots, F_k)$,

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{x}, \mathbf{t}) &= f_1(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{\tau} t_j g_j^1(\mathbf{x}) \\ &\vdots \\ F_k(\mathbf{x}, \mathbf{t}) &= f_k(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{\tau} t_j g_j^k(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

$$(\mathcal{X}, \mathbf{0}) := V(F_1, \dots, F_k) \subset (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{\tau}, \mathbf{0}).$$

Então $(X, \mathbf{0}) \hookrightarrow^i (\mathcal{X}, \mathbf{0}) \rightarrow^{\phi} (\mathbb{C}^{\tau}, \mathbf{0})$ com i, ϕ induzidas pela inclusão $(\mathbb{C}^n, \mathbf{0}) \subset (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{\tau}, \mathbf{0})$ e pela projeção $(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{\tau}, \mathbf{0}) \rightarrow (\mathbb{C}^{\tau}, \mathbf{0})$, respectivamente, é uma deformação semiuniversal (resp. versal) de $(X, \mathbf{0})$.

Temos ainda que $T_{(X, \mathbf{0})}^1$ é um $\mathcal{O}_{X, \mathbf{0}}$ -módulo, chamado **Módulo de Tjurina** de $(X, \mathbf{0})$. Note que se $(X, \mathbf{0})$ é uma hipersuperfície então $T_{(X, \mathbf{0})}^1$ é uma álgebra chamada **álgebra de Tjurina** de $(X, \mathbf{0})$.

O módulo de Tjurina $T_{(X, \mathbf{0})}^1$ da interseção completa $(X, \mathbf{0})$ é exatamente o primeiro módulo de cohomologia do complexo cotangente \mathbf{T}^1 numa vizinhança da singularidade da variedade

X . Dessa forma, a base do módulo de Tjurina está em correspondência biunívoca com o sistema de geradores de \mathbf{T}^1 . Vejamos essa correspondência em alguns exemplos:

Exemplo A.0.1. *Considere o semigrupo $\mathcal{H} = \langle 4, 7 \rangle$, que é simétrico, interseção completa e tem gênero $g = 9$. Considere a curva monomial afim dada por \mathcal{H} :*

$$\mathcal{D} = \{(t^4, t^7) | t \in \mathbb{A}^1\} \subset \mathbb{A}^2.$$

Então $\mathcal{D} = V(f)$, com $f = Y^4 - X^7 \in \mathbb{k}[X, Y]$. Nesse caso, como \mathcal{D} é uma hipersuperfície, o módulo de Tjurina de f coincide com a álgebra de Tjurina de f e é dado por

$$T_{\mathcal{D},0}^1 = \frac{\mathbb{k}[X, Y]}{\langle f, Df \rangle} = \frac{\mathbb{k}[X, Y]}{\langle Y^4 - X^7, Y^3, X^6 \rangle} = \frac{\mathbb{k}[X, Y]}{\langle Y^3, X^6 \rangle}.$$

Os geradores de $T_{\mathcal{D},0}^1$ como \mathbb{k} -espaço vetorial são

$$\{1, X, Y, XY, X^2, X^2Y, X^2Y^2, Y^2, XY^2, X^3, X^3Y, X^3Y^2, X^4, X^4Y, X^4Y^2, X^5, X^5Y, X^5Y^2\}$$

Considere a curva monomial canônica $\mathcal{C}^{(0)} \subset \mathbb{P}^8$ que realiza o semigrupo \mathcal{H} no ponto $P(0 : \dots : 0 : 1)$. Temos $\mathcal{C}^{(0)}|_{X_0=1} \simeq \mathcal{D}$. A base P -hermitiana implodida de $H^0(\mathcal{C}^{(0)}, (4g - 4)P) = H^0(\mathcal{C}^{(0)}, 32P)$ é dada por

$$\begin{cases} x_4, x_7, x_4^2, x_4x_7, x_4^3, x_7^2, x_4^2x_7, x_4^4, x_4x_7^2, x_4^3x_7, x_4^5, x_7^3, x_4^2x_7^2, \\ x_4^4x_7, x_4^6, x_4x_7^3, x_4^3x_7^2, x_4^5x_7, x_4^7, x_4^2x_7^3, x_4^4x_7^2, x_4^6x_7, x_4^8 \end{cases}$$

Considerando o polinômio f em $\mathbb{k}[X_4, X_7]$, temos que seu unfold é dado por

$$\begin{aligned} \tilde{f} = & X_7^4 - X_4^7 - c_1X_4^5X_7 - c_2X_4^3X_7^2 - c_3X_4X_7^3 - c_4X_4^6 - c_5X_4^4X_7 - c_6X_4^2X_7^2 - c_7X_7^3 - c_8X_4^5 - \\ & - c_9X_4^3X_7 - c_{10}X_4X_7^2 - c_{12}X_4^4 - c_{13}X_4^2X_7 - c_{14}X_7^2 - c_{16}X_4^3 - c_{17}X_4X_7 - c_{20}X_4^2 - c_{21}X_7 - \\ & - c_{24}X_4 - c_{28} \end{aligned}$$

e possui 19 coeficientes $c_i \in \mathbb{k}$. Fazendo as possíveis mudanças de variáveis:

$$\begin{aligned} X_4 & \mapsto X_4 + d_4 \\ X_7 & \mapsto X_7 + e_3X_4 + e_7 \end{aligned}$$

podemos normalizar o coeficiente de peso 3, o de peso 4 e o de peso 7.

Vamos considerar a base da álgebra de Tjurina de f também em $\mathbb{k}[X_4, X_7]$:

$$\{1, X_4, X_7, X_4^2, X_4X_7, X_4^3, X_7^2, X_4^2X_7, X_4^4, X_4X_7^2, X_4^3X_7, X_4^5, X_4^2X_7^2, X_4^4X_7, X_4^3X_7^2, X_4^5X_7, X_4^4X_7^2, X_4^5X_7^2\}$$

Considerando os pesos dos elementos da base da álgebra de Tjurina, temos que para cada elemento da base com peso ω menor que 28, ou seja, exceto para os elementos $X_4^4X_7^2$ e $X_4^5X_7^2$, existe um único coeficiente c_i de peso $i = 28 - \omega$ na base de $\mathbf{T}^{1,-}$.

B O ideal de uma curva monomial afim interseção completa

Um dos resultados principais da tese tem como hipótese o fato de que a curva monomial afim $\text{Spec}(\mathbb{k}[\mathcal{H}]) \subset \mathbb{A}^r$ é interseção completa. Ao implodir os geradores da curva monomial canônica $\mathcal{C}^{(0)}$ que realiza o semigrupo \mathcal{H} obtemos os $r - 1$ polinômios geradores de $\text{Spec}(\mathbb{k}[\mathcal{H}])$. Depois de fazer muitos exemplos foi possível perceber que os polinômios geradores do ideal de $\text{Spec}(\mathbb{k}[\mathcal{H}])$ seguiam um certo padrão. Apesar do raciocínio ainda não estar concluído, temos um resultado preliminar sobre esse assunto.

Lema B.0.1. *Seja \mathcal{H} um semigrupo simétrico não hiperelíptico de gênero g , $\mathcal{C}^{(0)}$ a curva monomial canônica que realiza \mathcal{H} num ponto liso P , $\{x_{n_0}, x_{n_1}, \dots, x_{n_{g-1}}\}$ a base P -hermitiana de $H^0(\mathcal{C}^{(0)}, (2g - 2)P)$ e $X_{n_0}, \dots, X_{n_{g-1}}$ o levantamento da base P -hermitiana. Então para toda não lacuna $n_i, i = 0, \dots, g - 1$, existe uma forma quadrática isobárica do tipo $X_{n_i}^2 - X_{n_k}X_{n_j}$ que se anula em $\mathcal{C}^{(0)}$.*

Para mostrar a existência dessas formas basta mostrar que existe uma maneira diferente de escrever $2n_i, i = 0, \dots, g - 2$, como soma de duas não lacunas. A construção dessas formas vem da construção da base P -hermitiana de $H^0(\mathcal{C}^{(0)}, (4g - 4)P)$. Observe que como a maior não lacuna do sistema canônico de geradores é $2g - 2$, as formas terão peso estritamente menor que $4g - 4$, já que a única maneira de escrever $4g - 4$ como soma de duas não lacunas é $(2g - 2) + (2g - 2)$.

Demonstração. Dividiremos a demonstração em três casos:

Caso 1: $2n_i < 2g - 2 + n_i, i = 0, \dots, g - 1$.

Nesse caso, sendo $2n_i = n_j < 2g - 2$, basta escrever $2n_i = 0 + n_j$ e temos a forma $X_{n_i}^2 - X_{n_0}X_{n_j} = 0$.

Caso 2: $2n_i = 2g - 2 + n_i, i = 0, \dots, g - 3$.

Nesse caso, a existência de não-lacunas n_j e n_k diferentes de n_i tais que $2n_i = n_j + n_k$ é garantida pelo Teorema 3.2.3. Portanto temos a forma $X_{n_i}^2 - X_{n_j}X_{n_k} = 0$.

Caso 3: $2n_i = 2g - 2 + \ell$, onde ℓ é um lacuna.

Seja n_1 a multiplicidade de \mathcal{H} . Vamos dividir esse caso em dois subcasos:

Caso 3.1: $\ell \leq n_1$.

Pela simetria de \mathcal{H} , temos $\ell_{g-1} = \ell_g - n_1 \Rightarrow n_1 = \ell_g - \ell_{g-1}$, ou seja, entre ℓ_{g-1} e ℓ_g existem

$n_1 - 1$ e não lacunas de \mathcal{H} . Então

$$\begin{aligned} 2g - 2 + \ell &= 2g - 1 + (\ell - 1) \\ &= 2g - 1 - \ell_{g-1} + \ell_{g-1} + \ell - 1 \\ &= (\ell_g - \ell_{g-1}) + \underbrace{(\ell_{g-1} + \ell - 1)}_{\in \mathcal{H} \text{ pois } \ell \leq m} \\ &= n_1 + n_k \end{aligned}$$

Portanto temos a forma $X_{n_i}^2 - X_{n_1}X_{n_k} = 0$.

Caso 3.2: $\ell > m$.

Temos $2g - 2 + \ell = 2g - 3 + (\ell + 1)$, onde $2g - 3 \in \mathcal{H}$ pois \mathcal{H} é não-hiperelítico. Vamos mostrar que $(\ell + 1)$ pertence a \mathcal{H} . Temos

$$2g - 2 + \ell = 2n_i \Rightarrow \ell = 2n_i + 2 - 2g \Rightarrow \ell + 1 = 2n_i - (2g - 3).$$

Como $\ell > n_1$, temos $\ell + 1 > n_1 + 1$, e daí

$$\begin{aligned} 2n_i - (2g - 3) > n_1 + 1 &\Rightarrow 2n_i > n_1 + 2g - 2 \\ &\Rightarrow n_i \geq \lceil \frac{n_1}{2} \rceil + g - 1 \\ &\Rightarrow n_i > g. \quad (*) \end{aligned}$$

Se $\ell + 1 = 2n_i - 2g + 3 \notin \mathcal{H}$, pela simetria teríamos

$$\begin{aligned} 2n_i - 2g + 3 &= \ell_g - n_j, n_j \in \mathcal{H} \\ \Rightarrow 2n_i - 2g + 3 &= 2g - 1 - n_j \\ \Rightarrow 2n_i + n_j &= 4g - 4. \end{aligned}$$

Por (*), $4g - 4 < 2g + n_j \Rightarrow n_j > 2g - 4 \Rightarrow n_j = 2g - 3$ ou $n_j = 2g - 2 \Rightarrow \ell = 1$ ou $\ell = 2$, o que é uma contradição já que supomos $\ell > m$ e \mathcal{H} é não-hiperelítico. Portanto $2n_i = 2g - 3 + (\ell + 1)$ e temos a forma quadrática $X_{n_i}^2 - X_{2g-3}X_{\ell+1} = 0$. \square

Portanto mostramos que para um sistema canônico de geradores n_0, n_1, \dots, n_{g-1} sempre existe uma forma quadrática do tipo $X_{n_i}^2 - X_{n_j}X_{n_k}$ que se anula em $\mathcal{C}^{(0)}$. Sejam a_1, a_2, \dots, a_r os geradores minimais de \mathcal{H} e

$$\mathcal{D} = (t^{a_1}, t^{a_2}, \dots, t^{a_r}), t \in \mathbb{k} \subset \mathbb{A}^r$$

a curva monomial afim dada por \mathcal{H} . Quando aplicamos o mapa de improplosão

$$\begin{array}{ccc} \Pi: \mathbb{k}[X_{n_0}, \dots, X_{n_{g-1}}] & \longrightarrow & \mathbb{k}[X_{a_1}, \dots, X_{a_r}] \\ X_{n_0} & \longmapsto & 1 \\ X_{n_i} & \longmapsto & X_{a_1}^{\alpha_1} \cdots X_{a_r}^{\alpha_r} \end{array}$$

em todas as formas quadráticas que geram $\mathcal{C}^{(0)}$ obtemos os $r - 1$ geradores da curva \mathcal{D} . *A priori* não sabemos se as formas dadas pelo lema anterior "sobrevivem" ao mapa de improplosão, ou seja, se elas não se tornam identicamente nulas quando avaliadas no mapa Π . Se $2a_i \leq 2g - 2$ não conseguimos garantir nada, mas se $2a_i > 2g - 2$ essa forma "sobrevive" e se anula em \mathcal{D} . De fato, da existência da forma $X_{n_i}^2 - X_{n_0}X_{n_{2g-1}} = 0$, como $n_0 = 0$ e $n_{g-1} = 2g - 2$, temos a garantia

de que $2g - 2$ se escreve como soma de duas não lacunas que não podem ser iguais a a_i já que $2a_i > 2g - 2$. Portanto, como a_i é gerador minimal de \mathcal{H} , a implosão da forma $X_{a_i}^2 + X_{n_j}X_{n_k}$ será um polinômio isobárico em que o primeiro membro continua sendo $X_{a_i}^2$ e o segundo membro é um monômio em que não temos mais o controle do grau, apenas do peso. Mas, apesar da falta de conhecimento do grau desse polinômio, garantimos sua existência como um dos polinômios geradores do ideal de \mathcal{D} pela minimalidade do grau do termo $X_{a_i}^2$. Portanto temos o seguinte Teorema:

Teorema B.0.2. *Seja \mathcal{H} um semigrupo simétrico não hiperelíptico de gênero g , a_1, a_2, \dots, a_r seus geradores minimais e \mathcal{D} a curva monomial afim dada por \mathcal{H} . Se $a_i > g - 1, i = 1, \dots, r$, então existe um polinômio isobárico em $\mathbb{k}[X_{a_1}, \dots, X_{a_r}]$ do tipo $P = X_{a_i}^2 - X_{a_1}^{\alpha_1} X_{a_2}^{\alpha_2} \dots X_{a_r}^{\alpha_r}$ que pertence ao ideal de \mathcal{D} .*

Com esse resultado podemos encontrar facilmente o ideal da curva monomial afim dada pelo semigrupo $\mathcal{H} = \langle 4, 7, 10 \rangle$ de gênero $g = 7$. Temos $g - 1 = 6$ e os dois maiores geradores minimais são maiores que 6. Pelo Teorema anterior, existe um polinômio isobárico cujo primeiro termo é X_7^2 que se anula em \mathcal{D} . Para encontrar o segundo termo desse polinômio basta encontrar um monômio de peso 14 formado pelas variáveis X_4 e X_{10} em que o expoente de variáveis de menor peso deve ser o maior possível. Esse caso é bem simples, o monômio é X_4X_{10} . Portanto o polinômio $P = X_7^2 - X_4X_{10}$ pertence a $\mathbb{k}[X_4, X_7, X_{10}]$ e se anula em \mathcal{D} . De maneira análoga, como $10 > g - 1$, temos o polinômio $Q = X_{10}^2 - X_4^5$ que se anula em \mathcal{D} . Como sabemos que \mathcal{D} é interseção completa (esse exemplo foi calculado no Capítulo 3) temos que seu ideal I é dado por $I = (X_7^2 - X_4X_{10}, X_{10}^2 - X_4^5)$.

Para que exista um polinômio do tipo $P = X_{a_i}^2 - X_{a_1}^{\alpha_1} X_{a_2}^{\alpha_2} \dots X_{a_r}^{\alpha_r}$ em $\mathbb{k}[X_{a_1}, \dots, X_{a_r}]$ que se anule em \mathcal{D} não é necessário que $a_i > g - 1$, ou seja, a recíproca do Teorema B.0.2 não é verdadeira. De fato, considere o semigrupo $\mathcal{H} = \langle 8, 10, 12, 13 \rangle$ de gênero $g = 14$ que é interseção completa. Nenhum dos geradores minimais de \mathcal{H} é estritamente maior que $g - 1$. Entretanto seu ideal em $\mathbb{k}[X_8, X_{10}, X_{12}, X_{13}]$ é dado por

$$I = (X_{10}^2 - X_8X_{12}, X_{12}^2 - X_8^3, X_{13}^2 - X_8^2X_{10}),$$

ou seja, todos os polinômios geradores do ideal I são do tipo $P = X_{a_i}^2 - X_{a_1}^{\alpha_1} X_{a_2}^{\alpha_2} \dots X_{a_r}^{\alpha_r}$. Analisando dessa maneira podemos pensar que o ideal de uma curva monomial interseção completa é sempre gerado por polinômios desse tipo, mas isso não é verdade. Por exemplo, para o semigrupo $\mathcal{H} = \langle 18, 20, 25, 27, 30 \rangle$, interseção completa, de gênero $g = 45$, aparece um polinômio inesperado no ideal de \mathcal{D} , o polinômio $P = X_{18}X_{27} - X_{20}X_{25}$, que tem termos cruzados. Nesse caso o ideal de \mathcal{D} em $\mathbb{k}[X_{18}, X_{20}, X_{25}, X_{27}, X_{30}]$ é dado por

$$I = (X_{18}X_{27} - X_{20}X_{25}, X_{25}^2 - X_{20}X_{30}, X_{27}^2 - X_{18}^3, X_{30}^2 - X_{20}^3)$$

Como foi dito no início da seção, os resultados ainda não estão concluídos e ficam como propostas para trabalhos futuros.

C Algoritmo para calcular as equações do Moduli

Vamos apresentar agora um algoritmo implementado no MAPLE para o cálculo da base P -hermitiana de $H^0(\mathcal{C}_{\mathcal{H}}^{(0)}, \omega^n)$, para $n = 1, 2, 3$, das formas que geram o ideal de $\mathcal{C}_{\mathcal{H}}^{(0)}$ e das dimensões de cada parte homogênea de $\mathbf{T}_{\mathbb{k}[\mathcal{H}]}^1$ para todo semigrupo simétrico \mathcal{H} , inclusive os trigonais. Consequentemente, é possível calcular a álgebra e o número de Tjurina de uma singularidade com semigrupo \mathcal{H} , já que coincidem $\mathbf{T}_{\mathbb{k}[\mathcal{H}]}^1$ e sua dimensão, respectivamente.

```

> restart;
> H := [...] # Adicionar o sistema canônico de geradores.
> with(LinearAlgebra);
H0 := [seq(H[i], i = 2 .. nops(H))];
g := nops(H); # Calcula o gênero de H.
L := (seq(i, i = 1 .. 2*g-1), minus convert(H, set));

criavariavel := proc (H) local i, n, A; # Cria as variáveis  $X_i$ 
A := NULL;
for i from 1 to nops(H) do
A := A, x[H[i]]
od;
RETURN(A);
end:
X := [criavariavel(H)];

soma2a2 := proc (H) local i, j, A, B, C; # Faz os produtos das variáveis dois a dois.
A := NULL;
B := criavariavel(H);
C := NULL;
for i from 1 to nops(H) do
for j from i to nops(H) do
C := C, B[i]*B[j];
od;
od;
RETURN([C])
end:

soma3a3 := proc (H) local i, j, V, S, T, U; # Faz os produtos das variáveis três a três.
V := [criavariavel(H)]; T := NULL; U := NULL;
S := soma2a2(H); for j from 1 to nops(S) do
for i from 1 to nops(V) do
T := T, V[i]*S[j];
od;
od;
RETURN(convert({T}, list));
end:

```

```

subst := proc (P) collect(subs({seq(x[i] = ti, i = 0 .. 2*(g-2))}, P), t) end: # substitui as
variáveis Xi por ti
tP := proc (P) collect(subs({seq(x[i] = x[i]* ti, i = 0 .. 2*(g-2))}, expand(P)), t) end:
# mantém as variáveis Xi
iso := proc (F) collect(lcoeff(tP(F), t), X, distributed) end: # toma a parte isobárica
ini := proc (F) local XX, L, i, a; XX := [criavariavel(H)]; L := iso(F); for i from 1 to nops(H)
do a := XX[i]; L := tcoeff(L, a)*aldegree(L,a) od; RETURN(L); end: # toma o monômio
que possui a variável de menor peso da variável iso
peso := proc (F) degree(tP(F), t) end: # Calcula o peso da variável Xi.

poli2 := proc (H) local i, A, B; # Cria polinômios do tipo XniXnjtni+nj
A := soma2a2(H);
B := 0;
for i from 1 to nops(A) do
B := B+tP(A[i]);
od;
RETURN(collect(B, t));
end:

base2 := proc (H) local i, j, A, B, C; # Base P-hermitiana de H0(CH(0), ω2)
A := poli2(H); B := NULL; C := NULL;
for j from 0 to degree(A) do
if coeff(A, t, j) = ini(coeff(A, t, j)) then
if coeff(A, t, j) ≠ 0 then B := B, coeff(A, t, j);
fi;
else
C := coeff(A, t, j);
for i from 1 to nops(C)-1 do
C := C-ini(C);
od;
B := B, C;
fi;
od;
RETURN(B);
end:

poli3 := proc (H) local i, A, B;
A := soma3a3(H); # Cria polinômios do tipo XniXnjXnktni+nj+nk
B := 0;
for i from 1 to nops(A) do
B := B+tP(A[i]);
od;
RETURN(sort(collect(B, t), t)); end:

```

```

base3 := proc (H) local i, j, A, B, C;                                     # Base P-hermitiana de  $H^0(\mathcal{C}_{\mathcal{H}}^{(0)}, \omega^3)$ 
A := poli3(H); B := NULL; C := NULL;
for j from 0 to degree(A) do
if coeff(A, t, j) = ini(coeff(A, t, j)) then
if coeff(A, t, j)  $\neq$  0 then B := B, coeff(A, t, j);
fi;
else
C := coeff(A, t, j);
for i from 1 to nops(C)-1 do
C := C-ini(C);
od;
B := B, C;
fi;
od;
RETURN(B);
end:

nbase2 := proc (H) local A, B, C; # Toma os monômios  $X_{n_i}X_{n_j}$  que não estão na base P-hermitiana
A := convert(soma2a2(H), set);
B := {base2(H)};
C := A minus B;
RETURN(convert(C, list));
end:

nbase3 := proc (H) local A, B, C; # Toma os monômios  $X_{n_i}X_{n_j}X_{n_k}$  que não estão na base P-hermitiana
A := convert(soma3a3(H), set);
B := {base3(H)};
C := A minus B;
RETURN(convert(C, list));
end:

basis := proc (H) local i, j, n, A, B, AA, BB, C, F, G, Q; # Série geradora dos elementos da base P-hermitiana de graus 2 e 3
A := base2(H); B := base3(H); AA := 0; BB := 0; C := NULL; Q := NULL;
for i from 1 to nops([A]) do AA := AA+tP(A[i]); od;
for i from 1 to nops([B]) do BB := BB+tP(B[i]); od;
for j from 0 to degree(AA, t) do Q := Q, coeff(AA, t, j); od;
for j from 0 to degree(BB, t) do C := C, coeff(BB, t, j); od;
RETURN([Q], [C]);
end:

```

```

nbasis := proc (H) local i, j, A, B, AA, BBC, QQ, C, CC, BB; # Cria a série geradora dos
elementos que não estão na base
A := nbase2(H); B := nbase3(H); CC := NULL;
AA := 0; BB := 0; QQ := NULL;
for i from 1 to nops(A) do AA := AA+tP(A[i]); od;
for i from 1 to nops(B) do BB := BB+tP(B[i]); od;
for i from 0 to degree(AA, t) do
if coeff(AA, t, i) ≠ 0 then
if coeff(AA, t, i) = ini(coeff(AA, t, i)) then QQ := QQ, coeff(AA, t, i);
else
C := coeff(AA, t, i);
QQ := QQ, ini(C);
for j from 1 to nops(C)-1 do
QQ := QQ, ini(C-ini(C));
C := C-ini(C);
od;
fi;
fi;
od;
for i from 0 to degree(BB, t) do
if coeff(BB, t, i) ≠ 0 then
if coeff(BB, t, i) = ini(coeff(BB, t, i)) then CC := CC, coeff(BB, t, i);
else
C := coeff(BB, t, i);
CC := CC, ini(C);
for j from 1 to nops(C)-1 do
CC := CC, ini(C-ini(C));
C := C-ini(C);
od;
fi;
fi;
od;
RETURN([QQ], [CC]);
end:
Q := basis(H)[1]: C := basis(H)[2]: # Cria as formas de graus 2 e 3 que geram o ideal de  $C_{\mathcal{H}}^0$ 
QQ := nbasis(H)[1]: CC := nbasis(H)[2]:
F := [seq(QQ[i]-Q[peso(QQ[i])+1]+sum(c[i, j]*Q[peso(QQ[i])+1-j], j = 1 .. peso(QQ[i])), i =
1 .. nops(QQ))]: # unfold das formas quadráticas
F0 := [seq(QQ[i]-Q[peso(QQ[i])+1], i = 1 .. nops(QQ))]: # Formas quadráticas
G := [seq(CC[i]-C[peso(CC[i])+1]+sum(d[i, j]*C[peso(CC[i])+1-j], j = 1 .. peso(CC[i])), i = 1
.. nops(CC))]:
G0 := [seq(CC[i]-C[peso(CC[i])+1], i = 1 .. nops(CC))]

```

```

mon := proc (H) local i, A;
A := 1;
for i from 1 to nops(X) do
A := A*X[i];
od;
RETURN(A);
end:

cubicforms := proc (H) local i, j, A, AA, B, BB;# Exclui as formas cúbicas que são múltiplas
das formas quadráticas.
B := NULL; BB := NULL;
for i from 1 to nops(G0) do
if gcd(G0[i], mon(H)) = 1 then
B := B, G0[i];
BB := BB, G[i];
fi;
od;
RETURN([B], [BB]);
end:

GG0 := cubicforms(H)[1];# Formas cúbicas
GG := cubicforms(H)[2];# unfold das formas cúbicas

vectorsF := proc (H) local i, j, A, B, C;
A := NULL; B := NULL; C := NULL;# Cria os vetores associados as formas quadráticas
conforme Teorema 2.2.6
for i from 1 to nops(F0) do
for j from 2 to nops(X) do
B := B, degree(ini(F0[i]), X[j]);
C := C, degree(expand(F0[i]-ini(F0[i])), X[j]);
od;
A := A, [B-C];
B := NULL; C := NULL;
od;
RETURN(A);
end:

```

```

vectorsG := proc (H) local i, j, A, B, C;
A := NULL; B := NULL; C := NULL; # Cria os vetores associados as formas cúbicas conforme
Teorema 2.2.6
for i from 1 to nops(GG0) do
for j from 2 to nops(X) do
B := B, degree(ini(GG0[i]), X[j]);
C := C, degree(expand(GG0[i]-ini(GG0[i])), X[j]);
od;
A := A, [B-C];
B := NULL; C := NULL;
od;
RETURN(A);
end:

DJ := [seq(peso(F0[i]), i = 1 .. nops(F0))];
V:=[vectorsF(H)];
DJ:= [seq(peso(F0[i]), i = 1 .. nops(F0))seq(peso(GG0[i]), i = 1 .. nops(GG0))];
V := [vectorsF(H), vectorsG(H)];

dimT1s := proc (s) local i, n, R;
n := 0; R := NULL; # Calcula a dimensão da parte graduada de grau s.
for i from 1 to nops(H0) do
if H0[i]+s in L or H0[i]+s < 0 then n := n+1;
fi;
od;
for i from 1 to nops(DJ) do
if s+DJ[i] in L or s+DJ[i] < 0 then
R := R, V[i];
fi;
od;
RETURN(max(0, n-1-Rank(Matrix([R]))));
end:

dimT1 := proc (n, m) local i, d; # Calcula a soma das dimensões das partes de grau n até m
d := 0;
for i from n to m do
d := d+dimT1s(i);
od;
RETURN(d);
end:

```

O algoritmo a seguir, também implementado no MAPLE, calcula as equações de $\mathcal{M}_{g,1}^{\mathcal{H}}$ que envolvem os coeficientes dos unfolds das formas geradoras da curva monomial canônica e é uma continuação do algoritmo acima.

```

# Calcula a soma dos coeficientes de um polinômio isobárico
sc:=proc(F) subst(F)/tdegree(tP(F),t) end:
# sum of the coefficients of the initial isobaric form;
siso:=proc(F) sc(iso(F)) end:
#Coefficient of the Initial Monomial
cini:=proc(F) sc(ini(F)) end:
# Initial Monic Monomial of a homogeneous polynomomial
mini:= proc(F) ini(F)/cini(F) end:

# Resto com respeito a uma divisão parcial por FF
R:=proc(S,FF) local G,H,i,flag,q;
G:=expand(S);
H:=expand(iso(S));
while expand(H-ini(H))≠ 0 do
flag:=true;
for i from 1 to 10 while flag do
if divide(ini(H),mini(FF[i]),q) then
G:=expand(G-FF[i]*q);
H:=expand(H-iso(FF[i])*q);
flag:=false
fi;
od;
od;
RETURN(G);
end;

# procura pelo coeficiente em siso(S) de peso j e maior índice
indet:=proc(S,j) local H,h,i;
H:=indets(siso(S));
h:=0;
for i from 1 to 10 do
if member(c[i,j],H) then h:=h,i;
fi;
od;
RETURN(max(h));
end;

```

```

# Cálculo dos coeficientes e suas relações até o peso WW da syzygy mais pesada
resultado:=proc(ww) local FF,S,HH,A,i,j,m,cc,dd;
A:=NULL;
S:=expand([S1,S2,...,Sl]); # todas as syzygies desdobradas
FF:=expand(F);
HH:=NULL;
for j from 1 to ww do
for i from 1 to nops(S) do
S[i]:=R(S[i],FF);
if pp[i]-peso(S[i])=j then m:=indet(S[i],j);
if m>0 then cc:=solve(sono(S[i])=0,c[m,j]);
A:=A,solve(sono(S[i]),c[m,j]);
FF:=expand(subs(c[m,j]=cc,FF));
S:=expand(subs(c[m,j]=cc,S));
fi;

if m=0 then HH:=HH,sono(S[i]);
S[i]:=expand(S[i]-ini(S[i]));
fi;
fi;
od;
od;
RETURN([FF,[HH],S]); end;
# FF são as formas com as relações nos coeficientes vindos das syzygies; [HH] são as equações
da variedade de moduli; S é unfold das syzygies.

```

Referências

- [1] E. Arbarello, M. Cornalba, P.A. Griffiths and J. Harris, *Geometry of algebraic curves*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 267, Springer-Verlag, 1985.
- [2] M. Artin, *Lectures on Deformations of Singularities*, Tata Institute of Fundamental Research, 1976.
- [3] I. Bermejo and I. García-Marco, *Complete intersections in certain affine and projective monomial curves*. Bull Braz Math Soc, New Series **45**, 599–624 (2014).
- [4] D.A. Buchsbaum and D. Eisenbud, *Algebra structures for finite free resolutions, and some structure theorems for ideals of codimension 3*, Amer. J. Math. **99**, 447-485 (1977).
- [5] R.O. Buchweitz, *Über Deformationem monomialer Kurvensingularitäten und Weierstrasspunkte auf Riemannschen Flächen*, Thesis, Hannover (1976).
- [6] R.O Buchweitz, *On deformations of monomial curves*, Séminaire sur les singularités des surfaces (Polytechnique), exp.n^o 12, p;1-15 (1976-1977).
- [7] E. M. Bullock, *Irreducibility and stable rationality of the loci of Weierstrass points on curves of genus at most six*, Proc. Amer. Math. Soc., **142**, 1121–1132(2014).
- [8] A. Contiero and A. Fontes, ‘*On the locus of curves with an odd subcanonical marked point*’, *arXiv:1804.09797* (2018).
- [9] A. Contiero, A. Fontes, J. Stevens and J. E. Quispe Vargas, *On non-negatively graded Weierstrass points*, to appear (2021).
- [10] A. Contiero and K. -O. Stöhr, *Upper bounds for the dimension of moduli spaces of curves with symmetric Weierstrass semigroups*, J. London Math. Soc. **88** 580–598 (2013).
- [11] P. Deligne, *Intersections sur les surfaces régulières* SGA 7, Exposé X, Lectures notes in Mathematics 340 1–37 (1973).
- [12] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry*, Springer Verlag, Graduate Texts in Mathematics, 150 (1994).
- [13] D. Eisenbud and J.Harris, *Limit linear series: basic theory*, Invent. Math. **85** 337-371 (1986).
- [14] G.-M. Greuel, *On deformation of curves and a formula of Deligne*, In: Algebraic geometry, Proc. int. Conf., La Rabida/Spain 1981, Lect. Notes Math. **961** 141–168 (1982).
- [15] G. -M. Greuel and C. Lossen, E. Shustin, *Introduction to Singularities and Deformations*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, (2010).

-
- [16] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry* Springer Verlage, Graduate Texts in Mathematics, 52 (1977).
- [17] S.L. Kleiman and R. Vidal Martins, *The canonical model of a singular curve*, *Geom. Dedicata* 139 139–166(2009).
- [18] S. Lichtenbaum and M. Schlessinger, *The Cotangent Complex of a Morphism*, *Trans. Am. Math. Soc.* 128 41–70 (1967).
- [19] T. Nakano, *On the moduli space of pointed algebraic curves of low genus. II. Rationality*, *Tokyo J. Math.* **31** , no. 1, 147-160 (2008).
- [20] G. Oliveira, *Weierstrass semigroups and the canonical ideal of nontrigonal curves*, *Manuscripta Math.* **71** (1991), 431–450.
- [21] I. Peeva, *Graded syzygies*, Algebra and applications, vol. 14, Springer, 2010.
- [22] N. Pflueger, *On non-primitive Weierstrass points*, *Algebra and Number Theory* 12 1923–1947 (2018).
- [23] N. Pflueger, *Weierstrass semigroups on Castelnuovo curves*, *Journal of Algebra* 582 117–135 (2021).
- [24] H. Pinkham, *Deformations of algebraic varieties with G_m -action*, *Astérisque* 20 (1974).
- [25] B. Riemann, *Collected papers. Translated from the 1892 German edition by Roger Baker, Charles Christenson and Henry Orde*. Kendrick Press, Heber City, UT, 2004.
- [26] D.S. Rim and M.A. Vitulli, *Weierstrass points and monomial curves*, *J. Algebra* 48 454–476 (1977).
- [27] M. Schlessinger, *Infinitesimal deformations of singularities*, Ph.D. Thesis, Harvard Univ., Cambridge, Mass., 1964.
- [28] J. Stevens, *Computing Versal Deformations of Singularities with Hauser’s Algorithm, Deformations of Surface Singularities. Bolyai Society Mathematical Studies*, vol 23. Springer, Berlin, Heidelberg (2013).
- [29] K.-O. Stöhr, *On the moduli spaces of Gorenstein curves with symmetric Weierstrass semigroups*, *J. reine angew. Math.* **441** 189–213 (1993).
- [30] F. Torres, *Weierstrass points and double covering of cuves with application: symmetric numerical semigroups which cannot be realized as weierstrass semigroups*, *Manusc. Math.* **83**, 39-58 (1994).
- [31] R. Waldi, *Deformation von Gorenstein-Singularitäten der Kodimension 3*, *Math. Ann.* 242 201–208 (1979).
- [32] R. Waldi, *Äquivariante Deformation monomialer Kurven*, *Regensburger Math. Schriften* 4 1–88 (1980).