

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA



Karoline Oliveira de Jesus

**REGIMES DE LIDERANÇA EM URNAS DE PÓLYA NÃO-LINEARES**

Belo Horizonte  
2020

Karoline Oliveira de Jesus

**REGIMES DE LIDERANÇA EM URNAS DE PÓLYA NÃO-LINEARES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Rémy de Paiva Sanchis

Belo Horizonte  
2020

Jesus, Karoline Oliveira de.

J58r Regimes de liderança em urnas de Pólya não-lineares  
[manuscrito] / Karoline Oliveira de Jesus. – 2020.  
43 f. il.

Orientador Rémy de Paiva Sanchis.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas  
Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de  
Matemática.

Referências: f. 43.

1. Matemática – Teses. 2 Processo estocástico – Teses. 3.  
Pólya, Modelos de urnas – Teses.4. Markov, Processos de –  
Teses. I. Sanchis, Rémy de Paiva. II Universidade Federal de  
Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de  
Matemática. IV.Título.

CDU 51 (043)

FOLHA DE APROVAÇÃO

*Regimes de liderança em urnas de Pólya não-lineares*

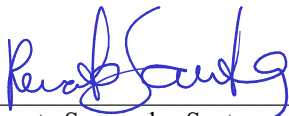
**KAROLINE OLIVEIRA DE JESUS**

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:



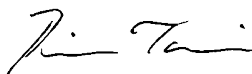
---

Prof. Rémy de Paiva Sanchis  
UFMG



---

Prof. Renato Soares dos Santos  
UFMG



---

Prof. Ricardo Hiroshi Caldeira Takahashi  
UFMG



---

Profa. Rosângela Helena Loschi  
EST/UFMG

Belo Horizonte, 16 de julho de 2020.

# Agradecimentos

Agradeço a Deus a graça de ter trilhado esta trajetória e por cruzar a minha história com os caminhos de pessoas tão singulares e extraordinárias;

A Keyson, meu melhor companheiro de vida, o cuidado e o alento diário, a gentileza e a responsabilidade exemplar;

À minha mãe, Rosângela, que sempre se esforçou para que eu pudesse desenvolver minhas potencialidades e que se fez presente, mesmo a distância;

Aos meus irmãos, David e Gabriel, o apoio e a amizade. Em toda a minha vida, por tê-los, jamais estive sozinha;

À minha família, principalmente ao meu avô João e à minha sogra Rose, que se despediram desta vida antes que eu concluísse esta etapa, mas deixaram infinitas e carinhosas marcas que transcendem o tempo e o espaço;

Aos meus amigos, sobretudo a Genilson, Pedro, Mateus e Henrique, nos quais descobri verdadeiros irmãos;

Aos meus professores da graduação na Unimontes e da pós-graduação na UFMG, sobretudo ao meu orientador Rémy, que foi de fato presente e muito contribuiu para o meu crescimento profissional;

Aos colegas André e Cristiano pelas proveitosas discussões sobre Urnas de Pólya;

Aos membros da banca a disponibilidade, os valiosos comentários e as correções;

À CAPES o auxílio financeiro;

A todos que torceram e hoje se alegram por mim!

*“Todo conhecimento deriva de Deus e Cristo é o ponto convergente de todo raciocínio - o*

*LOGOS.”*

*Solano Portela*

## Resumo

O modelo de urnas de Pólya é um processo estocástico em que objetos de interesse real são representados por bolas coloridas em uma urna. Uma bola é sorteada aleatoriamente e retornada à urna juntamente com outra bola da mesma cor observada. Esse processo é repetido  $n$  vezes. Dizemos que uma cor lidera na urna quando esta cor é a maior em quantidade de bolas. O modelo original é linear, mas pode ser generalizado para incorporar efeitos não-lineares. O objetivo deste trabalho é estudar a evolução da população em Urnas de Pólya não-lineares quanto aos seus regimes de liderança. No caso linear, a quantidade de bolas de cada cor cresce linearmente com o tempo e para  $n$  suficientemente grande uma das cores assume a liderança. Já no caso não-linear, concluímos que há três possibilidades: a partir de um momento aleatório, ou somente uma das cores será sorteada ou ambas as cores continuarão a ser sorteadas, porém existirá uma cor líder; ou haverá infinitas trocas de liderança. Usamos como ferramenta fundamental a Construção de Rubin.

**Palavras-chave:** Urnas de Pólya não-lineares. Regimes de liderança. Construção de Rubin. Vantagem cumulativa.

## Abstract

Pólya's urn model is a stochastic process in which colored balls in an urn represent the objects of interest. A ball is drawn randomly and then is placed back in the urn with another additional ball of the same color. This process is repeated  $n$  times. We say that a color leads in the urn when this color has more balls. The original model is linear, but can be generalized to incorporate nonlinear effects. The goal of this dissertation is to study the evolution of the nonlinear urn's population in terms of leadership. In the linear case, the number of balls of each color grows linearly with time and for a large enough  $n$ , one of the colors takes the lead. In the nonlinear case, we conclude that there are three possibilities: from a random moment, either only one of the colors will be drawn or both colors will continue to be drawn, but there will be a leading color; or there will be infinite leadership changes. We use Rubin's construction as the main tool.

**Keywords:** Nonlinear Pólya's urns. Leadership regimes. Rubin's construction. Cumulative advantage.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>9</b>
1.1	Preliminares . . . . .	11
1.2	Definição dos modelos . . . . .	13
<b>2</b>	<b>O caso linear</b>	<b>16</b>
2.1	Um caso simples da Urna de Pólya . . . . .	16
2.2	Um caso mais geral da Urna de Pólya . . . . .	18
<b>3</b>	<b>O caso não-linear</b>	<b>23</b>
3.1	A Construção de Rubin . . . . .	23
3.2	O caso superlinear . . . . .	27
3.3	O caso sublinear . . . . .	29
3.3.1	O caso $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ . . . . .	35
3.3.2	O caso $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>43</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>45</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Muitos processos observados empiricamente são influenciados pela vantagem cumulativa. A vantagem cumulativa é um fenômeno presente em vários sistemas em que existem agentes competindo por recursos e consiste na noção de que recursos acumulados promovem o acúmulo de mais recursos. A Urna de Pólya é um modelo matemático que possui esse princípio.

Em um esquema de Urna de Pólya, nomeado assim em homenagem ao matemático húngaro George Pólya (1887-1985), objetos de interesse real são representados por bolas coloridas contidas em uma urna. É possível encontrar aplicações desse modelo em problemas que surgem em diversas áreas, como biologia, física, economia e ciência da computação. O modelo original envolve a competição por recursos entre agentes sob efeitos lineares de vantagem cumulativa, mas podemos generalizar esse modelo para incorporar efeitos não-lineares, que possuem caracterizações diferentes e revelam comportamentos interessantes.

Considere o seguinte processo de Urna de Pólya: suponha uma urna contendo bolas pretas e bolas brancas. Uma bola é sorteada aleatoriamente e depois é retornada à urna juntamente com  $a \geq 1$  bolas adicionais da mesma cor observada. Esse processo é repetido  $n$  vezes. Observe que sortear bolas de determinada cor aumenta a chance de se sortear mais bolas desta mesma cor, admitindo, assim, uma vantagem cumulativa.

Denote por  $B_s(0)$  a quantidade inicial de bolas da cor  $s$  na urna e  $B_s(n)$  a quantidade de bolas da cor  $s$  após o  $n$ -ésimo sorteio e reposição na urna,  $s \in \{1, 2\}$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Seja  $\alpha > 0$ . A probabilidade de sortearmos uma bola da cor  $s$  no  $(n + 1)$ -ésimo sorteio pode ser escrita como

$$P(B_s(n + 1) = m + a \mid B_s(n) = m) = \frac{B_s^\alpha(n)}{B_1^\alpha(n) + B_2^\alpha(n)}.$$

O caso  $\alpha = 1$  corresponde ao modelo linear da Urna de Pólya. Esse caso é clássico e já foi bastante explorado, sendo contemplado aqui para fins de completude e comparação. O caso  $\alpha \neq 1$  corresponde a modelos não-lineares de Urna de Pólya, cujo estudo, até onde

sabemos, é relativamente recente. Neste trabalho, os resultados para o modelo linear foram baseados em [8] e [9], e os resultados para os modelos não-lineares foram baseados em [7]. Um modelo mais geral pode ser consultado em [6], em que a disputa por liderança é estudada em processos de Urnas de Pólya não-lineares com *fitness*.

Quando há na urna mais bolas de uma determinada cor, dizemos que esta cor é líder, ou seja, uma cor lidera a competição quando é a maior em quantidade de bolas. Estamos interessados em estudar a evolução da população da Urna de Pólya quanto aos seus regimes de liderança. Como o crescimento da população se comporta nos modelos linear e não-lineares? Será sempre possível continuar sorteando bolas pretas e bolas brancas ou existe um sorteio a partir do qual somente uma das cores será sorteada? Quando apenas uma cor será líder e quando haverá trocas de liderança? Uma evidente desvantagem na quantidade inicial de bolas de uma das cores traz implicações para essa sequência de escolhas a longo prazo? Veremos que essa disputa segue determinado comportamento a depender de ser  $\alpha = 1$ ,  $\alpha > 1$  e  $\alpha < 1$ , que chamaremos de casos linear, superlinear e sublinear, respectivamente.

Dentre as várias aplicações, podemos citar um experimento descrito por Goslin e Banker[3] em 1989, que trata do desenvolvimento dos neurônios. Os dentritos, que estão ligados ao corpo celular do núcleo neural, competem entre si pelo crescimento para a especificação do axônio. Isto é, o dentrito que mais cresce se torna o axônio, completando a estrutura neural. Konstantin e Raya Khanin [7] mostraram que o modelo probabilístico da Urna de Pólya com  $\alpha > 1$  provê resultados que são qualitativamente similares às observações do experimento.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: na próxima seção serão apresentadas algumas definições e resultados que serão úteis ao longo do trabalho, como o Teorema da Convergência de Martingais, o Teorema da Continuidade de Paul Lévy, o Teorema Central do Limite e outros. Em seguida, definiremos formalmente os modelos linear e não-lineares da Urna de Pólya e descreveremos o tipo de liderança assumida em cada um dos casos linear, superlinear e sublinear. Os Capítulos 2 e 3 apresentam as devidas demonstrações matemáticas. A Construção de Rubin, definida no Capítulo 3, é um passo essencial para as principais conclusões deste trabalho.

O Capítulo 4 finaliza o trabalho com algumas generalizações. Esta dissertação, por simplificação, está concentrada na ideia de uma urna contendo bolas pretas e bolas brancas, que podem representar dois objetos em crescimento ou dois agentes em uma disputa por recursos. No entanto o leitor poderá observar que todos os resultados aqui apresentados podem ser estendidos para representar  $k \in \mathbb{N}$  objetos em crescimento. Assim, nossas considerações finais re representam alguns resultados, que podem ser obtidos ao considerarmos uma urna contendo bolas de  $k$  diferentes cores.

## 1.1 Preliminares

Nesta seção apresentaremos os principais resultados e definições que foram usados ao longo do trabalho para facilitar a recordação destes ao leitor. Todos eles serão somente enunciados, mas podem ser consultados na íntegra em [2], [4] e/ou [5].

**Definição 1.1.** (Pág. 198 de [2]) Seja  $(\Omega, \mathcal{F})$  um espaço amostral. Uma **filtração** é uma sequência crescente  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$  de sub  $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{F}$ . A **filtração natural** de uma sequência de variáveis aleatórias  $(X_n)_{n \geq 1}$  é  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_i; 1 \leq i \leq n)$ .

Uma sequência de variáveis aleatórias  $(X_n)_{n \geq 1}$  em  $(\Omega, \mathcal{F})$  é **adaptada** a  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$  se  $X_n \in \mathcal{F}_n$  para todo  $n$ .

Uma sequência dupla  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ , onde  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$  é uma filtração e  $(X_n)_{n \geq 1}$  é adaptada a  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$ , é chamada de **sequência estocástica**.

**Definição 1.2.** (Pág. 198 de [2]) Uma sequência estocástica  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$  tal que  $X_n \in L^1$  é chamada

I) um **martingal** se, para todo  $n \geq 1$ ,

$$E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n;$$

II) um **submartingal** se, para todo  $n \geq 1$ ,

$$E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \geq X_n;$$

III) um **supermartingal** se, para todo  $n \geq 1$ ,

$$E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \leq X_n.$$

**Definição 1.3.** (Pág. 233 de [2]) Uma sequência  $(X_n)_{n \geq 1}$  de variáveis aleatórias é uma **cadeia de Markov** com respeito a uma filtração  $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$  se a sequência é adaptada a esta filtração e satisfaz a seguinte propriedade:

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n).$$

O conjunto de valores que as variáveis podem assumir é chamado de **espaço de estados** e será considerado discreto ao longo dessa dissertação.

**Teorema 1.1 (Teorema da Convergência de Martingais).** (Pág. 201 de [2]) Sejam  $(X_n, \mathcal{F}_n)_{n \geq 1}$  um submartingal e  $X_n^+ = \max\{X_n, 0\}$  a parte positiva de  $X_n$ . Se  $\sup_{n \geq 1} E(X_n^+) < \infty$ , então existe uma variável aleatória  $X_\infty$ , com  $E(X_\infty) < \infty$ , tal que  $X_n \xrightarrow{q.t.p.} X_\infty$ .

**Teorema 1.2 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue).** (Pág. 23 de [2]) Seja  $(f_n)_{n \geq 1}$  uma sequência de funções mensuráveis em um espaço de medida

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , tal que  $f_n \xrightarrow{q.t.p.} f$ . Se existir uma função  $g : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ ,  $g \in L^1$ , tal que  $|f_n| \leq g$  q.t.p., então as funções  $f_n, f \in L^1$  e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

**Definição 1.4.** (Pág. 221 de [4]) Sejam  $X$  uma variável aleatória e  $F_X$  sua função de distribuição. A **função característica** de  $F_X$  é a função  $\varphi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}).$$

**Teorema 1.3.** (Pág. 223 de [4]) Se as variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  são independentes, então  $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t)\varphi_Y(t)$ .

**Teorema 1.4 (Teorema da Continuidade de Paul Lévy).** (Pág. 234 de [4]) Sejam  $F_1, F_2, \dots$  funções de distribuição e  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  suas funções características respectivas. Se  $\varphi_n$  converge pontualmente para um limite  $\varphi$  e, se  $\varphi$  é contínua no ponto zero, então existe uma função de distribuição  $F$  tal que  $F_n \rightarrow F$  fracamente e  $\varphi$  é a função característica de  $F$ .

**Lema 1.1 (Lema de Borel-Cantelli).** (Pág. 198 de [4]) Sejam  $A_1, A_2, \dots$  eventos em um espaço de probabilidade.

I) Se  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ , então

$$P(A_n \text{ infinitas vezes}) = 0.$$

II) Se  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$  e os eventos  $A_n$  são independentes, então

$$P(A_n \text{ infinitas vezes}) = 1.$$

**Teorema 1.5 (Teorema das Três Séries de Kolmogorov).** (Pág. 70 de [2]) Sejam  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e  $A > 0$  um número real. Seja

$$Y_i = X_i \mathbf{1}_{\{|X_i| \leq A\}}.$$

Para que  $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$  convirja quase certamente é necessário e suficiente que

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(|X_i| \geq A) < \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} E(Y_i) \text{ convirja} \quad e \quad \sum_{i=1}^{\infty} \text{Var}(Y_i) < \infty.$$

**Teorema 1.6 (Teorema Central do Limite de Lindeberg).** (Pág. 262 de [4]) Sejam  $X_1, X_2, \dots$  variáveis aleatórias independentes tais que  $E(X_n) = \mu_n$ ,  $\text{Var}(X_n) = \sigma_n^2$ , onde  $\sigma_n^2 < \infty$  e pelo menos um  $\sigma_n^2 > 0$ . Sejam  $F_n = F_{X_n}$  suas funções de distribuição,

$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  e  $s_n = \sqrt{\text{Var}(S_n)} = \sqrt{\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2}$ . Se para todo  $\epsilon > 0$  tivermos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x - \mu_k| > \epsilon s_n} (x - \mu_k)^2 dF_k(x) = 0,$$

então

$$\frac{S_n - E(S_n)}{s_n} \xrightarrow{\text{dist.}} N(0, 1),$$

onde  $N(0, 1)$  representa a distribuição normal padronizada.

Finalmente, usaremos a notação de Bachmann-Landau para comparar comportamentos assintóticos de sequências aleatórias.

Quando tratamos de sequências não-aleatórias temos a seguinte definição:

**Definição 1.5.** (Pág. 4 de [5]) Sejam  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  e  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sequências numéricas.

I) Dizemos que  $b_n = O(a_n)$  se existe uma constante  $C$  e um  $n_0$  tal que  $|b_n| \leq C a_n$  para todo  $n \geq n_0$ . Equivalentemente,

$$b_n = O(a_n) \iff \limsup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|b_n|}{a_n} < \infty.$$

II) Dizemos que  $b_n = o(a_n)$  se  $\lim_{n \in \mathbb{N}} |b_n|/a_n = 0$ . Equivalentemente,  $b_n = o(a_n)$  se para todo  $\epsilon > 0$  existe  $n_\epsilon$  tal que  $|b_n| \leq \epsilon a_n$  para todo  $n \geq n_\epsilon$ .

Formalmente,  $O(a_n)$  e  $o(a_n)$  são conjuntos que representam todas as sequências  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  para as quais as condições acima são válidas, mas é usual o abuso de notação com o emprego da igualdade.

No contexto aleatório, a notação de Bachman-Landau pode ser entendida de maneiras distintas. Existem várias versões probabilísticas que podem ser consultadas com detalhes em [5]. Nesta dissertação usamos a seguinte definição:

**Definição 1.6.** (Pág. 9 de [5]) Seja  $(X_n)_{n \geq 1}$  uma sequência de variáveis aleatórias.

I) Dizemos que  $X_n = O(a_n)$  se existe uma constante  $C$  tal que  $|X_n| \leq C a_n$  certamente ou quase certamente.

II) Dizemos que  $X_n = o(a_n)$  se existe uma sequência  $\delta_n \rightarrow 0$  tal que  $|X_n| \leq \delta_n a_n$  certamente ou quase certamente.

## 1.2 Definição dos modelos

Considere uma urna contendo bolas pretas e bolas brancas. Sorteia-se aleatoriamente uma bola e esta é retornada à urna juntamente com outras  $a \geq 1$  bolas adicionais da mesma cor da bola sorteada, enquanto a quantidade de bolas da cor não sorteada permanece inalterada. Repita esse experimento  $n$  vezes e denote por  $B_s(0)$  a quantidade inicial de bolas da cor  $s$  na urna e por  $B_s(n)$  a quantidade de bolas da cor  $s$  após o

$n$ -ésimo sorteio e reposição na urna,  $s \in \{1, 2\}$  e  $n \in \mathbb{N}$ . Assim, no  $(n + 1)$ -ésimo sorteio e reposição na urna existe uma única cor  $j$  tal que

$$\text{se } B_j(n) = m, \text{ então } B_j(n + 1) = m + a. \quad (1.1)$$

No modelo que trataremos nessa dissertação a probabilidade de uma bola da cor  $s$  ser sorteada no  $(n + 1)$ -ésimo sorteio é proporcional a  $B_s^\alpha(n)$  com  $\alpha > 0$ , isto é,

$$P(B_s(n + 1) = m + a \mid B_s(n) = m) \propto B_s^\alpha(n). \quad (1.2)$$

É claro que uma maior quantidade de bolas de determinada cor implica em uma maior probabilidade de adicionarmos mais bolas desta mesma cor no próximo sorteio e reposição na urna. Como após cada sorteio cresce a quantidade de bolas de uma das cores com probabilidade 1 e a soma de todas as probabilidades é igual a 1, obtemos a seguinte fórmula para a probabilidade de transição:

$$P(B_s(n + 1) = m + a \mid B_s(n) = m) = \frac{B_s^\alpha(n)}{B_1^\alpha(n) + B_2^\alpha(n)}. \quad (1.3)$$

Estamos diante de um processo de Markov. Isso significa que a probabilidade de qualquer comportamento futuro do processo não depende do conhecimento dos comportamentos passados, mas somente do estado atual. Note que a probabilidade de sortearmos uma bola de uma das cores no  $n$ -ésimo sorteio não depende da sequência de cores sorteadas, mas apenas da quantidade acumulada de cada cor. Assim, as Equações (1.1)-(1.3) descrevem um processo de Markov em que quantidades maiores de bolas de determinada cor possuem maiores chances de crescer e o parâmetro  $\alpha$  determina a intensidade dessa competição por crescimento. Esse modelo possui três casos diferentes, a depender de  $\alpha$ : o caso linear ( $\alpha = 1$ ), o caso superlinear ( $\alpha > 1$ ) e o caso sublinear ( $\alpha < 1$ ).

O caso  $\alpha = 1$  corresponde à formulação clássica da Urna de Pólya. Usando as referências [8] e [9] como base, mostraremos que nesse caso o número de bolas brancas e bolas pretas cresce linearmente com o tempo e, para isso, trabalharemos com a sequência

$$\rho_n = \left( \frac{B_1(n)}{B_1(n) + B_2(n)} \right)_{n \geq 0},$$

obtendo a distribuição limite dessa densidade.

Fazendo  $n \rightarrow \infty$ , a variável aleatória  $\rho_n$  tende a um limite finito  $\rho_\infty$ , que depende das condições iniciais  $B_1(0)$  e  $B_2(0)$ , e do incremento  $a \geq 1$ . Calcularemos explicitamente a distribuição de probabilidade de  $\rho_\infty$ . Veremos que, com probabilidade 1,  $0 < \rho_\infty < 1$  e, por isso, nem mesmo a possível vantagem de haver, por exemplo, mais bolas pretas inicialmente é forte o suficiente para que as bolas brancas deixem de ser sorteadas ao longo do tempo. Se  $\rho_\infty > 1/2$ , então  $B_1(n) > B_2(n)$  para todo  $n$  suficientemente grande, ou seja, a partir de um momento aleatório as bolas da cor 1 assumem a liderança.

O caso  $\alpha \neq 1$  corresponde ao processo de Urna de Pólya não-linear. Diferentemente do caso linear, aqui não obtemos uma fórmula exata para prever os comportamentos da disputa. No entanto a Construção de Rubin, definida no Capítulo 3, nos oferece uma boa estimativa ao representar o processo descrito por (1.1)-(1.3) por meio de variáveis aleatórias independentes com distribuição conhecida.

Não encontramos referências que apresentassem o desenvolvimento completo da Construção de Rubin e da demonstração do Teorema de Rubin, por isso estas partes do texto foram elaboradas por nós. Os demais resultados que mostraremos para  $\alpha \neq 1$  são totalmente baseados em [7].

Veremos que no caso  $\alpha > 1$ , depois um momento aleatório, apenas bolas de uma das cores serão sorteadas. Mais precisamente, com probabilidade 1, existe uma cor  $j$  e um sorteio aleatório  $N$  tal que para todo  $n > N$  e  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$\text{se } B_j(n) = m, \quad \text{então } B_j(n+1) = m + a,$$

enquanto

$$B_s(n+1) = B_1(0) + B_2(0) + na - m$$

para  $s \neq j$ , com  $j, s \in \{1, 2\}$ . Se  $B_1(0) > B_2(0)$ , então as bolas da cor 1 possuem mais chances de vencer a disputa e mostraremos uma fórmula explícita que expressa a probabilidade dessa ocorrência.

No caso  $\alpha < 1$ , mostraremos que as variáveis aleatórias  $B_1(n)$  e  $B_2(n)$  possuem a mesma ordem: a proporção entre a quantidade de bolas pretas e a quantidade de bolas brancas após o  $n$ -ésimo sorteio tende a 1 quando  $n \rightarrow \infty$ . Veremos que isso implica que

$$B_s(n) = \frac{n}{2} + \hat{B}_s(n),$$

onde  $\hat{B}_s(n)$  são as flutuações  $B_s(n)$  para cada  $s \in \{1, 2\}$ .

A partir do estudo do comportamento assintótico das flutuações  $\hat{B}_s(n)$ , indicaremos o tipo de liderança que as bolas assumem quando  $\alpha < 1$ . São dois subcasos: mostraremos que (1) se  $1/2 < \alpha < 1$ , então  $\hat{B}_s(n)$  é da ordem  $n^\alpha$ ; (2) se  $0 < \alpha < 1/2$ , então  $\hat{B}_s(n)$  é da ordem  $\sqrt{n}$ , e se  $\alpha = 1/2$ , então  $\hat{B}_s(n)$  é da ordem  $\sqrt{n \log n}$ .

Vamos ver que quando  $0 < \alpha \leq 1/2$ , haverá infinitas trocas de liderança entre as cores. Assim, nesse regime de liderança, nenhuma cor cresce em quantidade de bolas mais rápido que a outra. Em outras palavras, para cada cor  $s \in \{1, 2\}$ , existe uma sequência infinita de sorteios  $(n_i^s)_{i \in \mathbb{N}}$  na qual esta cor será a maior em quantidade de bolas.

Quando  $1/2 < \alpha < 1$ , uma das cores liderará a disputa para todo  $n$  suficientemente grande. Aqui também temos uma fórmula explícita que define a probabilidade de uma cor ser líder. Note que dizer que uma das cores liderará a disputa para todo  $n$  suficientemente grande não significa dizer que as bolas da outra cor deixarão de ser sorteadas.



# Capítulo 2

## O caso linear

Neste capítulo analisaremos o comportamento assintótico da sequência  $(\rho_n)_{n \geq 0}$ , definida como

$$\rho_n = \frac{B_1(n)}{B_1(n) + B_2(n)}.$$

Obteremos uma fórmula exata que modela a evolução das variáveis aleatórias  $B_1(n)$  e  $B_2(n)$ , e que depende das condições iniciais  $B_1(0)$  e  $B_2(0)$  e do incremento  $a \geq 1$ . A Distribuição Beta, que definiremos na Seção 2.2, descreve bem o comportamento de  $(\rho_n)_{n \geq 0}$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Concluiremos que no caso  $a = 1$  o número de bolas brancas e bolas pretas cresce linearmente com o tempo e que a possível vantagem de haver mais bolas pretas inicialmente não é forte o suficiente para que as bolas brancas deixem de ser sorteadas ao longo do tempo.

As demonstrações das Proposições 2.1 e 2.2 a seguir foram baseadas em [8] e [9].

### 2.1 Um caso simples da Urna de Pólya

Começaremos com uma versão mais simples do modelo. Considere uma urna contendo somente uma bola branca e uma bola preta. Sorteia-se aleatoriamente uma bola da urna. Essa bola é retornada à urna juntamente com uma outra bola adicional da mesma cor da bola sorteada, sendo então  $a = 1$ . Assim, se existem  $k$  bolas pretas na urna após  $n$  sorteios, isto é, após terem sido adicionadas  $n$  bolas na urna, então a probabilidade de se sortear uma bola preta no  $(n + 1)$ -ésimo sorteio será de  $k/(n + 2)$  e a probabilidade de se sortear uma bola branca será de  $1 - k/(n + 2)$ .

**Proposição 2.1.** *Seja  $B(n)$  o número de bolas pretas após  $n$  sorteios e reposições na urna. A distribuição de  $B(n)$  é uniforme em  $\{1, 2, \dots, n + 1\}$ .*

*Demonstração.* Sejam  $(U_i)_{i \geq 0}$  variáveis aleatórias independentes e uniformemente

distribuídas em  $[0, 1]$  e

$$L_n = |\{k \in \{0, 1, \dots, n\}; U_k \leq U_0\}|.$$

Note que o evento  $\{L_n = k, L_{n+1} = k+1\}$  ocorre se e somente se  $U_{n+1}$  é um dos  $(k+1)$  elementos menores dentre  $\{U_0, U_1, \dots, U_{n+1}\}$  e  $U_0$  é o  $(k+1)$ -ésimo menor elemento. Então existem  $k \cdot n!$  ordenações de  $\{U_0, U_1, \dots, U_{n+1}\}$  satisfazendo esse evento: como  $U_0$  é o  $(k+1)$ -ésimo menor elemento, temos  $k$  possíveis posições para  $U_{n+1}$  entre os  $(k+1)$  elementos menores ou iguais a  $U_0$ . As variáveis  $U_1, U_2, \dots, U_n$  restantes são ordenadas de  $n!$  maneiras.

Como as variáveis  $U_0, U_1, \dots, U_{n+1}$  são uniformemente distribuídas, todas as  $(n+2)!$  ordenações possíveis são equiprováveis, então

$$P(L_n = k, L_{n+1} = k+1) = \frac{k \cdot n!}{(n+2)!} = \frac{k}{(n+2)(n+1)}.$$

Cada ordenação de  $\{U_0, U_1, \dots, U_n\}$  também é equiprovável. Logo,

$$P(L_n = k) = \frac{1}{n+1}.$$

Então

$$P(L_{n+1} = k+1 \mid L_n = k) = \frac{P(L_n = k, L_{n+1} = k+1)}{P(L_n = k)} = \frac{k}{(n+2)(n+1)}(n+1) = \frac{k}{n+2}. \quad (2.1)$$

Dado o evento  $\{L_n = k\}$ , como  $L_{n+1} \in \{k, k+1\}$ , segue que

$$P(L_{n+1} = k \mid L_n = k) = 1 - P(L_{n+1} = k+1 \mid L_n = k) = 1 - \frac{k}{n+2}. \quad (2.2)$$

Note que se existiam uma bola preta e uma bola branca na urna inicialmente e, após  $n$  sorteios, existiam  $k$  bolas pretas na urna, então a probabilidade de uma bola preta ser sorteada no  $(n+1)$ -ésimo sorteio é igual a  $k/(n+2)$  e a probabilidade de uma bola branca ser sorteada no  $(n+1)$ -ésimo sorteio é igual a  $1 - k/(n+2)$ .

Como  $L_1$  e  $B(1)$  possuem a mesma distribuição e, por (2.1) e (2.2), as sequências  $(L_n)_{n \geq 1}$  e  $(B(n))_{n \geq 1}$  possuem as mesmas probabilidades de transição, então  $(L_n)_{n \geq 1}$  e  $(B(n))_{n \geq 1}$  possuem a mesma distribuição.

Uma vez que a posição de  $U_0$  em  $\{U_0, U_1, \dots, U_n\}$ , após a ordenação do conjunto, é uniforme entre as  $(n+1)$  posições possíveis, temos que  $L_n$  é uniformemente distribuído em  $\{1, 2, \dots, n+1\}$ . Portanto,  $B(n)$  é uniforme em  $\{1, 2, \dots, n+1\}$ .

□

## 2.2 Um caso mais geral da Urna de Pólya

Agora consideraremos um caso mais geral da Urna de Pólya linear. Aqui a urna deve conter pelo menos uma bola de cada cor e, após cada sorteio, juntamente com a bola sorteada, pode ser adicionada uma quantidade maior que 1 de bolas da mesma cor observada.

Considere, então, uma urna contendo uma quantidade inicial de  $B_1(0) \geq 1$  de bolas pretas e uma quantidade inicial de  $B_2(0) \geq 1$  de bolas brancas. Sorteia-se aleatoriamente uma bola, observamos a cor e retornamos a bola sorteada juntamente com mais  $a \geq 1$  bolas da mesma cor. Repita esse experimento  $n$  vezes e denote por  $B_s(n)$  o número de bolas da cor  $s$  na urna após o  $n$ -ésimo sorteio e reposição na urna,  $s \in \{1, 2\}$ .

Nesta seção usaremos a Função Gama, definida por

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \text{ onde } x \in \mathbb{R}^+,$$

que possui a propriedade

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \quad (2.3)$$

Também usaremos a Função Beta, definida pela composição de funções Gama

$$\beta(c, d) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(d)}{\Gamma(c+d)}.$$

É importante lembrarmos que uma Distribuição Beta de parâmetros  $c$  e  $d$  tem como função densidade a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta(c, d)} x^{c-1} (1-x)^{d-1} & , 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}, \quad (2.4)$$

pois vamos mostrar que a sequência

$$\rho_n = \left( \frac{B_1(n)}{B_1(n) + B_2(n)} \right)_{n \geq 0}$$

converge q.t.p. para uma variável aleatória  $\rho_\infty$ , que segue uma Distribuição Beta de parâmetros

$$\frac{B_1(0)}{a} \quad \text{e} \quad \frac{B_2(0)}{a}.$$

**Proposição 2.2.** *A sequência  $(\rho_n)_{n \geq 0}$ , definida acima, converge q.t.p. para uma variável aleatória  $0 < \rho_\infty < 1$ , tal que  $\rho_\infty$  segue uma distribuição Beta com parâmetros  $B_1(0)/a$  e  $B_2(0)/a$ .*

*Demonstração.* Seja  $X_n$  a variável aleatória indicadora definida, para todo  $n \in \mathbb{N}$ , como

$$X_n = \begin{cases} 1, & \text{se uma bola preta foi escolhida no } n\text{-ésimo sorteio} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Defina  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_i; 1 \leq i \leq n)$  como a filtragem natural dessa sequência. Observe que  $(X_{n+1} | \mathcal{F}_n)$  segue uma distribuição de Bernoulli de parâmetro  $B_1(n)/(B_1(n) + B_2(n))$ , isto é,

$$(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \stackrel{d}{=} \text{Ber} \left( \frac{B_1(n)}{B_1(n) + B_2(n)} \right).$$

Temos que  $\rho_n \leq 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Logo,  $\rho_n \in L^1$ . Vamos mostrar que a sequência  $(\rho_n)_{n \geq 0}$  é um  $\mathcal{F}$ -martingal.

$$\begin{aligned} E(\rho_{n+1} | \mathcal{F}_n) &= E \left( \frac{B_1(n+1)}{B_1(n+1) + B_2(n+1)} \mid \mathcal{F}_n \right) \\ &= E \left( \frac{B_1(n+1)}{B_1(0) + B_2(0) + (n+1)a} \mid \mathcal{F}_n \right) \\ &= \frac{1}{B_1(0) + B_2(0) + (n+1)a} E(B_1(n) + aX_{n+1} | \mathcal{F}_n) \\ &= \frac{1}{B_1(0) + B_2(0) + (n+1)a} \left( B_1(n) + a \frac{B_1(n)}{B_1(n) + B_2(n)} \right) \\ &= \frac{B_1(n)(B_1(n) + B_2(n) + a)}{(B_1(0) + B_2(0) + (n+1)a)(B_1(n) + B_2(n))} \\ &= \frac{B_1(n)(B_1(n) + B_2(n) + a)}{(B_1(n) + B_2(n) + a)(B_1(n) + B_2(n))} \\ &= \frac{B_1(n)}{B_1(n) + B_2(n)} \\ &= \rho_n. \end{aligned}$$

Note que um martingal é, por definição, também um submartingal. Logo, o Teorema de Convergência de Martingais garante que existe uma variável aleatória  $\rho_\infty$  tal que  $\rho_n \xrightarrow{q.t.p.} \rho_\infty$ . Estudaremos agora a distribuição de  $\rho_\infty$ .

Seja  $A_{n,k}$  o evento "escolher bolas pretas  $k$  vezes nos primeiros  $n$  sorteios", isto é,

$$A_{n,k} = \{B_1(n) = B_1(0) + ak\}.$$

Observe que o evento  $A_{n,k}$  também pode ser escrito como  $\{B_2(n) = B_2(0) + (n-k)a\}$ .

Existem  $n!/([k!(n-k)!])$  maneiras de se escolher bolas pretas  $k$  vezes nos primeiros  $n$  sorteios e, sendo  $1 \leq i \leq n$ , a probabilidade de se retirar da urna a  $i$ -ésima bola da cor  $s$  no  $n$ -ésimo sorteio é dada por

$$\frac{B_s(0) + (i-1)a}{B_1(0) + B_2(0) + (n-1)a}.$$

Segue que  $P(A_{n,k})$  é igual a

$$\binom{n}{k} \frac{B_1(0)[B_1(0) + a] \dots [B_1(0) + (k-1)a] B_2(0)[B_2(0) + a] \dots [B_2(0) + (n-k-1)a]}{[B_1(0) + B_2(0)][B_1(0) + B_2(0) + a][B_1(0) + B_2(0) + 2a] \dots [B_1(0) + B_2(0) + (n-1)a]}.$$

Dividindo o numerador e o denominador da expressão acima por  $a$ , denotando  $B_1(0)/a$  e  $B_2(0)/a$  por  $b_1$  e  $b_2$  respectivamente, e usando a propriedade definida em (2.3), obtemos que

$$\begin{aligned} & \frac{B_1(0)[B_1(0) + a] \dots [B_1(0) + (k-1)a] B_2(0)[B_2(0) + a] \dots [B_2(0) + (n-k-1)a]}{[B_1(0) + B_2(0)][B_1(0) + B_2(0) + a][B_1(0) + B_2(0) + 2a] \dots [B_1(0) + B_2(0) + (n-1)a]} \\ &= \frac{b_1(b_1 + 1) \dots (b_1 + k - 1) b_2(b_2 + 1) \dots (b_2 + n - k - 1)}{(b_1 + b_2)(b_1 + b_2 + 1)(b_1 + b_2 + 2) \dots (b_1 + b_2 + n - 1)} \\ &= \prod_{i=1}^k \left( \frac{\Gamma(b_1 + i)}{\Gamma(b_1 + i - 1)} \right) \prod_{i=1}^{n-k} \left( \frac{\Gamma(b_2 + i)}{\Gamma(b_2 + i - 1)} \right) \left[ \prod_{i=1}^n \left( \frac{\Gamma(b_1 + b_2 + i)}{\Gamma(b_1 + b_2 + i - 1)} \right) \right]^{-1} \\ &= \frac{\Gamma(b_1 + k)}{\Gamma(b_1)} \frac{\Gamma(b_2 + n - k)}{\Gamma(b_2)} \frac{\Gamma(b_1 + b_2)}{\Gamma(b_1 + b_2 + n)} \\ &= \frac{\beta(b_1 + k, b_2 + n - k)}{\beta(b_1, b_2)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$P(A_{n,k}) = \binom{n}{k} \frac{\beta(b_1 + k, b_2 + n - k)}{\beta(b_1, b_2)}.$$

Vamos calcular a função característica da variável aleatória  $\rho_n$ . Como a função  $f$  definida em (2.4) é a função densidade de uma distribuição Beta de parâmetros  $c$  e  $d$ , temos que

$$\beta(c, d) = \int_0^1 x^{c-1} (1-x)^{d-1} dx. \quad (2.5)$$

Até o final da seção usaremos a notação

$$B_{n,k} = \frac{B_1(0) + ka}{B_1(0) + B_2(0) + na}.$$

Assim, usando (2.5) e o Teorema do Binômio de Newton, temos que

$$\begin{aligned}
E(e^{it\rho_n}) &= \sum_{k=0}^n \exp(itB_{n,k}) \binom{n}{k} \frac{\beta(b_1+k, b_2+n-k)}{\beta(b_1, b_2)} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\exp(itB_{n,k})}{\beta(b_1, b_2)} \int_0^1 x^{b_1+k-1} (1-x)^{b_2+n-k-1} dx \\
&= \frac{\exp(itB_{n,0})}{\beta(b_1, b_2)} \int_0^1 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left[ x \exp\left(\frac{ita}{B_1(0)+B_2(0)+na}\right) \right]^k (1-x)^{n-k} x^{b_1-1} (1-x)^{b_2-1} dx \\
&= \frac{\exp(itB_{n,0})}{\beta(b_1, b_2)} \int_0^1 \left[ x \exp\left(\frac{ita}{B_1(0)+B_2(0)+na}\right) + (1-x) \right]^n x^{b_1-1} (1-x)^{b_2-1} dx
\end{aligned}$$

Mas vejamos que

$$\begin{aligned}
\left[ x \exp\left(\frac{ita}{B_1(0)+B_2(0)+na}\right) + (1-x) \right]^n &= \left[ x \exp\left(\frac{it}{b_1+b_2+n}\right) + (1-x) \right]^n \\
&= \left[ x \left( 1 + \frac{it}{b_1+b_2+n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + (1-x) \right]^n \\
&= \left[ x + \frac{itx}{b_1+b_2+n} + O\left(\frac{x}{n^2}\right) + 1-x \right]^n \\
&= \left[ 1 + \frac{itx}{b_1+b_2+n} + O\left(\frac{x}{n^2}\right) \right]^n \\
&= \left[ 1 + \frac{1}{n} \left( itx \left( \frac{b_1}{n} + \frac{b_2}{n} + 1 \right)^{-1} + O\left(\frac{x}{n}\right) \right) \right]^n
\end{aligned}$$

que converge para  $e^{itx}$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\exp(itB_{n,0})}{\beta(b_1, b_2)} \int_0^1 \left[ x \exp\left(it \frac{a}{B_1(0)+B_2(0)+na}\right) + (1-x) \right]^n x^{b_1-1} (1-x)^{b_2-1} dx \\
&= \frac{1}{\beta(b_1, b_2)} \int_0^1 e^{itx} x^{b_1-1} (1-x)^{b_2-1} dx,
\end{aligned}$$

que é a função característica da Distribuição Beta de parâmetros  $b_1$  e  $b_2$ . Como a função

$$\frac{1}{\beta(b_1, b_2)} \int_0^1 e^{itx} x^{b_1-1} (1-x)^{b_2-1} dx$$

é contínua em  $x = 0$ , o Teorema da Continuidade de Paul Lévy garante essa é a função

característica de  $\rho_\infty$ .

Portanto, a variável aleatória  $\rho_\infty$  segue uma distribuição Beta de parâmetros  $B_1(0)/a$  e  $B_2(0)/a$ . Além disso, temos que  $0 < \rho_\infty < 1$  com probabilidade 1 por caracterização da Distribuição Beta.

□

Note que no primeiro caso tínhamos  $B_1(0) = B_2(0) = a = 1$ , então  $b_1 = b_2 = 1$ . A Distribuição Beta com parâmetros iguais a 1 se reduz à Distribuição Uniforme no intervalo  $[0, 1]$ . Logo, o primeiro caso pode ser visto como uma particularização do segundo.

Vimos que

$$\frac{B_1(n)}{B_1(n) + B_2(n)} \xrightarrow{q.t.p.} \rho_\infty \quad (2.6)$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , sendo  $0 < \rho_\infty < 1$ . Assim, como  $B_1(n) + B_2(n) = B_1(0) + B_2(0) + an$ , temos que

$$\begin{aligned} \frac{B_1(n)}{an} &\xrightarrow{q.t.p.} \rho_\infty, \\ \frac{B_2(n)}{an} &\xrightarrow{q.t.p.} 1 - \rho_\infty \end{aligned}$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

Concluimos que a quantidade de bolas pretas e a quantidade de bolas brancas cresce linearmente com o tempo. O caso linear também define um regime de liderança, uma vez que se  $\rho_\infty > 1/2$  então

$$\frac{B_1(n)}{an} > \frac{1}{2}$$

para todo  $n$  suficientemente grande. Assim, para todo sorteio suficientemente grande teríamos que  $B_1(n) > B_2(n)$ , ficando então as bolas pretas na liderança da disputa. As bolas brancas assumem liderança quando  $\rho_\infty < 1/2$ . Porém, como  $0 < \rho_\infty < 1$ , nem mesmo uma possível desvantagem inicial impede que as bolas da cor desfavorecida sejam sorteadas ao longo do tempo.

# Capítulo 3

## O caso não-linear

Este capítulo contém as principais conclusões desse trabalho, uma vez que o estudo dos modelos não-lineares da Urna de Pólya é recente, diferentemente do caso clássico. A primeira seção desse capítulo é dedicada à Construção de Rubin, que será fundamental para a análise dos modelos não-lineares.

Identificamos como a população da Urna de Pólya linear evolui com o tempo a partir da obtenção de uma fórmula exata que modela o comportamento das variáveis aleatórias  $B_1(n)$  e  $B_2(n)$ . Não será assim nos casos superlinear e sublinear, mas obteremos uma boa estimativa. Para a obtenção dos resultados que apresentaremos nas Seções 3.2 e 3.3, representaremos  $B_1(n)$  por meio de uma variável aleatória que denotaremos por  $Y(n)$ . A definição de  $Y(n)$  é usualmente chamada de Construção de Rubin.

A variável  $Y(n)$  será mais fácil de se analisar matematicamente, pois será construída com base em variáveis aleatórias independentes com distribuição conhecida: a Distribuição exponencial.

O desenvolvimento da Construção de Rubin e a demonstração do Teorema 3.1, que mostra que  $Y(n)$  e  $B_1(n)$  possuem a mesma distribuição de probabilidade, feitos nesse texto, foram elaborados por nós. O enunciado desse teorema e a Construção de Rubin são citados em [1] e [7]. As Seções 3.2 e 3.3 são baseadas em [7].

### 3.1 A Construção de Rubin

Sejam  $B_1(0)$  a quantidade inicial de bolas pretas,  $B_2(0)$  a quantidade inicial de bolas brancas e  $B_s(n)$  a quantidade de bolas da cor  $s$  na urna após o  $n$ -ésimo sorteio e reposição,  $s \in \{1, 2\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Após cada sorteio, juntamente com a bola sorteada, é adicionada à urna uma quantidade  $a \geq 1$  de bolas da mesma cor observada.

Nesta seção consideraremos um modelo mais geral, em que a probabilidade de uma bola da cor  $s$  ser sorteada no  $n$ -ésimo sorteio pode ser dada pela composição de uma função  $f$  real positiva qualquer. A probabilidade de se sortear uma bola preta em qualquer sorteio



é dada por

$$P(B_1(1) = m + a \mid B_1(0) = m) = \frac{f(B_1(0))}{f(B_1(0)) + f(B_2(0))} \quad (3.1)$$

$$P(B_1(n+1) = m + a \mid B_1(n) = m) = \frac{f(B_1(n))}{f(B_1(n)) + f(B_2(n))}. \quad (3.2)$$

Poderíamos restringir a função  $f$  à lei  $f(x) = x^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ , para termos uma equivalência exata com o processo descrito por (1.1)-(1.3). No entanto o leitor poderá observar que em nenhum momento do texto será necessário exigir uma lei específica para esta função  $f$  positiva. Isso significa que a validade da Construção de Rubin não está condicionada a um modelo de urna específico e que o processo de Rubin, que definiremos a seguir, será equivalente a modelos de urnas de Pólya ainda mais gerais e, em particular, aos modelos linear e não-lineares discutidos nessa dissertação.

Considere o seguinte processo aleatório: sejam  $\eta_i^s$  variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial de parâmetro  $f(i)$  e

$$Z_i^s = \sum_{j=0}^i \eta_{B_s(0)+aj}^s, \quad (3.3)$$

com  $s \in \{1, 2\}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Defina os conjuntos de pontos

$$S = \{Z_i^s; s \in \{1, 2\}, i \in \mathbb{N}\} \quad \text{e} \quad (3.4)$$

$$S^s = \{Z_i^s; i \in \mathbb{N}\}, s \in \{1, 2\}. \quad (3.5)$$

O conjunto  $S$  pode ser ordenado por meio da sequência  $(t_n)_{n \geq 1}$  definida como

$$t_n = \inf\{t > 0; |[0, t] \cap S| = n\}. \quad (3.6)$$

Seja  $Y(n)$  a variável aleatória definida como

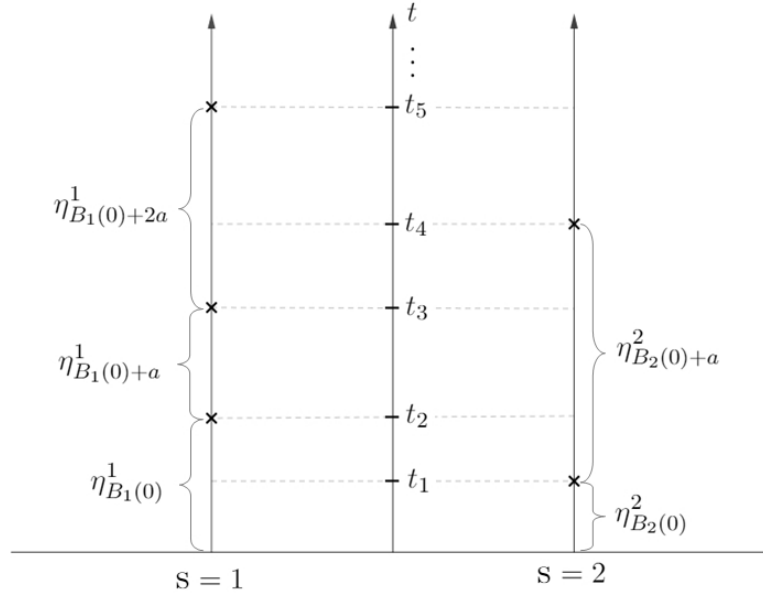
$$\begin{aligned} Y(0) &= B_1(0), \\ Y(n) &= B_1(0) + a \left| [0, t_n] \cap S^1 \right|. \end{aligned}$$

Mostraremos que  $Y(n)$  possui a mesma distribuição de probabilidade de  $B_1(n)$ , tendo como referência (3.1) e (3.2). Antes disso, relacionaremos de forma intuitiva o processo descrito acima com o processo descrito por (1.1)-(1.3).

Podemos interpretar as variáveis aleatórias  $Z_i^1$  e  $Z_i^2$  deste processo como dois relógios independentes que tocam seus alarmes com distribuição exponencial de parâmetro  $f(i)$ . As variáveis aleatórias  $\eta_i^1$  e  $\eta_i^2$  indicam o intervalo de tempo decorrido entre um alarme e outro do primeiro e do segundo relógio, respectivamente. O primeiro relógio toca quando há na urna uma movimentação favorável às bolas pretas e o segundo relógio toca quando

há movimentação favorável às bolas brancas.

Por exemplo, suponha que no primeiro sorteio tenha sido escolhida aleatoriamente uma bola branca e no segundo sorteio uma bola preta, como exemplificamos no gráfico abaixo. Assim, no tempo  $t_1$  tocou o segundo relógio exponencial e no tempo  $t_2$  tocou o primeiro relógio exponencial e, portanto,  $\eta_{B_2(0)}^2 < \eta_{B_1(0)}^1$  nesse exemplo. Se supusermos, como no gráfico, que a terceira movimentação na urna será favorável às bolas pretas, então o terceiro alarme a tocar será o do relógio  $Z_i^1$ , agora com parâmetro  $f(B_1(0) + a)$ , uma vez que foram adicionadas  $a \geq 1$  bolas pretas à urna logo após o segundo sorteio.



**Figura 3.1:** Representação gráfica de exemplo em que a urna recebe bolas brancas nos tempos  $t_1$  e  $t_4$  e bolas pretas nos tempos  $t_2, t_3$  e  $t_5$ .

Este é um processo de Markov em tempo contínuo e a propriedade da perda de memória da Distribuição Exponencial permite que ocorra uma transição de estados do processo toda vez que um dos relógios exponenciais toca seu alarme. Assim, quando há transição de estados, podemos iniciar um novo conjunto de relógios, variando seus parâmetros de acordo com a realização dos sorteios na urna. Observe que a probabilidade de os relógios tocarem simultaneamente é zero, uma vez que as variáveis aleatórias  $\eta_i^s$  são contínuas.

Deste modo, construímos uma variável aleatória que possui a mesma distribuição de probabilidade da variável  $B_1(n)$ . Note que o processo seria similar para  $B_2(n)$ . Embora esse novo processo possa parecer mais artificial que o processo original,  $Y(n)$  é mais fácil de se analisar matematicamente, devido à independência das variáveis aleatórias  $\eta_i^s$ .

**Teorema 3.1 (Teorema de Rubin).** *As cadeias de Markov  $[B_1(n)]_{n \in \mathbb{N}}$  e  $[Y(n)]_{n \in \mathbb{N}}$ , definidas anteriormente, possuem a mesma distribuição de probabilidade.*

*Demonstração.* Vamos mostrar que as probabilidades iniciais e as probabilidades de transição de ambas as variáveis são iguais. Lembramos que as variáveis aleatórias  $\eta_i^s$ ,

com  $s \in \{1, 2\}$  e  $i \in \mathbb{N}$ , são independentes com distribuição exponencial de parâmetro  $f(i)$ .

Seja  $b \in \mathbb{N}$ . Temos que

$$\begin{aligned}
P(\eta_i^1 < \eta_b^2) &= \int_0^\infty \int_0^y f(i) \exp(-f(i)x) f(b) \exp(-f(b)y) dx dy \\
&= f(b) \int_0^\infty \exp(-f(b)y) - \exp(-f(i)y) dy \\
&= f(b) \lim_{M \rightarrow \infty} \left[ -\frac{\exp(-f(b)y)}{f(b)} + \frac{\exp(-y[f(i) + f(b)])}{f(i) + f(b)} \right]_0^M \\
&= f(b) \left( \frac{1}{f(b)} - \frac{1}{f(i) + f(b)} \right) \\
&= \frac{f(i)}{f(i) + f(b)}.
\end{aligned}$$

Como

$$Y(1) = Y(0) + a \iff |[0, t_1] \cap S^1| = 1 \iff \eta_{B_1(0)}^1 < \eta_{B_2(0)}^2,$$

então

$$P(Y(1) = Y(0) + a) = P(\eta_{B_1(0)}^1 < \eta_{B_2(0)}^2) = \frac{f(B_1(0))}{f(B_1(0)) + f(B_2(0))},$$

que equivale a (3.1).

Agora queremos mostrar que

$$P(Y(n+1) = m+a \mid Y(n) = m) = \frac{f(m)}{f(m) + f(B_1(0) + B_2(0) + an - m)},$$

que equivale a (3.2).

Seja  $i_0$  definido por  $m = B_1(0) + ai_0$ . Temos que

$$\begin{aligned}
&P(Z_{i_0+1}^1 < Z_{n-i_0+1}^2 \mid Z_{n-i_0}^2 < Z_{i_0}^1 = t_n; \eta_{B_2(0)+a(n-i_0)}^2 > t_n - Z_{n-i_0}^2) \\
&= P(\eta_{B_1(0)+ai_0}^1 + Z_{i_0}^1 < \eta_{B_2(0)+a(n-i_0)}^2 + Z_{n-i_0}^2 \mid Z_{n-i_0}^2 < Z_{i_0}^1 = t_n; \eta_{B_2(0)+a(n-i_0)}^2 > t_n - Z_{n-i_0}^2) \\
&= P(\eta_{B_1(0)+ai_0}^1 < \eta_{B_2(0)+a(n-i_0)}^2 + Z_{n-i_0}^2 - t_n \mid Z_{n-i_0}^2 < Z_{i_0}^1 = t_n; \eta_{B_2(0)+a(n-i_0)}^2 > t_n - Z_{n-i_0}^2).
\end{aligned}$$

Mas, como  $\eta_{B_2(0)+a(n-i_0)}^2$  tem distribuição exponencial, temos que

$$(\eta_{B_2(0)+a(n-i_0)}^2 - (t_n - Z_{n-i_0}^2) \mid \eta_{B_2(0)+a(n-i_0)}^2 > t_n - Z_{n-i_0}^2) \stackrel{d}{=} (\eta_{B_2(0)+a(n-i_0)}^2).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& P(\eta_{B_1(0)+ai_0}^1 < \eta_{B_2(0)+a(n-i_0)}^2 + Z_{n-i_0}^2 - t_n \mid Z_{n-i_0}^2 < Z_{i_0}^1 = t_n; \eta_{B_2(0)+a(n-i_0)}^2 > t_n - Z_{n-i_0}^2) \\
&= P(\eta_{B_2(0)+a(n-i_0)}^2 - (t_n - Z_{n-i_0}^2) \mid \eta_{B_2(0)+a(n-i_0)}^2 > t_n - Z_{n-i_0}^2 > 0) \\
&= P(\eta_{B_1(0)+ai_0}^1 < \eta_{B_2(0)+a(n-i_0)}^2) \\
&= \frac{f(B_1(0) + ai_0)}{f(B_1(0) + ai_0) + f(B_2(0) + a(n + i_0))} \\
&= \frac{f(m)}{f(m) + f(B_1(0) + B_2(0) + an - m)}.
\end{aligned}$$

□

Note que, usando a Construção de Rubin e lembrando de (3.4), podemos definir  $B_s(t) \equiv |[0, t] \cap S^s|$  para todo  $t \in \mathbb{R}^+$  e, ainda, abusando a notação, por (3.6), denotaremos  $B_s(n) = B_s(t_n)$ .

## 3.2 O caso superlinear

Vimos que a Construção de Rubin vale para qualquer  $a > 0$ . Então, para simplificar a notação, consideraremos a partir de agora  $a = 1$ , ou seja, a cada sorteio colocaremos apenas uma bola adicional na urna.

Já temos as ferramentas necessárias para mostrar que com probabilidade 1, no caso  $\alpha > 1$ , existe um número aleatório de sorteios,  $N$ , tal que em todos os sorteios posteriores ao  $N$ -ésimo sorteio apenas bolas de uma das cores serão escolhidas. Para isso mostraremos que o número de sorteios em que bolas de uma das cores foram escolhidas é finito, enquanto é infinito o número de sorteios em que bolas da outra cor são escolhidas.

Também veremos que a probabilidade de uma das cores vencer a disputa é dada por uma fórmula explícita, que depende das condições iniciais da urna.

Vimos que o processo aleatório da representação de Rubin é equivalente ao processo original de sorteio e reposição na Urna de Pólya. Assim, as conclusões virão como consequência do Teorema de Rubin. Primeiramente provaremos um lema.

**Lema 3.1.** *Sejam  $\eta_i^s$  variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial de parâmetro  $i^\alpha$  e*

$$Z_\infty^s = \sum_{j=0}^{\infty} \eta_{B_s(0)+j}^s.$$

Se  $\alpha > 1$ , então  $Z_\infty^s$  converge quase certamente para  $s \in \{1, 2\}$ .

*Demonstração.* Usaremos o Teorema das Três Séries de Kolmogorov para mostrar que  $Z_\infty^1$  e  $Z_\infty^2$  convergem quase certamente. Seja  $Y_i^s = \eta_i^s \mathbf{1}_{\{|\eta_i^s| \leq 1\}}$ . Temos que

$$\sum_{i=B_s(0)}^{\infty} P(\eta_i^s > 1) = \sum_{i=B_s(0)}^{\infty} \exp(-i^\alpha) < \infty.$$

Além disso, podemos ver que, como  $\alpha > 1$ , temos

$$\sum_{i=B_s(0)}^{\infty} E(Y_i^s) = \sum_{i=B_s(0)}^{\infty} \int_0^1 \exp(-xi^\alpha) xi^\alpha dx = \sum_{i=B_s(0)}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha} [-\exp(-i^\alpha)(i^\alpha + 1) + 1] < \infty$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{i=B_s(0)}^{\infty} \text{Var}(Y_i^s) &= \sum_{i=B_s(0)}^{\infty} [E((Y_i^s)^2) - (E(Y_i^s))^2] \\ &= \sum_{i=B_s(0)}^{\infty} -\frac{1}{i^{2\alpha}} [\exp(-i^\alpha)((i^\alpha + 1)^2 - 2(i^\alpha + 1) + 1) + \exp(-2i^\alpha)(i^\alpha + 1) - 1] \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Logo,  $Z_\infty^s$  converge quase certamente para todo  $s \in \{1, 2\}$ . □

Além disso,  $Z_\infty^s$  tem uma distribuição absolutamente contínua com função característica

$$\begin{aligned} \phi(\lambda) &= E(\exp(i\lambda Z_\infty^s)) \\ &= \prod_{j=B_s(0)}^{\infty} E(\exp(i\lambda \eta_j^s)) \\ &= \prod_{j=B_s(0)}^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(i\lambda x) j^\alpha \exp(-j^\alpha x) dx \\ &= \prod_{j=B_s(0)}^{\infty} \left(1 - \frac{j^\alpha}{i\lambda}\right). \end{aligned}$$

**Proposição 3.1.** *Seja  $N_s = \{n \in \mathbb{N}; B_s(n) > B_s(n-1)\}$ ,  $s \in \{1, 2\}$ . Se  $\alpha > 1$ , então ou  $|N_1| < \infty$  ou  $|N_2| < \infty$ . Além disso, denotando por  $P_1$  a probabilidade da cor 1 vencer a disputa, temos que  $P_1 = (Z_\infty^1 < Z_\infty^2)$ .*

*Demonstração.* Já sabemos que  $Z_\infty^1$  e  $Z_\infty^2$  convergem quase certamente. Seja então

$Z_\infty^{s_0} = \min\{Z_\infty^1, Z_\infty^2\}$ . Como  $Z_\infty^1$  e  $Z_\infty^2$  são independentes e possuem distribuições absolutamente contínuas, segue que, com probabilidade 1,  $Z_\infty^{s_0} < Z_\infty^s$  para  $s \neq s_0$ . Então existe um  $I$  tal que para  $s \neq s_0$  e para todo  $i > I$  temos que  $Z_i^s > Z_\infty^{s_0}$ .

A Construção de Rubin garante que a quantidade máxima de bolas da cor  $s$  na urna será  $B_s(0) + I$ , isto é, para  $s \neq s_0$  e para todo  $t$ ,  $B_s(t) \leq B_s(0) + I$ . Logo,  $|N_{s_0}| = \infty$  e  $|N_s| < \infty$ .

Consequentemente, se  $P_s$  denota a probabilidade da cor  $s$  vencer a disputa, então  $P_1 = (Z_\infty^1 < Z_\infty^2)$  e  $P_2 = (Z_\infty^2 < Z_\infty^1)$ .

□

Como

$$Z_\infty^s = \sum_{j=0}^{\infty} \eta_{B_s(0)+j}^s,$$

temos que a fórmula para a probabilidade  $P_s$  depende das condições iniciais  $B_1(0)$  e  $B_2(0)$ . Se as quantidades iniciais de bolas pretas e bolas brancas são iguais, a cor que sempre vencerá a disputa após o  $N$ -ésimo sorteio é, por simetria, escolhida aleatoriamente com probabilidade uniforme, sendo então  $P_s = 1/2$ .

Concluimos que existe um sorteio aleatório após o qual apenas bolas de umas das cores serão sorteadas. Mais precisamente, com probabilidade 1, existe uma cor  $j$  e um sorteio aleatório  $N$  tal que para todo  $n > N$  e  $m \in \mathbb{N}$ , se  $B_j(n) = m$ , então

$$B_j(n+1) = m+1,$$

enquanto  $B_s(n+1) = B_1(0) + B_2(0) + n - m$  para  $s \neq j$ , com  $j, s \in \{1, 2\}$ .

### 3.3 O caso sublinear

Nesta seção mostraremos que, no caso  $\alpha < 1$ , as variáveis aleatórias  $B_1(n)$  e  $B_2(n)$  possuem a mesma ordem e que isso implica que

$$B_s(n) = \frac{n}{2} + \hat{B}_s(n),$$

onde  $\hat{B}_s(n) = o(n)$  são as flutuações das quantidades de bolas.

O comportamento assintótico dessas flutuações depende do valor de  $\alpha$ . Estudaremos tal comportamento para concluirmos que, com probabilidade 1, para  $0 < \alpha \leq 1/2$  haverá infinitas trocas de liderança entre as cores. Isso significa que para cada cor  $s \in \{1, 2\}$ , existe uma sequência infinita de sorteios  $(n_i^s)_{i \in \mathbb{N}}$  na qual esta cor será a maior em quantidade de bolas. E para  $1/2 < \alpha < 1$ , surgirá uma cor líder a longo prazo, isto é, existe uma cor cuja quantidade de bolas é maior que a outra para todo sorteio cuja numeração é suficientemente grande.

Note que o caso  $1/2 < \alpha < 1$  não se confunde com o caso superlinear. Dizer que uma cor liderará a disputa para todo  $n$  suficientemente grande não significa dizer que as bolas da outra cor deixarão de ser sorteadas.

A demonstração da Proposição 3.2 a seguir será útil em sua integralidade para o texto.

**Proposição 3.2.** *Se  $\alpha < 1$ , então as quantidades  $B_1(n)$  e  $B_2(n)$  possuem a mesma ordem, isto é,*

$$\frac{B_1(n)}{B_2(n)} \longrightarrow 1$$

quando  $n \longrightarrow \infty$ .

*Demonstração.* Sejam  $\eta_j^s$  variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial de parâmetro  $j^\alpha$ . Defina  $\xi_j^s = \eta_j^s - E(\eta_j^s) = \eta_j^s - j^{-\alpha}$ , variáveis aleatórias independentes, com valor esperado igual a zero.

Podemos escrever a variável aleatória  $Z_i^s$ , definida em (3.3), como

$$Z_i^s = A_i + \zeta_i^s, \quad (3.7)$$

onde

$$A_i = \sum_{j=1}^i \frac{1}{j^\alpha} \quad \text{e} \quad \zeta_i^s = \sum_{j=1}^i \xi_j^s - \sum_{j=1}^{B_s(0)-1} \eta_j^s.$$

Agora queremos mostrar que

$$\left| Z_{B_1(t)-B_1(0)}^1 - Z_{B_2(t)-B_2(0)}^2 \right| \xrightarrow{q.c.} 0 \quad (3.8)$$

quando  $t \longrightarrow \infty$ .

Lembramos que  $t_n$  representa o tempo correspondente ao  $n$ -ésimo sorteio na urna e que  $Z_{B_s(n)-B_s(0)}^s$  representa o tempo em que a urna recebe a  $B_s(n)$ -ésima bola da cor  $s$ . Segue da Construção de Rubin que, para todo  $n$ , temos que

$$Z_{B_s(n)-B_s(0)}^s \leq t_n$$

e para algum  $s \in \{1, 2\}$  devemos ter  $Z_{B_s(n)-B_s(0)}^s = t_n$ .

Suponha que  $Z_{B_1(n)-B_1(0)}^1 < Z_{B_2(n)-B_2(0)}^2$ . Assim,  $t_n = Z_{B_2(n)-B_2(0)}^2$ , pois, caso contrário, teríamos  $Z_{B_1(n)-B_1(0)}^1 = t_n > Z_{B_2(n)-B_2(0)}^2$ , o que contrariaria a suposição.

Como temos que  $t_n = Z_{B_2(n)-B_2(0)}^2$  e, pela Construção de Rubin, que  $Z_{B_1(n)-B_1(0)+1}^1 > t_n$ , então

$$Z_{B_1(n)-B_1(0)}^1 < Z_{B_2(n)-B_2(0)}^2 < Z_{B_1(n)-B_1(0)+1}^1.$$

Logo,

$$\left| Z_{B_1(n)-B_1(0)}^1 - Z_{B_2(n)-B_2(0)}^2 \right| < \left| Z_{B_1(n)-B_1(0)}^1 - Z_{B_1(n)-B_1(0)+1}^1 \right| = \eta_{B_1(n)+1}^1. \quad (3.9)$$

De forma análoga, se  $Z_{B_1(n)-B_1(0)}^1 > Z_{B_2(n)-B_2(0)}^2$ , então

$$\left| Z_{B_1(n)-B_1(0)}^1 - Z_{B_2(n)-B_2(0)}^2 \right| < \eta_{B_2(n)-B_2(0)+1}^2. \quad (3.10)$$

Seja  $\epsilon > 0$ . Temos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} P(\eta_j^s > \epsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} \exp(-j^\alpha \epsilon),$$

que é uma série convergente. O Lema de Borel-Cantelli garante que

$$P(\eta_j^s > \epsilon \text{ infinitas vezes}) = 0.$$

Logo, existe  $j_0$  tal que para todo  $j \geq j_0$  se verifica que  $\eta_j^s < \epsilon$ . De (3.9) e (3.10), como  $\eta_j^s \geq 0$  e  $\epsilon > 0$  é arbitrário, concluímos (3.8).

Estudaremos agora o comportamento assintótico das variáveis aleatórias  $\zeta_i^s$ . Usaremos o Teorema das Três Séries de Kolmogorov para mostrar que  $\zeta_i^s$  converge quase certamente no caso  $1/2 < \alpha < 1$  e diverge no caso  $0 < \alpha \leq 1/2$ , quando  $i \rightarrow \infty$ . Como

$$\zeta_i^s = \sum_{j=B_s(0)}^i \eta_j^s - \sum_{j=1}^i \frac{1}{j^\alpha},$$

basta verificar a convergência da série  $\sum_{j=1}^{\infty} (\eta_j^s - j^{-\alpha})$ . Se esta série converge, então  $\zeta_i^s$  converge; se diverge, então  $\zeta_i^s$  diverge, pois  $\sum_{j=1}^{B_s(0)} \eta_j^s$  é finito quase certamente.

Sejam as variáveis aleatórias

$$X_j^s = \eta_j^s - \frac{1}{j^\alpha} \quad \text{e} \quad Y_j^s = X_j^s \mathbf{1}_{\{|X_j^s| \leq 1\}}.$$

A função densidade de  $X_j^s$  é

$$f(x) = \begin{cases} j^\alpha \exp \left[ - \left( x + \frac{1}{j^\alpha} \right) j^\alpha \right] & , \text{ se } x \geq -\frac{1}{j^\alpha} \\ 0 & , \text{ se } x < -\frac{1}{j^\alpha} \end{cases}. \quad (3.11)$$

Temos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} P(|X_j^s| \geq 1) = \sum_{j=1}^{\infty} \left[ 1 - P \left( \eta_j^s < 1 + \frac{1}{j^\alpha} \right) \right] = \sum_{j=1}^{\infty} \exp[-(j^\alpha + 1)],$$



que converge. Além disso,

$$\sum_{j=1}^{\infty} E(Y_j^s) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-\frac{1}{j^\alpha}}^1 x j^\alpha \exp \left[ - \left( x + \frac{1}{j^\alpha} \right) j^\alpha \right] dx = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-\exp[-(j^\alpha + 1)](j^\alpha + 1)}{j^\alpha}$$

também converge.

Por outro lado, a série

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \text{Var}(Y_j^s) &= \sum_{j=1}^{\infty} E(Y_j^s)^2 - [E(Y_j^s)]^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left[ -\frac{\left(\frac{2}{j^{2\alpha}} + \frac{2}{j^\alpha} + 1\right)}{\exp(j^\alpha + 1)} - \frac{\left(\frac{1}{j^{2\alpha}} + \frac{2}{j^\alpha} + 1\right)}{\exp(2j^\alpha + 2)} + \frac{1}{j^{2\alpha}} \right] \end{aligned}$$

converge para  $1/2 < \alpha < 1$ , mas diverge para  $0 < \alpha \leq 1/2$ , pois a parcela  $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-2\alpha}$  diverge quando  $2\alpha \leq 1$ .

Logo,  $\zeta_i^s$  converge quase certamente para  $1/2 < \alpha < 1$  e  $\zeta_i^s$  diverge para  $0 < \alpha \leq 1/2$  quando  $i \rightarrow \infty$ .

Seja

$$V_\alpha(i) = \int_1^i \frac{1}{x^{2\alpha}} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-2\alpha} i^{1-2\alpha} - \frac{1}{1-2\alpha} & , \text{ se } 0 < \alpha < \frac{1}{2} \\ \log i & , \text{ se } \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Temos que

$$\text{Var}(\zeta_i^s) = \text{Var} \left( \sum_{j=B_s(0)}^i \eta_j^s - \sum_{j=1}^i \frac{1}{j^\alpha} \right) = \sum_{j=B_s(0)}^i \frac{1}{j^{2\alpha}},$$

que diverge para  $0 < \alpha \leq 1/2$ , quando  $i \rightarrow \infty$ . Logo,  $\text{Var}(\zeta_i^s) \sim \sum_{j=1}^i \frac{1}{j^{2\alpha}}$ .

Como

$$\sum_{j=2}^i \frac{1}{j^{2\alpha}} \leq \int_1^i \frac{1}{x^{2\alpha}} dx \leq \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{j^{2\alpha}} \leq \sum_{j=1}^i \frac{1}{j^{2\alpha}},$$

temos que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^i \frac{1}{j^{2\alpha}} - \int_1^i \frac{1}{x^{2\alpha}} dx \right| &\leq \left| \sum_{j=2}^i \frac{1}{j^{2\alpha}} - \sum_{j=1}^i \frac{1}{j^{2\alpha}} \right| \\ &= 1. \end{aligned}$$

Assim, para  $0 < \alpha \leq 1/2$ , temos que

$$\left| 1 - V_\alpha(i) \left( \sum_{j=1}^i \frac{1}{j^{2\alpha}} \right)^{-1} \right| \leq \left( \sum_{j=1}^i \frac{1}{j^{2\alpha}} \right)^{-1} \rightarrow 0,$$

quando  $i \rightarrow \infty$ .

Logo,

$$V_\alpha(i) \sim \sum_{j=1}^i \frac{1}{j^{2\alpha}}$$

e, portanto,

$$Var(\zeta_i^s) \sim \sum_{j=1}^i \frac{1}{j^{2\alpha}} \sim V_\alpha(i) \sim \begin{cases} \frac{1}{1-2\alpha} i^{1-2\alpha} & , \text{ se } 0 < \alpha < \frac{1}{2} \\ \log i & , \text{ se } \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (3.12)$$

Lembramos que  $f$  é a função densidade de  $X_j^s$ , definida em (3.11). Temos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^i \int_{|x| > \epsilon \sqrt{V_\alpha(i)}} x^2 f(x) dx &\leq \sum_{j=1}^i \int_{-\frac{1}{j^\alpha}}^{\infty} x^2 f(x) dx \\ &= \sum_{j=1}^i \left( \lim_{M \rightarrow \infty} - \frac{\exp(-j^\alpha x - 1)(j^{2\alpha} x^2 + 2j^\alpha x + 2)}{j^{2\alpha}} \Big|_{-\frac{1}{j^\alpha}}^M \right) \\ &= \sum_{j=1}^i \frac{1}{j^{2\alpha}}. \end{aligned}$$

Para  $0 < \alpha \leq 1/2$  e para todo  $\epsilon > 0$ , temos que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{V_\alpha(i)} \sum_{j=1}^i \frac{1}{j^{2\alpha}} = 0.$$

Logo,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{V_\alpha(i)} \sum_{j=1}^i \int_{|x| > \epsilon \sqrt{V_\alpha(i)}} x^2 f(x) dx = 0$$

e, portanto, pelo Teorema Central do Limite de Lindeberg,

$$\left( \frac{\zeta_i^s}{\sqrt{V_\alpha(i)}} \right) \xrightarrow{dist.} N(0, 1), \quad (3.13)$$

onde  $N(0, 1)$  representa a Distribuição Normal padronizada.

Dessa forma, para qualquer  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno e para  $0 < \alpha < 1$ , podemos escrever a variável aleatória  $\zeta_i^s$  como

$$\zeta_i^s = O\left(i^{\frac{1}{2}-\alpha+\epsilon}\right).$$

Note que  $A_i = \sum_{j=1}^i \frac{1}{j^\alpha} \sim \frac{1}{1-\alpha} i^{1-\alpha}$ . Assim, usando que  $Z_i^s = A_i + \zeta_i^s$ , temos

$$Z_i^s = \frac{1}{1-\alpha} i^{1-\alpha} + o(i^{1-\alpha}) + O\left(i^{\frac{1}{2}-\alpha+\epsilon}\right) \sim \frac{1}{1-\alpha} i^{1-\alpha}.$$

Queremos mostrar que

$$|B_1(t) - B_2(t)| = o(\min(B_1(t), B_2(t))). \quad (3.14)$$

Suponha, por absurdo, que (3.14) não seja verdadeira. Sem perda de generalidade, considere  $B_2(t) = \min(B_1(t), B_2(t))$ . Então existe uma constante  $c > 0$  tal que

$$\frac{|B_1(t) - B_2(t)|}{B_2(t)} \geq c \text{ infinitas vezes.}$$

Assim, para infinitos valores de  $t$ , temos que

$$B_1(t) \geq (1+c)B_2(t).$$

Logo, para esses valores de  $t$ ,

$$Z_{B_1(t)-B_1(0)}^1 \sim Z_{B_1(t)}^1 \sim \frac{1}{1-\alpha} B_1^{1-\alpha}(t) \geq \frac{1}{1-\alpha} [(1+c)B_2(t)]^{1-\alpha}.$$

Mas  $Z_{B_2(t)-B_2(0)}^2 \sim Z_{B_2(t)}^2 \sim \frac{1}{1-\alpha} B_2^{1-\alpha}(t)$ . Então

$$\left| Z_{B_1(t)-B_1(0)}^1 - Z_{B_2(t)-B_2(0)}^2 \right| \geq \left| \frac{1}{1-\alpha} B_1^{1-\alpha}(t) [(1+c)^{1-\alpha} - 1] + o(B_2^{1-\alpha}(t)) \right| \longrightarrow \infty,$$

contrariando (3.8).

Portanto,

$$|B_1(t) - B_2(t)| = o(\min(B_1(t), B_2(t))).$$

Isso significa que

$$\frac{B_1(t)}{B_2(t)} \longrightarrow 1 \quad (3.15)$$

quando  $t \longrightarrow \infty$ , seguindo o resultado da proposição.

□

Note que (3.15) implica que  $B_1(t) + B_2(t) \sim t$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Portanto,

$$B_s(t) = \frac{t}{2} + \hat{B}_s(t),$$

onde  $\hat{B}_s(t) = o(t)$ .

### 3.3.1 O caso $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

Neste caso mostraremos que as flutuações  $\hat{B}_s(t)$  são da ordem  $n^\alpha$ . A partir da proposição a seguir concluiremos que se  $1/2 < \alpha < 1$ , então uma das cores liderará a disputa para todo sorteio  $n$  suficientemente grande.

**Proposição 3.3.** *Se  $1/2 < \alpha < 1$ , então existe uma constante aleatória contínua  $c_s$  diferente de zero tal que*

$$\frac{\hat{B}_s(n)}{n^\alpha} \xrightarrow{q.c.} c_s$$

quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $s \in \{1, 2\}$ .

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, suponha que  $B_1(t) < B_2(t)$ . Temos por (3.8) que

$$\zeta_{B_1(t)}^1 - \zeta_{B_2(t)}^2 = \sum_{j=B_1(0)}^{B_1(t)} \eta_j^1 - \sum_{j=1}^{B_1(t)} \frac{1}{j^\alpha} - \sum_{j=B_2(0)}^{B_2(t)} \eta_j^2 + \sum_{j=1}^{B_2(t)} \frac{1}{j^\alpha} = \sum_{j=B_1(t)+1}^{B_2(t)} \frac{1}{j^\alpha} + o(1).$$

Daí,

$$\begin{aligned} \zeta_{B_1(t)}^1 - \zeta_{B_2(t)}^2 + o(1) &= \sum_{j=1}^{B_2(t)} \frac{1}{j^\alpha} - \sum_{j=1}^{B_1(t)} \frac{1}{j^\alpha} \\ &= \frac{1}{1-\alpha} [B_2^{1-\alpha}(t) - B_1^{1-\alpha}(t)] (1 + o(1)) \\ &= \frac{1}{1-\alpha} B_1^{1-\alpha}(t) \left[ \frac{B_2^{1-\alpha}(t)}{B_1^{1-\alpha}(t)} - 1 \right] (1 + o(1)) \\ &= \frac{1}{1-\alpha} B_1^{1-\alpha}(t) \left[ \left( 1 + \frac{B_2(t)}{B_1(t)} - 1 \right)^{1-\alpha} - 1 \right] (1 + o(1)) \\ &= \frac{1}{1-\alpha} B_1^{1-\alpha}(t) \left[ \left( 1 + \frac{B_2(t) - B_1(t)}{B_1(t)} \right)^{1-\alpha} - 1 \right] (1 + o(1)) \\ &= \frac{1}{1-\alpha} B_1^{1-\alpha}(t) (1-\alpha) \frac{B_2(t) - B_1(t)}{B_1(t)} (1 + o(1)) \\ &= \frac{B_2(t) - B_1(t)}{B_1^\alpha(t)} (1 + o(1)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B_2(t) - B_1(t) = B_1^\alpha(t) \left( \zeta_{B_1(t)}^1 - \zeta_{B_2(t)}^2 + o(1) \right) (1 + o(1)).$$

Como vimos na Proposição 3.2, temos que  $B_s(t) \sim t/2$  para todo  $s \in \{1, 2\}$ , então

$$\hat{B}_2(t) - \hat{B}_1(t) = \left( \frac{t}{2} + o(1) \right)^\alpha \left( \zeta_{B_1(t)}^1 - \zeta_{B_2(t)}^2 + o(1) \right) (1 + o(1)).$$

No caso  $1/2 < \alpha < 1$ , sabemos que  $\zeta_{B_s(t)}^s$  converge. Seja  $\zeta_{B_s(t)}^s \rightarrow \zeta_\infty^s$ . Assim,

$$\zeta_{B_s(t)}^s = \zeta_\infty^s + o(1)$$

quando  $t \rightarrow \infty$ . Vamos reescrever:

$$\begin{aligned} \hat{B}_2(t) - \hat{B}_1(t) &= \left( \frac{t}{2} + o(1) \right)^\alpha \left( \zeta_{B_1(t)}^1 - \zeta_{B_2(t)}^2 + o(1) \right) (1 + o(1)) \\ &= \left( \frac{t}{2} + o(1) \right)^\alpha \left( \zeta_\infty^1 - \zeta_\infty^2 + o(1) \right) (1 + o(1)) \\ &= \left( \frac{t}{2} \right)^\alpha \left( \zeta_\infty^1 - \zeta_\infty^2 \right) (1 + o(1)) \end{aligned}$$

Como

$$\hat{B}_1(t) + \hat{B}_2(t) = B_1(t) + B_2(t) - t = B_1(0) + B_2(0),$$

temos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^2 \hat{B}_s(t) - \sum_{j=1}^2 \hat{B}_j(t) &= \left( \frac{t}{2} \right)^\alpha \left[ \sum_{j=1}^2 (\zeta_\infty^j - \zeta_\infty^s) \right] (1 + o(1)) \\ \Rightarrow 2\hat{B}_s(t) - \sum_{j=1}^2 \hat{B}_j(t) &= \left( \frac{t}{2} \right)^\alpha \left( \sum_{j=1}^2 \zeta_\infty^j - 2\zeta_\infty^s \right) (1 + o(1)) \\ \Rightarrow \hat{B}_s(t) \left( 1 - \frac{1}{2\hat{B}_s(t)} \sum_{j=1}^2 \hat{B}_j(t) \right) &= \left( \frac{t}{2} \right)^\alpha \left( \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \zeta_\infty^j - \zeta_\infty^s \right) (1 + o(1)) \\ \Rightarrow \hat{B}_s(t) &= \left( \frac{t}{2} \right)^\alpha \left( \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \zeta_\infty^j - \zeta_\infty^s \right) (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados da última equação acima por  $t^\alpha$ , concluímos que se  $1/2 < \alpha < 1$ , então existe uma constante aleatória  $c_s$  tal que

$$\frac{\hat{B}_s(t)}{t^\alpha} \xrightarrow{q.c.} c_s,$$

$s \in \{1, 2\}$ .

Note que, com probabilidade 1,  $\zeta_\infty^1 \neq \zeta_\infty^2$ , e  $(\zeta_\infty^1 + \zeta_\infty^2)/2 \neq \zeta_\infty^s$ . Assim,  $c_s$  é

diferente de zero e  $c_1 \neq c_2$  quase certamente. □

Sejam as constantes aleatórias  $c_1$  e  $c_2$  tais que

$$\frac{\hat{B}_1(n)}{n^\alpha} \xrightarrow{q.c.} c_1 \quad \text{e} \quad \frac{\hat{B}_2(n)}{n^\alpha} \xrightarrow{q.c.} c_2.$$

Suponha  $c_1 < c_2$ . Daí,

$$\frac{B_2(n) - B_1(n)}{n^\alpha} = \frac{\hat{B}_2(n) - \hat{B}_1(n)}{n^\alpha} \xrightarrow{q.c.} c_2 - c_1 > 0.$$

Logo,  $B_2(n) > B_1(n)$  para todo  $n$  suficientemente grande.

Portanto, a probabilidade das cores brancas liderarem a disputa para todo  $n$  suficientemente grande é igual a  $P(c_2 > c_1)$ . Apesar de as flutuações  $\hat{B}_s(n)$  serem muito menores que as quantidades  $B_s(n)$ , ainda existe uma cor cuja quantidade de bolas é maior que a outra para todo sorteio  $n$  suficientemente grande. Como no caso linear, essa cor corresponde ao maior valor de  $c_s$ .

### 3.3.2 O caso $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$

Veremos agora que as flutuações  $\hat{B}_s(n)$  são da ordem  $\sqrt{n}$  quando  $0 < \alpha < 1/2$  e da ordem  $\sqrt{n \log n}$  quando  $\alpha = 1/2$ . As flutuações normalizadas possuem uma distribuição de probabilidade limite, apesar de não possuírem um limite quando  $n \rightarrow \infty$ .

A partir da Proposição a seguir, mostraremos que haverá infinitas trocas de liderança entre as cores quando  $0 < \alpha \leq 1/2$ .

**Proposição 3.4.** 1) Se  $0 < \alpha < 1/2$ , então para todo  $s \in \{1, 2\}$  a distribuição de probabilidade de  $\frac{\hat{B}_s(t)}{\sqrt{t}}$  converge fracamente para uma distribuição normal  $N(0, \sigma_\alpha^2)$ , onde

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{1}{2^{1+2\alpha}(1-2\alpha)}.$$

2) Se  $\alpha = 1/2$ , então para todo  $s \in \{1, 2\}$  a distribuição de probabilidade de  $\frac{\hat{B}_s(t)}{\sqrt{t \log t}}$  converge fracamente para uma distribuição normal  $N(0, \frac{1}{4})$ .

*Demonstração.* É possível mostrar, usando o Lema de Borel-Cantelli, que para todo  $\epsilon > 0$  existe um  $I(\epsilon)$  tal que para todo  $i > I$ , temos que

$$|\zeta_i^s| \leq V_\alpha^{\frac{1}{2}}(i)i^\epsilon \quad \text{e} \quad |\eta_i^s| \leq \frac{1}{i^{\alpha-\epsilon}}.$$

Sabemos que  $B_s(t) \sim t/2$ ,  $s \in \{1, 2\}$ . Assim, existe um  $T(\epsilon)$  tal que para todo  $t > T$ ,

$$\begin{aligned}
|\hat{B}_1(t) - \hat{B}_2(t)| &= \left(\frac{t}{2}\right)^\alpha |\zeta_{B_1(t)}^1 - \zeta_{B_2(t)}^2 + o(1)| [1 + o(1)] \\
&= \left(\frac{t}{2}\right)^\alpha |\zeta_{[\frac{t}{2}]}^1 - \zeta_{[\frac{t}{2}]}^2 + o(1)| [1 + o(1)] \\
&\leq \left(\frac{t}{2}\right)^\alpha \left[ 2V_\alpha^{\frac{1}{2}} \left(\frac{t}{2}\right) \left(\frac{t}{2}\right)^\epsilon + o(1) \right] [1 + o(1)] \\
&= \left(\frac{t}{2}\right)^\alpha \left[ \frac{2}{\sqrt{1-2\alpha}} \left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha+\epsilon} + o(1) \right] [1 + o(1)] \\
&\leq t^{\frac{1}{2}+\epsilon}.
\end{aligned}$$

Seja  $L(0) = B_1(0) + B_2(0)$ . Como  $B_s(t) = \frac{t}{2} + \hat{B}_s(t)$ , então  $\hat{B}_1(t) + \hat{B}_2(t) = B_1(t) + B_2(t) - t = L(0)$ . Note que  $|2\hat{B}_s - L_0| = |B_1 - B_2|$ . Assim, temos que

$$|2\hat{B}_s(t) - L(0)| = \left| \sum_{j=1}^2 \hat{B}_s(t) - \sum_{j=1}^2 \hat{B}_j(t) \right| \leq \sum_{j=1}^2 |\hat{B}_s(t) - \hat{B}_j(t)| \leq 2t^{\frac{1}{2}+\epsilon},$$

então

$$\left| \hat{B}_s(t) - \frac{L(0)}{2} \right| \leq t^{\frac{1}{2}+\epsilon}.$$

Logo, para  $t$  suficientemente grande, temos que  $|\hat{B}_s(t)| \leq 2t^{\frac{1}{2}+\epsilon}$ .

Suponha, sem perda de generalidade, que  $B_s(t) < t/2$ . Temos que

$$\begin{aligned}
|\zeta_{B_s(t)}^s - \zeta_{[\frac{t}{2}]}^s| &\sim \left| \sum_{j=1}^{B_s(t)} \left( \eta_j^s - \frac{1}{j^\alpha} \right) - \sum_{j=1}^{t/2} \left( \eta_j^s - \frac{1}{j^\alpha} \right) \right| \\
&= \left| \sum_{j=B_s(t)}^{t/2} \left( \eta_j^s - \frac{1}{j^\alpha} \right) \right|.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema Central do Limite de Lindeberg, temos que para algum  $\sigma > 0$ ,

$$\frac{\sum_{j=B_s(t)}^{t/2} \left( \eta_j^s - \frac{1}{j^\alpha} \right)}{\left( \text{Var} \left( \sum_{j=B_s(t)}^{t/2} \left( \eta_j^s - \frac{1}{j^\alpha} \right) \right) \right)^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{\text{dist.}} N(0, \sigma^2).$$

Assim, dado  $\epsilon > 0$ , temos que

$$\frac{\sum_{j=B_s(t)}^{t/2} \left( \eta_j^s - \frac{1}{j^\alpha} \right)}{t^\epsilon \left( \text{Var} \left( \sum_{j=B_s(t)}^{t/2} \left( \eta_j^s - \frac{1}{j^\alpha} \right) \right) \right)^{\frac{1}{2}}} \rightarrow 0$$

quando  $t \rightarrow \infty$ .

Logo, para  $t$  suficientemente grande,

$$\begin{aligned} \sum_{j=B_s(t)}^{t/2} \left( \eta_j^s - \frac{1}{j^\alpha} \right) &\leq t^\epsilon \left( \text{Var} \left( \sum_{j=B_s(t)}^{t/2} \left( \eta_j^s - \frac{1}{j^\alpha} \right) \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq t^\epsilon \left( \left| \hat{B}_s(t) \right| \max_{B_s(t) \leq j \leq t/2} \text{Var} \left( \eta_j^s - \frac{1}{j^\alpha} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C t^\epsilon \left( t^{\frac{1}{2} + \epsilon - 2\alpha} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

para algum  $C > 0$ .

Dessa forma, para  $t$  suficientemente grande, temos que

$$\left| \zeta_{B_s(t)}^s - \zeta_{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}^s \right| \leq 2C t^{\frac{1}{4} + 2\epsilon - \alpha}. \quad (3.16)$$

Seja  $h(t)$  uma função que tende a infinito monotonamente. O Teorema Central do Limite implica imediatamente que

$$P \left\{ \min_{s \in \{1,2\}} \left( \left| \zeta_{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}^s \right|, \left| \zeta_{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}^1 - \zeta_{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}^2 \right|, \left| \zeta_{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}^s - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^2 \zeta_{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}^s \right| \right) \geq \frac{V_\alpha^{\frac{1}{2}}(t)}{h(t)} \right\} \rightarrow 1 \quad (3.17)$$

e

$$P \left\{ \max_{s \in \{1,2\}} \left( \left| \zeta_{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}^s \right|, \left| \zeta_{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}^1 - \zeta_{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}^2 \right|, \left| \zeta_{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}^s - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^2 \zeta_{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}^s \right| \right) \leq V_\alpha^{\frac{1}{2}}(t) h(t) \right\} \rightarrow 1 \quad (3.18)$$

quando  $t \rightarrow \infty$ .

Suponha, sem perda de generalidade, que  $B_1(t) < B_2(t)$ . Já vimos que

$$\sum_{B_1(t)+1}^{B_2(t)} \frac{1}{j^\alpha} = \zeta_{B_1(t)}^1 - \zeta_{B_2(t)}^2 + o(1).$$

Por (3.16), temos que

$$\sum_{B_1(t)+1}^{B_2(t)} \frac{1}{j^\alpha} = \zeta_{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}^1 - \zeta_{\lfloor \frac{t}{2} \rfloor}^2 + O(t^{\frac{1}{4} + 2\epsilon - \alpha}).$$



Assim, usando (3.17), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\alpha}(B_2^{1-\alpha}(t) - B_1^{1-\alpha}(t)) &= \zeta_{[\frac{t}{2}]}^1 - \zeta_{[\frac{t}{2}]}^2 + O(t^{\frac{1}{4}+2\epsilon-\alpha}) \\ &= \left(\zeta_{[\frac{t}{2}]}^1 - \zeta_{[\frac{t}{2}]}^2\right) \left[1 + O\left(\frac{t^{\frac{1}{4}+2\epsilon-\alpha}h(t)}{V_\alpha^{\frac{1}{2}}(t)}\right)\right]. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{1}{1-\alpha}(B_2^{1-\alpha}(t) - B_1^{1-\alpha}(t)) = \frac{B_2(t) - B_1(t)}{\left(\frac{t}{2}\right)^\alpha} \left(1 + O\left(\frac{t^{\frac{1}{2}+\epsilon}}{t}\right)\right),$$

segue que

$$\begin{aligned} \hat{B}_2(t) - \hat{B}_1(t) &= B_2(t) - B_1(t) \\ &= \left(\frac{t}{2}\right)^\alpha \left(\zeta_{[\frac{t}{2}]}^1 - \zeta_{[\frac{t}{2}]}^2\right) \left(1 + O\left(\frac{t^{\frac{1}{2}+2\epsilon}}{t}\right) + O\left(\frac{t^{\frac{1}{4}+2\epsilon-\alpha}h(t)}{V_\alpha^{\frac{1}{2}}(t)}\right)\right) \\ &= \left(\frac{t}{2}\right)^\alpha \left(\zeta_{[\frac{t}{2}]}^1 - \zeta_{[\frac{t}{2}]}^2\right) \left(1 + o(t^{3\epsilon-\frac{1}{4}})\right). \end{aligned}$$

Tomando  $\epsilon = 1/24$ , obtemos

$$\hat{B}_2(t) - \hat{B}_1(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^\alpha \left(\zeta_{[\frac{t}{2}]}^1 - \zeta_{[\frac{t}{2}]}^2\right) \left(1 + o(t^{-\frac{1}{8}})\right) \quad (3.19)$$

Usando (3.17), (3.18) e o fato de que  $\sum_{s=1}^2 \hat{B}_s(t) = L(0)$ , obtemos de (3.19) que

$$\hat{B}_s(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^\alpha \left[\frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \left(\zeta_{[\frac{t}{2}]}^j - \zeta_{[\frac{t}{2}]}^s\right)\right] \left(1 + o(t^{-\frac{1}{16}})\right) \quad (3.20)$$

com probabilidade tendendo a 1 quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $s \in \{1, 2\}$ .

Sem perda de generalidade, suponha  $s = 2$ . Dividindo ambos os lados de (3.20) por  $\sqrt{t}$  para  $0 < \alpha < 1/2$ , temos que

$$\frac{\hat{B}_2(t)}{\sqrt{t}} = \left(\frac{t}{2}\right)^\alpha \left[\frac{1}{2\sqrt{t}} \left(\zeta_{[\frac{t}{2}]}^1 - \zeta_{[\frac{t}{2}]}^2\right)\right] \left(1 + o(t^{-\frac{1}{16}})\right) \quad (3.21)$$

$$= \left(\frac{1}{2^\alpha}\right) \left[\left(\frac{1}{2(1-2\alpha)^{\frac{1}{2}}}\right) \left(\frac{\zeta_{[\frac{t}{2}]}^1 - \zeta_{[\frac{t}{2}]}^2}{t^{\frac{1}{2}-\alpha}(1-2\alpha)^{-\frac{1}{2}}}\right)\right] \left(1 + o(t^{-\frac{1}{16}})\right) \quad (3.22)$$

Como as variáveis aleatórias  $\zeta_{[\frac{t}{2}]}^s$  são independentes e são da ordem de  $V_\alpha^{\frac{1}{2}}(t)$ , então

$$\frac{\hat{B}_2(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow{dist.} \left( \frac{1}{2^{(\alpha+1)}(1-2\alpha)^{\frac{1}{2}}} \right) N(0, 2).$$

Logo, quando  $t \rightarrow \infty$ ,

$$\frac{\hat{B}_2(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow{dist.} N\left(0, \frac{1}{2^{1+2\alpha}(1-2\alpha)}\right).$$

Sendo análogo para  $s = 1$ , concluímos o item (1) da proposição.

Dividindo ambos os lados de (3.20) por  $\sqrt{t \log t}$  quando  $\alpha = 1/2$ , temos que

$$\frac{\hat{B}_2(t)}{\sqrt{t \log t}} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left[ \frac{1}{2} \frac{\left( \zeta_{[\frac{t}{2}]}^1 - \zeta_{[\frac{t}{2}]}^2 \right)}{\sqrt{\log t}} \right] \left( 1 + o(t^{-\frac{1}{16}}) \right).$$

Logo, quando  $t \rightarrow \infty$ , temos

$$\frac{\hat{B}_2(t)}{\sqrt{t \log t}} \xrightarrow{dist.} N\left(0, \frac{1}{4}\right).$$

Sendo análogo para  $s = 1$ , concluímos o item (2) da proposição. □

Veja que

$$\frac{\hat{B}_1(t) - \hat{B}_2(t)}{\sqrt{t}} = \frac{B_1(t) - B_2(t)}{\sqrt{t}}.$$

Assim, por (3.19), temos que

$$\frac{B_1(t) - B_2(t)}{c\sqrt{t}} = (1 + o(1)) \frac{S_t}{\sigma_t},$$

com probabilidade tendendo a 1 quando  $t \rightarrow \infty$ , onde  $S_t$  é uma soma de  $t/2$  variáveis independentes,

$$S_t = \zeta_{[\frac{t}{2}]}^1 - \zeta_{[\frac{t}{2}]}^2$$

e  $\sigma_t = \text{Var}(S_t)$ .

Usaremos o Teorema Central do Limite para a variável  $S_t$ . Para mostrar que ocorrem infinitas trocas de liderança neste caso, basta mostrar que

$$P\left(\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{S_t}{\sigma_t} < 0 < \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{S_t}{\sigma_t}\right) = 1.$$

Observamos que, pela Lei 0-1 de Kolmogorov, temos

$$P\left(\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{S_t}{\sigma_t} \geq 0\right) \in \{0, 1\}.$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
P\left(\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{S_t}{\sigma_t} \geq 0\right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} P\left(\exists t_0 \in \mathbb{N}, \frac{S_t}{\sigma_t} > -\frac{1}{k} \quad \forall t \geq t_0\right) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{t_0 \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_t}{\sigma_t} > -\frac{1}{k} \quad \forall t \geq t_0\right) \\
&\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{t_0 \rightarrow \infty} P\left(\frac{S_{t_0}}{\sigma_{t_0}} > -\frac{1}{k}\right) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} P\left(N(0, 1) > -\frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Concluimos que

$$P\left(\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{S_t}{\sigma_t} < 0\right) = 1.$$

Um raciocínio análogo pode ser feito para mostrar que

$$P\left(\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{S_t}{\sigma_t} > 0\right) = 1.$$

Concluimos que, com probabilidade 1, haverá infinitas trocas de liderança entre as cores no caso  $0 < \alpha \leq 1/2$ .

## Capítulo 4

### Considerações finais

Uma das principais características do modelo probabilístico que apresentamos é que a probabilidade de uma bola ser sorteada depende da quantidade relativa de bolas da mesma cor e que quanto maior a quantidade de bolas de certa cor, maior a chance de uma bola desta cor ser sorteada. Também vimos que o modelo também apresenta diferentes comportamentos assintóticos dependendo do valor  $\alpha$ .

No caso  $\alpha > 1$ , vimos que a partir de um momento aleatório somente bolas de uma das cores será sorteada e temos uma fórmula explícita, que depende das quantidades iniciais  $B_1(0)$  e  $B_2(0)$ , para probabilidade de uma bola da cor  $s$  vencer a disputa. No caso  $\alpha = 1$ , vimos que para  $n$  suficientemente grande uma das cores liderará a disputa, embora ambas as cores continuem a ser sorteadas ao longo do tempo. No caso linear também temos uma fórmula explícita para a probabilidade da cor  $s$  ser líder, que depende das condições iniciais.

No caso  $1/2 < \alpha < 1$ , mostramos que uma das cores também lidera a disputa, embora a proporção entre  $B_1(n)$  e  $B_2(n)$  tenda a 1. Neste caso, seria interessante estudarmos como as condições iniciais interferem na probabilidade de uma das cores ser líder. No caso  $0 < \alpha \leq 1/2$ , vimos que existem infinitas trocas de liderança.

Nesta dissertação a Construção de Rubin foi fundamental para o caso  $\alpha \neq 1$  e vimos que esse processo vale para modelos de Urna de Pólya muito mais gerais.

Este trabalho, por simplificação, esteve concentrado na ideia de uma urna contendo bolas pretas e bolas brancas, que podem representar dois agentes em uma disputa por recursos. No entanto todos os resultados que apresentamos podem ser estendidos para representar  $k$  cores. Nesse caso, se  $B_s(n)$ ,  $s \in \{1, \dots, k\}$ , denotar a quantidade de bolas da cor  $s$  após o  $n$ -ésimo sorteio e reposição na urna, então a probabilidade de uma bola da cor  $s$  ser sorteada no  $(n + 1)$ -ésimo sorteio será

$$\frac{B_s^\alpha(n)}{\sum_{i=1}^k B_i^\alpha(n)}.$$

Para esse modelo teríamos os seguintes resultados:

**Proposição 4.1.** *A sequência*

$$\rho_n = \left( \frac{B_s(n)}{\sum_{j=1}^k B_j(n)} \right)_{n \geq 0}$$

converge q.t.p. para uma variável aleatória  $0 < \rho_\infty < 1$ , tal que  $\rho_\infty$  segue uma distribuição Beta com parâmetros

$$\frac{B_s(0)}{a} \quad e \quad \frac{1}{a} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^k B_j(0),$$

com  $1 \leq j, s \leq k$ .

**Proposição 4.2.** *Seja  $N_s = \{n \in \mathbb{N}; B_s(n) > B_s(n-1)\}$ , com  $1 \leq s \leq k$ . Se  $\alpha > 1$ , então existirá um  $1 \leq j \leq k$  tal que  $|N_j| = \infty$ , enquanto  $|N_s| < \infty$  para todo  $s \neq j$ .*

**Proposição 4.3.** *Se  $1/2 < \alpha < 1$ , então para todo  $1 \leq s \leq k$  existe uma constante aleatória contínua  $c_s$  diferente de zero tal que*

$$\frac{\hat{B}_s(n)}{n^\alpha} \longrightarrow c_s$$

quase certamente quando  $n \longrightarrow \infty$ .

**Proposição 4.4.** *1) Se  $0 < \alpha < 1/2$ , então para todo  $1 \leq s \leq k$  a distribuição de probabilidade de  $\frac{\hat{B}_s(n)}{\sqrt{n}}$  converge fracamente para uma distribuição normal  $N(0, \sigma_\alpha^2)$ , onde*

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{(k-1)}{k^{1+2\alpha}(1-2\alpha)}.$$

*2) Se  $\alpha = 1/2$ , então para todo  $1 \leq s \leq k$  a distribuição de probabilidade de  $\frac{\hat{B}_s(n)}{\sqrt{n \log n}}$  converge fracamente para uma distribuição normal  $N(0, \hat{\sigma}^2)$ , onde  $\hat{\sigma}^2 = \frac{k-1}{k^2}$ .*

As demonstrações das proposições acima são completamente análogas às que foram feitas no texto e os regimes de liderança em cada caso são os mesmos.

## Referências Bibliográficas

- [1] Davis, B.: *Reinforced Random Walk*. Probab. Th. Rel. Fields, **84**, 203–229 (1990).
- [2] Durrett, R.: *Probability: theory and examples*. 4th ed. Cambridge: University Press, 2010.
- [3] Goslin, K., Banker, G.: *Experimental observations on the development of polarity by hippocampal neurons in culture*. J. Cell. Biol., **108**, 1507–1516 (1989).
- [4] James, B.: *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. 2ª ed. IMPA, 1996.
- [5] Janson, S.: *Probability asymptotics: notes on notation*. Uppsala University, 2011.
- [6] Jiang, B., Ribeiro, B., Figueiredo, D. R., Towsley, D.: *On the Duration and Intensity of Competitions in Nonlinear Pólya Urn Processes with Fitness*. Performance Evaluation Review, **44**, 299-310 (2016).
- [7] Khanin, K., Khanin, R.: *A probabilistic model for the establishment of neuron polarity*. Journal of Mathematical Biology, **42(1)**, 26-40 (2001).
- [8] Lauer, V.: *Cadeias de Markov e Martingais: uma aplicação na Urna de Pólya*. 2014.
- [9] Levin, D. A., Peres, Y., Wilmer, E. L.: *Markov chains and mixing times*. American Mathematical Society, 2009.