UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Taxas ótimas para o decaimento de semigrupos em espaços de Hilbert

Genilson Soares de Santana

Belo Horizonte - MG
Fevereiro de 2020

GENILSON SOARES DE SANTANA

Taxas ótimas para o decaimento de semigrupos em espaços de Hilbert

Dissertação submetida à banca examinadora, designada pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas - ICEX da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Silas Luiz de Carvalho.

Belo Horizonte - MG
Fevereiro de 2020

Santana, Genilson Soares de.

S232t Taxas ótimas para o decaimento de semigrupos em espaços de Hilbert [manuscrito] / Genilson Soares de Santana. – 2020.
93 f. il.

Orientador: Silas Luiz de Carvalho.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f. 91-93

1. Matemática – Teses. 2. Comportamento assintótico – Teses. 3. Semigrupos de operadores – Teses. 4. Hilbert, Espaços de – Teses. I. Carvalho, Silas Luiz de. II. Universidade Federal de Minas Gerais; Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III.Título.

CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende Costa
CRB 6ª Região nº 1510

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

Taxas ótimas para o decaimento de semigrupos em espaços de Hilbert

GENILSON SOARES DE SANTANA

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Silas Luiz de Carvalho

Prof. Silas Luiz de Carvalho
UFMG

Prof. Emerson Alves Mendonça de Abreu
UFMG

Marcos Montenegro

Prof. Marcos da Silva Montenegro
UFMG

Pedro Tavares Paes Lopes

Prof. Pedro Tavares Paes Lopes
USP

Belo Horizonte, 19 de fevereiro de 2020.

Av. Antônio Carlos, 6627 – Campus Pampulha - Caixa Postal: 702
CEP-31270-901 - Belo Horizonte – Minas Gerais - Fone (31) 3409-5963
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br - home page: http://www.mat.ufmg.br/pgmat

Agradecimentos

Primeiramente a Deus pela força e motivação diária.

Aos meus pais José e Alzira, pela motivação e orações. Sem a força de vocês nada disso seria possível. Muito obrigado! Amo muito vocês!

Aos meus irmãos Almerindo, Altieres, e Betânia pelas palavras de motivação de todos dias e por todos os conselhos. Amo muito vocês!

A todos os professores e funcionários da Escola Estadual Jaoquim de Freitas (Espinosa-MG), pelo carinho e por toda a torcida.

Aos meus amigos de Montes Claros, Ana Paula, Carine, Ludmila, Valéria (Irmãzinha), Henrique e Sileide, pela amizade e torcida! Você fizeram de Moc minha casa.

A Jullie Anne (Xuu) minha grande conselheira e minha irmã de alma que a Matemática me apresentou. Você fez parte de tudo isso, sem você não conseguiria! Amo você!

A Marcio Henrique meu grande amigo, que esteve ao lado durante todo esse tempo, motivando e torcendo por esta vitória. Te amo!

Aos professores da Unimontes por contribuirem com minha formação e pela motivação para prosseguir com a pós-graduação. Em especial, aos professores Rosivaldo, Narciso, Daniel e Januário (Janu), por toda motivação e amizade! Vocês fizeram com que tudo isso fosse possível!

Aos meus companheiros e amigos de apartamento, Pedro, Karol e Mateus. Obrigado pelas noites de mímicas e forca, e por todas as noites e noites (não foram poucas) de estudos. Sem a força e a motivação de vocês, não conseguiria. Muito obrigado!

Aos meus amigos de Belo Horizonte, em especial Marta, Luciana e Marcela. Pelos rolês aleatórios, pelos conselhos e pela torcida! Muito obrigado!

Ao meu orientador Silas tenho dois agradecimento. O primeiro, como professor, por despertar em suas aulas de Análise Funcional, o meu interesse pela área. E como orientador, por toda a compreensão nos dias difíceis, pelas palavras de motivação e por todas as discussões.

Aos membros da banca, Prof. Emerson Mendonça, Prof. Pedro Tavares e Prof. Marcos Montenegro, pelas contribuições e aprimoramento do trabalho.

Às secretárias do PGMAT-UFMG, Andréa e Kelli, pelos conselhos no "divã da pós"e por toda a dedicação e profissionalismo. E a todos os professores do DMAT-UFMG que contribuíram com minha formação. Muito obrigado!

À CAPES pelo apoio Financeiro.

Muito obrigado a todos que lutaram comigo até aqui!

"A verdadeira coragem é ir atrás de seu sonho mesmo quando todos dizem que ele é impossível.".

Cora Coralina

Resumo

O presente texto consiste em uma apresentação detalhada dos principais resultados em [6], [7], [11] e [36], os quais discutem a relação existente entre o comportamento assintótico de C_0-semigrupos em espaços Hilbert e as taxas de crescimento das normas dos operadores resolventes associados aos respectivos geradores infinitesimais. O principal resultado que apresentamos nos diz que podemos obter taxas ótimas para o decaimento de C_0-semigrupos se a norma do resolvente do gerador comportar como uma função de crescimento positivo (que, grosso modo, possui um crescimento mais rápido que o polinomial). Para uma grande classe de semigrupos, esta condição não é apenas suficiente, mas também necessária para que esta estimativa ótima seja mantida. Apresentamos ainda uma ilustração dos resultados teóricos, usados para obter estimativas precisas sobre a taxa de decaimento da energia para uma equação da onda sujeita a amortecimento viscoelástico na fronteira.

Palavras Chaves: Comportamento assintótico de C_0-semigrupos, taxas ótimas de decaimento, crescimento positivo.

Abstract

The present text consists of a detailed presentation of the main results in [6], [7], [11] and [36], which discuss the existing relation between the asymptotic behavior of C_0-semigroups in Hilbert spaces and the growth rates of the resolvent operators norms associated with the respective infinitesimal generators. The main result we present tells us that we can obtain optimal rates for the decay of C_0-semigroups if the norm of the resolvent associated with generator behave like positive increase functions (which, roughly, grow faster at least with a power-law rates). For a large class of semigroups, this condition is not only sufficient, but also necessary for this optimal estimate to be hold. We also present an application of the theoretical results, used to obtain sharp estimates on the rate of energy decay for a wave equation subject to viscoelastic damping at the boundary.

Keywords: Asymptotic behavior of C_0-semigroups, optimal decay rates, positive increase.

Sumário

Introdução

Um dos principais problemas da teoria das equações diferenciais parciais é determinar se as soluções destas equações se aproximam de um ponto equilíbrio, e se sim, com que velocidade se aproximam. Nas últimas décadas, houve um progresso essencial no tratamento de tais problemas assintóticos por métodos da teoria de C_0-semigrupos.

Seja X um espaço de Banach complexo e considere o Problema Abstrato de Cauchy (PAC)

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t), \quad t \geq 0 \\ z(0) = x, \end{cases} \tag{1}$$

onde A é um operador fechado e densamente definido em X e $x \in X$ é o dado inicial. Suporemos que (1) esteja bem posto, no sentido que A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ definido em X. Então, a solução fraca (única), $z : \mathbb{R}_+ \to X$, é dada por $z(t) = T(t)x$, e z será uma solução forte (ou solução clássica) se, e somente se, x estiver no domínio de A. Vamos assumir que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ seja limitado, isto é, que $\sup_{t\geq 0} \|T(t)\| < \infty$.

O estudo da estabilidade das soluções do PAC é um problema clássico de análise funcional, com inúmeras aplicações em equações diferenciais parciais, em especial para as equações da onda com amortecimento. Neste contexto, usamos os termos *assintoticamente estável*, ou simplesmente *estável*, para dizer que todas as órbitas de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ convergem a zero, e *exponencialmente estável*, quando as órbitas de $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ convergem a zero exponencialmente rápido. Estas são as principais noções de estabilidade.

Ainda no que se refere ao problema de estabilidade, Lyubich, Vũ, Arendt, Batty ([27], [3]) demonstraram em 1988 o seguinte resultado.

Teorema 1. *Sejam X um espaço de Banach e $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo limitado. Se $\sigma(A)\cap i\mathbb{R}$ for enumerável e se $\sigma(A^a) \cap i\mathbb{R}$ (em que A^a é a adjunta de A) não contiver autovalores, então $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ será estável, isto é, $\forall\ x \in X$,*

$$\lim_{t\to\infty} \|T(t)x\| = 0.$$

Quanto a estabilidade exponencial, Gearhart ([19]) e Prüss([33]) fizeram uma caracterizaram em termos do comportamento, ao longo do eixo imaginário, do operador resolvente associado a A.

Teorema 2. *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo de contrações definido sobre um espaço de Hilbert*

H, com gerador A. Então, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ será exponencialmente estável se, e somente se,

$$i\mathbb{R} \subset \rho(A) \quad e \quad \limsup_{|s|\to\infty} \|(is - A)^{-1}\| < \infty.$$

Já que estamos assumindo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ limitado, segue-se que o $\sigma(A)$, o espectro de A, está contido no semi-plano complexo $\overline{\mathbb{C}_-}$. Na maioria das vezes, assumiremos ainda que $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$. Neste caso, A será invertível, e seu domínio coincidirá com a imagem de A^{-1}. Assim, quando dissermos que estamos interessados no decaimento (uniforme) de $\|T(t)A^{-1}\|$, estamos nos referindo ao comportamento assintótico das soluções clássicas do PAC. Neste contexto, o próximo resultado nos diz qual é comportamento assintótico de $\|T(t)A^{-1}\|$.

Teorema 3 (Teorema 3.1 em [9])**.** *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo limitado definido em um espaço de Banach X, com gerador A. Suponha que $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$. Então,*

$$\lim_{t\to\infty} \|T(t)A^{-1}\| = 0. \tag{2}$$

Em geral, sem nenhuma condição adicional, o decaimento (2) pode ser arbitrariamente lento. No entanto, em várias situações concretas envolvendo EDP's (como por exemplo, as equações das ondas amortecidas), a taxa de decaimento em (2) corresponde à taxa de decaimento da energia do sistema descrita por $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, e é interessante determinar se essa taxa de decaimento pode ser alcançada.

Desde o trabalho pioneiro de Lebeau [25], um dos objetivos centrais na teoria assintótica dos C_0-semigrupos tem sido obter boas estimativas para a taxa a qual essa quantidade decai, assumindo que se tenha conhecimento sobre a norma do operador resolvente $R(is, A) = (is - A)^{-1}$, $s \in \mathbb{R}$, à medida que $s \to +\infty$. Dado que o comportamento assintótico da norma do operador resolvente do gerador é geralmente mais fácil de se determinar do que o comportamento assintótico do semigrupo, tornou-se habitual usar o operador resolvente ao lidar com ambos os tipos de estabilidade.

O estudo das taxas foi posto no contexto do Teorema Tauberiano para a transformada de Laplace, por Batty e Duyckaerts em [7], considerando o resolvente como a transformada de Laplace do semigrupo. A abordagem por pura análise complexa unificou vários resultados conhecidos (incluindo [26], por exemplo), além de aprimorar alguns daqueles aplicados ao comportamento do resolvente. Em particular, destacamos o seguinte resultado.

Teorema 4 (Teorema 5.1 em [7])**.** *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo limitado em um espaço de Banach, com gerador A tal que $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$. Defina $\forall\, t \geq 0$,*

$$M(t) = \sup_{|s|\leq t} \|R(is, A)\|$$

e

$$M_{\log}(t) := M(t)(\log(1 + M(t)) + \log(1 + t)).$$

Então, existirão constantes B, C e c tais que para todo $t \geq B$,

$$\frac{c}{M^{-1}(Ct)} \leq \|T(t)A^{-1}\| \leq \frac{C}{M_{\log}^{-1}(t/C)}. \tag{3}$$

em que M^{-1} é a inversa à direita de M.

Observe que pela Proposição 2.4, o decaimento $\lim_{t\to\infty}\|T(t)A^{-1}\| = 0$ implica $\sigma(A)\cap i\mathbb{R} = \emptyset$. No entanto, em muitas situações, o espectro se aproxima arbitrariamente do eixo imaginário (necessariamente em $\pm i\infty$), de modo que $\lim_{|s|\to\infty} M(|s|) = \infty$ (vide Proposição 1.9). Então, diremos que se $\lim_{s\to\infty} M(s) = \infty$, o resolvente, restrito ao eixo imaginário, possuirá uma *singularidade no infinito*.

Suponhamos, por exemplo, que $\exists\ \alpha > 0$ tal que $M(s)$ seja da ordem s^α quando $s \to \infty$. Então, (3) se torna (vide Exemplo 7 em [7])

$$\frac{c}{t^{1/\alpha}} \leq ||T(t)A^{-1}|| \leq C\left(\frac{\log t}{t}\right)^{1/\alpha}, \quad t \geq 1. \tag{4}$$

Ainda em [7], Batty e Duyckaerts, conjecturaram em que *se considerarmos X um espaço de Hilbert, então o fator logarítmico de* (3) *pode ser desconsiderado. Enquanto que se X for um espaço de Banach (não-Hilbert), não se pode descartar o fator logarítmico.*

Em 2009, Borichev e Tomilov demonstraram em [11] a veracidade da conjectura para a situação descrita em (4)

Teorema 5 (Teorema 2.4 em [11])**.** *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo limitado em um espaço de Hilbert H, com gerador A tal que $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$. Então, dado $\alpha > 0$, se*

$$\|R(is, A)\| = O(|s|^\alpha), \quad s \to \infty,$$

então

$$\|T(t)A^{-1}\| = O(t^{-1/\alpha}), \quad t \to \infty.$$

Eles também mostraram que o limite superior em (4) não pode ser aprimorado se nenhuma restrição for imposta ao espaço de Banach X.

Vale destacar que o Teorema 5 tem sido extensivamente aplicado em trabalhos recentes envolvendo decaimento de energia para equações da onda e de outras equações diferenciais parciais (veja, por exemplo, [37]), o que motivou ainda mais o aprimoramento das taxas de decaimento das soluções fortes. Se M não for considerada de crescimento polinomial, então não é difícil ver que não se pode sempre esperar que o limitante inferior em (3) coincida com a taxa real de decaimento de $\|T(t)A^{-1}\|$, quando $t \to \infty$, mesmo quando X é um espaço de Hilbert (vide o Exemplo 3.8 e o Exemplo 5.2 em [6]). É natural nos perguntarmos, portanto, para quais funções M, além das funções polinomiais, é possível (pelo menos em espaços de Hilbert) substituir em (3) $M_{\log}^{-1}$ por M^{-1}. Esta questão foi abordada pela primeira vez por Batty, Chill e Tomilov em [6], onde é mostrado que para certas funções de *variação regular* (que de certo modo se comportam como funções polinomiais) isso é realmente possível.

Teorema 6 (Teorema 5.6 em [6])**.** *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo definido em um espaço de Hilbert H, com gerador A. Assuma que $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$, e que existam $\alpha > 0$ e uma função crescente de variação lenta, $\ell : \mathbb{R}_+ \to (0, \infty)$ tal que*

$$\|R(is, -A)\| = O\left(\frac{|s|^\alpha}{\ell(|s|)}\right), \quad |s| \to \infty \tag{5}$$

Então,

$$\|T(t)A^{-1}\| = O((t\ell(t^{1/\alpha}))^{1/\alpha}) \quad t \to \infty. \tag{6}$$

A demonstração do Teorema 6 se baseia em resultados finos do cálculo funcional setorial. Vale destacar que o resultado acima não se aplica a todas as funções de variação regular, mas apenas a uma determinada subclasse.

Ainda na direção de estender as classes de funções M para as quais valem as estimativas anteriores, Rozendaal, Seifert e Stahn estenderam em 2017 os resultados do Teorema 6 paras as chamadas de *funções de crescimento positivo*. Grosso modo, tais funções crescem mais rapidamente que as funções polinomiais quando $t \to \infty$.

Teorema 7 (Teorema 3.2 em [36])**.** *Seja X um espaço de Hilbert e seja A o gerador de um C_0-semigrupo limitado $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ definido em X. Suponha que $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ e que $M : \mathbb{R}_+ \to (0, \infty)$ seja uma função contínua não-decrescente de crescimento positivo tal que, $\forall\ s \geq 0$, $\sup_{|r|\leq s} ||R(ir, A)|| \leq M(s)$. Então,*

$$\|T(t)A^{-1}\| = O(M^{-1}(t)^{-1}), \quad t \to \infty. \tag{7}$$

Considere o seguinte modelo para a propagação do som em um fluido compressível com superfície viscoelástica:

$$\begin{cases} u_{tt}(s,t) - \Delta u(s,t) = 0, & s \in (0,1), \quad t \in \mathbb{R}, \\ \partial_n u(s,t) + k * u_t(s,t) = 0, & s \in \{0,1\}, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{8}$$

em que: ∂_n denota a derivada normal externa na variável espacial na fronteira; a convolução é em relação à variável temporal; $k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é uma função integrável completamente monótona.

Os autores de [17] reformularam (8) como o PAC (vide Exemplo 1.33 para mais detalhes)

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t), \quad t \geq 0 \\ z(0) = x, \quad x \in X, \end{cases} \tag{9}$$

em que o vetor de dados iniciais, x, é um elemento de algum espaço de Hilbert X, e representa não só a pressão e a velocidade do fluido no tempo $t = 0$, mas também a pressão do fluido na fronteira para todos os tempos $t < 0$. Ademais, é possível mostrar que para escolhas adequadas de A e do espaço de Hilbert X, este problema abstrato de Cauchy é bem posto, e ainda que o C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ gerado por A é de contração. Para esta situação, o quadrado da norma no espaço de Hilbert X pode ser interpretado fisicamente como a energia do sistema.

Ainda em [36], Rozendaal, Seifert e Stahn utilizaram o Teorema 7 como ferramenta para obter boas estimativas para o decaimento das soluções de (9) e desta forma, boas taxas para o decaimento da energia (8).

O objetivo de nosso trabalho é apresentar em detalhes os resultados obtidos por Rozendaal, Seifert e Stahn em [36], bem como os detalhes das demonstrações dos Teoremas 4, 5 e 6. A ideia é que possamos, ao exibir tais detalhes, apresentar as principais técnicas empregadas na área nas últimas duas décadas. A dissertação se organiza da seguinte maneira.

No *capítulo* 1, intitulado *Preliminares*, discutimos alguns resultados básicos de análise funcional (teoria espectral), da teoria de semigrupos, definimos o PAC e apresentamos os conceitos básicos de soluções fracas e fortes. Por fim, apresentamos uma breve discussão sobre as *funções de crescimento positivo.*

No *capítulo* 2, intitulado de *Taxas de decaimento de C_0-Semigrupos em espaços de Hilbert (Parte I)*, apresentamos as demonstrações dos principais resultados que precederam o resultado principal de nosso trabalho, ou seja, os Teoremas 4, 5 e 6, bem como resultados preliminares necessários para as demonstrações.

O *capítulo* 3, intitulado *Taxas de decaimento de C_0-Semigrupos em espaços de Hilbert (Parte II)*, concentra a apresentação da demonstração do Teorema 7. Procuramos nas demonstrações, evitar o uso de resultados do cálculo funcional, já que isso torna alguns argumentos mais extensos. Assim, optamos por técnicas envolvendo resultados de Análise Funcional e de Análise Complexa.

No *Apêndice A*, intitulado *Resultados da Teoria dos Espaços de Banach*, compilamos alguns resultados sobre o Cálculo de funções a valores vetoriais, como por exemplo, a integral de Bochner, o Teorema de Cauchy e o Teorema do Módulo Máximo. Fazemos também uma breve discussão da teoria de Multiplicadores de Fourier, que nos auxiliará na demonstração do Teorema 7.

No *Apêndice B*, intitulado *Resultados Auxiliares*, é composto essencialmente por definições e demonstrações de resultados que enunciamos durante o texto como auxiliares para as demonstrações dos Teoremas 4, 5 e 6. Apresentamos ainda uma breve discussão envolvendo os chamados operadores setoriais e potências fracionárias de operadores setoriais.

Notação

- $\Re\lambda$ Parte real de $\lambda \in \mathbb{C}$.
- $\Im\lambda$ Parte imaginária de $\lambda \in \mathbb{C}$.
- $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.
- $\mathbb{C}_- = \{\lambda \in \mathbb{C}; \Re\lambda < 0\}$.
- $\mathbb{C}_+ = \{\lambda \in \mathbb{C}; \Re\lambda > 0\}$.
- A Operador linear.
- $\mathcal{D}(A)$ Domínio do operador A.
- $Im(A)$ Conjunto imagem do operador A.
- $\mathcal{B}(X)$ Conjunto dos operadores lineares limitados de X em X.
- $\rho(A)$ Conjunto Resolvente do operador linear A.
- $\sigma(A)$ Espectro do operador linear A.
- $R(\lambda, A) = (\lambda - A)^{-1}$ Resolvente de A em λ.
- $\mathcal{F}h$ Transformada de Fourier da função h.
- $K = \sup\limits_{t \geq 0} \|T(t)\|$.
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$ Espaço de Schwartz ,
- $x \lesssim y$ Existe uma constante c tal que $x \leq cy$
- $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}_+$.
  - $f(t) = O(g(t)),\ t \to \infty$ Existe uma constante $c > 0$ tal que $f(t) \leq cg(t)$ para valores grandes de t.
  - $f(t) \asymp g(t),\ t \to \infty$ $f(t) = O(g(t)),\ t \to \infty$ e $g(t) = O(f(t)),\ t \to \infty$.
  - $f(t) = o(g(t)),\ t \to \infty$ $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{f(t)}{g(t)} = 0$.
  - $f(t) \sim g(t),\ t \to \infty$ $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{f(t)}{g(t)} = 1$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados básicos de análise funcional, da teoria de Semigrupos, do Problema Abstrato de Cauchy e também da classe de funções de *crescimento positivo*. Todos os resultados discutidos neste capítulo são imprescindíveis para a compreensão do texto.

Ao longo deste capítulo, X sempre será um espaço de Banach complexo.

1.1 Elementos da Teoria Espectral

Definição 1.1. Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ um operador linear. O conjunto *resolvente* de A, denotado por $\rho(A)$, é conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais o operador resolvente de A em λ,

$$R(\lambda, A) : X \to \mathcal{D}(A), \quad R(\lambda, A) := (\lambda I - A)^{-1}$$

existe e é limitado, i.e., $R(\lambda, A) \in \mathcal{B}(X)$.

Definição 1.2. O *espectro* de A é o conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Proposição 1.3. *Se $\sigma(A) \neq \mathbb{C}$, então A será um operador fechado.*

Demonstração: Como $\sigma(A) \neq \mathbb{C}$, existirá um $\lambda_0 \in \rho(A)$, de modo que $R(\lambda_0 - A) \in \mathcal{B}(X)$. Seja $(\xi_n) \subset D(A)$ tal que $\xi_n \to \xi$ e $A\xi_n \to \eta$, então

$$R(\lambda_0 - A)(\lambda_0 \xi - \eta) = \lim_{n\to\infty} R(\lambda_0 - A)(\lambda_0 \xi_n - A\xi_n) = \lim_{n\to\infty} \xi_n = \xi$$

Logo, $\xi \in D(A)$, e

$$\lambda_0 \xi - \eta = (\lambda_0 I - A) R(\lambda_0, A)(\lambda_0 \xi - \eta) = (\lambda_0 I - A)\xi,$$

donde se segue que $A\xi = \eta$. ∎

Observação 1.4. A recíproca da proposição acima não é verdadeira. Considere, por exemplo, $A : C^1[0,1] \subset C[0,1] \to C[0,1]$, $(A\psi)(t) = \psi'(t)$; trata-se de um operador ilimitado e fechado. Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, a função $\psi_\lambda(t) = e^{\lambda t} \in D(A)$ e $A\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$, o que nos mostra que $\sigma(A) = \mathbb{C}$.

Teorema 1.5 (Série de Neumann). *Seja $A \in \mathcal{B}(X)$, com $\|A\| < 1$. Então $(I - A)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$ e*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

Demonstração: Veja a demonstração em [43]. ∎

Teorema 1.6. (Identidade do Resolvente) *Dados $\lambda, \mu \in \rho(A)$,*

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A).$$

Demonstração: Veja a demonstração em [30]. ∎

Definição 1.7. O *raio espectral* de $A \in \mathcal{B}(X)$ é

$$r_\sigma(A) := \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

Teorema 1.8. *Se $A \in \mathcal{B}(X)$, então*

$$r_\sigma(A) = \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|A\|.$$

Demonstração: Veja a demonstração em [31]. ∎

Proposição 1.9. *Seja A um operador fechado, definido em X. Então, para todo $\lambda \in \rho(A)$, temos*

$$\|R(\lambda, A)\| \geq \frac{1}{dist(\lambda, \sigma(A))}.$$

Demonstração: Pelo Teorema 1.8 sabemos que $\|R(\lambda, A)\| \geq r_\sigma(R(\lambda, A))$, de modo que basta mostrarmos que

$$\sigma(R(\lambda, A)) = \frac{1}{\lambda - \sigma(A)}.$$

Seja $\mu \in \rho(A)$, note que $(\lambda - \mu)(\lambda - A)R(\mu, A)$ possui inversa limitada, dada por $(\lambda - \mu)^{-1} - R(\lambda, A)$; logo $(\lambda - \mu)^{-1} \in \rho(R(\lambda, A))$, donde segue que $\sigma(R(\lambda, A)) \subset \dfrac{1}{\lambda - \sigma(A)}$. Por outro lado, seja $(\lambda - \mu)^{-1} \in \rho(R(\lambda, A))$; note que $(\mu - A) = (\lambda - \mu)((\lambda - \mu)^{-1} - R(\lambda, A))(\lambda - A)$, donde se segue que $(\lambda - \mu)^{-1} R(\lambda, A)((\lambda - \mu)^{-1} - R(\lambda, A))^{-1}$ é a inversa de $(\mu - A)$; logo, $\mu \in \rho(A)$, e o resultado segue. ∎

Teorema 1.10. *Seja um $A : \mathcal{D}(A) \to X$ um operador linear fechado definido em X. Então, $\rho(A)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$, e consequentemente $\sigma(A)$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{C}$. Mais ainda, se $\mu \in \rho(A)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ for tal que $|\mu - \lambda| \, \|(\mu - A)^{-1}\| < 1$, então $\lambda \in \rho(A)$ e*

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n (\mu - A)^{-n-1} \tag{1.1}$$

Demonstração: Se $\mu \in \rho(A)$, então $(\mu - A)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$. Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, escrevemos

$$(\lambda - A) = (\mu - A)[I - (\mu - \lambda)(\mu - A)^{-1}];$$

como $|\mu-\lambda|\|(\mu-A)^{-1}\|_{\mathcal{B}(X)}<1$, segue-se do Teorema 1.5 que $\lambda\in\rho(A)$ e que vale a identidade (2.1). ∎

Corolário 1.11. *Nas hipóteses do teorema anterior, a aplicação $\rho(A)\to\mathcal{B}(X)$ dada por $\lambda\mapsto R(\lambda,A)$ é contínua.*

Demonstração: Pelo teorema anterior, se $\lambda_0\in\rho(A)$ e $|\lambda-\lambda_0|<1/R(\lambda_0,A)$, então

$$\begin{aligned}\|R(\lambda,A)-R(\lambda_0,A)\| &\leq \sum_{j=1}^{\infty}|\lambda-\lambda_0|^j\|R(\lambda_0,A)\|^{j+1}\\ &\leq |\lambda-\lambda_0|\|R(\lambda_0,A)\|^2\sum_{j=0}^{\infty}|\lambda-\lambda_0|^j\|R(\lambda_0,A)\|^j\\ &= \frac{|\lambda-\lambda_0|\|R(\lambda_0,A)\|^2}{1-|\lambda-\lambda_0|\|R(\lambda_0,A)\|^2}\overset{\lambda\to\lambda_0}{\longrightarrow}0\end{aligned}$$

∎

Definição 1.12.
1. O *espectro pontual* $\sigma_p(A)$ é o subconjunto dos pontos $\lambda\in\sigma(A)$ tais que o operador$(\lambda-A)$ não é injetivo.
2. O *espectro residual* $\sigma_r(A)$ é o subconjunto dos pontos $\lambda\in\sigma(A)$ tais que $Im(\lambda-A)$ não é densa em X.
3. O *espectro pontual aproximado* $\sigma_a(A)$ é o subconjunto dos pontos $\lambda\in\sigma(A)$ para cada qual existe $(x_n)\subset\mathcal{D}(A)$, com $\|x_n\|=1$, tal que
$$\lim_{n\to\infty}\|(\lambda-A)x_n\|=0.$$

Proposição 1.13. *Seja A um operador linear fechado definido em X. Então $\sigma(A)=\sigma_r(A)\cup\sigma_a(A)$.*

Demonstração: Seja $\lambda\in\sigma(A)\setminus\sigma_r(A)$; então, $Im(\lambda-A)$ é densa em X.

Se $\lambda-A$ não for injetivo, então $\lambda\in\sigma_p(A)$, basta tomarmos $x_n=x$, para x no núcleo de $(\lambda-A)$. Logo $\lambda\in\sigma_a(A)$.

Suponha agora $\lambda-A$ injetivo. Se existisse uma constante $C>0$ tal que $\|\lambda x-Ax\|\geq\|x\|$, teríamos que $Im(\lambda-A)$ seria fechada em X, logo $\lambda-A$ seria sobrejetivo, uma vez que $Im(\lambda-A)$ é densa. Assim, existe $R(\lambda,A)$, uma contradição.

Portanto, para cada n, existe $x_n\in D(A)$, com $\|x_n\|=1$ tal que $\|(\lambda-A)x_n\|<\dfrac{1}{n}$. Logo, $\lambda\in\sigma_a(A)$. ∎

1.2 Semigrupos

Nesta seção, discutiremos alguns resultados básicos da teoria de semigrupos. Uma motivação natural para o estudo de semigrupos, como discutimos na Introdução, é o problema abstrato de Cauchy.

Definição 1.14. Um **semigrupo** de operadores lineares em X é uma família $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ tal que

(i) $T(0) = I$;

(ii) $\forall\ t, s \geq 0$, $T(s+t) = T(s)T(t)$.

Além disso, se $\forall\ x \in X$, $\lim\limits_{t\to 0} ||T(t)x - x||_X = 0$, diremos que o semigrupo é **fortemente contínuo**, ou um C_0**-semigrupo**. E se $\lim\limits_{t\to 0} ||T(t) - I||_{\mathcal{B}(X)} = 0$, diremos que o semigrupo é **uniformemente contínuo**.

Exemplo 1.15. Seja A um operador linear limitado. O operador $T(t) = e^{tA} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{(tA)^j}{j!}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, é também um operador linear limitado. A família $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo uniformemente contínuo, e portanto um C_0-semigrupo.

De fato, $T(0) = I$, e usando a fórmula de Cauchy para o produto de séries, temos $\forall\ s, t \geq 0$

$$\begin{aligned} T(s)T(t) = e^{As}e^{At} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(As)^k}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(At)^j}{j!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{(At)^l}{l!} \frac{(As)^{k-l}}{(k-l)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} t^l s^{k-l} A^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s+t)^k}{k!} A^k \\ &= e^{A(t+s)} \\ &= T(s+t) \end{aligned}$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned} \|e^{At} - I\| &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} - I \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k \|A\|^k}{k!} \\ &\leq t\|A\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}\|A\|^{k-1}}{(k-1)!} = t\|A\|e^{t\|A\|}, \end{aligned}$$

donde se segue que

$$\lim_{t\to 0} \|e^{At} - I\| = 0.$$

Teorema 1.16. *Seja um semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ uniformemente contínuo. Então, existe $A \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\forall t \geq 0$, $T(t) = e^{At}$.*

Demonstração: Como $\{T(t); t \geq 0\}$ é um semigrupo uniformemente contínuo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left\| I - \frac{1}{\delta}\int_0^\delta T(t)dt \right\| = \left\| \frac{1}{\delta}\int_0^\delta (I - T(t))dt \right\| \leq \frac{1}{\delta}\int_0^\delta \|I - T(t)\|dt < \varepsilon.$$

Tomando $\varepsilon = 1$, segue pelo Teorema 1.5 que $\left(\int_0^\delta T(s)ds\right)^{-1} \in \mathcal{B}(X)$. Para cada $h > 0$,

$$\frac{T(h) - I}{h}\int_0^\delta T(t)dt = \frac{1}{h}\int_0^\delta T(h+t)dt - \frac{1}{h}\int_0^\delta T(t)dt.$$

Por uma mudança de variável, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{T(h) - I}{h}\int_0^\delta T(t)dt &= \frac{1}{h}\int_0^\delta T(h+t)dt - \frac{1}{h}\int_0^\delta T(t)dt \\
&= \frac{1}{h}\int_h^{\delta+h} T(s)ds - \frac{1}{h}\int_0^\delta T(s)ds \\
&= \frac{1}{h}\left(\int_0^{\delta+h} T(s)ds - \int_0^h T(s)ds\right) - \frac{1}{h}\left(\int_0^{\delta+h} T(s)ds - \int_\delta^{\delta+h} T(s)ds\right) \\
&= \frac{1}{h}\int_\delta^{\delta+h} T(s)ds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)ds.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{T(h) - I}{h} = \left(\frac{1}{h}\int_\delta^{\delta+h} T(t)dt - \frac{1}{h}\int_0^h T(t)dt\right)\left(\int_0^\delta T(t)dt\right)^{-1}. \tag{1.2}$$

Fazendo $h \to 0^+$ em (1.2), chegamos a

$$\frac{T(h) - I}{h} \to (T(\delta) - I)\left(\int_0^\delta T(t)dt\right)^{-1}.$$

Seja $A := (T(\delta) - I)\left(\int_0^\delta T(t)dt\right)^{-1}$. Daí, para todos $t \geq 0$ e $h > 0$,

$$\frac{T(h+t) - T(t)}{h} = T(t)\frac{T(h) - I}{h} \stackrel{h \to 0^+}{\longrightarrow} T(t)A = AT(t).$$

Por outro lado, $\|T(t-h)\|$ é uniformemente contínuo em $0 < h < t$, donde se segue

$$\frac{T(t-h) - T(t)}{-h} = T(t-h)\frac{T(h) - I}{h} \stackrel{h \to 0^+}{\longrightarrow} T(t)A = AT(t).$$

Portanto, $T(t)$ é diferenciável e $\dfrac{d}{dt}T(t) = AT(t) = T(t)A$.
Seja $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{B}(X)$, dada pela lei $\phi(t) = e^{-At}T(t)$. Temos que

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = -Ae^{-At} + e^{-At}AT(t) = 0,$$

e portanto $\phi(t) = \phi(0) = I$, ou seja, $T(t) = e^{At}$. ∎

Definição 1.17. Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo. $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é dito **uniformemente limitado** se existir uma constante $M \geq 1$ tal que $\forall t \geq 0$, $\|T(t)\| \leq M$. Se $M = 1$, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ será um **C_0-semigrupo de contrações**.

Definição 1.18. Diremos que A será o *gerador infinitesimal*, ou simplesmente *gerador* do semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, se

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X \mid \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existir em } X \right\},$$

e para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ valer

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d}{dt} T(t)x \Big|_{t=0}.$$

Exemplo 1.19. Sejam $X = \ell^2(\mathbb{N})$, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência decrescente em $(0, 1]$, e $\lambda_n = -\alpha_n + in$. Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo de contrações em $\ell^2(\mathbb{N})$ definido por

$$T(t)x = (e^{\lambda_n t} x_n), \quad x = (x_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N}). \tag{1.3}$$

Temos que $\forall\ x \in \ell^2(\mathbb{N})$, $T(0)x = (x_n)_n$; logo, $T(0) = I$ e $T(s + t)x = (e^{\lambda_n (s+t)} x_n) = (e^{\lambda_n s}(e^{\lambda_n t} x_n)) = T(s)T(t)x$. Note que

$$\|T(t)x - x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(e^{\lambda_n t} - 1)x_n|^2 \leq 2\|x\|^2.$$

Daí, como $\lim_{t\to 0}(e^{\lambda_n t} - 1) = 0$ segue do Teorema da Convergência Dominada (usando a medida de contagem) que $\lim_{t\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} |(e^{\lambda_n t} - 1)x_n|^2 = 0$, donde se segue que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo. E ainda, $\|T(t)\| \leq 2$, logo um semigrupo limitado.

O seu gerador infinitesimal, A, deverá satisfazer, $\forall x \in \mathcal{D}(A)$,

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(e^{\lambda_n t} x_n - x_n) = (\lambda_n x_n)_n,$$

assim,

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in \ell^2(\mathbb{N}) \mid (\lambda_n x_n) \in \ell^2(\mathbb{N})\}.$$

Teorema 1.20. *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo. Então, existirão constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que, $\forall\ t \in [0, \infty)$,*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}.$$

Demonstração: Mostremos inicialmente que existe $\eta > 0$ tal que $\|T(t)\|$ é limitado em $0 \leq t \leq \eta$. De fato, suponha que não, então existe uma sequência $(t_n)_n$ com $t_n \geq 0$, tal que $t_n \to 0$ e $\|T(t_n)\| \geq n$. Assim, pelo Princípio da Limitação Uniforme deve existir $x \in X$ tal que $\{\|T(t_n)x\|\}_n$ é ilimitado, o que é um absurdo, já que sabemos que $\{\|T(t_n)x\|\}_n$ converge. Portanto, existe $\eta > 0$ e $M \geq 1$ tais que $\|T(t)\| \leq M$ para $t \in [0, \eta]$. Seja $\omega = \eta^{-1} \log M \geq 0$.

Dado, $t \geq 0$ temos que $t = n\eta + \delta$, onde $0 \leq \delta < \eta$, de modo que

$$\|T(t)\| = \|T(\delta)T(\eta)^n\| \leq M^{n+1} = Me^{w\eta n} = Me^{\omega(t-\delta)} \leq Me^{\omega t}.$$

■

Corolário 1.21. *Se $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo, então para cada $x \in X$, $[0, \infty) \ni t \mapsto T(t)x$ será uma aplicação contínua.*

Demonstração: Segue-se do Teorema 1.20. ■

Teorema 1.22. *Se $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ for um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares em X, com $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ seu gerador infinitesimal, então:*

1. *Para cada $x \in X$ e $t \geq 0$,*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{h+t} T(s)xds = T(t)x.$$

2. *Para cada $x \in X$, $\int_0^t T(s)xds \in \mathcal{D}(A)$ e*

$$A\left(\int_0^t T(s)xds\right) = T(t)x - x,$$

e se $x \in \mathcal{D}(A)$, então

$$A\left(\int_0^t T(s)xds\right) = \int_0^t T(s)Axds.$$

3. *A será um operador densamente definido, isto é, $\overline{\mathcal{D}(A)} = X$.*

4. *Para cada λ tal que $\Re\lambda > \omega$, com ω dado no Teorema 1.20, $\lambda \in \rho(A)$ e $\forall x \in X$,*

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt. \tag{1.4}$$

5. *A será um operador linear fechado.*

Demonstração:

1. Sejam $x \in X$ e $t \geq 0$ fixados. Dado $\varepsilon > 0$, segue-se da continuidade uniforme da aplicação $s \mapsto T(s)x$ em intervalos compactos, a existência de um $\delta > 0$ tal que para todo $0 < h < \delta$,

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{h}\int_t^{h+t} T(s)xds - T(t)x\right\| &= \left\|\frac{1}{h}\int_t^{h+t}[T(s)x - T(t)x]ds\right\| \\
&\leq \frac{1}{h}\int_t^{h+t}\|T(s)x - T(t)x\|ds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^h \|T(s+t)x - T(t)x\|ds \\
&\leq \frac{||T(t)||}{h}\int_0^h \|T(s)x - x\|ds \\
&< \frac{\varepsilon}{h}\int_0^h ds = \varepsilon.
\end{aligned}$$

2. Sejam $x \in X$ e $h > 0$. Então,

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)xds &= \frac{1}{h}\int_0^t [T(s+h)x - T(s)x]ds \\
&= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(s)xds + \frac{1}{h}\int_t^h T(s)xds - \frac{1}{h}\int_t^h T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds
\end{aligned}$$

Tomando $h \to 0^+$ no membro direito da equação acima, segue-se do (item 1) que

$$\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)xds \to T(t)x - x.$$

como queríamos.

Seja agora $x \in \mathcal{D}(A)$; então,

$$\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)xds = \frac{1}{h}\int_0^t [T(s+h)x - T(s)x]ds, \tag{1.5}$$

e note que ao tomarmos $h \to 0^+$ na igualdade (1.5) e ao usarmos a continuidade uniforme da aplicação $s \mapsto T(s)x$, no intervalo $[0, t]$, seguir-se-á que

$$A\left(\int_0^t T(s)xds\right) = \int_0^t T(s)Axds.$$

3. Seja $x \in X$; então, $x_h = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^h T(s)xds \in D(A)$ pelo (item (2)), e como $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds = x$ (pelo (item 1)) o resultado se segue.

4. Defina, $\forall\ x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, o operador

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt$$

Note que se $\Re\lambda > \omega$, então

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda)x\| &\le \int_0^\infty \|e^{-\lambda t}T(t)x\|dt \\
&\le \int_0^\infty e^{-\Re\lambda t}\|T(t)x\|ds \\
&\le \frac{K\|x\|}{\Re\lambda - \omega}.
\end{aligned}$$

Logo, $R(\lambda) \in \mathcal{B}(X)$ e $\|R(\lambda)\| \le \frac{M}{\Re\lambda - \omega}$.

Sejam $x \in X$ e $h > 0$; então,

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}R(\lambda)x &= R(\lambda)\frac{T(h)x-x}{h} \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t+h)xdt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[\int_h^\infty e^{\lambda(h-t)}T(t)xdt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[-\int_0^h e^{\lambda(h-t)}T(t)xdt + \int_0^\infty e^{\lambda(h-t)}T(t)xdt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt\right] \\
&= \frac{1}{h}\left[-\int_0^h e^{\lambda(h-t)}T(t)xdt\right] + \frac{(e^{\lambda h}-1)}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt \\
&= -e^{\lambda h}\frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}T(t)xdt + \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt \\
&= -e^{\lambda h}\frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}T(t)xdt + \frac{e^{\lambda h}-1}{h}R(\lambda)x.
\end{aligned}$$

Seja, $\forall\ t \geq 0$, $\mathbf{T}(t) = e^{-\lambda t}T(t)$; note que a família $\{\mathbf{T}(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo. Daí, segue-se do (item 1) que $\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}T(t)xdt = \mathbf{T}(0)x = x$. Assim, tomando $h \to 0^+$ na identidade anterior temos que, $\forall x \in X$,

$$\frac{T(h)-I}{h}R(\lambda)x \to -x + \lambda R(\lambda)x.$$

Portanto, $R(\lambda)x \in \mathcal{D}(A)$. Como $AR(\lambda)x = -x + \lambda R(\lambda)x$, segue-se que $(\lambda - A)R(\lambda)x = x$, e assim $\lambda - A$ é sobrejetora. Também, se $x \in \mathcal{D}(A)$, então integrando por partes, obtemos

$$R(\lambda)Ax = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Axdt = e^{-\lambda t}T(t)x\Big|_0^\infty + \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt = -x + \lambda R(\lambda)x = AR(\lambda)x.$$

Segue-se da discussão anterior que $(\lambda - A)R(\lambda)x = R(\lambda)(\lambda - A)x$ para todo $x \in \mathcal{D}(A)$, e portanto $\lambda - A$ é também injetora. Logo, $(\lambda - A)$ é uma bijeção de $\mathcal{D}(A)$ sobre X com inversa limitada $R(\lambda)$, donde se segue o resultado.

5. Como, pelo item anterior, $\rho(A) \neq \emptyset$, segue-se da Proposição 1.3 que A é um operador fechado.

$\blacksquare$

Corolário 1.23. *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo limitado. Se $\Re\lambda > 0$ então $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{K}{\Re\lambda}$.*

Demonstração: Como $\Re\lambda > 0$, segue-se do Teorema 1.22 (item 4) que

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)xdt.$$

Daí, temos que

$$\|R(\lambda, A)x\| \leq K\|x\|\int_0^\infty e^{-\Re\lambda t}dt,$$

donde se segue que $\|R(\lambda, A)x\| \leq \frac{K}{\Re\lambda}\|x\|$, onde $K = \sup_{t\geq 0}\|T(t)\|$. $\blacksquare$

Teorema 1.24. *Sejam* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *e* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *semigrupos fortemente contínuos com geradores* A *e* B*, respectivamente. Se* $A = B$*, então* $T(t) = S(t)$*,* $t \geq 0$*.*

Demonstração: Seja $x \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$. Sabemos que $s \mapsto T(t-s)S(s)x$ é diferenciável, e que

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}T(t-s)S(s)x &= -AT(t-s)S(s)x + T(t-s)BS(s)x \\ &= -T(t-s)AS(s)x + T(t-s)BS(s)x = 0.\end{aligned}$$

Portanto, $s \mapsto T(t-s)S(s)x$ é constante, e em particular seus valores em $s = 0$ e $s = t$ são os mesmos, isto é, $T(t)x = S(t)x$. Isto vale para todo $x \in \mathcal{D}(A)$, e como $\mathcal{D}(A)$ é denso em X (item 3 do Teorema 1.22) e $S(t)$, $T(t)$ são limitados, $T(t)x = S(t)x, \quad \forall x \in X$. ∎

Lema 1.25. *Sejam* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0*-semigrupo e* A *seu gerador infinitesimal. Se*

$$B_\lambda(t)x = \int_0^t e^{\lambda(t-s)}T(s)xds$$

então, $\forall\ x \in X$*,*

$$(\lambda - A)B_\lambda(t)x = e^{t\lambda}x - T(t)x, \tag{1.6}$$

e $\forall\ x \in \mathcal{D}(A)$*,*

$$B_\lambda(t)(\lambda - A)x = e^{t\lambda}x - T(t)x. \tag{1.7}$$

Demonstração: Considere, $\forall\ t \geq 0$, $\mathbf{T}(t) = e^{-\lambda t}T(t)$; então, $\{\mathbf{T}(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo, cujo gerador infinitesimal é $A - \lambda$. Assim pelo Teorema 1.22 (item 2), segue-se que $\forall\ x \in X$,

$$(\lambda - A)B_\lambda(t)x = e^{\lambda t}\left[(\lambda - A)\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)xds\right] = e^{\lambda t}[x - e^{-\lambda t}T(t)x],$$

e $\forall\ x \in \mathcal{D}(A)$,

$$B_\lambda(t)(\lambda - A)x = e^{\lambda t}\left[\int_0^t e^{-\lambda s}T(s)(\lambda - A)xds\right] = e^{\lambda t}[x - e^{-\lambda t}T(t)x].$$

∎

Teorema 1.26. *Seja* X *um espaço de Banach reflexivo e* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ *um* C_0*-semigrupo com gerador* A*. Então, definindo* $\{T^a(t)\}_{t\geq 0}$ *por* $T^a(t) = T(t)^a$*, para todo* $t \geq 0$*, em* $\mathcal{B}(X^*)$*, então* $\{T^a(t)\}_{t\geq 0}$ *é um* C_0*-semigrupo e* A^a *é seu gerador.*

Demonstração: Veja o Corolário 3.7.1 em [14].

1.3 Problema Abstrato de Cauchy

Considere o problema abstrato de Cauchy homogêneo (PAC):

$$\begin{cases} z'(t) = Ax, & t \geq 0, \\ z(0) = x, \end{cases} \tag{1.8}$$

onde $A : \mathcal{D}(A) \to X$ é o gerador do C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

Definição 1.27. Diremos que uma função $z : \mathbb{R}_+ \to X$ será uma solução clássica ou solução forte de (1.8) se

$$z \in C(\mathbb{R}_+, \mathcal{D}(A)) \cap C^1([0,\infty), X) \tag{1.9}$$

e se satisfizer o PAC.

Definição 1.28. Uma solução fraca de (1.8) será uma função $z \in C([0,\infty), X)$ tal que $z(0) = x$, tal que para todo $x^* \in \mathcal{D}(A^a)$, $[0,\infty) \ni t \mapsto x^*(z(t)) \in \mathbb{C}$ é diferenciável, e tal que $\forall t \geq 0$,

$$\frac{d}{dt} x^*(z(t)) = y^*(z(t)),$$

onde $y^* = A^a x^*$.

Observação 1.29. 1. Se definirmos $z(t) = T(t)x$, veremos que $z(t)$ será uma solução fraca (única) para o PAC. Com efeito, seja $x^* \in \mathcal{D}(A^a)$, e note que se $x \in \mathcal{D}(A)$, então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x^*(z(t)) &= \lim_{h\to 0} \frac{x^*(T(t+h)x) - x^*(T(t)x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^*(T(t)[T(h)x - x])}{h} \\ &= x^*(Az(t)) = (A^a x^*)T(t)x. \end{aligned}$$

Daí, temos que

$$\int_0^t (A^a x^*)T(s)x ds = x^*(T(t)x) - x^*(T(0)x) = x^*(T(t)x) - x^*(x).$$

Usando a densidade de $\mathcal{D}(A)$, por continuidade concluímos que a expressão acima é válida para todo $x \in X$. Portanto, $t \mapsto x^*(z(t))$ é diferenciável, cuja derivada é $(A^a x^*)z(t)$. Para a unicidade, consulte o Teorema 3.2.1 em [14].

2. $z(t) = T(t)x$ será uma solução forte se, e somente se, $x \in \mathcal{D}(A)$.

Definição 1.30. Diremos que problema de Cauchy estará bem-posto se:

1. Para $z_0 \in \mathcal{D}(A)$, o PAC possuir uma única solução clássica;
2. Esta solução depender continuamente das condições iniciais.

Teorema 1.31. *Considere o Problema Abstrato de Cauchy não homogêneo*

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + f(t), & t \in (0, S) \\ z(0) = z_0, \end{cases} \tag{1.10}$$

onde $f \in C([0,S];X)$. O problema (1.10) possui solução forte para todo $z_0 \in \mathcal{D}(A)$ se, e somente se,

$$(0,S) \ni t \mapsto \int_0^t T(t-s)f(s)ds \in C^1((0,S);X).$$

Além, disso a solução é dada por

$$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds.$$

Demonstração: Veja a demonstração em [40].

■

Teorema 1.32. *Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ um operador linear. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i. A é o gerador de um C_0-Semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$;

ii. O problema abstrato de Cauchy associado a A está bem-posto e $\rho(A) \neq \emptyset$;

iii. O problema abstrato de Cauchy associado a A está bem-posto, A é densamente definido, e sempre que $(x_n) \subset D(A)$ é uma sequência convergindo com respeito a norma de X para $x \in D(A)$, então a solução clássica correspondente $z(\cdot, x_n)$ converge para $z(\cdot, x)$ uniformemente em $[0,\infty)$.

Demonstração: Veja a demonstração em [18]. ■

Como já dissemos a teoria de semigrupos é uma grande ferramenta para o estudo de EDP's. O exemplo a seguir ilustra tal afirmação.

Exemplo 1.33 (Vide [17])**.** Considere o seguinte modelo para a evolução do som em um fluido compressível com superfície viscoelástica

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u(t,x) = 0, & x \in \Omega, \quad t \in \mathbb{R}, \\ \partial_n u(t,x) + \kappa * u_t(t,x) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.11}$$

com as condições iniciais $u(0,\cdot) = u_0$, $u_t(0,\cdot) = u_1$; $u(t,x) \in \mathbb{C}^n$ denota a pressão acústica no instante t; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio (aberto conexo) limitado e com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2; $n(x)$ denota a normal exterior a $\partial\Omega$ em x.

Formulação do Problema de Cauchy: Seja $u(t,x) \in \mathbb{C}^n$, podemos reescrever o sistema acima como

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \mathrm{div}\sigma & \text{em } \Omega, \quad t > 0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \nabla v & \text{em } \Omega, \quad t > 0, \\ \sigma \cdot n + \kappa * v = 0, & \text{em } \partial\Omega, \quad t > 0, \end{cases} \tag{1.12}$$

onde $v := \frac{\partial u}{\partial t}$ e $\sigma := \nabla u$.

Obtemos soluções de (1.11) considerando apenas a primeira componente das soluções de (1.12).

Para reescrever o sistema (1.12) na forma de PAC, precisamos de certas suposições sobre o núcleo κ. Vamos supor que :

1. O núcleo κ é uma função completamente monótona, isto é, existe uma medida positiva ν localmente finita em $[0,\infty)$ tal que

$$k(t) = \int_0^\infty e^{-st} d\nu(s), \quad t > 0;$$

2. $\kappa \in L^1(0,\infty)$.

Sob essas condições, a transformada de Laplace de κ é dada por

$$\hat{\kappa}(\lambda) = \int_0^\infty \frac{1}{s+\lambda} d\nu(s), \quad \Re\lambda > 0,$$

e admite uma extensão holomorfa em $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Notemos que $\kappa \in L^1(0,\infty)$ se, e somente se,

$$\nu(\{0\}) = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^\infty \frac{d\nu(s)}{s} < \infty.$$

Quanto à convolução $(\kappa * v)$, podemos expressá-la como

$$\begin{aligned}
(\kappa * v)(t,x) &= \int_0^t \kappa(t-s)\Gamma v(s,x) ds \\
&= \int_0^t \int_0^\infty e^{-\tau(t-s)} d\nu(\tau) \Gamma v(s,x) ds \\
&= \int_0^\infty \int_0^t e^{-\tau(t-s)} \Gamma v(s,x) ds d\nu(\tau) \\
&= \int_0^\infty \psi(t,\tau,x) d\nu(\tau),
\end{aligned}$$

onde $\psi(t,\tau,x) := \int_0^t e^{-\tau(t-s)}\Gamma v(s,x)ds$ e $\Gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\partial\Omega)$, $\Gamma(v) = v\Big|_{\partial\Omega}$.

Note que

$$\frac{\partial\psi(t,\tau,x)}{\partial t} = \Gamma v(t,x) - \tau\psi(t,\tau,x), \quad t,\tau \in \mathbb{R}^+, \quad x \in \partial\Omega. \tag{1.13}$$

Considere o espaço de Hilbert $X = L^2(\Omega;\mathbb{C}^n) \times L^2(\Omega, \mathbb{C}^{n\times n}) \times L^2_\nu$, onde abreviamos $L^2_\nu := L^2_\nu(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega, \mathbb{C}^n))$. Seja

$$Y := \{\sigma \in L^2(\Omega, \mathbb{C}^{n\times n}) \mid \mathrm{div}\sigma \in L^2(\Omega; \mathbb{C}^{n\times n})\}$$

onde a divergência, div, é tomada no sentido distribucional nas linhas da matriz. Note que para $\sigma \in Y$, existe um traço generalizado $\sigma \cdot n$ no sentido que, para todo $u \in H^1(\Omega, \mathbb{C}^n)$,

$$\langle \sigma \cdot n; \Gamma u \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega)\times H^{1/2}(\partial\Omega)} = \int_\Omega (\mathrm{div}\sigma)\overline{u} + \int_\Omega \sigma \cdot \overline{\nabla u}. \tag{1.14}$$

Defina o operador $A : \mathcal{D}(A) \to X$,

$$\mathcal{D}(A) = \{(v,\sigma,\psi) \in X \mid v \in H^1(\Omega,\mathbb{C}^n), \sigma \in Y, \Gamma v - s\psi(s) \in L^2_\nu \ \text{ e } \ \sigma \cdot n = -\int_0^\infty \psi(s) d\nu(s)\}$$

com $\sigma \cdot n$ dado acima. Assim, temos o PAC

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \mathcal{A}z(t) \ t \geq 0 \\ z(0) = x \in X, \end{cases} \tag{1.15}$$

com $x = (v,\sigma,\psi)$, onde

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & \text{div} & 0 \\ 0 & \nabla & 0 \\ \Gamma & 0 & -s \end{pmatrix}$$

Observação 1.34. Os autores de [17] mostraram que $\mathcal{A}$ gera um C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. E ainda, com o auxílio do Teorema de Lummer-Phillips (veja em [14]), mostraram que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo de contração, e portanto limitado.

Como aplicação da teoria apresentada no capítulo 3, voltaremos a discutir este PAC, a fim de obtemos boas estimativas para o decaimento de suas soluções. Veja em [42] que para X considerado acima, o quadrado da norma representará a energia de (1.11).

1.4 Funções Especiais

Definição 1.35. Dados $a \geq 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, diremos que uma função mensurável $M : [a, \infty) \to (0, \infty)$ é de *variação regular* (de índice α) se $\forall \lambda \geq 1$,

$$\lim_{s \to \infty} \frac{M(\lambda s)}{M(s)} = \lambda^{\alpha}. \tag{1.16}$$

Observação 1.36. 1. Uma função mensurável $M : [a, \infty) \to (0, \infty)$ de variação regular de índice zero será dita de *variação lenta.*

2. Seja $M : [a, \infty) \to (0, \infty)$ uma função de variação regular com índice $\alpha \in \mathbb{R}$; então, existirão uma função $\ell : [a, \infty) \to (0, \infty)$ de variação lenta e $s_0 \geq a$ tais que $\forall s \geq s_0$, $M(s) = s^{\alpha}\ell(s)$. Com feito, sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\ell(s) := s^{-\alpha}M(s)$, $s \geq s_0 > 0$. Daí, temos que

$$\lim_{s \to \infty} \frac{\ell(\lambda s)}{\ell(s)} = \lim_{s \to \infty} \frac{\lambda^{-\alpha}s^{-\alpha}M(\lambda s)}{s^{-\alpha}M(s)} = 1,$$

o que nos mostra que ℓ é uma função de variação lenta.

Exemplo 1.37. a) As funções $\ell(s) = \log(s)$ e $M(s) = s^{\alpha}\log(s)$, $\quad \alpha > 0$, são respectivamente de varação lenta e de variação regular.

b) O produto de funções de variação lenta é uma função de variação lenta, como se vê diretamente da definição.

Definição 1.38. Dados $a \geq 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, diremos que uma função mensurável $M : [a, \infty) \to (0, \infty)$ terá *crescimento positivo* se existirem constantes $\alpha > 0$, $c \in (0, 1]$ e $s_0 > a$ tais que, $\forall\ \lambda \geq 1$ e $\forall s \geq s_0$,

$$\frac{M(\lambda s)}{M(s)} \geq c\lambda^{\alpha}. \tag{1.17}$$

Lema 1.39. *Seja $a \geq 0$. Se $M : [a, \infty) \to (0, \infty)$ for não-decrescente, então M terá crescimento positivo se, e somente se, existir $\lambda > 1$ tal que*

$$\liminf_{s \to \infty} \frac{M(\lambda s)}{M(s)} > 1. \tag{1.18}$$

Demonstração: Se M tiver crescimento positivo, então (1.18) será satisfeito para todo $\lambda > 1$ suficientemente grande. Agora, suponha que (1.18) seja válida; então existirão constantes estritamente positivas $\alpha > 0$, $\lambda_0 > 1$ e $s_0 \geq a$ tais que,

$$\frac{M(\lambda_0 s)}{M(s)} \geq \lambda_0^{\alpha}, \quad s \geq s_0.$$

Dado $\lambda \geq 1$, podemos escrever λ unicamente na forma $\lambda = \lambda_0^n \mu$, onde $n \in \mathbb{Z}_+$ e $1 \leq \mu < \lambda_0$ (se $\lambda < \lambda_0$, tome $n = 0$ e $\mu = \lambda$, agora se $\lambda > \lambda_0$ tome $\mu = \lambda/\lambda_0^n$). Então, $\forall\ s \geq s_0$

$$\frac{M(\lambda s)}{M(s)} \geq \frac{M(\lambda_0^n s)}{M(\lambda_0^{n-1}s)} \frac{M(\lambda_0^{n-1}s)}{M(\lambda_0^{n-2}s)} \cdot \dots \cdot \frac{M(\lambda_0 s)}{M(s)} \geq \lambda_0^{n\alpha} \geq \lambda_0^{(n-1)\alpha}\mu^{\alpha} \geq c\lambda^{\alpha},$$

onde $c = \lambda_0^{-\alpha}$. Portanto, M tem crescimento positivo. ∎

Observação 1.40. Pelo Lema 1.39, vemos que as funções com variação regular de índice estritamente positivo têm crescimento positivo; em contrapartida, as funções com variação lenta não têm crescimento positivo.

Note ainda que a classe das funções que possuem crescimento positivo é estritamente maior que a classe das funções com variação regular de índice estritamente positivo. Por exemplo, a função $M : [0, \infty) \to \mathbb{R}_+$, $M(s) = e^{\alpha s}$, $s \geq 0$, $\alpha > 0$, é tal que

$$\lim_{s\to\infty} \frac{M(\lambda s)}{M(s)} = \lim_{s\to\infty} e^{(\lambda-1)\alpha s} = \infty, \quad \lambda > 1.$$

Logo, $M(s)$ não é de variação regular, apesar de ter crescimento positivo. Note ainda que existem funções com crescimento moderado que não são de variação regular, mas tem crescimento positivo, como é o caso de $M(s) = s^{\alpha}(2 + \sin s)$, $s \geq 1$.

Para o que se segue, sejam $a \geq 0$ e $M : [a, \infty) \to (0, \infty)$ uma função contínua, não-decrescente tal que $M(s) \to \infty$ quando $s \to \infty$; denotemos por $M^{-1} : [M(a), \infty) \to [a, \infty)$ a inversa à direita de M, dada por

$$M^{-1}(s) = \sup\{r \geq a \mid \; M(r) \leq s\}.$$

M^{-1} está bem definida uma vez que M é não-decrescente e $M(s) \to \infty$.

Observação 1.41. 1. $M(M^{-1}(s)) = s$
Segue-se da definição de M^{-1} a existência de uma sequência $r_n \to M^{-1}(s)$, com $M(r_n) \leq s$; logo, $M(M^{-1}(s)) \leq s$, onde usamos a continuidade de M. Por outro lado, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $M(M^{-1}(s)+\frac{1}{n}) > s$, $\forall n \in \mathbb{N}$, donde se segue que $M(M^{-1}(s)) \geq s$. Logo, $M(M^{-1}(s)) = s$.

2. $\forall\ s \geq a$, $M^{-1}(M(s)) \geq s$.
Como, $M(s) \leq M(s)$, segue-se da definição de M^{-1} que $M^{-1}(M(s)) \geq s$.

3. M^{-1} é não-decrescente.
De fato, sejam $t \leq s$; segue-se do (item 1) que $M(M^{-1}(t)) = t \geq s$, portanto da definição que $M^{-1}(t) \leq M^{-1}(s)$.

Proposição 1.42. *Seja $a \geq 0$ e suponha que $M : [a, \infty) \to (0, \infty)$ seja uma função contínua não-decrescente tal que $M(s) \to \infty$ quando $s \to \infty$. Se M tiver crescimento positivo, então para cada $c > 0$*

$$M^{-1}(t) \asymp M^{-1}(ct), \; t \to \infty. \tag{1.19}$$

Reciprocamente, se (1.19) *for válido para algum $c \neq 1$ estritamente positivo, então M terá crescimento positivo, e em particular* (1.19) *será válido para todo $c > 0$.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Se M tiver crescimento positivo, então existirão constantes $\alpha > 0$, $c_0 \in (0, 1]$ e $s_0 > 0$ tais que, $\forall\ R \geq s \geq s_0$,

$$\frac{M(R)}{M(s)} \geq c_0 \left(\frac{R}{s}\right)^{\alpha}. \tag{1.20}$$

Sejam $t \geq M(s_0)$ e $\lambda \geq 1$. Fazendo $R = M^{-1}(\lambda t)$ e $s = M^{-1}(t)$ na equação (1.20), temos pela Observação 1.41 (item 1), que

$$\frac{M^{-1}(\lambda t)}{M^{-1}(t)} \leq c_0^{-1/\alpha}\lambda^{1/\alpha}.$$

Como M^{-1} é não-decrescente, temos que $M^{-1}(t) \leq M^{-1}(\lambda t)$, que combinado ao resultado anterior, resulta em (1.19).

($\Leftarrow$) Suponha que (1.19) vale para alguma constante $c \neq 1$ positiva. Analisemos duas situações:

1º Caso: $c > 1$. Existirão $\lambda > 1$ e $t_0 \geq M(a)$ tais que $\forall t \geq t_0$ $M^{-1}(ct) \leq \lambda M^{-1}(t)$. Seja $s = M^{-1}(t)$; então, $\lambda s \geq M^{-1}(ct)$, donde se segue que $M(\lambda s) \geq cM(s)$. Assim,

$$\liminf_{s\to\infty} \frac{M(\lambda s)}{M(s)} \geq c > 1,$$

e portanto, pelo Lema 1.39, M terá crescimento positivo.

2º Caso: $c \in (0,1)$. Existirão $\lambda > 1$ e $t_0 \geq M(a)$ tais que $\forall\ t \geq t_0,\ M^{-1}(t) \leq \lambda M^{-1}(ct)$. Seja, $\forall\ t \geq t_0,\ s = M^{-1}(ct)$; então $\lambda s \geq M^{-1}(t)$ donde se seguirá que $M(\lambda s) \geq \frac{M(s)}{c}$. Assim,

$$\liminf_{s\to\infty} \frac{M(\lambda s)}{M(s)} \geq \frac{1}{c} > 1.$$

Novamente pelo Lema 1.39, M terá crescimento positivo. ■

Capítulo 2

Taxas de decaimento de C_0-Semigrupos em espaços de Hilbert (Parte I)

Neste capítulo, compilamos os principais resultados que precederam o trabalho do Rozendaal, Seifert e Stahn ([36]), o enfoque principal da nossa dissertação. Dividimos o nosso estudo em duas partes, sendo a Parte I reservada à teoria em que não fazemos o uso do cálculo funcional, e enquanto a parte II reservada aos resultados envolvendo cálculo funcional.

2.1 PARTE I

Como já vimos, a solução $z(t) = T(t)A^{-1}x$ é uma solução clássica para o PAC. Como também discutimos na Introdução,estamos interessados no comportamento assintótico de tais soluções; o Teorema 2.1 nos fornece condições necessárias para que ocorra o decaimento. A Proposição 2.4, nos diz em contrapartida que estas condições são suficientes.

Teorema 2.1 (Teorema 3.1 em [9])**.** *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo limitado definido em um espaço de Banach X, com gerador A. Suponha que $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$. Então,*

$$\lim_{t\to\infty} \|T(t)A^{-1}\| = 0. \tag{2.1}$$

Demonstração: Sejam $R > 0$, γ_- e γ_+ os semicírculos esquerdo e direito, respectivamente, do círculo $|z| = R$, e $\gamma' \subset \{\Re z < 0; z \in \rho(A)\}$ uma curva C^1 por partes que liga iR a $-iR$. Considere, $\forall t \geq 0$, a função $g_t(z) = \int_0^t e^{-sz}T(s)xds$.

Afirmação 2.2. $g_t(z)$ é analítica em $\mathbb{C}$.

Demonstração: Pelo Teorema $A.21$, basta mostrarmos que para todo $z \in \mathbb{C}$, a aplicação $z \mapsto \int_0^t e^{-zs}T(s)xds$, $\forall x \in X$, é analítica. Com efeito, como a aplicação $s \mapsto e^{-zs}T(s)x$ é contínua, e portanto uniformemente contínua no compacto $[0,t]$, segue-se que pelo Corolário $A.6$ o limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^t [e^{-z(s+h)}T(s+h)x - e^{-z(s)}T(s)x]ds = \int_0^t \lim_{h\to 0}\frac{[e^{-z(s+h)}T(s+h)x - e^{-z(s)}T(s)x]}{h}ds,$$

existe, e portanto, $z \mapsto \int_0^t e^{-zs}T(s)xds$ é analítica. ∎

Note que, pelo Lema 1.25, $\forall z \in \rho(A)$,

$$e^{tz} g_t(z) = \int_0^t e^{-(s-t)z} T(s)x ds = (zI - A)^{-1}(e^{tz} - T(t))x. \tag{2.2}$$

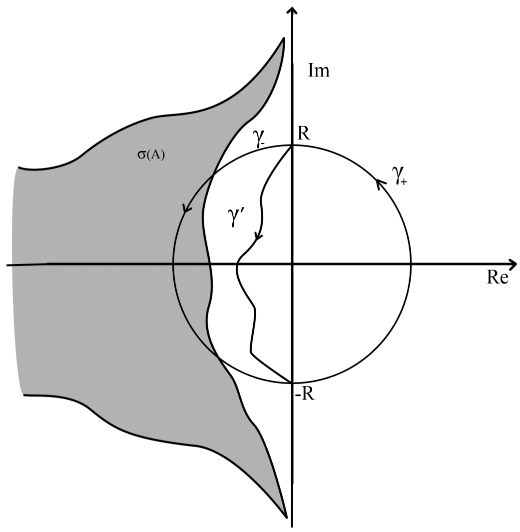

Figura 2.1: Representação de $\gamma_\pm$ e γ'.

Considere a função $f(z) = (z - A)^{-1}T(t)x$, que é analítica em $\rho(A)$, segue-se do Teorema de Cauchy, aplicado a $f(z)$, que

$$\begin{aligned}
T(t)A^{-1}x &= -f(0) \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_+ \cup \gamma'} (z - A)^{-1}T(t)x \frac{dz}{z} \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_+ \cup \gamma'} (z - A)^{-1}T(t)x \frac{dz}{z} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_+ \cup \gamma'} \frac{z^2}{R^2}(z - A)^{-1}T(t)x \frac{dz}{z}}_{0} \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_+ \cup \gamma'} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)(z - A)^{-1}T(t)x \frac{dz}{z};
\end{aligned} \tag{2.3}$$

como a função

$$\frac{z^2}{R^2}(z - A)^{-1}T(t)x\frac{1}{z} = \frac{z}{R^2}(z - A)^{-1}T(t)x$$

é analítica em $\mathbb{C}$, pelo Teorema de Cauchy,

$$\int_{\gamma_+ \cup \gamma'} \frac{z^2}{R^2}(z - A)^{-1}T(t)x \frac{dz}{z} = 0.$$

Note que por (2.2), obtemos $\forall\ t \geq 0$, $\forall\ z \in \rho(A)$,

$$(z - A)^{-1}T(t)x = (z - A)^{-1}e^{-zt}x - e^{zt}g_t(z). \tag{2.4}$$

Afirmação 2.3.

$$\int_{\gamma'}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)e^{zt}g_t(z)dz=\int_{\gamma_-}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)e^{zt}g_t(z)dz.$$

Demonstração: Como ilustrado pela Figura 2.1, temos que γ_- e γ'_+ (γ'_+ denota a curva γ' percorrida no sentido horário), formam um caminho fechado. como pela Afirmação 2.2, $\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)e^{zt}g_t(z)$ é analítica em $\mathbb{C}$, segue-se pelo Teorema de Cauchy que

$$\int_{\gamma'\cup\gamma_-}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)e^{zt}g_t(z)dz=0\Leftrightarrow\int_{\gamma'_+}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)e^{zt}g_t(z)=-\int_{\gamma_-}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)e^{zt}g_t(z)dz,$$

donde se segue a nossa afirmação. ∎

Combinando (2.3) e (2.4) à Afirmação 2.3, obtemos

$$\begin{aligned}
T(t)A^{-1}x &= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_+\cup\gamma'}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)(z-A)^{-1}T(t)x\frac{dz}{z}\\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_+}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)(z-A)^{-1}T(t)x\frac{dz}{z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)(z-A)^{-1}T(t)x\frac{dz}{z}\\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_+}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)(z-A)^{-1}T(t)x\frac{dz}{z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)(z-A)^{-1}xe^{zt}\frac{dz}{z}\\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_+}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)e^{zt}g_t(z)\frac{dz}{z}\\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_+}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)(z-A)^{-1}T(t)x\frac{dz}{z}\\
&- \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)(z-A)^{-1}xe^{zt}\frac{dz}{z}\\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_-}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)e^{zt}g_t(z)\frac{dz}{z}.
\end{aligned}$$

Agora, quando $t\to\infty$, a integral sobre γ' tende a zero, pelo Teorema $A.8$ (recorde que $\Re z<0$ em γ').

Antes de prosseguirmos, note que se $z=Re^{i\theta}$, temos que

$$\begin{aligned}
\left|1+\frac{z^2}{R^2}\right|^2 &= \left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\left(1+\frac{\overline{z}^2}{R^2}\right)\\
&= 1+\frac{z^2}{R^2}+\frac{\overline{z}^2}{R^2}+\frac{|z|^4}{R^4}\\
&= 1+\frac{2(\Re(z)^2-\Im(z)^2)}{R^2}+\frac{|z|^4}{R^4}\\
&= 2+\frac{2R^2(\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta)}{R^2}\\
&= 2+2\cos\ 2\theta\\
&= 4\cos^2\theta.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left|1+\frac{z^2}{R^2}\right| = \frac{2|\Re z|}{R}. \tag{2.5}$$

Assim, para valores $z \in \gamma_+$, usando o Teorema 1.22 (item 4), temos que

$$\|(z-A)^{-1}T(t)x\| = \left\|\int_0^\infty e^{-sz}T(s)T(t)xds\right\| = \left\|\int_0^\infty e^{-sz}T(s+t)xds\right\| \leq \frac{K}{\Re z}\|x\|.$$

Logo,

$$\left\|\frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma_+}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)(z-A)^{-1}T(t)x\frac{dz}{z}\right\| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_+}\frac{2\Re z}{R}\frac{K}{\Re z}\frac{|dz|}{R}\|x\| = \frac{K}{R}\|x\|. \tag{2.6}$$

Para $z \in \gamma_-$, temos ainda

$$\|e^{tz}g_t(z)\| = \left\|\int_0^t e^{(t-s)z}T(s)xds\right\| \leq \frac{K}{|\Re z|}\|x\|.$$

Logo, de modo análogo ao que fizemos acima, obtemos

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_-}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)g_t(z)e^{tz}\frac{dz}{z}\right\| \leq \frac{K}{R}\|x\|. \tag{2.7}$$

Portanto, a primeira e terceira integrais são limitadas em norma por K/R, de modo que

$$\limsup_{t\to\infty}\|T(t)A^{-1}\| \leq \frac{2K}{R}.$$

Assim, como R é arbitrário, fazendo $R \to \infty$, temos que $\lim\limits_{t\to\infty}\|T(t)A^{-1}\| = 0$. ■

Proposição 2.4 (Proposição 1.3 em [7]). *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo limitado definido em um espaço de Banach, com gerador infinitesimal A, tal que*

$$\lim_{t\to\infty} m(t) = 0, \tag{2.8}$$

onde $\forall t \geq 0$, $m(t) = \sup_{s\geq t}\|T(s)(I-A)^{-1}\|$.

Então, $i\mathbb{R}\cap\sigma(A) = \emptyset$ e existem constantes ξ_0, $C > 0$ (que dependem apenas de m e K) tais que, $\forall\ \xi \geq \xi_0$,

$$M(\xi) \leq 1 + Cm^{-1}\left(\frac{1}{2(\xi+1)}\right). \tag{2.9}$$

onde $M(\xi) = \sup_{|s|\leq\xi}\|R(is,A)\|$ e m^{-1} denota a inversa à direita da função m.

Demonstração: Seja, $\forall\ \xi > 0$,

$$G(\xi) = \begin{cases} m^{-1}\left(\frac{1}{2(\xi+1)}\right), & \text{se } \frac{1}{2(\xi+1)} \leq m(0), \\ 0, & \text{se } \frac{1}{2(\xi+1)} > m(0). \end{cases} \tag{2.10}$$

Vamos mostrar que $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$ e que, $\forall\ \tau \in \mathbb{R}$,

$$\|(i\tau - A)^{-1}\| \leq 1 + 2KG(|\tau|).$$

Afirmação 2.5. $\sigma_r(A) = \sigma_p(A^a)$.

Demonstração: Note que se $z \in \sigma_r(A)$, então $Im(z - A)$ não será densa, isto é, existirá $0 \neq x^* \in X^*$ tal que $\forall\ y \in Im(z - A)$, $x^*(y) = 0$. Logo, $\forall\ \eta \in \mathcal{D}(A)$, $0 = x^*(z\eta - A\eta) = zx^*(\eta) - x^*(A\eta) = zx^*(\eta) - Ax^*(\eta)$, ou seja, z será um autovalor de A^a.

Agora, suponha que z seja autovalor de A^a, isto é, que exista um $0 \neq x^* \in X^*$ tal que, $\forall \eta \in \mathcal{D}(A)$, $0 = zx^*(\eta) - A^a x^*(\eta) = x^*(z\eta - A\eta)$; logo, $Im(z - A)$, não é densa. Portanto, $z \in \sigma_r(A)$. ∎

Afirmação 2.6. $\sigma_r(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$.

Demonstração: Suponha que exista $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $i\tau \in \sigma_r(A)$. Então, pela Afirmação 2.5, existirá $\phi \in \mathcal{D}(A^a)$ tal que $A^a\phi = i\tau\phi$. Seja $u_0 \in X$ tal que $\phi(u_0) \neq 0$. Se, $\forall\ t \geq 0$, $u(t) = T(t)u_0$, então

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[e^{-it\tau}\phi(u(t))] &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{-i(t+h)\tau}\phi(u(t+h)) - e^{-it\tau}\phi(u(t))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{[e^{-i(t+h)\tau} - e^{-it\tau}]\phi(u(t+h))}{h} + \frac{e^{-it\tau}[\phi(u(h+t)) - \phi(u(t))]}{h} \right) \\
&= -i\tau e^{-it\tau}\phi(u(t)) + e^{-it\tau}\phi(Au(t)) \\
&= -i\tau e^{-it\tau}\phi(u(t)) + e^{-it\tau}(A^a\phi)(u(t)) \\
&= -i\tau e^{-it\tau}\phi(u(t)) + i\tau e^{-it\tau}\phi(u(t)) = 0.
\end{aligned}$$

Logo, existe $c \neq 0$ (já que ϕ não é identicamente nulo) tal que, $\forall\ t \geq 0$, $e^{it\tau}\phi(u(t)) = c$. Isso, no entanto, contraria o fato de $\lim_{t\to\infty} T(t)u_0 = 0$, pois isto implicaria em $c = 0$. Portanto, $\sigma_r(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$. ∎

Como $\sigma(A) = \sigma_r(A) \cup \sigma_a(A)$ (vide Proposição 1.13), pela Afirmação 2.5, basta demonstrarmos que $\sigma_a(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$.

Afirmação 2.7. $\sigma_a(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$.

Demonstração: Dados $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ e $\tau \in \mathbb{R}$, defina $f_0 = (i\tau - A)u_0$. Seja, $\forall\ t \geq 0$,

$$v(t) = e^{it\tau}u_0.$$

Então,

$$\partial_t v - Av = i\tau e^{it\tau}u_0 - e^{it\tau}Au_0 = e^{it\tau}(i\tau - A)u_0 = e^{it\tau}f_0, \quad v(0) = u_0.$$

Logo (vide o Teorema 1.31),

$$v(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)e^{is\tau}f_0 ds.$$

Usando a limitação do semigrupo e a definição de m, obtemos

$$\begin{aligned}\|u_0\| = \|v(t)\| &\leq \|T(t)(I-A)^{-1}(I-A)u_0\| + \left\|\int_0^t T(t-s)e^{is\tau}f_0 ds\right\| \\ &\leq \|T(t)(I-A)^{-1}\|\|(I-A)u_0\| + tK\|f_0\| \\ &\leq m(t)(\|u_0\| + \|Au_0\|) + tK\|f_0\| \\ &\leq m(t)[(|\tau|+1)\|u_0\| + \|f_0\|] + tK\|f_0\|.\end{aligned}$$

Faça $t = G(|\tau|) \geq 0$. Para $|\tau|$ suficientemente grande, temos de (2.10) que

$$m(t) \leq \frac{1}{2(|\tau|+1)} \Rightarrow m(t)(|\tau|+1) \leq \frac{1}{2}.$$

Substituindo tal estimativa na desigualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned}\|u_0\| &\leq \frac{\|u_0\|}{2} + m(t)\|f_0\| + tK\|f_0\| \\ &\leq \frac{\|u_0\|}{2} + \left(\frac{1}{2(|\tau|+1)}\right)\|f_0\| + KG(|\tau|)\|f_0\| \\ &\leq \frac{\|u_0\|}{2} + \left(\frac{1}{2} + KG(|\tau|)\right)\|f_0\|.\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\|u_0\| \leq \left(\frac{1}{2} + KG(|\tau|)\right)\|f_0\|. \tag{2.11}$$

Por fim, seja $(x_n)_n \subset \mathcal{D}(A)$ tal que $\|x_n\| = 1$. Segue-se de (2.11) que, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2} = \frac{\|x_n\|}{2} \leq \left(\frac{1}{2} + KG(|\tau|)\right)\|(i\tau - A)x_n\|;$$

assim $\|(i\tau - A)x_n\| \not\to 0$, o que encerra a demonstração. ■

Combinando as Afirmações 2.5 e 2.6, concluímos que $i\mathbb{R} \cap \sigma(A) = \emptyset$. Resta-nos demonstrar a outra afirmação. Para tanto, note por (2.11), que $\forall u_0 \in \mathcal{D}(A)$ e para $|\tau|$ suficientemente grande,

$$\frac{\|(i\tau - A)^{-1}u_0\|}{2} \leq \left(\frac{1}{2} + KG(|\tau|)\right)\|(i\tau - A)(i\tau - A)^{-1}u_0\| = \left(\frac{1}{2} + KG(|\tau|)\right)\|u_0\|;$$

logo,

$$\|(i\tau - A)^{-1}\| \leq 1 + 2KG(|\tau|).$$

Assim, segue-se que

$$M(|\tau|) \leq 1 + 2KG(|\tau|) = 1 + 2Km^{-1}\left(\frac{1}{2(|\tau|+1)}\right).$$

■

Observação 2.8. Seja $a \geq 0$ e $m : [a, \infty) \to (0, \infty)$ uma não-crescente e contínua, veja que $m^{-1} : [m(a), \infty) \to [a, \infty)$, a inversa à direita de m será dada por

$$m^{-1}(s) = \inf\{r \geq a \mid m(r) \geq s\}.$$

Vejamos que

1. $m(m^{-1}(s)) = s$.
   Segue-se da definição de m^{-1} a existência de uma sequência $r_n \to m^{-1}(s)$, com $m(r_n) \leq s$; logo, $m(m^{-1}(s)) \geq s$, onde usamos a continuidade de m. Por outro lado, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $m(m^{-1}(s) - \frac{1}{n}) < s$, $\quad \forall n \in \mathbb{N}$, donde se segue que $M(M^{-1}(s)) \leq s$. Logo, $M(M^{-1}(s)) = s$.

2. $\forall\ s \geq a$, $m^{-1}(m(s)) \geq s$.
   Como, $m(s) \geq m(s)$, segue-se da definição de m^{-1} que $m^{-1}(m(s)) \leq s$.

Corolário 2.9. *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo limitado definido em um espaço de Banach com gerador A, tal que $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$. Então, existirá um $c > 0$ tal que para todo t suficientemente grande,*

$$\frac{1}{M^{-1}(ct)} \leq \|T(t)A^{-1}\|.$$

Demonstração: Pela Observação 1.41, basta mostrarmos que existe um $c > 0$ tal que, para todo t suficientemente grande, $M(1/\|T(t)R(1,A)\|) \leq ct$, já que $\|T(t)R(1,A)\| = \|T(t)A^{-1}AR(1,A)\| \leq \|T(t)A^{-1}\|\|AR(1,A)\|$, com $AR(1,A)$ um operador limitado.

Como $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$, segue-se do comentário anterior e do Teorema 2.1 que $\lim_{t\to\infty} m(t) = 0$. Assim pela Proposição 2.4, temos que para todo t suficientemente grande,

$$\begin{aligned}
M(1/\|T(t)R(1,A)\|) &\leq 1 + Cm^{-1}\left(\frac{1}{2(\frac{1}{\|T(t)R(1,A)\|} + 1)}\right) \\
&\leq 1 + Cm^{-1}\left(\frac{1}{\|T(t)R(1,A)\|}\right) \\
&\leq 1 + Cm^{-1}\left(\frac{1}{m(t)}\right) \\
&\leq 1 + Cm^{-1}\left(m(t)\right) \leq 1 + Ct,
\end{aligned}$$

em que usamos o fato que m^{-1} é monótona não-crescente e que para t grande temos que $\dfrac{1}{m(t)} > m(t)$. Logo, para t suficientemente grande, temos que $M(1/\|T(t)R(1,A)\|) \leq ct$. ■

Teorema 2.10 (Teorema 5.1 em [7]). **(Batty-Duyckaerts, 2008)** *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo limitado definido em um espaço de Banach, com gerador A, tal que $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$. Sejam, $\forall\ t \geq 0$*

$$M(t) = \sup_{|s|\leq t} \|R(is,A)\| \tag{2.12}$$

e

$$M_{\log}(t) := M(t)(\log(1 + M(t)) + \log(1+t)). \tag{2.13}$$

Então, existem constantes B e C tais que, $\forall\ t \geq B$,

$$\|T(t)A^{-1}\| \leq \frac{C}{M_{\log}^{-1}(t/C)}. \tag{2.14}$$

Demonstração: Usaremos uma técnica análoga a que usamos na demonstração do Teorema 2.1.

Sejam $t \geq 0$, $R > 0$ e γ, consistindo do semicírculo direito do círculo $|z| = R$ e da curva γ' em $\{z \in \rho(A) \mid \Re z < 0\}$, C^1 por partes, ligando iR a $-iR$. Seja $f : \rho(A) \to X$, dada por $f(z) = (z-A)^{-1}T(t)x$.

Como f é analítica, segue-se do Teorema de Cauchy que

$$\begin{aligned} T(t)A^{-1}x &= f(0) \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (z-A)^{-1}T(t)x\frac{dz}{z} \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (z-A)^{-1}T(t)x\frac{dz}{z} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z^2}{R^2}(z-A)^{-1}T(t)x\frac{dz}{z}}_{0} \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)(z-A)^{-1}T(t)x\frac{dz}{z}. \end{aligned}$$

Afirmação 2.11.

$$\|T(t)A^{-1}x\| \leq \frac{2K}{R}\|x\| + \frac{1}{2\pi}\left\|\int_{\gamma'}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)(z-A)^{-1}e^{tz}\frac{dz}{z}\right\|\|x\|. \tag{2.15}$$

Demonstração: Seja $z = Re^{i\theta}$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Pela equação (2.6) (vide a demonstração do Teorema 2.1), temos que

$$\left\|\int_{\substack{|z|=R \\ \Re z>0}}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)(z-A)^{-1}T(t)x\frac{dz}{z}\right\| \leq \frac{2\pi K}{R}\|x\|. \tag{2.16}$$

Agora, definamos $\forall\ t \geq 0$ a função

$$h_t(z) = \int_0^t e^{(t-s)z}T(s)xds.$$

Observe que $h_t(z) = e^{zt}g_t(z)$, com g_t a função definida na demonstração do Teorema 2.1. Assim, por (2.2), $\forall\ z \in \rho(A)$, temos que

$$h_t(z) = \int_0^t e^{(t-s)z}xT(s)ds = e^{tz}(z-A)^{-1}x - (z-A)^{-1}T(t)x. \tag{2.17}$$

Note ainda que $h_t(z)$ é analítica, uma vez que g_t é analítica, pela Afirmação 2.2 presente na demonstração do Teorema 2.1.

Pela Afirmação 2.3 (vide a demonstração do Teorema 2.1), obtemos

$$\left\|\int_{\gamma'}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)h_t(z)\frac{dz}{z}\right\| = \left\|\int_{\substack{|z|=R \\ \Re z>0}}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)h_t(z)\frac{dz}{z}\right\|.$$

Daí, por (2.7), obtemos

$$\left\| \int_{\substack{|z|=R \\ \Re z>0}} \left(1+\frac{z^2}{R^2}\right) h_t(z)\frac{dz}{z} \right\| \leq \frac{2\pi K}{R}\|x\|. \tag{2.18}$$

Assim, combinando (2.16), (2.17) e (2.18), obtemos

$$\begin{aligned}
\|T(t)A^{-1}x\| &= \left\| -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)(z-A)^{-1}T(t)x\frac{dz}{z}\right\| \\
&= \left\| -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_+\cup\gamma'} \left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)(z-A)^{-1}T(t)x\frac{dz}{z}\right\| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\left\| \int_{\gamma_+} \left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)(z-A)^{-1}T(t)x\frac{dz}{z}\right\| + \frac{1}{2\pi}\left\| \int_{\gamma'} \left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)(z-A)^{-1}T(t)x\frac{dz}{z}\right\| \\
&\leq \frac{K}{R}\|x\| + \frac{1}{2\pi}\left\| \int_{\gamma'} \left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)h_t\frac{dz}{z}\right\| + \frac{1}{2\pi}\left\| \int_{\gamma'} \left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)(z-A)^{-1}x\frac{e^{tz}}{z}dz\right\| \\
&\leq \frac{2K}{R}\|x\| + \frac{1}{2\pi}\left\| \int_{\gamma'} \left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)(z-A)^{-1}x\frac{e^{tz}}{z}dz\right\|.
\end{aligned}$$

em que $\gamma_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R,\ \Re z > 0\}$, percorrido no sentido anti-horário. ∎

Note que $\lambda = \delta + i\tau$, com $\delta < 0$ e $-R \leq \tau \leq R$, temos que a série

$$(\lambda - A)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(i\tau - \lambda)^n (i\tau - A)^{-n-1}$$

converge se $|\delta|\ \|R(is, A)\| < 1$, logo $|\delta|\ M(|\tau|) < 1$, em particular caso

$$|\delta| \leq \frac{1}{2M(|\tau|)}.$$

Assim, motivados pelo comentário acima, definamos os caminhos

$$\gamma_0(\tau) = -\frac{1}{2M(|\tau|)} + i\tau, \quad -R \leq \tau \leq R$$

e

$$\gamma_\pm(s) = s \pm iR, \quad -(1/2M(R)) \leq s < 0.$$

Como o nosso objetivo é estimar, em norma, o valor da integral sobre sobre γ', pela definição dos caminhos acima, podemos assumir $\gamma' = \gamma_0 \cup \gamma_\pm$. Então, nosso objetivo agora é estimar em norma o valor de

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma'} \left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)(z-A)^{-1}xe^{tz}\frac{dz}{z} &= \int_{\gamma_0} \left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)(z-A)^{-1}xe^{tz}\frac{dz}{z} \\
&+ \int_{\gamma_\pm} \left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)(z-A)^{-1}xe^{tz}\frac{dz}{z}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Observe que γ_0' não é necessariamente suave, mas podemos aproximá-la por caminhos suaves partes de modo que (2.15) ainda continue válido.

Com o objetivo de estimarmos as parcelas de (2.19), analisemos dois casos

1ª Caso: $z \in \gamma_\pm$.
Como $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$, seja $z \in \gamma_+$:

$$\begin{aligned}
\|(\gamma_+(s) - A)^{-1}\| &= \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (iR - \gamma_+(s))^n ((iR - A)^{-1})^{n+1} \right\| \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} |s|^n \|(iR - A)^{-1}\|^{n+1} \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n M(R)^n} M(R)^{n+1} \\
&= M(R) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\
&= 2M(R).
\end{aligned}$$

De modo análogo mostramos que $\|(\gamma_-(s) - A)^{-1}\| \leq 2M(R)$.

Note ainda que

$$\begin{aligned}
\left| 1 + \frac{z^2}{R^2} \right|^2 &= 1 + \frac{2(\Re(z)^2 - \Im(z)^2)}{R^2} + \frac{|z|^4}{R^4} \\
&= 1 + \frac{2s^2 - 2R^2}{R^2} + \frac{(s^2 + R^2)^2}{R^4} \\
&= \frac{s^4}{R^4} + 4\frac{s^2}{R^2}
\end{aligned}$$

Logo, para $R > 1$

$$\left| 1 + \frac{z^2}{R^2} \right| \leq \frac{s^2}{R^2} + 2\frac{|s|}{R} \leq \left(\frac{1}{M(R)^2} + \frac{2}{M(R)} \right) \frac{1}{R} \leq \left(\frac{1}{M(0)^2} + \frac{2}{M(0)} \right) \frac{1}{R} := \frac{C_1}{R}.$$

E então, podemos estimar a primeira integral por

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\gamma_\pm} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right) (z - A)^{-1} x \frac{e^{tz}}{z} dz \right\| &\leq \int_0^{1/2M(R)} \left| 1 + \frac{(s \pm R)^2}{R^2} \right| \|(s \pm R - A)^{-1}\| \frac{e^{-ts}}{R} ds \|x\| \\
&\leq \int_0^{1/2M(R)} \frac{C_1}{R} M(R) \frac{e^{-ts}}{R} ds \|x\| \\
&= \frac{C_1 M(R)}{tR^2} \left[-e^{-t/2M(R)} + 1 \right] \|x\| \\
&< \frac{C_1 M(R)}{tR^2} \|x\|.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left\| \int_{\gamma_\pm} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right) (z - A)^{-1} x \frac{e^{tz}}{z} dz \right\| < \frac{C_1 M(R)}{tR^2} \|x\|. \tag{2.20}$$

2º Caso $z \in \gamma_0$

Novamente, como $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$, temos que $\tau \in [-R, R]$

$$\begin{aligned}
\|(\gamma_0(\tau) + A)^{-1}\| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2M(|\tau|)}\right)^n \|(i\tau + A)^{-1}\|^{n+1} \\
&\leq M(|\tau|) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\
&= 2M(|\tau|), \quad \text{para cada} \quad \tau.
\end{aligned}$$

Note que $\forall \in \gamma_0$,

$$\begin{aligned}
\left|1 + \frac{z^2}{R^2}\right|^2 &= 1 + \frac{2(\Re(z)^2 - \Im(z)^2)}{R^2} + \frac{|z|^4}{R^4} \\
&= 1 + \frac{\frac{2}{4M(|\tau|)^2} - 2\tau^2}{R^2} + \frac{\left(\frac{1}{4M(|\tau|)^2} + \tau^2\right)^2}{R^4} \\
&= 1 + \frac{\frac{2}{4M(|\tau|)^2}}{R^2} + \frac{\left(\frac{1}{4M(|\tau|)^2} + \tau^2\right)^2}{R^4} \\
&\leq 1 + \frac{\frac{2}{4M(|\tau|)^2}}{R^2} + \frac{\frac{1}{16M(|\tau|)^4} + \frac{\tau^2}{2M(|\tau|)^2} + \tau^4}{R^4} \\
&\leq 1 + \frac{\frac{2}{4M(0)^2}}{R^2} + \frac{\frac{1}{16M(0)^4} + \frac{R^2}{2M(0)^2} + R^4}{R^4} \\
&\leq 2 + \frac{1}{M(0)^2} + \frac{1}{16M(0)^4} = C_2.
\end{aligned}$$

Podemos estimar o comprimento de γ_0 por

$$\int_{-R}^{R} |\gamma_0'(s)| ds \leq 2 \int_0^R \frac{1}{2} \frac{M'(s)}{M(s)^2} ds + 2R = \frac{1}{M(0)} - \frac{1}{M(R)} + 2R.$$

Daí, combinando as estimativas anteriores com o fato de $|z| \geq (2M(0))^{-1}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left\|\int_{\gamma_0} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)(z + A)^{-1} x \frac{e^{tz}}{z} dz\right\| &\leq 2C_2 e^{-t/2M(R)} M(R) M(0) \int_{\gamma_0} |dz| \|x\| \\
&\leq C_2 e^{-t/2M(R)} M(R) M(0) \left[\frac{1}{M(0)} - \frac{1}{M(R)} + 2R\right] \|x\| \\
&\leq C_2 M(R) e^{-2t/M(R)} + C_2 M(R) M(0) R e^{-2t/M(R)} \|x\| \\
&\leq C_3 M(R)(1 + R) e^{-2t/M(R)} \|x\|, \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

onde $C_3 = \max\{C_2, C_2 M(0)\}$.

Agora, seja $C_4 = \max\{C_1, C_2, C_3, K\}$; combinado (2.15), (2.19), (2.20) e (2.21), obtemos

$$\begin{aligned}
\|T(t) A^{-1} x\| &\leq C_4 \left(\frac{1}{R} + \frac{M(R)}{R^2 t} + M(R)(1 + R) e^{-2t/M(R)}\right) \|x\| \\
&\leq C_4 \left(\frac{1}{R} + \frac{M(R)}{R^2 t} + \frac{(1 + M(R))^2 (1 + R)^2 e^{-2t/M(R)}}{R}\right) \|x\|.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|T(t)A^{-1}\| \leq C_4 \left(\frac{1}{R} + \frac{M(R)}{R^2 t} + \frac{(1+M(R))^2(1+R)^2 e^{-2t/M(R)}}{R} \right).$$

Seja $t > 4M_{\log}(1)$, e faça $R = M_{\log}^{-1}(t/4) > 1$. Logo, com tais escolhas e usando $\log((1+M(R)(1+R)) > \log(1+M(0))$,

$$\begin{aligned} \frac{M(R)}{R^2 t} &= \frac{M(R)}{4R^2 M(R)(\log((1+M(R))(1+R)))} \\ &= \frac{1}{4R^2(\log((1+M(R))(1+R)))} \leq \frac{C_5}{R}, \end{aligned}$$

e $(1+M(R))^2(1+R)^2 e^{-2t/M(R)} = 1$.

Portanto, fazendo $C_6 = \max\{1, C_5\}$ e $C = 3C_4C_6$, temos que

$$\|T(t)A^{-1}\| \leq \frac{C}{R} = \frac{C}{M_{\log}(t/4)}.$$

■

Observação 2.12. Para o caso em que existe $\alpha > 0$, tal que $M(s) \leq C(1+s^\alpha)$, temos que o resultado do teorema anterior, pode ser visto como, (vide [7], Exemplo 7),

$$\|T(t)A^{-1}\| \leq \left(\frac{\log t}{t}\right)^{1/\alpha}, \quad t \geq B \tag{2.22}$$

Exemplo 2.13. (Exemplo 4.4.15 em [4]) Sejam $X = \ell^2(\mathbb{N})$, $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência decrescente em $(0,1]$ e $\lambda_n = -\alpha_n + in$. Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo limitado em $\ell^2(\mathbb{N})$ definido por

$$T(t)x = (e^{\lambda_n t} x_n) \quad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}). \tag{2.23}$$

Como no Exemplo 1.19 temos

$$\mathcal{D}(A) = \{x \in \ell^2(\mathbb{N}) \mid (\lambda_n x_n) \in \ell^2(\mathbb{N})\} = \{x \in \ell^2(\mathbb{N}) \mid (n x_n) \in \ell^2(\mathbb{N})\}$$

$$Ax = (\lambda_n x_n).$$

Temos ainda que

$$\sigma(A) = \{\lambda_n\}$$

Afirmação 2.14.

$$\|R(is, A)\| = \sup\{|\lambda_n - is|^{-1} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Demonstração: Fixado s, segue-se da Proposição 1.9 que $\|R(is,A)\| \geq \sup\{|\lambda_n - is|^{-1} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Note que $\forall x \in \ell^2(\mathbb{N})$, $R(is,A)x = ((is-\lambda_n)^{-1}x_n)$; desta forma, $\|R(is,A)\| \leq \sup\{|\lambda_n - is|^{-1} \mid n \in \mathbb{N}\}$, donde segue-se a afirmação. ■

Afirmação 2.15.

$$\|T(t)A^{-1}\| = \sup_n \left|\frac{e^{\lambda_n t}}{\lambda_n}\right|.$$

Demonstração: Basta usarmos o Teorema da Inclusão Espectral (Lema 3.10) e proceder como fizemos na Afirmação 2.14, já que $A^{-1}x = (\lambda_n^{-1}x_n)$. ■

Então $M(k) = \|R(ki, A)\| = \sup_n\{|ki - \lambda_n|^{-1}\} = 1/\alpha_k$. Seja $t_k = 1/\alpha_k$; portanto,

$$\|T(t_k)A^{-1}\| = \sup_n \left|\frac{e^{\lambda_n t_k}}{\lambda_n}\right| \geq \frac{e^{-1}}{|\lambda_k|} \sim \frac{e^{-1}}{M^{-1}(t_k)} \quad k \to \infty.$$

Quando (α_n) decai regularmente e não muito lentamente, podemos ter

$$\|T(t)A^{-1}\| \sim \frac{c}{M^{-1}(Ct)}, \quad t \to \infty. \tag{2.24}$$

Por exemplo, se $\alpha_n = n^{-\gamma}$ com $\gamma > 0$, então

$$\|T(t)A^{-1}\| \sim \frac{c_\gamma}{t^{t/\gamma}} \sim \frac{c_\gamma}{M^{-1}(t)}. \tag{2.25}$$

Por outro lado, (2.24) pode falhar se (α_n) tiver períodos de decaimento longos. Suponha, por exemplo, que (α_n) seja estritamente decrescente e que, $\forall\ n \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_{(k+1)!} \leq \frac{\alpha_{k!+1}}{2}.$$

Dado $c > 0$, seja $t_k = 1/(c\alpha_{(k+1)!})$. Então.

$$M^{-1}(ct_k) = (k+1)!$$

e

$$\|T(t_k)A^{-1}\| = \left|\frac{e^{\lambda_{k!+1} t_k}}{\lambda_{k!+1}}\right| \geq \frac{e^{-2/c}}{|\lambda_{k!+1}|} \sim \frac{ke^{-2/c}}{M^{-1}(ct_k)}, \quad k \to \infty.$$

Portanto, não há limite superior da forma $\|T(t)A^{-1}\| \leq C/M^{-1}(ct)$.

Taxas de decaimento de C_0-semigrupo em espaços de Hilbert

Conjectura 1. (Batty-Duyckaerts, 2008) *Se X for um espaço de Hilbert, então o fator de correção logarítmico de* (2.14) *pode ser desconsiderado. Por outro lado, se X for um espaço de Banach, não se pode descartar o fator logarítmico.*

A conjectura parece ser de fato verdadeira para a situação em o resolvente decai polinomialmente, como mostra a equação (2.25). De fato é verdadeira, sob a hipótese da Observação 2.12. A demonstração é devida a A.Borichev e Y.Tomilov [11].

O resultado a seguir é a versão completa do resultado demonstrado por Borichev e Tomilov.

Teorema 2.16 (Teorema 2.4 em [11]). **(Borichev-Tomilov, 2009)** *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo limitado em um espaço de Hilbert H com gerador A, tal que $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$. Então, dado $\alpha > 0$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1.
$$\|R(is, A)\| = O(|s|^\alpha), \quad s \to \infty; \tag{2.26}$$

2.
$$\|T(t)(-A)^{-\alpha}\| = O(t^{-1}), \quad t \to \infty; \tag{2.27}$$

3.
$$\|T(t)(-A)^{-\alpha}x\| = o(t^{-1}), \quad t \to \infty, \quad x \in H; \tag{2.28}$$

4.
$$\|T(t)A^{-1}\| = O(t^{-1/\alpha}), \quad t \to \infty; \tag{2.29}$$

5.
$$\|T(t)A^{-1}x\| = o(t^{-1/\alpha}), \quad t \to \infty, \quad x \in H; \tag{2.30}$$

Antes de apresentarmos a demonstração do Teorema 2.16, enunciaremos alguns resultados auxiliares.

Proposição 2.17 (Proposição 3.1 em [5]). **(Bátkai, Engel, Prüss, Schnaubelt)** *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo limitado em um espaço de Banach X, com gerador A. Suponha que seja A invertível. Então, as afirmações abaixo serão equivalentes (com $\alpha > 0$ constante):*

1. *Existe uma constante $C > 0$ tal que, $\forall\ t > 0$,*
$$\|T(t)(-A)^{-\alpha}\| \leq \frac{C}{t}, \tag{2.31}$$

2. *Dado $\gamma > 0$, existe uma constante $C' = C'(\gamma)$ tal que, $\forall t > 0$,*
$$\|T(t)(-A)^{-\alpha\gamma}\| \leq \frac{C'}{t^{\gamma}}. \tag{2.32}$$

Demonstração: Vide o Apêndice B. ∎

Lema 2.18 (Lema 2.1 em [11]). *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo definido em um espaço de Hilbert H, com gerador A. Então o semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é limitado se, e somente se,*

$$\mathbb{C}_+ \subset \rho(A),$$

e

$$\sup_{\xi>0} \int_{\mathbb{R}} (\|R(\xi + i\eta, A)x\|^2 + \|R(\xi + i\eta, A^*x\|^2) d\eta < \infty. \tag{2.33}$$

Demonstração: Vide o Apêndice B. ∎

Lema 2.19 (Lema 2.3 em [11]). *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo limitado definido em um espaço de Hilbert com gerador A, tal que $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$. Então, para um $\alpha > 0$ fixo,*

$$\|R(\lambda, A)(-A)^{\alpha}\| \leq C, \quad \Re\lambda > 0, \tag{2.34}$$

se, e somente se,

$$\|R(is, A)\| = O(|s|^{\alpha}), \quad s \to \infty. \tag{2.35}$$

Demonstração: Vide o Apêndice B. ■

Lema 2.20. (Mini lema) *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não-decrescente e f^{-1} sua inversa à direita. Se $f(t) = O(t^{-1/\alpha})$, então $f^{-1}(1/s) = O(s^{\alpha})$.*

Demonstração: De fato, note que se $f(s) \leq Cs^{-1/\alpha}$ para s grande, então $s^{1/\alpha}f(s) \leq C$ para s grande. Assim, $(f^{-1}(t))^{1/\alpha}t \leq C$, onde $s = f^{-1}(t)$ grande. E daí, o resultado se segue. ■

Demonstração do Teorema 2.16

(2) $\Rightarrow$ (1) Fazendo $\gamma = 1/\alpha$ na Proposição 2.17 obtemos, para t suficientemente grande, $\|T(t)(-A)^{-1}\| \leq Ct^{-1/\alpha}$. Como $\|T(t)R(1,A)\| = \|T(t)(-A)^{-1}(-A)R(1,A)\| \leq \|T(t)(-A)^{-1}\| \; \|AR(1,A)\| \leq C_1 t^{-1/\alpha}$. Assim pelo Lema 2.20 e pela Proposição 2.4, obtemos que

$$M(t) \leq 1 + C_1 K t^{\alpha}.$$

Portanto, $\|R(it, A)\| = O(t^{\alpha})$, $t \to \infty$.

Combinando as Proposições 2.4, e o Lema 2.20 o resultado se segue.

(3) $\Rightarrow$ (2) Como, $\forall x \in H$, $\|T(t)(-A)^{-\alpha}x\| = o(t^{-1}),\ t \to \infty,\ x \in H$, então

$$\lim_{t\to\infty} t\|T(t)(-A)^{\alpha}x\| = 0.$$

Assim, para cada $x \in X$, existirá um $C_x > 0$ tal que para todo t,

$$t\|T(t)(-A)^{\alpha}x\| \leq C_x.$$

(temos que a desigualdade é válida para todo t, pois, dado $c_x > 0$ existe t_0 tal que para todo $t > t_0$ temos que $t\|T(t)(-A)^{\alpha}x\| \leq c_x$, agora, como a função $t \mapsto t\|T(t)(-A)^{\alpha}x\|$ é contínua, $\exists M_x$ tal que $\forall t \in [0, t_0]$ temos que $t\|T(t)(-A)^{\alpha}x\| \leq M_x$. Por fim, tome $C_x = \max\{c_x, M_x\}$).

Então, segue-se do Princípio da Limitação Uniforme que a família $\{t\|T(t)((-A)^{\alpha}\|\}_{t\geq 0}$ é limitada. Logo, $\exists\ C > 0$ tal que

$$t\|T(t)(-A)^{\alpha}\| \leq C,$$

donde resultado se segue.

(2) $\Leftrightarrow$ (4) Segue da Proposição 2.17.

(3) $\Leftrightarrow$ (5) Segue da Proposição 2.17.

(1) $\Rightarrow$ (3): Seja $\mathcal{H} = H \oplus H$ a soma direta de duas cópias de H. $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert cujo produto interno é $\langle (x_1, y_1); (x_2, y_2)\rangle_{\mathcal{H}} = \langle x_1, x_2\rangle_H + \langle y_1, y_2\rangle_H$, $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathcal{H}$ (veja a Proposição 23.3 em [31]). Defina em $\mathcal{H}$ o operador matricial

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & (-A)^{-\alpha} \\ 0 & A \end{pmatrix};$$

como os operadores fora da diagonal são limitados, então o domínio de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ é o domínio diagonal $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(A) \oplus \mathcal{D}(A)$.Veja que

$$\lambda - \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \lambda - A & -(-A)^{-\alpha} \\ 0 & \lambda - A \end{pmatrix};$$

daí, concluímos que $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(A)$. Para encontrarmos $R(\lambda, \mathcal{A})$, basta invertermos o operador matricial acima. Assim, obtemos, para $\lambda \in \rho(A)$,

$$R(\lambda, \mathcal{A}) = \begin{pmatrix} R(\lambda, A) & R(\lambda, A)^2(-A)^{-\alpha} \\ 0 & R(\lambda, A). \end{pmatrix}.$$

Afirmação 2.21. A família $\{\mathcal{T}(t)\}_{t\geq 0}$, em que

$$\mathcal{T}(t) = \begin{pmatrix} T(t) & tT(t)(-A)^{-\alpha} \\ 0 & T(t) \end{pmatrix}$$

é um C_0-semigrupo limitado definido em $\mathcal{H}$, com gerador $\mathcal{A}$

Demonstração: Com efeito, $\mathcal{T}(0) = I_{\mathcal{H}}$ e

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(t)\mathcal{T}(s) &= \begin{pmatrix} T(t) & tT(t)(-A)^{-\alpha} \\ 0 & T(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(s) & sT(s)(-A)^{-\alpha} \\ 0 & T(s) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} T(t+s) & (t+s)T(t+s)(-A)^{-\alpha} \\ 0 & T(t+s) \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{T}(t+s). \end{aligned}$$

Seja $x = (x, y) \in \mathcal{H}$. Então, $\mathcal{T}(t)x = (T(t)x + tT(t)(-A)^{-\alpha}y, T(t)y)$, donde se segue que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(t)x - x\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|(T(t)x - x + tT(t)(-A)^{-\alpha}y, T(t)y - y)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= \|T(t)x - x + tT(t)(-A)^{-\alpha}y\|^2 + \|T(t)y - y\|^2. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Fazendo $t \to 0$ em (2.36) e usando o fato que $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo, concluímos que $\{\mathcal{T}(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo. Mostraremos agora que $\mathcal{A}$ é o gerador de $\{\mathcal{T}(t)\}_{t\geq 0}$.

Para todo $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{D}(A)$, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} \frac{\mathcal{T}(t)x - x}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(T(t)x_1 - x_1 + tT(t)(-A)^{-\alpha}x_2, T(t)x_2 - x_2) \\ &= \lim_{t\to 0} \left(\frac{T(t)x_1 - x_1}{t} + T(t)(-A)^{-\alpha}x_2, \frac{T(t)x_2 - x_2}{t} \right) \\ &= (Ax_1 + (-A)^{-\alpha}x_2, Ax_2) \\ &= \mathcal{A}x. \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{A}$ é o gerador do C_0-semigrupo $\{\mathcal{T}(t)\}_{t\geq 0}$. Resta-nos mostrarmos que $\{\mathcal{T}(t)\}_{t\geq 0}$.

Pelo item (1) e pelo Lema 2.19, $\exists\, C_1 > 0$, tal que, $\forall\, \Re\lambda > 0$

$$\|R(\lambda, A)(-A)^{\alpha}\| \leq C_1. \tag{2.37}$$

Assim, para cada $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{H}$ e $\lambda \in \mathbb{C}_+$,

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda, \mathcal{A})x\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|(R(\lambda, A)x_1 + R^2(\lambda, A)(-A)^{-\alpha}x_2, R(\lambda, A)x_2)\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&= \|R(\lambda, A)x_1 + R^2(\lambda, A)(-A)^{-\alpha}x_2\|^2 + \|R(\lambda, A)x_2\|^2 \\
&= \|R(\lambda, A)x_1\|^2 + \langle R(\lambda, A)x_1, R^2(\lambda, A)(-A)^{-\alpha}x_2\rangle + \langle R^2(\lambda, A)(-A)^{-\alpha}x_2, R(\lambda, A)x_1\rangle \\
&+ \|R^2(\lambda, A)(-A)^{-\alpha}x_2\|^2 + \|R(\lambda, A)x_2)\|^2.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a estimativa (2.37), obtemos

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda, \mathcal{A})x\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq \|R(\lambda, A)x_1\|^2 + 2\|R(\lambda, A)x_1\| \; \|R(\lambda, A)(-A)^{-\alpha}R(\lambda, A)x_2\| + \|R(\lambda, A)x_2\|^2 \\
&\leq \|R(\lambda, A)x_1\|^2 + 2C_1\|R(\lambda, A)x_1\| \; \|R(\lambda, A)x_2\| + \|R(\lambda, A)x_2\|^2 \\
&\leq \|R(\lambda, A)x_1\|^2 + C_1(\|R(\lambda, A)x_1\|^2 + \|R(\lambda, A)x_1\|^2) + \|R(\lambda, A)x_2\|^2 \\
&\leq C(\|R(\lambda, A)x_1\|^2 + \|R(\lambda, A)x_2\|^2),
\end{aligned}$$

onde $C = 1 + C_1$.

Analogamente, temos que

$$\|R(\lambda, \mathcal{A}^*)x\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C(\|R(\lambda, A^*)x_1\|^2 + \|R(\lambda, A^*)x_2\|^2).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\sup_{\xi>0} \int_{\mathbb{R}} (\|R(\xi + i\eta, \mathcal{A})x\|^2 + \|R(\xi + i\eta, \mathcal{A}^*x\|^2)d\eta &\leq C \sup_{\xi>0} \int_{\mathbb{R}} (\|R(\xi + i\eta, A)x_1\|^2 + \|R(\xi + i\eta, A^*)x_1\|^2)d\eta \\
&+ C \sup_{\xi>0} \int_{\mathbb{R}} (\|R(\xi + i\eta, A)x_2\|^2 + \|R(\xi + i\eta, A^*)x_2\|^2)d\eta.
\end{aligned}$$

Como $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é limitado, segue-se do Lema 2.18 que cada uma das parcelas à direita é finita, e portanto, $\forall\ x \in \mathcal{H}$,

$$\sup_{\xi>0} \int_{\mathbb{R}} (\|R(\xi + i\eta, \mathcal{A})x\|^2 + \|R(\xi + i\eta, \mathcal{A}^*x\|^2)d\eta < \infty.$$

Novamente pelo Lema 2.18, segue-se que $\{\mathcal{T}(t)\}_{t\geq 0}$ é limitado.

■

Como $\{\mathcal{T}(t)\}_{t\geq 0}$ é limitado, segue-se que

$$\sup_{t\geq 0} \|tT(t)(-A)^{-\alpha}\| < \infty. \tag{2.38}$$

Além disso, como $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$, temos pelo Teorema 2.1 que $\forall\ x \in \mathcal{H}$,

$$\mathcal{T}(t)x \to 0, \quad t \to \infty,$$

já que $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = Im(\mathcal{A}^{-1})$ é denso em $\mathcal{H}$. Para todo $y = (x, x) \in \mathcal{H}$, temos

$$\|\mathcal{T}(t)x\| = \sqrt{\|T(t)x + tT(t)(-A)^{-\alpha}x\|^2 + \|T(t)x\|^2},$$

assim, pelo Teorema 2.1 aplicado ao semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, temos que

$$\|tT(t)(-A)^{-\alpha}x\| = o(1), \quad t \to \infty, \quad x \in H. \tag{2.39}$$

■

A Conjectura nos diz que não podemos eliminar o fator logaritmo caso o espaço considerado não seja Hilbert. O resultado a seguir, cuja demonstração não apresentamos, demonstra que sempre podemos conseguir um espaço de Banach no qual que de fato o decaimento não pode ser melhorado.

Teorema 2.22 (Teorema 4.1 em [11]). **(Borichev-Tomilov)** *Dado $\alpha > 0$, existe um espaço de Banach X_α e um C_0-semigrupo limitado em X_α com gerador A tal que*

1. $\|R(is, A)\| = O(|s|^\alpha), \quad |s| \to \infty.$

   e

2. $\limsup_{t\to\infty} \left(\frac{t}{\log t}\right)^{1/\alpha} \|T(t)A^{-1}\| > 0.$

Demonstração: Veja a demonstração em [11]. ■

2.2 PARTE II

Como já dissemos, nesta seção usaremos cálculo funcional de operadores setores, no Apêndice B fazemos uma breve discussão sobre isso e algumas definições de termos que usaremos durante a demonstração.

Teorema 2.23 (Teorema 5.6 em [6]). **(Batty-Chill-Tomilov, 2016) (Singularidade no Infinito)** *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo em um espaço de Hilbert H, com gerador A. Assuma que $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$, e que*

$$\|R(is, A)\| = O\left(\frac{|s|^\alpha}{\ell(|s|)}\right), \quad |s| \to \infty \tag{2.40}$$

onde $\alpha > 0$ e ℓ é uma função crescente de variação lenta. Então,

$$\|T(t)A^{-1}\| = O((t\ell(t^{1/\alpha}))^{1/\alpha}), \quad t \to \infty. \tag{2.41}$$

Antes de apresentarmos a demonstração do Teorema 2.23, enunciaremos alguns resultados auxiliares.

Lema 2.24 (Teorema 4.7 em [6]). *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo limitado em um espaço de Hilbert, com gerador A, e seja $B : \mathcal{D}(A) \to X$ um operador linear, limitado em $\mathcal{D}(A)$ com a norma do gráfico, e $T(t)Bx = BT(t)x$, para todo $t \geq 0$ e $x \in \mathcal{D}(A)$. Suponha que*

$$\sup\{\|B(\lambda - A)^{-1}\|; \lambda \in \mathbb{C}_+\} < \infty.$$

Então $T(t)B$ possui uma (única) extensão limitada e $\|T(t)B\| = O(t^{-1}) \quad t \to \infty.$

Demonstração: Veja a demonstração em [6]. ■

Lema 2.25 (Lema 4.2 em [6]). *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo limitado definido em um espaço de Banach, seja $B \in \mathcal{B}(X)$ um operador setorial que comuta com $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Sejam $\gamma, \delta > 0$. Então, existem constantes $C,\ c > 0$ tais que $\forall t > 0$,*

$$c\|T(Ct)B^\gamma\| \leq \|T(t)B^\delta\| \leq C\|T(Ct)B^\gamma\|^\delta.$$

Demonstração: Veja a demonstração em [6]. ■

Lema 2.26 (Teorema 5.5 em [6]). *Seja A o gerador de um C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ definido em um espaço de Banach X tal que $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$. Seja $\ell : \mathbb{R}_+ \to (0, \infty)$ uma função de variação lenta, $\alpha > 0$ e $\beta \in (0, 1]$. Suponha que $g : s \mapsto s^{1-\beta}\ell(s)$ seja crescente. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\|R(is, A)\| = O\left(\dfrac{|s|^\alpha}{\ell(|s|)}\right), \quad s \to \infty;$

2. $\sup_{z\in\mathbb{C}_+} \|(z - A)^{-1}W_{\alpha,\beta,\ell}(-A)\| < \infty.$

Demonstração: Veja a demonstração em [6]. ■

Teorema 2.27 (Teorema 4.3 (a) em [6]). *Seja A o gerador de um C_0-semigrupo limitado definido em um espaço de Banach X. Assuma que $T(t)A \neq 0$ para todo $t > 0$. Existe uma constante c tal que se A é invertível, f uma função completa de Bernstein, $\gamma \leq 1$, e $(-A)^\gamma f((-A)^{-1})$ é um operador limitado, então*

$$\|T(t_1)(-A)^\gamma f((-A)^{-1})\| \geq c\frac{\|T(t_1 + t_2)(-A)^{\gamma-1}\|}{\|T(t_2)A^{-1}\|} f(\|T(t_2)(-A)^{-1}\|).$$

Demonstração: Veja a demonstração em [6]. ■

Demonstração do Teorema 2.23

Afirmação 2.28. Podemos assumir $T(t) \neq 0$ para cada $t > 0$.

Demonstração: De fato, suponha que existe $t_0 > 0$ tal que $T(t_0) = 0$. Daí temos que $T\left(\frac{t_0}{n}\right) = nT\left(\frac{t_0}{n}\right) = 0$. Assm, para cada $x \in X$ temos que $0 = T\left(\frac{t_0}{n}\right)x$, então fazendo $n \to \infty$ e usando o Corolário 1.21 temos que $T(0)x = 0,\ \forall\ x \in X$ o que nos leva a uma contradição com condição de $T(0) = I$. ■

Primeiramente, note que se $\|R(is, A)\| = O(|s|^\alpha)$, então pelo Teorema 2.16,

$$\|T(t)A^{-1}\| \leq \frac{C}{t^{1/\alpha}}, \tag{2.42}$$

para todo t suficientemente grande; e portanto para todo $t > 0$ (escolhendo C de maneira adequada).

Seja $W_{\alpha,1,\ell}(-A)$, como apresentado na Definição $B.19$.

Afirmação 2.29. Existe $C > 0$ tal que para todo $t > 0$,

$$\|T(t)W_{\alpha,1,\ell}(-A)\| \leq \frac{C}{t}. \tag{2.43}$$

Demonstração: Segue-se do Lema 2.26 que, dado $\alpha > 0$, $\exists\ C > 0$ tal que $\forall\ \lambda \in \mathbb{C}$,

$$\|(\lambda - A)^{-1} W_{\alpha,1,\ell}(-A)\| \leq C.$$

Note também que :

1. se $\alpha \geq 1$, temos que

$$\begin{aligned} W_{\alpha,1,\ell}(-A)T(t)x &= S_\ell(-A)T(t)x \\ &= (-A)^{1-\alpha} \int_0^\infty (s-A)^{-2} T(t) x ds \\ &= (-A)^{1-\alpha} T(t) \int_0^\infty (s-A)^{-2} x ds \\ &= T(t)(-A)^{1-\alpha} \int_{-\infty}^0 (s-A)^{-2} x ds \\ &= T(t) W_{\alpha,1,\ell}(-A)x; \end{aligned}$$

2. O caso $0 < \alpha < 1$ mostramos de maneira análoga.

Portanto, A e $W_{\alpha,1,\ell}(-A)$ satisfazem as hipóteses do Lema 2.24. Logo, $\exists\ C > 0$ tal que

$$\|T(t) W_{\alpha,1,\ell}(-A)\| \leq \frac{C}{t}.$$

■

Seja agora S_l a *função de Stieltjes* associada a ℓ, e seja f_ℓ a função de Bernstein completa definida por

$$f_\ell(s) = S_\ell(1/s), \quad s > 0.$$

Note que se A for invertível, se $g \sim (0, 0, \nu)$ for uma função de Stieltjes e se f for uma função de Bernstein completa dada por $f(z) = g(1/z)$, então (vide Teorema 3.7 em [6])

$$g(A) = \int_\infty^{0^-} (\lambda - A)^{-1} d\nu(\lambda) = f((-A)^{-1}),$$

de modo que

$$S_\ell(A) = \int_\infty^{0^-} (\lambda - A)^{-1} d\nu(\lambda) = f_\ell((-A)^{-1}).$$

Assim, temos da Definição $B.19$ e da Afirmação 2.29 que, $\forall\ t > 0$,

$$\|T(t) W_{\alpha,1,\ell}(-A)\| = \|T(t) A^{1-\alpha} f_\ell((-A)^{-1})\| \leq \frac{C}{t},$$

donde se segue que o operador $T(t)(-A)^{1-\alpha} f_\ell((-A)^{-1})$ é limitado. Fazendo $\gamma = 1 - \alpha$ no Teorema 2.27, obtemos

$$\|T(t) A^{1-\alpha} f_\ell((-A)^{-1})\| \geq \frac{c\|T(2t)(-A)^{-\alpha}\|}{\|T(t)A^{-1}\|} f_\ell(\|T(t)A^{-1}\|),$$

donde se segue que

$$
\begin{aligned}
f_\ell(\|T(t)A^{-1}\|) &\leq \frac{\|T(t)A^{-1}\|\|T(t)(-A)^{1-\alpha}f((-A)^{-1})\|}{c\|T(2t)(-A)^{-\alpha}\|}\\
&\leq \widetilde{C}\frac{\|T(t)A^{-1}\|}{t\|T(2t)(-A)^{-\alpha}\|}.
\end{aligned}
$$

Defina, $\forall s>0$, $f_{\alpha,\ell}(s)=s^{\alpha-1}f_\ell(s)$. Então, para todo $t>0$,

$$
\begin{aligned}
f_{\alpha,\ell}(\|T(t)A^{-1}\|) &\leq \|T(t)A^{-1}\|^{\alpha-1}\frac{\widetilde{C}}{t}\frac{\|T(t)A^{-1}\|}{\|T(2t)(-A)^{-\alpha}\|}\\
&= \frac{\widetilde{C}}{t}\frac{\|T(t)A^{-1}\|^{\alpha}}{\|T(2t)(-A)^{-\alpha}\|}. \qquad (2.44)
\end{aligned}
$$

Fazendo $g=\ell$ e $\sigma=1$ no Teorema $B.11$, segue-se que $S_\ell(s)\sim\Gamma(1)\Gamma(2-1)s^{-1}\ell(s)=s^{-1}\ell(s),\quad s\to\infty$, de modo que $S_l(1/s)\sim s\ell(1/s),\quad s\to 0^+$, e portanto

$$
\lim_{s\to 0^+}\frac{s^{\alpha-1}f_\ell(s)}{s^\alpha\ell(1/s)}=\lim_{s\to 0^+}\frac{S_\ell(1/s)}{s\ell(1/s)}=1. \qquad (2.45)
$$

Defina, $\forall s>0$, $\kappa(s)=1/\ell(s^{1/\alpha})$; note que a função κ é decrescente, uma vez que l é crescente. Daí, temos de (2.45) que

$$
f_{\alpha,\ell}(s)\sim\frac{s^\alpha}{\kappa(s^{-\alpha})},\quad s\to 0^+.
$$

Agora, pela Proposição $B.10$,

$$
f_{\alpha,\ell}^{-1}(s)\sim\left(\frac{s}{\kappa^\#(1/s)}\right)^{1/\alpha},\quad s\to 0^+. \qquad (2.46)
$$

onde $\kappa^\#(s)$ é chamado de *conjugado de Brujin* da função κ (vide Apêndice B para a definição).

Se o lado direito da equação (2.44) for suficientemente pequeno, obteremos

$$
\begin{aligned}
\|T(t)A^{-1}\| &\leq f_{\alpha,\ell}^{-1}(f_{\alpha,\ell}(\|T(t)A^{-1}\|)\\
&\leq f_{\alpha,\ell}^{-1}\left(\frac{\widetilde{C}}{t}\frac{\|T(t)A^{-1}\|^\alpha}{\|T(2t)(-A)^{-\alpha}\|}\right)\\
&\leq 2\left(\frac{\widetilde{C}\|T(t)A^{-1}\|^\alpha}{tL(t)\|T(2t)(-A)^{-\alpha}\|}\right)^{1/\alpha}=C'\frac{\|T(t)A^{-1}\|}{(tL(t)\|T(2t)(-A)^{-\alpha}\|)^{1/\alpha}}, \qquad (2.47)
\end{aligned}
$$

onde usamos a Observação 1.36 na primeira desigualdade, (2.44) na segunda desigualdade, (2.46) na terceira, e definimos $\forall t>0$

$$
L(t)=\kappa^\#\left(t\frac{\|T(2t)(-A)^{-\alpha}\|}{\|T(t)A^{-1}\|^\alpha}\right).
$$

Agora, defina $\psi(s)=(s\kappa^\#(s))^{1/\alpha}$. Como

$$
\frac{\psi(\lambda s)}{\psi(s)}=\left(\frac{\lambda s\kappa^\#(\lambda s)}{\kappa^\#(s)}\right)^{1/\alpha}=\lambda^{1/\alpha}\left(\frac{\kappa^\#(\lambda s)}{\kappa^\#(s)}\right)^{1/\alpha},
$$

segue-se que ψ é de variação regular com índice positivo, uma vez que $\kappa^{\#}$ é de variação lenta. Isso nos garante que podemos escolher $\kappa^{\#}$ de tal modo que ψ seja estritamente crescente e contínua (veja em [6]). Então, por (2.47), existirá $t_0 > 0$ tal que $\forall\ t > t_0$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\|T(t)A^{-1}\|} &\geq \frac{(tL(t)\|T(2t)(-A)^{-\alpha}\|)^{1/\alpha}}{C'\|T(t)A^{-1}\|} \\
&= \frac{\left(t\kappa^{\#}\left(t\frac{\|T(2t)(-A)^{-\alpha}\|}{\|T(t)A^{-1}\|^{\alpha}}\right)\|T(2t)(-A)^{-\alpha}\|\right)^{1/\alpha}}{C'\|T(t)A^{-1}\|} \\
&= c_1\left(\left(\frac{t\|T(2t)(-A)^{-\alpha}\|}{\|T(t)A^{-1}\|^{\alpha}}\right)\kappa^{\#}\left(t\frac{\|T(2t)(-A)^{-\alpha}\|}{\|T(t)A^{-1}\|^{\alpha}}\right)\right)^{1/\alpha} \\
&= c_1\psi\left(t\frac{\|T(2t)(-A)^{-\alpha}\|}{\|T(t)A^{-1}\|^{\alpha}}\right) \qquad (2.48)
\end{aligned}$$

Suponha agora que $0 < t < t_0$. Como $\dfrac{\|T(t)A^{-1}\|}{t\|T(t)(-A)^{-\alpha}\|}$ é maior do que um número positivo, existe $c_2 > 0$ tal que para todo $t \in (0, t_0)$ vale (2.48), já que $\|T(t)A^{-1}\|$ é limitada e ψ é limitada em intervalos limitados. Portanto, existe $c = \max\{c_1, c_2\}$ tal que (2.48) vale.

Como ψ é (assintoticamente equivalente) a uma função crescente, temos que (vide Observação 1.41)

$$\frac{t\|T(2t)(-A)^{-\alpha}\|}{\|T(t)A^{-1}\|^{\alpha}} \leq \psi^{-1}\left(\frac{c}{\|T(t)A^{-1}\|}\right).$$

Novamente pela Proposição $B.10$, temos que

$$\psi^{-1}(s) \sim s^{\alpha}\kappa^{\#\#}(s^{\alpha}) \sim \frac{s^{\alpha}}{\ell(s)}, \quad s \to \infty,$$

de modo que para todo t suficientemente grande,

$$\begin{aligned}
\|T(2t)A^{-\alpha}\| &\leq \frac{\|T(t)A^{-1}\|^{\alpha}}{t}\psi^{-1}\left(\frac{c}{\|T(t)A^{-1}\|}\right) \\
&\leq c'\frac{\|T(t)A^{-1}\|^{\alpha}}{t}\frac{c^{\alpha}\|T(t)A^{-1}\|^{-\alpha}}{\ell(\|T(t)A^{-1}\|^{-1})} \\
&= \frac{C}{t\ell(\|T(t)A^{-1}\|^{-1})},
\end{aligned}$$

e então para todo $t > 0$. Então, por (2.42), temos que para todo t suficientemente grande,

$$\|T(2t)(-A)^{-\alpha}\| \leq \frac{C}{t\ell(t^{1/\alpha})}, \qquad (2.49)$$

e portanto para todo t.

Aplicando o Lema 2.25 com $B = A^{-1}$, $\gamma = \alpha$ e $\delta = 1$, temos que $\forall\ t > 0$

$$\|T(t)A^{-1}\| \leq C\|T(ct)(-A)^{-\alpha}\|^{1/\alpha} \leq \frac{C}{(t\ell(t^{1/\alpha}))^{1/\alpha}}.$$

∎

O resultado a seguir deve ser comparado com o Teorema 3.14, em que se discute a situação em que $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \{0\}$.

Teorema 2.30 (Teorema 7.7 em [6]). **(Batty-Chill-Tomilov)(Singularidade em zero)** *Seja $T(t)_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo em um espaço de Hilbert, com gerador A. Assuma que $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \{0\}$, e que*

$$\|R(is, A)\| = \begin{cases} O\left(\dfrac{1}{|s|^{\alpha} l(1/|s|)}\right), & s \to 0 \\ O(1), \quad |s| \to \infty \end{cases} \tag{2.50}$$

onde $\alpha > 0$ e l é uma função crescente e de variação lenta. Então

$$\|T(t)A(I - A)^{-1}\| = O\left(\frac{1}{(tl(t^{1/\alpha}))^{1/\alpha}}\right), \quad t \to \infty. \tag{2.51}$$

Demonstração: Veja a demonstração em [6]. ∎

Capítulo 3

Taxas de decaimento de C_0-Semigrupos em espaços de Hilbert (Parte II)

Como já dissemos na Introdução, o trabalho [36] estende os resultados que discutimos no capítulo 2, isto é, os autores mostraram que se o resolvente se comportar como uma função de crescimento positivo, poderemos eliminar em (espaços de Hilbert), o fator de correção logarítmico no decaimento de $\|T(t)A^{-1}\|$. Neste capítulo, discutiremos em detalhes tais resultados.

3.1 Singularidade em Infinito ($\pm i\infty$)

Teorema 3.1. *Seja X um **espaço de Hilbert** e seja A o gerador de um C_0-semigrupo limitado $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ em X. Suponha que $\sigma(A)\cap i\mathbb{R}=\emptyset$ e que $M:\mathbb{R}_+\to(0,\infty)$ seja uma função contínua não-decrescente de crescimento positivo (vide Definição 1.38) tal que $\sup_{|r|\leq s}\|R(ir,A)\|\leq M(s)$, $s\geq 0$. Então,*

$$\|T(t)A^{-1}\| = O(M^{-1}(t)^{-1}), \quad t\to\infty. \tag{3.1}$$

Demonstração: Seja $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ uma função de Schwartz tal que $\psi(0)=||\psi||_{L^\infty}=1$, $\text{supp}\psi\subseteq[-1,1]$ e seja $\phi=\mathcal{F}^{-1}\psi$. Para $R>0$, defina, $\forall t\in\mathbb{R}$, $\phi_R(t)=R\phi(Rt)$ e $\psi_R=\mathcal{F}\phi_R$, de modo que $\forall\ s\in\mathbb{R}$, $\psi_R(s)=\psi(R^{-1}s)$. Note também que $\forall\ R>0$, $\int_{\mathbb{R}}\phi_R(t)dt=\mathcal{F}(\phi_R)(0)=\psi_R(0)=1$. Agora, fixe temporariamente $t>0$ e dado $n\in\mathbb{Z}_+$, seja $g_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definido por

$$g_n(s)=\begin{cases} 0, \quad s<0,\\ s^n, \quad 0\leq s\leq t,\\ s^n-(s-t)^n, \quad s>t.\end{cases} \tag{3.2}$$

Em particular, $g_0(s)=\chi_{[0,t]}$. Fixemos $x\in X$ e $n\in\mathbb{N}$. Note que

- $0\leq s\leq t$

$$\int_0^s g_{n-1}(\omega)d\omega=\frac{s^n}{n};$$

- $s > t$

$$
\begin{aligned}
\int_0^s g_{n-1}(\omega)d\omega &= \int_0^t g_{n-1}(\omega)d\omega + \int_t^s \omega^{n-1} - (\omega - t)^{n-1}d\omega \\
&= \frac{t}{n} + \frac{s^n - (s-t)^n}{n} - \frac{t^n}{n} \\
&= \frac{s^n - (s-t)^n}{n}.
\end{aligned}
$$

Assim, $\forall s \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$ temos que $g_n(s) = n\int_0^s g_{n-1}(\omega)d\omega$. Definamos a aplicação $h_n : \mathbb{R} \to X$ pela lei $h_n(s) = g_n(s)T(s)A^{-1}x$, $s \in \mathbb{R}$, onde estendemos o semigrupo a todo reta, tal que $\forall\ s < 0$, $T(s) = 0$. Então,

$$
\begin{aligned}
\int_0^t T(t-s)h_n(s)ds &= \int_0^t T(t-s)g_n(s)T(s)A^{-1}xds \\
&= \int_0^t T(t-s+s)s^n A^{-1}xds \\
&= \int_0^t s^n ds T(t)A^{-1}x \\
&= \frac{t^{n+1}}{n+1}T(t)A^{-1}x,
\end{aligned}
$$

e portanto,

$$
T(t)A^{-1}x = \frac{n+1}{t^{n+1}}\int_0^t T(t-s)h_n(s)ds. \tag{3.3}
$$

A estratégia consiste em dividir esta integral em dois termos associados a $h_n = (\delta - \phi_R) * h_n + \phi_R * h_n$, onde δ denota a distribuição de Dirac em zero, e estimá-los separadamente, fazendo escolhas adequadas de $R > 0$ e de $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$
T(t)A^{-1}x = \frac{n+1}{t^{n+1}}\int_0^t T(t-s)(\delta - \phi_R) * h_n(s)ds + \frac{n+1}{t^{n+1}}\int_0^t T(t-s)\phi_R * h_n(s)ds. \tag{3.4}
$$

Começamos introduzindo uma função auxiliar $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$
\Phi(s) = \begin{cases} \int_{-\infty}^s \phi(\tau)d\tau & s < 0 \\ -\int_s^\infty \phi(\tau)d\tau & s \geq 0 \end{cases}
$$

Afirmação 3.2. Sabendo-se que $\int_{\mathbb{R}} \phi(t)dt = 1$, verifica-se que $\Phi'(t) = \phi(t) - \delta(t)$ no sentido distribucional.

Demonstração: Com efeito, seja $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ (uma função teste); daí temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \Phi(t)\psi^{'}(t)dt &= \int_{-\infty}^{0} \Phi(t)\psi^{'}(t)dt + \int_{0}^{\infty} \Phi(t)\psi^{'}(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{t} \phi(\tau)d\tau\psi^{'}(t)dt - \int_{0}^{\infty}\int_{t}^{\infty} \phi(\tau)d\tau\psi^{'}(t)dt \\
&= \left[\int_{\infty}^{t} \phi(\tau)d\tau\psi(t)\right]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} \phi(t)\psi(t)dt - \left(\left[\int_{t}^{\infty} \phi(\tau)d\tau\psi(t)\right]_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty} \phi(t)\psi(t)dt\right) \\
&= \psi(0)\int_{-\infty}^{0} \phi(\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{0} \phi(t)\psi(t) - \left(-\psi(0)\int_{0}^{\infty} \phi(\tau)d\tau - \int_{0}^{\infty} \phi(t)\psi(t)dt\right) \\
&= \int_{-\infty}^{0} \phi(\tau)d\tau\psi(0) + \psi(0)\int_{0}^{\infty} \phi(\tau)d\tau - \left(\int_{-\infty}^{0} \phi(t)\psi(t)dt + \int_{0}^{\infty} \phi(t)\psi(t)dt\right) \\
&= \psi(0) - \int_{\mathbb{R}} \phi(t)\psi(t)dt \\
&= -\int_{\mathbb{R}} (\phi(t) - \delta(t))\psi(t)dt.
\end{aligned}$$

■

Usando o fato de que Φ, sendo uma primitiva de uma função de Schwartz, decai rapidamente no infinito, e que $\int_{\mathbb{R}} \phi_R(t)dt = 1$, temos que

$$\begin{aligned}
(\delta - \phi_R) * h_n(s) &= \int_{0}^{\infty} (\delta - \phi_R)(s-\omega)h_n(\omega)d\omega \\
&= \int_{0}^{\infty} \delta(s-\omega)h_n(\omega)d\omega - \int_{0}^{\infty} \phi_R(s-\omega)h_n(\omega)d\omega \\
&= h_n(s) - \int_{0}^{\infty} \phi_R(s-\omega)h_n(\omega)d\omega \\
&= h_n(s) - R\int_{0}^{\infty} \phi(Rs - R\omega)h_n(\omega)d\omega \\
&= h_n(s) - \int_{0}^{\infty} \Phi'(Rs-\tau)h_n(R^{-1}\tau)d\tau - \underbrace{\int_{0}^{\infty} \delta(Rs-\tau)h_n(R^{-1}\tau)d\tau}_{h_n(s)} \\
&= \left[\Phi(Rs-\tau)h_n(R^{-1}\tau)\right]_{0}^{\infty} - \frac{1}{R}\int_{0}^{\infty} \Phi(Rs-\tau)h_n'(R^{-1}\tau)d\tau \\
&= -\frac{1}{R}\int_{0}^{\infty} \Phi(Rs-\tau)h_n'(R^{-1}\tau)d\tau
\end{aligned}$$

Assim, $\forall\ s \in \mathbb{R}$,

$$(\delta - \phi_R) * h_n(s) = -\frac{1}{R}\int_{0}^{\infty} \Phi(Rs-\tau)h_n'(R^{-1}\tau)d\tau. \tag{3.5}$$

Calculemos a derivada distribucional de h_n. Dado $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R},\mathbb{C})$(função teste), temos

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\infty} h_n(s)\psi'(s)ds &= \int_{0}^{\infty} g_n(s)T(s)A^{-1}x\psi'(s)ds \\
&= -\int_{0}^{\infty} (ng_{n-1}(s)T(s)A^{-1}x + g_n(s)T(s)x)\psi(s)ds,
\end{aligned}$$

onde usamos que $\dfrac{dT(s)}{ds}A^{-1}x = T(s)x$. Disso a derivada distribucional de h_n é dada por, $\forall\, s \in \mathbb{R}$ e $\forall\, x \in X$,

$$h_n'(s) = ng_{n-1}(s)T(s)A^{-1}x + g_n(s)T(s)x.$$

Consequentemente, $\forall\, s \geq 0$,

$$\begin{aligned}\|h_n'(s)\| &\leq n|g_{n-1}(s)|\|T(s)A^{-1}x\| + |g_n(s)|\|T(s)x\| \\ &\leq Kn|s|^{n-1}\|A^{-1}\|\|x\| + K|s|^n||x|| \\ &\leq K(ns^{n-1} + s^n)(\|A^{-1}\| + 1)\|x\|,\end{aligned}$$

onde $K = \sup_{t\geq 0}\|T(s)\|$. Segue-se de (3.5) que

$$\begin{aligned}\|(\delta - \phi_R) * h_n(s)\| &\leq \frac{1}{R}\int_0^\infty \|\Phi(Rs-\tau)h_n'(R^{-1}\tau)\|d\tau \\ &\leq \frac{1}{R}\int_0^\infty |\Phi(Rs-\tau)|K(n(R^{-1}\tau)^{n-1} + (R^{-1}\tau)^n)(\|A^{-1}\| + 1)||x||d\tau \\ &\leq \frac{K(\|A^{-1}\|+1)\|x\|}{R}\int_0^\infty |\Phi(Rs-\tau)|(n(R^{-1}\tau)^{n-1} + (R^{-1}\tau)^n)d\tau\end{aligned}$$

Logo, $\forall \in \mathbb{R}$,

$$\|(\delta - \phi_R) * h_n(s)\| \lesssim \frac{\|x\|}{R}\int_0^\infty |\Phi(Rs-\tau)|(n(R^{-1}\tau)^{n-1} + (R^{-1}\tau)^n)d\tau, \tag{3.6}$$

onde a constante implícita é independente de R, n, t e x.

Definamos agora, indutivamente, as funções $\Phi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, fazendo $\Phi_1 = |\Phi|$ e $\forall\, k \geq 1$,

$$\Phi_{k+1}(s) = \begin{cases} \int_{-\infty}^s \Phi_k(\tau)d\tau, & s < 0, \\ -\int_s^\infty \Phi_k(\tau)d\tau, & s \geq 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Afirmação 3.3. Para cada $k \in \mathbb{N}$, Φ_k decai rapidamente a zero no infinito e $\Phi_{k+1}' = \Phi_k - \langle\Phi_k\rangle\delta$, no sentido distribucional, onde $\langle\Phi_k\rangle = \int_{\mathbb{R}} \Phi_k(s)ds$.

Demonstração: A primeira parte da afirmação se segue do fato de Φ ser uma função de Schwartz. Para a segunda, fixados $k \geq 1$ e seja $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$(função teste), segue-se de (3.7) que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \Phi_{k+1}(t)\psi'(t)dt &= \int_{-\infty}^0 \Phi_{k+1}(t)\psi'(t)dt + \int_0^\infty \Phi_{k+1}(t)\psi'(t)dt \\ &= \psi(0)\int_{\mathbb{R}} \Phi_k(\tau)d\tau - \int_{\mathbb{R}} \Phi_k(t)\psi(t)dt \\ &= \psi(0)\langle\Phi_k\rangle - \int_{\mathbb{R}} \Phi_k(t)\psi(t)dt \\ &= -\int_{\mathbb{R}}(\Phi_k(t) - \langle\Phi_k\rangle\delta(t))\psi(t)dt.\end{aligned}$$

∎

Assim, $\forall\ m \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |\Phi(s-\tau)|\tau^m d\tau &= \int_0^\infty \Phi_1(s-\tau)\tau^m d\tau \\
&= \int_0^\infty \Phi_2'(s-\tau)\tau^m d\tau + \int_0^\infty \langle\Phi_1\rangle\delta(s-\tau)\tau^m d\tau \\
&= -\Phi_2(s-\tau)\tau^m\Big|_0^\infty + m\int_0^\infty \Phi_2(s-\tau)\tau^{m-1}d\tau + \langle\Phi_1\rangle s^m \\
&= m\int_0^\infty \Phi_2(s-\tau)\tau^{m-1}d\tau + \langle\Phi_1\rangle s^m \\
&= m\int_0^\infty \Phi_3'(s-\tau)\tau^{m-1}d\tau + m\int_0^\infty \langle\Phi_2\rangle\delta(s-\tau)\tau^{m-1}d\tau + \langle\Phi_1\rangle s^m \\
&= -m\Phi_3(s-\tau)\tau^{m-1}\Big|_0^\infty + m\int_0^\infty \Phi_3(s-\tau)\tau^{m-2}d\tau + m\langle\Phi_2\rangle s^{m-1} + \langle\Phi_1\rangle s^m \\
&= m\int_0^\infty \Phi_3(s-\tau)\tau^{m-2}d\tau + m\langle\Phi_2\rangle s^{m-1} + \langle\Phi_1\rangle s^m \\
&\cdots \\
&= m(m-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1\int_0^\infty \Phi_{m+1}(s-\tau)d\tau + \langle\Phi_1\rangle s^m + m\langle\Phi_2\rangle s^{m-1} + \cdots + \langle\Phi_m\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{m-1}\frac{m!}{(m-k)!}\langle\Phi_{k+1}\rangle s^{n-k} + m!\int_{-\infty}^s \Phi_{m+1}(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Portanto, $\forall\ m \geq 1$,

$$\int_0^\infty |\Phi(Rs-\tau)|(R^{-1}\tau)^m d\tau \;\leq\; \sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{(m-k)!}||\Phi_{k+1}||_{L^1}R^{-k}s^{m-k}. \tag{3.8}$$

Aplicando (3.8) a (3.6), com $m = n-1$ e $m = n$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\left\| \frac{n+1}{t^{n+1}} \int_0^t T(t-s)(\delta - \phi_R) * h_n(s) ds \right\| &\leq \frac{n+1}{t^{n+1}} \int_0^t \| T(t-s)(\delta-\phi_R) * h_n(s) \| \, ds \\
&\leq \frac{n+1}{t^{n+1}} K \int_0^t \| (\delta - \phi_R) * h_n(s) \| ds \\
&\leq \frac{n+1}{t^{n+1}} \frac{K}{R} \left(n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} \| \Phi_{k+1} \|_{L^1} R^{-k} \int_0^t s^{n-1-k} ds \right) \\
&+ \frac{n+1}{t^{n+1}} \frac{K}{R} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} \| \Phi_{k+1} \|_{L^1} R^{-k} \int_0^t s^{n-k} ds \right) \\
&= \frac{n+1}{t^{n+1}} \frac{K}{R} \left(n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} \| \Phi_{k+1} \|_{L^1} R^{-k} \frac{t^{n-k}}{n-k} \right) \\
&+ \frac{n+1}{t^{n+1}} \frac{K}{R} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} \| \Phi_{k+1} \|_{L^1} R^{-k} \frac{t^{n-k+1}}{n-k+1} \right) \\
&= \frac{n+1}{t^{n+1}} \frac{K}{R} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!} \| \Phi_{k+1} \|_{L^1} R^{-k} \frac{t^n}{t^k} \right) \\
&+ \frac{1}{t^{n+1}} \frac{K}{R} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(n-k)!} \| \Phi_{k+1} \|_{L^1} R^{-k} \frac{t^{n-k+1}}{n-k+1} \right) \\
&= \frac{n+1}{t} \frac{K}{R} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(n-k)!} \| \Phi_{k+1} \|_{L^1} R^{-k} \frac{1}{t^k} \right) \\
&+ \frac{K}{R} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!} \| \Phi_{k+1} \|_{L^1} R^{-k} \frac{1}{t^k} \right) \\
&= \frac{K}{R} \left(\frac{n+1}{t} P_{n-1}(tR) + P_n(tR) \right), \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

onde a constante implícita é independente de R, n, t e x e para $m \in \mathbb{Z}_+$ e $s > 0$, definimos

$$
P_m(s) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(m+1)!}{(n-k+1)!} \frac{\| \Phi_{k+1} \|_{L^1}}{s^k}. \qquad (3.10)
$$

Passamos agora para o termo associado a $\phi_R * h_n$. Note primeiramente, que pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e pelo Corolário $A.6$,

$$
\begin{aligned}
\left\| \frac{n+1}{t^{n+1}} \int_0^t T(t-s) \phi_R * h_n(s) ds \right\| &\leq \frac{n+1}{t^{n+1}} \int_0^t \| T(t-s) \phi_R * h_n(s) \| ds \\
&\leq \frac{n+1}{t^{n+1}} \left(\int_0^t \| T(t-s) \|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t \| \phi_R * h_n(s) \|^2 ds \right)^{1/2} \\
&\leq K \frac{n+1}{t^{n+1/2}} \| \phi_R * h_n \|_{L^2(\mathbb{R}, X)}. \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

Estimemos agora a norma L^2 de $\phi_R * h_n$. A ideia é reescrever tal termo em função de multiplicadores de Fourier, e então utilizar a Proposição $A.31$.

Dado $\alpha > 0$, definamos a função $h_{n,\alpha} \in L^1(\mathbb{R}, X)$ pela lei $h_{n,\alpha}(s) = e^{-\alpha s} h_n(s)$, $s \in \mathbb{R}$.

Afirmação 3.4. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, s \in \mathbb{R}$, $h_{n,\alpha}(s) = n!(T_\alpha^{*n} h_{0,\alpha})(s)$, onde $T_\alpha(s) = e^{-\alpha s} T(s)$.

Demonstração: Procedamos por indução.

Caso $n = 1$,

$$\begin{aligned} h_{1,\alpha}(s) &= e^{-\alpha s} h_1(s) \\ &= e^{-\alpha s} \int_0^s g_0(\tau) d\tau T(s) A^{-1} x \\ &= \int_0^s e^{-\alpha(s-\tau)} T(s-\tau) \underbrace{e^{-\alpha\tau} g_0(\tau) T(\tau) A^{-1} x}_{h_{0,\alpha}} d\tau \\ &= T_\alpha * h_{0,\alpha}(s). \end{aligned}$$

Passo indutivo. Suponha, que para $n \in \mathbb{N}$, a expressão

$$h_{n,\alpha}(s) = n!(T_\alpha^{*n} h_{0,\alpha})(s),$$

seja válida para todo $s \in \mathbb{R}$.

Assim, $\forall\ s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h_{n+1,\alpha}(s) &= e^{-\alpha s} h_{n+1}(s) \\ &= e^{-\alpha s} g_{n+1}(s) T(s) A^{-1} x \\ &= (n+1) e^{-\alpha s} \int_0^s g_n(\tau) T(s) A^{-1} x d\tau \\ &= (n+1) \int_0^s e^{-\alpha(s-\tau)} T(s-\tau) e^{-\alpha\tau} T(\tau) g_n(\tau) T(\tau) A^{-1} x d\tau \\ &= (n+1) T_\alpha * h_{n,\alpha}(s) \\ &= (n+1)! T_\alpha * (T_\alpha^{*n} h_{0,\alpha})(s) \\ &= (n+1)! (T_\alpha^{*n+1} h_{0,\alpha})(s). \end{aligned}$$

■

Note que, pelo Teorema 1.22 (item 4), $\mathcal{F}(T_\alpha)(s) = R(\alpha + is, A)$, $\forall\ s \in \mathbb{R}$. Segue-se, portanto, da Afirmação 3.4 e do Teorema $A.17$ (item b) que $\forall\ s \in \mathbb{R}$,

$$(\mathcal{F} h_{n,\alpha})(s) = n! R(\alpha + is, A)^n \int_0^\infty e^{-(\alpha+is)\xi} h_0(\xi) d\xi. \tag{3.12}$$

Afirmação 3.5. $(\mathcal{F}^{-1}\psi_R * h_{n,\alpha})(s) = \mathcal{F}^{-1}(\psi_R \mathcal{F} h_{n,\alpha})(s)$.

Demonstração: Pelo Teorema $A.17$ (item b), temos que $\forall\ s \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}\psi_R * h_{n,\alpha})(s) = \psi_R(s) \mathcal{F} h_{n,\alpha}(s)$. ■

Agora, pelo Teorema $A.8$ e pela Afirmação 3.5, dada qualquer função de Schwartz $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \phi_R * h_n(s)\eta(s)ds &= \lim_{\alpha\to 0^+}\int_0^\infty h_{n,\alpha}(s)\xi_R(s)ds \\
&= \lim_{\alpha\to 0^+}\int_{\mathbb{R}} \phi_R * h_{n,\alpha}(s)\eta(s)ds \\
&= \lim_{\alpha\to 0^+}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1}\psi_R * h_{n,\alpha}(s)\eta(s)ds \\
&= \lim_{\alpha\to 0^+}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1}(\psi_R\mathcal{F}h_{n,\alpha})(s)\eta(s)ds,
\end{aligned}$$

onde $\xi_R(s) = \int_{\mathbb{R}} \phi_R(\tau - s)\eta(\tau)d\tau$. Como $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$, $R(\lambda, A)$ pode ser estendido holomorficamente ao longo do eixo imaginário e é uniformemente limitado em uma vizinhança aberta de $i\text{supp}\ \psi_R$. Segue-se mais uma vez do Teorema $A.8$ que, $\forall \eta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$,

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_R * h_n(s)\eta(s)ds = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1}(\psi_R m_n \mathcal{F}h)(s)\eta(s)ds$$

o que nos mostra que $\phi_R * h_n = \mathcal{F}^{-1}(\psi_R m_n \mathcal{F}h)$ (em sentido distribucional), onde $\forall\ s \in \mathbb{R}$, $m_n(s) := n!R(is, A)^n A^{-1}$ e $h(s) = g_0(s)T(s)x$. Veja que $\psi_R m_n(s) \in L^\infty(\mathbb{R})$, uma vez que ψ_R é de suporte compacto. Assim, fazendo $m(s) = \psi_R(s)m_n(s)$ e $p = q = 2$ (pois o espaço é Hilbert, vide a Observação $A.30$) na Proposição $A.31$,

$$\|\phi_R * h_n\|_{L^2(\mathbb{R},X)} \leq (\mathcal{F}_{2,X})^2 \|\|\psi_R(\cdot)m_n(\cdot)\|_{\mathcal{B}(X)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|h\|_{L^2(\mathbb{R},X)},$$

e portanto, pelo Teorema $A.18$ temos que

$$\|\phi_R * h_n\|_{L^2(\mathbb{R},X)} \leq \|\|\psi_R(\cdot)m_n(\cdot)\|_{\mathcal{B}(X)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|h\|_{L^2(\mathbb{R},X)}.$$

Note que

$$\begin{aligned}
\|h\|_{L^2(\mathbb{R},X)} &= \left(\int_{\mathbb{R}} |h(s)|^2 ds\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\int_0^t (K\|x\|)^2 ds\right)^{1/2} = Kt^{1/2}\|x\|.
\end{aligned}$$

Afirmação 3.6. $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ s \in \mathbb{R}$ e $\forall\ x \in X$

$$isR(is, A)^n A^{-1}x = R(is, A)^{n-1}A^{-1}x + R(is, A)^n x. \tag{3.13}$$

Demonstração: Fixe $s \in \mathbb{R}$ e $x \in X$.

Caso $n = 1$:

$$(is - A)R(is, A)A^{-1}x = A^{-1}x \Leftrightarrow isR(is, A)A^{-1}x = AR(is, A)A^{-1}x + A^{-1}x,$$

onde usamos $AR(\lambda, A) = R(\lambda, A)A$ em $\mathcal{D}(A)$.

Passo indutivo. Suponha que, para $n \in \mathbb{N}$,

$$isR(is,A)^n A^{-1}x = R(is,A)^{n-1}A^{-1}x + R(is,A)^n x.$$

Então,

$$\begin{aligned} isR(is,A)R(is,A)^n A^{-1}x &= R(is,A)(R(is,A)^{n-1}A^{-1}x + R(is,A)R(is,A)^n x \\ &= R(is,A)^n A^{-1}x + R(is,A)^{n+1}x. \end{aligned}$$

■

Assim, por (3.13), temos que existe $C > 0$ tal que $\forall\ s \in \mathbb{R}$, $|s|\ \|R(is,A)^n A^{-1}\| \leq CM(|s|)^{n-1} + M(|s|)^n$. Reescalando M, se necessário, assumimos que $M(s) \geq 1$. Fixe $s_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que $\forall 0 < |s| \leq s_0$, tal que $\|R(is,A)^n A^{-1}\| \leq \frac{2C}{s_0}$

- se $s_0 \leq |s|$, temos que

$$\|R(is,A)^n A^{-1}\| \leq \frac{2CM(|s|)^n}{|s|} = \frac{2CM(|s|)^n}{\max\{s_0,|s|\}};$$

- se $0 < |s| \leq s_0$. então $\|R(is,A)^n A^{-1}\| \leq \dfrac{2CM(0)}{\max\{s_0,|s|\}} \leq \dfrac{2CM(|s|)^n}{\max\{s_0,|s|\}}$.

Então, $\forall\ s \in \mathbb{R}$,

$$\|R(is,A)^n A^{-1}\| \lesssim \frac{M(|s|)^n}{\max\{s_0,|s|\}} \tag{3.14}$$

Como M é não-decrescente e tem crescimento positivo (vide Definição 1.38), existem constantes $\alpha > 0$ e $c \in (0,1]$ tais que, $\forall\ R \geq |s| \geq s_0$,

$$\frac{M(R)}{M(|s|)} \geq c\left(\frac{R}{|s|}\right)^{\alpha}.$$

Agora, façamos $n = \lceil \alpha^{-1} \rceil$. Então, segue-se de (3.14) que $\forall\ R \geq s_0$,

$$\|\|\psi_R(\cdot)m_n(\cdot)\|_{\mathcal{B}(X)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \lesssim n! \sup_{|s|\leq R} \frac{M(|s|)^n}{\max\{s_0,|s|\}} \leq \frac{n!}{R}\left(\frac{M(R)^n}{c}\right).$$

Substituindo as estimativas anteriores em (3.11), temos que para $R \geq s_0$,

$$\left\|\frac{n+1}{t^{n+1}}\int_0^t T(t-s)\phi_R * h_n(s)ds\right\| \lesssim (n+1)!\frac{\|x\|}{R}\left(\frac{M(R)}{ct}\right)^n, \tag{3.15}$$

onde a constante implícita é independente de R, t e x. Finalmente, substituindo (3.9) e (3.15) em (3.3), obtemos $\forall R \geq s_0$ e $\forall t > 0$,

$$\|T(t)A^{-1}\| \lesssim \frac{1}{R}\left(P_n(Rt) + \frac{n+1}{t}P_{n-1}(Rt) + (n+1)!\left(\frac{M(R)}{ct}\right)^n\right), \tag{3.16}$$

onde a constante implícita é independente de R e de t.

Tomamos agora, $R = M^{-1}(ct)$. Então, os dois primeiros termos em (3.16) são uniformemente limitados, já que as funções P_n, P_{n-1} definidas em (3.10) não são crescentes, e a parcela final é constante por nossa escolha de R. Portanto, o resultado se segue da Proposição 1.42. ∎

Observação 3.7. A conclusão (3.1) torna-se falsa se retirarmos a suposição de crescimento positivo, pois desse modo tanto as estimativas quanto a Proposição 1.42 deixam de ser válidas.

Exemplo 3.8. (Vide em [2]) Sejam $X = L^2[2,\infty)$, $\phi : [2,\infty) \to [2,\infty)$ definida pela lei $\phi(t) = -\frac{1}{\log t} - it$, e seja o semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ definido em X pela lei $T(t)f(s) = e^{\phi(s)t}f(s)$. Seja ainda $A = \mathcal{M}_\phi : \mathcal{D}(\mathcal{M}_\phi) \subset L^2([0,\infty)) \to L^2([0,\infty))$ o *operador de multiplicação* definido por, $\forall\ f \in L^2[2,\infty)$, por

$$A(f)(t) = \phi(t)f(t),$$

onde $\mathcal{D}(A) = \{f \in L^2[2,\infty) \mid f\phi \in L^2[2,\infty)\}$.

Naturalmente, A é o gerador infinitesimal do C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ e ainda (para mais detalhes, veja [30])

$$\sigma(A) = \left\{-\frac{1}{\log s} - is \mid s \geq 2\right\}. \tag{3.17}$$

e

$$R(is, A)f(t) = (is - \phi(t))^{-1}f(t),$$

de modo que

$$\|R(is, A)\| \leq |is - \phi(t)|^{-1}.$$

Assim, $\forall s \geq 2$, $\|R(is, A)\| \leq \log(s)$.

Seja $M(s) = \log s$; uma vez que f não é de que M não é crescimento positivo. E ainda, $M^{-1}(s) = e^s$. Como, $\forall\ s \geq 2$, $\log s \geq \dfrac{1}{s}$, então

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sup_{s\geq 2} \frac{e^{-t/\log s}}{s} \leq \sup_{s\geq 2} \frac{e^{-t/\log s}}{\sqrt{(\log s)^{-2} + s^2}} = \|T(t)A^{-1}\|.$$

É fácil ver que, $\forall\ t \geq (\log 2)^2$, $\sup_{s\geq 2} \dfrac{e^{-t/\log s}}{s} = e^{-2\sqrt{t}}$. Logo,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-2\sqrt{t}} \leq \|T(t)A^{-1}\|.$$

Veja que $\|T(t)A^{-1}\|$ não possui decaimento na ordem de $(M^{-1}(t))^{-1}$, pois se tivesse, então para t grande, teríamos

$$\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-2\sqrt{t}} \leq \|T(t)A^{-1}\| \leq Ce^{-t},$$

o que é um absurdo. Logo, o Teorema 3.1 não se aplica a este caso.

Próximo resultado estabelece uma certa recíproca ao Teorema 3.1.

Teorema 3.9. *Sejam X um espaço de Banach e A o gerador do C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$. Suponha que $\sigma(A) \subset \mathbb{C}_-$ e que $M : \mathbb{R}_+ \to (0,\infty)$ seja uma função contínua não-decrescente* *tal que* $\lim_{s\to+\infty} M(s) = +\infty$ *e tal que exista* $\delta \in (0,1]$ *tal que,* $\forall\ s \geq 0$*,*

$$\delta M(s) \leq \sup_{|r|\leq s} \frac{1}{dist(ir, \sigma(A))} \leq \sup_{|r|\leq s} ||R(ir, A)|| \leq M(s). \tag{3.18}$$

Se $\exists\ c > 0$ *tal que*

$$\|T(t)A^{-1}\| = O(M^{-1}(ct)^{-1}) \quad t \to \infty, \tag{3.19}$$

então M *terá crescimento positivo.*

Demonstração: Considere a função $N : \mathbb{R}_+ \to (0, \infty)$, dada pela lei

$$N(s) = \sup_{|r|\leq s} \frac{1}{dist(ir, \sigma(A))}.$$

Então, a condição (3.18) pode ser reescrita como $\delta M(s) \leq N(s) \leq M(s)$, $s \geq 0$.

Antes de prosseguirmos, demonstremos o seguinte Lema.

Lema 3.10. (Teorema de Inclusão Espectral) *Para todo* $t \geq 0$*,*

$$e^{\sigma(A)t}/\sigma(A) = \left\{ \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} \mid \lambda \in \sigma(A) \right\} \subset \sigma(T(t)A^{-1}).$$

Demonstração: Seja $\lambda \in \sigma(A)$; mostraremos que $e^{\lambda t}/\lambda \in \sigma(T(t)A^{-1})$. Para tal, analisemos os seguintes casos.

1º Caso: $\lambda \in \sigma_a(A)$.

Note que $1/\lambda \in \sigma_a(A^{-1})$. De fato, seja $x_n \in \mathcal{D}(A)$ tal que $\|x_n\| = 1$ e $\|(\lambda - A)x_n\| \to 0$. Assim, seja $y_n = Ax_n$ (podemos normalizar a sequência y_n caso seja necessário, pois como $\|x_n\| = 1$, segue-se que $Ax_n \neq 0$, já que A é injetiva), e note que

$$\left\| \left(\frac{1}{\lambda} - A^{-1} \right) y_n \right\| = \left\| \frac{A^{-1}}{\lambda}(A - \lambda)x_n \right\| \to 0.$$

Note também que $e^{\lambda t} \in \sigma_a(T(t))$; com efeito, basta lembrarmos que

$$\|(e^{\lambda t} - T(t))x_n\| = \|B_\lambda(t)(\lambda - A)x_n\| \to 0.$$

(vide a definição de $B_\lambda(t)$ no Lema 1.25). Assim, para concluirmos, notemos que

$$\left\| \left(T(t)A^{-1} - \frac{e^{\lambda t}}{\lambda} \right) y_n \right\| \leq \left\| T(t) \left(A^{-1} - \frac{1}{\lambda} \right) y_n \right\| + \frac{1}{|\lambda|} \|(T(t) - e^{\lambda t})y_n\|.$$

Não é imediato que a segunda parcela do lado direito da desigualdade anterior converge a zero; basta observarmos que, pelo Lema 1.25,

$$(e^{\lambda t} - T(t))y_n = (\lambda - A)B_\lambda(t)Ax_n = AB_\lambda(t)(\lambda - A)x_n = \lambda B_\lambda(t)(\lambda - A)x_n - (e^{\lambda t} - T(t))(\lambda - A)x_n,$$

e que $\|(T(t) - e^{\lambda t})y_n\| \to 0$. Portanto, $\frac{e^{\lambda t}}{\lambda} \in \sigma_a(T(t)A^{-1})$.

2º Caso: $\lambda \in \sigma_r(A)$.

Como $\lambda \in \sigma_r(A)$, existe $0 \neq x^* \in X^*$ tal que $\forall\, z \in \mathcal{D}(A)$, $x^*((\lambda - A)z) = 0$. Como $\forall\, z \in \mathcal{D}(A)$ $\exists\, x \in X$ tal que $z = A^{-1}x$, segue-se que $0 = \frac{1}{\lambda}x^*((\lambda - A)A^{-1}x) = x^*\left(\left(A^{-1} - \frac{1}{\lambda}\right)x\right)$. Note ainda que $0 = x^*((\lambda - A)B_\lambda(t)x) = x^*(e^{\lambda t}x - T(t)x)$.

Procedendo como no caso anterior, temos que

$$x^*((T(t)A^{-1} - \lambda^{-1}e^{\lambda t})x) = x^*((T(t)(A^{-1} - \lambda^{-1})x) + \frac{1}{\lambda}(x^*(T(t) - e^{\lambda t})x) = 0.$$

Assim, o funcional $0 \neq x^* \in X^*$ se anula em $Im(T(t)A^{-1} - \lambda^{-1}e^{\lambda t})$, e portanto, $\frac{e^{\lambda t}}{\lambda} \in \sigma_r(T(t)A^{-1})$. ■

Seja $\alpha + i\beta \in \sigma(A)$. Como $\forall\, t \geq 0$, $e^{t(\alpha+i\beta)}/(\alpha + i\beta) \in \sigma(T(t)A^{-1})$, segue-se do fato do raio espectral de um operador linear limitado ser sempre dominado pela norma do operador que $\dfrac{e^{\alpha t}}{|\alpha + i\beta|} \leq \|T(t)A^{-1}\|$. Assim usando a hipótese (3.19), obtemos

$$\frac{e^{\alpha t}}{|\alpha + i\beta|} \leq \|T(t)A^{-1}\| \leq \frac{C}{M^{-1}(ct)} \tag{3.20}$$

para todo t suficientemente grande. Assim,

$$\delta M(M^{-1}(ct)) \leq N(M^{-1}(ct)) \leq M(M^{-1}(ct)) \Rightarrow \delta ct \leq N(M^{-1}(ct)).$$

Note que $N^{-1}(\delta ct) \leq M^{-1}(ct)$, pois do contrário, teríamos $N(M^{-1}(ct)) < N(N^{-1}(\delta ct)) = \delta ct$ (vide a Observação 1.41 (item 1)). Logo, combinando (3.20) e nosso comentário anterior, obtemos

$$e^{\alpha t}N^{-1}(\delta ct) \leq e^{\alpha t}M^{-1}(ct) \leq C|\alpha + i\beta| \Rightarrow e^{\alpha t}N^{-1}(\delta ct) \leq C|\alpha + i\beta| \Rightarrow \frac{N^{-1}(\delta ct)}{C|\alpha + i\beta|} \leq e^{-\alpha t},$$

donde se segue que, $\forall\, \alpha + i\beta \in \sigma(A)$ e t suficientemente grande,

$$-\alpha t \geq \log\left(\frac{N^{-1}(\delta ct)}{C|\alpha + i\beta|}\right). \tag{3.21}$$

Dado $s \geq 0$, existem, pelo Teorema de Weierstrass, $r \in [-s, s]$ e $\alpha + i\beta \in \sigma(A)$ tais que $N(s) = |\alpha + i\beta - ir|^{-1}$ (pois $\mathrm{dist}(ir, \sigma(A))$ é contínua como função de r e de $z \in \sigma(A)$ o qual é fechado). Note que $-\alpha \leq |\alpha + i\beta - ir| = N(s)^{-1}$ e que, para s grande, temos que $|\alpha + i\beta| \leq |r| + |\alpha + i\beta - ir| \leq 2s$. Seja $\lambda \geq 1$ e para s suficientemente grande, seja $t = (\delta c)^{-1}N(\lambda s)$. Então, (3.21) produz

$$\frac{(\delta c)^{-1}N(\lambda s)}{N(s)} \geq \log\left(\frac{N^{-1}(\delta ct)}{C|\alpha + i\beta|}\right) \geq \log\left(\frac{N^{-1}(N(\lambda s))}{C|\alpha + i\beta|}\right) \geq \log\left(\frac{\lambda s}{C|\alpha + i\beta|}\right)\log\left(\frac{\lambda}{2C}\right),$$

logo,

$$\frac{N(\lambda s)}{N(s)} \geq \delta c \log(\frac{\lambda}{2C}).$$

Assim, temos que

$$\frac{\delta M(\lambda s)}{M(s)} \geq \frac{N(\lambda s)}{N(s)} \geq \delta^2 c \log\left(\frac{\lambda}{2C}\right),$$

e portanto
$$\frac{M(\lambda s)}{M(s)} \geq \delta c \log\left(\frac{\lambda}{2C}\right).$$
Segue do Lema 1.39, que M tem crescimento positivo. ■

3.2 Singularidade em Zero

Sejam X um espaço de Banach e, A o gerador de um C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ definido em X. Queremos uma versão do Teorema 3.1 para o caso em que $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$. O caso em que $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \{0\}$, surge em várias aplicações, incluindo problemas onde as soluções do PAC convergem para algum ponto de equilíbrio diferente de zero, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 3.11 (vide Exemplo 5.5.4 em [4])**.** Seja $X = l^2(\mathbb{N})$ e $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ o C_0-semigrupo definido pela lei $(T(t)x)_{2n-1} = e^{-t/n}(x_{2n-1} + tx_{2n})$, $(T(t)x)_{2n} = e^{-t/n}x_{2n}$. $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

Neste exemplo, o gerador A é definido pela lei

$$(Ax)_{2n-1} = x_{2n} - \frac{x_{2n-1}}{n}, \quad (Ax)_{2n} = -\frac{x_{2n}}{n}.$$

Observe que $\sigma(A) = \left\{-\frac{1}{n} \mid n \geq 1\right\} \cup \{0\}$. Agora, seja $x \in l^2(\mathbb{N})$ tal que $x_{2n-1} := 0$, $x_{2n} := n^{-3/2}$. Daí, temos que $(T(t)x)_{2n-1} = te^{-t/n}n^{-3/2}$ e $(T(t)x)_{2n} = e^{-t/n}n^{-3/2}$, de modo que

$$\|T(t)x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+t^2)e^{-2t/n}}{n^3}.$$

Veja que, para cada $t > 0$,

$$\int_0^{\infty} e^{-2t/s}s^{-3}ds = \frac{1}{4t^2}\int_{-\infty}^{0} \omega e^{\omega} d\omega = \frac{1}{4t^2}.$$

Por um argumento usando soma de Riemann da função $e^{-2t/s}s^{-3}$, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+t^2)e^{-2t/n}}{n^3} \to \frac{1}{4},$$

de modo que, $\lim_{t\to\infty} \|T(t)x\| = \frac{1}{2}$. Assim, se considerarmos o PAC

$$\begin{cases} z'(t) = Ax, \quad t \geq 0, \\ z(0) = x \end{cases}$$

onde x é tal que $x_{2n-1} := 0$, $x_{2n} := n^{-3/2}$, então 0 não é ponto de equilíbrio das soluções do PAC. É possível vermos que $\lim_{t\to\infty} \|T(t)AR(1,A)x\| = 0$ e isso nos motiva avaliar o comportamento de $T(t)AR(1,A)$.

Observação 3.12. Em [10] é mostrado que a propriedade $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \{0\}$ implica em $\lim\limits_{t\to\infty} \|T(t)AR(1,A)\| = 0$. Como vimos no Exemplo 3.11, 0 nem sempre será um ponto de equilíbrio para as soluções do PAC, o que nos leva a estudar o comportamento de $\|T(t)AR(1,A)\|$, já que sabemos que o decaimento desta função ocorre.

Antes vejamos a seguinte definição

Definição 3.13. O *limite de crescimento não-analítico* de um C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ é dado por

$$\zeta(T) = \inf\{\omega \in \mathbb{R} \mid \exists S \in \mathcal{H}(\mathcal{B}(X)) \ \text{ tal que } \ \sup_{t>0} e^{-\omega t}||T(t) - S(t)|| < \infty\}$$

onde $\mathcal{H}(\mathcal{B}(X))$ denota o conjunto das aplicações $S : (0,\infty) \to \mathcal{B}(X)$ que tem uma extensão analítica exponencialmente limitada em algum setor, $\Sigma_\theta = \{z \in \mathbb{C} \mid |\arg(z)| < \theta\}$, contendo $(0,\infty)$.

Teorema 3.14. *Sejam X um **espaço de Banach** e A o gerador de um C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ limitado em X, com $\zeta(T) < 0$. Suponha que $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \{0\}$, $\sup_{|s|\geq 1} \|R(is,A)\| < \infty$ e que $M : [1,\infty) \to (0,\infty)$ seja uma função contínua não-decrescente tal que $\forall\ |s| \geq 1$, $\|R(is^{-1},A)\| \leq M(|s|)$. Então, existirá uma constante $c > 0$ tal que*

$$\|T(t)AR(1,A)\| = O(M_{\log}^{-1}(ct)^{-1}), \quad t \to \infty, \tag{3.22}$$

onde $M_{\log} : [1,\infty) \to (0,\infty)$ é definida $\forall\ s \geq 1$, por $M_{\log}(s) = M(s)(\log(1+s) + \log(1+M(s)))$.

Demonstração: Veja a demonstração em [15], Corolário 2.12. ∎

É natural nos perguntamos se o fator de correção logarítmica do Teorema 3.14 pode ser descartado, assim como fizemos no Teorema 3.1, como contrapartida ao Teorema 2.10.

Definição 3.15 (Limite Espectral).

$$s_0^\infty(A) = \inf\{\alpha \in \mathbb{R} \mid Q_{\alpha,b} \subset \rho(A) \text{ e } \sup_{\lambda \in Q_{\alpha,b}} \|R(\lambda,A)\| < \infty \text{ para algum } b \geq 0\},$$

onde $Q_{\alpha,b} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \Re\lambda \geq \alpha, |\Im\lambda| \geq b\}$.

Observação 3.16.

1. É mostrado em [8] (vide Teorema 3.6) que se $\zeta(T) < 0$ então $s_0^\infty < 0$. Desta forma, teremos $\alpha < 0$ e algum $b \geq 0$ tal que $Q_{\alpha,b} \subset \rho(A)$, assim $\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ é compacto(já que é um fechado limitado), $\sup_{s\geq b} \|R(is,A)\| < \infty$. É demonstrado também em [8], que em espaço de Hilbert estas condições são equivalentes.

2. Em [6] (Teorema 6.10) é demonstrado que se $\lim_{t\to\infty} \|T(t)A(I-A)^{-1}\| = 0$, então $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} \subset \{0\}$ (segue-se também do Teorema 3.25) e $\sup_{|s|\geq 1} \|R(is,A)\| < \infty$.

Como consideramos agora o caso em o espaço é Hilbert, então pela Observação 3.16, podemos substituir a hipótese $\zeta(T) < 0$ no Teorema 3.14 por $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \{0\}$ e por $\sup_{|s|\geq 1} \|R(is,A)\| < \infty$.

Teorema 3.17. *Seja X um **espaço de Hilbert**, e seja A o gerador de um C_0-semigrupo limitado $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ em X. Suponha que*

1. *$\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \{0\}$;*

2. *$\sup_{|s|\geq 1} \|R(is,A)\| < \infty$;*

3. *$M : [1,\infty) \to (0,\infty)$ seja uma função não-decrescente de **crescimento positivo** tal que $\forall\ |s| \geq 1$, $\|R(is^{-1},A)\| \leq M(|s|)$.*

Então,

$$\|T(t)AR(1,A)\| = O(M^{-1}(t)^{-1}), \quad t \to \infty. \tag{3.23}$$

Demonstração: Seja $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função de Schwartz tal que $\|\psi\|_{L^\infty} = 1$ e, $\forall |s| \leq 1$, $\psi(s) = 1$, e seja $\phi = \mathcal{F}^{-1}\psi$. Fixe temporariamente $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$ e $t > 0$, defina a aplicação $h_n : \mathbb{R} \to X$ pela lei $h_n(s) = g_n(s)T(s)AR(1,A)x$, onde $\forall\ s < 0$, $T(s) = 0$, e $g_n(s)$ é a função definida na demonstração do Teorema 3.1. Além disso, seja $H_n : \mathbb{R} \to X$ dada pela lei

$$H_n(s) = \int_0^s h_n(\tau)d\tau.$$

Em particular, $H_n(s) = 0$ para $s < 0$, e $\forall\ s \geq 0$,

$$\begin{aligned} H_n(s) = \int_0^s h_n(\tau)d\tau &= \int_0^s g_n(\tau)T(\tau)AR(1,A)xd\tau \\ &= \int_0^s g_n(\tau)\frac{dT(\tau)}{d\tau}R(1,A)xd\tau \\ &= g_n(s)T(s)R(1,A)x - \int_0^s ng_{n-1}(\tau)T(\tau)R(1,A)xd\tau. \end{aligned}$$

Assim, $\forall s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \|H_n(s)\| &\leq |g_n(s)|\ \|T(s)\|\ \|R(1,A)\|\ \|x\| + \int_0^s n|g_{n-1}(\tau)|\ \|T(\tau)\|\ \|R(1,A)\|\ \|x\|d\tau \\ &\leq s^nK\|R(1,A)\|\ \|x\| + K\|R(1,A)\|\ \|x\| \int_0^s n\tau^{n-1}d\tau \\ &\leq 2s^nK\|R(1,A)\|\ \|x\|, \end{aligned} \tag{3.24}$$

onde $K = \sup_{t\geq 0}\|T(t)\|$.

Dado $r \in (0,1]$, definamos $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pela lei $\phi_r(t) = r\phi(rt)$, e $\psi_r = \mathcal{F}(\phi_r)$; então, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\psi_r(t) = \psi(r^{-1}t)$, de modo que $\forall\ s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \phi_r * h_n(s) &= \int_0^\infty \phi_r(s-\tau)h_n(\tau)d\tau \\ &= r^2\int_0^\infty \phi'(rs - r\tau)\int_0^\tau h_n(\omega)d\omega d\tau \\ &= r\int_0^\infty \phi'(rs-\tau)H_n(r^{-1}\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Assim, de (3.24) e (3.25), $\forall\ s \in \mathbb{R}$, temos que

$$\|\phi_r * h_n(s)\| \lesssim r\|x\| \int_0^\infty |\phi'(rs-\tau)|(r^{-1}\tau)^n d\tau.$$

Assim como na demonstração do Teorema 3.1, sejam as funções $\Phi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, definidas como em (3.7), mas com $\Phi_1 = |\phi'|$. Assim, usando estimativas análogas a (3.8) e (3.9) obtemos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{n+1}{t^{n+1}} \int_0^t T(t-s)\phi_r * h_n(s)ds \right\| &\leq \frac{n+1}{t^{n+1}}\int_0^t \|T(t-s)\phi_r * h_n(s)\|ds \\ &\leq \frac{n+1}{t^n}K\int_0^t \|\phi_r * h_n(s)\|ds \\ &\leq Kr\|x\|P_n(rt), \end{aligned} \tag{3.26}$$

onde a constante implícita é independente de r, n, t e x, e onde P_n está definido em (3.10).

Afirmação 3.18. Existe $\epsilon > 0$ tal que $\|R(z,A)\|$ é uniformemente limitada para todo z com $\text{dist}(z, i\text{supp}(1-\psi_r)) < \epsilon$.

Demonstração: Primeiramente, notemos que $0 \notin \text{supp}(1-\psi_r)$, pois $\psi_r(0) = 1$. Assim, $\text{supp}(1-\psi_r) \subset \rho(A)$, e veja também que $\text{supp}(1-\psi_r) \cap (-\infty, 1] \cup [1, \infty) \neq \emptyset$ (pois caso contrário $\psi_r(s) = 1 \ \forall \ |s| \geq 1$, o que é falso)

Sabemos que para todos $z \in \mathbb{C}$ e $\forall \ s \in \mathbb{R}$ tal que $|z - is|\|R(is,A)\| < 1$, vale (vide Teorema 1.10)

$$R(z,A) = \sum_{n=0} (z-is)^n (is-A)^{-n-1}.$$

Seja $C = \sup_{|s|\geq 1} \|R(is,A)\| < \infty$, e tome $\epsilon = 1/2C > 0$; dado $z \in \mathbb{C}$ tal que $\text{dist}(z, i\text{supp}(1-\psi_r)) < \epsilon$, existe $s \in \text{supp}(1-\psi_r) \cap (-\infty, 1] \cup [1, \infty)$, tal que $|z-is|\|R(is,A)\| \leq \frac{1}{2}$, de modo que

$$\begin{aligned}
\|R(z,A)\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (z-is)^n R(is,A)^{n+1} \right\| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |(z-is)^n| \ \|R(is,A)^{n+1}\| \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \|(z-is)\|^n \ \|R(is,A)\|^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \|(z-is)\|^n \ \|R(is,A)\|^n \|R(is,A)\| \\
&\leq C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = C.
\end{aligned}$$

■

Assim, por um argumento análogo ao apresentado na demonstração do Teorema 3.1, temos que $\forall \in \mathbb{N}$,

$$(\delta - \phi_r) * h_n = \mathcal{F}^{-1}((1-\psi_r) m_n \mathcal{F} h), \tag{3.27}$$

onde $m_n : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to X$ é definida pela $m_n(s) = n! A R(is,A)^n$, e $h : \mathbb{R} \to X$ é definida pela $h(s) = g_0 T(s) R(1,A)x$, $s \in \mathbb{R}$.

Afirmação 3.19. $\forall \ s \geq 1$, $M(s) \geq s$.

Demonstração: De fato, segue-se da Proposição 1.3 que $\dfrac{1}{\text{dist}(is^{-1}, \sigma(A))} \leq \|R(is^{-1}, A)\|$, e ainda como $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \{0\}$, temos que $|s| \leq \|R(is^{-1}, A)\|$. Da hipótese $\|R(is^{-1}, A)\| \leq M(s)$, temos então que $\forall \ s \geq 1$, $M(s) \geq s$. ■

Afirmação 3.20. $\forall \ 0 < |s| \leq 1$, $\forall \ n \in \mathbb{N}$, $||AR(is,A)^n|| \leq 2|s| M(|s|^{-1})^n$.

Demonstração: Caso $n = 1$. Temos $\forall \ x \in X$,

$$(is - A)R(is,A)x = x \Leftrightarrow isR(is,A)x - AR(is,A)x = x.$$

Assim,

$$\begin{aligned}||AR(is,A)|| &\leq 1+|s|||R(is,A)||\\ &\leq 1+|s|M(|s|^{-1})\leq 2|s|M(|s|^{-1}),\end{aligned}$$

pois, pela Afirmação 3.19, sabemos que $\forall\ 0<|s|\leq 1$, $|s|M(|s|^{-1})\geq 1$.

Passo indutivo. Suponhamos que para $n\in\mathbb{N}$, $\|AR(is,A)^n\|\leq 2|s|M(|s|^{-1})^n$. Agora,

$$\begin{aligned}\|AR(is,A)^{n+1}\| &\leq \|AR(R(is,A)^n\|\ \|R(is,A)\|\\ &\leq 2|s|M(|s|^{-1})^n\|R(is,A)\|\leq 2|s|M(|s|^{-1})^{n+1}.\end{aligned}$$

∎

Reescalonando M, se necessário podemos assumir que $\forall\ |s|\geq 1$, $\|R(is,A)\|\leq M(1)$. Como M tem crescimento positivo, escolhendo n como na demonstração do Teorema 3.1, temos que

$$\|\|(1-\psi_r(\cdot))m_n(\cdot)\|_{\mathcal{B}(X)}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\lesssim r\left(\frac{M(r^{-1})}{c}\right)^n,\ \text{onde } c>0 \text{ é uma constante.}\tag{3.28}$$

Deduzimos, ao aplicarmos a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a Proposição $A.31$ para $m=(1-\psi_r)m_n$, $p=q=2$ e pelo Teorema $A.18$, que

$$\begin{aligned}\left\|\frac{n+1}{t^{n+1}}\int_0^t T(t-s)(\delta-\phi_r)*h_n(s)ds\right\| &\leq K\frac{n+1}{t^{n+1/2}}||(\delta-\phi_r)*h_n||_{L^2(\mathbb{R},X)}\\ &\leq K\frac{n+1}{t^{n+1/2}}\|(1-\psi_r)\|_{L^\infty(\mathbb{R},\mathcal{B}(X))}\|h\|_{L^2(\mathbb{R},X)}\\ &\leq K^2\|x\|t^{1/2}\|R(1,A)\|\frac{n+1}{t^{n+1/2}}r\left(\frac{M(r^{-1})}{c}\right)^n\\ &= K^2\|x\|\ \|R(1,A)\|\frac{n+1}{t^n}r\left(\frac{M(r^{-1})}{c}\right)^n\\ &= K^2\|x\|\ \|R(1,A)\|(n+1)r\left(\frac{M(r^{-1})}{tc}\right)^n,\end{aligned}$$

onde usamos (3.28) na terceira desigualdade. Portanto,

$$\left\|\frac{n+1}{t^{n+1}}\int_0^t T(t-s)(\delta-\phi_R)*h_n(s)ds\right\|\lesssim r||x||\left(\frac{M(r^{-1})}{tc}\right)^n,\tag{3.29}$$

onde a constante implícita independe de r, t e x. Combinando (3.26) a (3.29) e procedendo como na demonstração do Teorema 3.1, temos que

$$||T(t)AR(1,A)||\lesssim r\left(P_n(rt)+\left(\frac{M(r^{-1})}{ct}\right)^n\right),$$

onde a constante implícita é independente de r e t. Definimos agora $r=M^{-1}(ct)^{-1}$ para t suficientemente grande. Então, em particular, $rt\geq c^{-1}$ (vide a Afirmação 3.19), e como o P_n é não-crescente, o resultado segue da Proposição 1.42. ∎

O próximo resultado é análogo ao Teorema 3.9, ou seja, a estimativa do Teorema anterior é ótima.

Teorema 3.21. *Sejam X um espaço de Banach e A o gerador de um C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ em X. Suponha que $0 \in \sigma(A) \subset \mathbb{C}_- \cup \{0\}$ e que $M : [1,\infty) \to (0,\infty)$ seja uma função contínua não-decrescente para a qual exista $\delta \in (0,1]$ tal que, $\forall\ s \geq 1$,*

$$\delta M(s) \leq \sup_{s^{-1}\leq |r| \leq 1} \frac{1}{dist(ir, \sigma(A))} \leq \sup_{s^{-1}\leq |r|\leq 1} \|R(ir, A)\| \leq M(s).$$

Se $\exists\ c > 0$ tal que

$$\|T(t)AR(1,A)\| = O(M^{-1}(ct)^{-1}), \quad t \to \infty,$$

então M terá crescimento positivo.

Demonstração: Considere a função $N : [1,\infty) \to (0,\infty)$ dada por

$$N(s) = \sup_{s^{-1}\leq |r|\leq 1} \frac{1}{\mathrm{dist}(ir, \sigma(A))}.$$

Então, $\forall s \geq 1$, $\delta M(s) \leq N(s) \leq M(s)$. Antes de prosseguirmos, demonstremos o seguinte resultado.

Lema 3.22. (Teorema de Inclusão Espectral) *Para todo $t \geq 0$,*

$$\{\lambda(1-\lambda)^{-1}e^{\lambda t} \mid \lambda \in \sigma(A)\} \subset \sigma(T(t)AR(1,A).$$

Demonstração: Vamos proceder como na demonstração do Lema 3.10. Seja $\lambda \in \sigma(A)$.
Caso 1: $\lambda \in \sigma_a(A)$.

Afirmação 3.23. $\lambda(\lambda-1)^{-1} \in \sigma_a(AR(1,A))$.

Demonstração: Como $\lambda \in \sigma_a(A)$ existe uma sequência $(x_n) \subset \mathcal{D}(A)$, com $\|x_n\| = 1$, tal que $\|(\lambda - A)x_n\| \to 0$. Defina $y_n = R(1,A)x_n$. Então,

$$\left\|\left(\frac{\lambda}{1-\lambda} - AR(1,A)\right)y_n\right\| = \left\|(\lambda(I-A) - A(1-\lambda))\frac{R(1,A)}{1-\lambda}y_n\right\| \leq \frac{\|R(1,A)\|^2}{|1-\lambda|}\|(\lambda - A)x_n\| \to 0.$$

∎

Note que, $\forall\ t \geq 0$,

$$\left\|\frac{\lambda e^{\lambda t}}{1-\lambda} - T(t)AR(1,A)y_n\right\| \leq \frac{|\lambda|}{|1-\lambda|}\|(e^{\lambda t} - T(t))y_n\| + \|T(t)\| \left\|\frac{\lambda}{1-\lambda} - AR(1,A)y_n\right\|.$$

Observe que, $\forall t \geq 0$, $\forall\ x \in X$,

$$(e^{\lambda t} - T(t))R(1,A)x = (e^{\lambda t} - T(t))\int_0^\infty e^{-s}T(s)xds = R(1,A)(e^{\lambda t} - T(t))x$$

Daí a primeira parcela converge a zero, pelo argumento usado na demonstração do Lema 3.10, e a segunda converge a zero pelo que fizemos acima.

Caso 2: $\lambda \in \sigma_r(A)$.

Afirmação 3.24. $\lambda(\lambda-1)^{-1} \in \sigma_r(AR(1,A))$.

Demonstração: Existe $0 \neq x^* \in X^*$ tal que $\forall\ x \in Im(\lambda - A)\ x^*(x) = 0$. Daí, temos que

$$0 = \frac{1}{1-\lambda} x^* \left((\lambda - A)R(1,A)x\right) = x^* \left(\left(\frac{\lambda}{1-\lambda} - AR(1,A) \right) x \right).$$

■

Para concluir a segunda parte da demonstração do Lema, use a ideia anterior e proceda como na demonstração do Lema 3.10. ■

Seja $\alpha + i\beta \in \sigma(A)$. Temos em analogia à equação (3.21) que, para todo t suficientemente grande,

$$\frac{|\alpha + i\beta|}{|1 - \alpha + i\beta|} e^{\alpha t} \leq \|T(t)AR(1,A)\| \leq \frac{C}{M^{-1}(ct)}.$$

Procedendo como na demonstração do Teorema 3.9, temos que $\forall\ \alpha + i\beta \in \sigma(A)$ e para todo $t > 0$ suficientemente grande,

$$-\alpha t \geq \log \left(\frac{|\alpha + i\beta|}{C|1 - \alpha + i\beta|} N^{-1}(\delta ct) \right). \tag{3.30}$$

Dado $s \geq 0$, pelo Teorema de Weierstrass, existem $r \in [-1, -\frac{1}{s}] \cup [\frac{1}{s}, 1]$ e $\alpha + i\beta \in \sigma(A)$ tais que $N(s) = |\alpha + i\beta - ir|^{-1}$. Note que $-\alpha \leq N(s)^{-1}$ e que, para s grande, temos que $\frac{1}{2s} \leq |\alpha + i\beta|$. Seja $\lambda \geq 1$ e, para s suficientemente grande, seja $t = (\delta c)^{-1} N(\lambda s)$. Note que

$$\log \left(\frac{|\alpha + i\beta|}{|1 - \alpha + i\beta|} \lambda s \right) \quad \geq \quad \log \left(\frac{|\alpha + i\beta|}{1 + |\alpha + i\beta|} \lambda s \right) \geq \log \left(\frac{1/2s}{1 + 1/2s} \lambda s \right) \geq \log \left(\frac{\lambda}{2} \right).$$

Daí, a equação (3.30) produz $\frac{N(\lambda s)}{N(s)} \geq \delta c \log \left(\frac{\lambda}{2C} \right)$, e portanto

$$\frac{M(\lambda s)}{M(s)} \geq \delta c \log \left(\frac{\lambda}{2C} \right).$$

O resultado é agora consequência do Lema 1.39. ■

3.3 Singularidade em infinito e zero

Como veremos no Teorema a seguir, a condição $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} \subset \{0\}$ implica $\lim_{t\to\infty} \|T(t)AR(1,A)^2\| = 0$. Assim como fizemos nas situações discutidas anteriormente, apresentaremos uma caracterização das taxas de decaimento do semigrupo em espaços de Banach, e veremos que no caso que consideremos o espaço de Hilbert, ainda sob a hipótese de crescimento positivo, a taxa de decaimento pode ser aprimorada.

Teorema 3.25 (Corolário 6.2 em [6]). *Seja $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0-semigrupo limitado definido em um espaço de Banach X com gerador A. Então as seguintes afirmações são equivalentes.*

1. $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} \subset \{0\}$;

2. $\lim_{t\to\infty} \|T(t)AR(1,A)^2\| = 0$.

Demonstração: Veja a demonstração em [6]. ∎

Teorema 3.26. *Sejam X um* ***espaço de Banach*** *e seja A o gerador de um C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ limitado definido em X. Suponha que $\sigma(A)\cap i\mathbb{R} = \{0\}$ e que $M_0, M_\infty : [1,\infty) \to (0,\infty)$ sejam funções contínuas não-decrescentes tais que $\|R(is^{-1}, A)\| \leq M_0(|s|)$, $\|R(is, A)\| \leq M_\infty(|s|)$. Seja $M : [1,\infty) \to (0,\infty)$, com $M(s) = \max_{s\geq 1}\{M_0(s), M_\infty(s)\}$. Então, existirá uma constante $c > 0$ tal que*

$$\|T(t)AR(1,A)^2\| = O(M_{\log}^{-1}(ct)^{-1}), \quad t \to \infty, \tag{3.31}$$

onde $M_{\log} : [1,\infty) \to (0,\infty)$ é definida por $M_{\log} = M(s)(\log(1+s) + \log(1+M(s)))$, $\quad s \geq 1$.

Demonstração: Veja a demonstração em [28]. ∎

Teorema 3.27. *Sejam X um* ***espaço de Hilbert*** *e A o gerador de um C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ limitado definido em X. Suponha que $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \{0\}$ e que $M_0, M_\infty : [1,\infty) \to (0,\infty)$ sejam funções contínuas não-decrescentes tais que $\|R(is^{-1}, A)\| \leq M_0(|s|)$, $\|R(is, A)\| \leq M_\infty(|s|)$, $|s| \geq 1$. Seja $M : [1,\infty) \to (0,\infty)$, com $M(s) = \max_{s\geq 1}\{M_0(s), M_\infty(s)\}$, e suponha que M tenha* ***crescimento positivo****. Então,*

$$||T(t)AR(1,A)^2|| = O(M^{-1}(t)^{-1}), \quad t \to \infty. \tag{3.32}$$

Demonstração: Procedemos como nos Teoremas 3.1 e 3.17.

Defina $\forall\ s \in \mathbb{R}$, $\forall \in \mathbb{N}$, $h_n(s) = g_n(s)T(s)AR(1,A)^2$, em que $T(s) = 0$ se $s < 0$, e considere a decomposição $\delta = (\delta - \phi_R) + (\phi_R - \phi) + (\phi - \varphi_r) + \varphi_r$. Assim, $h_n = \delta * h_n = [(\delta-\phi_R)+(\phi_R-\phi)+(\phi-\varphi_r)+\varphi_r]*h_n = (\delta-\phi_R)*h_n+(\phi_R-\phi)*h_n+(\phi-\varphi_r)*h_n+\varphi_r*h_n$. As integrais correspondentes às duas primeiras parcelas podem ser tratadas como na demonstração do Teorema 3.1, enquanto que as restantes como na demonstração do Teorema 3.17. ∎

3.4 Aplicação da Teoria

Nesta seção, apresentaremos uma aplicação dos resultados anteriores, a fim de obtermos estimativas mais precisas para a taxa de decaimento de energia para soluções de uma equação da onda sujeita a um amortecimento na fronteira.

Consideremos o problema (vide o Exemplo 1.33)

$$\begin{cases} u_{tt}(s,t) - \Delta u(s,t) = 0, & s \in (0,1), \quad t \in \mathbb{R}, \\ \partial_n u(s,t) + k * u_t(s,t) = 0, & s \in \{0,1\}, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.33}$$

Aqui, ∂_n denota a derivada normal externa na variável espacial na fronteira, a convolução é em relação à variável temporal e $k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é uma função integrável completamente monótona, o que equivale a dizer que existe uma medida de Radon positiva ν em $\mathbb{R}_+$, satisfazendo $\nu(\{0\}) = 0$ e

$$\int_{\mathbb{R}_+} \tau^{-1} d\nu(\tau) < \infty,$$

tal que, $\forall\ t > 0$,

$$k(t) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\tau t} d\nu(\tau).$$

Estendemos k para toda a reta real ao tomarmos $k(s) = 0$, se $s < 0$. Esse sistema pode ser visto como um modelo de propagação de som sob reflexão sujeita a amortecimento viscoelástico na fronteira, e neste caso, a condição de fronteira captura efeitos de memória; u_t e $-\nabla u$ são, respectivamente, a pressão e a velocidade do fluido, e $\mathcal{F}k$, ou alternativamente, a transformada de Laplace de k, é a impedância acústica; para mais detalhes veja [42].

Começamos por reescrever o problema como um de um problema abstrado de Cauchy (vide o Exemplo 1.33):

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t), \quad t \geq 0, \\ z(0) = x, \quad x \in X, \end{cases} \tag{3.34}$$

onde o vetor de dados inicial, x, é um elemento de algum espaço de Hilbert X e representa não só a pressão e a velocidade do fluido no tempo $t = 0$, mas também a pressão do fluido na fronteira para todos os tempos $t < 0$. Além disso, o quadrado da norma no espaço de Hilbert X pode ser interpretado fisicamente como a energia do sistema.

Teorema 3.28. *Suponha que $\nu([0, \epsilon)) = 0$ para algum $\epsilon > 0$. Então, $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ e existirão constantes $C, c > 0$ tais que $\forall\ s \geq 0$,*

$$\frac{c}{\Re\mathcal{F}k(s)} \leq \sup_{s^{-1} \leq |r| \leq 1} \frac{1}{dist(ir, \sigma(A))} \leq \sup_{s^{-1} \leq |r| \leq 1} \|R(ir, A)\| \leq \frac{C}{\Re\mathcal{F}k(s)}.$$

Demonstração: Veja a demonstração em [42]. ∎

Motivados pelo Teorema 3.28, definamos a função $M : \mathbb{R}_+ \to (0, \infty)$ pela lei

$$M(s) = \frac{1}{\Re\mathcal{F}k(s)}. \tag{3.35}$$

Como consequência dos resultados discutidos neste capítulo, temos os seguintes resultados

Teorema 3.29. *Suponha que exista $\epsilon > 0$ de modo que $\nu([0, \epsilon)) = 0$. Então, existirão constantes $C, c > 0$ tais que para valores suficientemente grandes de t,*

$$\frac{c}{M^{-1}(Ct)} \leq \|T(t)A^{-1}\| \leq \frac{C}{M_{\log}^{-1}(ct)}. \tag{3.36}$$

Demonstração: Como $\nu([0, \epsilon)) = 0$ para algum $\epsilon > 0$, segue-se que do Teorema 3.28 que $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$. Assim, combinando a Proposição 2.4 com o Teorema 2.10, o resultado se segue. ∎

Teorema 3.30. *Suponha que exista $\epsilon > 0$ tal que $\nu([0, \epsilon)) = 0$, para algum $\epsilon > 0$ e defina $M : \mathbb{R}_+ \to (0, \infty)$ como em (3.35). Se M tiver crescimento positivo, então $\forall\ c > 0$,*

$$\|T(t)A^{-1}\| = O(M^{-1}(ct)), \quad t \to \infty, \tag{3.37}$$

e reciprocamente, se (3.37) for válida para algum $c > 0$, então M terá crescimento positivo.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Pelo Teorema 3.28 segue-se que $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$. Assim, combinando a Proposição 1.42 com o Teorema 3.1, o resultado se segue.
($\Leftarrow$) Para a recíproca, basta combinarmos a Proposição 1.42 com o Teorema 3.9. $\blacksquare$

Apêndice A

Resultados da Teoria dos Espaços de Banach

A.1 Elementos de Integração Vetorial

Sejam E um conjunto não-vazio, Σ uma σ-álgebra de subconjuntos de E e μ uma medida σ-finita em Σ.

O objetivo desta seção é discutir a teoria de integração para funções vetoriais $f : E \to X$, em que X é um espaço de Banach. Para uma leitura completa e de maiores detalhes, consulte [12].

Definição A.1. Uma função $f : E \to X$ será uma função simples mensurável se existirem conjuntos mensuráveis $A_1, ..., A_k \in \Sigma$, com $\mu(A_j) < \infty$ para $j = 1, ..., k$, tais que $A_i \cap A_j = \emptyset$ sempre que $i \neq j$, e vetores $b_1, ..., b_k \in X$ tais que

$$f = \sum_{i=1}^{k} \chi_{A_i} b_i. \tag{A.1}$$

Uma função $g : E \to X$ será dita mensurável se existir uma sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funções simples mensuráveis tal que $f_n \to g$ μ-q.t.p.

Observação A.2.

- Para funções a valores escalares, a definição acima coincide com o conceito de mensurabilidade da teoria clássica de medida.

- Inicialmente é válido destacar que a imagem de uma função simples mensurável está contida em um subespaço de dimensão finita. Assim, se g for mensurável, então existirá um conjunto mensurável M tal que $\mu(M) = 0$ e

  $$g(X - M) \subseteq F \subseteq E,$$

  onde F é um subespaço fechado e separável. De fato, observe que se g for mensurável, então existirão funções simples mensuráveis

  $$f_n = \sum_{i}^{k_n} \chi_{A_i^n} b_i^n$$

e um conjunto mensurável M tais que $\mu(M) = 0$ e $f_n(x) \to g(x)$ para todo $\in X - M$. Portanto, $\forall\ x \in X - M$,

$$g(x) \in \overline{\text{Lin}\{b_i^n; n \in \mathbb{N}, i = 1, ..., k_n\}}$$

Concluímos, portanto, que a teoria de integração vetorial pode ser naturalmente restrita a funções tomando valores em um espaço de Banach separável.

Pela definição, vemos que não é fácil verificar a mensurabilidade de uma função. Daí, o resultado seguinte supre parte desta dificuldade.

Teorema A.3. (Teorema de Mensurabilidade de Pettis) *As seguintes afirmações são equivalentes para uma função $f : E \to X$:*
(a) f é mensurável;
(b) f é fracamente mensurável, isto é, $x^*(f) : E \to \mathbb{R}$ é mensurável para todo $x^* \in X^*$;
(c) $\|f\| : E \to \mathbb{R}$ é mensurável.

Demonstração: Veja em [12]. ■

Definição A.4. Dizemos que uma função $f : E \to X$ é Bochner-integrável se existir uma sequência de funções simples mensuráveis $f_n : E \to X$, $n \in \mathbb{N}$, tal que $f_n \to f$ μ-q.t.p e

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \|f_n - f\| d\mu = 0. \tag{A.2}$$

Veja em [12] que a definição acima é consistente, isto é, se f é Bochner-integrável, então o limite existe e independe das funções simples mensuráveis a partir das quais aproximamos f.

Para verificarmos a Bochner-integrabilidade de uma função mensurável $f : E \to X$, temos o seguinte resultado:

Teorema A.5. *Uma função mensurável $f : E \to X$ será Bochner-integrável se, e somente se, a função real $\|f\| : E \to \mathbb{R}$ for Lebesgue-integrável.*

E temos ainda que

Corolário A.6. *Seja $f : E \to X$ uma função Bochner-integrável. Então*

$$\left\| \int_E f d\mu \right\| \leq \int_E \|f\| d\mu.$$

Proposição A.7. *Sejam $f : E \to X$ é uma função Bochner-integrável e $T : X \to Y$ um operador linear limitado entre espaços de Banach. Então, a função $T \circ f : E \to Y$ será Bochner-integrável e*

$$\int_E T \circ f d\mu = T \left(\int_E f d\mu \right). \tag{A.3}$$

Para as demonstrações dos resultados acima, consulte [12].

A seguir, apresentaremos alguns resultados da teoria da medida clássica adaptados ao nosso contexto.

Teorema A.8. (Teorema da Convergência Dominada) *Seja $f_n : E \to X$, $n \in \mathbb{N}$, uma sequência de funções Bochner-integrável. Assuma que $f(t) := \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ (μ-q.t.p) e que existe uma função integrável $g : E \to \mathbb{R}$ tal que $\|f_n(t)\| \leq g(t)$ (μ-q.t.p), para todo $n \in \mathbb{R}$. Então, f é Bochner-integrável e*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(t)dt = \int_E f(t)dt.$$

Teorema A.9. (Teorema de Fubini) *Seja $E = E_1 \times E_2$ um retângulo em $\mathbb{R}^2$, seja $f : E \to X$ uma função mensurável, e suponha que*

$$\int_{E_1} \int_{E_2} \|f(t,s)\| dtds < \infty$$

Então, f será Bochner-integrável e

$$\int_{E_1} \int_{E_2} f(t,s)dtds, \qquad \int_{E_2} \int_{E_1} f(t,s)dsdt$$

existirão, serão iguais e coincidirão com a integral de $\displaystyle\int_E f(t,s)d(t,s)$.

Definição A.10. Seja $L^1(\mathbb{R}, X)$ o espaço de todas as funções $f : \mathbb{R} \to X$ Bochner-integráveis, munido com a norma $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \|f(t)\|dt$.

Observação A.11. De maneira geral, definimos os espaços $L^p(\mathbb{R}, X)$, $1 < p < \infty$, como o espaço das funções mensuráveis tais que

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} \|f(t)\|^p \right)^{1/p} < \infty,$$

e o espaço $L^\infty(\mathbb{R}, X)$ como o espaço das funções mensuráveis tais que

$$\|f\|_\infty = \sup \mathrm{ess}_{t\in\mathbb{R}} \|f(t)\| < \infty.$$

Teorema A.12. *Para todo $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\mathbb{R}, X)$ é um espaço de Banach.*

A.2 Espaços de Schwartz, Transformada de Fourier e Teorema de Plancherel

Definição A.13. O *espaço de Schwartz*, denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, é a coleção das $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tais que

$$f \in C^\infty(\mathbb{R})$$

e, $\forall\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha f^\beta(x)| < \infty$$

Observação A.14. 1. Denotaremos por $C_0^\infty(\mathbb{R})$ a coleções das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ e de suporte compacto, isto é, dada $f \in C^\infty(\mathbb{R})$; existem $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ tal que

$f(x) = 0$ se $x \notin [a,b]$. O suporte de f denotado por supp$f$, é o fecho de $\{x \in \mathbb{R}; f(x) \neq 0\}$ e consiste no menor fechado F tal que, $\forall x \notin F$, $f(x) = 0$.

2. A partir da definição acima, podemos definir o espaços de Schwartz a valores vetoriais, que denotaremos por $\mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$, com as funções $f : \mathbb{R} \to X$ cuja norma em X decrescem muito rápido, isto é, $\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \|x^\alpha f^\beta(x)\|_X < \infty$.

Definição A.15. Para $f \in L^1(\mathbb{R}, X)$, a transformada de Fourier de f, denotada por $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \to X$, é dada pela lei

$$\hat{f}(t) = \mathcal{F}(f)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} f(s)ds. \tag{A.4}$$

Definição A.16. Se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e $f : \mathbb{R} \to X$ forem funções mensuráveis, definiremos a *convolução* de g e f em $t \in \mathbb{R}$ por

$$(g * f)(t) := \int_{\mathbb{R}} g(t-s)f(s)ds,$$

desde de que a integral de Bochner exista.

Teorema A.17. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}, X)$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$.*
*a)***(Teorema da Convolução)** *$\forall s \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(g * f)(s) = \mathcal{F}(g)(s)\mathcal{F}(f)(s)$.*
b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\mathcal{F}(f)(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(g)(t)f(t)dt.$
*c)***(Lema de Riemann-Lebesgue)** *$\mathcal{F}f \in C_0(\mathbb{R}, X)$.*

Teorema A.18. (Teorema de Plancherel) *Seja H um espaço de Hilbert. Então, para todo $f \in L^1(\mathbb{R}, H) \cap L^2(\mathbb{R}, H)$, $\mathcal{F}(f) \in L^2(\mathbb{R}, H)$ e $\forall$ $f \in L^1(\mathbb{R}, H) \cap L^2(\mathbb{R}, H)$,*

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbb{R},H)} = \sqrt{2\pi}\|f\|_{L^2(\mathbb{R},H)}.$$

A única extensão linear de $\mathcal{F}$ em $\in L^1(\mathbb{R}, H) \cap L^2(\mathbb{R}, H)$ a $L^2(\mathbb{R}, H)$ é um operador limitado, e $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}$ é um operador unitário em $L^2(\mathbb{R}, H)$.

Demonstração: Basta assumir que H separável, como vimos na observação $(A.2)$. Assim, seja $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ uma base ortonormal de H, e faça $f_n(t) = \langle f(t), e_n\rangle_h$; note por Cauchy-Schwarz, que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\|f_n(t)\| = \|\langle f(t), e_n\rangle_X\| \leq \|f(t)\|$, e portanto, $\forall$ $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in L^1(\mathbb{R}, X) \cap L^2(\mathbb{R}, X)$, e por (A.4) e pela Pela Proposição $A.7$ obtemos $\langle \mathcal{F}(f)(t), e_n\rangle_H = \mathcal{F}(f_n)(t)$. Usando o teorema de Plancherel para valores escalares, temos:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \|\mathcal{F}(f)(t)\|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{F}(f_n)(t)\|^2 dt \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n(t)\|^2 dt \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \|f(t)\|^2 dt
\end{aligned}$$

o que demonstra que $\|\mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbb{R},X)} = \sqrt{2\pi}\|f\|_{L^2(\mathbb{R},X)}$. Como $L^1(\mathbb{R}_+, X) \cap L^2(\mathbb{R}_+, X)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}_+, X)$, $\mathcal{F}$ possui uma única extensão a um operador limitado em $L^2(\mathbb{R}, X)$. Além disso, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}$ é uma isometria. ∎

A.3 Cálculo de funções Vetoriais

Definição A.19. Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ um domínio e X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$. Diremos que $f : \Omega \to X$ será analítica em Ω se para cada $\lambda_0 \in \Omega$, existir $f'(\lambda_0) \in X$ tal que

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = f'(\lambda_0).$$

O vetor $f'(\lambda_0)$ será chamado de derivada de f em λ_0.

Teorema A.20. *Sejam X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$, e $f : \Omega \to X$ uma função tal que $x^* \circ f : \Omega \to \mathbb{C}$ seja analítica para todo $x^* \in X^*$. Então, $f : \Omega \to X$ será analítica.*

Demonstração: Seja $\lambda_0 \in \Omega$. Como X é completo, é suficiente demonstrar que para cada $\lambda_0 \in \Omega$, a expressão

$$\frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} - \frac{f(\mu) - f(\lambda_0)}{\mu - \lambda_0}$$

tende a zero quando λ e μ tendem a λ_0, ou seja, basta mostrarmos que a sequência $\left(\frac{f(\lambda_n)-f(\lambda_0)}{\lambda_n-\lambda_0}\right)$ é de Cauchy.

Escolha $r > 0$ tal que $\overline{B}(r, \lambda_0) \subset \Omega$, e denote por γ a fronteira de $\overline{B}(r, \lambda_0)$, orientada no sentido anti-horário. Para cada $x^* \in X^*$, a função $x^* \circ f : \overline{B}(r, \lambda_0) \to \mathbb{C}$ é contínua, e portanto limitada. Assim, pelo Princípio da Limitação Uniforme, existe uma constante $M > 0$ tal que, $\forall \xi \in \overline{B}(r, \lambda_0)$,

$$\|f(\xi)\|_X \leq M. \tag{A.5}$$

Pela fórmula integral de Cauchy, se $\zeta \in \overline{B}(\frac{r}{2}, \lambda_0)$, temos que

$$x^*(f(\zeta)) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{x^*(f(\xi))}{\xi - \zeta} d\xi. \tag{A.6}$$

Agora, se $x^* \in X^*$ e $\lambda, \mu \in \overline{B}(\frac{r}{2}, \lambda_0)$, substituindo ζ por λ, μ e λ_0 em $(A.6)$, obtemos

$$x^* \left(\frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} - \frac{f(\mu) - f(\lambda_0)}{\mu - \lambda_0} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(\lambda - \mu) x^*(f(\xi))}{(\xi - \lambda)(\xi - \mu)(\xi - \lambda_0)} d\xi \tag{A.7}$$

Nossa escolha de λ e μ assegura que $|\lambda - \xi| \geq \frac{r}{2}$ e $|\mu - \xi| \geq \frac{r}{2}$. Assim, por $(A.5)$ e $(A.7)$, temos que

$$\left| x^* \left(\frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} - \frac{f(\mu) - f(\lambda_0)}{\mu - \lambda_0} \right) \right| \leq \frac{4M \|x^*\|_{X^*} |\lambda - \mu|}{r^2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} - \frac{f(\mu) - f(\lambda_0)}{\mu - \lambda_0} \right\|_X &= \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| = 1}} \left| x^* \left(\frac{f(\lambda) - f(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} - \frac{f(\mu) - f(\lambda_0)}{\mu - \lambda_0} \right) \right| \\ &\leq \frac{4M |\lambda - \mu|}{r^2}. \end{aligned}$$

∎

Teorema A.21. *Sejam X e Y, espaços de Banach sobre $\mathbb{C}$ e Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$. Se $A : \Omega \to \mathcal{B}(X,Y)$, então as seguintes afirmações serão equivalentes:*
(a) Para cada $x \in X$ e cada $y^* \in Y^*$, a função $\Omega \ni \lambda \mapsto y^*(A(y)x) \in \mathbb{C}$ é analítica.
(b) Para cada $x \in X$, a função $\Omega \ni \lambda \mapsto A(y)x \in Y$ é analítica.
(c) A função $\Omega \ni \lambda \mapsto A(\lambda) \in \mathcal{B}(X,Y)$ é analítica.

Demonstração: $(a) \Rightarrow (b)$. Segue-se do Teorema $A.20$.
$(b) \Rightarrow (c)$. A demonstração é análoga à demonstração do Teorema $A.20$.
$(c) \Rightarrow (a)$. Seja $\lambda_0 \in \Omega$. Como, $\forall\ x \in X$,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{y^*(A(\lambda)x) - y^*(A(\lambda_0)x)}{\lambda - \lambda_0} = y^* \left(\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{(A(\lambda) - a(\lambda_0))x}{\lambda - \lambda_0} \right),$$

a existência do limite acima implica (a). ■

Definição A.22. Um subconjunto Ω de $\mathbb{C}$ será chamado um *domínio de Cauchy* se for aberto, possuir um número finito de componentes conexas e a fronteira de Ω for composta por um número finito de curvas fechadas, retificáveis e simples. A fronteira de Ω orientada positivamente será denotada por $+\partial\Omega$.

Teorema A.23. (Teorema de Cauchy) *Sejam X um espaço de Banach sobre $\mathbb{C}$, Ω um domínio de Cauchy limitado e $f : \overline{\Omega} \to X$ uma função contínua que é analítica em Ω. Então,*

$$\int_{+\partial\Omega} f(z)dz = 0.$$

Demonstração: Seja $z_0 \in \Omega$ e note que $\Omega \ni z \mapsto x^*(f(z))$ é analítica em z_0:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{x^*(f(z)) - x^*(f(z_0))}{z - z_0} = x^* \left(\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right) = x^*(f'(z_0)).$$

Assim, $z \mapsto x^*(f'(z)) = \frac{d}{dz}(x^* \circ f)(z)$. Como $z \mapsto \frac{d}{dz}(x^* \circ f)(z)$ é analítica, segue-se do Teorema $A.20$ que $\Omega \ni z \mapsto f'(z)$ é analítica.

Com isto, utilizando resultados para funções a valores complexos (vide o Teorema 2.13 em ([41]) e pela Proposição $A.7$, temos que

$$0 = \int_{+\partial\Omega} x^* \circ f(z)dz = x^* \left(\int_{+\partial\Omega} f(z)dz \right)$$

Como a igualdade acima é válida para todo $x^* \in X^*$, segue-se que

$$\int_{+\partial\Omega} f(z)dz = 0.$$

■

Observação A.24. Muitas propriedade de funções analíticas e integrais de contorno podem ser estendidas do caso escalar ao vetorial ao se aplicar o Teorema de Hahn-Banach. Isso é particularmente verdadeiro para a fórmula de Cauchy: se f for analítica em Ω, $\overline{B}(z_0, R)$ estiver contido em Ω e $w \in B(z_0, R)$, então

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{z-w}dz. \tag{A.8}$$

.

Teorema A.25. (Princípio do Máximo) *Seja X um espaço de Banach complexo e seja Ω um subconjunto aberto e conexo de $\mathbb{C}$. Seja $f : \Omega \to X$ uma função analítica em Ω e suponha que $\|f(\lambda)\|_X$ não é constante em Ω. Então, $\|f(\lambda)\|_X$ não poderá atingir seu máximo absoluto em nenhum ponto de Ω.*

Demonstração: Suponha que $\|f(\lambda)\|_X$ atinja seu máximo em Ω, isto é, que exista $\lambda_0 \in \Omega$ tal que, $\forall\ \lambda \in \Omega$,

$$\|f(\lambda)\|_X \leq \|f(\lambda_0)\|_X.$$

Por Hahn-Banach, existe $x^* \in X^*$, com $\|x^*\| = 1$, tal que $x^*(f(\lambda_0)) = \|f(\lambda_0)\|$. Assim, seja $g : \Omega \to \mathbb{C}$ dada pela lei $g(\lambda) = x^*(f(\lambda))$. Vemos que g é analítica em Ω e

$$|g(\lambda)| = |x^*(f(\lambda))| \leq |x^*(f(\lambda_0))| = |g(\lambda_0)|.$$

Logo, g atinge o seu máximo em Ω, e pelo Teorema do Princípio do Máximo para funções a valores complexos (vide o Corolário 2.11 em [41]), segue-se que g é constante, portanto, que $g(\lambda) = \|f(\lambda_0)\|_X$, para todo $\lambda \in \Omega$. Por outro lado, $\forall \lambda \in \Omega$, $\|f(\lambda_0)\|_X = x^*(f(\lambda)) \leq \|f(\lambda)\|_X$, donde se segue que, $\forall \in \Omega$, $\|f(\lambda)\|_X = \|f(\lambda_0)\|_X$; contradição.

■

A.4 Multiplicadores de Fourier

Para mais detalhes desta seção veja em [35].

Definição A.26. Sejam X e Y espaços de Banach, e seja $m : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(X, Y)$ fortemente mensurável (isto é, para cada $x \in X$, a função $s \mapsto m(s)x$ é mensurável). Diremos que m terá crescimento infinito moderado se existirem $\alpha \in (0, \infty)$ e uma função $g \in L^1(\mathbb{R})$ tais que

$$(1 + |\xi|)^{-\alpha}\|m(\xi)\|_{\mathcal{B}(X,Y)} \leq g(\xi).$$

Para tal m, seja o operador $T_m : \mathcal{S}(\mathbb{R}, X) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}, X)$ definido pela lei

$$T_m(f) := \mathcal{F}^{-1}(m(\cdot)\mathcal{F}(f)(\cdot)), \tag{A.9}$$

o qual chamaremos de operador multiplicador de Fourier associado a m; m será chamado de símbolo de T_m.

Observação A.27. 1. Seja $p, q \in [1, \infty]$. Diremos que m será $(L^p(\mathbb{R}, X), L^q(\mathbb{R}, Y))$- limitada se existir uma constante $c \in (0, \infty)$ tal que $T_m(f) \in L^q(\mathbb{R}, X)$ e $\|T_m(f)\|_{L^q(\mathbb{R},X)} \leq c\|f\|_{L^p(\mathbb{R},X)}$, para toda função $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}, X)$.

2. Para o caso em que T_m se estender a um operador limitado de $L^p(\mathbb{R},X)$ em $L^p(\mathbb{R},X)$ diremos que m será um $(L^p(\mathbb{R},X))-$multiplicador de Fourier.

Definição A.28. (Tipo de Fourier) Diremos que o espaço de Banach X terá tipo de Fourier $p \in [1,2]$ se a transformada $\mathcal{F}$ de Fourier, $\mathcal{F} : L^p(\mathbb{R},X) \to L^q(\mathbb{R},X)$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, for um operador limitado, e denotaremos $\mathcal{F}_{p,X} = \|\mathcal{F}\|_{L^p(\mathbb{R},X)\to L^q(\mathbb{R},X)}$.

Definição A.29. (Cotipo de Fourier) Diremos que o espaço de Banach X terá cotipo de Fourier q se tiver tipo de Fourier p, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Observação A.30. Se X for um espaço de Hilbert então pelo Teorema de Plancherel X possuirá tipo de Fourier $p = 2$ e cotipo de Fourier $q = 2$ (veja também o Teorema 7.4.1 em [1]).

Proposição A.31. *Sejam X um espaço de Banach com tipo de Fourier $p \in [1,2]$ e Y um espaço de Banach com cotipo $q \in [2,\infty]$, e seja $r \in [1,\infty]$ tal que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Seja ainda $m : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(X,Y)$ uma aplicação fortemente mensurável tal $\|m(\cdot)\|_{\mathcal{B}(X,Y)} \in L^r(\mathbb{R})$. Então, T_m possuirá uma única extensão limitada de $L^p(\mathbb{R};X)$ em $L^q(\mathbb{R},Y)$, com*

$$\|T_m\|_{\mathcal{B}(L^p(\mathbb{R};X);L^q(\mathbb{R},Y))} \leq \mathcal{F}_{p,X}\mathcal{F}_{q',Y}\|\|m(\cdot)\|_{\mathcal{B}(X,Y)}\|_{L^r(\mathbb{R})}. \tag{A.10}$$

Demonstração: Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R},X)$. Pela desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned} \|m\hat{f}\|_{L^{q'}(\mathbb{R};Y)} &\leq \|\|m(\cdot)\|_{\mathcal{B}(X,Y)}\|_{L^r(\mathbb{R}}\|\hat{f}\|_{L^{p'}(\mathbb{R};Y)} \\ &\leq \mathcal{F}_{p,X}\|\|m(\cdot)\|_{\mathcal{B}(X,Y)}\|_{L^r(\mathbb{R})}\|f\|_{L^p(\mathbb{R};Y)}, \end{aligned}$$

em que p' é o expoente Hölder conjugado de p.

Como, $\forall\ g \in L^{q'}(\mathbb{R},Y)$, onde q' é o expoente Hölder conjugado de q, $\|\mathcal{F}^{-1}(g)\|_{L^q(\mathbb{R};Y)} = \|\mathcal{F}(g)\|_{L^q(\mathbb{R};Y)}$, segue-se que

$$\begin{aligned} \|T_m(f)\|_{L^q(\mathbb{R};Y)} &\leq \mathcal{F}_{q',Y}\|m\hat{f}\|_{L^{q'}(\mathbb{R};Y)} \\ &\leq \mathcal{F}_{q',Y}\mathcal{F}_{p,X}\|\|m(\cdot)\|_{\mathcal{B}(X,Y)}\|_{L^r(\mathbb{R})}\|f\|_{L^p(\mathbb{R};Y)}, \end{aligned}$$

o que encerra a demonstração. ∎

Observação A.32. Denotaremos $\|\|m(\cdot)\|_{\mathcal{B}(X,Y)}\|_{L^r(\mathbb{R})} = \|m\|_{L^r(\mathbb{R},\mathcal{B}(X,Y))}$.

Apêndice B

Resultados Auxiliares

Nesta seção, fizemos um condensado de todas definições e resultados que nos auxiliaram nas demonstrações dos principais resultados presentes no texto.

B.1 Preliminares

Definição B.1. Diremos que uma função $f \in C^\infty(0,\infty)$ será completamente monótona se, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e $\forall\ \lambda \in (0,\infty)$,

$$(-1)^n f^n(\lambda) \geq 0.$$

Definição B.2. Uma função $f \in C^\infty(0,\infty)$ será dita de Bernstein se $f \geq 0$ e se f' for completamente monótona.

Observação B.3. Pelo Teorema de Representação de Lévy-Khintchine, (vide o Teorema 3.2 em [38]), f será uma função de Bernstein se, e somente se, existirem constantes $a, b \in \mathbb{R}$ e uma medida de Radon, μ_{KL}, tais que

$$\int_{0+}^{\infty} \frac{s}{s+1} d\mu_{KL} < \infty \tag{B.1}$$

$$f(\lambda) = a + b\lambda + \int_{0+}^{\infty} (1 - e^{-\lambda s}) d\mu_{KL}(s). \tag{B.2}$$

A tripla (a, b, μ_{KL}) será chamada de tripla de Lévy-Khintchine.

Definição B.4. Uma função $f \in C^\infty(0,\infty)$ será dita de Bernstein Completa se for uma função de Bernstein e se a medida μ_{LK} da tripla de Lévy-Khintchine tiver densidade completamente monótona.

Observação B.5. Toda função de Bernstein completa admite a representação, (veja o Teorema 6.1, [38]),

$$f(\lambda) = a + b\lambda + \int_{0+}^{\infty} \frac{s}{s+\lambda} d\mu(s). \tag{B.3}$$

onde μ é uma medida de Radon positiva em $(0,\infty)$ e

$$\int_{0+}^{\infty} \frac{d\mu(s)}{s+1} < \infty. \tag{B.4}$$

Definição B.6. Uma função $h \in C^\infty(0,\infty)$ será dita Stieltjes se existirem constantes $a, b \geq 0$ e uma medida de Radon positiva, μ, em $(0,\infty)$ satisfazendo $(B.4)$, tal que $\forall\lambda > 0$,

$$h(\lambda) = \frac{a}{\lambda} + b + \int_{0+}^{\infty} \frac{d\mu(s)}{s+\lambda}. \tag{B.5}$$

A representação de h será chamada de representação de Stieltjes de h, que denotaremos por $h \sim (a,b,\mu)$; (a,b,μ) será chamada de tripla de Stieltjes.

Observação B.7. Quando μ for uma medida de Lebesgue-Stieltjes associada a uma função crescente semicontínua g, denotaremos a função Stieltjes com representação $(0,0,\mu)$ por S_g, a qual chamaremos de função Stieltjes associada a g.

Exemplo B.8. Sejam ℓ uma função de variação lenta (vide a Observação 1.36, item 1) definida em $\mathbb{R}_+$, $\alpha \geq 0$, e assuma que $g(s) := s^\alpha \ell(s)$ é crescente. A função de Stieltjes associada, a saber,

$$S_g(\lambda) = \int_{0+}^{\infty} \frac{dg(s)}{(s+\lambda)} = \int_{0}^{\infty} \frac{s^\alpha l(s)}{(s+\lambda)^2} ds,$$

estará definida se a integral for finita. Isso ocorre para $\alpha < 1$, veja o exemplo 2.14 em [6].

Definição B.9. Seja ℓ uma função de variação lenta. Diremos que $\ell^\#$ é o *conjugado de Brujin* de ℓ, se for de variação lenta e tal que

$$\lim_{s\to\infty} \ell(s)\ell^\#(s\ell(s)) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{s\to\infty} \ell^\#(s)\ell(s\ell^\#(s))) = 1.$$

Proposição B.10. *Sejam ℓ uma função de variação lenta, $\alpha > 0$ e $g : (0,a] \to (0,\infty)$. Então,*

1. $\ell^{\#\#} \sim \ell$,

2. *se* $g(s) \sim s^\alpha/\ell(s^{-\alpha})$, *então* $g^{-1}(s) \sim s^{1/\alpha}/\ell^\#(1/\alpha)$, $\quad s \to 0^+$.

Demonstração: Veja a demonstração em [6], Proposição 2.11. ■

Teorema B.11. (Karamata) *Seja $g : \mathbb{R}_+ \to (0,\infty)$ uma função crescente em $\mathbb{R}_+$, e seja S_g a função de Stieltjes associada a g. Sejam $0 < \sigma \leq 1$ e $\ell : \mathbb{R}_+ \to (0,\infty)$ uma função com variação lenta.*

- *São equivalentes:*
  1. $g(s) \sim s^{1-\sigma}\ell(s), \quad s \to \infty$;
  2. $S_g(\lambda) \sim \Gamma(\sigma)\Gamma(2-\sigma)\lambda^{-\sigma}\ell(\lambda), \quad \lambda \to \infty$

- *São equivalentes:*
  1. $g(s) \sim s^{1-\sigma}\ell(1/s), \quad s \to 0^+$;
  2. $S_g(\lambda) \sim \Gamma(\sigma)\Gamma(2-\sigma)\lambda^{-\sigma}\ell(1/\lambda), \quad \lambda \to 0^+$.

Demonstração: Veja a demonstração em [6], Teorema 2.15. ■

B.2 Operadores Setoriais

Para cada $\phi \in (0, \pi]$ considere o setor

$$\Sigma_\phi := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid |\arg(z)| < \phi\}.$$

Definição B.12. (Operador Setorial) Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ um operador linear densamente definido. Diremos que A é setorial de ângulo $\phi \in [0, \pi)$ se $\Sigma_\phi \subset \rho(A)$ e se $\sup\{\|\lambda R(\lambda, A)\| \mid \lambda \in \Sigma_\phi\} < \infty$.

Note que $\rho(A) \neq \emptyset$, e então se segue da Proposição 1.3 que A é um operador fechado.

Teorema B.13. *Seja A um operador setorial definido em espaço Banach X. Então existe $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\epsilon > 0$, e uma contante $C' \geq C$ tal que $\Sigma_{\phi,\epsilon} := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |arg\lambda| \leq \phi\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |arg\lambda| \leq \epsilon\} \subset \rho(A)$ e $\forall\ \lambda \in \Sigma_{\phi,\epsilon}$,*

$$\|R(\lambda, A)\| \leq C'(1 + |\lambda|)^{-1}.$$

Demonstração: Veja a demonstração em [20]. ∎

Definição B.14. Sejam A um operador setorial e $\alpha > 0$. O operador linear limitado $(-A)^{-\alpha}$ é definido por

$$(-A)^{-\alpha}x := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\phi,\epsilon}} (-\lambda)^{-\alpha} R(\lambda, A)x d\lambda.$$

onde $\Gamma_{\phi,\epsilon} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ é o caminho orientado positivamente, em que

$$\Gamma_1 = \{\lambda \mid \arg\lambda = -\phi; |\lambda| \geq \epsilon\},$$

$$\Gamma_2 = \{\lambda \mid |\arg\lambda| > \phi; |\lambda| = \epsilon\},$$

$$\Gamma_3 = \{\lambda \mid \arg\lambda = \phi; |\lambda| \geq \epsilon\}.$$

Note que $\Gamma_{\phi,\epsilon} = +\partial\Sigma_{\phi,\epsilon}$, com $\Sigma_{\phi,\epsilon}$ como no enunciado do Teorema $B.13$.

Teorema B.15 (Teorema 5.27 em [18])**.** *Sejam A um operador setorial e $\alpha \in (0, n+1) \setminus \mathbb{N}$. Então, $A^{-\alpha} : X \to X$ é dada, $\forall x \in X$, pela lei*

$$A^{-\alpha}x = \frac{n! e^{\pi\alpha i} \sin \alpha\pi}{(1-\alpha)\cdots(n-\alpha)\pi}\int_0^\infty \lambda^{n-\alpha} R(\lambda, A)^{n+1} x d\lambda.$$

Demonstração: Veja a demonstração em [18]. ∎

Teorema B.16. (Desigualdade do Momento) *Sejam B um operador setorial e $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que $0 \leq \alpha < \beta < \gamma$. Então, existirá uma constante $C > 0$ tal que $\forall x \in \mathcal{D}(B^\gamma)$,*

$$\|B^\beta x\| \leq C\|B^\alpha x\|^{(\gamma-\beta)/(\gamma-\alpha)}\|B^\gamma x\|^{(\beta-\alpha)/(\gamma-\alpha)}. \tag{B.6}$$

Se $S : X \to \mathcal{D}(B^\gamma)$ é um operador linear e $B^\gamma S \in \mathcal{B}(X)$, então

$$\|B^\beta S\| \leq C\|B^\alpha S\|^{(\gamma-\beta)/(\gamma-\alpha)}\|B^\gamma S\|^{(\beta-\alpha)/(\gamma-\alpha)}. \tag{B.7}$$

Demonstração: Primeiramente, demonstremos o seguinte resultado.

Afirmação B.17. Sejam B um operador setorial, $\theta \in (0,1)$ e $\lambda > 0$. Então, existirá $L > 0$ tal que
$$\|B^{-\theta}\lambda^{\theta}BR(\lambda, B)\| \leq L.$$

Demonstração: Fazendo $n = 0$ no Teorema $B.15$, temos que
$$B^{-\theta} = \frac{\sin\theta\pi}{\pi}\int_0^{\infty}(\lambda s)^{-\theta}\lambda R(s\lambda, B)ds,$$

portanto,
$$\begin{aligned}
B^{-\theta}\lambda^{\theta}BR(\lambda, B) &= \frac{\sin\theta\pi}{\pi}\int_0^{\infty}(\lambda s)^{-\theta}\lambda R(s\lambda, B)\lambda^{\theta}BR(\lambda, B)ds \\
&= \frac{\sin\theta\pi}{\pi}\int_0^{\infty} s^{-\theta}\lambda R(s\lambda, B)BR(\lambda, B)ds \\
&= \frac{\sin\theta\pi}{\pi}\int_0^{1} s^{-\theta}\lambda R(s\lambda, B)BR(\lambda, B)ds + \frac{\sin\theta\pi}{\pi}\int_1^{\infty} s^{-\theta-1}\lambda sR(s\lambda, B)BR(\lambda, B)ds.
\end{aligned}$$

Daí, segue-se que
$$\begin{aligned}
\|B^{-\theta}\lambda^{\theta}BR(\lambda, B)\| &\leq \frac{1}{\pi}\int_0^{1} s^{-\theta}\|BR(s\lambda, B)\|\ \|\lambda R(\lambda, B)\|ds \\
&+ \frac{1}{\pi}\int_1^{\infty} s^{-\theta-1}\|\lambda sR(s\lambda, B)\|\ \|BR(\lambda, B)\|ds \\
&\leq \frac{C(C+1)}{\pi}\left(\int_0^{1} s^{-\theta}ds + \int_1^{\infty} s^{-\theta-1}ds\right) = \frac{C(C+1)}{\pi} =: L,
\end{aligned}$$

na última desigualdade, usamos o fato que, para todo $\lambda > 0$, $\|\lambda R(\lambda, B)\| \leq C$, pois B é setorial e $\|BR(\lambda, B)\| \leq C + 1$, pois $\|BR(\lambda, B)\| = \|\lambda R(\lambda, B) - I\| \leq 1 + C$. ■

Suponha que $\alpha_0 > \beta_0 > 0$ e seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_0 \in (n, n+1]$, então, $\beta_0 \in (0, n+1)$ e pela Afirmação $B.17$ temos que, $\forall x_0 \in X$
$$\begin{aligned}
\|s^{n-\beta_0}R(s, B)^{n+1}x_0\| &\leq s^{\alpha_0-\beta_0-1}\|s^{n+1-\alpha_0}B^{-n-1+\alpha_0}BR(s, B)\|\ \|B^nR(s, B)^n\|\ \|B^{-\alpha_0}x_0\| \\
&\leq Ls^{\alpha_0-\beta_0-1}\|B^{-\alpha_0}x_0\|.
\end{aligned}$$

Note ainda que sendo B um operador setorial, temos que $\forall\ s > 0$,
$$\|s^{n-\beta_0}R(s, B)^{n+1}x_0\| \leq s^{n-\beta_0}\|R(s, B)\|^{n+1}\|x_0\| \leq c_2 s^{n-\beta_0}s^{-n-1}\|x_0\| = C_2 s^{-\beta_0-1}\|x_0\|.$$

Utilizando estas desigualdades e o Teorema $B.15$, obtemos $\forall \tau > 0$,

$$\begin{aligned}
\|B^{-\beta_0}x_0\| &\leq C_3\left\|\int_0^\infty s^{n-\beta_0}R(s,B)^{n+1}x_0ds\right\| \\
&\leq C_3\left\|\int_0^\tau s^{n-\beta_0}R(s,B)^{n+1}x_0ds + \int_\tau^\infty s^{n-\beta_0}R(s,B)^{n+1}x_0ds\right\| \\
&\leq C_5\int_0^\tau s^{\alpha_0-\beta_0-1}\|B^{-\alpha_0}x_0\|ds + C_5\int_\tau^\infty s^{-\beta_0-1}\|x_0\|ds \\
&= \frac{C_5}{\alpha_0-\beta_0}\tau^{\alpha_0-\beta_0}\|B^{-\alpha_0}x_0\| + \frac{C_5}{\beta_0}\tau^{-\beta_0}\|x_0\|,
\end{aligned}$$

onde $C_5 = \max\{LC_3, C_2C_3\}$. Fazendo $\tau := \|B^{\beta_0}x_0\|^{-1/\alpha_0}\|x_0\|^{1/\alpha}$, obtemos

$$\|B^{-\beta_0}x_0\| \leq C\|B^{\alpha_0}x_0\|^{\frac{\beta_0}{\alpha_0}}\|x_0\|^{\frac{\alpha_0-\beta_0}{\alpha_0}}.$$

Para concluirmos basta tomarmos $\alpha_0 := \gamma - \alpha$, $\beta_0 := \gamma - \beta$ e $x_0 = B^\gamma x$.

Para concluir, basta substituirmos x_0 por Sx_0 em $B.7$. ■

Teorema B.18. *Seja A o gerador de um C_0-semigrupo limitado definido em X. Então A é um operador setorial.*

Demonstração: Pelo Teorema 1.22 (item 4) segue-se que $(0,\infty) \subset \rho(A)$ e pelo Corolário 1.23 temos que, $\forall \lambda > 0$,

$$\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\| \leq K.$$

■

Definição B.19. Seja A o gerador de um C_0-semigrupo limitado, e assuma A invertível. Seja $\beta \in (0,1]$, e seja l uma função de variação lenta tal que $g : s \mapsto s^{1-\beta}l(s)$ seja crescente em $\mathbb{R}_+$. Seja S_g a função de Stieltjes associado a g. Para $\alpha \geq \beta$, defina

$$W_{\alpha,\beta,l}(-A) := (-A)^{-(\alpha-\beta)}\int_{0^+}^\infty (s-A)^{-1}d(s^{1-\beta}l(s)) = (-A)^{-(\alpha-\beta)}S_g(A).$$

Para $0 < \alpha < \beta$, defina

$$\begin{aligned}
W_{\alpha,\beta,l}(-A) &:= \int_{0^+}^\infty (-A)^{\beta-\alpha}(s-A)^{-1}d(s^{1-\beta}l(s)) \\
&= \int_{0^+}^\infty (-A)^{\beta-\alpha}(s-A)^{-2}s^{1-\beta}l(s)ds.
\end{aligned}$$

As integrais definidas acima convergem conforme o Exemplo $B.8$. Então o operador $W_{\alpha,\beta,l}$ está bem definido. Para mais detalhes, veja o Teorema 3.7 em [15].

B.3 Teoria de Semigrupos

Teorema B.20 (Forma Geral do Teorema de Hille-Yosida). *Seja $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ um operador linear. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *A é um gerador de um C_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ tal que $\forall\ t \geq 0$,*

$$\|T(t)\| \leq Me^{\omega t};$$

2. *A é fechado, densamente definido, $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$ e $\forall\ n \in \mathbb{N}$,*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq M(\lambda - \omega)^{-n}.$$

Demonstração: Veja a demonstração em [32]. ∎

Demonstração da Proposição 2.17

(2) ⇒ (1) Suponhamos que (2.32) seja válido para algum $\gamma > 0$. Definamos temporariamente $\delta = \alpha\gamma$; então, $\forall t > 0$ e $\forall\ n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|T(t)(-A)^{-\delta n}\| &= \|(T(t/n)(-A)^{-\delta})^n\| \\ &\leq \|T(t/n)(-A)^{-\delta}\|^n \\ &\leq (C'(\gamma))^n n^\gamma t^{-\gamma n} = C(n)t^{-\gamma n}. \end{aligned}$$

Fazendo $B = (-A)$, $S = T(t)(-A)^{-n\delta}$, $\alpha = n\delta$ e $\beta = n\delta(1-\vartheta)$ no Teorema $B.16$), obtemos

$$\begin{aligned} \|T(t)(-A)^{-n\delta\vartheta}\| &= \|(-A)^{n\delta(1-\vartheta)}T(t)A^{-n\delta}\| \\ &\leq c\|(-A)^{n\delta}T(t)(-A)^{-n\delta}\|^{1-\vartheta}\|T(t)(-A)^{-n\delta}\|^{\vartheta} \\ &\leq cK^{1-\vartheta}C(n)^\vartheta t^{-\gamma n\vartheta}, \end{aligned}$$

onde $K = \sup_{t\geq 0}\|T(t)\|$, $\vartheta \in (0,1)$, e c é constante que depende apenas dos expoentes. Escolhendo $n > \dfrac{1}{\gamma}$ e $\vartheta = \dfrac{1}{n\gamma}$, obtemos

$$\|T(t)A^{-\alpha}\| \leq Ct^{-1}.$$

(1) ⇒ (2) Suponhamos (2.31) válido e tomemos $\widetilde{\gamma} > 0$. Agora, substitua nas estimativas anteriores γ por 1 e ϑ por $\frac{\widetilde{\gamma}}{n}$ para algum $n > \widetilde{\gamma}$. ∎

Lema B.21 (Lema 2.1 em [39])**.** *Seja H um espaço de Hilbert e A o gerador de um C_0-senigrupo definido em H. Se, $\forall\ x, y \in H$,*

$$\sup_{\xi>0} \xi \int_{\mathbb{R}} \|R(\xi + i\eta, A)x\|^2 d\eta < \infty, \tag{B.8}$$

e

$$\sup_{\xi>0} \xi \int_{\mathbb{R}} \|R(\xi - i\eta, A^*)y\|^2 d\eta < \infty, \tag{B.9}$$

então, para cada $\sigma_1 > 0$, temos que

$$\|R(\lambda, A)\| \to 0, \quad \Re\lambda > \sigma_1 \quad e \quad |\lambda| \to \infty.$$

Demonstração: Seja $\lambda = \sigma + i\eta$. Para $\sigma > \sigma_1$ defina a aplicação $S_\sigma : H \to L^2(\mathbb{R}, H)$ de modo que $\forall\ x \in H$ e $\eta \in \mathbb{R}$,

$$(S_\sigma x)(\eta) = \sqrt{\sigma} R(\sigma + i\eta, A)x$$

Por $(B.8)$, temos que S_σ é um operador linear fechado de H em $L^2(\mathbb{R}, H)$, com $\mathcal{D}(S_\sigma) = H$; assim pelo Teorema do Gráfico Fechado, S_σ é limitado. Ainda por $(B.8)$, temos que

$$\sup_{\sigma>0} \|S_\sigma x\|_{L^2(\mathbb{R},H)} < \infty.$$

Pelo Princípio da Limitação Uniforme, existe $M_1 > 0$ (que independe de σ) tal que, $\forall\ \sigma > 0$, $\|S_\sigma\| \leq M_1$. Assim,

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \|R(\sigma + i\eta, A)x\|^2 d\eta\right)^{1/2} \leq \frac{M_1\|x\|}{\sqrt{\sigma}}. \tag{B.10}$$

Analogamente, temos que $\forall\ \sigma > 0$ e $\forall\ x \in H$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \|R(\sigma - i\eta, A^*)x\|^2 d\eta\right)^{1/2} \leq \frac{M_2\|x\|}{\sqrt{\sigma}}. \tag{B.11}$$

Segue-se de $(B.10)$, $(B.11)$ e da desigualdade de Cauchy-Schwarz, que $\forall\ \sigma > 0$, $\forall\ \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$ e $\forall\ x \in H$

$$\begin{aligned}
\left\|\int_{\eta_1}^{\eta_2} R^2(\sigma + i\eta, A)x d\eta\right\| &= \sup_{y\in H, \|y\|=1} \langle \int_{\eta_1}^{\eta_2} R^2(\sigma + i\eta, A)x d\eta, y\rangle \\
&= \sup_{y\in H, \|y\|=1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \langle R(\sigma + i\eta, A)x, R(\sigma - i\eta, A^*)y\rangle d\eta \\
&\leq \sup_{y\in H, \|y\|=1} \left(\int_{\eta_1}^{\eta_2} \|R(\sigma + i\eta, A)x\|^2 d\eta\right)^{1/2} \left(\int_{\eta_1}^{\eta_2} \|R(\sigma - i\eta, A^*)y\|^2 d\eta\right)^{1/2} \\
&\leq \frac{M_1 M_2\|x\|}{\sigma},
\end{aligned} \tag{B.12}$$

o que significa que a integral $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} R^2(\sigma + i\eta, A)x d\eta$ é convergente. Como $\frac{d}{d\eta}(R(\sigma + i\eta, A)x) = -iR(\sigma + i\eta)^2$, então, $\forall\ x \in H$, $\forall\ \sigma > 0$,

$$-i\int_{\eta_0}^{\eta_1} R^2(\sigma + i\eta, A)x d\eta = R(\sigma + i\eta_1, A)x - R(\sigma + i\eta_0, A)x$$

ou seja,

$$R(\sigma + i\eta_1, A)x = R(\sigma + i\eta_0, A)x - i\int_{\eta_0}^{\eta_1} R^2(\sigma + i\eta, A)x d\eta, \tag{B.13}$$

Afirmação B.22. Fixe $\eta_0 \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, e defina o operador linear $C_\lambda : H \to H$ pela lei

$$C_\lambda x = \int_{\eta_0}^{\infty} R(\sigma + i\eta, A)^2 x d\eta.$$

Então, C_λ é um operador linear limitado e vale

$$C_\lambda x = \int_{\eta_0}^{\infty} R(\sigma + i\eta, A)^2 x d\eta = -iR(\sigma + i\eta_0, A)x.$$

Demonstração: Note

$$\begin{aligned}
\left\|\int_{\eta_0}^{\infty} R(\sigma+i\eta,A)^2 x d\eta\right\| &= \sup_{y\in H,\|y\|=1} \langle \int_{\eta_0}^{\infty} R(\sigma+i\eta,A)^2 x d\eta, y\rangle \\
&= \sup_{y\in H,\|y\|=1} \int_{\eta_0}^{\infty} \langle R(\sigma+i\eta,A)x, R(\sigma-i\eta,A^*)y\rangle d\eta \\
&\leq \sup_{y\in H,\|y\|=1} \left(\int_{\eta_0}^{\infty} \|R(\sigma+i\eta,A)x\|^2 d\eta\right)^{1/2} \left(\int_{\eta_0}^{\infty} \|R(\sigma-i\eta,A^*)y\|^2 d\eta\right)^{1/2} \\
&\leq \frac{M_1M_2\|x\|}{\sigma};
\end{aligned}$$

desta forma C_λ é um operador limitado. Note ainda que $\forall\, x\in\mathcal{D}(A)$, $R(\sigma+i\eta,A)(\sigma+i\eta-A)x = x \Leftrightarrow (\sigma+i\eta)R(\sigma+i\eta,A)x = x - AR(\sigma+i\eta,A)x$, e portanto,

$$\|R(\sigma+i\eta,A)x\| \leq \frac{1}{|\sigma+i\eta|}(\|x\|+\|AR(\sigma+i\eta,A)x\|).$$

Agora, tomando $\eta\to\infty$, em ambos os membros da desigualdade anterior, obtemos, $\lim_{\eta\to\infty} R(\sigma+i\eta,A)x = 0$, donde o resultado se segue para $x\in\mathcal{D}(A)$.

Por fim seja $x\in H$; então existe $(x_n)\subset\mathcal{D}(A)$ tal que $x_n\to x$, e como C_λ é contínua, segue-se que

$$C_\lambda(x) = C_\lambda(\lim x_n) = \lim C_\lambda(x_n) = -i\lim R(\sigma+\eta_0,A)x_n = -iR(\sigma+\eta_0,A)x.$$

■

Pela Afirmação $B.22$ segue-se que, $\forall\, x\in H$,

$$\lim_{|\eta|\to\infty} R(\sigma+i\eta,A)x = 0. \tag{B.14}$$

De $(B.12)$ e $(B.13)$, obtemos $\forall\,\sigma>0$, $\forall\, x\in H$,

$$\begin{aligned}
\|R(\sigma+i\eta,A)x\| &\leq \|R(\sigma+i\eta_0,A)x\| + \left\|\int_{\eta_0}^{\eta} R^2(\sigma+i\eta,A)x d\eta\right\| \\
&\leq \|R(\sigma+i\eta_0,A)x\| + \frac{M_1M_2\|x\|}{\sigma}.
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Fazendo $\eta_0\to\infty$ segue-se de $(B.14)$ e $(B.15)$ que, $\forall\,\sigma>0$ e $\forall\, x\in H$,

$$\|R(\sigma+i\eta,A)x\| \leq \frac{M_1M_2\|x\|}{\sigma},$$

ou ainda,

$$\|R(\sigma+i\eta,A)\| \leq \frac{M_1M_2}{\sigma}, \tag{B.16}$$

Então, se $\sigma\geq\max\{\sigma_1,|\eta|\}$ (recorde-se que $\lambda=\sigma+i\eta$), segue-se de $(B.16)$ que

$$\begin{aligned}
\|R(\lambda,A)\| &\leq \frac{M_1M_2}{\sigma} \\
&\leq \frac{M_1M_2}{|\lambda|\sqrt{2}} \overset{|\lambda|\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado, combinando a primeira identidade do resolvente (vide Teorema 1.6) a (B.16), para $\sigma_1 < \Re\lambda \leq |\eta|$, obtemos

$$\begin{aligned}\|R(\lambda, A)x\| &\leq \|R(\sigma_1 + i\eta)x\| + |\sigma - \sigma_1|\|R(\lambda, A)x\|\|R(\sigma_1 + i\eta)x\| \\ &\leq \|R(\sigma_1 + i\eta)x\| + |\sigma - \sigma_1|\frac{M_1 M_2}{\sigma}\|R(\sigma_1 + i\eta)x\| \\ &\leq (1 + 2M_1 M_2)\|R(\sigma_1 + i\eta)x\|.\end{aligned}$$

Como $|\eta| > \frac{|\lambda|}{\sqrt{2}}$ se $|\eta| \to \infty$, então $|\lambda| \to \infty$. Daí, por (B.14), segue-se que $\lim_{|\lambda|\to\infty} \|R(\lambda, A)x\| = 0$, $\Re\lambda > \sigma_1$. ∎

Demonstração do Lema 2.18

($\Rightarrow$) Suponha $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ seja limitado; então, podemos tomar $\omega = 0$ no Teorema 1.20. Agora, segue-se do Teorema 1.22 (item 4) que $\mathbb{C}_+ \subset \rho(A)$.

Seja $\lambda = \xi + i\eta$, $\xi > 0$. Então, $\forall\ x \in H$,

$$\begin{aligned}\|R(\xi + i\eta, A)x\| &= \left\|\int_0^\infty e^{-(\xi+i\eta)t}T(t)xdt\right\| \\ &= \left\|\int_0^\infty e^{-i\eta t}e^{-\xi t}T(t)xdt\right\| \\ &= \|\mathcal{F}(h)(\eta)\|,\end{aligned}$$

onde $\forall t \geq 0$, $h(t) = e^{-\xi t}T(t)x$ e $h(t) = 0$ se $t < 0$. Pelo Teorema A.18, temos que

$$\begin{aligned}\|R(\xi + i\eta, A)x\|^2_{L^2(\mathbb{R},H)} &= \|\mathcal{F}(h)(\eta)\|^2_{L^2(\mathbb{R},H)} \\ &= 2\pi\|h\|^2_{L^2(\mathbb{R},H)} \\ &= 2\pi\int_0^\infty \|e^{-\xi t}T(t)x\|^2 dt \\ &\leq 2\pi\int_0^\infty e^{-2\xi t}\|T(t)\|^2\|x\|^2 dt \\ &= \frac{\pi K^2\|x\|^2}{\xi},\end{aligned}$$

donde se segue que

$$\sup_{\xi>0} \xi \int_{\mathbb{R}} \|R(\xi + i\eta, A)x\|^2 d\eta < \infty.$$

Analogamente, concluímos que

$$\sup_{\xi>0} \xi \int_{\mathbb{R}} \|R(\xi + i\eta, A^*)x\|^2 d\eta < \infty.$$

($\Leftarrow$) Fixe $\sigma > 0$ e defina, $\forall\ t \geq 0$, o operador linear

$$T_\sigma(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda, A)d\lambda.$$

Notemos que, $\forall t > 0$ e $\forall\, x \in H$,

$$\begin{aligned} T_\sigma(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{(\sigma+i\eta)t} R(\sigma+it\eta, A)x d\eta \\ &= \frac{e^{\sigma t}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{it\eta} R(\sigma+it\eta, A)x d\eta. \end{aligned}$$

Primeiro note que, integrando por partes, temos

$$\begin{aligned} \int_{\eta_1}^{\eta_2} e^{it\eta} R(\sigma+it\eta, A)x d\eta &= \left[\frac{e^{it\eta}}{it} R(\sigma+it\eta, A)x\right]_{\eta_1}^{\eta_2} + \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{e^{it}}{t} R^2(\sigma+it\eta, A)x d\eta \\ &= \frac{e^{it\eta_2}}{it} R(\sigma+it\eta_2, A)x - \frac{e^{it\eta_1}}{it} R(\sigma+it\eta_1, A)x + \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{e^{it}}{t} R^2(\sigma+it\eta, A)x d\eta. \end{aligned}$$

Portanto, $\forall\ \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$, $\forall\ x, y \in H$,

$$\begin{aligned} \int_{\eta_1}^{\eta_2} e^{it\eta} R(\sigma+it\eta, A)x d\eta &= \frac{e^{it\eta_2}}{it} R(\sigma+it\eta_2, A)x - \frac{e^{it\eta_1}}{it} R(\sigma+it\eta_1, A)x \\ &+ \int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{e^{it}}{t} R^2(\sigma+it\eta, A)x d\eta. \end{aligned} \tag{B.17}$$

Segue-se da desigualdade de Cauchy-Schwarz e da hipótese (2.33) que, $\forall\ \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$, $\forall\ x, y \in H$,

$$\begin{aligned} \left\langle \int_{\eta_1}^{\eta_2} e^{it\eta} R(\sigma+i\eta, A)^2 x d\eta, y \right\rangle &= \int_{\eta_1}^{\eta_2} \langle e^{it\eta} R(\sigma+i\eta, A)^2 x, y\rangle d\eta \\ &= \int_{\eta_1}^{\eta_2} \langle e^{it\eta} R(\sigma+i\eta, A)x, R(\sigma-i\eta, A^*)y\rangle d\eta \\ &\leq \left(\int_{\eta_1}^{\eta_2} \|R(\sigma+it\eta, A)x\|^2 d\eta\right)^{1/2} \left(\int_{\eta_1}^{\eta_2} \|R(\sigma+i\eta, A)y\|^2 d\eta\right)^{1/2} \\ &\leq \frac{M_1 M_2 \|x\|\|y\|}{\sigma}, \end{aligned} \tag{B.18}$$

onde na primeira igualdade usamos o Proposição $A.7$.

Por (B.17), (B.18) e pelo Lema $B.21$, $\int_{\mathbb{R}} e^{it\eta} R(\sigma+i\eta, A)x d\eta$ converge na topologia de H, e ainda,

$$\left\|\int_{\mathbb{R}} e^{it\eta} R(\sigma+i\eta, A)x d\eta\right\| \leq \frac{M_1 M_2 \|x\|}{t\sigma}. \tag{B.19}$$

Logo, $T_\sigma(t)$ é um operador limitado.

Afirmação B.23. $\{T_\sigma(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo.

Demonstração: Veja em a demonstração em [39], Teorema 1.1. ■

Os autores de [39] ainda mostraram que $\{T_\sigma(t)\}_{t\geq 0}$ independe de $\sigma > 0$, bem como A é o seu gerador infinitesimal. Logo, pelo Teorema 1.24, segue-se, $\forall t \geq 0$, que $T(t) = T_\sigma(t)$.

Para concluirmos a demonstração, note que por $(B.19)$,

$$\|T(t)x\| = \|T_\sigma(t)x\| = \frac{e^{\sigma t}}{2\pi}\left\|\int_{\mathbb{R}} e^{it\eta}R(\sigma+i\eta,A)xd\eta\right\| \leq \frac{e^{\sigma t}}{2\pi}\frac{M_1M_2\|x\|}{t\sigma}$$

Portanto, $\forall\ \sigma>0$ e $\forall t\geq 0$,

$$\|T(t)\| \leq \frac{e^{\sigma t}}{2\pi}\frac{M_1M_2}{t\sigma}. \tag{B.20}$$

Como σ é arbitrário, tomemos em $(B.20)$, para cada $t>0$, $\sigma=t^{-1}$; disso se segue que

$$\|T(t)\| \leq \frac{e}{2\pi}M_1M_2.$$

■

Lema B.24.

$$\|R(\lambda,A)\| \leq C(1+|\lambda|^\alpha), \quad 0<\Re\lambda<1 \tag{B.21}$$

é equivalente a

$$\|R(\lambda,A)(-A)^\alpha\| \leq C_1 \quad 0<\Re\lambda<1 \tag{B.22}$$

Demonstração: Veja a demonstração em [24].

■

Demonstração do Lema 2.19

($\Rightarrow$) Suponha que (2.34) seja válido; logo pelo Lema $B.24$, segue-se $(B.21)$. Agora faça $\lambda=\sigma+is$ com $0<\sigma<1$ e $s\in\mathbb{R}$; segue-se de $(B.21)$ que

$$\|R(\sigma+is,A)\| \leq C(1+|\sigma+is|^\alpha). \tag{B.23}$$

Fazendo $\sigma\to 0$ em $(B.23)$, utilizando a continuidade tanto da norma quanto do operador resolvente (vide o Corolário 1.11), obtemos, $\forall\ s\in\mathbb{R}$,

$$\|R(is,A)\| \leq C(1+|s|^\alpha).$$

Disso se segue que $\|R(is,A)\| = O(|s|^\alpha), \quad |s|\to\infty$.

($\Leftarrow$) Basta demonstrarmos que $\exists\ C>0$ tal que, $\forall\ 0<\Re\lambda<1$, $\|R(\lambda,A)\|\leq C(1+|s|^\alpha)$.

Seja $B>0$ e considere a função $F(\lambda)=R(\lambda,A)\lambda^{-\alpha}\left(1+\dfrac{\lambda^2}{B^2}\right)$, cujo domínio é $D=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid \Re\lambda\geq 0 \text{ e } 1\leq|\lambda|\leq B\}$. Note que F é analítica em D; e que a fronteira de D é da pela união de $\Gamma_1=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid\Re\lambda\geq 0 \text{ e } \ |\lambda|=1\}$, $\Gamma_2=\{is\mid 1\leq|s|\leq B\}$ e $\Gamma_3=\{\lambda\mid\Re\lambda>0 \text{ e } \ |\lambda|=B\}$.

A ideia consiste em estimar $\|F(\lambda)\|$ para $\lambda\in\partial D$, e então aplicar o Teorema $A.25$.

Se $\lambda \in \Gamma_2$, então,

$$\|F(\lambda)\| = \|R(is, A)\||s|^{-\alpha} \left|1 - \frac{s^2}{B^2}\right| \leq 2\|R(is, A)\||s|^{-\alpha} \leq 2C_1,$$

usamos na desigualdade acima o fato de $\|R(is, A)\| = O(|s|^{\alpha}), \quad s \to \infty$.

Se $\lambda \in \Gamma_3$, então,

$$\|F(\lambda)\| = \|R(\lambda, A)\||\lambda|^{-\alpha} \left|1 + \frac{\lambda^2}{B^2}\right| \leq \frac{KB^{-\alpha}}{\Re\lambda}|2\cos\theta| \leq \frac{2K}{B}.$$

Segue-se da compacidade de Γ_1 que $\exists C_2 > 0$ tal que $\|F(\lambda)\| = \|R(\lambda, A)\| \left|1 + \frac{\lambda^2}{B^2}\right| < C_2$; tomando B grande, obtemos $\|R(\lambda, A)\| \leq 2C_2$. Por fim, combinando as estimativas anteriores, obtemos $C > 0$ tal que $\|R(\lambda, A)\| \; |\lambda|^{-\alpha} \leq C$, e portanto $\|R(\lambda, A)\| \leq C(1 + |\lambda|^{\alpha})$.

Como $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ é limitado, $R(\lambda, A)$ é limitado em qualquer semi-plano estritamente contido em $\mathbb{C}_+$ (vide o Corolário 1.11), de modo que o resultado reduz a Afirmação $B.24$. ∎

Referências Bibliográficas

[1] F. Albiac; N. J. Kalton, *Topics in Banach space theory*, volume 233 of Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2006.

[2] M. Aloisio, *Generic dynamics for evolution groups and C_0-semigroups on Hilbert spaces*, Universidade Federal de Minas Gerais - Brasil, 2019.

[3] W. Arendt; C. J. K. Batty, *Tauberian theorems and stability of one-parameter semigroups.* Trans. Amer. Math. Soc. 306, 2 (1988), 837–852.

[4] W. Arendt; C. J. K. Batty; M.Hieber; F.Neubrander, *Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems.* Trans. Amer.Math. Soc. 306, 2 (1988), 837–852.

[5] A. Bátkai; K.J. Engel; J. Prüss; R. Schnaubelt, *Polynomial stability of operator semigroups.*Math. Nachr., 279:1425–1440, 2006.

[6] C.J.K. Batty; R. Chill; Y. Tomilov, *Fine scales of decay of operator semigroups.* J. Eur. Math. Soc. , 18(4):853–929, 2016.

[7] C.J.K. Batty; T. Duyckaerts, *Non-uniform stability for bounded semi-groups on Banach spaces.*J. Evol. Equ., 8(4):765–780, 2008.

[8] C.J.K. Batty; S. Srivastava, *The non-analytic growth bound of a C_0-semigroupand inhomogeneous Cauchy problems.* J. Differential Equations, 194:300–327, 2003.

[9] C. J. K. Batty, *Asymptotic behaviour of semigroups of operators*, in: Functional analysis and operator theory (Warsaw, 1992), vol. 30, Banach Center Publ. Polish Acad. Sci.,Warsaw, 1994, pp. 35–52.

[10] C. J. K. Batty, *Tauberian theorems for the Laplace-Stieltjes transform*, Trans. Amer. Math. Soc. 322 (1990), 783–804.

[11] A. Borichev; Y. Tomilov, *Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups.* Math. Ann., 347(2):455–478, 2010.

[12] G.Botelho; D.Pellegrino; E. Teixeira, *Fundamentos de Análise Funcional.* Coleção Textos Universitária, SBM (2015).

[13] H.Brezis, *Functional Analysis, Sobolev spaces and Partil Differential equations*, Springer(2010).

[14] A. N. Carvalho, *Análise funcional II.* Notas de Aula: 10 novembro de 2012, São Carlos-SP, 2012.

[15] R. Chill; D. Seifert, *Quantified versions of Ingham's theorem.* Bull. Lond. Math.Soc., 48(3):519–532, 2016.

[16] R. Chill; Y.Tomilov, *Stability of C_0-semigroups and geometry of Banach spaces.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 135 (2003), no. 3, 493–511.

[17] W. Desch, E. Fašangová, J. Milota; G. Propst, *Stabilization through viscoelastic boundary damping: a semigroup approach.* Semigroup Forum, 80(3):405–415, 2010.

[18] K.-J.Engel; R.Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equations.* Graduate Texts in Mathematics, 194. Springer-Verlag, New York, 2000.

[19] L. Gearhart, *Spectral Theory for Contraction Semigroups on Hilbert Spaces*, Trans. AMS 236, 385 - 394, 1978.

[20] M. Haase, *The Functional Calculus for Sectorial Operators.* Operator Theory: Advances and Applications 169, Birkhäuser, Basel, 2006.

[21] E. Hille; R. S. Phillips, *Functional analysis and semigroups.* Amer. Math. Soc.,(1974).

[22] C. Isnard, *Introdução à medida e integração.* Projeto Euclides, (2013).

[23] R.I.Júnior; V.M.Iório, *Equações diferenciais parciais: uma introdução.* Projeto Euclides, IMPA, (2013).

[24] Yu. Latushkin; R. Shvydkoy, *Hyperbolicity of semigroups and Fourier multipliers, in: Systems, approximation, singular integral operators, and related topics* (Bordeaux, 2000), Oper. Theory Adv. Appl., 129, Birkhäuser, Basel, 2001, 341–363.

[25] G. Lebeau, *Equation des ondes amorties.* In Algebraic and geometric methods in mathematical physics (Kaciveli, 1993), volume 19 of Math. Phys. Stud., pages 73–109. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1996.

[26] G. Lebeau; L.Robiano, *Stabilisation de l'equation des ondes par le bord.* Duke Math. J. 86, 3 (1997), 465–491.

[27] Lyubich, Y. I.; Vũ Qóc PhónG, *Asymptotic stability of linear differential equations in Banach spaces.* Studia Math. 88, 1 (1988), 37–42.

[28] M. Martinez, *Decay estimates of functions through singular extensions of vectorvalued Laplace transforms.* J. Math. Anal. Appl., 375:196–206, 2011.

[29] J. M. A. M. van Neerven, *The asymptotic behaviour of semigroups of linear operators, Operator Theory: Advances and Applications.* Birkhäuser, (1996).

[30] C. R. de Oliveira, *Intermediate spectral theory and quantum dynamics.* Birkhäuse, (2009).

[31] C. R. de Oliveira, *Introdução à Análise Funcional.* Projeto Euclides, IMPA, (2009).

[32] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Springer.

[33] J.Prüss, *On the spectrum of C_0-semigroups.* Trans. Amer. Math. Soc. 284 (1984), no. 2, 847–857.

[34] J.E.M.Rivera, *Estabilização de Semigrupos e Aplicações*, Série de Métodos Matemáticos-EAC, Rio de Janeiro, 2008.

[35] J. Rozendaal; M. Veraar, *Fourier multiplier theorems involving type and cotype.* J. Fourier Anal. Appl., 24(2):583–619, 2018.

[36] J.Rozendaal; D.Seifert; R.Stahn, *Optimal rates of decay for operator semigroups on Hilbert spaces.* Advances in Mathematics 346 (2019), 359–388.

[37] M. L. Santosa; D. S. Almeida Júniora; J.E. Muñoz Rivera, *The stability number of the Timoshenko system with second sound* J. Diff. Eq. 253 (2012), 2715–2733.

[38] R. Schilling; R. Song; Z. Vondraček, *Bernstein functions*, de Gruyter Studies in Mathematics 37, Walter de Gruyter, Berlin, 2010.

[39] D.-H. Shi; D.-X. Feng, *Characteristic conditions of the generation of C_0-semigroups in a Hilbert space.* J. Math. Anal. Appl. 247 (2000), 356-376.

[40] R.P.Silva. *Semigrupos de operadores e equações de evolução semilineares, 27 de julho de 2012.* (2012).

[41] M. Soares. *Cálculo em uma Variável Complexa.* Coleção Matemática Universitária, (2014).

[42] R. Stahn, *On the decay rate for the wave equation with viscoelastic boundary damping.*J. Differ. Equations, 265:2793–2824, 2018.

[43] J. Thayer, *Operadores auto-adjunto e equações diferenciais parciais.* Projeto Euclides, IMPA, (2016).

[44] K. Yosida, *Functional Analysis*, Segunda edição, Berlim, Springer-Verlag(1968).

.