

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós Graduação em Matemática

Rosilene Aparecida Felício

**Sobre curvas de curvatura geodésica
constante em variedades bidimensionais**

Belo Horizonte

2020

Rosilene Aparecida Felício

Sobre curvas de curvatura geodésica constante em variedades bidimensionais

Dissertação apresentada ao corpo docente de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Gilcione Nonato Costa

Belo Horizonte

2020

© 2020, Rosilene Aparecida Felício.
Todos os direitos reservados.

Felício, Rosilene Aparecida.

F314s Sobre curvas de curvatura geodésica constante em variedades bidimensionais [manuscrito] / Rosilene Aparecida Felício. – 2020.
117 f il.

Orientador: Gilcione Nonato Costa.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.

Referências: f. 111-112.

1. Matemática – Teses. 2. Estruturas Geodésicas – Teses. 3. Gauss, Aplicações de – Teses. 4. – Variedades bidimensionais – Teses. I. Costa, Gilcione Nonato. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51 (043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
COLEGIADO DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

Sobre curvas de curvatura geodésica constante em variedades bidimensionais

ROSILENE APARECIDA FELÍCIO

Dissertação de Mestrado defendida e aprovada, no dia 4 de setembro de 2020, pela Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais constituída pelos seguintes professores:

Prof. Gilcione Nonato Costa (Orientador)
UFMG

Prof. Fabio Enrique Brochero Martinez
UFMG

Prof. Heleno da Silva Cunha
UFMG

Prof. José Antônio Gonçalves Miranda
UFMG

Belo Horizonte, 04 de setembro de 2020.



Documento assinado eletronicamente por **Fabio Enrique Brochero Martinez, Chefe**, em 04/09/2020, às 16:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Jose Antonio Goncalves Miranda, Professor do Magistério Superior**, em 04/09/2020, às 16:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gilcione Nonato Costa, Professor do Magistério Superior**, em 04/09/2020, às 16:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Heleno da Silva Cunha, Professor do Magistério Superior**, em 04/09/2020, às 18:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0246647** e o código CRC **D94BFEB6**.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus pela paciência e sabedoria. Agradeço aos meus pais José e Maria pelo ajuda e incentivo com os estudos. À minha irmã Dilcilene pela doce companhia durante o curso e principalmente pela força para superar um enorme desafio.

Agadeço às pessoas importantes que me ajudaram nos momentos difíceis: João Wagner, Antônio Carlos, Laís, Luzia e Bonita.

Especialmente agradeço ao meu professor orientador, Dr. Gilcione Nonato Costa por toda a ajuda e principalmente pela paciência para o desenvolvimento do trabalho.

Aos professores da banca examinadora pela contribuição ao trabalho: Dr. Fabio Enrique Brochero Martinez, Dr. Heleno da Silva Cunha e Dr. José Antônio Gonçalves Miranda. Aos professores do Programa de Pós Graduação em Matemática, em especial os professores os quais tive a oportunidade em cursar suas disciplinas e aos professores Dr. Gustavo Barbagallo de Oliveira, Dra. Jussara de Matos Moreira e Dr. Remy Sanchis.

Agradeço às secretárias da Pós Graduação em Matemática: Andréia e Kelly por toda ajuda e apoio na área administrativa do curso. Aos meus colegas do curso pela parceria durante a jornada.

Ao CNPQ pelo apoio financeiro.

Muito obrigada!

Resumo

Neste trabalho, trataremos sobre curvas que possuem curvatura geodésica constante em variedades bidimensionais. Assim, através do artigo em [13], "*A note on constant geodesic curvature curves on surfaces*" publicado em 2009 no jornal: *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse Non Linéaire*, falaremos com mais detalhes sobre a curvatura geodésica e de curvas especiais que possuem essas curvaturas respectivamente. O teorema principal dessa dissertação mostra que se existe uma sequência de círculos geodésicos que convergem para um dado ponto $p \in \mathbb{M}$ então esse p é um ponto singular da aplicação de Gauss.

Palavras-chaves: Variedades bidimensionais. Pontos críticos. Curvatura geodésica de curvas. Função curvatura de Gauss.

Abstract

In this work, we will deal with curves that have constant geodesic curvature in two-dimensional varieties. Thus, through the article in [13], “A note on constant geodesic curvature curves on surfaces” published in 2009 in the newspaper: *Annales de l’Institut Henri Poincaré C, Analyse Non Linéaire*, we will talk in more detail about geodesic curvature and special curves that have these curvatures respectively. The main theorem of this dissertation shows that if there is a sequence of geodesic circles that converge for a given point, this is a singular point in the Gaussian application.

Keywords: Two-dimensional varieties. Critical points. Geodesic curve curvature. Gauss curvature function.

Lista de Figuras

2.1	Superfície Toro.	17
2.2	Parametrizações locais da esfera.	21
2.3	O vetor $\gamma'(0)$ é tangente à curva no ponto $p = \gamma(0)$	25
2.4	Superfície Helicóide.	29
2.5	Imagem do elipsóide pela aplicação normal de Gauss.	30
2.6	Três superfícies com curvatura gaussiana negativa, nula e positiva.	37
2.7	Regiões de curvatura do toro.	40
2.8	Geodésicas do cilindro.	47
2.9	Superfície de revolução.	48
2.10	Geodésicas em superfícies de revolução que não são paralelos e nem meridianos.	53
2.11	Superfície Esfera.	54
2.12	Vetor posição da trajetória que liga os pontos A e B	59
2.13	Superfície Parabolóide Elíptico.	61
2.14	Superfície Cone.	66
2.15	Superfície Toro.	69
2.16	Distância entre A e B	77
3.1	Gráfico Local de Γ	83

4.1	Curva com curvatura geodésica constante.	92
4.2	Imagem inversa de Γ em coordenadas polares.	93
6.1	Superfície de revolução \mathbb{S} gerada pela rotação do gráfico de (6.1).107	

SUMÁRIO

1	Introdução	12
2	Resultados Preliminares	15
2.1	Variedades Diferenciáveis	15
2.2	Superfícies Regulares	17
2.2.1	Plano Tangente a uma Superfície	24
2.2.2	Primeira Forma Fundamental	26
2.2.3	Aplicação Normal de Gauss	29
2.2.4	Segunda Forma Fundamental	31
2.2.5	Curvatura de Gauss	35
2.3	Geodésicas	40
2.4	Equações das Geodésicas	41
2.4.1	Equações diferenciais das geodésicas do plano	44
2.4.2	Equações diferenciais das geodésicas do cilindro	45
2.4.3	Equações diferenciais das geodésicas de uma superfície de revolução	47
2.4.4	Equações diferenciais das geodésicas da esfera	53
2.4.5	Equações diferenciais das geodésicas da esfera como superfície de revolução	57

2.4.6	Equações diferenciais das geodésicas do parabolóide elíptico	60
2.4.7	Equações diferenciais das geodésicas do parabolóide circular como superfície de revolução	64
2.4.8	Equações diferenciais das geodésicas do parabolóide hiperbólico ou sela	64
2.4.9	Equações diferenciais das geodésicas do cone	65
2.4.10	Equações diferenciais das geodésicas do toro	68
2.4.11	Equações diferenciais das geodésicas do toro como superfície de revolução	73
2.5	Aplicação Exponencial	74
2.6	Distância de Hausdorff	76
2.7	Teorema de Sard	77
3	Curvatura Geodésica	79
3.1	Parametrização em coordenadas normais e geodésicas	80
3.2	Expressão para a curvatura geodésica	83
4	Curvas de curvatura geodésica constante	90
4.1	Curvas de curvatura geodésica constante	90
5	Curvatura geodésica constante de um d-círculo	101
5.1	Curva d -círculo	101
5.2	Curvatura geodésica constante do d -círculo	102
6	Exemplos	106
	Bibliografia	111
A	Teorema de Existência e Unicidade	113

Capítulo 1

Introdução

Seja M uma Variedade Riemanniana de dimensão $n \geq 2$. Em [14], Ye, R., estudou esferas que possuem curvatura média constante mergulhadas em uma variedade riemanniana de dimensão $n \geq 2$. Esferas geodésicas ao redor de p em M de pequeno raio constituem uma folheação diferenciável ou suave.

Ye, R., mostrou que essa folheação pode ser perturbada de modo que a folheação cuja as folhas são esferas de curvatura média constante, desde que p seja um ponto crítico não degenerado da função curvatura escalar de M .

A folheação assim obtida é a única folheação por hipersuperfícies de curvatura média constante, regularmente centrada em p . Por outro lado, se p não for um ponto crítico da função de curvatura escalar, então tal folheação não existiria. Veja em [14] para maiores detalhes.

Além disso, em [6], Pacard, F., e Xu, X., provaram a existência de esferas mergulhadas com curvatura média grande o suficiente em qualquer variedade riemanniana compacta $(M; g)$.

Pacard, F., e Xu, X., generalizaram parcialmente um resultado de [14], Ye, R., que trabalhou com o caso em que a função de curvatura escalar da variedade riemanniana $(M; g)$ possui pontos críticos não degenerados.

Em [11], Rosenberg, H., estabeleceu vários teoremas a respeito de superfícies de curvatura média constante mergulhadas em variedades de dimensão três homogeneamente regulares, quando a curvatura média dessas superfícies é suficientemente grande.

Para a presente dissertação, trabalharemos com variedades bidimensionais que se consistem em superfícies de \mathbb{R}^3 . E consideraremos ao invés da função curvatura escalar da variedade riemanniana, a função curvatura de Gauss da superfície.

Assim sendo, o objetivo principal da dissertação será o estudo das superfícies que contém uma sequência de curvas de curvatura geodésica constante que converge em alguma métrica para o ponto crítico p da função curvatura de Gauss.

A dissertação está estruturada em 5 capítulos. No capítulo 1 trataremos de definições e resultados preliminares necessários para a abordagem e entendimento dos capítulos seguintes. Uma das seções importantes nesse capítulo trata-se do Teorema de Sard, que afirma que o conjunto dos pontos críticos de uma função diferenciável tem medida nula.

Além disso, no capítulo 1, definiremos o que são geodésicas, exemplos de geodésicas e definiremos o sistema de equações diferenciais das geodésicas do plano, do cilindro, da esfera, dos parabolóides elíptico e hiperbólico, do cone, do toro e de superfícies de revolução.

Já nos capítulos 2, 3 e 4 discutiremos o artigo intitulado "*A note on constant geodesic curvature curves on surfaces*" que trata sobre as curvas de curvatura geodésica constante em superfícies conforme Sun, T., em [13]. Assim sendo, nos capítulos 2 e 3, falaremos sobre a curvatura geodésica e de curvas que possuem essas curvaturas respectivamente.

Demonstraremos um dos teoremas apresentados no artigo representado

pela seguinte questão: Dada uma sequência de curvas fechadas mergulhadas na superfície \mathbb{M} de curvaturas geodésicas constantes $k_i \rightarrow +\infty$, as quais convergem na distância de Hausdorff para o ponto p . O problema é determinar se o ponto $p \in \mathbb{M}$, é ou não um ponto crítico da função curvatura de Gauss. Assim, antes da demonstração de tal teorema, precisaremos de vários conceitos para fundamentar o nosso trabalho.

No capítulo 4, trataremos de curvas denominadas d -círculo, as quais estão imersas em um domínio simplesmente conexo. Novamente, definiremos a expressão para a curvatura geodésica de um d -círculo.

Por fim, no capítulo 5, onde concluiremos através do teorema de Sard que, dado uma superfície, essa sequência de curvas convergindo para o ponto crítico p é rara, pois naquela superfície os pontos singulares têm medida nula.

Os teoremas que serão vistos ao longo do trabalho serão enunciados a seguir.

TEOREMA 1.0.1. *Teorema de Sard. Sejam \mathbb{M}^m e \mathbb{N}^n variedades e uma aplicação $f : M \rightarrow N$ diferenciável. Os pontos críticos de f constituem um conjunto de medida nula em \mathbb{N} .*

TEOREMA 1.0.2. *Seja $p \in \mathbb{M}$ fixado e assumamos que exista uma sequência de curvas fechadas mergulhadas $\{\Gamma_i\}, i \in \mathbb{N}$, com curvatura geodésica constante $k_i \rightarrow \infty$ as quais convergem (na distância de Hausdorff) para o ponto p . Então p é um ponto crítico da função curvatura de Gauss.*

TEOREMA 1.0.3. *Seja Ω um domínio simplesmente conexo em \mathbb{M} sobre o qual a função $K : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ possui um único ponto crítico não-degenerado e seja d um número natural positivo. Então existe $k^* > 0$ tal que se Γ é uma curva fechada de grau d imersa em Ω com curvatura geodésica constante $k > k^*$, então Γ é uma d -cobertura de uma curva mergulhada de curvatura geodésica constante.*

Capítulo 2

Resultados Preliminares

Nesta seção, iniciaremos com uma breve descrição sobre as variedades contemplando as ideias acerca das variedades diferenciáveis. O maior destaque são as variedades bidimensionais com apresentação de alguns exemplos.

2.1 Variedades Diferenciáveis

Estritamente falando, uma variedade é um espaço topológico que localmente se comporta como um aberto do espaço \mathbb{R}^n nas vizinhanças de cada ponto p da variedade. Mais precisamente para cada $p \in \mathbb{M}$, existe um aberto $\mathbb{U} \ni p$, tal que $p \in \mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ e esse aberto é difeomorfo a uma vizinhança $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^n$.

O conceito de variedade diferenciável generaliza o conceito de variedade com estrutura diferenciável.

DEFINIÇÃO 2.1.1. *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto \mathbb{M} e uma família de aplicações biunívocas $\mathbf{x}_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{M}$ de abertos U_α de \mathbb{R}^n em \mathbb{M} tais que*

i. $U_\alpha \mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) = \mathbb{M}$;

- ii. \forall par (α, β) , com $\mathbf{x}_\alpha(U_\alpha) \cap \mathbf{x}_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$, os conjuntos U_α e U_β são abertos em \mathbb{R}^n e as aplicações $(\mathbf{x}_\beta^{-1} \circ \mathbf{x}_\alpha)$ são diferenciáveis;
- iii. A família $(U_\alpha, \mathbf{x}_\alpha)$ é máxima relativamente às condições (i) e (ii).

O número real n é a dimensão do espaço. Equivalentemente, apresentamos uma outra definição para variedades diferenciáveis

DEFINIÇÃO 2.1.2. Dizemos que um subconjunto $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^k$, é uma variedade diferenciável de dimensão n , se para cada $p \in \mathbb{M}$, existir uma vizinhança \mathbb{V} aberta de \mathbb{M} contendo p , difeomorfa a um subconjunto $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ aberto. Os difeomorfismos $g_i : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{U}$ serão chamados sistemas de coordenadas locais, e suas inversas $g_i^{-1} : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ serão chamados de parametrização.

EXEMPLO 2.1.3. Com a aplicação identidade $Id_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, teremos que cada ponto possuirá uma vizinhança aberta, o próprio espaço euclidiano, que é difeomorfa ao \mathbb{R}^n , por meio da aplicação identidade. Portanto o espaço euclidiano \mathbb{R}^n é uma variedade diferenciável de dimensão n .

EXEMPLO 2.1.4. Todo subconjunto aberto do espaço euclidiano é uma variedade diferenciável de dimensão n .

EXEMPLO 2.1.5. As variedades unidimensionais, isto é, variedades de dimensão 1 incluem segmentos de retas e curvas regulares.

EXEMPLO 2.1.6. A superfície toro é obtida pela rotação da circunferência em torno de uma reta. É também chamado de superfície de revolução. Posteriormente na subseção 2.4.10 falaremos mais à respeito da superfície toro. A superfície toro com a parametrização local

$$\mathbf{x} : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{M},$$

dada por

$$\mathbf{x}(u; v) = \left((a + r \cos u) \cos v; (a + r \cos u) r \sin v; \sin u \right),$$

em que $\mathbb{U} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < 2\pi, 0 < v < 2\pi\}$, é um exemplo de uma variedade bidimensional.

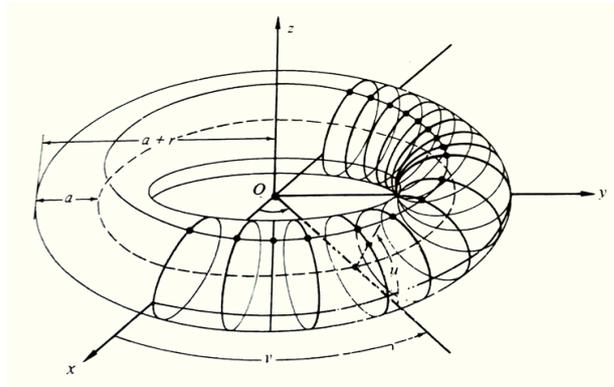


Figura 2.1: Superfície Toro.

2.2 Superfícies Regulares

Nesta seção, apresentaremos definições sobre superfícies que são as variedades bidimensionais e em particular daremos informações sobre as superfícies regulares.

Uma superfície $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^3$ é dita regular se, $\forall p \in \mathbb{M}$, existir uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 e uma aplicação

$$\mathbf{x} : \mathbb{U} \rightarrow V \cap \mathbb{M},$$

em que $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto tal que

- i. \mathbf{x} é diferenciável, ou seja, se $\mathbf{x}(u, v) = (x(u, v); y(u, v); z(u, v))$ então as funções componentes de \mathbf{x} , $x(u, v); y(u, v); z(u, v)$ possuem derivadas parciais de todas as ordens em \mathbb{U} ;
- ii. \mathbf{x} é um homeomorfismo;
- iii. $\forall q = (u, v) \in \mathbb{U}$, a diferencial $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetora.

Em relação ao item (iii), mostremos essa aplicação da diferencial em forma de matriz. Sejam

$$\begin{aligned}\mathbf{x} : \mathbb{U} &\rightarrow V \cap \mathbb{M} \\ \mathbf{x}(u, v) &= (x(u, v); y(u, v); z(u, v))\end{aligned}$$

a parametrização em \mathbb{M} em que $\mathbf{x}(q) = p$ e

$$\begin{aligned}\alpha : (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow \mathbb{U} \\ t &\mapsto (u(t), v(t))\end{aligned}$$

uma curva em $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2$, em que $\alpha(0) = q$ e $\alpha'(0) = v$. Temos que

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}; \frac{\partial y}{\partial u}; \frac{\partial z}{\partial u} \right) \\ \mathbf{x}_v &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}; \frac{\partial y}{\partial v}; \frac{\partial z}{\partial v} \right),\end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned}d\mathbf{x}_q(\alpha'(0)) &= \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_u u'(0) + x_v v'(0) \\ y_u u'(0) + y_v v'(0) \\ z_u u'(0) + z_v v'(0) \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{x}_u(u'(0) + \mathbf{x}_v(v'(0))),\end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}; \frac{\partial y}{\partial u}; \frac{\partial z}{\partial u} \right) \\ \mathbf{x}_v &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}; \frac{\partial y}{\partial v}; \frac{\partial z}{\partial v} \right)\end{aligned}$$

são os vetores linearmente independentes e tangentes às curvas parametrizadas de \mathbb{M} que formam a base para o plano tangente de \mathbb{M} em p denotado por $T_p\mathbb{M}$.

Ainda sobre o item (iii), a diferencial $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ser injetiva, significa que um dos menores de ordem 2 da matriz de $d\mathbf{x}_q$, isto é, que um dos determinantes Jacobianos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

seja diferente de zero em q .

A aplicação

$$\mathbf{x} : \mathbb{U} \rightarrow V \cap \mathbb{M},$$

é chamada de parametrização da superfície \mathbb{M} .

EXEMPLO 2.2.1. *Para mostrarmos que a esfera unitária de equação*

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

é uma superfície regular é suficiente mostrarmos que a aplicação

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1 : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3, \\ \mathbf{x}_1(u, v) &= (u, v, f(u, v)),\end{aligned}$$

com $\mathbb{U} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$ e $f(u, v) = \sqrt{1 - (u^2 + v^2)}$ é de fato uma parametrização local de \mathbb{S}^2 .

Condição (i).

Notemos que a imagem da parametrização $\mathbf{x}_1(\mathbb{U})$ é a parte aberta de \mathbb{S}^2 que está acima do plano xy . As funções componentes da parametrização \mathbf{x}_1 são diferenciáveis, já que temos que $u^2 + v^2 < 1$, logo a condição (i) da definição de superfície regular é verificada.

Condição (ii), isto é, se a parametrização \mathbf{x}_1 é um homeomorfismo.

De fato, seja um ponto qualquer $(x; y; z) \in \mathbf{x}_1(\mathbb{U}) \subset \mathbb{S}^2$, com $\mathbf{x}_1(\mathbb{U}) \subset \mathbb{S}^2 = \{(x; y; z) \in \mathbb{S}^2 : x^2 + y^2 < 1 \text{ e } z > 0\}$ e fizermos

$$\mathbf{x}_1^{-1} = \pi(x; y; z) \rightarrow (x; y)$$

temos u e v bem definidos de maneira única por $u = x$ e $v = y$, logo a parametrização $\mathbf{x}_1(\mathbb{U})$ é bijetiva. E a aplicação

$$\mathbf{x}_1^{-1} = \pi(x; y; z) \rightarrow (x; y)$$

é a projeção de $\mathbf{x}_1(\mathbb{U}) \subseteq \mathbb{S}^2 \in \mathbb{U}$ que é contínua. Assim, \mathbf{x}_1 é um homeomorfismo e a condição (ii.) é verificada.

Condição (iii).

Para mostrarmos que a diferencial $d\mathbf{x}_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva, mostremos que um dos menores de ordem 2 da matriz de $d\mathbf{x}_1$, isto é, que o determinante Jacobiano seja diferente de zero. Assim temos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

logo, $d\mathbf{x}_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva e a condição (iii) é verificada.

Para cobrir toda esfera devemos utilizar as possíveis parametrizações locais similares a \mathbf{x}_1 e todas essas devem verificar as condições acima, como

por exemplo

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2(u, v) &= (u, v, -\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}), \\ \mathbf{x}_3(u, v) &= (u, +\sqrt{1 - (u^2 + v^2)}, v), \\ \mathbf{x}_4(u, w) &= (u, -\sqrt{1 - (u^2 + w^2)}, v), \\ \mathbf{x}_5(u, v) &= (+\sqrt{1 - (v^2 + w^2)}, u, v), \\ \mathbf{x}_6(u, v) &= (-\sqrt{1 - (v^2 + w^2)}, u, v), \end{aligned}$$

variando as imagens, veja figura 2.2.

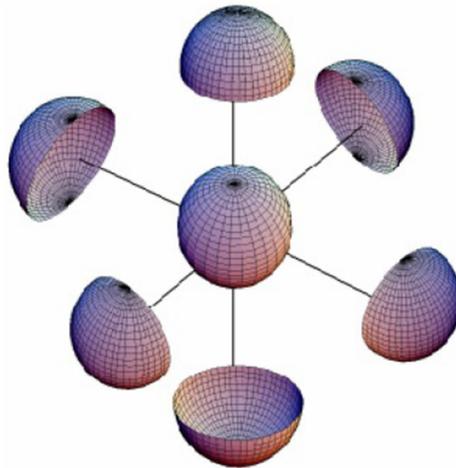


Figura 2.2: Parametrizações locais da esfera.

Assim verificamos que a esfera que satisfaz as condições da definição de superfície regular, é de fato uma superfície regular.

Agora definamos superfície regular, sob outro conceito. Tais definições e exemplos são baseadas em [4].

DEFINIÇÃO 2.2.2. *Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável*

definida no aberto $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que $q \in \mathbb{U}$ é um ponto crítico de \mathbf{x} se a diferencial $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ não é sobrejetora.

Um ponto $b \in \mathbb{R}^m$ é um valor crítico de \mathbf{x} se existe um ponto crítico $q \in \mathbb{U}$ tal que $\mathbf{x}(q) = b$. Um ponto $a \in \mathbb{R}^m$ que não é um valor crítico de \mathbf{x} é chamado um valor regular de \mathbf{x} , isto é, $d\mathbf{x}_p$ é sobrejetora para todo $p \in \mathbf{x}^{-1}(a)$.

DEFINIÇÃO 2.2.3. *Seja*

$$f : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

uma função diferenciável. Portanto $a \in f(\mathbb{U})$ é um valor regular de f se e somente se as derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z},$$

não se anulam simultaneamente em qualquer ponto da imagem inversa

$$f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in \mathbb{U} : f(x, y, z) = a\}.$$

PROPOSIÇÃO 2.2.4. *Se $f : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e $a \in f(\mathbb{U})$ é um valor regular de f , então $f^{-1}(a)$ é uma superfície regular em \mathbb{R}^3 .*

Com a proposição 2.2.4, mostraremos que o cilindro no exemplo a seguir é também uma superfície regular.

EXEMPLO 2.2.5. *Seja o cilindro de equação*

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Mostremos que é uma superfície regular.

Consideremos a função

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(x, y, z) &= x^2 + y^2 - 1. \end{aligned}$$

Os pontos críticos de f , (x, y, z) são tais que

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y = 0,\end{aligned}$$

e para qualquer coordenada z . Logo, o conjunto dos pontos críticos da função f é dado por

$$P_c = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3,$$

e o conjunto dos valores críticos de f é dado por

$$\begin{aligned}V_c &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(0, 0, z) = c\} \subset \mathbb{R} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid c = -1\} \\ &= \{-1\}.\end{aligned}$$

Assim, o conjunto dos valores regulares é dado por

$$V_r = \mathbb{R} \setminus \{-1\},$$

em particular, tem-se

$$0 \in V_r.$$

Logo,

$$\begin{aligned}f^{-1}(0) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}, \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\}, \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}.\end{aligned}$$

Portanto o cilindro,

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

é uma superfície regular, pois é imagem inversa de valor regular.

2.2.1 Plano Tangente a uma Superfície

Como havíamos mencionado, a condição (iii) da definição 2.2, garante a existência de um plano tangente em $p \in \mathbb{M}$.

Em outras palavras, se $\mathbf{x} : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{M}$ é uma parametrização de \mathbb{M} com $\mathbf{x}(u, v) = p$ para algum $q = (u, v) \in \mathbb{U}$, então as derivadas parciais da parametrização \mathbf{x} dadas por

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \\ \mathbf{x}_v &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)\end{aligned}$$

formam uma base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ de $T_p\mathbb{M}$ conforme visto na subseção anterior.

DEFINIÇÃO 2.2.6. *O plano tangente $T_p\mathbb{M}$ de \mathbb{M} em p é definido como*

$$\{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{v} \text{ é um vetor tangente à superfície } \mathbb{M} \text{ em } p\}.$$

Nesta subseção mostraremos que para cada ponto $p \in \mathbb{M}$, o conjunto de vetores tangentes as curvas parametrizadas de \mathbb{M} que passam por p , constituem um plano, que denotaremos por $T_p\mathbb{M}$, o plano tangente à superfície \mathbb{M} .

Entenderemos por vetor tangente a \mathbb{M} em um ponto p , se for dado por $\mathbf{v} = \gamma'(0)$ de uma curva parametrizada de \mathbb{M} , com $\gamma(0) = p$.

Sejam

$$\begin{aligned}\mathbf{x} : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{M} \\ \mathbf{x}(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v))\end{aligned}$$

uma parametrização de \mathbb{M} e

$$\begin{aligned}\alpha : (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow \mathbb{U} \\ t &\mapsto (u(t), v(t))\end{aligned}$$

uma curva em $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2$. Agora consideremos a curva parametrizada

$$\begin{aligned} \gamma : (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow \mathbb{M} \\ t &\mapsto \mathbf{x}(\alpha(u(t), v(t))) \end{aligned}$$

tal que $\gamma = \mathbf{x} \circ \alpha$.

Então o vetor γ' no ponto $t = 0$ é dado por:

$$\begin{aligned} \gamma'(0) &= (\mathbf{x}(\alpha(0))\alpha(0))' \\ &= d(\mathbf{x}\alpha(0))d(\alpha(0)) \\ &= \frac{d}{dt}(\mathbf{x} \circ \alpha)(0) \end{aligned}$$

Portanto, a derivada $d\mathbf{x}_q$ mapeia os vetores velocidade ou vetores tangentes de curvas que passam em $\alpha(0) = q$ em vetores velocidade ou vetores tangentes das suas respectivas imagens em $p = \mathbf{x}(q)$, conforme a figura 2.3 descreve

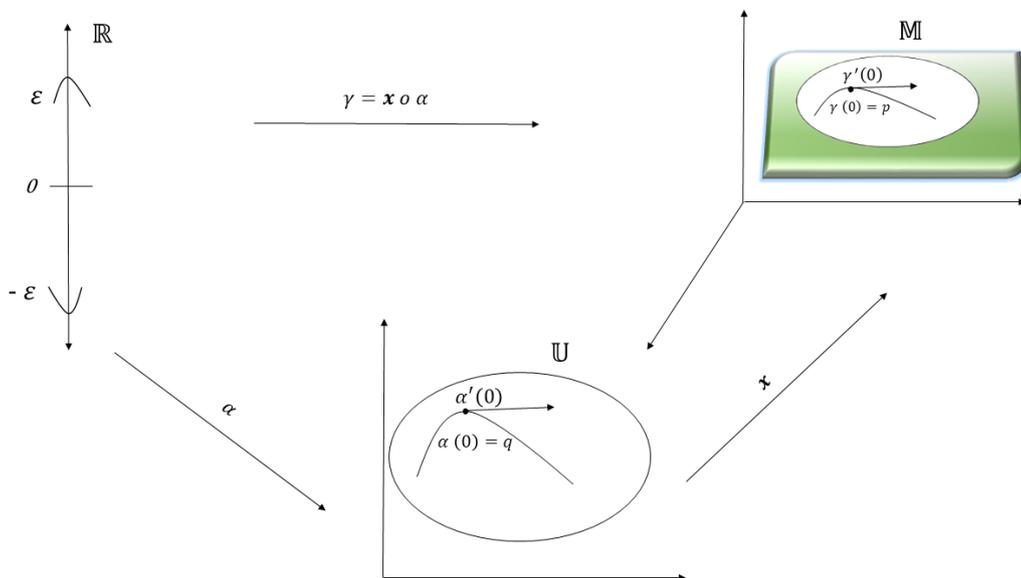


Figura 2.3: O vetor $\gamma'(0)$ é tangente à curva no ponto $p = \gamma(0)$.

DEFINIÇÃO 2.2.7. *O plano tangente a uma superfície regular \mathbb{M} em p é o conjunto de vetores tangentes das curvas em \mathbb{M} que passam por p , denotado por $T_p\mathbb{M}$.*

O plano tangente $T_p\mathbb{M}$ contém sempre o vetor nulo, pois podemos considerar na definição acima a curva que é constante e igual a p . Além disso, o plano tangente $T_p\mathbb{M}$ é sempre um subespaço vetorial de dimensão 2 de \mathbb{R}^3 .

2.2.2 Primeira Forma Fundamental

Nesta subseção, apresentaremos a primeira forma fundamental, que permite o cálculo de medidas sobre uma superfície \mathbb{M} , sem necessariamente considerarmos o ambiente em que a superfície está mergulhada.

A primeira forma fundamental é basicamente o produto interno usual do \mathbb{R}^3 restrito aos vetores tangentes a \mathbb{M} .

Dessa forma, é um instrumento que nos permite o cálculo de comprimento de curvas, ângulos entre curvas e áreas de regiões contidas em \mathbb{M} .

DEFINIÇÃO 2.2.8. *A forma quadrática I_p em $T_p\mathbb{M}$, definida por*

$$\begin{aligned} I_p : T_p\mathbb{M} &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\rightarrow I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \|w\|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

é chamada a primeira forma da superfície regular $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^3$ em $p \in \mathbb{M}$.

Sejam

$$\begin{aligned} \alpha : (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \\ \alpha(t) &= (u(t), v(t)) \end{aligned}$$

uma curva tal que $\alpha(0) = q$ e $\alpha'(0) = \mathbf{v}$, e a parametrização

$$\begin{aligned} \mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{M} \\ \mathbf{x}(u, v) &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \end{aligned}$$

para a superfície \mathbb{M} , com $\mathbf{x}(q) = p$. Além disso consideremos ainda a curva

$$\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{M}$$

tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = \mathbf{w} \in T_p\mathbb{M}$.

Expressaremos a primeira forma fundamental na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ de $T_p\mathbb{M}$ associada a parametrização $\mathbf{x}(u, v)$ em p .

Temos que

$$\gamma(t) = (\mathbf{x} \circ \alpha)(t),$$

ao derivarmos obtem-se

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \mathbf{x}'(\alpha(t))\alpha'(t) \\ &= \mathbf{x}_u(\alpha(t))u'(t) + \mathbf{x}_v(\alpha(t))v'(t), \end{aligned}$$

onde $\alpha'(t) = (u'(t), v'(t))$. Assim,

$$\begin{aligned} I_p(\mathbf{w}) &= \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle_p = \langle \gamma'(0), \gamma'(0) \rangle_{\gamma(0)} \\ &= \langle \mathbf{x}_u(\alpha(0))u'(0) + \mathbf{x}_v(\alpha(0))v'(0), \mathbf{x}_u(\alpha(0))u'(0) + \mathbf{x}_v(\alpha(0))v'(0) \rangle_p \\ &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p u'^2 + 2 \langle \mathbf{x}_u; \mathbf{x}_v \rangle_p u'v' + \langle \mathbf{x}_v; \mathbf{x}_v \rangle_p v'^2 \\ &= E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2. \end{aligned}$$

Denotemos por

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle_p \\ F(u_0, v_0) &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle_p \\ G(u_0, v_0) &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle_p \end{aligned}$$

que chamaremos de coeficientes da primeira forma fundamental da superfície.

Vejamos agora alguns exemplos.

EXEMPLO 2.2.9. *Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{M}$ a parametrização local do cilindro dada por*

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \sin u, v),$$

onde

$$\mathbf{x}_u = (-\sin u, \cos u, 0) \quad e \quad \mathbf{x}_v = (0, 0, 1),$$

em que

$$0 < u < 2\pi \quad e \quad -\infty < v < \infty.$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \sin^2(u) + \cos^2(u) = 1,$$

$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0,$$

$$G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = 1.$$

EXEMPLO 2.2.10. *Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{M}$ a parametrização local do helicóide dada por*

$$\mathbf{x}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au),$$

onde

$$\mathbf{x}_u = (-v \sin u, v \cos u, a) \quad e \quad \mathbf{x}_v = (\cos u \sin u, 0),$$

em que

$$0 < u < 2\pi \quad e \quad -\infty < v < \infty.$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = v^2 + a^2,$$

$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0,$$

$$G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = 1.$$

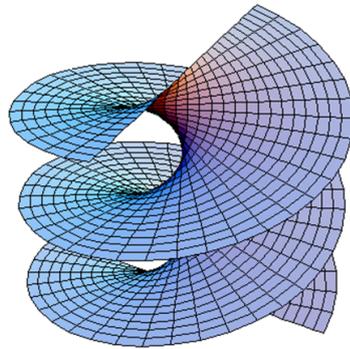


Figura 2.4: Superfície Helicóide.

2.2.3 Aplicação Normal de Gauss

Nesta subseção, trabalharemos com o conceito de curvaturas de uma variedade bidimensional e de curvaturas de curvas mergulhadas nessas variedades.

No entanto serão necessárias algumas informações sobre a aplicação normal de Gauss em superfícies antes de definirmos curvaturas.

Na subseção 2.2.1, foi definido o que é $T_p\mathbb{M}$, o plano tangente à uma superfície \mathbb{M} no ponto p . Sendo assim, é possível definirmos agora o que é uma aplicação de Gauss.

DEFINIÇÃO 2.2.11. *Seja uma superfície $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^3$ e seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{M}$ a sua parametrização para a superfície \mathbb{M} .*

A aplicação normal de Gauss é a aplicação

$$N : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}^2, \quad (2.1)$$

dada localmente por

$$N(p) = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$$

em que \mathbb{S}^2 é a esfera unitária.

EXEMPLO 2.2.12. Seja o elipsóide de equação

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1,$$

cuja imagem pela aplicação normal de Gauss é dada pela figura 2.5.

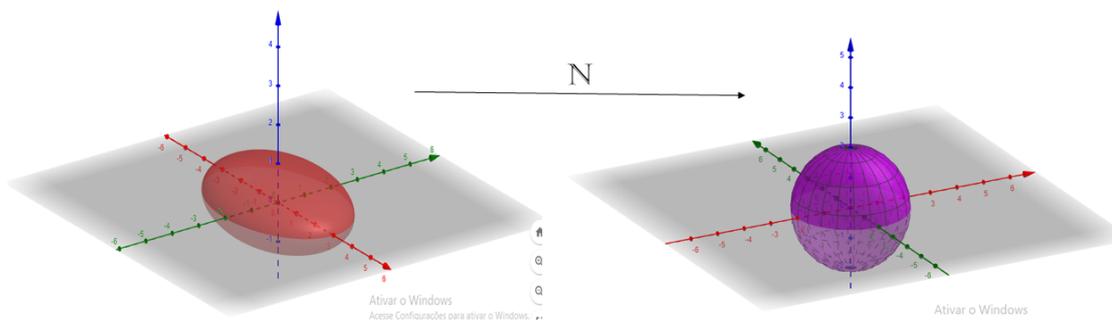


Figura 2.5: Imagem do elipsóide pela aplicação normal de Gauss.

O vetor $N(p)$ é normal a $T_p\mathbb{M}$ em p e a $T_{N(p)}\mathbb{S}^2$, ou seja $T_p\mathbb{M}$ e $T_{N(p)}\mathbb{S}^2$ são paralelos, logo podem ser identificados como os mesmos espaços vetoriais. Assim sendo, estudemos agora a variação de N , ou seja, a derivada de N .

Se \mathbb{M} for uma superfície regular de classe pelo menos C^2 , então a aplicação de Gauss

$$N : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{S}^2,$$

é uma aplicação diferenciável de classe C^1 .

Como $T_p\mathbb{M}$ e $T_{N(p)}\mathbb{S}^2$ são paralelos, então a derivada de aplicação normal

$$dN_p : T_p\mathbb{M} \approx \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{N(p)}\mathbb{S}^2 \approx \mathbb{R}^2, \quad (2.2)$$

pode ser vista como uma aplicação linear em $T_p\mathbb{M}$, isto é

$$dN_p : T_p\mathbb{M} \approx \mathbb{R}^2 \rightarrow T_p\mathbb{M} \approx \mathbb{R}^2. \quad (2.3)$$

2.2.4 Segunda Forma Fundamental

Nesta subsecção, apresentaremos a segunda forma fundamental, uma forma quadrática que está relacionada com a aplicação normal de Gauss.

DEFINIÇÃO 2.2.13. *A forma quadrática II_p , definida em $T_p\mathbb{M}$ por*

$$II_p = - \langle dN_p(\mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle$$

é dita segunda forma fundamental de \mathbb{M} em p .

Inicialmente, consideramos que todas as parametrizações

$$\mathbf{x} : \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{M},$$

são compatíveis com a orientação de \mathbb{M} , ou seja, em $\mathbf{x}(\mathbb{U})$,

$$N = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}.$$

Calculemos a segunda forma fundamental no vetor $\mathbf{v} \in T_p\mathbb{M}$.

Sejam $\mathbf{x}(u, v)$ uma parametrização local de uma vizinhança $\mathbb{V} \subset \mathbb{M}$ que contém o ponto p e $\gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ uma curva parametrizada em \mathbb{M} , tal que $\gamma(0) = p$. Dessa forma, temos que

$$\gamma'(t) = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v'$$

e

$$N(t) = N(\gamma(t)) = N(u(t); v(t)).$$

Assim,

$$\begin{aligned} dN(\gamma') &= dN(u'(t); v'(t)) \\ &= dN(\mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v') \\ &= dN(\mathbf{x}_u)u' + dN(\mathbf{x}_v)v' \\ &= N_u u' + N_v v'. \end{aligned}$$

Uma vez que os vetores $N_u; N_v \in T_p\mathbb{M}$ e $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ é base de $T_p\mathbb{M}$, então reescrevemos a diferencial da seguinte maneira

$$\begin{aligned} N_u &= a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v, \\ N_v &= a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v. \end{aligned}$$

Dessa forma, a matriz dN na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ se escreve assim

$$dN = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Segue-se então que

$$\begin{aligned} dN(\gamma') &= (a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v)u' + (a_{12}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v)v', \\ &= \mathbf{x}_u(a_{11}u' + a_{12}v') + \mathbf{x}_v(a_{21}u' + a_{22}v'), \end{aligned}$$

isto é,

$$dN \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

A matriz de dN dada por (a_{ij}) , é chamada de matriz de Weingarten.

Por outro lado, a expressão da segunda forma fundamental na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$ é dada por

$$\begin{aligned} II_p(\gamma') &= - \langle dN_p(\gamma'); \gamma' \rangle \\ &= - \langle N_u u' + N_v v', \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \rangle, \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} II_p(\gamma') &= - \left(u'^2 \langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle + u'v' \langle N_u; \mathbf{x}_v \rangle + v'u' \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle + \right. \\ &\quad \left. + v'^2 \langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Uma vez que

$$\langle N, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N, \mathbf{x}_v \rangle = 0, \forall (u, v),$$

segue-se então que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \langle N; \mathbf{x}_u \rangle &= \langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle = 0, \\ \frac{\partial}{\partial v} \langle N, \mathbf{x}_u \rangle &= \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle + \langle N; \mathbf{x}_{uv} \rangle = 0, \\ \frac{\partial}{\partial u} \langle N, \mathbf{x}_v \rangle &= \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle + \langle N; \mathbf{x}_{vu} \rangle = 0, \\ \frac{\partial}{\partial v} \langle N, \mathbf{x}_v \rangle &= \langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle + \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Dessas equações

$$\begin{aligned} \langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle &= - \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle, \\ \langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle &= - \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle, \\ \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle &= - \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle, \end{aligned}$$

que resulta em

$$\langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle .$$

Dessa forma, a equação (2.5) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$II_p(\gamma') = -\left(e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2\right). \quad (2.6)$$

Denotaremos

$$\begin{aligned} -e &= \langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N; \mathbf{x}_{uu} \rangle, \\ -f &= \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle N; \mathbf{x}_{uv} \rangle = \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = \langle N; \mathbf{x}_{vu} \rangle, \\ -g &= \langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle N; \mathbf{x}_{vv} \rangle, \end{aligned}$$

que serão chamados de coeficientes da segunda forma fundamental.

Da equação (2.6), temos que

$$\begin{aligned} II_p(\gamma') &= -\left((u')^2 \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle + u'v' \langle N, \mathbf{x}_{vu} \rangle + u'v' \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle + \right. \\ &\quad \left. + (v')^2 \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle\right) \\ &= -\left((u')^2 \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle + 2u'v' \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle + (v')^2 \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle\right) \end{aligned}$$

e por consequência,

$$II_p(\gamma') = e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2.$$

Obteremos os valores de a_{ij} que definem a matriz termos dos coeficientes da primeira e da segunda forma fundamentais.

$$\begin{aligned} -e &= \langle N_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = a_{11} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle + a_{21} \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle, \\ -f &= \langle N_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle a_{11}\mathbf{x}_u + a_{21}\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = a_{11} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle + a_{21} \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle, \\ -f &= \langle N_v, \mathbf{x}_u \rangle = \langle a_{21}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle = a_{21} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle + a_{22} \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u \rangle, \\ -g &= \langle N_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle a_{21}\mathbf{x}_u + a_{22}\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = a_{21} \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle + a_{22} \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle. \end{aligned}$$

Ao substituirmos nessas expressões os coeficientes da primeira forma fun-

damental nas expressões acima obtemos

$$\begin{aligned} -e &= a_{11}E + a_{21}F, \\ -f &= a_{11}F + a_{21}G, \\ -f &= a_{21}E + a_{22}F, \\ -g &= a_{21}F + a_{22}G. \end{aligned}$$

Tais relações são expressas na seguinte forma

$$-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

logo,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1},$$

No entanto,

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

o que determina os coeficientes a_{11}, a_{21}, a_{12} e a_{22} que são os coeficientes da matriz dN na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\}$, o que resulta que

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \\ a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \\ a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

2.2.5 Curvatura de Gauss

Uma vez que a aplicação (2.1) é diferenciável, temos que

$$dN_p : T_p\mathbb{M} \approx \mathbb{R}^2 \rightarrow T_p\mathbb{M} \approx \mathbb{R}^2, \quad (2.8)$$

que é a diferencial da aplicação de Gauss.

Dessa forma o determinante de (2.8) é chamado de curvatura Gaussiana K de \mathbb{M} em p . Portanto

$$\det(dN_p) = K = k_1 k_2,$$

em que k_1 e k_2 são os autovalores da aplicação (2.8) e chamados de curvaturas principais. Observe que, como a matriz (2.7) é simétrica, então k_1 e k_2 são números reais.

Por outro lado, pelas cartas locais, o determinante de (6.5) que é dado pela seguinte expressão

$$\det(dN) = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left[(fF - eG)(fF - gE) - (gF - fG)(eF - fE) \right] \quad (2.9)$$

é dito curvatura Gaussiana K de \mathbb{M} no ponto p .

Dessa forma, da equação (2.9), temos

$$\begin{aligned} \det(dN) &= \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left[(fF - eG)(fF - gE) - (gF - fG)(eF - fE) \right] \\ &= \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left[f^2 F^2 + eGgE - geF^2 - f^2 GE \right] \\ &= \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left[f^2 F^2 + eg(EG - F^2) - f^2 GE \right] \\ &= \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left[f^2(F^2 - EG) + eg(EG - F^2) \right] \\ &= \frac{EG - F^2(eg - f^2)}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{eg - f^2}{(EG - F^2)}. \end{aligned}$$

Portanto, a curvatura Gaussiana também pode ser expressa em termos dos coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais, isto é

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad (2.10)$$

em que $EG - F^2 \neq 0$. Os coeficientes E, F, G são os coeficientes da primeira forma fundamental de \mathbb{M} enquanto que os coeficientes e, f, g são os coeficientes da segunda forma fundamental de \mathbb{M} .

Como a curvatura gaussiana é um número real, então a mesma pode ser negativa, nula ou positiva, conforme mostrado na figura 2.6.

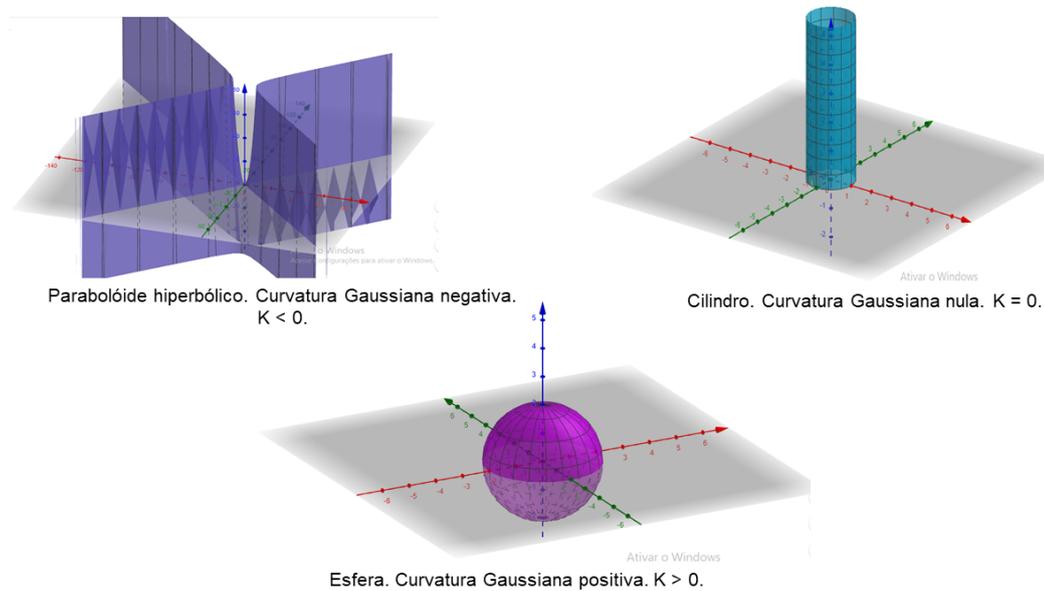


Figura 2.6: Três superfícies com curvatura gaussiana negativa, nula e positiva.

EXEMPLO 2.2.14. *Seja*

$$\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{M},$$

a parametrização do toro dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = \left((3 + \cos v) \cos u, (3 + \cos v) \sin u, \sin v \right),$$

em que: $0 < u < 2\pi$ e $0 < v < 2\pi$, onde

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u &= \left(-(3 + \cos v) \sin u, (3 + \cos v) \cos u, 0 \right), \\ \mathbf{x}_v &= \left(-\sin v \cos u, -\sin v \sin u, \cos v \right), \\ \mathbf{x}_{uv} &= \left(\sin v \cos u, \sin v \sin u, 0 \right).\end{aligned}$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$\begin{aligned}E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle &= (3 + \cos v)^2, \\ F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle &= 0, \\ G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle &= 1.\end{aligned}$$

O vetor normal à superfície \mathbb{M} é dado por

$$\begin{aligned}N(p) &= \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}, \\ &= \left(\frac{(3 + \cos v)(\cos u \cos v)}{(3 + \cos v)}, \frac{(3 + \cos v)(\cos v \sin u)}{(3 + \cos v)}, \frac{(3 + \cos v)(\sin v)}{(3 + \cos v)} \right), \\ &= \left(\cos u \cos v, \cos v \sin u, \sin v \right),\end{aligned}$$

em que

$$\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{(3 + \cos v)^2} = (3 + \cos v).$$

Os coeficientes da segunda forma fundamental são

$$\begin{aligned}e = \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle &= -(3 + \cos v), \\ f = \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle &= 0, \\ g = \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle &= -1.\end{aligned}$$

Assim, a curvatura gaussiana do toro de equação

$$\mathbf{x}(u, v) = \left((3 + \cos v) \cos u, (3 + \cos v) \sin u, \sin v \right)$$

é dada por

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-(3 + \cos v) \cos v(-1)}{(3 + \cos v)^2} = \frac{\cos v}{(3 + \cos v)}.$$

O que nos permite concluir que

i.

$$K = 0 \Leftrightarrow \cos v = 0 \Leftrightarrow v = \frac{\pi}{2} \quad e \quad v = \frac{3\pi}{2}.$$

Sobre a curva $v = \frac{\pi}{2}$ e $v = \frac{3\pi}{2}$, a curvatura é nula, e tais pontos nessa condição são chamados parabólicos.

ii.

$$K < 0 \Leftrightarrow \cos v < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < v < \frac{3\pi}{2}.$$

Sobre a região $\frac{\pi}{2} < v < \frac{3\pi}{2}$, a curvatura é negativa, e tais pontos nessa condição são chamados hiperbólicos.

iii.

$$K > 0 \Leftrightarrow \cos v > 0 \Leftrightarrow 0 < v < \frac{\pi}{2} \quad ou \quad \frac{3\pi}{2} < v < 2\pi.$$

Sobre a região $0 < v < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} < v < 2\pi$, a curvatura é positiva, e tais pontos nessa condição são chamados elípticos.

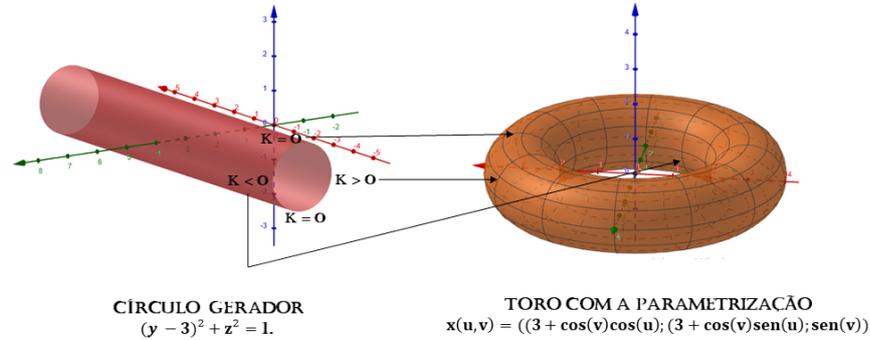


Figura 2.7: Regiões de curvatura do toro.

Função curvatura de Gauss

A função curvatura de Gauss é uma aplicação definida na superfície \mathbb{M} ,

$$K : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}.$$

cuja imagem é o determinante da matriz, ou seja, um número real. Esse conceito é importante para o nosso trabalho, uma vez que trabalharemos no problema da existência dos pontos críticos da função curvatura de Gauss.

Entretanto, o foco em nosso presente trabalho, é a curvatura geodésica de curvas mergulhadas em superfícies.

2.3 Geodésicas

Dados dois pontos quaisquer na superfície \mathbb{M} , estamos interessados em caminhos de menor comprimento que os ligam.

Se existir um caminho de menor comprimento entre estes dois pontos, então esse caminho é denominado geodésica. Tais caminhos em geral não são únicos.

Evidentemente quando se trata do plano, a geodésica é um segmento de reta. Na esfera, existe uma infinidade de caminhos que ligam os pólos norte e sul.

As geodésicas em superfícies, desempenham o mesmo papel da reta em planos. Nesta seção, apresentaremos o conceito do que é uma geodésica de uma superfície M .

DEFINIÇÃO 2.3.1. *Uma curva regular $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ parametrizada pelo comprimento de arco é uma geodésica, se o vetor $\gamma''(s)$ é perpendicular a superfície no ponto $\gamma(s)$, $\forall s$, ou seja, $\gamma''(s)$ é paralelo ao vetor normal $N = N \circ \gamma(s)$.*

PROPOSIÇÃO 2.3.2. *Em uma geodésica $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, o vetor velocidade $\|\gamma'(t)\|$ é constante, para qualquer parâmetro t .*

Demonstração. Se $\gamma(t)$ é uma geodésica então $\gamma''(t)$ é paralelo a N , logo $\gamma'' \perp \gamma'$. Portanto, $\langle \gamma'', \gamma' \rangle = 0$.

Assim

$$\frac{d}{dt} \|\gamma'(t)\|^2 = \frac{d}{dt} \langle \gamma', \gamma' \rangle = 2 \langle \gamma'', \gamma' \rangle = 0,$$

onde $\|\gamma'(t)\| = \text{constante}$. □

2.4 Equações das Geodésicas

Como veremos a seguir, as geodésicas são soluções de um sistema de equações diferenciais que em geral, não são simples no que diz respeito às suas soluções.

Inicialmente explicitaremos tais equações diferenciais das geodésicas sem nos preocuparmos com suas soluções. Antes de expressá-las relembramos de alguns conceitos.

Seja $\gamma(t) = \mathbf{x}(u(t); v(t))$ uma curva diferenciável. Então

$$\gamma'(t) = u' \mathbf{x}_u + v' \mathbf{x}_v. \quad (2.11)$$

Diferenciando esta equação, temos

$$\gamma''(t) = \mathbf{x}_{uu}u'^2 + \mathbf{x}_u u'' + 2\mathbf{x}_{uv}u'v' + \mathbf{x}_{vv}v'^2 + \mathbf{x}_v v'' \quad (2.12)$$

em que os vetores \mathbf{x}_{uu} , \mathbf{x}_{uv} e \mathbf{x}_{vv} podem ser expressos na base $\{\mathbf{x}_u; \mathbf{x}_v; N\}$ como segue

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{x}_v + eN, \\ \mathbf{x}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{x}_v + fN, \\ \mathbf{x}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \mathbf{x}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{x}_v + gN. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Os coeficientes Γ_{ij}^k são chamados símbolos de Christoffel e podem ser determinados em função dos coeficientes da primeira forma fundamental, conforme as equações abaixo, enquanto que os escalares e , f , g são os coeficientes da segunda forma fundamental.

Para determinarmos os símbolos de Christoffel, tomamos o produto interno das três relações com \mathbf{x}_u e \mathbf{x}_v , obtemos os três sistemas de equações

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F = \frac{1}{2} E_u \\ \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G = F_u - \frac{1}{2} E_v, \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 E + \Gamma_{12}^2 F = \frac{1}{2} E_v \\ \Gamma_{12}^1 F + \Gamma_{12}^2 G = \frac{1}{2} G_u, \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 E + \Gamma_{22}^2 F = F_v - \frac{1}{2}G_u \\ \Gamma_{22}^1 F + \Gamma_{22}^2 G = \frac{1}{2}G_v, \end{cases} \quad (2.16)$$

em que ao usarmos a Regra de Crammer, encontramos as soluções dos sistemas (2.14), (2.15) e (2.16), isto é, obtemos os símbolos de Christoffel,

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2(EG - F^2)}(GE_u - 2FF_u + FE_v), \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2(EG - F^2)}(2EF_u - EE_v - FE_u), \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2(EG - F^2)}(GE_v - FG_u), \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2(EG - F^2)}(EG_u - E_v) \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2(EG - F^2)}(2GF_v - GG_u - FG_v), \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2(EG - F^2)}(EG_v - 2FF_v + FG_u). \end{aligned}$$

Substituindo as equações (2.13) em (2.12), obtemos a expressão para o vetor aceleração γ'' na base $\{X_u, X_v, N\}$

$$\begin{aligned} \gamma'' &= (u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2)\mathbf{x}_u + \\ &+ (v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2)\mathbf{x}_v + \\ &+ (e(u')^2 + 2fu'v' + g(v')^2)N. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Para termos as equações diferenciais que permitem obter as funções $u(t)$ e $v(t)$ das geodésicas $\gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$ de uma superfície regular $\mathbf{x}(u, v)$ basta anularmos as componentes dos vetores \mathbf{x}_u e \mathbf{x}_v do vetor aceleração na equação (2.17).

Desta forma, obtemos o sistema de duas equações diferenciais de segunda ordem que representa as equações de uma geodésica de uma vizinhança coordenada. Isso pode ser visto através da Proposição seguinte

PROPOSIÇÃO 2.4.1. (*Equações Diferenciais das Geodésicas*). *Sejam \mathbb{M} uma superfície com parametrização local, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ e $\gamma(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$, $t \in I \subset \mathbb{R}$, uma curva diferenciável. Então, γ é uma geodésica de \mathbb{M} se, e somente se, as funções $u = u(t)$ e $v = v(t)$ satisfazem esse sistema de equações*

$$\begin{cases} u'' + \Gamma_{11}^1(u')^2 + 2\Gamma_{12}^1 u'v' + \Gamma_{22}^1(v')^2 = 0, \\ v'' + \Gamma_{11}^2(u')^2 + 2\Gamma_{12}^2 u'v' + \Gamma_{22}^2(v')^2 = 0, \end{cases} \quad (2.18)$$

em que os símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k são calculados em $(u(t), v(t))$.

O sistema (2.18) é denominado como o *sistema de equações diferenciais das geodésicas de \mathbb{M}* .

Como resultado do Teorema de Existência e Unicidade, cujo enunciado está no Apêndice A, temos a seguinte proposição

PROPOSIÇÃO 2.4.2. (*Existência e Unicidade de Geodésicas*). *Dados um ponto p de uma superfície regular \mathbb{M} e $\mathbf{w} \in T_p\mathbb{M}$, existem um intervalo aberto I contendo a origem e uma única geodésica: $\gamma : I \rightarrow \mathbb{M}$, tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = \mathbf{w}$.*

Conforme já mencionado, nas seções a seguir apresentaremos as equações diferenciais das geodésicas de algumas superfícies.

2.4.1 Equações diferenciais das geodésicas do plano

Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{M}$ a parametrização do plano dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, 0), \text{ onde } \mathbf{x}_u = (1, 0, 0) \text{ e } \mathbf{x}_v = (0, 1, 0).$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = \langle 1, 0, 0 \rangle \langle 1, 0, 0 \rangle = 1,$$

$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = \langle 1, 0, 0 \rangle \langle 0, 1, 0 \rangle = 0,$$

$$G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \langle 0, 1, 0 \rangle \langle 0, 1, 0 \rangle = 1,$$

os símbolos de Christoffel são

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0.$$

Assim, o sistema (2.18) para o plano se escreverá da seguinte forma

$$\begin{cases} u'' = 0 \implies u(t) = a_0 + b_0 t \\ v'' = 0 \implies v(t) = c_0 + d_0 t \end{cases}$$

Ou seja,

$$\mathbf{x}(u(t), v(t)) = \mathbf{x}(a_0 + b_0 t, c_0 + d_0 t).$$

Logo, as geodésicas do plano são retas.

2.4.2 Equações diferenciais das geodésicas do cilindro

O cilindro reto

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$$

admite a parametrização $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{M}$ dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \sin u, v),$$

em que $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < 2\pi \text{ e } -\infty < v < +\infty\}$.

Para calcularmos a primeira forma fundamental, notemos que

$$\mathbf{x}_u = (-\sin u, \cos u, 0) \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_v = (0, 0, 1).$$

Portanto,

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = 1,$$

$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0,$$

$$G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = 1,$$

e os símbolos de Christoffel são

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0.$$

Assim, o sistema (2.18) para o cilindro em questão ficará da forma

$$\begin{cases} u'' = 0 \implies u(t) = a_0 + b_0 t \\ v'' = 0 \implies v(t) = c_0 + d_0 t \end{cases} \quad (2.19)$$

Note que

Se $b_0 = 0$ e $d_0 \neq 0$, então as geodésicas do cilindro são seus meridianos.

Se $d_0 = 0$ e $b_0 \neq 0$, então as geodésicas do cilindro são seus paralelos.

Se $b_0 \neq 0$ e $d_0 \neq 0$, então consideremos o ponto $p = (1, 0, 0)$ do cilindro.

Então supondo que $a_0 = c_0 = 0$ fornece o ponto inicial da curva, então em particular tem-se a curva

$$(\cos b_0 t, \sin b_0 t, d_0 t).$$

Daí concluímos que a curva geodésica consiste em uma hélice.

Observemos ainda que se $b_0 = 0 = d_0$, então a curva geodésica se reduziria a um ponto. Logo, concluímos que as geodésicas do cilindro, são os meridianos, os paralelos e as hélices, conforme mostrado na figura 2.8.

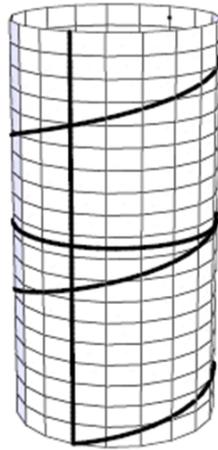


Figura 2.8: Geodésicas do cilindro.

2.4.3 Equações diferenciais das geodésicas de uma superfície de revolução

Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva no plano yz parametrizada por

$$(0, f(u), g(u)).$$

para $u \in I$ e denotemos por v o ângulo de rotação em torno do eixo Oz .

A superfície de revolução obtida pela rotação dessa curva em relação ao eixo z tem a seguinte parametrização

$$\mathbf{x}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)),$$

para $u \in I$ e $v \in (0, 2\pi)$, mostrado na figura 2.9.

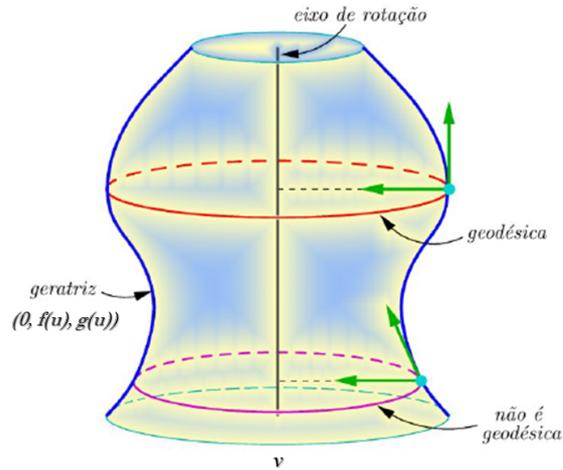


Figura 2.9: Superfície de revolução.

Temos que

$$\mathbf{x}_u = (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, g'(u))$$

$$\mathbf{x}_v = (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0).$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = (f'(u))^2(\cos^2 v + \sin^2 v) + (g'(u))^2 = (f'(u))^2 + (g'(u))^2,$$

$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = -f'(u) \cos v f(u) \sin v + f'(u) f(u) \sin v \cos v + 0 = 0,$$

$$G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = f(u)^2(\cos^2 v + \sin^2 v) = f(u)^2.$$

e conseqüentemente obtemos

$$E_u = 2(f'(u)f''(u) + g'(u)g''(u)),$$

$$G_u = 2f(u)f'(u),$$

$$E_v = F_u = F_v = G_v = 0,$$

os símbolos de Christoffel são

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2(EG - F^2)}(GE_u - 2FF_u + FE_v) = \frac{f'(u)f''(u) + g'(u)g''(u)}{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}, \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2(EG - F^2)}(2EF_u - EE_v - FE_u) = 0, \forall(u, v), \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2(EG - F^2)}(GE_v - FG_u) = 0, \forall(u, v), \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2(EG - F^2)}(EG_u - E_v) = \frac{f'(u)f(u)}{f(u)^2}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2(EG - F^2)}(2GF_v - GG_u - FG_v) = -\frac{f(u)f'(u)}{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}, \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2(EG - F^2)}(EG_v - 2FF_v + FG_u) = 0, \forall(u, v).\end{aligned}$$

Assim, o sistema (2.18) para a superfície de revolução ficará da forma

$$\begin{cases} u'' + \frac{f'f'' + g'g''}{(f')^2 + (g')^2}u'^2 - \frac{ff'}{(f')^2 + (g')^2}v'^2 = 0, \\ v'' + \frac{2ff'}{f^2}u'v' = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

Agora de acordo com (2.20), determinaremos as geodésicas de uma superfície de revolução. De fato, não é difícil ver que os meridianos $u = u(s)$ e $v = v_0$ parametrizados pelo comprimento de arco s são geodésicas.

De fato, ao resolvermos sistema (2.20) quando $v = v_0$ e $u = u(s)$, teremos $v' = 0$, e daí a segunda equação do sistema é satisfeita de imediato e a primeira equação fica:

$$u'' + (u')^2 \frac{f'(u)f''(u) + g'(u)g''(u)}{(f'(u))^2 + (g'(u))^2} = 0. \quad (2.21)$$

Como o meridiano $\gamma(s) = (f(u) \cos v_0, f(u) \sin v_0, g(u))$, onde $u = u(s)$, está parametrizado pelo comprimento do arco, temos que $\|\gamma'(s)\| = 1$. Logo,

$$\begin{aligned}\sqrt{(f'(u)u'(s) \cos v_0)^2 + (f'(u)u'(s) \sin v_0)^2 + (g'(u)u'(s))^2} &= 1 \\ (f'(u)u'(s))^2 + (g'(u)u'(s))^2 &= 1 \\ (u'(s))^2((f'(u))^2 + (g'(u))^2) &= 1,\end{aligned}$$

o que implica que

$$(u'(s))^2 = \frac{1}{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}. \quad (2.22)$$

Ao derivarmos (2.22), temos

$$\begin{aligned} 2u'(s)u''(s) &= -\frac{(2f'(u).f''(u)u'(s) + 2g'(u)g''(u)u'(s))}{((f'(u))^2 + (g'(u))^2)^2} \\ u'(s)u''(s) &= -\frac{(f'(u).f''(u) + g'(u)g''(u))}{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}(u'(s))^3, \\ u''(s) &= -\frac{(f'(u).f''(u) + g'(u)g''(u))}{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}(u'(s))^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$u''(s) + \frac{(f'(u).f''(u) + g'(u)g''(u))}{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}(u'(s))^2 = 0, \quad (2.23)$$

que é a primeira equação do sistema de equações de geodésicas em uma superfície de revolução.

Portanto, a segunda equação do sistema (2.20) também é satisfeita, uma vez que v é uma constante e $v'(0) = 0$.

Da mesma forma, mostraremos que os paralelos, $u = u_0$ e o ângulo de rotação $v = v(s)$, parametrizados pelo comprimento de arco, são geodésicas.

De fato, dado que

$$u = u_0 = \text{constante},$$

então

$$f(u) = c = \text{constante},$$

logo

$$f'(u) = 0, \forall u,$$

o que implica que,

$$v'' = 0.$$

A primeira equação de (2.20) é satisfeita trivialmente. Enquanto que a segunda equação se reduz a

$$v'' = 0$$

o que implica que

$$v' = \text{constante.}$$

Sendo assim o paralelo $u = u_0 = \text{constante}$ e $v = v(s) + k$ é trivialmente solução do sistema.

Para obtermos as curvas geodésicas que não são paralelos nem meridianos, consideremos a segunda equação do sistema de equações geodésicas de superfícies de revolução:

$$v'' + 2u'v' \frac{f f'(u)}{f(u)^2} = 0. \quad (2.24)$$

Esta equação (2.24) é equivalente a

$$(f(u)^2 v')' = f(u)^2 v'' + 2f(u)f'(u)v'u' = 0$$

logo

$$f(u)^2 v' = c,$$

em que c é uma constante.

Como essa geodésica está parametrizada pelo comprimento de arco, tem-se $\|\gamma'(s)\| = 1$ e a primeira forma fundamental ao longo de $(u(s), v(s))$, nos dá

$$u'(s)^2 (f'(u)^2 + g'(u)^2) + v'(s)^2 f(u)^2 = 1.$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade por $\left(\frac{ds}{dv}\right)^2$, obtemos:

$$\left(\frac{ds}{dv}\right)^2 = \left(\frac{du}{ds} \frac{ds}{dv}\right)^2 (f'(u)^2 + g'(u)^2) + \left(\frac{dv}{ds} \frac{ds}{dv}\right)^2 f(u)^2,$$

logo

$$\left(\frac{ds}{dv}\right)^2 = \left(\frac{du}{dv}\right)^2 (f'(u)^2 + g'(u)^2) + f(u)^2,$$

e como

$$\left(\frac{ds}{dv}\right)^2 = \left(\frac{(f(u))^4}{c^2}\right)$$

podemos reescrever essa igualdade da seguinte forma

$$\begin{aligned}\frac{f(u)^4}{c^2} &= \left(\frac{dv}{du}\right)^2 (f'(u))^2 + (g'(u))^2 + f(u)^2 \\ (f(u))^2 &= c^2 + c^2 \frac{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}{(f(u))^2} \left(\frac{dv}{du}\right)^2.\end{aligned}$$

Usando a última igualdade, temos

$$\begin{aligned}(f(u))^2 - c^2 &= c^2 \frac{((f'(u))^2 + (g'(u))^2)}{(f(u))^2} \left(\frac{dv}{du}\right)^2 \\ \frac{(f(u))^2((f(u))^2 - c^2)}{c^2} &= ((f'(u))^2 + (g'(u))^2) \left(\frac{dv}{du}\right)^2 \\ \sqrt{\frac{(f(u))^2((f(u))^2 - c^2)}{c^2((f'(u))^2 + (g'(u))^2)}} &= \left(\frac{dv}{du}\right) \\ \frac{1}{c} f(u) \sqrt{\frac{((f(u))^2 - c^2)}{((f'(u))^2 + (g'(u))^2)}} &= \left(\frac{dv}{du}\right) \\ \frac{c}{f(u)} \sqrt{\frac{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}{(f(u))^2 - c^2}} &= \left(\frac{dv}{du}\right)\end{aligned}$$

Concluimos então, por integração, que

$$v = c \int \frac{1}{f(u)} \sqrt{\frac{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}{(f(u))^2 - c^2}} du + k_1, \quad (2.25)$$

em que k_1 é uma constante.

Na figura 2.10 é mostrado as geodésicas de superfícies de revolução que não são paralelos e nem meridianos, isto é, é aquela curva em que a normal principal de cada um de seus pontos coincide com a normal à superfície.

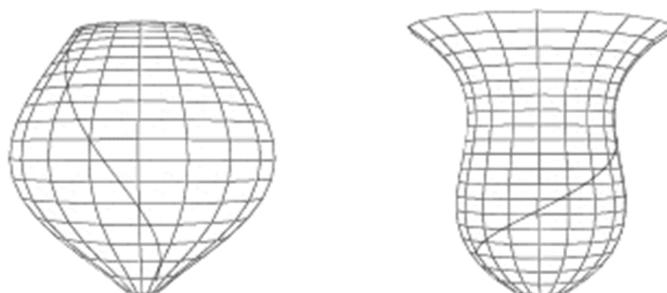


Figura 2.10: Geodésicas em superfícies de revolução que não são paralelos e nem meridianos.

2.4.4 Equações diferenciais das geodésicas da esfera

Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{M}$ a parametrização da esfera dada por

$$\mathbf{x}(\phi, \theta) = (\text{sen } \phi \cos \theta, \text{sen } \phi \text{sen } \theta, \cos \phi),$$

em que $(0 < \phi < \pi)$ e $(0 < \theta < 2\pi)$, e conforme mostrado na figura 2.11.

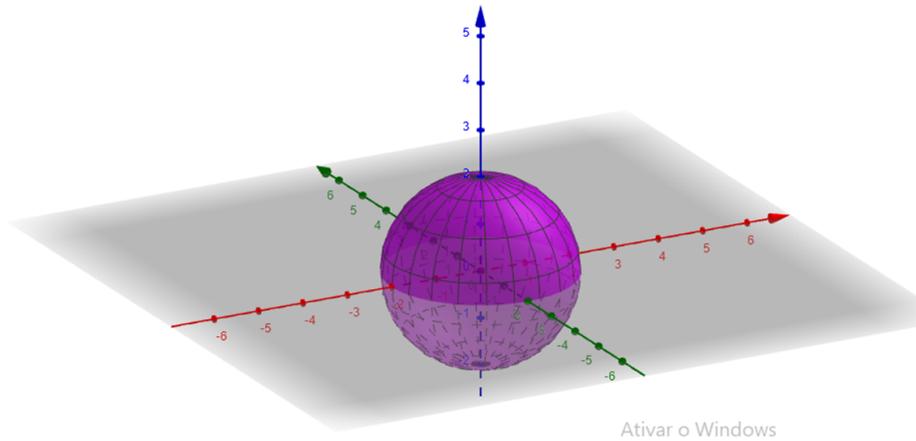


Figura 2.11: Superfície Esfera.

Temos que

$$\mathbf{x}_\phi = (\cos \phi \cos \theta, \cos \phi \sin \theta, -\sin \phi),$$

$$\mathbf{x}_\theta = (-\sin \phi \sin \theta, \sin \phi \cos \theta, 0).$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = \langle \mathbf{x}_\phi, \mathbf{x}_\phi \rangle = 1,$$

$$F = \langle \mathbf{x}_\phi, \mathbf{x}_\theta \rangle = 0,$$

$$G = \langle \mathbf{x}_\theta, \mathbf{x}_\theta \rangle = \sin^2 \phi,$$

e os símbolos de Christoffel são

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0, \\ \Gamma_{12}^2 &= \left(\frac{1}{2 \sin^2(\phi)} \right) \sin(2\phi), \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{\sin(2\phi)}{2}. \end{aligned}$$

Assim, o sistema (2.18) para a esfera em questão ficará da forma

$$\begin{cases} \phi'' - \left(\frac{\sin 2\phi}{2}\right)(\theta')^2 = 0 \\ \theta'' + \left(\frac{1}{2\sin^2 \phi}\right)\sin(2\phi)\phi'\theta' = 0. \end{cases} \quad (2.26)$$

A partir de (2.26), determinaremos as geodésicas da esfera. Em relação à segunda equação de (2.26), fazemos a seguinte mudança de variável

$$w = (\sin^2 \phi),$$

logo

$$w' = (\sin 2\phi)\phi'$$

o que implica que

$$\sin 2\phi = \frac{w'}{\phi'}$$

de modo que a segunda equação de (2.26), se transforma em

$$\begin{aligned} \theta'' + \frac{w'}{w}\theta' &= 0 \\ \frac{\theta''}{\theta'} &= -\frac{w'}{w}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

uma equação diferencial separável. Integrando ambos os lados de (2.27),

$$\int \frac{\theta''}{\theta'} = - \int \frac{w'}{w},$$

obtemos,

$$\begin{aligned} \ln \theta' &= -\ln w + \ln c_1 \\ \theta' &= \frac{c_1}{w}, \end{aligned}$$

isso implica que

$$\theta' = \frac{c_1}{\sin^2 \phi} \quad (2.28)$$

e conseqüentemente,

$$\theta = \int \frac{c_1}{\text{sen}^2 \phi} ds. \quad (2.29)$$

Da primeira equação de (2.26) e usando a mesma mudança de variável

$$\begin{aligned} w &= \text{sen}^2 \phi \\ w' &= (\text{sen } 2\phi)\phi', \end{aligned}$$

obtemos,

$$\phi'' - \frac{1}{2} \frac{w'}{\phi'} (\theta')^2 = 0, \quad (2.30)$$

então, multiplicando a equação (2.30) por ϕ' , tem-se

$$\begin{aligned} \phi'' \phi' - \frac{1}{2} \frac{w'}{\phi'} \phi' (\theta')^2 &= 0, \\ \phi'' \phi' &= \frac{1}{2} \frac{w'}{w^2} c_1^2, \end{aligned}$$

essa última equação é equivalente à

$$\frac{1}{2} \frac{d}{ds} (\phi')^2 = \frac{1}{2} \frac{w'}{w^2} c_1^2, \quad (2.31)$$

integrando (2.31),

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (\phi')^2 &= \int \frac{1}{2} \frac{w'}{w^2} c_1^2, \\ \frac{1}{2} (\phi')^2 &= -c_1^2 \frac{1}{2w} + k_1 \\ (\phi')^2 &= -\frac{c_1^2}{\text{sen}^2 \theta} + k_1 \\ \phi' &= \sqrt{k_1 - \frac{c_1^2}{\text{sen}^2 \theta}}. \end{aligned}$$

Logo, obtemos θ e ϕ ,

$$\begin{aligned} \theta &= c_1 \int \frac{1}{\text{sen}^2 \phi} ds + k_2, \\ \phi &= \int \sqrt{k_1 - \frac{c_1^2}{\text{sen}^2 \theta}} ds. \end{aligned}$$

em que k_1 e k_2 são constantes. Assim as geodésicas da esfera são equações que satisfazem ϕ e θ .

2.4.5 Equações diferenciais das geodésicas da esfera como superfície de revolução

Nessa seção, determinemos as geodésicas da esfera de raio r sob a ótica da esfera ser uma superfície de revolução. Sua parametrização é dada por

$$\mathbf{x}(\phi, \theta) = (r \operatorname{sen} \phi \cos \theta, r \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, r \cos \phi),$$

onde $(0 < \phi < \pi)$ e $(0 < \theta < 2\pi)$. Tem-se que

$$f(\phi) = \operatorname{sen} \phi,$$

Da mesma forma temos que

$$g(\phi) = \cos \phi.$$

Para obtermos os paralelos que são geodésicas, devemos ter

$$f'(\phi) = \cos \phi,$$

ou seja,

$$\phi = \frac{\pi}{2}.$$

Se $\phi = \frac{\pi}{2}$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\phi, \theta) &= \left(\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) \cos \theta, \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) \operatorname{sen} \theta, \cos \phi \right), \\ \mathbf{x}(\phi, \theta) &= (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta, 0). \end{aligned}$$

Portanto, o equador é o único paralelo que é uma geodésica.

De acordo com a equação (2.25), a equação da outra geodésica da esfera como superfície de revolução é dada por

$$\begin{aligned}\theta &= c \int \frac{1}{\operatorname{sen} \phi} \left(\sqrt{\frac{\cos^2 \phi + \operatorname{sen}^2 \phi}{\operatorname{sen}^2 \phi - c^2}} \right) d\phi + k_1 \\ &= \int \frac{c}{\operatorname{sen} \phi \sqrt{\operatorname{sen}^2 \phi - c^2}} d\phi + k_1\end{aligned}$$

em que k_1 é uma constante. Assim, para $c = 0$, tem-se $\theta = k_1$, em que k_1 é uma constante. Nesse caso, as geodésicas são seus meridianos.

De maneira equivalente, de acordo com Alves. S., em [1] é possível calcularmos a geodésica da esfera usando a ideia de circunferências máximas.

Quanto maior o raio de uma circunferência, mais ela se aproxima de ser uma reta. Como as circunferências de maior raio contidas numa superfície esférica \mathbb{S} são as circunferências máximas, é razoável esperar que a distância em \mathbb{S} entre dois pontos \mathbf{A} e \mathbf{B} seja o comprimento do arco menor $\widehat{\mathbf{AB}}$ da circunferência máxima que passa por \mathbf{A} e \mathbf{B} .

Primeiramente, supomos sem perda de generalidade que a superfície esférica que estamos trabalhando tem raio igual a 1 unidade e que seu centro é a origem do sistema ortogonal de coordenadas cartesianas.

A seguir, pela simetria da superfície esférica, assumiremos que o ponto \mathbf{A} seja o Pólo Norte e o ponto \mathbf{B} , será dado pelas suas coordenadas geográficas que vamos supor medidas em radianos. Digamos que a latitude de \mathbf{B} é $\theta(t)$ enquanto que sua longitude é $\phi(t)$. A circunferência máxima que passa por \mathbf{A} e \mathbf{B} contém o meridiano por \mathbf{B} de modo que o arco menor $\widehat{\mathbf{AB}}$ tem por comprimento $\frac{\pi}{2} - \theta_1$.

Consideraremos uma trajetória arbitrária ligando os pontos \mathbf{A} e \mathbf{B} . Mostraremos que seu comprimento é maior ou igual a $\frac{\pi}{2} - \theta_1$, conforme figura abaixo:

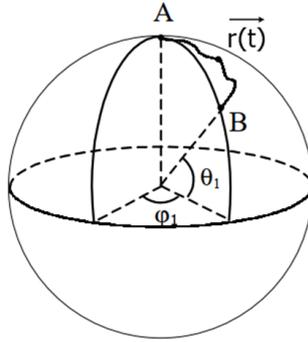


Figura 2.12: Vetor posição da trajetória que liga os pontos **A** e **B**.

De fato, ao imaginarmos viajando de **A** até **B**, em cada instante t , estaremos num ponto do globo terrestre com uma latitude $\theta(t)$ e uma longitude $\phi(t)$. Iniciando a trajetória no instante $t = 0$ e a finalizando no instante t_1 teremos

$$\theta(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \theta(t_1) = \theta_1$$

e

$$\phi(t_1) = \phi_1.$$

Essa trajetória arbitrária ligando **A** a **B** é então descrita por um vetor posição dado em coordenadas geográficas,

$$\begin{aligned} x &= \cos \theta(t) \cos \phi(t), \\ y &= \cos \theta(t) \sin \phi(t), \\ z &= \sin \theta(t), \end{aligned}$$

em que $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$, ou seja,

$$\vec{r}(t) = \left(\cos \theta(t) \cos \phi(t), \cos \theta(t) \sin \phi(t), \sin \theta(t) \right), \quad 0 \leq t \leq t_1. \quad (2.32)$$

Ao derivarmos a função vetorial (2.32) em relação ao tempo t obteremos o vetor velocidade da trajetória e conseqüentemente sua velocidade no instante t , isto é

$$\vec{r}'(t) = \left(\theta'(t)^2 + \cos^2 \theta(t) \phi'(t)^2 \right).$$

Note que

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{\theta'(t)^2 + \cos^2 \theta(t) \phi'(t)^2} \geq \sqrt{\theta'(t)^2} = |\theta'(t)| \geq -\theta'(t).$$

O comprimento da trajetória é calculado pela expressão

$$L = \int_0^{t_1} \|\vec{r}'(t)\| dt.$$

Assim, temos que

$$L \geq \int_0^{t_1} -\theta'(t) dt = -[\theta(t_1) - \theta(0)] = \frac{\pi}{2} - \theta_1.$$

e temos assim provado o resultado desejado.

2.4.6 Equações diferenciais das geodésicas do parabolóide elíptico

Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{M}$ uma parametrização do parabolóide elíptico dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2),$$

em que $0 < u < 2\pi$ e $0 < v < 2\pi$, cuja imagem é dada por 2.13.

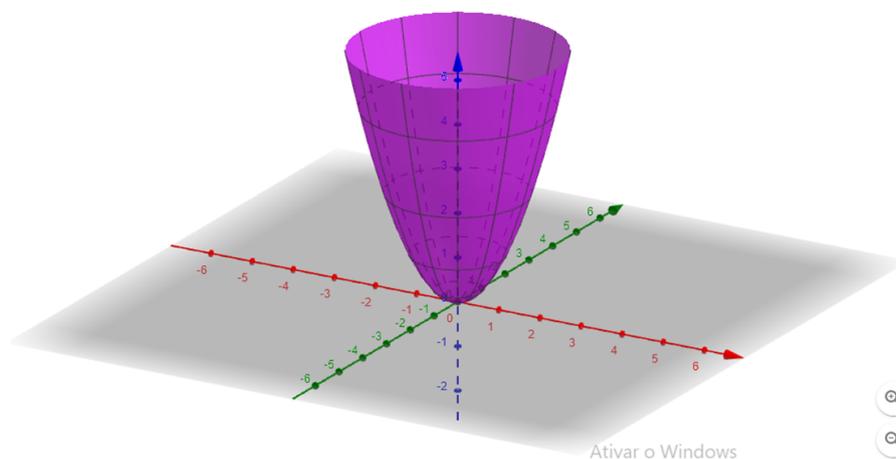


Figura 2.13: Superfície Parabolóide Elíptico.

Dessa forma, os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = 1 + 4u^2,$$

$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0,$$

$$G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = u^2,$$

e os símbolos de Christoffel são

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{4u}{1 + 4u^2}$$

$$\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0,$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{u},$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{u}{1 + 4u^2}.$$

Assim, o sistema (2.18) para o parabolóide elíptico em questão ficará da forma

$$\begin{cases} (1 + 4u^2)u'' + 4uu' - uv'^2 = 0 \\ uv'' + 2u'v' = 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

Mostremos que os paralelos $u = u_0$ e o ângulo de rotação $v = v(s)$ são geodésicas. De fato dado que u é constante, a equação 1 do sistema 2.33, se reduz a

$$-uw' = 0,$$

o que implica que

$$v' = 0,$$

e a equação 2 do sistema 2.33, se torna

$$v'' = 0.$$

Logo, $u = u_0$ e $v = v_0$, isto é, u e v são constantes. Assim, para $u = u_0$, o sistema não tem solução. Portanto, os paralelos não serão geodésicas do parabolóide elíptico.

Mostremos que os meridianos $v = v_0$ e a curva $u = u(s)$ são geodésicas. De fato dado que v é constante, temos a solução trivial.

De fato dado que v é constante, a equação 1 do sistema 2.33, se reduz a

$$-uw' = 0,$$

o que implica que

$$v' = 0.$$

Logo, a equação 1 do sistema 2.33, dependenderia apenas de $u(s)$. E a equação 2 do sistema 2.33, se torna

$$v'' = 0.$$

E portanto, os meridianos são geodésicas do parabolóide elíptico. Note que, quando $v = 0 = u$, a geodésica se reduz a um ponto.

Obteremos agora as curvas geodésicas que não são paralelos e nem meridianos. Da equação 2 do sistema 2.33, temos

$$uv'' = -2u'v' \tag{2.34}$$

o que implica que

$$\frac{v''}{v'} = -2 \frac{u'}{u} \quad (2.35)$$

a qual é uma equação diferencial do tipo separável.

Ao resolvermos 2.35, obtemos

$$\ln v' = -2 \ln u + \ln c. \quad (2.36)$$

e assim

$$v' = \frac{c}{u^2}. \quad (2.37)$$

Logo

$$v = \int \frac{c}{u^2} ds. \quad (2.38)$$

Supondo que a geodésica do parabolóide elíptico está parametrizada pelo comprimento de arco, então podemos assumir que

$$\|\gamma'(t)\|^2 = E(u')^2 + G(v')^2 = 1. \quad (2.39)$$

Assim, ao substituírmos (2.37) em (2.39) obtemos

$$(1 + 4u^2)(u')^2 + u^2 \left(\frac{c^2}{u^4} \right) = 1. \quad (2.40)$$

Ao resolvermos (2.40), obtemos

$$u' = \sqrt{1 - \frac{c^2}{u^2} \left(\frac{1}{1 + 4u^2} \right)} = F(u). \quad (2.41)$$

Logo, a equação (2.41) é solução da equação da geodésica do parabolóide elíptico.

2.4.7 Equações diferenciais das geodésicas do parabolóide circular como superfície de revolução

Agora determinemos as geodésicas do parabolóide visto como uma superfície de revolução gerado pela rotação da curva $z = y^2, x = 0$ em torno do eixo z . Assim, uma parametrização é dada a seguir

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, \quad u \sin v, \quad u^2)$$

para $u = z$ e $v \in (0, 2\pi)$, em que

$$f(u) = u.$$

Da mesma forma, temos

$$g(u) = u^2.$$

Assim da equação (2.25), a equação de uma geodésica do parabolóide de revolução é dada por

$$v = c \int \frac{1}{u} \left(\sqrt{\frac{1 + 4u^2}{u^2 - c^2}} \right) du + k_1, \quad (2.42)$$

em que k_1 é uma constante.

Assim (2.42) é a equação geral de uma geodésica de um parabolóide de revolução que não é necessariamente um paralelo e nem um meridiano.

Em particular, quando $c = 0$, temos que $v = v_0$, o que implica que $v(u)$ é uma curva geodésica do parabolóide circular.

2.4.8 Equações diferenciais das geodésicas do parabolóide hiperbólico ou sela

Seja $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{M}$ uma parametrização do parabolóide hiperbólico dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2),$$

onde $0 < u < 2\pi$ e $0 < v < 2\pi$.

Dessa forma, os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = 1 + 4u^2,$$

$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = -4uv,$$

$$G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = 1 + 4v^2,$$

e os símbolos de Christoffel são

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{4u}{4u^2 + 4v^2 + 1},$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{-4v}{4u^2 + 4v^2 + 1},$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{12}^2 = 0,$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{4u}{4u^2 + 4v^2 + 1},$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{4v}{4u^2 + 4v^2 + 1}.$$

Assim, o sistema (2.18) para o parabolóide hiperbólico ou sela em questão ficará da forma

$$\begin{cases} u'' + \left(\frac{4u}{4u^2 + 4v^2 + 1} \right) (u')^2 - \left(\frac{4u}{4u^2 + 4v^2 + 1} \right) (v')^2 = 0 \\ v'' + \left(\frac{4v}{4u^2 + 4v^2 + 1} \right) (u')^2 - \left(\frac{4v}{4u^2 + 4v^2 + 1} \right) (v')^2 = 0 \end{cases} \quad (2.43)$$

Observe que o sistema (2.43) é não-linear, e, portanto a solução não é trivial.

2.4.9 Equações diferenciais das geodésicas do cone

Consideremos o cone $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^3$ de equação

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

Uma parametrização para esse cone é dada abaixo

$$\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u),$$

em que $0 < u < +\infty$ e $0 < v < 2\pi$, conforme mostrado na figura 2.14.

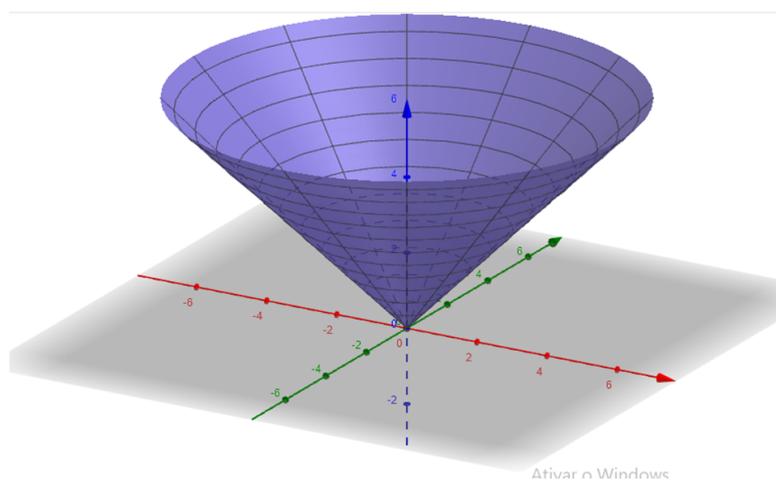


Figura 2.14: Superfície Cone.

onde concluímos que

$$\mathbf{x}_u = (\cos v, \sin v, 1),$$

$$\mathbf{x}_v = (-u \sin v, u \cos v, 0).$$

Dessa forma os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = 2,$$

$$F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0,$$

$$G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = u^2.$$

e os símbolos de Christoffel são

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0, \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{u}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{u}{2}.\end{aligned}$$

Substituindo no sistema (2.18) para o cone ficará da forma

$$\begin{cases} u'' - \left(\frac{u}{2}\right)(v')^2 = 0 \\ v'' + \left(\frac{2}{u}\right)u'v' = 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

Para $u = u_0 = \text{constante}$, a equação 2 do sistema 2.44, se reduz a

$$v'' = 0,$$

e a equação 1 do sistema 2.44, se torna

$$v' = 0.$$

Assim, os paralelos nem sempre serão geodésicas do cone.

Para $v = v_0 = \text{constante}$, a equação 2 do sistema 2.44, se reduz a

$$v'' = 0.$$

e a equação 1 do sistema 2.44, se reduz a

$$u'' = 0.$$

E portanto, os meridianos são geodésicas do cone.

Encontremos agora as geodésicas do cone que não são nem paralelos e nem meridianos.

Da equação 2 do sistema 2.44, temos

$$v'' = -\frac{2}{u}u'v' \quad (2.45)$$

o que implica que

$$\frac{v''}{v'} = -2 \frac{u'}{u} \quad (2.46)$$

a qual é uma equação diferencial do tipo separável.

Ao resolvermos 2.46, obtemos

$$\ln v' = -2 \ln u + \ln c. \quad (2.47)$$

e assim

$$v' = \frac{c}{u^2}. \quad (2.48)$$

Logo

$$v = \int \frac{c}{u^2} ds + k_1. \quad (2.49)$$

Em particular, quando $c = 0$, temos que $v = v_0$, o que implica que $v(u)$ é uma geodésica do cone.

Considerando que a geodésica do cone está parametrizada pelo comprimento de arco, então podemos assumir que

$$\|\gamma'(t)\| = Eu'^2 + Gv'^2 = 1 \quad (2.50)$$

Ao substituírmos (2.48) em (2.50) obtemos

$$u' = \frac{1}{u} \sqrt{\frac{u^2 - c^2}{2}} = F(u). \quad (2.51)$$

Logo, (2.51) é solução da equação que representa a geodésica do cone.

2.4.10 Equações diferenciais das geodésicas do toro

Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ o toro dada pela rotação da circunferência

$$(y - 3)^2 + z^2 = 1 \quad \text{e} \quad x = 0,$$

e $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{M}$ sua parametrização dada por

$$\mathbf{x}(u; v) = ((3 + \cos v) \cos u, (3 + \cos v) \sin u, \sin v),$$

em que $0 < u < 2\pi$ e $0 < v < 2\pi$, conforme mostrado na figura 2.15.

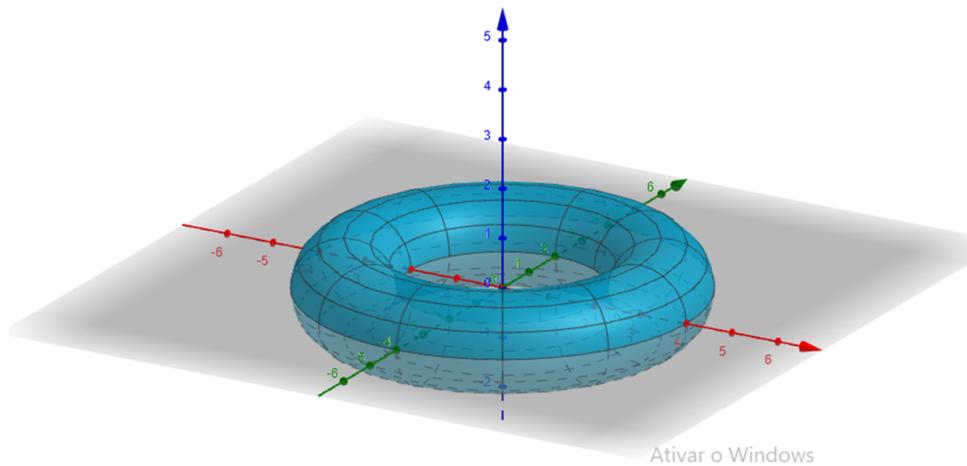


Figura 2.15: Superfície Toro.

Temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= \left(-(3 + \cos v) \sin u, (3 + \cos v) \cos u, 0 \right), \\ \mathbf{x}_v &= \left(-(\sin v) \cos u, -(\sin v) \sin u, \cos v \right). \end{aligned}$$

Dessa forma, os coeficientes da primeira forma fundamental são

$$\begin{aligned} E = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle &= (3 + \cos v)^2, \\ F = \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle &= 0, \\ G = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle &= 1, \end{aligned}$$

e os símbolos de Christoffel são

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{22}^2 = 0, \\ \Gamma_{11}^2 &= (3 + \cos v) \operatorname{sen} v, \\ \Gamma_{12}^1 &= -\frac{\operatorname{sen} v}{3 + \cos v}.\end{aligned}$$

Assim, o sistema (2.18) para o toro em questão fica da forma

$$\begin{cases} u'' - \left(\frac{3 \operatorname{sen} v}{3 + \cos v} \right) u' v' = 0 \\ v'' + \operatorname{sen} v (3 + \cos v) (u')^2 = 0. \end{cases} \quad (2.52)$$

Daremos a seguir as geodésicas desse toro.

Para $u = u_0$, a equação (1) do sistema (2.52), se reduz a

$$u'' = 0,$$

e a equação 2 se reduz a

$$v'' = 0,$$

o que implica que

$$v' = 0.$$

e assim

$$v = v(s) + k.$$

Para $v = v_0$, a equação (1) do sistema (2.52), se reduz a

$$u'' = 0.$$

E a equação (2) do sistema (2.52), se reduz a

$$\operatorname{sen} v = 0 \Leftrightarrow v = 0 \quad \text{ou} \quad v = \pi.$$

Assim a curva $v = \pi$ é equação de uma das geodésicas do toro.

Obteremos agora, as geodésicas gerais do toro. Na equação (1) do sistema (2.52), façamos a seguinte mudança de variável

$$w = (3 + \cos v),$$

o que resulta que

$$w' = -(\operatorname{sen} v)v',$$

ou seja,

$$\operatorname{sen} v = -\frac{w'}{v'},$$

de modo que

$$u'' + 3\frac{w'}{v'w}u'v' = 0,$$

logo,

$$u'' + 3\frac{w'u'}{w} = 0,$$

e por consequência,

$$\frac{u''}{u'} = -3\frac{w'}{w},$$

cujas solução é dada pela integração abaixo

$$\int \frac{u''}{u'} = -3 \int \frac{w'}{w},$$

isto é

$$\ln u' = -3 \ln w + \ln c_1,$$

logo

$$u' = \frac{c_1}{w^3},$$

isso implica que

$$u' = \frac{c_1}{(3 + \cos v)^3}, \quad (2.53)$$

e por integração, obtemos

$$u = \int \frac{c_1}{(3 + \cos v)^3} ds. \quad (2.54)$$

Trabalharemos agora com a segunda equação do sistema (2.52).

A segunda equação é dada por

$$v'' + \operatorname{sen} v(3 + \cos v)(u')^2 = 0. \quad (2.55)$$

Usando a equação (2.53), e a mesma mudança de variável, a equação (2.55)

se torna,

$$v'' - \frac{w'}{v'} w \frac{c_1^2}{w^6} = 0, \quad (2.56)$$

então, multiplicando a equação (2.56) por v' , tem-se

$$v''v' - \frac{w'}{v'} w \frac{c_1^2}{w^6} v' = 0,$$

logo

$$v''v' - \frac{w'c_1^2}{w^5} = 0,$$

essa última equação é equivalente à

$$\frac{1}{2} \frac{d}{ds} (v')^2 = \frac{c_1^2 w'}{w^5}, \quad (2.57)$$

cuja solução por integração de (2.57), é dada por

$$\int \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (v')^2 = \int \frac{c_1^2 w'}{w^5}$$

$$\int \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (v')^2 = c_1^2 \int \frac{w'}{w^5},$$

que por integração, temos

$$\frac{1}{2} (v')^2 = -\frac{c_1^2}{4w^4} + k_1$$

o que implica que

$$(v')^2 = -\frac{c_1^2}{2w^4} + k_1$$

consequentemente

$$(v') = \sqrt{k_1 - \frac{c_1^2}{2w^4}} \quad (2.58)$$

cuja solução por integração de (2.58) é dada por

$$\begin{aligned} v &= \int \sqrt{k_1 - \frac{c_1^2}{2w^4}} ds, \\ &= \int \sqrt{k_1 - \frac{c_1^2}{2(3 + \cos v)^4}} ds, \end{aligned}$$

em que k_1 é uma constante.

Logo, obteremos os parâmetros u e v , isto é,

$$\begin{aligned} u &= \int \frac{c_1}{(3 + \cos v)^3} ds, \\ v &= \int \sqrt{k_1 - \frac{c_1^2}{2(3 + \cos v)^4}} ds. \end{aligned}$$

Assim as geodésicas do toro são equações que satisfazem u e v .

2.4.11 Equações diferenciais das geodésicas do toro como superfície de revolução

De acordo com a abordagem dada na seção 2.4.10, determinaremos agora as geodésicas do toro como uma superfície de revolução com a mesma parametrização dada por

$$\mathbf{x}(u, v) = ((3 + \cos v) \cos u, (3 + \cos v) \sin u, \sin v),$$

em que $0 < u < 2\pi$ e $0 < v < 2\pi$. Assim, nós concluímos que

$$f(v) = (3 + \cos v),$$

analogamente, temos

$$g(v) = \sin v.$$

Para que os paralelos sejam geodésicas, devemos ter

$$f'(v) = 0 \Leftrightarrow v = 0 \quad e \quad v = \pi.$$

Se $v = 0$, temos que a geodésica será

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= (3 + \cos 0 \cos u, 3 + \cos 0 \sin u, \sin 0), \\ &= (3 + \cos u, 3 + \sin u, 0),\end{aligned}$$

ou seja, a circunferência exterior do toro. Se $v = \pi$, temos que a geodésica será

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= (3 + \cos \pi \cos u, 3 + \cos \pi \sin u, \sin \pi), \\ &= (3 - \cos u, 3 - \sin u, 0),\end{aligned}$$

ou seja, a circunferência interior do toro.

De acordo com a equação (2.25), a equação da outra geodésica do toro como superfície de revolução é dada por

$$\begin{aligned}u &= c \int \frac{1}{(3 + \cos v)} \left(\sqrt{\frac{\cos^2 v + \sin^2 v}{(3 + \cos v)^2 - c^2}} \right) dv + k_1, \\ &= c \int \frac{1}{(3 + \cos v) \sqrt{(3 + \cos v)^2 - c^2}} dv + k_1,\end{aligned}\tag{2.59}$$

em que k_1 é uma constante.

Logo, (2.59) determina as geodésicas do toro que não são paralelos e nem meridianos. De uma forma geral, concluímos que as equações diferenciais do toro visto como superfície de revolução não são elementares.

2.5 Aplicação Exponencial

Nessa seção, apresentaremos as ideias sobre a aplicação exponencial, a qual, fixando-se um ponto $p \in \mathbb{M}$ de uma superfície regular, associa a vetores $\mathbf{v} \in T_p \mathbb{M}$, pontos que estão nas geodésicas que partem de p na direção de \mathbf{v} .

A importância de estudarmos tal aplicação é parametrizar um ponto crítico p da função curvatura de Gauss no sistema de coordenadas geodésicas polares.

Na subseção 2.2.1 trabalhamos com definições e exemplos em relação ao plano tangente a uma superfície. Analogamente na seção 2.3, foi definido e apresentado o que é uma geodésica de uma superfície. Sendo assim, é possível definirmos com mais precisão a aplicação exponencial.

Geometricamente, a construção corresponde a percorrer (se possível) um comprimento igual a $\|\mathbf{v}\|$ ao longo da geodésica passando por p na direção de \mathbf{v} . O ponto assim obtido é denotado por $\exp_p(\mathbf{v})$.

DEFINIÇÃO 2.5.1. *Dado um ponto $p \in \mathbb{M}$ e um vetor $\mathbf{v} \in T_p\mathbb{M} \neq 0$. Pelo Teorema de Existência e Unicidade, existe um dado $\epsilon > 0$ e uma única geodésica $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{M}$ que passa pelo ponto p e que é tangente ao vetor \mathbf{v} tal que*

$$\gamma(0, p) = p \quad e \quad \gamma'(0, p) = \mathbf{v}.$$

DEFINIÇÃO 2.5.2. *Se $\mathbf{v} \in T_p\mathbb{M}$, $\mathbf{v} \neq 0$ é tal que*

$$\gamma\left(\|\mathbf{v}\|, \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right) = \gamma(1, \mathbf{v}).$$

está definido, então definimos a aplicação exponencial de \mathbf{v} por

$$\begin{aligned} \exp_p : T_p\mathbb{M} \approx \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{M}, \\ \exp_p(\mathbf{v}) &= \gamma(1, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \exp_p : T_p\mathbb{M} \approx \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{M}, \\ \exp_p(0) &= p. \end{aligned}$$

PROPOSIÇÃO 2.5.3. *Dado $p \in \mathbb{M}$ existe um $\epsilon > 0$ tal que \exp_p é definida e diferenciável no interior de um disco de raio ϵ de $T_p\mathbb{M}$, com centro no ponto p .*

PROPOSIÇÃO 2.5.4. *A aplicação*

$$\exp_p : \mathbb{B}_\epsilon \subset T_p\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M},$$

é um difeomorfismo em uma vizinhança $U \subset \mathbb{B}_\epsilon$ da origem O de $T_p\mathbb{M}$.

As demonstrações podem ser encontradas em [4].

2.6 Distância de Hausdorff

Distância de Hausdorff é a maneira de como medimos a distância entre dois conjuntos \mathbb{A} e \mathbb{B} em qualquer variedade. Dados dois conjuntos \mathbb{A} e \mathbb{B} na variedade \mathbb{M} , a distância de Hausdorff nos permite definir a distância entre esses dois conjuntos.

DEFINIÇÃO 2.6.1. *Em uma variedade \mathbb{M} , a distância de Hausdorff entre dois conjuntos \mathbb{A} e \mathbb{B} é assim definida*

$$D_H(\mathbb{A}, \mathbb{B}) := \inf_{r>0} \{r > 0 : \mathbb{A} \subset T_r(\mathbb{B}) \text{ e } \mathbb{B} \subset T_r(\mathbb{A})\},$$

em que

$$T_r(\mathbb{X}) := \{p \in \mathbb{M} : \text{dist}(p, \mathbb{X}) < r\},$$

são todos os pontos em \mathbb{M} , tais que $\text{dist}(p, \mathbb{X})$ é a menor distância entre o ponto p ao conjunto \mathbb{X} .

De maneira similar, temos a definição de distância usual que é equivalente à distância de Hausdorff.

DEFINIÇÃO 2.6.2. *Em uma variedade \mathbb{M} , a distância usual entre dois conjuntos \mathbb{A} e \mathbb{B} é assim definida*

$$D(\mathbb{A}; \mathbb{B}) := \inf \{d(x; y) : x \in \mathbb{A}; y \in \mathbb{B}\}.$$

EXEMPLO 2.6.3. *Sejam o conjunto $\mathbb{A} = [0; 1] \times [0; 2]$ e o conjunto $\mathbb{B} = [2; 3] \times [0; 1]$ definidos em \mathbb{R}^2 , conforme mostrado na figura 2.16, disponível em [10].*

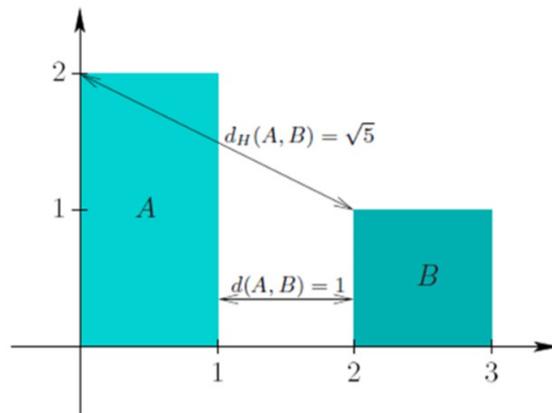


Figura 2.16: Distância entre \mathbb{A} e \mathbb{B} .

Conforme a figura, podemos observar que $d_{\mathbb{H}}(\mathbb{A}; \mathbb{B}) = \sqrt{5}$ e que $d(\mathbb{A}; \mathbb{B}) = 1$.

2.7 Teorema de Sard

Nessa seção, apresentaremos o teorema de Sard que diz respeito aos valores regulares de uma dada aplicação diferenciável $f : M \rightarrow N$.

Esse Teorema será usado para mostrarmos que a classe de superfícies que contém a sequência de curvas que convergem para o ponto crítico da função curvatura de Gauss não são comuns, visto que existência de tais sequências de curvas são raras uma vez que o conjunto de pontos críticos tem medida nula.

Segue o enunciado do Teorema.

TEOREMA 2.7.1. *Teorema de Sard. Sejam \mathbb{M}^m e \mathbb{N}^n variedades e uma aplicação $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N}$ diferenciável. Os pontos críticos de f constituem um conjunto de medida nula em \mathbb{N} .*

Destacamos que, ao falarmos de conjunto de medida nula, não estamos falando do ponto de vista da Teoria da Medida, mas sim sob o ponto de vista de Topologia, isto é, se refere ao recobrimento por conjuntos abertos, cuja a soma dos volumes tende a zero.

A demonstração desse Teorema foge do objetivo dessa dissertação e será omitida. Indicamos a referência [3] para maiores detalhes.

Capítulo 3

Curvatura Geodésica

Nesse capítulo daremos a introdução sobre a curvatura geodésica k_g de uma curva, a qual mede o quão longe a curva é de ser uma geodésica. Assim, um dos resultados importantes sobre curvaturas geodésicas é apresentado através da seguinte proposição abaixo conforme [4]

PROPOSIÇÃO 3.0.1. (Liouville). *Seja $\phi(s)$ uma parametrização pelo comprimento de arco de uma curva regular que passa pelo ponto $p \in \mathbb{M}$. Seja $\mathbf{x}(u, v)$ uma parametrização ortogonal de \mathbb{M} em p , isto é $F = 0$ e $\alpha(s)$ o ângulo entre \mathbf{x}_u e $\phi'(s)$ orientado a partir de \mathbf{x}_u .*

A curvatura geodésica k_g da curva Γ é dada por

$$k_g = \frac{d\alpha}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial \ln E}{\partial v} \cos \alpha + \frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial \ln G}{\partial u} \sin \alpha. \quad (3.1)$$

Após apresentarmos a expressão que representa a curvatura geodésica, daremos a expansão da métrica da superfície \mathbb{M} em coordenadas geodésicas polares, e em seguida apresentaremos a expressão que define a curvatura geodésica de uma curva.

3.1 Parametrização em coordenadas normais e geodésicas

Dado $p \in \mathbb{M}$, seja $\{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal de $T_p\mathbb{M}$. A vizinhança do ponto $p \in \mathbb{M}$, será parametrizada em coordenadas geodésicas normais $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ através da aplicação exponencial,

$$\phi(x_1, x_2) := \exp_p(x_1 e_1 + x_2 e_2).$$

E em coordenadas geodésicas polares essa aplicação exponencial, se reescreve dessa forma

$$\Psi(r, \theta) := \exp_p(r(\cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2))$$

com $(r, \theta) \in [0, \infty) \times S^1$. Dessa forma, é conveniente escrevermos

$$\Theta(\theta) := \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2 \in T_p\mathbb{M},$$

onde a função Θ representa o vetor unitário.

Dado que a métrica em coordenadas normais no plano é dada por

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2,$$

e a métrica em coordenadas polares no plano é dada por

$$ds^2 = dr^2 + d\theta^2.$$

Assim, a métrica g pode ser escrita como sendo,

$$\Psi^* g = dr^2 + f^2(r, \theta)d\theta^2.$$

Logo, a curvatura de Gauss no ponto de coordenadas (r, θ) pode ser escrita como

$$K \circ \Psi = -\frac{\partial_r^2 f}{f}.$$

De fato, a curvatura gaussiana em coordenadas geodésicas polares, dada a métrica g acima e tomando $E = 1$ e $G = f^2$ é dada pela seguinte expressão

$$\begin{aligned}
 K &= -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2} \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{f^2}} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right) \right] \\
 &= -\frac{1}{f} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial f}{\partial r} \right) \right] \\
 &= -\frac{\partial_r^2 f}{f}.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

PROPOSIÇÃO 3.1.1. *A função f admite a seguinte expansão em série de Taylor em potência de r dada a seguir*

$$\begin{aligned}
 f(r, \theta) &= r - \frac{1}{6} K(p) r^3 - \frac{1}{12} \nabla_{\Theta} K(p) r^4 + \frac{1}{120} \left(K(p)^2 - 3 \nabla^2_{\Theta} K(p) \right) r^5 + \\
 &+ O_p(r^6).
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Prova. Temos por definição de coordenadas geodésicas que

$$f(0, \theta) = 0 \quad \text{e} \quad \partial_r f(0, \theta) = 1.$$

Da equação (3.2), a curvatura de Gauss é dada por

$$\partial_r^2 f = -Kf. \tag{3.4}$$

Ao derivarmos (3.4) com respeito a r , obtemos

$$\partial_r^3 f = -\left(\frac{\partial K}{\partial r} f + K \frac{\partial f}{\partial r} \right) - \left(\frac{\partial(Kf)}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \theta}{\partial r},$$

onde

$$\left(\frac{\partial(Kf)}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \theta}{\partial r} = \nabla_{\Theta} Kf.$$

Então,

$$\partial_r^3 f = -K \partial_r f - \nabla_{\Theta} Kf. \tag{3.5}$$

Dado que

$$f(0, \theta) = 0 \quad \text{e} \quad \partial_r f(0, \theta) = 1,$$

temos que

$$\partial_r^3 f(0, \theta) = -K(p).$$

Assim, ao continuarmos esse processo, derivando (3.5) com respeito a r , temos

$$\partial_r^4 f = -(\nabla_{\Theta}^2 K(p)f + \partial_r f \nabla_{\Theta} K(p) + \partial_r^2 f K + \nabla_{\Theta} K \partial_r f),$$

e assim

$$\partial_r^4 f = -\nabla_{\Theta}^2 K(p)f - 2\partial_r f \nabla_{\Theta} K(p) - K \partial_r^2 f. \quad (3.6)$$

Da mesma forma que foi feito anteriormente, temos

$$\partial_r^4 f(0, \theta) = -2\nabla_{\Theta} K(p).$$

Ao derivarmos (3.6) com respeito a r , obtemos

$$\begin{aligned} \partial_r^5 f &= -(\nabla_{\Theta}^3 K(p)f + \partial_r f \nabla_{\Theta}^2 K(p)) - (2\nabla_{\Theta}^2 \partial_r f K(p) + \nabla_{\Theta} K(p) \partial_r^2 f) \\ &\quad - (\partial_r^3 f K + \nabla_{\Theta} K \partial_r^2 f) \\ &= -\nabla_{\Theta}^3 K f - 3\nabla_{\Theta}^2 K \partial_r f - 3\nabla_{\Theta} K \partial_r^2 f - K \partial_r^3 f. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dado que

$$f(0, \theta) = 0 \quad \text{e} \quad \partial_r f(0, \theta) = 1,$$

temos

$$\partial_r^5 f(0, \theta) = K(p)^2 - 3\nabla_{\Theta}^2 K(p).$$

Ao expandirmos em série de Taylor em potência de r , resulta a expressão abaixo, ou seja,

$$\begin{aligned} f(r, \theta) &= f(0, \theta) + \frac{1}{1!} \partial_r f(0, \theta) r + \frac{1}{2!} \partial_r^2 f(0, \theta) r^2 + \frac{1}{3!} \partial_r^3 f(0, \theta) r^3 \\ &\quad + \frac{1}{4!} \partial_r^4 f(0, \theta) r^4 + \frac{1}{5!} \partial_r^5 f(0, \theta) r^5 + O_p r^6. \end{aligned}$$

Assim, dado que

$$f(0, \theta) = 0, \quad \partial_r f(0, \theta) = 1, \quad \text{e} \quad \partial_r^2 f(0, \theta) = 0,$$

então

$$f(r, \theta) = r - \frac{1}{6}K(p)r^3 - \frac{1}{12}\nabla_{\Theta}K(p)r^4 + \frac{1}{120}\left(K(p)^2 - 3\nabla_{\Theta}^2k(p)\right)r^5 + O_p(r^6).$$

□

3.2 Expressão para a curvatura geodésica

Agora recordemos a expressão para a curvatura geodésica de uma curva suave Γ , a qual é parametrizada em coordenadas polares geodésicas centradas no ponto p por

$$\theta \rightarrow (r(\theta), \theta),$$

cujos gráfico é mostrado na figura 3.1.

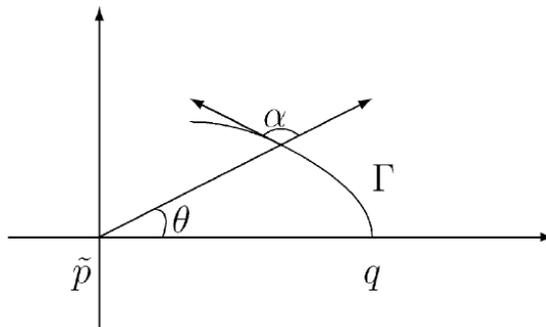


Figura 3.1: Gráfico Local de Γ .

LEMA 3.2.1. *A curvatura geodésica k_g da curva Γ no ponto $\Psi(r(\theta), \theta)$, é dada por*

$$k_g = \frac{1}{(r'^2 + f^2)^{3/2}} \left(r' \partial_\theta f + 2r'^2 \partial_r f - r'' f + \partial_r f f^2 \right), \quad (3.8)$$

em que f é calculada no ponto $(r(\theta), \theta)$.

Prova. A demonstração do Lema decorre da fórmula de Liouville conforme [4] para a curvatura geodésica. De fato, suponhamos que (u, v) sejam coordenadas isotérmicas, isto é $F = 0$ na superfície \mathbb{M} de tal forma que a métrica g possa ser escrita como

$$g = Edu^2 + Gdv^2,$$

em que E e G dependem de u e v .

Além disso, sejam que $C(s) := (u(s), v(s))$ uma curva imersa em \mathbb{M} parametrizada pelo comprimento do arco e α o ângulo entre o vetor velocidade $\partial_s C$ e ∂_u .

Dessa forma, a fórmula de Liouville fornece a curvatura geodésica que é dada a seguir

$$k_g = \frac{d\alpha}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial \ln E}{\partial v} \cos \alpha + \frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial \ln G}{\partial u} \sin \alpha.$$

Uma vez que $E = 1$, $G = f^2$ e $F = 0$, temos

$$k_g = \frac{d\alpha}{ds} + \frac{1}{2} \frac{2f(\partial_r f)}{f^2} \operatorname{sen} \alpha.$$

Logo, a curvatura geodésica para a curva Γ é

$$k_g = \frac{d\alpha}{ds} + \frac{\partial_r f}{f} \operatorname{sen} \alpha,$$

onde α é o ângulo entre r-linha e a curva Γ .

Além disso, temos que

$$\cos \alpha = \frac{r'}{\sqrt{r'^2 + f^2}} \quad (3.9)$$

e

$$\sin \alpha = \frac{f}{\sqrt{r'^2 + f^2}}. \quad (3.10)$$

Ao derivarmos a equação (3.9) em relação a θ e usando a equação (3.10) temos,

$$-\sin \alpha \frac{d\alpha}{d\theta} = \left(\frac{r'' \sqrt{r'^2 + f^2} - r' \frac{1}{2} \frac{2r'r'' + 2f(\partial_r f r' + \partial_\theta f)}{\sqrt{r'^2 + f^2}}}{(\sqrt{r'^2 + f^2})^2} \right),$$

logo

$$\frac{f}{\sqrt{r'^2 + f^2}} \frac{d\alpha}{d\theta} = \left(\frac{r'' \sqrt{r'^2 + f^2} - r' \frac{r'r'' + f(\partial_r f r' + \partial_\theta f)}{\sqrt{r'^2 + f^2}}}{(\sqrt{r'^2 + f^2})^2} \right),$$

assim

$$\frac{f}{\sqrt{r'^2 + f^2}} \frac{d\alpha}{d\theta} = \left(\frac{r''(r'^2 + f^2) - r'(r'r'' + f(\partial_r f r' + \partial_\theta f))}{(r'^2 + f^2)} \right),$$

o que implica que

$$f \frac{d\alpha}{d\theta} = \left(\frac{r'' f^2 - f(\partial_r f r' + \partial_\theta f) r'}{(r'^2 + f^2)} \right),$$

portanto

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = \left(\frac{r'' f - (\partial_r f r' + \partial_\theta f) r'}{(r'^2 + f^2)} \right).$$

Uma vez que

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{d\theta} \frac{d\theta}{ds},$$

e que

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r'^2 + f^2},$$

concluimos que

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\sqrt{r'^2 + f^2}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{ds} &= \frac{1}{\sqrt{r'^2 + f^2}} \frac{1}{(r'^2 + f^2)} \left(r' (\partial_\theta f + \partial_r f r') - f r'' \right) \\ &= \frac{1}{(r'^2 + f^2)^{3/2}} \left(r' (\partial_\theta f + \partial_r f r') - f r'' \right).\end{aligned}$$

Logo

$$k_g = \frac{d\alpha}{ds} + \frac{\partial_r f}{f} \sin \alpha = \frac{1}{(r'^2 + f^2)^{3/2}} \left(r' \partial_\theta f + 2r'^2 \partial_r f - r'' f + f^2 \partial_r f \right).$$

□

Agora escreveremos a fórmula (3.8) para curvas $\Gamma_{(p,\epsilon,\omega)}$, as quais podem ser parametrizadas no ponto p em coordenadas polares por

$$r(\theta) = \epsilon(1 - \omega(\theta)),$$

onde ϵ é suficientemente pequeno e ω é uma perturbação suave.

Essa parametrização acima provém do fato de que, r sendo uma função analítica de θ , isto é,

$$r = h(\theta).$$

Expandindo a função h em série de Taylor em torno de zero, temos

$$\begin{aligned}r &= h(0) + h'(0)\theta + \frac{h''(0)}{2!}\theta^2 + \frac{h'''(0)}{3!}\theta^3 + \frac{h^4(0)}{4!}\theta^4 + \frac{h^5(0)}{5!}\theta^5 + \dots + \frac{h^{(n)}(0)}{n!}\theta^n + \dots \\ r &= \underbrace{h(0)}_{\epsilon} \left[1 + \underbrace{\frac{h'(0)}{h(0)}\theta + \frac{h''(0)}{2h(0)}\theta^2 + \frac{h'''(0)}{3!h(0)}\theta^3 + \frac{h^{(4)}(0)}{4!h(0)}\theta^4 + \dots + \frac{h^{(n)}(0)}{n!h(0)}\theta^n + \dots}_{-\omega(\theta)} \right].\end{aligned}$$

e segundo alguma coisa, podemos escrever,

$$r(\theta) = \epsilon(1 - \omega(\theta)). \quad (3.11)$$

De maneira análoga, é possível definir a curvatura geodésica da curva $\Gamma_{(p,\epsilon,\omega)}$ como na equação (3.8).

De (3.11), temos,

$$r'(\theta) = -\epsilon\omega'(\theta) \quad e \quad r''(\theta) = -\epsilon\omega''(\theta).$$

De fato, da equação (3.8), segue-se que

$$k_g = \frac{1}{(r'^2 + f^2)^{3/2}} \left(r' \partial_\theta f + 2r'^2 \partial_r f - r'' f + \partial_r f f^2 \right).$$

Como

$$\frac{1}{(r'^2 + f^2)^{3/2}} = \frac{1}{\left[f^2 \left(1 + \left(\frac{r'}{f} \right)^2 \right) \right]^{3/2}} = \frac{1}{f^3 \left[1 + \left(\frac{r'}{f} \right)^2 \right]^{3/2}},$$

temos que

$$k_g = \frac{1}{f^3 \left[1 + \left(\frac{r'}{f} \right)^2 \right]^{3/2}} \left[\frac{r' \partial_\theta f}{f^3} + \frac{2r'^2 \partial_r f}{f^3} - \frac{r'' f}{f^3} + \frac{\partial_r f f^2}{f^3} \right].$$

Ao substituírmos r' e r'' segue-se que,

$$k_g(\Gamma_{(p,\epsilon,\omega)}) = \frac{1}{\left[1 + \frac{\epsilon^2 \omega'^2}{f^2} \right]^{3/2}} \left[\frac{-\epsilon\omega' \partial_\theta f}{f^3} + \frac{2\epsilon^2 \omega'^2 \partial_r f}{f^3} + \frac{\epsilon\omega^2}{f^2} + \frac{\partial_r f}{f} \right]. \quad (3.12)$$

PROPOSIÇÃO 3.2.2. *A curvatura geodésica da curva $\Gamma_{(p,\epsilon,\omega)}$ pode ser expandida em potência de ϵ e ω da seguinte maneira*

$$\begin{aligned} \epsilon k_g(p, \epsilon, \omega) &= 1 - \left(\frac{1}{3} K(p) \epsilon^3 \right) - \left(\frac{1}{4} \nabla_\Theta K(p) \epsilon^3 \right) - \\ &- \left(\frac{1}{45} (K(p)^2 + \frac{1}{10} \nabla_\Theta^2 K(p)) \right) \epsilon^4 + O_p(\epsilon^5) + \\ &+ \left(1 + \frac{1}{3} K(p) \epsilon^2 \right) (\partial_\theta^2 + 1) \omega + \epsilon^3 L_{(p,\epsilon)}(\omega) + \omega^2 + \frac{1}{2} \omega'^2 + \\ &+ 2\omega\omega'' + Q_{p,\epsilon}^{(3)}(\omega) + \epsilon^2 Q_{p,\epsilon}^{(2)}(\omega), \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde o subscrito em $O_p(\epsilon^5)$ é uma função em torno de p cujo módulo é menor que $c\epsilon^5$.

Prova. A prova decorrerá das seguintes observações:

- i. A expressão da forma $L_{p,\epsilon}(\omega)$ denota um operador diferencial linear de segunda ordem tal que, existe uma constante $c > 0$ independente de $p \in \mathbb{M}$ e $\epsilon \in (0, 1)$ tal que,

$$\| L_{p,\epsilon}(\omega) \|_{C^0(S^1)} \leq c \| \omega \|_{C^2(S^1)},$$

$$\forall \omega \in C^2(S^1).$$

- ii. Dado $a \in \mathbb{N}$, qualquer expressão da forma $Q_{p,\epsilon}^{(a)}$ denotará um operador diferencial não linear de segunda ordem tal que, $Q_{p,\epsilon}^{(a)}(0) = 0$ e existe uma constante $c > 0$ independente de $p \in \mathbb{M}$ e $\epsilon \in (0, 1)$ tal que,

$$\begin{aligned} & \| Q_{p,\epsilon}^{(a)}(\omega_2) - Q_{p,\epsilon}^{(a)}(\omega_1) \|_{C^0(S^1)} \leq \\ & \leq c \left(\| \omega_2 \|_{C^2(S^1)} + \| \omega_1 \|_{C^2(S^1)} \right)^{a-1} \| \omega_2 - \omega_1 \|_{C^2(S^1)}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

desde que: $\| \omega_j \|_{C^1(S^1)} \leq 1, j = 1, 2$.

De (3.3), dado que $r = \epsilon(1 - \omega(\theta))$, temos que,

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon^2 \omega'^2}{f^2} &= \omega'^2 + Q_{p,\epsilon}^{(3)}(\omega) + \epsilon^2 Q_{p,\epsilon}^{(2)}(\omega) \\ \frac{\epsilon \omega' \partial_\theta f}{f^3} &= \epsilon^2 L_p(\omega) + \epsilon^2 Q_{p,\epsilon}^{(2)}(\omega) \\ \frac{\epsilon^3 \omega'^2 \partial_r f}{f^3} &= \omega'^2 + Q_{p,\epsilon}^{(3)}(\omega) + \epsilon^2 Q_{p,\epsilon}^{(2)}(\omega) \\ \frac{\epsilon^2 \omega''}{f^2} &= \omega'' + 2\omega\omega'' + Q_{p,\epsilon}^{(3)}(\omega) + \epsilon^2 Q_{p,\epsilon}^{(2)}(\omega). \end{aligned}$$

Novamente por (3.3), temos que,

$$\frac{\partial_r f}{f}(r, \theta) = \frac{1}{r} - \frac{1}{3} K(p)r - \frac{1}{4} \nabla_\Theta K(p)r^2 - \left(\frac{1}{45} K^2(p) + \frac{1}{10} \nabla_\Theta^2 K(p) \right) r^3 + O(r^4).$$

Tomando $r = \epsilon(1 - \omega)$, temos,

$$\begin{aligned}
\epsilon \frac{\partial_r f}{f} &= 1 - \frac{1}{3}K(p)\epsilon^2 - \frac{1}{4}\nabla_{\Theta}K(p)r^2 - \left(\frac{1}{45}K^2(p) + \frac{1}{10}\nabla_{\Theta}^2K(p) \right) \epsilon^4 + \\
&+ O(\epsilon^5) + \left(1 + \frac{1}{3}K(p)\epsilon^2 \right) \omega + \epsilon^3 L_{\epsilon,p}(\omega) + \omega^2 + Q_{\epsilon,p}^{(3)} + \\
&+ \epsilon^2 Q_{\epsilon,p}^{(2)}(\omega), \tag{3.15}
\end{aligned}$$

e ao substituírmos em (3.12), terminamos a prova da proposição. \square

Capítulo 4

Curvas de curvatura geodésica constante

No capítulo anterior, a equação (3.8) determina a expressão para a curvatura geodésica de curvas fechadas e mergulhadas nas variedades bidimensionais \mathbb{M} . Agora neste capítulo trataremos destas mesmas curvas, mas com curvatura geodésica constante igual a k e conforme mencionado na introdução, demonstraremos o teorema principal da dissertação o qual o enunciado é dado a seguir

TEOREMA 4.0.1. *Seja $p \in \mathbb{M}$ fixado e assumamos que exista uma sequência de curvas fechadas mergulhadas $\{\Gamma_i\}$, $i \in \mathbb{N}$, com curvatura geodésica constante $k_i \rightarrow \infty$ as quais convergem (na distância de Hausdorff) para o ponto p . Então p é um ponto crítico da função curvatura de Gauss.*

4.1 Curvas de curvatura geodésica constante

Nesta seção, mostraremos que uma curva fechada, mergulhada e de curvatura geodésica constante Γ , é um gráfico normal sobre o círculo geodésico

de raio $\epsilon = \frac{1}{k}$. Assim iniciamos com a proposição seguinte

PROPOSIÇÃO 4.1.1. *Seja Γ uma curva geodésica mergulhada em \mathbb{M} com curvatura geodésica constante $k = \frac{1}{\epsilon} \geq k_* > 0$. Então existem $c > 0$ e um ponto $p \in \mathbb{M}$ tais que Γ pode ser parametrizada em coordenadas polares centradas em p por $r(\theta) = \epsilon(1 - \omega(\theta))$, onde a função $\omega \in C^2(S^1)$ ¹, satisfaz as seguintes condições*

$$\|\omega\|_{C^2} \leq c\epsilon^2$$

e

$$\int_0^{2\pi} \omega(\theta) \cos(\theta) d(\theta) = \int_0^{2\pi} \omega(\theta) \sin(\theta) d(\theta) = 0. \quad (4.1)$$

Prova. A ideia da prova desta proposição consiste em mostrarmos a existência desse ponto $p \in \mathbb{M}$ com as propriedades acima e, tendo a existência desse ponto, Γ pode ser escrito como gráfico normal sobre o círculo geodésico $\tilde{\Gamma}$ de raio ϵ , para alguma função a qual é limitada por $c\epsilon^3$. De fato, inicialmente seja um ponto $q \in \Gamma$ e consideremos o ponto \tilde{p} definido da seguinte forma: o ponto \tilde{p} está a uma distância de $\epsilon = \frac{1}{k}$ do ponto q ao longo da geodésica começando em q com velocidade do vetor normal sobre Γ . Isto pode ser visualizado na figura 4.1 a seguir

¹A função $\omega \in C^2(S^1)$ significa que estamos tratando de uma função de classe C^2 , isto é, sua derivada de segunda ordem é uma função contínua.

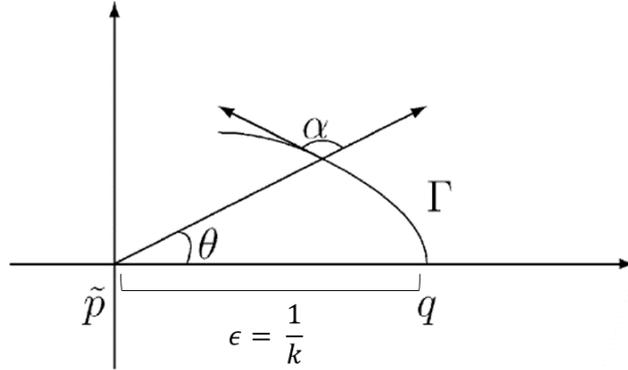


Figura 4.1: Curva com curvatura geodésica constante.

Dado que k é grande o suficiente e que ϵ é menor que o corte local de \tilde{p} e denotemos por $\tilde{\Gamma}$, o círculo geodésico de raio $\epsilon = \frac{1}{k}$ centrado em \tilde{p} .

Então dessa forma, próximo do ponto q , podemos notar que a curva Γ pode ser reescrita como um gráfico normal sobre o círculo geodésico $\tilde{\Gamma}$, e, conseqüentemente Γ pode ser parametrizada próximo do ponto q usando coordenadas geodésicas polares dada por

$$\theta \mapsto (r(\theta), \theta)$$

em que

$$r(\theta) = \epsilon(1 - \omega(\theta))$$

e conseqüentemente,

$$r(0) = \epsilon \quad e \quad r'(0) = 0,$$

conforme figura 4.2.

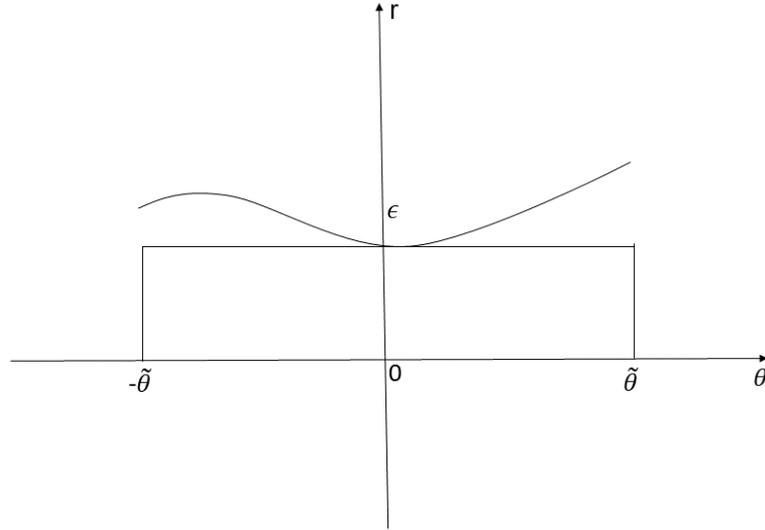


Figura 4.2: Imagem inversa de Γ em coordenadas polares.

Seja $\tilde{\theta} \in (0, \pi]$ o maior valor tal que

$$\|r(\theta) - \epsilon\| \leq \epsilon^2 \quad e \quad \|r'(\theta)\| \leq \epsilon^2, \quad (4.2)$$

$\forall \theta \in [-\tilde{\theta}, \tilde{\theta}]$.

No capítulo anterior, a equação (3.8) fornece a expressão para a curvatura geodésica k_g da curva Γ no ponto $(r(\theta), \theta)$, à qual recordemos

$$k_g = \frac{1}{(r'^2 + f^2)^{3/2}} \left(r' \partial_\theta f + 2r'^2 \partial_r f - r'' f + \partial_r f f^2 \right),$$

em que f é calculada no ponto $(r(\theta), \theta)$.

Pelo Lema 3.2.1, temos que $k_g = k = \frac{1}{\epsilon}$, então a equação (3.8) se reescreve,

$$k_g = k = \frac{1}{\epsilon} = \frac{1}{(r'^2 + f^2)^{3/2}} \left(r' \partial_\theta f + 2r'^2 \partial_r f - r'' f + \partial_r f f^2 \right),$$

a qual obtemos que

$$r'' = f\partial_r f - \frac{1}{\epsilon}f^2 + \frac{r'}{f}\partial_\theta f + 2\left(\frac{r'}{f}\right)^2 f\partial_r f - \frac{f^2}{\epsilon}\left(\left(1 + \left(\frac{r'}{f}\right)^2\right)^{3/2} - 1\right). \quad (4.3)$$

cuja solução é a função $r(\theta)$.

Agora da expressão (3.3) e das desigualdades em (4.2), obtem-se as estimativas para $\theta \in [-\tilde{\theta}, \tilde{\theta}]$.

$$\begin{cases} \frac{r'}{f}\partial_\theta f = O(\epsilon^3), \\ f\partial_r f - \frac{1}{\epsilon}f^2 = r - \frac{r^2}{\epsilon} + O(\epsilon^3), \\ 2\left(\frac{r'}{f}\right)^2 f\partial_r f = O(\epsilon^3), \\ -\frac{f^2}{\epsilon}\left(\left(1 + \left(\frac{r'}{f}\right)^2\right)^{3/2} - 1\right) = O(\epsilon^3) \end{cases} \quad (4.4)$$

De fato, a análise da primeira igualdade decorrerá da derivada de (3.3) em relação à θ ,

$$\begin{aligned} \partial_\theta f &= r' - 3r^2\frac{1}{6}k(p)r' - \frac{4}{12}\nabla_\Theta k(p)r^3r' + \frac{5}{120}\left(k(p)^2 - 3\nabla_\Theta^2 K(p)\right)r^4r' + \\ &+ 6O_p(r^5)r', \end{aligned}$$

o que resulta que

$$\begin{aligned} \partial_\theta f &= r'\left(1 - \frac{1}{2}k(p)r^2 - \frac{1}{3}\nabla_\Theta k(p)r^3 + \frac{1}{24}\left(k(p)^2 - 3\nabla_\Theta^2 K(p)\right)r^4 + \right. \\ &\left. + 6O_p(r^5)\right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Portanto

$$\|\partial_\theta f\| \leq 2\epsilon^2, \quad (4.6)$$

uma vez que $r'(0) = 0$ e $r'(\theta) \leq \epsilon^2$.

Além disso, temos

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{\left(r - \frac{1}{6}K(p)r^3 - \frac{1}{12}\nabla_{\Theta}K(p)r^4 + \frac{1}{120}(K(p)^2 - 3\nabla_{\Theta}^2k(p))r^5 + O_p(r^6) \right)},$$

o que resulta que

$$\frac{1}{f} \leq \frac{1}{r \left(1 - \frac{1}{6}K(p)r^2 - \frac{1}{12}\nabla_{\Theta}K(p)r^3 + \frac{1}{120}(K(p)^2 - 3\nabla_{\Theta}^2k(p))r^4 + O_p(r^5) \right)}.$$

Assim,

$$\frac{1}{f} \leq \frac{2}{\|r\|}. \quad (4.7)$$

Logo, temos a primeira igualdade

$$\frac{r'\partial_{\theta}f}{f} \leq \frac{\|\epsilon^2\| 2 \|\epsilon^2\|}{\|\epsilon\|} = 2\epsilon^3. \quad (4.8)$$

Da mesma forma, a derivação de (3.3) em relação à r , nos fornece

$$\partial_r f = 1 - \frac{1}{2}k(p)r^2 - \frac{1}{1}\nabla_{\Theta}k(p)r^3 + \frac{1}{24} \left(k(p)^2 - 3\nabla_{\Theta}^2k(p) \right) r^4 + 6O_p(r^5). \quad (4.9)$$

Logo,

$$\|\partial_r f\| f \leq r. \quad (4.10)$$

Assim, a partir de (4.2), (4.6), (4.7) e (4.10), as igualdades em (4.4) são satisfeitas.

Portanto, concluímos que

$$\begin{aligned} \theta &\mapsto r(\theta) \\ r(\theta) &= \epsilon(1 - \omega(\theta)), \end{aligned}$$

é solução da equação diferencial de segunda ordem abaixo

$$r'' = r - \frac{r^2}{\epsilon} + O(\epsilon^3), \quad (4.11)$$

com $r(0) = \epsilon$ e $r'(0) = 0$. De fato, como

$$r(\theta) = \epsilon(1 - \omega(\theta)),$$

então ao substituírmos em (4.11), obteremos

$$-\epsilon\omega'' = \epsilon(1 - \omega) - \frac{\epsilon^2(1 - \omega)^2}{\epsilon} + O(\epsilon^3),$$

ou seja,

$$\omega'' = -\omega + \omega^2 + O(\epsilon^2), \quad (4.12)$$

com $\omega(0) = 0$ e $\omega'(0) = 0$, e com isso notamos que $\omega = O(\epsilon^2)$, $\omega' = O(\epsilon^2)$ e conseqüentemente, $\omega'' = O(\epsilon^2)$.

E como

$$r(\theta) = \epsilon(1 - \omega(\theta)),$$

concluimos que

$$r = \epsilon + O(\epsilon^3) \quad \text{e que} \quad r' = O(\epsilon^3),$$

o que implica que $\tilde{\theta} = \pi$, para ϵ suficientemente pequeno.

Além do mais, a curva Γ sendo uma curva mergulhada na variedade \mathbb{M} , concluimos que

$$r(-\pi) = r(\pi),$$

pois Γ é uma curva fechada.

Para finalizarmos a prova, definamos

$$P(\epsilon, \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\omega}) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \omega_{\tilde{p}, \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\omega}} \Theta d\theta \in T_{\tilde{p}}\mathbb{M}.$$

Observemos que P depende de $\tilde{\mathbf{v}}$ e ϵ (pelo menos quando $\epsilon > 0$ é suficiente pequeno) e estende para $\epsilon = 0$ com as seguintes condições iniciais

$$P(0, 0, 0) = 0 \quad e \quad D_{\tilde{\mathbf{v}}}P_{(0,0,0)} \cdot (\tilde{\mathbf{v}}) = \tilde{\mathbf{v}}$$

Note que

$$D_{\tilde{\mathbf{v}}}P_{(0,0,0)} \cdot (\tilde{\mathbf{v}}) = \tilde{\mathbf{v}}, \quad (4.13)$$

é a aplicação identidade. Assim

$$\det\left(D_{\tilde{\mathbf{v}}}P_{(0,0,0)} \cdot (\tilde{\mathbf{v}})\right) = 1.$$

Como o determinante de (4.13) é diferente de 0, então pelo Teorema da Função Implícita, $\forall \epsilon > 0$ e $\|\omega\|_{C^2}$ pequeno o suficiente, existe um vetor $\tilde{\mathbf{v}} \in T_{\tilde{p}}\mathbb{M}$ tal que

$$P(\epsilon, \tilde{\mathbf{v}}_\epsilon, \tilde{\omega}) = 0.$$

Além disso, dado que

$$\Theta(\theta) := \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2,$$

concluimos que

$$\int_0^{2\pi} \omega \cos \theta = 0,$$

e

$$\int_0^{2\pi} \omega \sin \theta = 0.$$

Mais ainda, tem-se que

$$\text{dist}(p, \tilde{p}) \leq c\epsilon \|\tilde{\omega}\|_{C^2},$$

se

$$p = \exp_{\tilde{p}}(\epsilon \tilde{\mathbf{v}}).$$

□

Vamos à outra proposição necessária para a demonstração do Teorema principal da dissertação.

PROPOSIÇÃO 4.1.2. *Nas condições da proposição 4.1.1, existe uma constante $c > 0$ na métrica g tal que*

$$\| dK(p) \|_g \leq c\epsilon^2,$$

desde que $k = \frac{1}{\epsilon} \geq k_*$.

Prova. Pela Proposição 4.1.1, a curva Γ pode ser parametrizada por

$$r(\theta) = \epsilon(1 - \omega(\theta)),$$

em coordenadas polares centradas em p .

Além disso, temos que

$$\| \omega \|_{C^2} = O(\epsilon^2).$$

Da equação (3.13), temos que ω é a solução da equação seguinte

$$1 := \epsilon k_g(\epsilon, \omega) = 1 - \frac{1}{3}K(p)\epsilon^2 + (\partial_\theta^2 + 1)\omega + O(\epsilon^3). \quad (4.14)$$

Dessa forma, de (4.14), temos que em particular,

$$(\partial_\theta^2 + 1)\omega = \frac{1}{3}K(p)\epsilon^2 + O(\epsilon^3).$$

Dado que a função $\omega \in L^2(S^1)$ e ortogonal às funções seno e cosseno, concluímos que

$$\omega = \frac{1}{3}K(p)\epsilon^2 + O(\epsilon^3).$$

Temos,

$$\int_0^{2\pi} (\omega^2 + \frac{1}{2}\omega'^2 + 2\omega\omega'') \cos \theta d\theta = O(\epsilon^5),$$

o que resulta nessa integral

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta \left(\frac{1}{3} K(p) \epsilon^2 + \left(\frac{1}{45} K^2(p) + \frac{1}{10} \nabla_{\Theta}^2 K(p) \right) \epsilon^4 \right) d\theta = 0.$$

E de acordo com (4.1), tem-se,

$$\left(1 + \frac{1}{3} K(p) \epsilon^2 \right) \int_0^{2\pi} \cos \theta (\partial_{\theta}^2 + 1) \omega d\theta = 0.$$

Multiplicando (3.13) por $\cos \theta$, usando o fato de que

$$\epsilon k_g(\epsilon, \omega) = 1,$$

e integrando o resultado sobre $(0, 2\pi)$, concluimos que,

$$\frac{1}{3} \epsilon^3 \int_0^{2\pi} \nabla_{\Theta} K(p) \cos \theta d\theta = O(\epsilon^5).$$

De maneira análoga, temos,

$$\frac{1}{3} \epsilon^3 \int_0^{2\pi} \nabla_{\Theta} K(p) \sin \theta d\theta = O(\epsilon^5).$$

Note que,

$$\nabla_{\Theta} K(p) = dK = \frac{\partial K}{\partial r} dr + \frac{\partial K}{\partial \theta} d\theta.$$

Assim,

$$\left| \int_0^{2\pi} \nabla_{\Theta} K(p) \cos(\theta) d\theta \right| \leq \int_0^{2\pi} |\nabla_{\Theta} K(p)| \underbrace{\|\cos(\theta)\|}_{<1} \|d\theta\| \leq (dK(p)) 2\pi = O(\epsilon^2).$$

Logo,

$$(dK(p)) \leq O(\epsilon^2).$$

O que implica,

$$\|dK(p)\|_g \leq c(\epsilon^2),$$

em que $c < \frac{1}{2\pi}$.

□

Com as proposições 4.1.1 e 4.1.2 estamos agora em condições de demonstrarmos um dos resultados principais desta dissertação, ou seja, mais precisamente o teorema a seguir

TEOREMA 4.1.3. *Seja $p \in \mathbb{M}$ fixado e assumamos que exista uma sequência de curvas fechadas mergulhadas $\{\Gamma\}_i$, $i \in \mathbb{N}$, com curvatura geodésica constante $k_i \rightarrow \infty$ as quais convergem (na distância de Hausdorff) para o ponto p . Então p é um ponto crítico da função curvatura de Gauss.*

Prova. Seja $K : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ a função curvatura escalar. Por hipótese existe sequência de curvas fechadas mergulhadas $\{\Gamma\}_i$ com curvatura geodésica constante k_i . Para i grande o suficiente, nós podemos reescrever Γ_i como um gráfico normal, para alguma função limitada

$$\|\omega_i\|_{C^2} \leq c \frac{1}{k_i^2}, \quad (4.15)$$

sobre um círculo geodésico de raio $\frac{1}{k_i}$ centrado em algum ponto p_i como mostrado na proposição 4.1.2 com a seguinte propriedade

$$\|dK(p_i)\|_g \leq c \frac{1}{k_i^2} \quad (4.16)$$

O fato de Γ_i convergir para o ponto p implica necessariamente que p_i convergirá para o ponto p .

Como a função $K \in C^1$, por continuidade,

$$\|dK(p)\| = \lim_{i \rightarrow \infty} \|dK(p_i)\| = 0. \quad (4.17)$$

Concluimos que $dK(p) = 0$. □

Capítulo 5

Curvatura geodésica constante de um d -círculo

5.1 Curva d -círculo

Nessa seção escreveremos a definição de d -círculo e para tal se faz necessário algumas novas definições.

DEFINIÇÃO 5.1.1. *Sejam \mathbb{X} e \mathbb{Y} duas variedades bidimensionais e α_1 e α_2 duas aplicações contínuas de \mathbb{X} em \mathbb{Y} . Dizemos que α_1 e α_2 são homotópicas se existe uma aplicação contínua*

$$H : \mathbb{X} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{Y}, \quad H : (x, s) \rightarrow y = H(x, s),$$

tal que

$$H(x, 0) = \alpha_1(x), \quad H(x, 1) = \alpha_2(x).$$

Dessa forma, à medida que s varia no intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, a aplicação $H(x, s)$ se deforma continuamente em aplicações intermediárias entre α_1 e α_2 . Assim, a aplicação α_1 pode ser deformada continuamente para a aplicação α_2 .

DEFINIÇÃO 5.1.2. *Um conjunto \mathbb{X} é simplesmente conexo se qualquer caminho fechado α_1 é homotópico a um caminho constante $\alpha_2(t) = x_0, \forall t$.*

DEFINIÇÃO 5.1.3. *Sejam γ uma curva fechada e parametrizada em torno de um ponto p situado fora da curva e $d \in \mathbb{N}^+$. O grau da curva d é um número que representa o total de voltas que a curva descreve ao redor do ponto p .*

Com essas três definições podemos dar definição de d -círculo.

DEFINIÇÃO 5.1.4. *Dado $d \in \mathbb{N}^+$, uma curva fechada imersa em \mathbb{M} é chamada um d -círculo se é uma curva de grau d imersa em um domínio simplesmente conexo de \mathbb{M} .*

5.2 Curvatura geodésica constante do d -círculo

Conforme mencionado, no início, trataremos sobre a curvatura geodésica de uma curva especial denominada d -círculo conforme definição em 5.1.4. A ideia para definirmos essa curvatura consiste em provarmos o seguinte teorema

TEOREMA 5.2.1. *Seja Ω um domínio simplesmente conexo em \mathbb{M} sobre o qual a função $K : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ possui um único ponto crítico não-degenerado e seja d um número natural positivo. Então existe $k_* > 0$ tal que se Γ é uma curva fechada de grau d imersa em Ω com curvatura geodésica constante $k > k_*$, então Γ é uma d -cobertura de uma curva mergulhada de curvatura geodésica constante.*

Prova. Uma vez que d -círculos geodésicos são curvas geodésicas então podemos assumir que são válidos ao invés de curvas mergulhadas.

Portanto, se Γ é um d -círculo de curvatura geodésica constante, então é um gráfico normal sobre o círculo geodésico do raio $\epsilon = \frac{1}{k}$ centrado no ponto q que está à distância $\frac{c}{k^2}$ de p que é um ponto crítico da função de curvatura de Gauss, para uma função periódica de $2\pi d$ que pode ser estimada por $c\epsilon^3$ na Topologia de C^2 . Além disso tal gráfico normal é único.

De fato, suponhamos por absurdo que Γ_1 e Γ_2 são dois d -círculos com curvatura geodésica constante.

Temos que Γ_j é um multi-gráfico normal da $2\pi d$ -função periódica ϵ_j sobre o círculo geodésico do raio $\epsilon = \frac{1}{k}$ centrado no ponto p_j .

Assumamos que

$$\int_0^{2\pi d} \omega_j \cos \theta d\theta = \int_0^{2\pi d} \omega_j \sin \theta d\theta = 0,$$

e que

$$\text{dist}(p_j, p) + \|\omega_j\|_{C^2}(S^1) \leq c\epsilon^2, \quad (5.1)$$

onde p é o ponto crítico da função K .

Agora seja $k_g(q, \epsilon, \omega)$ a curvatura geodésica da curva parametrizada por $(\epsilon(1 - \omega), \theta)$ em coordenadas geodésicas polares centradas e q .

Assim da equação (3.13) obtemos a expansão

$$\begin{aligned} \epsilon k_g(q, \epsilon, \omega) &= 1 - \frac{1}{3}K(q)\epsilon^2 - \frac{1}{4}\nabla_{\Theta}K(q)\epsilon^3 + O_q(\epsilon^4) + (\partial_{\theta}^2 + 1)\omega \\ &+ \epsilon^2 L_{q,\epsilon}(\omega) + Q_{q,\epsilon}^2(\omega), \end{aligned} \quad (5.2)$$

Denotemos

$$F(q, \epsilon) := -\frac{1}{3}K(q) - \frac{1}{4}\nabla_{\Theta}K(q)\epsilon + O_q(\epsilon^2).$$

Como $\epsilon k_g(p_j, \epsilon, \omega_j) = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} (\partial_{\theta}^2 + 1)(\omega_1 - \omega_2) &= (F(\epsilon, p_1) - F(\epsilon, p_2))\epsilon^2 + \epsilon^2(L_{p_1}\omega_1 - (L_{p_2}\omega_2) \\ &+ (Q_{p_1}^{(2)}(\omega_1) - Q_{p_2}^{(2)}(\omega_2))). \end{aligned}$$

Como $(\omega_1 - \omega_2) \in L^2$ e ortogonal às funções $\sin \theta$ e $\cos \theta$, concluímos que

$$\|\omega_2 - \omega_1\|_{C^2(S^1)} \leq c\epsilon^2 \text{dist}(p_2, p_1) + \|\omega_2 - \omega_1\|_{C^2(S^1)}, \quad (5.3)$$

onde usamos explicitamente (5.1).

Portanto, para ϵ suficientemente pequeno, concluímos que

$$\|\omega_2 - \omega_1\|_{C^2(S^1)} \leq c\epsilon^2 \text{dist}(p_2, p_1). \quad (5.4)$$

Agora, projetemos em $\cos \theta$, a identidade

$$k_g(p_2, \epsilon, \omega_2) - k_g(p_1, \epsilon, \omega_1) = 0.$$

Com os mesmos argumentos já usados na prova da proposição 4.1.2 concluímos

$$\int_0^{2d\pi} (\partial_\theta^2 + 1)(\omega_1 - \omega_2) \cos \theta d\theta = \int_0^{2d\pi} (K(p_2) - K(p_1)) \cos \theta d\theta.$$

Além disso, decorre de (5.1) que

$$\epsilon^2 \left| \int_0^{2d\pi} (L_{p_2, \epsilon} \omega_2 - L_{p_1, \epsilon} \omega_1) \cos \theta d\theta \right| \leq c(\epsilon^4 \text{dist}(p_2, p_1) + \epsilon^2 \|\omega_2 - \omega_1\|_{C^2(S^1)}),$$

e

$$\epsilon^2 \left| \int_0^{2d\pi} (Q_{p_2, \epsilon}^{(2)} \omega_2 - Q_{p_1, \epsilon}^{(2)} \omega_1) \cos \theta d\theta \right| \leq c(\epsilon^4 \text{dist}(p_2, p_1) + \epsilon^2 \|\omega_2 - \omega_1\|_{C^2(S^1)}).$$

Portanto, concluímos que

$$\epsilon^3 \left| \int_0^{2d\pi} (\nabla_\Theta K(p_2) - \nabla_\Theta K(p_1)) \cos \theta d\theta \right| \leq c(\epsilon^4 \text{dist}(p_2, p_1) + \epsilon^2 \|\omega_2 - \omega_1\|_{C^2(S^1)}).$$

De maneira análoga, temos

$$\epsilon^3 \left| \int_0^{2d\pi} (\nabla_\Theta K(p_2) - \nabla_\Theta K(p_1)) \sin \theta d\theta \right| \leq c(\epsilon^4 \text{dist}(p_2, p_1) + \epsilon^2 \|\omega_2 - \omega_1\|_{C^2(S^1)}).$$

Isso implica que

$$\epsilon \mathit{dist}(p_2, p_1) \leq c \|\omega_2 - \omega_1\|_{C^2(S^1)}, \quad (5.5)$$

Daí, usando (5.4) e (5.5), concluimos que

$$\omega_2 = \omega_1 \quad e \quad p_2 = p_1.$$

Logo, o Teorema 5.2.1 está provado. \square

Capítulo 6

Exemplos

Dado uma superfície genérica S qualquer, não é em qualquer ponto dessa superfície que exista sequências de círculos geodésicos, uma vez que tais sequências existem centrados em p , que será um ponto crítico e, pelo Teorema de Sard esses pontos têm medida nula.

Vejam os exemplos abaixo.

EXEMPLO 6.0.1. Considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável dada por

$$f(y) = \begin{cases} e^{-1/y^2}, & \text{se } y \neq 0, \\ 0, & \text{se } y = 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

Seja S uma superfície de revolução gerada ao rotacionarmos a curva dada pelo gráfico da função (6.1), em torno do eixo z cuja parametrização

$$\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

é definida como

$$\mathbf{x} = (v \cos u, v \sin u, f(v)),$$

em que $f(v)$ é dada por (6.1) e além disso,

$$u \in (0, 2\pi) \times \mathbb{R}^+ \quad \text{e} \quad v \in \mathbb{R},$$

conforme mostrado na figura 6.1.

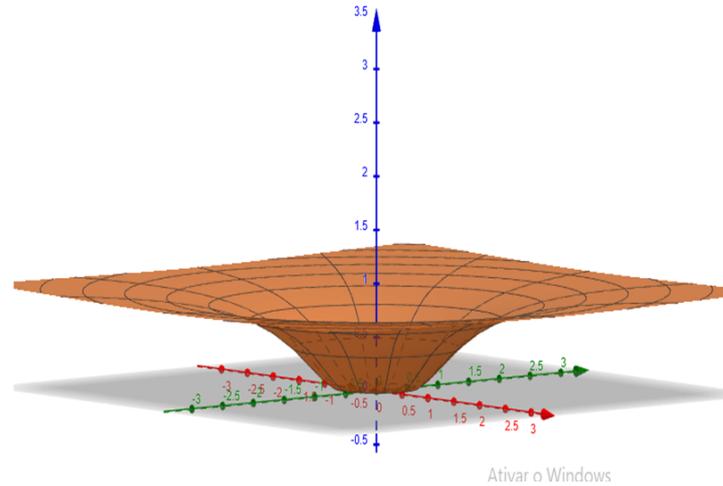


Figura 6.1: Superfície de revolução \mathbb{S} gerada pela rotação do gráfico de (6.1).

Antes de iniciarmos os cálculos, daremos algumas propriedades da função $f(v)$, ou seja

i.

$$\lim_{v \rightarrow 0} f^{(n)}(v) = 0, \forall n.$$

ii.

$$f(v) \neq 0, \quad \text{se } v \neq 0.$$

iii.

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(v)}{v^n} = 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

A demonstração dessas propriedades é imediata.

Determinaremos os pontos críticos da superfície \mathcal{S} . Primeiramente, calcularemos a curvatura Gaussiana de \mathcal{S} . Tem-se que

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_u &= (-v \sin u, v \cos u, 0), \\ \mathbf{x}_v &= (\cos u, \sin u, f'(v)),\end{aligned}$$

em que

$$f'(v) = \begin{cases} e^{-1/v^2} \frac{2}{v^3}, & \text{se } v \neq 0, \\ 0, & \text{se } v = 0. \end{cases}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uu} &= (-v \cos u, -v \sin u, 0), \\ \mathbf{x}_{uv} &= (-\sin u, \cos u, 0), \\ \mathbf{x}_{vv} &= (0, 0, f''(v)),\end{aligned}$$

em que

$$f''(v) = \begin{cases} e^{-1/v^2} \left(\frac{4 - 6v^2}{v^6} \right), & \text{se } v \neq 0, \\ 0, & \text{se } v = 0. \end{cases}$$

Os coeficientes da primeira forma fundamental são dados por

$$\begin{aligned}E &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u \rangle = v^2, \\ F &= \langle \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v \rangle = 0, \\ G &= \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v \rangle = \left(1 + e^{-2/v^2} \frac{4}{v^6} \right), \quad \text{para } v \neq 0, \quad \text{e } G(0, 0) = 1.\end{aligned}$$

Assim, o vetor normal é dado por

$$N = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|},$$

em que

$$\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| = \sqrt{EG - F^2}.$$

O que implica que

$$N = -\frac{\left(e^{-1/v^2} v \cos u \frac{2}{v^3}, e^{-1/v^2} v \sin u \frac{2}{v^3}, v\right)}{\sqrt{EG - F^2}},$$

em que

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{v^2 + v^2 e^{-2/v^2} \frac{4}{v^6}} = v \sqrt{1 + e^{-2/v^2} \frac{4}{v^6}} = v \sqrt{G}.$$

Os coeficientes da segunda forma fundamental são dados por

$$\begin{aligned} e &= \langle N, \mathbf{x}_{uu} \rangle = \frac{2e^{-1/v^2}/v}{\sqrt{v^2 + v^2 e^{-1/v^2} \frac{4}{v^6}}}, \quad \text{para } v \neq 0, \\ f &= \langle N, \mathbf{x}_{uv} \rangle = 0, \\ g &= \langle N, \mathbf{x}_{vv} \rangle = \frac{e^{-1/v^2} \left(\frac{4-6v^2}{v^5}\right)}{\sqrt{v^2 + v^2 e^{-1/v^2} \frac{4}{v^6}}}, \quad \text{para } v \neq 0. \end{aligned}$$

De tal forma que a curvatura Gaussiana de \mathbb{S} é dada por

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad (6.2)$$

o que implica que ao substituirmos os coeficientes da primeira e segunda forma fundamentais, obtem-se

$$K = \frac{e^{-2/v^2} (8 - 12v^2)}{\left(v^6 + 4e^{-2/v^2}\right)^{3/2}}, \quad \text{para } v \neq 0. \quad (6.3)$$

Consideremos a função curvatura de Gauss dada por

$$K : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R},$$

dada por

$$K = \frac{e^{-2/v^2} (8 - 12v^2)}{\left(v^6 + 4e^{-2/v^2}\right)^{3/2}}, \quad \text{para } v \neq 0. \quad (6.4)$$

Os pontos críticos da função curvatura (6.4), são tais que

$$dK = 0.$$

Por outro lado, ao considerarmos a matriz dN na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\} \in T_p\mathbb{S}$, dada por

$$dN = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad (6.5)$$

em que os coeficientes a_{11}, a_{21}, a_{12} e a_{22} da matriz dN na base $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v\} \in T_p\mathbb{S}$, são dados por

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}; & a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}. \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}; & a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Então, da equação (2.9), tem-se

$$\det(dN) = \frac{eg - f^2}{(EG - F^2)} = \frac{e^{-2/v^2}(8 - 12v^2)}{(v^6 + 4e^{-2/v^2})^{3/2}}, \quad \text{para } v \neq 0, \quad (6.6)$$

o que implica que

$$\det(dN) \neq 0,$$

se $v \neq 0$ e se $v \neq \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Assim, se a superfície \mathbb{S} possuir uma sequência de círculos geodésicos, essa sequência irá convergir necessariamente para a origem $p = (0, 0, 0)$ ou para algum ponto curva $\left(\mathbb{S} \cap \left\{Z = \sqrt{\frac{2}{3}}\right\}\right)$.

Note que, o ponto $Z = \sqrt{\frac{2}{3}}$ da curva $\left(\mathbb{S} \cap \left\{Z = \sqrt{\frac{2}{3}}\right\}\right)$, é um ponto de inflexão, isto é, é um ponto sobre uma curva na qual a curvatura troca o sinal.

Bibliografia

- [1] Alves. S., *A Geometria do Globo Terrestre*. Estilo OBMEP. 19/08/2009.
- [2] Banchoff. L. S., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. A. K Peters, Ltd. Natick, Massachusetts.
- [3] Berger, M.; Gostiaux, B., *Differential Geometry: Manifolds, Curves, and Surfaces*. Graduate Texts in Mathematics. (1927) 142 - 144.
- [4] Do Carmo. M., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, 1976.
- [5] Do Carmo, M., *Geometria Riemmaniana*. 5^a Edição. Publicação: IMPA, 2008.
- [6] Pacard, F., Xu, X., *Constant mean curvature spheres in Riemannian manifolds*. Preprint, 2007.
- [7] Klingenberg W., *A course in Differential Geometry*. (Graduate texts in mathematics; 51).
- [8] Kreyszig, E., *Introduction to Differential Geometry and Riemannian Geometry*. University of Toronto Press.

-
- [9] Lima, E.L., *Variedades Diferenciáveis*. IMPA, Publicações Matemáticas, Rio de Janeiro, 2007.
- [10] Pinto, M.L.P.M., *Sobre a distância de Hausdorff e a salsicha de Minkowsky*. Tese de Mestrado em Ciências - Formação Contínua de Professores, Área de Especialização em Matemática. UMinho — 2014.
- [11] Rosenberg, H., *Constant mean curvature surfaces in homogeneously regular 3-manifolds*. Bull. Austral. Math. Soc. **74** (2) (2006) 227–238.
- [12] Santos, R.J., *Existência e Unicidade de Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias*. Departamento de Matemática-ICEx. Universidade Federal de Minas Gerais. 10 de julho de 2010.
- [13] Sun, T., *A note on constant geodesic curvature curves on surfaces*. Ann. I. H. Poincaré - AN **26** (2009) 1569-1584.
- [14] Ye. R., *Foliation by constant mean curvature spheres*. Pacific J. Math. **147** (2) (1991) 381 – 396.

Apêndice A

Teorema de Existência e Unicidade

TEOREMA A.0.1. *Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

são contínuas no retângulo $R = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 | \alpha < t < \beta, \delta < y < \gamma\}$ contendo o ponto (t_0, y_0) , então o problema (A.1) tem uma única solução em um intervalo contendo t_0 .

A demonstração do Teorema de Existência e Unicidade foi feita baseada em [12].

Demonstração.

1. **Existência** Defina a sequência de funções $y_n(t)$ por

$$y_0(t) = y_0, y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s)) ds,$$

para $n = 1, 2, \dots$

Como $f(t, y)$ é contínua no retângulo R , existe uma constante positiva b tal que $|f(t, y)| \leq b$ para $(t, y) \in R$.

Assim

$$|y_1(t) - y_0(t)| \leq b|t - t_0|,$$

para $\alpha < t < \beta$.

Como $\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua no retângulo R , existe uma constante positiva a (por que?) tal que

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq a|y - z|,$$

para $\alpha < t < \beta$ e $\delta < y, z < \gamma$.

Assim

$$\begin{aligned} |y_2(t) - y_1(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y_1(s)) - f(s, y_0(s))| ds \\ &\leq a \int_{t_0}^t |y_1(s) - y_0(s)| ds \leq ab \int_{t_0}^t |s - t_0| ds = ab \frac{|t - t_0|^2}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |y_3(t) - y_2(t)| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y_2(s)) - f(s, y_1(s))| ds \\ &\leq a \int_{t_0}^t |y_2(s) - y_1(s)| ds \leq a^2 b \int_{t_0}^t \frac{|s - t_0|^2}{2} ds = a^2 b \frac{|t - t_0|^3}{6} \end{aligned}$$

Vamos supor por indução que

$$|y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| \leq a^{n-2} b \frac{|t - t_0|^{n-1}}{(n-1)!}$$

Então

$$\begin{aligned}
y_n(t) - y_{n-1}(t) &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y_{n-1}(s)) - f(s, y_{n-2}(s))| ds \\
&\leq a \int_{t_0}^t |y_{n-1}(s) - y_{n-2}(s)| ds \\
&\leq a \int_{t_0}^t a^{n-2} b \frac{|s - t_0|^{n-1}}{(n-1)!} = a^{n-1} b \frac{|t - t_0|^n}{n!} \quad (\text{A.2})
\end{aligned}$$

Estas desigualdades são válidas para $\alpha \leq \alpha' < t < \beta' \leq \beta$ em que α' e β' são tais que $\delta < y_n(t) < \gamma$ sempre que $\alpha' < t < \beta'$ (por que existem α' e β' ?).

Segue-se de (A.2) que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}(\beta - \alpha)^n}{n!}$$

que é convergente. Como

$$y_n(t) = y_0 + \sum_{k=1}^n (y_k(t) - y_{k-1}(t)),$$

então $y_n(t)$ é convergente. Seja

$$y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t).$$

Como

$$|y_m(t) - y_n(t)| \leq \sum_{k=n+1}^m |y_k(t) - y_{k-1}(t)| \leq b \sum_{k=n+1}^m \frac{a^{k-1}(\beta - \alpha)^k}{k!}$$

então passando ao limite quando m tende a infinito obtemos que

$$|y(t) - y_n(t)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a^{k-1}(\beta - \alpha)^k}{k!} \quad (\text{A.3})$$

Logo dado um $\epsilon > 0$ para n suficientemente grande, $|y(t) - y_n(t)| < \frac{\epsilon}{3}$, para $\alpha' < t < \beta'$. Daí segue-se que $y(t)$ é contínua pois dado um $\epsilon > 0$, para s suficientemente próximo de t , temos que $|y_n(t) - y_n(s)| < \frac{\epsilon}{3}$ e para n suficientemente grande $|y(t) - y_n(t)| < \frac{\epsilon}{3}$ e $|y(s) - y_n(s)| < \frac{\epsilon}{3}$, o que implica que $|y(t) - y(s)| \leq |y(t) - y_n(t)| + |y_n(t) - y_n(s)| + |y_n(s) - y(s)| < \epsilon$.

Além disso para $\alpha' < t < \beta'$, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) ds = \int_{t_0}^t f(s, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(s)) ds = \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds,$$

pois por (A.3), temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^t f(s, y_n(s)) - f(s, y(s)) ds \right| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| ds \\ &\leq |y_n(s) - y(s)| \\ &\leq ab(t - t_0) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a^{k-1}(\beta - \alpha)}{k!} \end{aligned}$$

que tende a zero quando n tende a infinito. Portanto,

$$\begin{aligned} y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) &= y_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s)) ds \\ &= y_0 + \int_{t_0}^t f(s, \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n-1}(s)) ds \\ &= y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds. \end{aligned}$$

Derivando em relação a t esta equação vemos que $y(t)$ é solução do problema de valor inicial.

2. Unicidade

Suponhamos que $y(t)$ e $z(t)$ sejam soluções do problema de valor inicial.

Seja

$$u(t) = \int_{t_0}^t |y(s) - z(s)| ds.$$

Assim, como

$$y(t) = \int_{t_0}^t y'(s)ds = \int_{t_0}^t f(s, y(s)), z(t) = \int_{t_0}^t z'(s)ds = \int_{t_0}^t f(s, z(s))ds,$$

então

$$\begin{aligned} u'(t) &= |y'(t) - z'(t)| \\ &\leq \int_{t_0}^t |y'(s) - z'(s)|ds = \int_{t_0}^t |f(s, y(s)) - f(s, z(s))|ds \\ &\leq a \int_{t_0}^t |y(s) - z(s)|ds \end{aligned}$$

ou seja,

$$u'(t) \leq au(t).$$

Subtraindo-se $au(t)$ e multiplicando-se por e^{-at} obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{-at}u(t)) \leq 0$$

com $u(t_0) = 0$.

Isto implica que $e^{-at}u(t) = 0$ (lembre-se que $u(t) \geq 0$) e portanto que $u(t) = 0, \forall t$.

Assim $y(t) = z(t), \forall t$.

□