UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

FACULDADE DE EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MESTRADO PROFISSIONAL EDUCAÇÃO E DOCÊNCIA - PROMESTRE

Maria das Graças Morato Lobato Menezes

O NÚMERO RACIONAL NA FORMA FRACIONÁRIA NO ENSINO MÉDIO: uma abordagem conceitual, vinculada ao estudo da função polinomial de 1º grau

BELO HORIZONTE

2021

Maria das Graças Morato Lobato Menezes

O NÚMERO RACIONAL NA FORMA FRACIONÁRIA NO ENSINO MÉDIO: uma abordagem conceitual, vinculada ao estudo da função polinomial de 1º grau

Versão Final

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional Educação e Docência da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientador: Dr. Diogo Alves de Faria Reis

Coorientadora: Dra. Samira Zaidan

BELO HORIZONTE

2021

M543n T

Menezes, Maria das Graças Morato Lobato, 1965-

O número racional na forma fracionária no ensino médio [manuscrito] : uma abordagem conceitual, vinculada ao estudo da função polinomial de 1º grau / Maria das Graças Morato Lobato Menezes. - Belo Horizonte, 2021.

[154 f.] : enc, il., color.

Dissertação -- (Mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Educação.

Orientador: Diogo Alves de Faria Reis.

Coorientadora: Samira Zaidan.

Bibliografia: f. 150-152.

Anexos: f. 153-154.

1. Educação -- Teses. 2. Matemática -- Estudo e ensino -- Teses. 3. Frações -- Estudo e ensino -- Teses. 4. Numeros racionais -- Estudo e ensino -- Teses. 5. Funções (Matemática) -- Estudo e ensino -- Teses. 6. Capacidade matemática -- Teses. 7. Ensino médio -- Teses. 8. Educação matemática -- Teses.

I. Título. II. Reis, Diogo Alves de Faria. III. Zaidan, Samira. IV. Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Educação.

CDD- 515.7

Catalogação da fonte: Biblioteca da FaE/UFMG (Setor de referência)

Bibliotecário: Ivanir Fernandes Leandro CRB: MG-002576/O

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO E DOCÊNCIA/MP

UFMG

FOLHA DE APROVAÇÃO

O NÚMERO RACIONAL NA FORMA FRACIONÁRIA NO ENSINO MÉDIO: uma abordagem conceitual, vinculada ao estudo da função polinomial de 1º grau

MARIA DAS GRAÇAS MORATO LOBATO MENEZES

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em EDUCAÇÃO E DOCÊNCIA/MP, como requisito para obtenção do grau de Mestre em EDUCAÇÃO E DOCÊNCIA, área de concentração ENSINO E APRENDIZAGEM.

Aprovada em 28 de outubro de 2021, pela Banca constituída pelos membros:

Diogo Alves de Faria Reis:01179289684
Assinado de forma digital por Diogo Alves de Faria Reis:01179289684
Dados: 2021.10.28 17:10:05 -03'00'

Prof. Diogo Alves de Faria Reis - Orientador
Universidade Federal de Minas Gerais

Samira Zaidan

Profa. Samira Zaidan - Coorientadora
FaE/UFMG

Iole de Freitas Druck

Profa. Iole de Freitas Druck
Instituto de Matemática e Estatística da USP

Profa. Keli Cristina Conti
FaE/UFMG

Ana Rafaela Correia Ferreira:05431517600
Assinado de forma digital por Ana Rafaela Correia Ferreira:05431517600
DN: cn=Ana Rafaela Correia Ferreira:05431517600, ou=UFMG - Universidade Federal de Minas Gerais, o=ICPEdu, c=BR
Dados: 2021.10.31 19:28:53 -03'00'

Profa. Ana Rafaela Correia Ferreira
Centro Pedagógico/UFMG

Belo Horizonte, 28 de outubro de 2021.

Aos meus queridos pais, que são
presença constante em minha vida, muito
embora não estejam mais aqui.

AGRADECIMENTOS

O que a profissão de professor/a pode representar na vida de quem a exerce? A começar por sua característica revigorante, eu poderia dizer que ela tem o poder de nos colocar, muito frequentemente, diante do novo.

Os desafios impostos pela relação com nossos alunos e suas necessidades nos mobilizam de tal maneira que nos apercebemos reinventando a roda sempre. Dessa característica, surge o que talvez seja o maior legado da profissão aos seus profissionais: o aprendizado.

As trocas de experiências com colegas de trabalho, as relações estabelecidas, o esforço por produzir aulas e atividades mais interessantes conferem dinamismo às nossas ações. Em minha bagagem, levo um pouco de cada escola onde atuei ao longo dos 38 anos de profissão.

Este trabalho, em alguma medida, reflete a minha trajetória pessoal e profissional na educação pública. O processo de construção da pesquisa significou um caminho de buscas, no qual acertos e dificuldades surgiram. Muitos foram os fatores que me mobilizaram para a sua realização, e muitas as pessoas que me incentivaram e me apoiaram na sua concretização. Portanto, quero registrar minha gratidão.

. A Deus, pela ajuda e pelo direcionamento que me foram dados em toda a minha caminhada na educação.

. Aos meus pais, Edith e Euro, por me darem a vida e por desejarem minha felicidade e minha realização. A força do bem que me desejaram estará sempre presente e continuará a me orientar rumo a novas conquistas.

. À tia Maria, que me recebeu em sua casa, dando-me apoio e incentivo para que eu pudesse cursar a faculdade.

. Aos meus filhos, Izabella e Guilherme, por me estimularem a voltar a estudar e por darem maior sentido à minha caminhada. Eles são grandes responsáveis pela pessoa que me tornei e pela oportunidade de vivenciar o maior dos amores.

. Ao meu esposo, Alair, pela companhia na jornada. Juntos constituímos uma família e aprendemos a superar adversidades.

. Aos meus irmãos, pelo cuidado, pela cumplicidade e por desejarem meu crescimento e minha realização. A força do vínculo que nos une demonstra o amor que nutrimos uns pelos outros.

. Às minhas sobrinhas, Rafa, Gabi e Duda, por seu carinho e sua delicadeza, por serem torcida e me ensinarem que não precisamos de muito para vivermos bem e com alegria.

. Aos meus demais familiares, por me proporcionarem presença, apoio e amparo.

. Aos meus alunos, por provocarem a minha inquietude, pelas conversas recheadas de apoio e vibração diante das minhas conquistas.

. Aos colegas de trabalho, pela partilha de experiências e pela inspiração na jornada. Alguns deles se tornaram grandes amigos. Um agradecimento especial à Lívia, que tanto me incentivou a fazer o mestrado.

. Às colegas da linha de pesquisa, pelo acolhimento, por dividirem momentos de ansiedade e descontração, por me oferecerem palavras de estímulo, opiniões e ajuda nas dificuldades.

. À Jéssica, por ajudar na formatação do projeto de pesquisa, por treinar comigo a apresentação para a banca e por festejar a minha aprovação.

. Ao Bruno e à Nathália, "os meninos", como gosto de chamá-los, por todo o empenho na diagramação do recurso educativo produzido por esta pesquisa. Foram muitas as reuniões e as propostas elaboradas, exigindo um trabalho cuidadoso.

. À Márcia, pelo esforço na revisão desta dissertação e do recurso educativo e pelas valiosas contribuições na estruturação desses textos.

. Aos meus professores da formação básica. Em especial, à professora Marlene, que me ensinou a ler e a escrever, pegando na minha mão pela primeira vez para me mostrar como deveria segurar o lápis, e ao seu irmão, o professor José Figueiredo, cujos ensinamentos de Português foram valiosos no exercício da minha profissão e nas conquistas na carreira.

. Aos professores da linha de pesquisa em Educação Matemática, por toda orientação e ajuda.

. Ao professor Airton Carrião, pela escuta e pela contribuição com sugestões e envio de material que muito me ajudaram na organização das atividades da pesquisa.

. Às professoras Ana Rafaela, Iole, Keli, Maria Cristina e Teresinha, por participarem das minhas bancas de qualificação e de defesa da dissertação, suas interferências trouxeram grandes contribuições.

. Ao professor Glaucinei, coordenador do projeto de parceria entre o curso de Design e a FAE, que viabilizou o trabalho de criação oferecido pelo Bruno e pela Nathália.

. Aos meus orientadores, em especial, por colaborarem na minha busca, por me apoiarem e, principalmente, por assumirem comigo a pesquisa e todos os seus desafios. A Eles, meu reconhecimento e meus sinceros agradecimentos.

.

“Nós escutamos o barulho do carvalho que cai, mas não escutamos o barulho da floresta que cresce. Hoje fala-se muito das coisas que estão desmoronando, que fazem barulho, mas o mais importante é aquilo que não se ouve; é preciso prestar atenção às sementes de consciência que estão brotando.”

Jean Yves Leloup

RESUMO

Esta pesquisa teve por principal objetivo identificar, na abordagem conceitual de números racionais na forma fracionária, perspectivas para o desenvolvimento da capacidade operatória de estudantes do Ensino Médio. Percepções da prática da autora pesquisadora, amparadas na literatura, sugerem que a persistência de dificuldades pode estar associada à prevalência de tratamento apoiado na rememoração de regras e procedimentos operatórios. Questionamentos sobre limitações de intervenções baseadas em revisões e retomadas do tema, no Ensino Médio, nos influenciaram a vincular exploração de conceitos e operações com números racionais na forma fracionária ao estudo da Função Polinomial de 1º Grau. Tendo por foco a aprendizagem, nossa investigação foi orientada pelas questões: O que pode estar por trás das dificuldades na compreensão de alguns conceitos e operações envolvendo a forma fracionária dos números racionais, no Ensino Médio? Como abordar temas de estudo do Ensino Médio de modo a favorecer aquisições conceituais e operatórias com números racionais na forma fracionária, ainda não consolidadas pelos estudantes? Uma abordagem conceitual poderia facilitar a compreensão do número racional na forma fracionária e das operações com esses números, em situações de estudo da função polinomial de 1º grau? A metodologia envolveu a realização de estudo exploratório com alunos do 1º ano do Ensino Médio, o qual nos permitiu levantar algumas de suas dúvidas e tendências no trato com as operações nesse campo numérico. O processo de elaboração das atividades foi influenciado, sobretudo, por referências teóricas ligadas à defesa da importância de garantir aos alunos convívio, discussão e atribuição de significados a noções cruciais à compreensão de frações e de estimular o emprego de ideias e conhecimentos matemáticos de modo crítico e reflexivo. Levou em conta a intenção de explorar situações de estudo da função polinomial de 1º grau com vistas a favorecer compreensão conceitual e operatória. A organização das atividades nas categorias A, B e C nos possibilitou propor situação ou problema (A), intervir nas dúvidas dos estudantes (B) e ampliar o seu contato com as relações e os conceitos descobertos (C). O livro *Frações no Ensino Médio: vinculando o Estudo às Funções Polinomiais de 1º Grau*, recurso educativo produzido pela pesquisa, apresenta os principais fundamentos teóricos que embasaram o nosso estudo, o conjunto de atividades produzidas e nossas discussões sobre perspectivas e limites da estratégia utilizada no favorecimento da capacidade operatória de estudantes do Ensino Médio. Consideramos que esta pesquisa cumpre o propósito de discutir e propor forma de abordagem em que ideias associadas ao conceito de fração, à relação de equivalência entre frações e às operações de adição e subtração entre números racionais na forma fracionária são tratadas como objetos de estudo, integrados a tema do currículo de Matemática, com potencialidade para intervir em inabilidades operatórias que persistam na etapa final da Educação Básica.

Palavras-chave: Números racionais na forma fracionária. Capacidade operatória. Função polinomial de 1º grau. Ensino Médio. Educação Matemática.

ABSTRACT

This research had as main object to identify, in the conceptual approach of rational numbers in the fractional form, perspectives for the development of the operative capacity of high school students. Perceptions of the author-researcher's practice, supported by the literature, suggest that the persistence of difficulties may be associated with the prevalence of treatment based on the recollection of rules and operative procedures. Questions about the limitations of interventions based on revisions and resumptions of the theme, in High School, influenced us to link exploration of concepts and operations with rational numbers in fractional form to the study of the 1st Degree Polynomial Function. Focusing on learning, our investigation was guided by the following questions: What can be behind the difficulties in understanding some concepts and operations involving the fractional form of rational numbers, in High School? How to approach subjects in high school study to favor conceptual and operative acquisitions with rational numbers in fractional form, not yet consolidated by students? Could a conceptual approach facilitate the understanding of the rational number in fractional form and of operations with these numbers, in situations of studying the 1st degree polynomial function? The methodology involved conducting an exploratory study with 1st year high school students, which allowed us to assemble some of their doubts and tendencies in dealing with the operations in this numerical set. The process of elaborating the activities was influenced, above all, by theoretical references linked to the defense of the importance of ensuring that students conviviality, discussion, and attribution of meanings to crucial notions to the understanding of fractions and to encourage the use of mathematical ideas and knowledge of the critical and reflective mode. Considered the intention to explore situations of study of the 1st degree polynomial function with a view to favoring conceptual and operative understanding. The organization of activities in categories A, B and C allowed us to propose a situation or problem (A), intervene in students' doubts (B) and expand their contact with the relations and concepts discovered (C). The book *Fractions in High School: linking the Study to Polynomial Functions of 1st Degree*, educational resource produced by the research, presents the main theoretical foundations that supported our study, the set of activities produced and our discussions on perspectives and limits of the strategy used in favoring the operative capacity of high school students. We believe that this research fulfills the purpose of discussing and proposing a form of approach in which ideas associated to the concept of fraction, to the equivalence relation between fractions and to addition and subtraction operations between rational numbers in fractional form are treated as objects of study, integrated with theme of the Mathematics curriculum, with the potential to intervene in operative inabilities that persist in the final stage of Basic Education.

Keywords: Rational numbers in fractional form. Operative capacity. 1st degree polynomial function. High school. Mathematics Education.

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Diante de dificuldades persistentes dos estudantes do Ensino Médio com os números racionais na forma fracionária, esta pesquisa tem como principal objetivo identificar perspectivas na abordagem conceitual vinculada ao estudo da função polinomial de 1º grau para o desenvolvimento de capacidade operatória.

É motivada por uma inquietação: como tratar, no Ensino Médio, dificuldades operatórias e conceituais de um campo numérico cujas habilidades ligadas ao seu desenvolvimento estão delegadas ao Ensino Fundamental? Esse questionamento se legitima na experiência da autora pesquisadora como professora e reflete a busca por estratégias na abordagem do tema. O interesse é oferecer alternativas às usuais, e nem sempre positivas, revisões de conteúdos e, assim, poder contribuir na promoção de uma aprendizagem mais efetiva.

Nesta introdução, são apresentados fatos da trajetória pessoal e profissional da pesquisadora, aspectos ligados à sua motivação para realizar o estudo, questões de investigação e objetivos da pesquisa. De forma geral e preliminar, são referenciadas a metodologia, a abordagem pedagógica adotada na elaboração das atividades e a estrutura da dissertação.

O texto que descreve o memorial e os pressupostos envolvidos na realização da pesquisa, escrito na primeira pessoa do singular, traduz o percurso que a professora de Matemática trilhou para chegar ao mestrado e definir o tema de estudo. No restante do texto, empregamos a primeira pessoa do plural para representar o processo de construção do trabalho, resultado da atuação conjunta entre a pesquisadora e seus orientadores.

1.1 Memorial

1.1.1 *Memórias: a existência*

Nasci em Belo Horizonte, onde residi até os três anos de idade, quando minha família se mudou para a cidade de Papagaio, interior de Minas Gerais. Meu pai era professor de Ciências e minha mãe, dona de casa. Sou a mais velha dos quatro filhos dessa família marcada pela efemeridade da união dos meus pais.

Minha mãe faleceu quando eu tinha apenas dez anos de idade, entretanto, durante a sua breve estada comigo, ela me ensinou o que considero o seu maior legado: o cuidado com o outro. Um desses cuidados era a sua preocupação com os estudos dos filhos. Lembro-me de que ela preparava uma pequena mesa de madeira que ficava na varanda da casa para que eu e dois dos meus irmãos, também em idade escolar, fizéssemos os deveres de casa. Entre um afazer doméstico e outro, ela nos acompanhava. Meu pai apoiava essa iniciativa e era muito exigente em relação ao nosso desempenho escolar.

Com a perda da minha mãe, e talvez por ser a filha mais velha, eu me vi diante de algumas responsabilidades muito precocemente, dentre elas a de ajudar a cuidar da minha irmã mais nova, com menos de dois anos de idade na ocasião.

A minha estrutura familiar viria a ser completada pela chegada de mais quatro irmãos, frutos de duas outras uniões conjugais de meu pai. Embora esses relacionamentos tivessem sido desfeitos, meu pai conseguiu manter os filhos juntos dele e unidos. O seu falecimento se deu em 2013 e me deixou a certeza de que a sua presença perdurará durante toda a minha existência, traduzida nas principais referências para a minha formação, nos seus ensinamentos e no amor pelos filhos.

1.1.2 *Uma promessa: o estudo*

Cursei o Ensino Fundamental em escolas estaduais. Na ocasião, a cidade contava com duas de 1ª a 4ª série, cuja formação equivaleria, hoje, ao Ensino Fundamental I, e uma de 5ª a 8ª série, correspondente ao Ensino Fundamental II. Sempre gostei muito de estudar, procurava me dedicar e obter boas notas. Percebia que isso era motivo de grande orgulho para meu pai. Ele sempre me elogiava entre os colegas de trabalho. Acredito que seu apoio e seu reconhecimento foram fundamentais para que eu mantivesse um bom desempenho escolar.

Quando iniciei o nível médio de ensino, o 2º grau da época, fui estudar numa cidade próxima, Pitangui, porque não havia escolas com essa etapa do ensino em Papagaio. Estudei o 1º ano no período da noite e, durante o dia, era responsável pelo atendimento a clientes num bar de propriedade do meu pai. No ano seguinte, ocorreu a implantação do 2º grau em minha cidade e optei pelo curso de Magistério, o escolhido pela maioria das moças, principalmente aquelas de famílias sem grandes expectativas de saírem da cidade para dar prosseguimento aos estudos.

Entretanto, ao concluir o 2º grau, senti que não poderia parar ali. Tinha grandes anseios pelos estudos e então decidi pedir ao meu pai a autorização para voltar para Belo Horizonte em busca da realização daquele meu desejo. Ele conseguiu com uma das irmãs de minha mãe, a tia Maria, o acolhimento para mim em sua casa. Ela, considerada minha segunda mãe, encorajou-me, ofereceu-me apoio, amparo e incentivo para prosseguir rumo a um futuro cujas expectativas estavam delineadas, vagamente, pelo sonho de estudar.

Essa escolha acabaria por determinar a minha permanência em Belo Horizonte, pois iniciei minha carreira profissional, me casei e tive dois filhos, Izabella e Guilherme, a quem atribuo a essência de quem me tornei e o meu amor maior: amor eterno.

1.1.3 *A concretização de um sonho: o meu trabalho*

Quando cheguei a Belo Horizonte, em fevereiro de 1983, aos dezoito anos de idade, tinha por objetivo inicial conseguir um emprego, pois não poderia contar com a ajuda financeira do meu pai que tinha outros sete filhos para cuidar. Ainda no mês de março daquele ano deu-se o meu primeiro encontro com a educação. Atuando como professora designada[1] numa escola da Rede Estadual de Ensino de Minas Gerais, em Justinópolis, distrito de Ribeirão das Neves, comecei a lecionar para estudantes de 3ª e 4ª séries, referentes a 4º e 5° anos do Ensino Fundamental, respectivamente.

Em 1985, iniciei o curso de licenciatura em Matemática na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Belo Horizonte, FAFI–BH. Já no terceiro período, passei a lecionar a disciplina em uma escola pública, situada num município da região metropolitana de Belo Horizonte, para turmas de 5ª série, correspondente ao 6° ano do Ensino Fundamental. Essa atuação representou um desafio não só pelo fato de não estar habilitada para o cargo, mas principalmente por tratar-se de uma disciplina considerada "difícil". Também era desafiador lecionar numa série que apresentava maiores exigências para os estudantes[2], devido à ruptura com a estrutura anterior à qual estavam acostumados, de ritmo mais lento, menor número de professores e consequente relação de maior dependência e afetividade. Essa primeira experiência

---

[1]O termo designado(a) é utilizado para professores que mantêm vínculo empregatício com o estado de Minas Gerais através de contratos, não fazendo parte do seu quadro de servidores efetivos.
[2] Termo usado, ao longo do trabalho, para referenciar os discentes da educação básica, de modo geral.

com a Matemática apontou o início de uma trajetória que demandaria a busca por metodologias e estratégias para qualificar o meu trabalho.

Já naquela ocasião, duas questões me incomodavam: o fato de alguns estudantes não dominarem conhecimentos exigidos para a série e a diversidade dos níveis de desenvolvimento numa mesma turma. As discussões pedagógicas ocorridas na escola se distanciavam da realidade da sala de aula. Também não encontrava respostas na graduação, que ainda estava em curso, e me via constantemente recorrendo a recursos didáticos que conheci durante a formação em Magistério.

O como ensinar era o que mais me preocupava e chamava a minha atenção no planejamento das aulas. Diante dos resultados dos estudantes e das suas demandas em sala de aula, tornavam-se claras as evidências de que conciliar teoria e prática não era uma tarefa tão simples. A Faculdade me oferecia elementos insuficientes para que eu atendesse as necessidades de aprendizagem dos meus alunos[3]. Hoje acredito ser pertinente afirmar que havia uma considerável distância entre academia e sala de aula.

Em 1991, já concluída a graduação, fui nomeada professora na Rede Municipal de Ensino de Belo Horizonte para atuar no Ensino Fundamental de 5ª a 8ª série. Na ocasião, optei por trabalhar prioritariamente no Município, dando poucas aulas como professora designada no Estado. Iniciei uma trajetória de estudos e debates através da participação em cursos e seminários, além das discussões pedagógicas internas da escola, tendo a oportunidade de vivenciar espaços de discussão acerca de organização escolar, estruturação curricular e metodologias de ensino.

Nessa Rede de Ensino, atuei como diretora de escola no período de 1995 a 1998 e na função de vice-diretora no biênio 2005/2006 e no triênio 2012/2014. O meu primeiro mandato na direção coincidiu com o período de implantação do projeto Escola Plural[4], o que me oportunizou a participação nas discussões sobre a nova proposta e sua implementação.

---

[3] Termo usado, ao longo do trabalho, para referenciar os discentes da educação básica sob minha orientação como professora.

[4] Projeto Político Pedagógico implantado nas escolas municipais de Ensino Fundamental em Belo Horizonte no ano de 1995. Os princípios básicos do projeto eram ensino fundamental de nove anos, organização em ciclos de três anos de estudos em substituição à organização por ano, enturmação dos estudantes com seus pares, por idade, e a garantia da continuidade dos estudos de forma ininterrupta no ciclo. Caso o estudante não apresentasse desenvolvimento adequado no decorrer dos três anos, seria garantido a ele, mais um ano ao final do ciclo. A proposta curricular orientava a ressignificação dos processos de ensino e de avaliação buscando práticas menos excludentes e que evitassem a retenção e a evasão.

O desafiador Projeto Escola Plural foi responsável não apenas por instituir importantes e irreversíveis mudanças na educação do Município, mas também por suscitar em mim a busca por uma prática orientada pelo como fazer. Um incômodo foi causado pela proposta pedagógica que assegurava aos estudantes o direito à continuidade dos seus estudos de forma ininterrupta nos ciclos de formação. Isso fez com que sua implementação não fosse tarefa simples a se realizar num momento em que a Rede Municipal reprovava maciçamente. Porém provocou um rico processo de construção de saberes no interior das escolas.

Estar na direção, numa Rede de Ensino que prezava pelo enfoque pedagógico, foi uma experiência muito enriquecedora. Integrar a equipe de coordenação pedagógica da escola possibilitou a participação no planejamento e na viabilização de projetos e trabalhos a serem desenvolvidos. As experiências vividas proporcionaram uma melhor compreensão da importância do trabalho coletivo na escola e ampliaram a minha visão sobre o papel fundamental da educação na sociedade e sobre a responsabilidade que temos, enquanto profissionais da área, em primar pela qualidade e pela garantia dos direitos aos estudantes.

Em 2002, fui nomeada professora na Rede Estadual, para atuar no Ensino Médio. A partir daquele ano, excluindo-se os períodos dos mandatos na direção, trabalhei, concomitantemente, nas Redes Municipal e Estadual.

Na etapa final da Educação Básica, verifiquei que os alunos apresentavam dificuldades na aplicação de alguns dos conteúdos referentes às séries da etapa anterior, o Ensino Fundamental, não conseguindo desenvolver os exercícios devido à falta de conhecimentos básicos necessários à sua resolução. Durante algum tempo, busquei a revisão de conteúdo, mas logo compreendi que essa estratégia se configurava apenas como uma nova apresentação dos conceitos, não alcançando aprendizagens pela compreensão de seus significados.

Buscando aprimorar a minha prática pedagógica e qualificar a minha formação, em 2008 fiz a especialização em Docência na Educação Básica, na área de concentração Educação Matemática[5] da FAE/UFMG. Voltar à sala de aula como estudante possibilitou maior dinamismo na minha prática como regente. Fui colocada mais diretamente frente à questão: o modo de ensinar e suas influências na

[5] LASEB – Curso de Especialização Docência na Educação Básica, organizado entre a FaE UFMG e a Secretaria Municipal de Educação de Belo Horizonte, especificamente para atendimento a professores dessa rede.

aprendizagem. O olhar acadêmico desenvolvido durante o curso e sua associação à experiência profissional ampliaram a minha concepção sobre o ensino da Matemática no que se refere, principalmente, a dois aspectos: a importância da compreensão de conceitos matemáticos por parte dos estudantes e o papel fundamental desses estudantes, enquanto sujeitos da sua aprendizagem.

Como forma de colocar em prática as aprendizagens durante a especialização e atender as exigências do curso, elaborei o trabalho *Os números racionais e sua aplicação em nível médio*. Nessa proposta, sistematizei o projeto de ensino/ação que desenvolvi com um grupo de vinte e dois estudantes do 3º ano do Ensino Médio, em horário extraclasse. A intervenção teve a duração aproximada de dois meses e se destinou aos alunos que apresentaram baixo desempenho em atividade diagnóstica aplicada inicialmente. Foi baseada na abordagem da relação de equivalência entre frações e das quatro operações fundamentais envolvendo os números racionais na forma fracionária. A metodologia envolveu a proposição de atividades a serem resolvidas com apoio na manipulação e na interpretação de frações, representadas em tiras de cartolina.

1.1.4 *O que me move: o meu fazer*

Atualmente, aposentada na Rede Municipal de Belo Horizonte e lecionando para o 3º ano do Ensino Médio há seis anos, me deparo com uma realidade muito próxima daquela que vivenciei no início da carreira: alunos com habilidades, referentes aos anos anteriores, não consolidadas. Comentários de que os estudantes não sabem matemática e, por isso, não alcançam um desenvolvimento adequado nos estudos, frequentes no interior das escolas, evidenciam a importância dessa questão.

Essa situação me mobiliza na busca de investimentos nos estudos, na medida em que continuo a me questionar sobre o meu papel enquanto professora. Também questiono os motivos que levam estudantes tão espertos, capazes de dominar com facilidade as novas tecnologias e se posicionar criticamente sobre questões que lhes são apresentadas, a demonstrarem dificuldade em aprender determinados conceitos da Matemática.

Essa realidade me aproxima da crença de que a Matemática carrega um modo muito particular de pensamento e de habilidade. Gómez-Granell (1997) enfatiza diferenças na natureza do conhecimento matemático, devido não só ao seu caráter de maior abstração, se comparada a outros conteúdos, mas também pela sua dependência de uma linguagem específica, de caráter formal, que difere muito das linguagens naturais. O ensino da Matemática precisa avançar sobre tais dificuldades.

Após 38 anos de trabalho na educação, me coloco diante do desafio de qualificar o meu fazer pedagógico, investir no aprimoramento da minha prática e ampliar meus conhecimentos acerca das novas tendências no ensino da Matemática. Acredito que, com este estudo, também possa refletir sobre minha experiência e deixar contribuições. As concepções de ensino da Matemática vêm sofrendo significativas mudanças nos últimos tempos, o que nos interpõe, enquanto professores da disciplina, a necessidade de buscar qualificação profissional. Recorrer à pesquisa e ao estudo sobre as condições em que a aprendizagem ocorre e buscar formas mais significativas de apresentação de conceitos fundamentais podem representar algumas das possibilidades para tornar o conhecimento matemático mais acessível aos estudantes.

A escolha de um tema para pesquisa, um recorte no vasto universo do conhecimento matemático, foi norteada pela necessidade de aprofundar os estudos sobre frações, iniciados durante a especialização. Esse interesse decorre da constatação das dificuldades na compreensão desse conceito pelos meus alunos do Ensino Médio.

O problema está além da falta de entendimento do significado de fração. Ele engloba incompreensão da sua representação escrita, da relação de equivalência e das operações com esses números.

Ao serem indagados, enquanto turma, sobre como devem adicionar ou subtrair frações com denominadores diferentes, é comum os estudantes responderem que é preciso tirar o mínimo múltiplo comum. A partir daí, não têm segurança sobre o que fazer, e suas respostas variam entre multiplicar pelo denominador e dividir pelo numerador e vice-versa. Tentam recorrer a uma regra que lhes foi ensinada sem a compreensão do objetivo do seu uso. Por mais que eu reforce a importância da obtenção de frações equivalentes de mesmo denominador, percebo que o alcance da representação de equivalência é bastante limitado.

Nas atividades individuais, os erros são recorrentes: adicionam ou subtraem numeradores e denominadores, reduzem as frações a um mesmo denominador mantendo os numeradores sem alterações, entre outros procedimentos. Nas situações que envolvem a multiplicação e a divisão, não é diferente.

Menciono, oportunamente, um comentário feito na sala dos professores da escola em que trabalho, após a constatação de grande número de respostas erradas numa avaliação de Física: *“estes alunos do 3° ano não sabem quanto é 5 vezes* $\frac{1}{5}$, *vão mal em Física porque não sabem Matemática*”. Esse comentário chama a atenção para os prejuízos causados pelas inabilidades nas operações.

Se, por um lado, constatamos o insucesso de nossos estudantes, por outro, chego a me questionar sobre a consistência das justificativas, que, na maioria das vezes, apresentamos para esse resultado: as dificuldades seriam causadas pelo desinteresse e pela falta de estudo. Talvez o real motivo da incompreensão seja bem mais relevante. A decisão de me arriscar na busca de respostas para questões que possam estar relacionadas às persistentes dificuldades dos meus alunos em operar com os números racionais na forma fracionária é o que me move.

Na próxima seção, são detalhados os motivos que justificam o estudo, os fatores que determinaram a sua estrutura, a etapa do Ensino Médio em que foi desenvolvido, as questões de investigação e os objetivos da pesquisa.

1.2 A pesquisa: concepção e formato

1.2.1 *Pressupostos envolvidos na motivação para realizar a pesquisa*

Na escola em que trabalho, são várias as ações de intervenção pedagógica buscando promover a consolidação de conceitos requisitados pela disciplina. Essas ações têm se configurado basicamente de três formas: aquelas planejadas e sistematizadas como Projeto de Intervenção Pedagógica da Escola[6]; as realizadas de maneira mais informal e rotineira, como as retomadas de temas[7] durante as aulas; as desenvolvidas por determinação da Secretaria Estadual de Educação. Entretanto, independentemente da forma como são desenvolvidas, o efeito produzido não tem sido o esperado. Vejo-me repetindo para os meus alunos algo que já lhes fora dito, com a configuração de “mais uma explicação” sobre temas não incorporados por eles.

---

[6] Na escola em que atuo, o projeto de intervenção pedagógica (PIP) é organizado pela área de Matemática, a partir da seleção de alguns temas de estudo do Ensino Fundamental cujas habilidades não foram consolidadas pelos estudantes. O desenvolvimento desse projeto ocorre através da realização de trabalhos e avaliações como forma de abordar e rever os temas.

[7] Uso no texto para representar tópicos de estudo ou assuntos que compõem conhecimentos específicos da área de Matemática.

As consequências do problema se verificam de forma recorrente em sala de aula: atividades que demandam a aplicação de uma habilidade operatória ou conceitual envolvendo números racionais na forma fracionária mostram-se incompletas ou trazem resoluções incorretas. A limitação causada ao desempenho dos estudantes é palpável e desafiadora já que as construções elaboradas internamente na escola têm sido pouco eficazes para resolver a questão. Alguns deles se sentem desmotivados para empreender esforços em algo que sempre lhes impõe um impedimento, um desconhecimento. Em decorrência, a Matemática é tida como uma disciplina difícil.

Professores/as das disciplinas relacionadas à área das Ciências Exatas também enfrentam um desafio, já que as dificuldades na Matemática acabam por interferir de forma negativa no processo ensino-aprendizagem.

Na última semana do mês de maio de 2019, a Secretaria Estadual de Educação (SEE) de Minas Gerais encaminhou orientação para que as escolas realizassem ações interdisciplinares de intervenção pedagógica na Matemática. Segundo as orientações, as atividades deveriam envolver todos os estudantes e sua realização deveria acontecer em cinco etapas durante o mês de junho. Cada uma das quatro primeiras etapas teria duas horas semanais de duração. A quinta etapa seria de culminância, duraria quatro horas e aconteceria no último sábado do mês.

Outra determinação da SEE, no mesmo ano, foi a implementação das aulas de reforço escolar no extraturno, durante o período de setembro a novembro, visando ao fortalecimento das aprendizagens. Essas ações demonstram as escolas estaduais, num esforço coletivo, se movimentando para equacionar as defasagens na aprendizagem da Matemática.

A necessidade de intervenção toma visibilidade e proporção mais contundente nos resultados alcançados em Matemática pelos estudantes das escolas públicas de Minas Gerais. Nos últimos anos, as avaliações implementadas no estado pelo SIMAVE[8], através do Programa de Avaliação da Rede Pública de Educação Básica, salvo as críticas às avaliações em larga escala e à forma como são aplicadas, apontam uma considerável distância entre o nível de desempenho desejável e aquele

[8] "O Sistema Mineiro de Avaliação da Educação Pública foi criado em 2000 e tem seguido o propósito de fomentar mudanças em busca de uma educação de qualidade. Esse sistema teve início com o Programa de Avaliação da Rede Pública de Educação Básica – PROEB." (Revista da gestão escolar SIMAVE, 2014, p.14). Disponível em: http://www.simave.caedufjf.net/wp-content/uploads/2015/06/SIMAVE-RGE-WEB.pdf. Acesso em: 14 jun. 2019.

em que os estudantes concluintes do Ensino Médio se encontram. Dados sobre o resultado da avaliação realizada em 2018, indicando a proficiência[9] dos estudantes das oito turmas de 3° ano, da escola em que atuo, são apresentados como anexos neste trabalho.

A realidade experienciada em sala de aula e verificada nos resultados alcançados pelos estudantes sugere que as intervenções feitas têm sido limitadas em sua eficácia. Também aponta a necessidade de buscar outras estratégias de ensino, alternativas às revisões e retomadas de temas não consolidados pelos estudantes. Considerando essa situação, os referenciais que orientaram a concepção e a construção desta pesquisa foram: a ênfase ao aspecto conceitual sobre o procedimental e a busca pela abordagem do tema de pesquisa de forma vinculada a assuntos previstos no currículo do Ensino Médio.

Dois fatores justificam a adoção desses referenciais. O primeiro se refere às deficiências do ensinar como forma de transmitir ou retransmitir[10] um conhecimento. O segundo está relacionado à falta de um planejamento que favoreça o desenvolvimento de conceitos e operações, que representem maiores desafios para os estudantes, de forma integrada no currículo.

O tema da pesquisa tem merecido especial atenção de professores e autores que se ocupam da Educação Matemática como objeto de estudo, devido não só à sua complexidade, mas principalmente à importância que ocupa no universo dos conhecimentos matemáticos e suas aplicações. A importância indiscutível desse campo numérico está diretamente relacionada a uma necessidade de ordem prática, pois “Os números racionais em suas diferentes representações surgem com frequência nas diversas situações relacionadas à expressão de medidas e de índices comparativos” (DAVID; FONSECA, 2005, p. 60).

Ideias associadas à sua importância e complexidade se confirmam na afirmação:

> Os números racionais ocupam um lugar destacado no currículo, sendo amplamente reconhecida a sua importância na aprendizagem da Matemática, assim como as dificuldades que lhes estão associadas (VENTURA; OLIVEIRA *apud* PONTE, 2014, p. 84).

---

[9] Na avaliação do PROEB, a proficiência dos estudantes é aferida a partir do seu desempenho nos itens. Cada item ou questão corresponde a uma habilidade ou um descritor. (Revista pedagógica PROEB, 2014, p. 17. Disponível em: http://www.simave.caedufjf.net/wp-content/uploads/2015/06/MG-PROEB-2014-RP-MT-3EM-WEB.pdf. Acesso em: 14 jun. 2019.

[10] Uso no texto para enfatizar repetidas transmissões.

Na escola onde atuo, as dificuldades operatórias com os números racionais na forma fracionária têm sido trabalhadas sob a forma de revisões, nas turmas de 1º e 2º anos, e a partir de 2015, através de intervenções pedagógicas do PIP. Entretanto, as incompreensões ligadas a esse campo numérico e às operações a ele relacionadas persistem nas turmas de 3º ano em que venho atuando desde então.

Abordagens conceituais, que privilegiem a centralidade dos estudantes no seu processo de aprendizagem e que levem em conta a possibilidade de desenvolvimento dessas habilidades a partir de temas previstos no currículo, podem representar um avanço no sentido de minimizar dificuldades. Podem, ainda, evitar as revisões, às quais, não raras as vezes, os estudantes atribuem menor valia por considerarem que tratam de temas já estudados e que representam um retrocesso na sua formação. “Na Matemática como nas outras disciplinas escolares, a aprendizagem dos alunos depende em grande medida do que acontece na sala de aula. E isso, como não poderia deixar de ser, tem muito a ver com o modo como o professor ensina” (PONTE, 2014, p. 5).

Pensar no nosso modo de ensinar, de uma forma mais ampla, exige cuidado com o *quando* e o *como* ensinar aos alunos *o que* eles precisam saber para avançarem no seu processo de aprendizagem de forma mais autônoma e competente.

A pesquisa levou em conta a urgência e o cuidado sobre o quando e o como investigar, no Ensino Médio, um tema cuja introdução está prevista para o segundo ciclo do Ensino Fundamental e a consolidação das habilidades operatórias é esperada até o final dessa etapa.

Foi desenvolvida considerando o 1° ano, que traduz diversas heterogeneidades com as quais os professores lidam na etapa inicial do Ensino Médio. A Rede Estadual de Ensino de Minas Gerais recebe estudantes oriundos de escolas variadas, principalmente das municipais, que atendem o Ensino Fundamental.

A partir de algumas leituras e de avaliações e conversas nas aulas de Seminário I do Promestre, a decisão foi privilegiar situações de estudo da função polinomial de 1° grau. Esse assunto atualmente integra o programa do primeiro bimestre letivo, após o estudo dos conjuntos numéricos.

O como realizar o estudo se embasou nos dois eixos de orientação da pesquisa, buscando avaliar as perspectivas de uma exploração conceitual e vinculada ao currículo propriamente previsto para o Ensino Médio.

Operações e conceitos envolvendo os números racionais na forma fracionária perpassam vários temas de estudo dessa etapa, fato que amplia possibilidades para essa vinculação. Entretanto, quanto mais precoce for a atenção dada à compreensão desse tema, maiores são as chances de progressos na sua utilização e na sua aplicação a esse nível de ensino.

1.2.2 *As questões de pesquisa*

Os problemas e as situações que motivaram esta pesquisa foram sistematizados em torno das seguintes questões de investigação:

- O que pode estar por trás das dificuldades na compreensão de alguns conceitos e operações envolvendo a forma fracionária dos números racionais, no Ensino Médio?
- Como abordar temas de estudo do Ensino Médio de modo a favorecer aquisições conceituais e operatórias com números racionais na forma fracionária, ainda não consolidadas pelos estudantes?
- Uma abordagem conceitual poderia facilitar a compreensão do número racional na forma fracionária e das operações com esses números, em situações de estudo da função polinomial de 1° grau?

1.2.3 *Objetivo geral*

Diante de dificuldades persistentes dos estudantes do Ensino Médio com os números racionais na forma fracionária, esta pesquisa busca identificar perspectivas na abordagem conceitual vinculada ao estudo da função polinomial de 1º grau para o desenvolvimento de capacidade operatória.

1.2.4 *Objetivos específicos*

- Identificar aspectos relacionados a dúvidas e tendências dos estudantes do Ensino Médio no trato com o conceito e com as operações envolvendo números racionais na forma fracionária.
- Elaborar uma proposta de atividades visando à discussão de aspectos conceituais na atribuição de significados ao conceito de fração e às operações

- de adição e subtração com números racionais na forma fracionária - e no favorecimento da capacidade operatória no Ensino Médio.

- Identificar perspectivas na vinculação entre o estudo da função polinomial de 1º grau e a exploração de noções relacionadas ao conceito de fração e às operações de adição e subtração com números racionais na forma fracionária, como ação alternativa à sua retomada através de revisões.

1.2.5 *A construção da metodologia de pesquisa e a estrutura da dissertação*

As referências às inabilidades operatórias com os números racionais na forma fracionária e à falta de domínio dos aspectos conceituais que as frações envolvem foram consideradas insuficientes para embasar as ações da pesquisa. Examinamos, inicialmente, a possibilidade de realização de atividades diagnósticas, mas ponderamos sobre sua efetividade devido à sua limitação em retratar aspectos ligados às concepções que os estudantes carregam e em mostrar suas eventuais desatenções na realização dos cálculos. Definimos, então, pela realização de um estudo exploratório no segundo semestre de 2019, envolvendo os alunos da pesquisadora, de modo a situar melhor as suas dificuldades.

Segundo produção da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação - ANPEd (2019), para subsidiar as discussões relacionadas à ética e à pesquisa em educação, a investigação sobre a própria prática ou no ambiente de trabalho promove:

> [...] atitude reflexiva no trabalhador, fomenta o exercício da autoavaliação, aprimora a prática profissional e estimula a identificação e a solução de problemas no ambiente de trabalho, com potencial para extrapolar o estudo de caso e tornar-se experiência piloto a ser replicada ou suscitar políticas públicas (ANPEd, 2019, p. 43).

Em conformidade com as questões e os objetivos da pesquisa, que apontam para a indispensabilidade da adoção de uma metodologia qualitativa, definimos que a averiguação deveria envolver conversas informais com os alunos e o seu acompanhamento no desenvolvimento de atividades. Nosso interesse era levantar e registrar as suas dúvidas, verificando como elas aparecem e em que situações. Também nos interessava identificar o modo como tendem a operar com números racionais na forma fracionária.

As atividades seriam elaboradas considerando os assuntos previstos para o período, em alinhamento com a discussão proposta no estudo. Não cogitamos fazer uma interrupção no conteúdo planejado para inserir uma revisão, e sim desenvolver atividades nos contextos de estudo já definidos no planejamento.

Estipulamos que o estudo exploratório teria, também, a finalidade de testar atividades a serem adaptadas para compor o conjunto que desenvolveríamos na fase de campo da pesquisa.

Esse estudo ocorreu no ano 2019. Foi oportunizado a partir de uma demanda compulsória estabelecida pela Secretaria Estadual de Educação e pela Escola de atuação da pesquisadora, numa situação específica de aulas de reforço escolar para estudantes do 1º ano do Ensino Médio. Com ele, conseguimos acompanhar os alunos nas atividades em grupos, realizar o levantamento de algumas de suas dúvidas e observar aspectos de seu envolvimento e desempenho.

Diante da ocorrência de uma situação adversa no ano 2020, a suspensão das aulas nas escolas brasileiras devido à pandemia de COVID-19[11], a etapa de aplicação das atividades em campo não pôde ser efetivada. Por essa razão, o estudo exploratório foi a nossa fonte de informações de campo para a análise das atividades e elaboração do recurso educativo requerido pela pesquisa.

Estruturamos a dissertação em seis capítulos, sendo este primeiro introdutório.

No segundo capítulo, apresentamos o referencial teórico, organizado em duas seções. Na primeira seção, *Fundamentos teóricos ligados à compreensão do número racional na forma fracionária*, usando como principal referência Moreira e David (2005), discutimos aspectos relacionados (a) à complexidade existente na compreensão do número racional na forma fracionária e das operações com esses números e (b) às exigências no trato com esse campo numérico, para a área de ensino da Matemática. Na segunda seção, *Fundamentos para as escolhas metodológicas da pesquisa: as frações ao longo do ensino na Educação Básica*, desenvolvemos algumas considerações sobre aspectos que fundamentaram a construção da pesquisa e do recurso educativo.

[11] Doença respiratória grave, causada por um novo coronavírus, que acometeu parte da população mundial a partir de 2019. A Organização Mundial da Saúde (OMS) declarou o surto causado pela doença como uma Emergência de Saúde Pública de Importância Internacional (ESPII) em 30 de janeiro de 2020 e reconheceu como uma pandemia, em 11 de março de 2020. **Folha informativa COVID-19**. Escritório da Organização Pan-Americana da Saúde (OPAS) e da OMS no Brasil. Disponível em: www.paho.org/bra/covid19. Acesso em: 14 out. 2020. A pandemia exigiu a suspensão das aulas presenciais no Brasil em março de 2020.

Nossas considerações foram apoiadas, principalmente, em Druck (1995) sobre a importância de se garantir aos alunos convívio, discussão e atribuição de significados às noções cruciais à compreensão de frações; Onuchic e Allevato (2011) sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas; Ponte (2003) sobre aspectos de confluência entre problemas e atividades investigativas no sentido de promover atitudes exploratórias. Também levaram em conta habilidades previstas na BNCC (BRASIL, 2018) para o estudo da função polinomial de 1º grau e de noções ligadas ao conceito de fração e às operações de adição e subtração envolvendo números racionais na forma fracionária.

No terceiro capítulo, relatamos nosso percurso metodológico na construção da pesquisa. Apresentamos o estudo exploratório, desenvolvido na escola em que a pesquisadora trabalha, detalhando a sua estrutura, as condições em que foi realizado, a caracterização da escola e as atividades desenvolvidas. Nessa parte, demos destaque aos aspectos ligados às construções dos alunos na realização das tarefas e aos problemas na sua elaboração e/ou no seu desenvolvimento.

No quarto capítulo, apresentamos o conjunto de atividades produzidas, acompanhadas de seus objetivos. Elas foram estruturadas em três categorias: A, B e C. Essa estruturação buscou atender aos propósitos de apresentar o problema (A), intervir nas dúvidas dos estudantes (B) e ampliar o seu contato com as relações e os conceitos descobertos (C). Buscamos referenciar os objetivos de cada uma das atividades em habilidades previstas na BNCC (BRASIL, 2018), para o estudo dos temas abordados, sem a pretensão de contemplá-las na sua integralidade. Essas referências constam, no trabalho, como notas de rodapé.

No quinto capítulo, desenvolvemos a análise das atividades, tendo por referência as experiências vividas no estudo exploratório, a discussão teórica que embasa o estudo e a prática da autora, como professora no Ensino Médio. Os parâmetros usados na discussão foram:

1) orientações teóricas que mais diretamente influenciaram a concepção e a estruturação de cada uma das atividades;
2) diálogos e avanços em relação às experiências vivenciadas no estudo exploratório;
3) perspectivas e desafios da vinculação entre o estudo da função polinomial de 1º grau e a exploração de noções relacionadas ao conceito de fração e às operações de adição e subtração com números racionais na forma fracionária;

4) potencialidades e limites em favorecer o desenvolvimento da competência operatória de estudantes do Ensino Médio, considerando sua intenção de propiciar intervenção embasada na discussão de aspectos conceituais que os números racionais na forma fracionária envolvem.

Nossas considerações finais são apresentadas no sexto capítulo.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

A organização de uma base teórica para as questões envolvidas na pesquisa perpassou as questões motivadoras e os eixos que orientaram o estudo, em consonância com as discussões acerca das novas orientações curriculares para o ensino da Matemática e com os desafios atualmente colocados para o Ensino Médio. Essas questões encontram-se ligadas e é difícil concebê-las de forma dissociada.

Para melhor estruturarmos as ideias, organizamos o capítulo em duas seções. Inicialmente, buscamos discutir as referências ligadas à complexidade envolvendo a compreensão do número racional na forma fracionária e suas interfaces com a realidade vivenciada no Ensino Médio. A seguir, apresentamos as referências teóricas que fundamentaram os procedimentos metodológicos adotados na pesquisa e na elaboração das atividades.

2.1 Fundamentos teóricos ligados à compreensão do número racional na forma fracionária

Pensar na ressignificação conceitual de um campo numérico implica avançar para além do conceito dos números que compõem o seu universo, significa compreender as diversas relações e operações existentes nesse campo. Moreira e David (2005) questionam a falta de contribuição da formação acadêmica para o trato com o ensino dos números racionais e discutem o despreparo do professor para os empreendimentos exigidos por um conjunto numérico que engloba números com diferentes representações e significados:

> Do ponto de vista da preparação do futuro professor para o trabalho pedagógico de construção dos números racionais nas salas de aula da escola, a abordagem que se desenvolve na licenciatura pode ser também submetida a fortes questionamentos. Ao longo do processo de formação matemática do professor, o conjunto dos racionais é visto como um objeto extremamente simples, enquanto as pesquisas mostram que, em termos da prática docente, a sua construção pode ser considerada uma das mais complexas operações da Matemática Escolar (MOREIRA; DAVID, 2005, p. 59-60).

Esses autores abordam a complexidade envolvida nas extensões dos conjuntos numéricos contrapondo a estruturação organizada pela Matemática Científica e as exigências no trato com a Matemática Escolar. Eles argumentam que são definidos um conjunto numérico e suas operações de forma abstrata e algébrica, esperando que os estudantes desenvolvam as compreensões de números e operações nesse conjunto. Na formação do número racional, os números naturais e inteiros figuram com significados muito distintos daqueles que originalmente possuem.

> As extensões numéricas que se operam na escola são de natureza totalmente diferente já que o conjunto e a estrutura que resultam do processo de extensão apresentam-se como um universo genuinamente novo para o aluno. Essa *novidade* constitui um elemento fundamental na conformação da prática docente e afeta decisivamente o tratamento didático-pedagógico das várias etapas desse processo (MOREIRA; DAVID, 2005, p. 61).

Moreira e David (2005) discutem a importância de não se tratar os “subconstrutos” do número racional de maneira puramente formal, mas de dar a eles adequada e diferenciada interpretação escolar. Segundo eles, Behr et al (1983) assinalam enfaticamente a importância das diferentes interpretações na apreensão do conceito de número racional.

> Análises dos componentes do conceito de número racional sugerem claramente um motivo pelo qual uma compreensão completa do conceito envolve um formidável esforço de aprendizagem. O número racional pode ser interpretado pelo menos de seis maneiras diferentes (subconstrutos): comparação parte-todo, decimal, razão, quociente indicado, operador e medida de quantidades contínuas ou discretas. Kieren (1976) defende a ideia de que um entendimento completo dos racionais requer, não apenas o entendimento de cada subconstruto separadamente, mas também de como eles se inter-relacionam. Análises teóricas e evidências empíricas recentes sugerem que diferentes estruturas cognitivas podem ser necessárias para lidar com os diferentes subconstrutos. [...] (BEHR *et al*, 1983, p. 92-93 *apud* MOREIRA; DAVID, 2005, p. 64).

Outra questão tratada pelos autores diz respeito à restrição do significado das operações com números racionais ao uso dos algoritmos para resolvê-las. Esses teóricos ressaltam que “[...] os significados das operações se eludem nos algoritmos que as definem. De fato, as definições formais das operações com os racionais não passam de algoritmos para o cálculo dos resultados” (MOREIRA; DAVID, 2005, p. 65).

Considerando a forma fracionária do número racional, as questões suscitadas por Moreira e David encontram apoio em outros autores que também defendem uma atenção especial dos professores no trabalho com esses números nas salas de aula. As exigências impostas pelas diferentes interpretações associadas ao conceito fração e pelas operações com números racionais na representação fracionária, demandam uma abordagem cuidadosa e que dê importância ao processo de aprendizagem a longo prazo. Llinares e Sánchez (1997, p. 53) afirmam: “Los profesores debemos tener en cuenta estas características, es decir: las muchas interpretaciones, y el proceso de aprendizaje a largo plazo.”[12]

Dificuldades na compreensão podem estar relacionadas à “ênfase exagerada que costuma ser dada aos procedimentos e algoritmos para operar com números racionais em detrimento de uma abordagem mais conceitual” (BEHR et al, 1983 *apud* DAVID; FONSECA, 2005, p. 60).

> Na intenção de ultrapassar essas dificuldades, muitas propostas já sugerem um tratamento mais moderado das operações e um investimento maior, e mais cuidadoso, no aspecto conceitual, especialmente quando estamos adotando a representação fracionária (DAVID; FONSECA, 2005, p. 60).

No Ensino Médio, o problema da incompreensão conceitual e operatória envolvendo o número racional na forma fracionária tem sido bastante desafiador, principalmente quando testemunhamos que, apesar das intervenções, ele persiste no 3º ano e a etapa conclusiva da Educação Básica segue marcada pela ineficiência no ensino do tema. Professores reconhecem essa realidade, lidam diariamente com as limitações causadas aos estudantes e, de forma recorrente, buscam retomar procedimentos operatórios em suas aulas.

Os motivos da incompreensão costumam ser atribuídos, arbitrariamente, à irresponsabilidade dos estudantes. Escola e professores, também limitados pela persistência do problema, usam argumentos que relacionam a falta de compreensão à falta de comprometimento e de interesse dos jovens estudantes. Essas justificativas tendem a ser validadas, sem maiores questionamentos, por atenderem a representações socialmente construídas para essa faixa etária. Dayrell (2007), adverte:

> Além do mais, predomina uma representação negativa e preconceituosa em relação aos jovens, reflexo das representações correntes sobre a idade e os atores juvenis na sociedade. [...] Diante dessas representações e estigmas, o jovem tende a ser visto na perspectiva da falta, da incompletude, da irresponsabilidade, da desconfiança, o que torna ainda mais difícil para a escola perceber quem ele é de fato, o que pensa e é capaz de fazer (DAYRELL, 2007, p. 1117).

[12] Nós professores devemos levar em conta estas características: as muitas interpretações e o processo de aprendizagem a longo prazo. (LLINARES; SÁNCHEZ, 1997, p. 53, tradução nossa).

A falta de domínio conceitual e as inabilidades operatórias estariam mesmo ligadas ao desinteresse de tantos estudantes? Por que as ações da escola, apesar de constantes, têm sido pouco eficazes? A discussão teórica sobre a complexidade relacionada à compreensão do tema de pesquisa não só sinaliza a importância de um trabalho mais cuidadoso e de longo prazo, quando se trata dos números racionais na forma fracionária, como também coloca sob suspeita os argumentos que localizam as causas do problema no descompromisso dos estudantes.

Esses questionamentos foram determinantes no sentido de buscarmos ações que pudessem ressignificar a forma de abordar o tema e de envolver os estudantes na sua discussão. Para Corsino (2015) “[...], a didática - como ensinamos o que ensinamos - é um ato responsivo, uma resposta responsável e não indiferente ao outro – sujeitos a quem o ensino se dirige” (CORSINO, 2015, p. 401). O potencial argumentativo e analítico dos estudantes do Ensino Médio pode ser explorado com vistas à produção de conhecimentos matemáticos que favoreçam a sua aprendizagem. Acreditamos que a abordagem do conceito de forma vinculada a temas a serem estudados pode facilitar a sua compreensão, ao deslocá-lo do lugar da aplicação para torná-lo objeto de estudo associado ao repertório de assuntos do programa da etapa.

Na seção a seguir, localizamos o foco do estudo: a aprendizagem do número racional em sua forma fracionária, no Ensino Médio, num cenário de discussões relativas à aprendizagem das frações durante a Educação Básica. Também fundamentamos as escolhas metodológicas que embasaram a pesquisa e a elaboração do conjunto de atividades apresentadas como recurso educativo.

2.2 Fundamentos para as escolhas metodológicas da pesquisa: as frações ao longo do ensino na Educação Básica

Nas três subseções a seguir, buscamos dialogar com as bases teóricas que influenciaram as seguintes ações do estudo: definição dos aspectos conceituais a serem abordados; influências metodológicas na concepção das atividades; escolha do assunto do currículo ao qual a exploração estaria vinculada.

Sabemos da vasta literatura sobre o ensino das frações no que se refere ao Ensino Fundamental, etapa de introdução e consolidação. Em relação ao Ensino

Médio, apesar de evidências na prática e resultados de proficiência indicando necessidades relativas à melhoria na sua aprendizagem, ainda são tímidas as produções envolvendo o tema.

Na subseção a seguir, discutimos algumas especificidades no ensino das frações que, independentemente da etapa da Educação Básica, podem contribuir para a aprendizagem. Procuramos desenvolver a discussão apoiada em Druck (1995), trazendo contribuições de autores no sentido de complementar ou contrapor ideias.

2.2.1 *Frações: aspectos conceituais elementares x alternativas na abordagem*

As reflexões desenvolvidas por Druck (1995), no artigo *Frações: uma análise de dificuldades conceituais*, encontraram eco nas inquietações que mobilizaram esta pesquisa. Colocá-las em pauta representa, para além de justificar a necessidade do estudo, a possibilidade de ampliação das concepções sobre os processos cognitivos envolvidos na aprendizagem do número racional na forma fracionária.

A afirmação da autora de que as incompreensões conceituais e operatórias envolvendo frações constituem, para os estudantes, “graves entraves no prosseguimento dos seus estudos sobre números, operações, álgebra e funções [...]” (DRUCK, 1995, p. 1) dialoga com as situações vivenciadas nas salas de aula do 3° ano do Ensino Médio. Trata-se de reconhecer o problema e suas consequências no processo ensino-aprendizagem da Matemática ao longo da Educação Básica, podendo representar um distanciamento das justificativas calcadas na consensual afirmação: os estudantes têm muita dificuldade com fração.

O emprego da expressão “graves entraves no prosseguimento dos seus estudos” não apenas dimensiona a limitação ao sucesso dos estudantes nos empreendimentos em alguns assuntos da Matemática, mas, principalmente, fundamenta as discussões da autora sobre a importância de investimentos nos aspectos conceituais que as frações envolvem e nas formas de abordá-los, evitando-se a aplicação mecânica de regras.

São três noções ou aspectos cruciais à compreensão das frações aos quais a autora atribui importância e complexidade e que, portanto, exigiriam uma abordagem mais cuidadosa ao longo do processo ensino-aprendizagem: “a própria ideia ou conceito de fração; a relação de equivalência entre frações; o significado das quatro operações fundamentais no universo das frações” (DRUCK, 1995, p. 1).

A atribuição de importância a esses aspectos e a recomendação de que sejam observados certos critérios na sua abordagem nos ofereceram pistas sobre o como desenvolver uma exploração envolvendo esse campo numérico.

> A meu ver eles correspondem a questões conceituais fundamentais e complexas das quais depende a possibilidade de compreensão desse conteúdo matemático, dos procedimentos operatórios que engloba e da sua utilização proveitosa na resolução de situações-problema. Para avançar além da mecanização de regras é preciso garantir aos alunos convívio, discussão e atribuição de significados a essas noções (DRUCK, 1995, p. 1).

"Garantir aos alunos convívio, discussão e atribuição de significados às noções cruciais à compreensão de frações" é condição que privilegia o seu envolvimento em cenários de debates que podem favorecer a construção de conceitos e de argumentação que os validem ou os questionem. Coloca o estudante na posição de centralidade no seu processo de aprendizagem, o professor na função de mediador e a Matemática como objeto de discussão no processo formativo.

A avaliação da efetividade dessa alegação se configurou como premissa a ser investigada. A busca por confirmação ou questionamento pareceu-nos elemento importante nesta investigação que traz esta principal questão: Como abordar temas de estudo do Ensino Médio de modo a favorecer aquisições conceituais e operatórias com números racionais na forma fracionária, ainda não consolidadas pelos estudantes?

Acreditamos que falte a nós, professores, melhor preparo para lidar com questões conceituais que a fração envolve e com formas de desenvolvê-las com os nossos alunos. As deficiências na formação profissional do professor de Matemática para lidar com as exigências no ensino do tema, já consideradas anteriormente, apontam a necessidade de investigarmos abordagens que possam facilitar a sua compreensão por parte dos estudantes. Para Druck (1995), criar situações explorando os diversos significados das frações em contextos que permitam estabelecer relações significativas para esses números possibilita a atribuição de significados para as frações e, consequentemente, favorece o seu uso operacional compreensivo.

> São muitas as variações, nuances ou convenções sintetizadas ou implícitas na definição usual de fração. [...] Assim torna-se necessário apresentar muitas situações de interesse dos alunos, correspondentes a vivências de realidade possível (não simplesmente frações de figuras geométricas, por exemplo) (DRUCK, 1995, p. 4).

Segundo a autora, abordagens privilegiadas pelos livros didáticos tendem a conduzir os estudantes a ambiguidade ou incompreensão. O aspecto fração como parte-todo geralmente é priorizado ao introduzir o conceito e, no seu modo de ver, a ênfase em “ilustrar” a definição de fração pode estar restringindo uma abordagem mais comprometida com a compreensão.

Argumenta, ainda, ser a definição de fração, comum em grande parte dos livros didáticos: *A notação p/q representa a fração ou pedaço correspondente a p partes de uma unidade ou todo que foi dividido em q partes iguais*, “bastante vaga e problemática, apesar do enunciado aparentemente simples” (DRUCK, 1995, p. 1).

As acepções matemáticas associadas ao conceito fração recebem, por Onuchic e Allevato (2008), a denominação de diferentes personalidades do número racional: ponto racional, quociente, fração, razão e operador. A expressão “diferentes personalidades” é utilizada para expressar os diferentes significados que o número racional pode assumir. Essas autoras trazem outra constatação que corrobora com a visão apresentada por Druck (1995), ao afirmarem que “o ensino dos números racionais está formando estudantes com concepções demasiadamente simplistas de números e operações sobre números, e estratégias excessivamente mecânicas para resolver problemas” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 81-82).

Para David e Fonseca (2005), a opção por um tratamento conceitual aponta para a necessidade de refletirmos sobre as ideias associadas à representação fracionária do número racional: a fração como medida, como quociente ou divisão indicada, como razão e como operador. As autoras enfatizam que esse tratamento exigirá também a seleção de “modelos apropriados e oportunos que confiram sentido à sua abordagem” (DAVID; FONSECA, 2005, p. 61). Apontam perspectivas envolvidas no ensino dos números racionais, as quais reforçam a importância dada a esse campo numérico:

> Do ponto de vista psicológico, o trabalho com os números racionais surge como uma oportunidade privilegiada para se promover o desenvolvimento e a expansão de estruturas mentais necessárias ao desenvolvimento intelectual. Na perspectiva da própria Matemática, serão justamente esses primeiros estudos com os números racionais, particularmente em sua forma fracionária, que fundamentarão o trabalho com as operações algébricas elementares a serem desenvolvidas ao longo do ensino fundamental (DAVID; FONSECA, 2005, p. 60).

Bittar e Freitas (2005) atribuem às frações os significados parte-todo, razão, quociente e operador. Explorar contextos de ensino, que levem em conta o fato de que esses significados “podem servir como subsídio teórico-pedagógico para explorar situações diversas com os alunos” (BITTAR; FREITAS, 2005, p. 163), tem potencial para favorecer o entendimento.

Não há assentimento sobre os termos usados para designar os diferentes significados das frações. Aos citados nesta seção, acrescentamos os seis subconstrutos que Moreira e David (2005) elencaram e nós mencionamos na seção anterior, além de outros, não expostos neste trabalho.

Entretanto existe acordo sobre a forma e o tempo necessários à sua construção com os estudantes. Botta (1997), *apud* Onuchic e Allevato (2008), afirma que os estudos já realizados nessa linha apontam que não há consenso absoluto sobre quais são as “personalidades” dos números racionais, “porém, todos concordam que a exploração desse conhecimento construído com os alunos leva tempo” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 100).

Todas as recomendações quanto aos cuidados na forma de abordagem desse tema, buscando assegurar sua adequada compreensão, parecem reafirmar a alegação de Druck (1995) em relação à importância de “garantir aos alunos convívio, discussão e atribuição de significados às noções cruciais à compreensão de frações”.

A seguir, discutimos aspectos semânticos, elencados pela autora, envolvendo as três noções cruciais à compreensão de frações.

1) A própria ideia ou conceito de fração

Ao discutir o conceito de fração, Druck (1995) chama a atenção para as diferentes noções ou acepções associadas a ele e lança mão de exemplos para definir cada uma delas. A autora aponta a importância de que elementos pertinentes a cada uma sejam levantados e trabalhados nas aulas. Sinaliza, ainda, a necessidade de explorar diversificadas situações que possam conferir sentido matemático a essas noções.

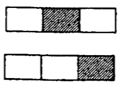
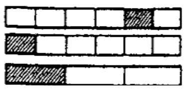
Ao abordar a acepção *fração como relação parte-todo*, Druck explora diferentes situações que a envolvem e examina aspectos conceituais relacionados ao que se considera *parte* e ao que se considera *todo*. Traz exemplos utilizando as frações $\frac{2}{3}$ e

$\frac{1}{3}$, segundo a sua definição na forma $\frac{p}{q}$, considerando diferentes representações e possibilidades que agucem a busca de sentidos para elas. Explora modelos contínuos e discretos diversificando as formas de divisão do inteiro e de tomada das partes, enfatizando a flexibilidade do que se considera *inteiro* e o sentido dado às partes.

A autora lança mão de três exemplos (1, 4 e 7) em que a afirmação $\frac{2}{3}$ *de uma barra de chocolate* assume diferentes interpretações. “A unidade ou todo é a mesma (uma barra de chocolate), o que muda são as partes e o sentido em que os pedaços são partes do (mesmo?) todo e são iguais” (DRUCK, 1995, p. 3). Considerando a barra de chocolate como unidade, diferentes enfoques são explorados nesses exemplos.

No quadro 1, a seguir, apresentamos e comentamos cada um deles, destacando algumas observações que apontam diferenças nas abordagens dadas à afirmação $\frac{2}{3}$ *de uma barra de chocolate*.

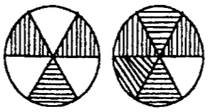
Quadro 1 – Discussão dos exemplos 1, 4 e 7

Exemplo	**Observações**
1) 	Duas, das três partes iguais em que uma barra de chocolate foi dividida, aparecem representadas em destaque (coloridas).
4) 	Duas, das três partes iguais em que cada uma das barras de chocolate foi dividida, aparecem não destacadas (não coloridas). Na primeira barra, os $\frac{2}{3}$ foram tomados de forma não consecutiva.
7) 	Uma das barras de chocolate foi dividida em três partes iguais, tendo duas de suas partes, não coloridas, representando os $\frac{2}{3}$ da barra. As outras duas barras foram divididas em seis partes iguais, tendo $\frac{1}{6}$ colorido em cada uma delas. Este exemplo abre oportunidade para que seja escolhida qual das situações atende à afirmação: $\frac{2}{3}$ de uma barra de chocolate, e para que sejam estabelecidas comparações entre uma parte correspondente a $\frac{1}{3}$ e duas partes correspondentes a $\frac{2}{6}$.

Fonte: DRUCK (1995, p. 2), com observações dos autores, 2021.

No exemplo 5, é explorada a fração $\frac{2}{3}$ em relação a um todo que corresponde a duas pizzas. O total de partes não se refere a uma unidade. Ele é tomado considerando-se duas unidades, cada uma delas dividida em 6 partes.

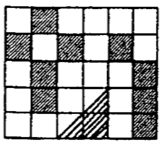
Quadro 2 - Discussão do exemplo 5

Exemplo	Observação
5) 	Os $\frac{2}{3}$ considerados referem-se a duas pizzas. Na primeira delas toma-se $\frac{3}{6}$ e na outra $\frac{5}{6}$, ou seja, têm-se os $\frac{2}{3}$ representados pela ideia $\frac{8}{12}$.

Fonte: DRUCK (1995, p. 2), com observações dos autores, 2021.

A situação explorada no exemplo 6, $\frac{2}{3}$ *da área de um terreno de 5m x 6m está sem grama*, também nos chama a atenção para aspectos sutis, mas importantes.

Quadro 3 - Discussão do exemplo 6

Exemplo	Observação
6) 	A situação explora a parte não gramada. Na malha quadriculada, os $\frac{2}{3}$ do terreno são representados pela parte não colorida. Este exemplo, apesar de a figura apresentar 1 m^2 a menos (19 m^2) na representação da área não gramada, nos chama a atenção por possibilitar que sejam estabelecidas relações de comparação entre partes coloridas, não coloridas e o todo e também entre partes coloridas e não coloridas entre si.

Fonte: DRUCK (1995, p. 2), com observações dos autores, 2021.

Ainda como modelo contínuo de fração, Druck (1995, p. 2) ilustra, através do exemplo 8, os $\frac{2}{3}$ de um litro de leite na figura de uma garrafa trazendo uma marca indicando o nível do líquido. Tal situação exige uma reflexão sobre qual das duas partes representa a fração considerada, já que o inteiro não se encontra dividido em três partes iguais. Nesse caso, o grau de exigência na comparação entre a parte e o todo é um pouco maior.

Como modelos discretos, são consideradas diferentes quantidades de objetos para representar o todo e os $\frac{2}{3}$ desse todo. Esses objetos são tomados de forma consecutiva ou descontínua. Essas situações exigem a quantificação do todo e da parte em questão, o que, inevitavelmente, conduz à noção de fração como operador.

No quadro a seguir, os exemplos 2, 3 e 9 ilustram essas constatações.

Quadro 4 - Discussão dos exemplos 2, 3 e 9

Exemplo	Observações
2) 	Os $\frac{2}{3}$ de uma coleção de 6 maçãs são tomados de forma consecutiva e correspondem ao total de 4 maçãs.
3) 	As 4 maçãs, $\frac{2}{3}$ de uma coleção de 6 maçãs, são tomadas de forma descontínua.
9) 	Os 10 palitos riscados, $\frac{2}{3}$ de uma coleção de 15 palitos, são tomados de forma descontínua.

Fonte: DRUCK (1995, p. 2), com observações dos autores, 2021.

Na exploração da fração $\frac{1}{3}$, os exemplos 11 e 12 se apoiam no mesmo suporte de ilustração, o mapa do Brasil dividido nas suas unidades federativas. O exemplo 11 traz a seguinte questão: “A região Norte corresponde a cerca de $\frac{1}{3}$ do território brasileiro. Por quê?” (DRUCK, 1995, p. 3). Nessa situação, o todo é representado pela área do território brasileiro. No problema apresentado no exemplo 12, “Como podemos contar, o Brasil tem 27 unidades federativas: 26 estados e mais o Distrito Federal. Por que podemos dizer que a região Nordeste possui $\frac{1}{3}$ das unidades federativas do Brasil?” (DRUCK, 1995, p. 3), o todo é representado pelo total de unidades federativas do Brasil. Nesses exemplos, o todo e a parte correspondente a $\frac{1}{3}$ dele assumem diferentes sentidos num mesmo contexto representativo.

> Temos direito de chamar uma coleção de 15 objetos de uma unidade, e uma coleção de 5 objetos de uma parte? Isto é claro para uma criança? O aluno pode perceber a diferença entre os “todos” as “partes” e o sentido em que são “iguais” nos exemplos 11 e 12, onde o suporte da ilustração é o mesmo? A partir de que série? (DRUCK, 1995, p. 3).

Ainda considerando a acepção *parte-todo*, Druck (1995) traz exemplos de exercícios que solicitam aos estudantes identificarem diferenças entre exemplos trabalhados ou inventarem modelos para ilustrar frações. A autora deixa clara a posição de interesse de seu texto em atacar possíveis causas de incompreensões relacionadas ao conceito de fração.

Os exemplos considerados por ela explicitam aspectos fundamentais que compõem o conceito, aos quais se refere como “ingredientes fundamentais” e que devem ser considerados com vistas a uma melhor compreensão conceitual. Expormos os estudantes a diversificadas “situações-problema”, nas quais diferentes graus de dificuldade conceitual lhes sejam impostos, pode fazer com que o conceito abstrato de fração intervenha significativamente e pode colaborar para que a sua noção seja desenvolvida.

> Por meio desses exemplos quero chamar a atenção para o fato de que os três ingredientes fundamentais, usualmente empregados para conceituar fração, apresentam dificuldades para serem devidamente compreendidos no grau de generalidade exigido para que o conceito matemático não seja deturpado. São eles: unidade ou todo; partes da unidade e igualdade entre as partes (DRUCK, 1995, p. 3).

Ao tratar das acepções de fração como *quociente indicado*, *razão* ou *número racional*, a autora traz à discussão a forma predominante no tratamento dessas acepções e outras correlatas, bem como a ordem em que geralmente aparecem como subtítulos em muitas coleções de livros didáticos para o Ensino Fundamental:

> [...] primeiro é introduzida a divisão de números naturais; em série posterior frações são trabalhadas; mais adiante ainda aparecem as razões; os números racionais comparecem ao final. Normalmente o próximo conteúdo é abordado sem nenhuma indicação sobre como se relaciona com o(s) anterior(es). Muitas vezes são dadas definições que simplesmente reduzem um conceito ao outro, do tipo “razão é fração” ou “fração é divisão”, “racional é um número de forma $\frac{p}{q}$, onde p e q são números inteiros, com q ≠ 0 (DRUCK, 1995, p. 4-5).

É notória a forma particularizada como os conceitos são tratados, bem como a ausência de explicações que busquem inter-relacioná-los através de aspectos comuns na sua conceituação. Seria possível estabelecer relações conceituais entre eles de maneira a torná-los mais compreensíveis para os estudantes? Que ideia central perpassa esses conceitos? Quais relações os estudantes estabelecem entre eles?

> O uso de todas essas “identificações”, mais ou menos explicitadas, é amplamente difundido e não está errado do ponto de vista técnico da Matemática. Mas elas representam obstáculos importantes à aprendizagem significativa das várias noções. Evidentemente cabe perguntar: afinal, fração, razão e divisão indicada são realmente nomes distintos para a mesma coisa? Qual a diferença entre número racional e fração? Quais as diferenças entre essas noções, como se inter-relacionam? Por que se justifica o emprego da mesma notação de barra para as quatro? Não conheço nenhum texto que aborde essa problemática explicitamente. Mas parece-me importante refletir sobre essas questões, percebê-las claramente e observar se tais identificações não estão confundindo nosso aluno, bloqueando sua compreensão. A consciência do professor sobre esse tipo de dificuldade pode

> favorecer a elaboração de transposições ou de situações didáticas mais eficazes para o tratamento desses conceitos em sala de aula (DRUCK, 1995, p. 5).

Toda essa problemática parece trazer como questão central a necessidade de indagarmos sobre características que aproximam esses conceitos e sobre aquelas que os particularizam. Na tentativa de responder às próprias perguntas, a autora recorre a citações do dicionário brasileiro da Língua Portuguesa, de Aurélio Buarque de Holanda (1ª edição, 1967), referentes aos verbetes *divisão*, *quociente*, *fração* e *razão*.

> Divisão: operação que tem por fim determinar o maior número de vezes que um número chamado dividendo contém outro que se chama divisor. Partilha, repartição. Quociente: quantidade resultante da divisão de uma quantidade por outra. Fração: parte de um todo; número que representa uma ou mais partes da unidade que foi dividida em partes iguais. Razão: Porcentagem; relação entre grandezas de mesma espécie; (de dois números): se os números forem dados numa certa ordem (com o segundo diferente de zero) é o quociente do primeiro pelo segundo; (de duas grandezas): se as grandezas forem da mesma espécie, é o número que exprime a medida de uma delas quando se toma a outra por unidade (DRUCK, 1995, p. 5).

Tomando por referência essas definições, a autora afirma ser a ideia de divisão unificadora dessas acepções. “Somente o primeiro não faz referência a algum outro no seu enunciado. Por outro lado, a divisão, ou o seu resultado, comparece nas definições das demais noções” (DRUCK, 1995, p. 5). Essa constatação categoriza a divisão como ideia fundamentadora do conceito fração.

> [...] reexaminando os exemplos de fração discutidos anteriormente, ou outros, podemos nos dar conta da presença, implícita ou explícita, de divisões, repartições, subdivisões ou outras formas concretas ou mentais de visualizar um pedaço de um todo como uma determinada fração. Assim uma ideia de divisão está realmente na base do conceito de fração (DRUCK, 1995, p. 5).

Ampliando a interpretação do verbete *fração*, destacamos que ela é colocada na categoria de número que expressa razão. Fração: número que representa uma ou mais partes em relação à unidade dividida em partes iguais; logo, número racional. Llinares e Sánchez (1997) conceitualizam número racional como classe de equivalência de frações. Essa referência integra a discussão desenvolvida no tópico a seguir.

2) A relação de equivalência entre frações: perspectivas na construção do conceito de fração

A relevância da relação de equivalência, como aspecto fundamental à compreensão conceitual das frações e das operações, é destacada numa relação de interdependência com o próprio conceito de fração, a partir do dialogismo destacado pela autora:

> Se, por um lado, é impossível abordar essa “igualdade entre frações” sem que os alunos tenham alguma noção da ideia de fração, é também impossível esperar a compreensão mais profunda do próprio conceito de fração, bem como dos algoritmos das operações entre frações, se aquela relação não tiver sido previamente absorvida (DRUCK, 1995, p. 6).

Concordando com Druck (1995), Llinares e Sánchez (1997) defendem que as noções de equivalência podem ser desenvolvidas muito precocemente, desde a abordagem inicial do conceito fração na sua relação parte-todo. O planejamento de atividades, em que frações distintas representem a mesma quantidade, seja em contextos contínuos, discretos, seja através da representação na reta numérica, contribui não só para a ampliação do domínio do conceito, mas também descreve o significado da equivalência entre frações.

> Al plantear tareas de clase en las que se desarrollan las nociones iniciales del concepto fracción, tanto en contextos contínuos, discretos, como con la recta numérica, a veces se pueden plantear situaciones en las que la relación de la parte considerada y el todo puede venir descrita mediante parejas de números distintas. Esta posibilidad amplia el ámbito de las nociones relativas a las fracciones (relación parte-todo). Estas situaciones describen el significado de la equivalencia de fracciones.[13] (LLINARES; SÁNCHEZ, 1997, p. 116).

A necessidade de avançarmos para um nível de compreensão que vá além de levar os estudantes a elaborarem listas de frações equivalentes entre si coloca a compreensão da relação de equivalência no patamar da compreensão do próprio conceito de fração. “O importante não é que os estudantes aprendam mecanicamente

---

[13] Ao propor tarefas em sala, nas quais se desenvolvam as noções iniciais do conceito de fração, tanto em contextos contínuos, discretos, como na reta numérica, às vezes se podem mostrar situações nas quais a relação entre a parte considerada e o todo possa vir descrita por pares de números distintos. Esta possibilidade amplia o âmbito de noções relativas às frações (relação parte-todo). Estas situações descrevem o significado da equivalência entre frações. (LLINARES; SÁNCHEZ, 1997, p. 116, tradução nossa).

as várias sequências de frações equivalentes [...] Eles precisam é não ter dúvidas sobre o significado concreto daquelas igualdades” (DRUCK, 1995, p. 6).

Explorar desigualdades através de situações de comparação que visem o estabelecimento de relações entre partes de tamanhos diferentes pode corroborar na construção da igualdade. Os percursos na construção de relações de desigualdade entre frações pelos estudantes podem contribuir para melhor compreensão do conceito de equivalência entre frações.

> Observemos que a compreensão da equivalência entre frações reforça, retoma e mesmo esclarece a própria ideia de fração. Neste contexto é sempre importante serem trabalhadas desigualdades entre frações, pois problemas deste tipo deixam mais clara a necessidade do emprego de frações equivalentes (DRUCK, 1995, p. 6).

A partir do problema “Mamãe fez um bolo, João comeu $\frac{4}{15}$, Mário comeu $\frac{3}{10}$ e Alexandre comeu $\frac{2}{5}$ do mesmo bolo. Quem comeu mais bolo?”; a autora ilustra, através de uma situação hipotética de diálogo entre estudantes, como problemas que abordam a desigualdade podem suscitar discussões que evoquem a igualdade, desde que, em sala de aula, sejam estimuladas situações favoráveis ao debate:

> A1 – Alexandre comeu 2 pedaços, Mário 3 e João 4. Então João comeu mais!
> A2 – É, mas os pedaços de João eram menores de todos já que para ele o bolo foi dividido em 15 partes, para Mário em 10 e para Alexandre só em 5 partes! Precisa ver como ficam os tamanhos dos pedaços.
> A3 – Cada pedaço do Alexandre vale por 2 de Mário!
> A1 – Por que? Como?
> A3 – Ora, como é que se consegue 10 pedaços de bolo se antes o bolo já foi dividido em 5 pedaços?
> A1 – É, ..., é só cortar cada um dos 5 pedaços ao meio. E aí... é mesmo, o pedaço do Alexandre vale por 2 do Mário! Mas então o Mário precisaria ter comido 4 pedaços para comer os mesmos $\frac{2}{5}$ do Alexandre!
> A2 – Isso! Como Mário comeu só 3, ele comeu menos que o Alexandre! E o João?
> A4 – Eu estava aqui pensando outra coisa. João comeu 4 pedaços dos 15 em que o bolo foi dividido. Se tivesse comido 5, teria comido $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ do bolo. Então João comeu menos do que $\frac{1}{3}$ do bolo. Já o Alexandre comeu 2 pedaços de $\frac{1}{5}$ do bolo. Mas $\frac{1}{5}$ é maior do que $\frac{1}{6}$, já que se eu dividir o bolo em 5 pedaços iguais obtendo pedaços maiores do que dividindo em 6 pedaços iguais. Então, Alexandre comeu mais do que 2 pedaços de $\frac{1}{6}$ de bolo. Como $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, Alexandre comeu mais do que $\frac{1}{3}$ do bolo.
> A2 – Isso! Então Alexandre comeu mais do que João também! Êta comilão...
> A1 – Mas, entre o João e o Mário, quem comeu mais?
> A3 - [...] (DRUCK, 1995, p. 6-7).

Llinares e Sánchez (1997) ressaltam noções em que a relação de equivalência tem papel chave: na relação de ordem entre frações, no desenvolvimento dos algoritmos de adição e subtração de frações com denominadores diferentes e, num nível mais elevado, na conceitualização do número racional como classe de equivalência de frações. Esse conceito é entendido, segundo esses autores, como o conjunto de todas as frações que descrevem a mesma relação entre a parte considerada e o todo.

A importância da compreensão é destacada pelos autores ao afirmarem que o trabalho na escola deve objetivar, num primeiro momento, as relações de equivalência em contextos concretos, sejam eles contínuos ou discretos. Esse foco fundamenta as transposições do concreto para as formas oral, escrita e simbólica.

> [...] el trabajo em la escuela debe ir dirigido a que los niños desarrollen en un primer momento estas relaciones (la equivalencia) en contextos concretos (contínuos y discretos) potenciando la capacidad del niño de realizar traslaciones entre las representaciones concretas, así como de realizar las traslaciones a la forma oral, escrita y simbólica, [...][14] (LLINARES; SÁNCHEZ, 1997, p. 117).

3) A construção do significado das operações de adição e subtração de frações a partir da relação de equivalência entre frações

Quanto às operações de adição e subtração entre frações, Druck (1995) nos chama a atenção para uma dificuldade de ordem técnica e não conceitual. A compreensão do significado de adicionar ou subtrair não são imperativos nessa situação, uma vez que o sentido dessas operações é o mesmo para os números naturais. A questão agora, principalmente quando se trata de frações com denominadores diferentes, é a compreensão do como adicionar ou subtrair "pedaços" de tamanhos diferentes. Nesse quesito, a autora retoma a importância do domínio da equivalência entre frações pelos estudantes: "se os alunos dominam a equivalência entre frações, serão capazes de desenvolver estratégias próprias para resolver problemas que envolvam adições ou subtrações de frações" (DRUCK, 1995, p. 8).

---

[14] [...] O trabalho na escola deve ser direcionado para que as crianças desenvolvam no primeiro momento estas relações de equivalência em contextos contínuos e discretos, potenciando a capacidade da criança de realizar traduções entre as representações concretas, assim como de realizar traduções para as formas oral, escrita e simbólica, [...] (LLINARES; SÁNCHEZ, 1997, p. 117, tradução nossa).

O cuidado a ser dispensado ao fator compreensão, quando tratamos das operações de adição e subtração de frações com denominadores diferentes, pode ser ilustrado pela afirmação: “pouco adianta fazer os alunos decorarem uma regra que não compreendem e que, talvez por isso, tenham dificuldades em repeti-la, como observamos até mesmo com alguns alunos nas séries finais do Ensino Fundamental” (BITTAR; FREITAS, 2005, p. 172). A afirmação sinaliza a necessidade de propiciar aos estudantes atividades que favoreçam a aquisição de habilidades operatórias. Um meio para alcançar esse objetivo seria propor a eles que discutam formas para se obter frações equivalentes de mesmos denominadores que possam ser adicionadas ou subtraídas.

Muito embora, no Ensino Médio, não se tenha como objetivos a introdução, o desenvolvimento ou a consolidação do conceito de fração, da relação de equivalência entre frações e das operações de adição e subtração entre frações, concordamos com Druck (1995) quanto à sua relevância na compreensão conceitual e operatória envolvendo números racionais na forma fracionária.

Na próxima subseção, embasados nas ideias de Onuchic e Allevato (2008; 2011) e de Ponte (2003; 2014), procuramos discutir aspectos de confluência entre as metodologias apoiadas na resolução de problemas e no uso de atividades investigativas. Essas metodologias influenciaram a conformação do conjunto de atividades que compõe o recurso educacional produzido pela pesquisa.

2.2.2 *O problema como fator mobilizador de práticas investigativas*

O ensino da Matemática deve privilegiar a construção de significados pelos estudantes e não ceder ao trabalho pautado na técnica e na prática. As atividades devem ser planejadas visando atingir esse objetivo. Como orientação para a área de Matemática e suas Tecnologias, a BNCC assinala para o Ensino Médio:

> Para que esses propósitos se concretizem nessa área, os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados (BRASIL, 2018, p. 529).

O desafiador objetivo de levar os estudantes a “fazerem Matemática”, distante da realidade que experienciamos enquanto discentes, representa um dos propósitos da Educação Matemática enquanto área de pesquisa e campo disciplinar emergentes. As salas de aula de Matemática podem se constituir como espaços mais democráticos, que tornem a disciplina mais acessível e, principalmente, mais promissora aos estudantes. Abordagens que coloquem os estudantes num lugar de centralidade em relação ao seu processo de aprendizagem se configuram como uma construção necessária. Segundo Van de Walle (2001) *apud* Onuchic e Allevato (2008):

> Professores de matemática devem envolver, em seu trabalho, quatro componentes básicos: (1) a valorização da disciplina Matemática em si mesma - o que significa “fazer matemática”; (2) a compreensão da forma como os estudantes aprendem e constroem ideias; (3) a habilidade em planejar e selecionar tarefas de modo que os estudantes aprendam matemática num ambiente de resolução de problemas; (4) a habilidade em integrar a avaliação ao processo de ensino para aumentar a aprendizagem, aprimorando-o no dia-a-dia num ambiente de resolução de problemas (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 82).

As recomendações do *National Council of Teachers of Mathematics* (1980) estabeleceram orientações que vêm influenciando reestruturações curriculares e consolidando a Educação Matemática enquanto campo de pesquisa e área em crescente discussão no cenário mundial. Os investimentos na busca por uma aprendizagem mais significativa estabelecem diretrizes para o uso de metodologias que favoreçam o desenvolvimento da autonomia e da autoria dos estudantes em relação ao conhecimento matemático:

> As orientações curriculares atuais para a disciplina de Matemática a nível internacional estabelecem objetivos ambiciosos para a aprendizagem dos alunos, colocando desafios significativos à prática profissional dos professores. Na verdade, pretende-se que os alunos não só aprendam conceitos, representações e procedimentos matemáticos, mas sejam capazes de os usar para resolver uma grande variedade de problemas. Pretende-se, também, que sejam capazes de raciocinar matematicamente e de comunicar os seus raciocínios ao mesmo tempo que desenvolvem uma apreciação geral da Matemática como modo de pensar, de interpretar a realidade e de intervir sobre ela (PONTE, 2014, p. 5).

Dentre os princípios estabelecidos por esse conselho (1991/1994) para a proposição de tarefas matemáticas aos estudantes, estão a importância de “envolver os alunos em atividades intelectuais e de exigir a formulação e a resolução de problemas e o raciocínio matemático” (PONTE, 2014, p. 17). O potencial da

Matemática em possibilitar aos estudantes oportunidades de descoberta é reafirmado pelas recomendações de Hiebert e Behr (1991) *apud* Onuchic e Allevato (2008):

> (a) o ensino deveria ser mais orientado para o significado do que para o símbolo; (b) em lugar de se colocar o conhecimento como um pacote pronto e acabado o ensino deveria encorajar os alunos a construírem seu próprio conhecimento (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 82).

Nessa perspectiva, as metodologias de ensino baseadas na resolução de problemas e na investigação matemática emergem como importantes ferramentas para promover o protagonismo dos estudantes.

Onuchic e Allevato (2011) localizam historicamente a pesquisa sobre a Resolução de Problemas[15] como uma forma de ensinar Matemática, a partir da sua origem em Polya (1944), considerado o pai da Resolução de Problemas. Essa origem se insere num período em que, de acordo com Lambdin e Walcott (2007) *apud* Onuchic e Allevato (2011), a ênfase do ensino de Matemática era colocada na aritmética significativa. A ocorrência de cisão nessas ideias, causada pelo movimento de reforma chamado Matemática Moderna, é exposta pelas autoras:

> Com as mudanças no ensino da Matemática trazidas pelo movimento de reforma chamado Matemática Moderna, vigente nos anos sessenta e setenta do século XX, o mundo foi influenciado por recomendações de ensinar Matemática apoiada em estruturas lógica, algébrica, topológica e de ordem, enfatizando a teoria dos conjuntos. O tratamento excessivamente abstrato, o despreparo dos professores para este trabalho, assim como a falta de participação dos pais de alunos, nesse movimento, fadou-o ao fracasso (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 78).

E os movimentos em defesa da resolução de problemas como uma forma de estimular a compreensão dos estudantes continuaram na década de 80.

> Exatamente em 1980, o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) publica um documento intitulado *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics in the 1980's*, com a indicação de que a “resolução de problemas deve ser o foco da matemática escolar” (ONUCHIC, 1999, p. 204, *apud* ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 78).

De acordo com Onuchic e Allevato (2011), iniciava-se a fase da Resolução de Problemas, cujas ideias apoiavam-se, especialmente, nos fundamentos do

[15] As autoras usam *Resolução de Problemas* para se referirem à disciplina ou à teoria, e *resolução de problemas* para se referirem ao ato de resolver problemas.

construtivismo e na teoria sociocultural, que tem Vygotsky como principal teórico. Apesar de o foco estar voltado para a aprendizagem por descoberta e de haver grande quantidade de material produzido, faltava acordo sobre como desenvolver esse trabalho e avaliar os estudantes. Havia interpretações que caminhavam no sentido de ensinar o conteúdo para os estudantes os aplicarem com a finalidade de resolver problemas.

> Entretanto, não havia coerência e clareza na direção necessária para se atingir bons resultados com o ensino de Matemática apoiado na resolução de problemas; ou seja, não havia concordância quanto à forma pela qual esse objetivo seria alcançado (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 78).

A partir de pesquisas e produções científicas, as autoras localizam nos movimentos do NCTM, nas décadas de 80 e 90, a emergência da metodologia de ensino-aprendizagem da Matemática fundada na resolução de problemas. Essa metodologia teve os Standards 2000 como marco de origem:

> Foi, de fato, a partir dos Standards 2000 que os educadores matemáticos passaram a pensar numa metodologia de ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. Nessa concepção, o problema é visto como ponto de partida para a construção de novos conceitos e novos conteúdos; os alunos sendo co-construtores de seu próprio conhecimento e, os professores, os responsáveis por conduzir esse processo (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 79-80).

Para Van de Walle (2001) *apud* Onuchic e Allevato (2011), um problema pode ser definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual não se tenha métodos específicos e regras prescritas, ou até mesmo memorizadas, para se chegar à solução correta. Essa referência para atividades em sala de aula impõe mudanças de parâmetros para o fazer do professor. Para Onuchic e Allevato (2011), o problema proposto como gerador de novos conceitos é propício à construção de conhecimentos matemáticos.

> O professor precisa preparar, ou escolher, problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito que pretende construir. Precisa deixar de ser o centro das atividades, passando para os alunos a maior responsabilidade pela aprendizagem que pretendem atingir. Os alunos, por sua vez, devem entender e assumir essa responsabilidade. Esse ato exige de ambos, portanto, mudanças de atitude e postura, o que, nem sempre, é fácil conseguir (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 82).

Ao considerarmos esse indicativo de mudança de atitude e de postura em relação ao processo ensino-aprendizagem, estamos trazendo à discussão o novo paradigma para o ensino da Matemática. O termo “novo” foi empregado por refletir as mudanças iniciadas na década de 80 e todos os crescentes investimentos da Educação Matemática como campo de estudos. Esses investimentos são pautados em questões relacionadas ao modo de ensinar, aprender e avaliar como focos das pesquisas na área e envolvem outras áreas do conhecimento.

> Desta miríade de elementos surgem muitas questões e a necessidade de buscar em outras áreas, por exemplo, a Sociologia, a Filosofia e a Pedagogia, subsídios para a condução de investigações que tragam possíveis respostas às questões. Quando as perspectivas de cada uma dessas áreas são trazidas para a Educação Matemática, esta produz seus próprios conjuntos de conceitos, métodos e procedimentos. A Educação Matemática constitui-se, então, em um rico campo de estudos, a partir do qual inúmeras questões podem ser levantadas, conjeturas podem ser elaboradas e investigações podem ser, então, conduzidas. Assim, a compreensão das possíveis perspectivas e de seus princípios é fundamental na condução de investigações (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 88).

Resultados de pesquisas em Educação Matemática, frutos das experiências da sala de aula e voltados para a melhoria do processo ensino-aprendizagem, apontam para a importância de fazer dos conhecimentos matemáticos objetos de construção e criação. A proposição de problemas aos estudantes pode configurar estratégia de ensino orientada segundo essa concepção e abrir possibilidades para investigações em sala de aula. Segundo Ponte (2003), numa perspectiva mais geral, as noções *investigar* e *resolver problemas* apresentam aspectos de confluência:

> [...] na minha perspectiva, “investigar” não é mais do que procurar conhecer, procurar compreender, procurar encontrar soluções para os problemas com que nos deparamos. Trata-se de uma capacidade de primeira importância para todos os cidadãos e que deveria permear todo o trabalho da escola, tanto dos professores como dos alunos (PONTE, 2003, p. 2).

Alinhando essa compreensão a um ensino de Matemática comprometido com a aprendizagem e a formação cidadã, Ponte (2003) complementa:

> Para mim, o que está em causa na aprendizagem escolar da Matemática, é o desenvolvimento integrado e harmonioso de um conjunto de competências e capacidades, que envolvem conhecimento de factos específicos, domínio de processos, mas também capacidade de raciocínio e de usar esses conhecimentos e processos em situações concretas, resolvendo problemas, empregando ideias e conceitos matemáticos para lidar com situações das mais diversas, de modo crítico e reflexivo (PONTE, 2003, p. 3).

O propósito de privilegiar a centralidade dos estudantes em seu processo de aprendizagem, importante aspecto a ser considerado no trabalho em sala de aula, influenciou a elaboração do conjunto de atividades produzidas pela pesquisa.

Na seção a seguir, discutimos os principais motivos que contribuíram na escolha da função polinomial de 1º grau como assunto ao qual vinculamos as atividades da pesquisa. Esses motivos estão associados, fundamentalmente, ao período previsto no currículo para o seu desenvolvimento e à característica relacional que possui.

2.2.3 *A abordagem do número racional na forma fracionária durante o estudo da função polinomial de 1º grau*

O objetivo de favorecer o desenvolvimento da capacidade operatória com números racionais na forma fracionária, em situações de estudo envolvendo assuntos previstos no currículo do Ensino Médio, exigiu que considerássemos a importância de propormos uma ação direcionada à etapa inicial, o 1º ano. São significativos os desafios que as escolas estaduais do município de Belo Horizonte enfrentam nessa série.

A LDB[16] (1996), consideradas alterações após sua publicação, prevê em seu artigo 4, inciso I, Educação Básica obrigatória e gratuita dos 4 (quatro) aos 17 (dezessete) anos de idade. O artigo 10, inciso VI, dessa lei estabelece que os estados federativos deverão assegurar o Ensino Fundamental e oferecer, com prioridade, o Ensino Médio a todos que o demandarem. O artigo 11, inciso V, atribui aos municípios a responsabilidade de oferecer a educação infantil em creches e pré-escolas, e com prioridade, o Ensino Fundamental. Aos municípios é vedado o atendimento fora da sua área de competência, exceto se estiverem atendidas plenamente as necessidades de sua área e com recursos acima dos percentuais mínimos vinculados pela Constituição Federal à manutenção e desenvolvimento do ensino.

O estado de Minas Gerais, o município de Belo Horizonte e os demais municípios pertencentes à região metropolitana foram se adequando,

[16] Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Estabelece a normatização que rege o funcionamento da educação no país. Em seu artigo 1º, parágrafo 1º, estabelece que a referida lei disciplina a educação escolar, que se desenvolve, predominantemente, por meio do ensino, em instituições próprias.

progressivamente, a essa orientação legal de modo que, hoje em dia, o atendimento ao Ensino Médio fica a cargo das escolas estaduais.

Essa organização, aliada ao direito que os concluintes do Ensino Fundamental têm de escolher onde cursar o Ensino Médio, leva as escolas estaduais a receberem estudantes de diferentes regiões e, portanto, constituírem um público marcado pela diversidade na formação e nas demandas de aprendizagem. Em contrapartida, o tempo de atuação para atendimento às necessidades estudantis é curto, quando consideramos o período de três anos para a conclusão dessa etapa de ensino. Levando em conta esse cenário, passamos a avaliar a qual assunto do currículo vincularíamos a pesquisa.

Os números racionais em sua forma fracionária e as operações com esses números são utilizados, muito frequentemente, em vários assuntos que integram o programa de Matemática do Ensino Médio. Influenciados por esse contexto, avaliamos as alternativas e optamos por considerar o potencial das relações expressas na função polinomial de 1º grau, campo fértil aos objetivos e às ações do estudo.

O Conteúdo Básico Comum (CBC)[17] da área de Matemática, orientação curricular vigente entre 2005 e 2021 no Ensino Médio das escolas estaduais de Minas Gerais, prevê o estudo da função polinomial de 1º grau no 1º ano. Na escola em que a autora pesquisadora atua, esse assunto é estudado no primeiro bimestre letivo. Essa referência temporal também influenciou a definição do tema, por acreditarmos que um trabalho na fase inicial dos estudos seria mais conveniente.

A característica relacional expressa nas funções, para além da relação algébrica que possui, foi determinante na escolha que fizemos. Para Abreu (2011), diversas são as situações que incidem nas relações de correspondência e associação compreendidas através das funções matemáticas (ABREU, 2011, p. 17). Além do mais, a função polinomial de 1º grau, assim como outras funções matemáticas, possui uma vasta aplicação em diversas áreas do conhecimento e da ciência por corresponder a modelo linear representativo de inúmeras situações da vida cotidiana. O uso de alguns desses modelos nos pareceu pertinente para oportunizar aos estudantes explorações a partir de uma variedade de situações, incentivando-os a

[17] Proposta Curricular implementada nas escolas estaduais de Minas Gerais no ano de 2005 e que vigorou até 2021, no Ensino Médio. Estabelece os conteúdos básicos comuns a serem ensinados nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

aliar conhecimentos sobre funções a conceitos e operações com números racionais na forma fracionária.

Uma primeira avaliação sobre a viabilidade do uso desse assunto surgiu da experiência vivenciada durante o estudo exploratório, relatado no capítulo a seguir. Algumas das atividades referentes ao estudo da função polinomial de 1º grau reuniram objetivos ligados ao desenvolvimento conceitual e operatório com números racionais na forma fracionária. A experiência desenvolvida na etapa exploratória, apesar de tímida, nos sinalizou essa possibilidade.

Dentre as habilidades previstas na BNCC (2018), para o estudo da função polinomial de 1° grau, destacamos aquelas nas quais se referenciaram, integral ou parcialmente, as atividades de pesquisa:

> EF07MA16 Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes (BRASIL, 2018, p. 307);
>
> EF09MA06 Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis (BRASIL, 2018, p. 317);
>
> EM13MAT302 Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos (BRASIL, 2018, p. 536);
>
> EM13MAT401 Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica (BRASIL, 2018, p. 539);
>
> EM13MAT501 Investigar relações entre números expressos em tabelas e representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para expressar algebricamente a generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau (BRASIL, 2018, p. 541);
>
> EM13MAT506 Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas (BRASIL, 2018, p. 541);
>
> EM13MAT507 Identificar e associar progressões aritméticas a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas (BRASIL, 2018, p. 541).

Quanto às habilidades relacionadas ao desenvolvimento do conceito de fração e das operações com frações, indicadas para o Ensino Fundamental e consideradas neste trabalho, destacamos aquelas que mais diretamente foram objetivadas pelas atividades e nas quais se referenciaram, parcial ou integralmente:

> EF05MA03 Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso (BRASIL, 2018, p. 295);
>
> EF05MA04 Identificar frações equivalentes (BRASIL, 2018, p. 295);
>
> EF06MA07 Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes (BRASIL, 2018, p. 301);
>
> EF06MA08 Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica (BRASIL, 2018, p. 301);
>
> EF06MA09 Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora (BRASIL, 2018, p. 301);
>
> EF06MA10 Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária (BRASIL, 2018, p. 301);
>
> EF07MA08 Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador (BRASIL, 2018, p. 307).

As atividades apresentam objetivos que tangenciam as habilidades destacadas. A orientação metodológica para o seu desenvolvimento também está apoiada na BNCC (2018):

> É necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática. Embora todos esses processos pressuponham o raciocínio matemático, em muitas situações são também mobilizadas habilidades relativas à representação e à comunicação para expressar as generalizações, bem como à construção de uma argumentação consistente para justificar o raciocínio utilizado (BRASIL, 2018, p. 529).

Os modelos utilizados envolveram coeficiente angular fracionário, a ideia de proporcionalidade direta, sequências representativas de progressões aritméticas, a relação de equivalência entre frações na determinação da igualdade entre funções e o comportamento do gráfico da função polinomial de 1º grau.

No próximo capítulo, relatamos nosso percurso na construção da metodologia que fundamentou as ações da pesquisa e também a elaboração e a análise do conjunto de atividades que ela produziu.

3 PERCURSO METODOLÓGICO

Nosso estudo apresenta natureza qualitativa. Suas questões possuem estreita relação com a sala de aula, os seus sujeitos e os processos que ali se desenvolvem. Para Silva e Menezes (2005):

> A interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicas no processo de pesquisa qualitativa. Não requer o uso de métodos e técnicas estatísticas. O ambiente natural é a fonte direta para coleta de dados e o pesquisador é o instrumento-chave. É descritiva. Os pesquisadores tendem a analisar seus dados indutivamente. O processo e seu significado são os focos principais de abordagem (SILVA; MENEZES, 2005, p. 20).

Buscando identificar fatores que possam estar por trás das dificuldades na compreensão de conceitos e operações, envolvendo a forma fracionária dos números racionais no Ensino Médio, e embasar outras ações da pesquisa, optamos pela realização de um estudo exploratório inicial, desenvolvido pela pesquisadora na escola em que atua.

Esse contato preliminar com o campo objetivou estabelecer uma relação mais próxima com os estudantes e levantar suas dúvidas em relação ao tema de pesquisa, buscando identificar como e em que situações elas apareciam. Em linhas gerais, a sua finalidade era auxiliar na conformação das questões de investigação, introduzir atividades que pudessem ser adaptadas ou modificadas para compor o recurso educativo e orientar o desenho metodológico da pesquisa. Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (1999) validam esse procedimento nas pesquisas qualitativas:

> Essa fase exploratória permite que o pesquisador, sem descer ao detalhamento exigido na pesquisa tradicional, defina pelo menos algumas questões iniciais, bem como os procedimentos adequados à investigação dessas questões (Alves-Mazzotti; Gewandsznajder, 1999, p. 148).

Segundo ANPEd (2019), investigações envolvendo a própria prática podem apresentar as seguintes implicações para a pesquisa em educação:

> Permite a explicitação de estratégias individuais e coletivas de formação em serviço e formação continuada, com caráter formal e/ou informal, de modo a ampliar o repertório do campo sobre o entrelaçamento dos estudos sobre Educação aos sobre Trabalho, seja ele no setor da Educação ou em outras atividades profissionais. Esse tipo de investigação promove, ainda, a atitude reflexiva no trabalhador, fomenta o exercício da autoavaliação, aprimora a prática profissional e estimula a identificação e a solução de problemas no ambiente de trabalho, com potencial para extrapolar o estudo de caso e

> tornar-se experiência piloto a ser replicada ou suscitar políticas públicas (ANPEd, 2019, p. 43).

Nas duas seções a seguir, detalhamos o nosso percurso na construção da pesquisa. Primeiramente, apresentamos o estudo exploratório preliminar e, na sequência, o processo de estruturação do conjunto de atividades e de seus objetivos.

3.1 A conformação do estudo preliminar

Nesta seção, organizada em quatro tópicos, buscamos caracterizar o ambiente em que o estudo exploratório ocorreu; relatar a sua estrutura, os sujeitos envolvidos e as condições em que foi desenvolvido; apresentar as atividades aplicadas e discutir suas principais contribuições na elaboração do conjunto de atividades produzidas pela pesquisa.

3.1.1 *Caracterização do ambiente do estudo exploratório*

A escola de realização do estudo exploratório se localiza em Belo Horizonte, na divisa com o município de Ribeirão das Neves, atendendo estudantes dos dois municípios. Funciona em três turnos e oferece o Ensino Médio regular, com duração de três anos, e o Ensino Médio na modalidade Educação de Jovens e Adultos (EJA), com duração de um ano e meio, organizado em três períodos semestrais. O número de turmas, em média, é 12 (doze), no primeiro turno, 07 (sete), no segundo turno, e 11 (onze), no noturno.

As salas de aula são amplas e as demais áreas do espaço físico também. O prédio possui um auditório, com capacidade média para 100 pessoas, sem cadeiras fixas, já que é bastante usado como espaço multimídia. A sala de informática apresenta capacidade para atender uma turma por vez, com dois estudantes por computador. A cantina conta com espaço para refeitório. Na área externa, há um pátio aberto, uma quadra descoberta, área para estacionamento, um pequeno jardim na entrada e outro vertical. As dependências e o mobiliário são bem cuidados e quase não apresentam problemas em relação ao desgaste do uso cotidiano. Há uma quadra coberta que se localiza num lote vizinho, incorporado à escola e separado dela por uma rua. Como a rua é usada para trânsito local, não foi autorizada a sua desativação. Essa situação traz algumas dificuldades relacionadas ao acesso à quadra, pois exige uma logística para o deslocamento dos estudantes, de forma a zelar pela sua segurança.

A escola possui projetos pedagógicos coletivos consolidados e desenvolvidos nos três turnos há alguns anos. Dentre eles, destacamos *Consciência Negra*, *Projeto de Reciclagem e Educação Ambiental*, *Feira de Espanhol*, *Intervenção Pedagógica em Matemática (PIP)*, *Redação* e *Sala Limpa*.

O quadro de professores apresenta pouca rotatividade, já que é grande o número de servidores efetivos. Esse fato tem contribuído na organização do trabalho e na consolidação de projetos coletivos.

3.1.2 *Estrutura do estudo exploratório*

No final do mês de setembro de 2019, a pesquisadora foi convidada pela direção da Escola em que atua a assumir as aulas de reforço em Matemática. Essas aulas seriam destinadas a estudantes de 1º e 3º anos do Ensino Médio com aproveitamento inferior a 60% no somatório de notas dos dois primeiros bimestres letivos.

O Reforço Escolar para Fortalecimento das Aprendizagens foi parte do conjunto de ações implementadas, naquele ano, pela Secretaria Estadual de Educação nas escolas estaduais de Minas Gerais. Um dos princípios para essa ação estabelecia que as estratégias de ensino estivessem fundamentadas em metodologias ativas[18]. Aceitamos a proposta por considerar uma oportunidade para realizarmos o estudo exploratório com estudantes do 1º ano, dentro de uma orientação que dialogava com os propósitos da pesquisa.

Foram formadas duas turmas, uma de 1º e outra de 3º ano. As aulas aconteceram no período de 24/09/2019 a 29/11/2019, de terça a sexta-feira. O módulo/aula teve duração de 50 minutos (11:40h às 12:30h).

A turma de 1º ano, participante do reforço escolar e também do estudo exploratório, teve aulas às terças e quintas-feiras. No princípio, houve a adesão de dezenove estudantes (11 homens e 8 mulheres), devidamente autorizados por seus

[18] O Caderno de Orientações Metodológicas, Reforço Escolar para Fortalecimento das Aprendizagens, traz, na página 9, o conceito: Metodologias ativas são estratégias de ensino centradas na participação efetiva dos estudantes na construção do processo de aprendizagem, de forma flexível, interligada, híbrida (MORAN, 2017, p. 24).

pais ou responsáveis a participarem da iniciativa. No decorrer do atendimento, dois estudantes deixaram de participar. Um deles demonstrou um bom desempenho nas atividades, levando-nos a acreditar que o seu baixo rendimento em Matemática havia sido motivado pelo grande número de faltas no primeiro semestre letivo. A turma se manteve, então, com dezessete estudantes (9 homens e 8 mulheres), apresentando frequência regular durante todo o período e média de quatorze participantes por aula.

Os temas trabalhados foram definidos de acordo com as sugestões apresentadas pelos professores de Matemática, regentes das turmas, e com as demandas apresentadas pelos estudantes na primeira aula. Dentre eles, destacamos aqueles abordados nas atividades destinadas ao estudo exploratório: divisão de números naturais, operações com números racionais, perímetro e área do retângulo e do quadrado, expressões algébricas e função polinomial de 1º grau.

As atividades foram realizadas em quatro grupos de três a cinco participantes. Os estudantes se reuniram, espontaneamente, em agrupamentos por turma de origem. No início da aula, a pesquisadora orientava a atividade, entregando-a aos grupos para discussão e resolução das questões e/ou dos problemas propostos. Também acompanhava a turma, fazendo questionamentos e provocações a fim de estimular a realização da tarefa e favorecer o levantamento de dúvidas.

Observações sobre a forma como os estudantes organizaram suas respostas foram registradas pela pesquisadora, por escrito, durante ou após a aula. Não foi possível registrar todas as etapas do processo de elaboração dos grupos, porque o trabalho não foi gravado. Com a finalidade de auxiliar nos registros, as atividades foram recolhidas pela pesquisadora ao final de cada aula e devolvidas na aula seguinte.

Apresentamos, a seguir, as nove atividades desenvolvidas, as observações sobre sua realização e a discussão de aspectos relacionados à elaboração e à orientação, ao não atendimento aos objetivos propostos e aos pontos de distanciamento e de diálogo com os interesses do estudo. Retiramos os dados da escola do cabeçalho para resguardar sua identidade.

3.1.3 *Apresentação e discussão das atividades do estudo exploratório*

Na apresentação, destacamos os temas e os objetivos propostos para as atividades. Na discussão, apontamos tendências e hipóteses relativas a dúvidas e construções realizadas pelos alunos e também a aspectos que mais influenciaram na elaboração do recurso educativo.

Os quadros de 5 a 12 trazem as observações relacionadas à realização das atividades. Nossas avaliações sobre pontos positivos e problemas envolvendo a sua elaboração e/ou o seu desenvolvimento são comentadas abaixo de cada um desses quadros.

3.1.3.1 Atividades (1 e 2)[19]

Tema: divisão de um número natural, diferente de zero, por 11 e por 111.

Objetivos:

1) reconhecer fração como uma das representações do quociente de uma divisão de números naturais;

2) encontrar regularidades no período de dízimas periódicas.

ATIVIDADE DE MATEMÁTICA		
REFERENTE À INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA - 1° ANO DO ENSINO MÉDIO		
Componente Curricular: Matemática	**Profª.: Graça**	
Estudante:	**Turma:**	**Data: 24/09/2019**
ATIVIDADE 1 **Toda fração indica uma divisão. Façam as divisões indicadas e determinem o período das dízimas representadas pelas frações:** $\frac{3}{11}$ $\frac{9}{11}$ $\frac{18}{11}$ $\frac{47}{11}$ $\frac{52}{11}$ $\frac{125}{11}$ **Agora respondam:** 1) Que tipo de período se obtém quando dividimos um número inteiro por 11? 2) Será possível, sem efetuar a divisão, indicar o período da dízima correspondente a qualquer fração de denominador 11? Investiguem e apresentem suas observações.		

[19] Adaptadas de atividades elaboradas e experimentadas por uma equipe do projeto “Explorar e Investigar para Aprender Matemática”, desenvolvido no âmbito do Centro de Investigação em Educação, da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e financiado pela fundação para a Ciência e a Tecnologia sob contrato PCSH/C/CED/920/95. As atividades nos foram disponibilizadas pela professora Dra Keli Cristina Conti.

ATIVIDADE DE MATEMÁTICA		
REFERENTE À INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA - 1° ANO DO ENSINO MÉDIO		
Componente Curricular: Matemática		**Profª.: Graça**
Estudante:	**Turma:**	**Data: 01/10/2019**
ATIVIDADE 2 **Toda fração indica uma divisão. Façam as divisões indicadas e determinem o período das dízimas representadas pelas frações:** $\frac{3}{111}$ $\frac{85}{111}$ $\frac{125}{111}$ **Agora respondam:** Que tipo de período se obtém quando dividimos um número inteiro por 111?		

Quadro 5 – Observações relativas às atividades 1 e 2 do estudo exploratório

Característica	Observações	Tendências/Hipóteses
Atividades investigativas	A orientação das atividades comunicou a ideia de divisão expressa pelas frações, limitando o reconhecimento de fração como representação de uma divisão.	Maior facilidade na execução das divisões após a descoberta da regularidade no período das dízimas periódicas.

Fonte: acervo da autora pesquisadora, 2021.

As atividades foram mais relevantes em relação ao objetivo 2, não trazendo contribuições no sentido de provocar construções relacionadas à ideia de divisão expressa pelas frações. A afirmação “Toda fração indica uma divisão”, contida no seu enunciado, apresentou a noção aos alunos, prejudicando o alcance do objetivo 1.

3.1.3.2 Atividade 3

Temas: área e perímetro do retângulo e do quadrado, expressões algébricas e operações com números racionais.

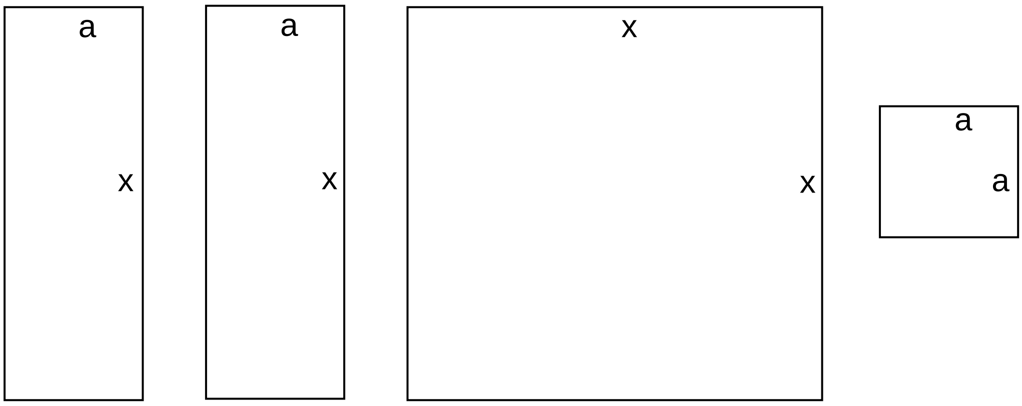
Objetivos:

1) representar o perímetro e a área de um quadrado e de um retângulo, através de expressões algébricas;
2) calcular o valor numérico de expressões algébricas;
3) realizar a adição entre um número natural e um número fracionário;
4) determinar o quadrado de um número fracionário;
5) realizar a multiplicação de um número natural por um número fracionário.

ATIVIDADE DE MATEMÁTICA		
REFERENTE À INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA - 1° ANO DO ENSINO MÉDIO		
Componente Curricular: Matemática	**Prof^a.: Graça**	
Estudante:	**Turma:**	**Data: 03/10/2019**

Atividade 3

(Adaptada)[20] Vocês receberão dois retângulos e dois quadrados como os das figuras a seguir. Usando as quatro peças, formem um único quadrado e colem-no no espaço abaixo das figuras.



Agora respondam:

a) Qual é a expressão algébrica que indica a área de cada uma das peças?

b) Qual é a expressão algébrica que indica a área do quadrado que vocês formaram?

c) Considerando a = 2 cm e x = $\frac{5}{3}$ cm, calculem o valor da área do quadrado que vocês formaram.

d) Qual é a expressão algébrica que indica o perímetro do quadrado que vocês formaram?

e) Considerando a = 2 cm e x = $\frac{5}{3}$ cm, calculem o valor do perímetro do quadrado que vocês formaram.

Quadro 6 – Observações relativas à atividade 3 do estudo exploratório

Característica	Observações	Tendências/Hipóteses
Atividade investigativa	- Os alunos não resolveram corretamente a maior parte das operações com números fracionários. Todos os grupos demandaram orientação para sua realização. - Houve envolvimento e relativa facilidade na estruturação das expressões algébricas. Entretanto, não realizaram a sua simplificação.	- A adição $\frac{20}{3}+8$ resultou $\frac{28}{3}$. - Ao elevar o número fracionário ao quadrado, operaram apenas com o numerador; outro grupo resolveu assim: $\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{10}{6}$. - Êxito de dois grupos na multiplicação de um número natural por um número fracionário. - Registro, pelos grupos, de uma regra para adicionar $\frac{20}{3}+8$.

Fonte: acervo da autora pesquisadora, 2021.

[20] MONTEIRO, Eliziê Frans de Castro. *Estudo de expressões algébricas*. Atividade de sala de aula. Educação Básica. Colégio Santa Marcelina, Belo Horizonte, 2011. Impresso.

Diante das demandas dos alunos e das exigências do reforço escolar como espaço para esclarecimentos das suas dúvidas, as intervenções da pesquisadora, no sentido de levá-los a relembrarem as regras para realizarem as operações envolvendo os números fracionários, limitaram construções que avançassem para além da rememoração de regras.

3.1.3.3 Atividade 4

Tema: adição e subtração de números racionais.

Objetivos:

1) realizar a adição entre um número natural e um número fracionário;
2) realizar operações de adição e subtração envolvendo um número natural e dois números fracionários com denominadores diferentes;
3) identificar a relação de equivalência entre frações.

<table>
<tr><td colspan="3" align="center">ATIVIDADE DE MATEMÁTICA</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">REFERENTE À INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA - 1° ANO DO ENSINO MÉDIO</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">Componente Curricular: Matemática   Profª.: Graça</td></tr>
<tr><td>Estudante:</td><td>Turma:</td><td>Data: 08/10/2019</td></tr>
<tr><td colspan="3">
Neste espaço, a pesquisadora reproduziu a regra para realizar a adição de frações, elaborada por cada um dos grupos na aula do dia 03/10.
ATIVIDADE 4
Usando a regra construída pelo grupo na aula anterior, efetuem as operações com frações. Simplifiquem os resultados, se possível:
a) $\frac{3}{4} + 1 =$
b) $\frac{3}{4} + 2 =$
c) $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} =$
d) $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1 =$
e) $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 2 =$
f) $5 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$
g) $5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} =$
h) $5 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$
Por que vocês tiram o mínimo múltiplo comum dos denominadores?
O que vocês podem observar em cada uma das frações reduzidas ao mesmo denominador, quando as comparam com as frações que as originaram?
</td></tr>
</table>

Quadro 7 – Observações relativas à atividade 4 do estudo exploratório

Característica	Observações	Tendências/Hipóteses
Atividade voltada para aplicação da regra elaborada na atividade 3.	- Maior autonomia dos alunos na realização da adição entre um número natural e um fracionário. - Solicitaram ajuda nos exercícios que envolveram dois números fracionários com denominadores diferentes.	Necessidade de reformulação da regra construída na atividade 3, para atender a adição e a subtração de números fracionários com denominadores diferentes.

Fonte: acervo da autora pesquisadora, 2021.

A questão “Por que vocês tiram o mínimo múltiplo comum dos denominadores?” reforçou a tendência em recorrer ao uso de uma regra para adicionar e subtrair frações, limitando outras explicações dos alunos. Esse equívoco foi evidenciado por uma das respostas à pergunta “eu usei os múltiplos”.

A questão “O que vocês podem observar em cada uma das frações reduzidas ao mesmo denominador quando as comparam com as frações que as originaram?” não atingiu o objetivo de levar os alunos a conclusões relacionadas à equivalência das frações. Não houve nenhuma iniciativa que apontasse para o reconhecimento de diferentes representações para um mesmo número fracionário. A pergunta não foi compreendida pelos alunos e não contribuiu no alcance do objetivo 3.

O objetivo 1 foi mais favorecido pela atividade, uma vez que a consulta à regra conferiu maior autonomia aos alunos.

Avaliamos que houve um salto entre os objetivos “realizar a adição entre um número natural e um número fracionário”, proposto na atividade 3, e “realizar operações de adição e subtração envolvendo um número natural e dois números fracionários com denominadores diferentes”, proposto na atividade 4. A regra criada para a atividade 3 não se aplicou a todos os exercícios da 4.

3.1.3.4 Atividade 5

Tema: relação de equivalência entre frações.

Objetivos:

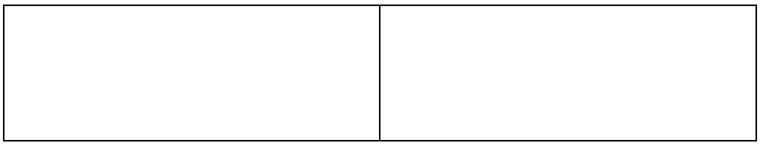
1) identificar a relação de equivalência entre as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{4}{8}$;

2) reconhecer diferentes frações para representar uma mesma área.

ATIVIDADE DE MATEMÁTICA		
REFERENTE À INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA - 1° ANO DO ENSINO MÉDIO		
Componente Curricular: Matemática	**Prof^{a}.: Graça**	
Estudante:	**Turma:**	**Data: 10/10/2019**

ATIVIDADE 5

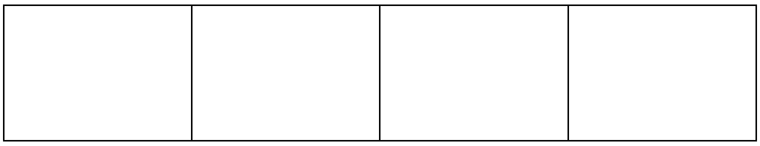
01. Pinte uma das partes em que o retângulo foi dividido e responda:



Que fração do retângulo inteiro representa a parte que você coloriu?

____

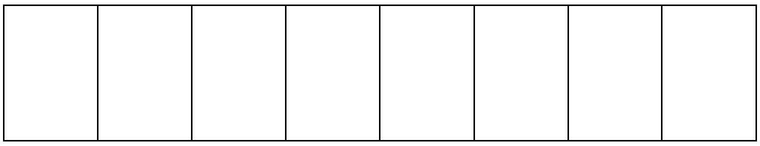
02. Pinte duas das partes em que o retângulo foi dividido e responda:



Que fração do retângulo inteiro representam as duas partes que você coloriu?

____

03. Pinte quatro das partes em que o retângulo foi dividido e responda:



Que fração do retângulo inteiro representam as quatro partes que você coloriu?

____

Agora compare as três frações encontradas e responda:

a) Na opinião de vocês, elas representam números iguais ou diferentes? Por quê?
b) Na opinião de vocês, cada uma das frações representa a mesma quantidade do inteiro ou não? Por quê?

Quadro 8 – Observações relativas à atividade 5 do estudo exploratório

Característica	**Observações**	**Tendências/Hipóteses**
Atividade envolvendo representação de frações equivalentes através de figuras.	- Os alunos conseguiram identificar corretamente as frações representadas nos desenhos. - Os alunos de um dos grupos não coloriram as partes de forma consecutiva.	- Houve divergência de respostas à pergunta: "Na opinião de vocês, elas representam números iguais ou diferentes? Por quê?" - Todos os alunos concluíram que as frações representavam a mesma parte do inteiro.

Fonte: acervo da autora pesquisadora, 2021.

Em relação às respostas para a pergunta "Na opinião de vocês, elas representam números iguais ou diferentes? Por quê?", destacamos aquelas elaboradas pelos grupos que não conseguiram identificar, na relação de equivalência entre as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{4}{8}$, diferentes representações de um mesmo número: "*Diferentes, pois a escrita é diferente*"; *"Diferentes. $\frac{2}{4}$ tira 2 de 4, $\frac{1}{2}$ tira 1 de 2, $\frac{4}{8}$ Tira 4 de 8".* A resposta que apontou a identificação de frações equivalentes como formas distintas de representar um mesmo número racional foi *"A escrita deles representa números diferentes, mas o conceito do número é a mesma coisa".* A nosso ver, o uso do termo "números", ao invés de "numerais", como referência à representação escrita, não prejudicou a interpretação da resposta que os alunos elaboraram.

3.1.3.5 Atividade 6

Tema: função polinomial de 1º grau.

Objetivos:

1) identificar a ideia de divisão expressa por um número fracionário;
2) realizar a divisão de um número inteiro por 2;
3) comparar valores de x e $f(x)$, apresentados em tabela, para completar valores não informados nesta tabela;
4) estabelecer a lei de formação de uma função polinomial de 1º grau a partir da comparação entre valores de x e $f(x)$, apresentados em tabela;
5) representar graficamente a função polinomial de 1° grau: $f(x) = \frac{x}{2}$.

ATIVIDADE DE MATEMÁTICA		
REFERENTE À INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA - 1° ANO DO ENSINO MÉDIO		
Componente Curricular: Matemática	**Profª.: Graça**	
Estudante:	**Turma:**	**Data: 22/10/2019**

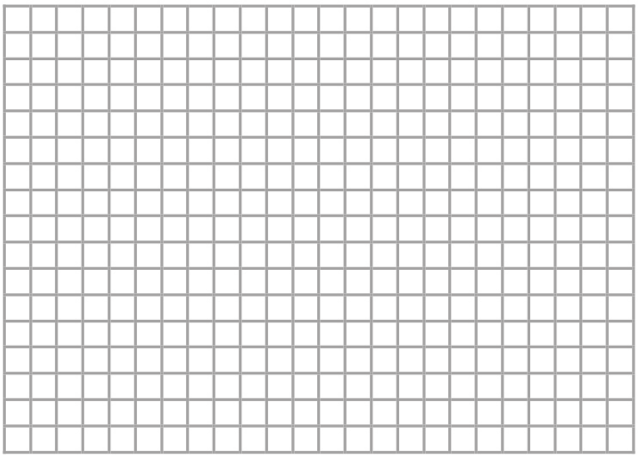
Atividade 6
Descubram as relações entre os números e completem a tabela:

x	6	3	0			
$f(x)$	3	$\frac{3}{2}$				

Agora respondam:

a) Qual a relação entre cada um dos números da 1ª linha da tabela e o seu correspondente na 2ª linha da tabela?
b) Que relações vocês percebem entre x e $f(x)$?

c) Usando a malha quadriculada abaixo, desenhem o gráfico que represente a relação encontrada entre x e $f(x)$.



Quadro 9 – Observações relativas à atividade 6 do estudo exploratório

Característica	Observações	Tendências/Hipóteses
Atividade Investigativa	- Os alunos completaram, com facilidade, a sequência correspondente aos valores de x na tabela. - Muita inabilidade na construção do gráfico. Problemas na identificação dos eixos, na representação dos números nos eixos e na localização dos pontos no plano cartesiano. - Um dos grupos não conseguiu concluir a atividade.	- Identificaram o decréscimo de 3 unidades entre um valor de x e o valor subsequente a ele, o que pode ter facilitado o completamento da sequência de valores de x. - Maiores exigências na descoberta da relação entre x e $f(x)$. A tendência foi comparar os valores da linha. - Não utilizaram a linguagem algébrica para apresentar a lei de formação da função. Escreveram: $f(x)$ é a metade de x.

Fonte: acervo da autora pesquisadora, 2021.

A atividade foi relevante em relação aos objetivos 3 e 4. Provocou atitude exploratória nos alunos. A pesquisadora observou postura de busca em todos os grupos e percebeu entusiasmo de alguns ao descobrirem a relação expressa pela função.

As inabilidades na construção do gráfico exigiram orientação em todos os grupos. Dentre elas, destacamos o desconhecimento sobre como localizar valores fracionários nos eixos cartesianos. Notou-se que não houve a interligação entre as representações fracionária e decimal dos números. Os alunos perguntaram sobre o como representar as frações no gráfico.

3.1.3.6 Atividade 7

Tema: função polinomial de 1º grau.

Objetivos:

1) realizar a adição entre um número natural e um número fracionário;

2) comparar valores de x e $f(x)$, apresentados em tabela, para completar valores não informados nesta tabela;

3) estabelecer a lei de formação de uma função polinomial de 1º grau a partir da comparação de valores de x e $f(x)$, apresentados em tabela;

4) representar graficamente a função polinomial de 1° grau: $f(x) = \frac{x}{2} + 1$.

ATIVIDADE DE MATEMÁTICA		
REFERENTE À INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA - 1° ANO DO ENSINO MÉDIO		
Componente Curricular: Matemática	**Profª.: Graça**	
Estudante:	**Turma:**	**Data: 24/10/2019**

Atividade 7

Descubram as relações entre os números e completem a tabela:

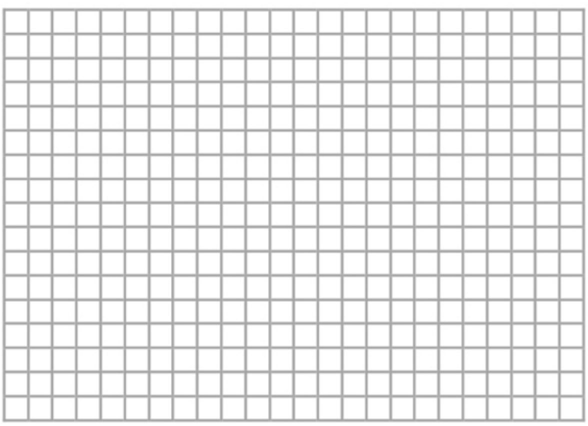
x	6	3	0			
$f(x)$	4	$\frac{5}{2}$	1			

Agora respondam:

a) Qual a relação entre cada um dos números da 1ª linha da tabela e o seu correspondente na 2ª linha da tabela?

b) Que relações vocês percebem entre x e $f(x)$?

c) Usando a malha quadriculada abaixo, desenhem o gráfico que represente a relação encontrada entre x e $f(x)$.



Quadro 10 – Observações relativas à atividade 7 do estudo exploratório

Característica	Observações	Tendências/Hipóteses
Atividade Investigativa	Maiores exigências na descoberta da relação entre x e $f(x)$. Os alunos testaram valores no gráfico durante todo o horário e não conseguiram o alinhamento dos pontos. A atividade foi recolhida para conclusão na aula seguinte, sem que nenhum dos grupos descobrisse a relação.	- A construção dos alunos dos 4 grupos, ao final da primeira aula, constava: 1) $f(-3) = -f(3)$; $f(-6) = -f(6)$ **Hipótese**: teriam se apoiado nos valores dados na tabela e usado o oposto? 2) Para $f(-9)$, dois grupos preencheram -5,5; um grupo não completou e o outro preencheu -5. **Hipótese**: os dois grupos que preencheram -5,5 para $f(-9)$ teriam mantido a regularidade de subtrair 1,5 do valor anterior (-2,5; -4; -5,5)?

Fonte: acervo da autora pesquisadora, 2021.

A pesquisadora não conseguiu registrar todas as relações estabelecidas pelos alunos ao longo do processo de resolução da atividade. As hipóteses levantadas foram elaboradas com base no acompanhamento dos grupos e nas respostas que apresentaram ao final da primeira aula.

Na aula seguinte, do dia 29/10, a atividade foi concluída. Após um bom tempo testando valores no gráfico, um dos estudantes falou: *"é só dividir por 2 e somar 1".* Ele manifestou euforia e alegria pela descoberta.

Consideramos que a atividade favoreceu o desenvolvimento dos objetivos propostos e provocou grande envolvimento. Ainda foram observadas inabilidades na construção do gráfico. Porém o suporte na representação gráfica contribuiu na verificação da pertinência das hipóteses dos alunos, contribuindo na descoberta da lei de formação da função.

3.1.3.7 Atividade 8

Tema: função polinomial de 1º grau.

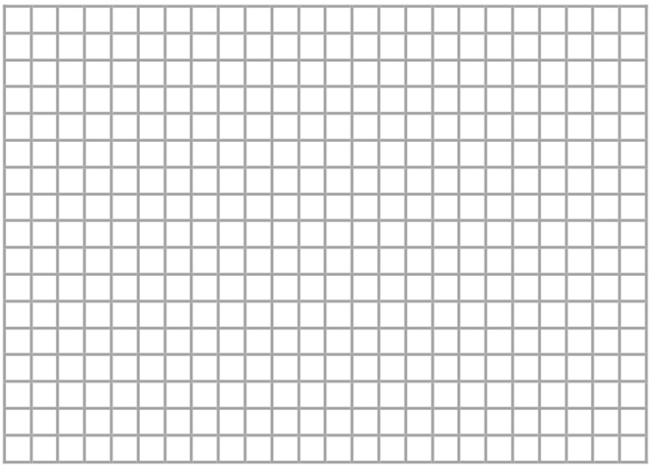
Objetivo:
realizar a adição entre um número inteiro e um número fracionário e entre dois números fracionários com denominadores diferentes, para determinar valores de $f(x)$, dada a função $f(x) = x + \frac{1}{2}$.

ATIVIDADE DE MATEMÁTICA		
REFERENTE À INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA - 1° ANO DO ENSINO MÉDIO		
Componente Curricular: Matemática Profª.: Graça		
Estudante:	**Turma:**	**Data: 05/11/2019**

Atividade 8

Completem a tabela e, a seguir, construam o gráfico da função:

x	$f(x) = x + \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{4}$	
0	
1	
-1	
-2	



Quadro 11 – Observações relativas à atividade 8 do estudo exploratório

Característica	Observações	Tendências/Hipóteses
Atividade para aplicação da adição entre um número inteiro e um número fracionário e entre dois números fracionários com denominadores diferentes.	Os alunos demonstraram dificuldade em compreender a instrução do exercício. Pediram ajuda para interpretar a tabela.	Para realizar a adição entre dois números fracionários com denominadores diferentes, utilizaram a representação decimal e a redução ao mesmo denominador.

Fonte: acervo da autora pesquisadora, 2021.

Nas adições que envolveram a fração $\frac{1}{2}$, foi possível constatar que alguns alunos registraram $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ e $0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

No registro de $f(x)$, foi utilizada, majoritariamente, a representação decimal.

A aplicação desta atividade nos levou aos seguintes questionamentos: as dificuldades na sua interpretação poderiam estar relacionadas à não construção da relação envolvida na função pelos alunos? Informações “soltas” na tabela, sem uma contextualização, poderiam ter motivado as incompreensões?

3.1.3.8 Atividade 9

Tema: operações com números racionais.

Objetivos:

1) representar uma sequência com cinco frações equivalentes a uma fração dada;

2) identificar, em sequências de equivalência de frações distintas, frações com denominadores comuns;

3) realizar a adição entre números naturais e números fracionários com denominadores diferentes, com o apoio em sequências de frações equivalentes.

ATIVIDADE DE MATEMÁTICA		
REFERENTE À INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA - 1° ANO DO ENSINO MÉDIO		
Componente Curricular: Matemática	**Profª.: Graça**	
Estudante:	**Turma:**	**Data: 12/11/2019**
Atividade 9 Para realizarem cada uma das operações com frações, escolham frações equivalentes, dentre as listadas por vocês, que possibilitem operar com partes iguais: 1) $\frac{5}{3}+\frac{3}{4}=$ a) Escrevam cinco frações equivalentes a $\frac{5}{3}$. b) Escrevam cinco frações equivalentes a $\frac{3}{4}$. 2) $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=$ a) Escrevam cinco frações equivalentes a $\frac{1}{2}$. b) Escrevam cinco frações equivalentes a $\frac{1}{5}$. 3) $\frac{1}{4}+\frac{4}{3}+\frac{5}{6}=$		

a) Escrevam cinco frações equivalentes a $\frac{1}{4}$. b) Escrevam cinco frações equivalentes a $\frac{4}{3}$. c) Escrevam cinco frações equivalentes a $\frac{5}{6}$. 4) $\frac{3}{5}+\frac{4}{3}+1=$ a) Escrevam cinco frações equivalentes a $\frac{3}{5}$. b) Escrevam cinco frações equivalentes a $\frac{4}{3}$. c) Escrevam cinco frações equivalentes a 1. 5) $\frac{2}{7}+\frac{7}{2}+2=$ a) Escrevam cinco frações equivalentes a $\frac{2}{7}$. b) Escrevam cinco frações equivalentes a $\frac{7}{2}$. c) Escrevam cinco frações equivalentes a 2.

Quadro 12 – Observações relativas à atividade 9 do estudo exploratório

Característica	Observações	Tendências/Hipóteses
Atividade envolvendo o uso de sequências de frações equivalentes como suporte na adição de números fracionários.	- Os alunos demonstraram autonomia e relativa facilidade na realização das operações ao usarem as sequências que elaboraram, constando 5 frações equivalentes à cada uma das frações a serem adicionadas. - Sequências de frações equivalentes a uma fração dada foram trabalhadas na aula anterior.	As questões 4 e 5 exigiram a discussão dos denominadores possíveis, evitando, dessa forma, a escrita de uma grande lista de frações equivalentes. Entretanto faltou orientação adequada, o que exigiu a intervenção da pesquisadora nos quatro grupos.

Fonte: acervo da autora pesquisadora, 2021.

Faltou chamar a atenção dos alunos quanto à diferença das questões 4 e 5 em relação às demais: a sequência contendo cinco frações equivalentes às frações dadas, obtidas a partir da multiplicação dos seus numeradores e denominadores por 2, 3, 4, 5 e 6, não contemplou a escolha de frações com denominadores iguais. A falta de orientação demandou a intervenção da pesquisadora nos quatro grupos. Ainda assim as questões geraram boas discussões e provocaram reflexões sobre possíveis denominadores que possibilitariam as adições.

Dentre os aspectos levantados na discussão das nove atividades desenvolvidas, destacamos, a seguir, aqueles que mais influenciaram a elaboração do conjunto de atividades produzidas pela pesquisa.

3.1.4 *Principais contribuições do estudo exploratório na elaboração das atividades da pesquisa*

De um modo geral, as atividades propostas despertaram o interesse dos alunos. Apesar de estarem no seu sexto horário de aula, mantiveram-se envolvidos na sua realização e, não raras as vezes, manifestaram surpresa quanto ao término do horário. A frequência regular durante todo o período também sinalizou o seu interesse, uma vez que não receberam nota pela participação no reforço escolar.

As suspeitas sobre dificuldades relacionadas às operações com números racionais na forma fracionária se confirmaram, logo no início, nas atividades 3 e 4. Os alunos aplicaram regras operatórias que não dominavam e demonstraram inabilidade em lidar com o campo numérico.

Esse desempenho resultou em situações como (a) adição entre um número fracionário e um número natural resultando na adição entre o numerador da fração e o número natural, com manutenção do denominador; (b) adições e/ou subtrações entre números fracionários com denominadores diferentes e número natural não resolvidas, obrigando os grupos a requisitarem ajuda na sua realização; (c) quadrado de número fracionário obtido pela elevação do numerador ao quadrado e manutenção do denominador ou pela multiplicação do numerador e do denominador da fração por dois; (d) multiplicação de número natural por número fracionário não resolvida sem explicações por dois dos quatro grupos atendidos.

Ainda com relação às duas atividades, avaliamos que as intervenções da pesquisadora, no sentido de levar os alunos a relembrarem regras para realizar operações com números fracionários, limitaram a construção de outras relações que pudessem colaborar na atribuição de sentido para as operações, dentre elas a relação de equivalência entre frações.

Diante dessa constatação, como tentativa de oferecer aos alunos referências para a construção conceitual da relação de equivalência entre frações, foram propostas as atividades 5 e 9. A 5 poderia ter sido estruturada num contexto que envolvesse as operações de adição e subtração. Acreditamos que, dessa forma, traria maiores contribuições no desenvolvimento de habilidade operatória, sustentada na ideia de equivalência entre frações. Nesse aspecto, a 9 foi mais relevante.

Quanto às atividades 6, 7 e 8, envolvendo o tema função polinomial de 1º grau, foi possível perceber maior facilidade dos alunos para operarem nas situações em que foram provocados a descobrirem as relações entre x e $f(x)$. Eles demonstraram maior facilidade em operar com os números fracionários nas atividades 6 e 7, após descobrirem as leis de formação das funções. Esse fato não aconteceu na 8, pelo contrário, apesar de a lei de formação da função, apresentada em tabela, envolver a ideia de metade, não compreenderam que deveriam realizar operações com os valores informados. Essas constatações nos levaram a acreditar que, na abordagem conceitual dos números racionais na forma fracionária no contexto do estudo da função polinomial de 1º grau, a descoberta de relações funcionais tende a conduzir os alunos a estabelecerem conjecturas que podem favorecer o desenvolvimento de habilidade operatória.

Ainda sobre as atividades 6, 7 e 8, a representação da função no plano cartesiano demandou a conversão da representação fracionária do número racional para a sua representação decimal. Avaliamos que a falta de uma orientação em forma de pergunta dentro da atividade requisitou intervenções da pesquisadora em alguns grupos e limitou a autonomia dos estudantes. As representações gráficas foram importantes na verificação de hipóteses sobre as relações entre x e $f(x)$.

Observamos maior familiaridade dos alunos no trato com os números fracionários conforme passaram a conviver mais frequentemente com atividades que enfatizaram o seu uso. As dúvidas iniciais foram, aos poucos, diluídas em discussões para realizar os exercícios.

Os acordos e os desacordos na realização das atividades possivelmente contribuíram para a construção dos registros e colocaram os conceitos num patamar de discussão. Não foi possível inferir sobre a eficácia dos registros como instrumentos de consulta pelos alunos, uma vez que foram explorados pela pesquisadora apenas nas atividades 3 e 4. Além desse fato, avaliamos que o registro criado na 3 não se aplicou a todos os exercícios da 4.

Apoiados nesses elementos, acreditamos que o estudo exploratório agregou à pesquisa a importância de observar certos critérios na elaboração das atividades, caracterizando-as para favorecer a autoria e a autonomia dos estudantes. Dentre esses critérios, destacamos a pertinência ao desenvolvimento das habilidades pretendidas; a adequação aos objetivos de ensino; a relevância no sentido de abrir possibilidades para as construções conceituais esperadas; a explicitação da forma como devem ser realizadas, evitando falta ou excesso de informação que possa limitar a sua interpretação.

Merece destaque também, pela sua influência, as diferentes características das atividades desenvolvidas no estudo exploratório. Elas seguiram, basicamente, três padrões: aquelas que apresentaram o problema e as questões relacionadas a ele (atividades 1, 2, 3, 6, 7 e 8); as que tinham por finalidade possibilitar aos alunos o desenvolvimento de aspectos ligados à fundamentação de conceitos relacionados à situação previamente abordada por atividade anterior (atividades 5 e 9) e aquela destinada à aplicação de um conceito já tratado anteriormente (atividade 4). Diante da constatação de incompreensões operatórias que dificultaram a resolução das atividades 1, 2, 3, 6, 7 e 8, organizamos as 5 e 9. Elas buscaram investir no desenvolvimento da relação de equivalência entre frações, com o propósito de auxiliar na compreensão das operações de adição e subtração envolvendo os números racionais na forma fracionária. Outra frente adotada foi a de oferecer a atividade 4, através da qual os alunos puderam recorrer a uma regra discutida por eles e colocá-la em prática na realização de operações.

Essa organização surgiu das demandas dos alunos e da nossa intenção de propor intervenções apoiadas no princípio de oportunizar discussão conceitual. Esse formato não foi estabelecido inicialmente, o que trouxe prejuízos à estruturação mais sistematizada das atividades. Entretanto acreditamos que o movimento de expor os alunos a um problema, oferecer-lhes condições de discutir relações conceituais envolvidas nele e aplicar conhecimentos previamente discutidos e/ou elaborados por eles oportunizou maior contato com os conceitos.

Apoiamos a estruturação das atividades e de seus objetivos, conforme relatamos na próxima seção, nos aspectos discutidos e na experiência de abordagem desse campo numérico em situações de estudo de alguns dos temas elencados para o reforço escolar, dentre eles, a função polinomial de 1º grau.

3.2 A conformação do conjunto de atividades da pesquisa

As experiências vivenciadas no reforço escolar foram significativas no delineamento do conjunto de atividades produzidas pela pesquisa. Elas influenciaram na estruturação desse material e estabeleceram referências para a maneira como propomos o seu desenvolvimento com os estudantes. Também ajudaram a analisar o potencial das atividades em atender aos objetivos da pesquisa e em responder suas questões. Nesse aspecto, compensaram a etapa prevista para aplicação da pesquisa em campo que foi inviabilizada pela suspensão das aulas presenciais, devido à necessidade de isolamento social imposta pela pandemia de COVID-19. Nas escolas estaduais de Minas Gerais, essa interrupção teve início no dia 18 de março de 2020. Estendeu-se até este ano de 2021, ocorrendo a retomada presencial, regulamentada com restrições, a partir do dia 03 de novembro.

A seguir, apresentamos o modelo proposto para o conjunto que desenvolvemos e destacamos aquelas características das atividades voltadas ao estímulo de interligação entre conceitos matemáticos e de emprego de raciocínio e de ideias na resolução das situações e problemas propostos.

3.2.1 *A proposição de categorias para as atividades*

Em nossos encontros de orientação, era premente o foco na busca por construir um caminho que apontasse para ações, alternativas às revisões, dimensionadas por duas de nossas questões de pesquisa: Como abordar temas de estudo do Ensino Médio de modo a favorecer aquisições conceituais e operatórias com números racionais na forma fracionária, ainda não consolidadas pelos estudantes? Uma abordagem conceitual poderia facilitar a compreensão do número racional na forma fracionária e das operações com esses números, em situações de estudo da função polinomial de 1° grau?

Nossas intenções eram expor os alunos a situações que propiciassem construção conceitual para dificuldades manifestadas numa atividade, através de intervenção mais pontual em suas dúvidas, e oferecer atividades que lhes permitissem colocar em prática as operações.

Mobilizados por essas intenções e influenciados pela experiência no estudo exploratório, produzimos um conjunto de atividades que organizamos em três categorias (A, B e C) e estruturamos de modo a apresentar o problema (A), intervir nas dúvidas dos estudantes (B) e ampliar seu contato com relações e conceitos descobertos (C).

Dessa forma, as atividades do tipo A são destinadas a todos os estudantes e as do tipo B, se necessário, apenas aos grupos de estudantes que apresentarem dúvidas na realização da atividade do tipo A. As do tipo C estão direcionadas aos estudantes que demonstrarem necessitar de intervenção baseada na realização de exercícios, como forma de colocar em prática conceitos e operações abordados nas atividades A e/ou B.

Na conformação do tipo A, elaboramos atividades e problemas aplicáveis ao estudo da função polinomial de 1º grau, envolvendo o conceito de fração, a relação de equivalência entre frações e as operações de adição e subtração de frações. Propomos que a resolução seja em grupos de, aproximadamente, quatro componentes.

Apenas a atividade 3A é organizada em dois momentos, sendo o primeiro individual e o segundo em grupos, objetivando coletar as representações de cada um dos estudantes para, posteriormente, provocar a construção de consensos e a elaboração de conclusões.

As atividades 5A, 7A, 8A, 9A e 10A trazem questões adicionais, que não se vinculam ao tema de pesquisa. Elas buscam ampliar conceitos e objetivos relacionados ao estudo da função polinomial de 1º grau.

As atividades do tipo B visam promover intervenção nas dificuldades que surgirem durante a realização das de tipo A, de modo a capacitar os estudantes para a sua conclusão. Envolvem o uso de materiais manipuláveis, desenhos, representações com figuras e sugestões de vídeos. Estão fundamentadas no mesmo princípio em que foram estruturadas as do tipo A, mas foram planejadas para serem atividades de retomada, dentro do período de duração da aula, com o objetivo central de proporcionar aos estudantes nova oportunidade para construção de representações conceituais requisitadas, mas não concretizadas. Portanto, direcionam-se, exclusivamente, para a resolução da dificuldade imposta por A e só serão entregues aos grupos de estudantes que apresentarem essa demanda.

As atividades A e B foram planejadas para desenvolvimento em uma aula, levando em conta a duração, média, de cinquenta minutos para o módulo/aula.

As atividades do tipo C se configuram como exercícios cuja finalidade é a aplicação das representações conceituais desenvolvidas nos grupos. Foram organizadas levando em conta possíveis demandas individuais de alguns estudantes. Têm por principal objetivo levar os estudantes a colocarem em prática as operações e os conceitos abordados. Buscamos preparar algo mais sintético, pensando em não gerar indisposições quanto à sua realização. Considerando a dinâmica da sala de aula, as atividades do tipo C foram indicadas para realização extraclasse.

A concepção das atividades e a sua estruturação buscaram promover a centralidade dos estudantes no processo de aprendizagem e estimular compreensão conceitual e operatória.

3.2.2 *As características das atividades*

Segundo a BNCC (2018), a área de Matemática e suas tecnologias, no Ensino Médio, deve utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos como forma de contribuir na formação geral dos estudantes. Para tanto, deve estimulá-los a “mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações [...]" (BRASIL, 2018, p. 529).

O potencial do conjunto de atividades em favorecer o desenvolvimento dessas habilidades pode ser considerado a partir de algumas de suas características. Acreditamos que esse material contribui não apenas na aquisição de conceitos e operações que a pesquisa envolve, mas também na preparação dos estudantes para lidarem com saberes exigidos pela vivência e atuação em sociedade. Dentre essas características, destacamos:

1) O estímulo à interligação de ideias matemáticas no estudo da função polinomial de 1º grau

O estímulo à interligação de conceitos matemáticos no estudo da função polinomial de 1º grau é um aspecto privilegiado na concepção das atividades do tipo A e traduz a essência na qual se fundamentou a proposta da pesquisa.

A maneira usual de abordagem dos conceitos matemáticos, de forma compartimentada e sequencial, pode estar dificultando a aprendizagem dos estudantes. Precisamos nos dar conta de que muitos conhecimentos são apresentados em espaços tão curtos de tempo que não chegam a ser compreendidos de fato. Um conceito muito familiar e simples para nós professores/as, que temos a Matemática como objeto de trabalho, pode se configurar como algo a que os estudantes não consigam atribuir sentidos.

Nas atividades do tipo A, o foco foi estimular a compreensão de ideias associadas ao conceito de fração, à relação de equivalência entre frações e às operações de adição e subtração entre frações, a partir de situações envolvendo o estudo da Função Polinomial de 1º Grau. Acreditamos que essa estratégia pode ser explorada em sala de aula a fim de contribuir na apresentação dos conceitos de forma mais contextualizada e compreensível aos estudantes.

2) O estímulo à interpretação

A interpretação é um aspecto que caracteriza todas as atividades e pode ser evidenciado pela intenção de conduzir os estudantes a estabelecerem relações entre os conceitos abordados e a elaborarem suas respostas para as diversas questões apresentadas.

Outro aspecto observado foi o cuidado em fornecer nas atividades as informações necessárias ao seu desenvolvimento para que os estudantes possam se orientar pela leitura das instruções. Dessa maneira, as intervenções do professor tendem a ocorrer o mínimo possível, evitando-se explicações que ofereçam pistas na resolução da atividade e proporcionando mais autonomia aos estudantes. A experiência do estudo exploratório foi importante na definição dessa abordagem.

3) O estímulo à construção de experimentação

A construção da experimentação foi estimulada nas atividades A e B. Nas atividades A, esse aspecto se confirma nas situações em que os estudantes são incentivados a apresentar valores a serem usados nas atividades, propor situações que possam responder a alguns dos problemas apresentados, construir respostas, comparar resultados encontrados com aqueles obtidos por colegas do grupo e aplicar suas respostas na verificação de suas hipóteses. Nas atividades B, cuja intenção é favorecer a compreensão de questões impostas por A, o foco foi estimular construções conceituais através da sua representação em figuras e da sua contextualização em situações relacionadas à experiência e/ou vivência dos estudantes.

4) O estímulo à elaboração de registros de representação

A busca por incentivar a criação de registros para as situações matemáticas apresentadas é um aspecto presente em todas as atividades. Acreditamos que essa estratégia pode favorecer o protagonismo dos estudantes ao colocá-los no lugar de quem constrói e expõe suas interpretações e reafirmar a visão do professor como aquele que tem o papel de estimular essas representações.

Nas atividades A e B, a resolução em grupos tende a favorecer elaborações colaborativas e propiciar discussões acerca de diferentes ideias como forma de alcançar a construção de consensos.

No capítulo a seguir, apresentamos o conjunto de atividades produzidas na pesquisa.

4 O CONJUNTO DE ATIVIDADES PRODUZIDAS NA PESQUISA

O conjunto de atividades que desenvolvemos integra o livro *Frações no Ensino Médio: Vinculando o Estudo às Funções Polinomiais de 1º Grau*, recurso educativo produzido por esta pesquisa.

Com o propósito de abordarmos a compreensão conceitual e operatória envolvendo números racionais na forma fracionária em situações de estudo da função polinomial de 1º grau, o objetivo de cada uma das atividades se embasou, parcial ou integralmente, em habilidades previstas na BNCC (BRASIL, 2018) para o estudo desses temas.

Foram elaboradas em acordo com Druck (1995), segundo o princípio de garantir aos alunos convívio, discussão e atribuição de significados ao conceito de fração, à relação de equivalência entre frações e às operações de adição e subtração entre frações.

As atividades são apresentadas na ordem numérica, associada à sequência A, B, C. Essa ordem de apresentação considerou a gradação de objetivos e perspectiva sequencial de habilidades exploradas.

São acompanhadas de orientações para o professor, os estudantes e os grupos, bem como da relação de materiais para o seu desenvolvimento, conforme a necessidade.

Nas atividades em que orientamos a representação gráfica da Função Polinomial de 1º Grau no plano cartesiano, procuramos utilizar uma estrutura em que o sistema de eixos coordenados está sobreposto a uma malha quadriculada, buscando favorecer a localização mais assertiva dos valores nesses eixos.

O conjunto das 10 atividades categorizadas nos tipos A, B e C é apresentado na sequência. Nossa discussão sobre perspectivas e limites de sua utilização em sala de aula e sobre a sua potencialidade em atender aos objetivos do estudo é relatada no capítulo 5.

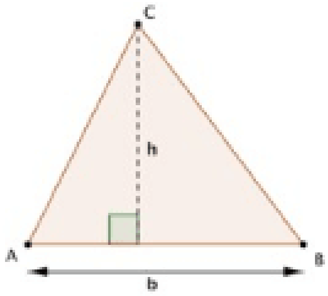
Atividade 1A

A atividade tem por objetivo[21] favorecer o desenvolvimento da seguinte habilidade: identificar a ideia de divisão contida na representação fracionária $\frac{Expressão\ algébrica^{22}}{Número\ natural}$, a partir de funções definidas segundo a estrutura $f(x) = \frac{Expressão\ algébrica}{número\ natural}$.

Orientações para o professor

- Realizar esta atividade em grupos compostos, preferencialmente, por 4 estudantes.
- Ao final da aula, conversar com os estudantes dirigindo-lhes perguntas orientadas pelas questões: vocês resolveram exercícios contendo frações e funções indicadas por estruturas fracionárias com a presença de uma barra sobre números naturais. O que acharam dessas estruturas? Que conclusões podem tirar a respeito da presença da barra sobre os números naturais?

1) No desenho abaixo estão representados um triângulo e a fórmula matemática para encontrar a sua área. A letra $\boldsymbol{A}$ representa a área do triângulo, a letra $\boldsymbol{b}$ representa a sua base e a letra $\boldsymbol{h}$, a sua altura. Expliquem, por escrito, o que devem fazer para encontrar a área de um triângulo se lhes forem informadas as medidas de sua base e de sua altura. Em particular, a barra sobre o número 2 está indicando qual operação a ser feita?



$$\boldsymbol{A = \frac{b \cdot h}{2}}$$

2) A medida da base de um triângulo é 3 cm e a sua altura é representada pela letra h. Considerando essas informações:

a) Dentre as funções polinomiais de 1º grau abaixo, marquem um **X** naquela que indica a área (A) desse triângulo, em relação à sua altura.

_____ $A(h) = \frac{2 \cdot h}{3}$ _____ $A(h) = \frac{3 \cdot h}{2}$

---

[21] O objetivo se referencia, parcialmente, nas habilidades (EF05MA03): "identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso" (BRASIL, 2018, p. 295); (EF06MA08): "reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica" (BRASIL, 2018, p. 301) e (EF09MA06): "compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis" (BRASIL, 2018, p. 317).

[22] Expressão desenvolvida com referência em Druck, 1995, p. 5, que discute a presença da barra da fração para indicar uma divisão entre polinômios.

b) Escolham números ímpares como medidas para a altura desse triângulo de base 3 cm e, usando a função que vocês escolheram, preencham a tabela a seguir:

Altura do triângulo, em cm	**Área do triângulo, em cm^2**	**Fração que indica a área do triângulo, em cm^2**	**Número decimal que indica a área do triângulo, em cm^2**

c) Para fazerem a transposição da área do triângulo, da forma fracionária para a forma decimal, que operação realizaram?

3) Abaixo foram dadas quatro funções que expressam relações na geometria:

$P(l) = 4l$ $\quad$ $A(h) = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$ $\quad$ $D(n) = \frac{n(n-3)}{2}$ $\quad$ $V(R) = \frac{4\pi R^3}{3}$

Identifiquem a função relacionada a cada uma das afirmações abaixo e completem as frases com as palavras no retângulo: (Uma mesma palavra poderá ser usada mais de uma vez.)

dividindo – esfera – três – altura – dois – quádruplo – obtida – menor – perímetro – quádruplo de π

a) O número de diagonais de um polígono é obtido subtraindo __________ do número de lados desse polígono, multiplicando esse resultado pelo número de lados do polígono e __________ o resultado por __________.

b) O volume de uma __________ é obtido multiplicando o cubo de seu raio pelo __________ e __________ o resultado por três.

c) O __________ de um quadrado corresponde ao __________ da medida de seu lado.

d) A área de um trapézio é __________ multiplicando a soma das suas bases maior e __________ pela sua __________ e __________ por dois.

Atividade 1B

A atividade tem por objetivo[23] favorecer o desenvolvimento das seguintes habilidades:

- identificar a ideia de divisão contida na representação fracionária de um número racional;
- relacionar as representações fracionária e decimal de um número racional.

Material

- 1 folha de papel color set amarelo
- 1 folha de papel color set azul

Orientações para o professor

- Aplicar esta atividade apenas nos grupos em que os estudantes apresentarem dúvidas na compreensão da ideia de divisão contida na representação fracionária $\frac{Expressão\ algébrica}{Número\ natural}$.
- Entregar aos estudantes cinco cartões amarelos, contendo as frações: $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{9}{4}$, e $\frac{3}{5}$; e cinco cartões azuis, contendo os números decimais: 0,5; 2,5; 0,25; 2,25 e 0,6.
- Juntar todos os cartões, embaralhar e entregar o bloco aos estudantes.
- Informar que a tarefa será dispor, em cada uma das linhas da tabela, um par de cartões que atenda a situação exposta.
- Finalizada a atividade, instruir os estudantes a retomar a 1A e concluí-la.

Modelo dos cartões

Sugestão: formato quadrado, com 3 cm de lado.

$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{5}$
0,5	**2,5**	**0,25**	**2,25**	**0,6**

1) Vocês estão recebendo dez cartões, contendo números racionais nas representações fracionária e decimal. Formem os pares, de acordo com cada situação apresentada a seguir, e completem a tabela:

[23] O objetivo se referencia, parcialmente, nas habilidades (EF06MA08): “reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica” (BRASIL, 2018, p. 301) e (EF07MA08): “comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador” (BRASIL, 2018, p. 307).

Situação	Par de cartões
Representamos a mesma parte do inteiro e juntos formamos 1 inteiro.	
Somos maiores que 1 inteiro e representamos o resultado da divisão de 5 por 2.	
Representamos a quarta parte de 1 inteiro.	

2) Agora é com vocês! Criem duas situações para completar a tabela com os dois pares de cartões restantes:

Situação	Par de cartões

Atividade 1C

A atividade tem por objetivo[24] favorecer o desenvolvimento das seguintes habilidades:

- realizar divisões indicadas em representações fracionárias de um número racional, transpondo essas representações para a forma decimal;
- identificar a ideia de divisão contida na representação fracionária $\frac{Expressão\ algébrica}{Número\ natural}$, a partir de função definida segundo a estrutura $f(x) = \frac{Expressão\ algébrica}{número\ natural}$.

Orientações para o professor

- Propor esta atividade aos estudantes que necessitam compreender representações conceituais desenvolvidas nas atividades 1A e/ou 1B.
- Indicar a atividade para realização extraclasse.

1) Efetue as divisões indicadas pelas frações e encontre o número decimal correspondente:

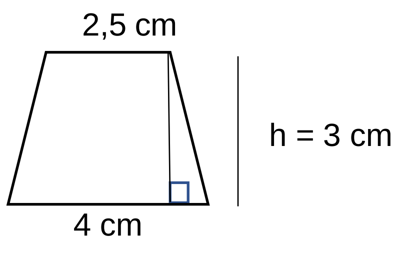
a) $\frac{123}{2} =$

b) $\frac{110}{3} =$

c) $\frac{55}{12} =$

Cálculos

2) A área de um trapézio, em relação à sua altura, pode ser calculada a partir da função $\boldsymbol{A(h)} = \frac{\boldsymbol{(B+b)\cdot h}}{\boldsymbol{2}}$. Nessa função polinomial de 1º grau, $\boldsymbol{A}$ representa a área do trapézio, $\boldsymbol{h}$ representa a sua altura, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{b}$ representam as medidas de suas bases maior e menor, respectivamente. Usando essa função, calcule a área do trapézio Isósceles representado na figura:



Cálculos

[24] O objetivo se referencia, parcialmente, nas habilidades (EF06MA08): “reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica” (BRASIL, 2018, p. 301) e (EF09MA06): “compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis” (BRASIL, 2018, p. 317).

Atividade 2A

A atividade tem por objetivo[25] favorecer o desenvolvimento das seguintes habilidades:

- utilizar a noção de fração como operador;
- estabelecer conjecturas para valores pertencentes ao domínio da função $f(x) = \frac{1}{8}x$, a partir de referências a valores do contradomínio dessa função;
- identificar a fração a ser adicionada às frações $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\, e\, \frac{1}{8}$ de modo a completar o inteiro e determinar a função que relaciona essa fração ao inteiro.

Orientações para o professor

- Avaliar a possibilidade de manter a composição dos grupos já definida para as atividades anteriores, fazendo apenas as alterações que julgar necessárias.
- No exercício 2**,** estimular construções que levem os estudantes a constatarem a definição de uma reta, no plano cartesiano, através do uso do Teorema de Tales e/ou da Semelhança de Triângulos.
- Criar momento para os estudantes apresentarem suas respostas e falarem dos motivos que os levaram à sua construção.

1) Ana tem dois filhos e é a única responsável pelas despesas de sua família. Mensalmente, ela destina cerca de $\frac{1}{2}$ de seu salário para alimentação, $\frac{1}{4}$ para o pagamento de contas e $\frac{1}{8}$ para as demais despesas fixas de sua casa. Quando não acontecem imprevistos, ela destina o restante de seu salário ao lazer da família e à compra de artigos pessoais para ela e seus filhos.

A partir da situação dada, respondam:

a) Que possíveis salários permitem que Ana disponha de valores entre R$ 200,00 e R$ 300,00 para gastos com lazer da família e com compras de artigos pessoais para ela e seus filhos? Apresentem, pelo menos, 3 possíveis salários.

b) Que faixa salarial garante à Ana a condição exposta na questão *a*?

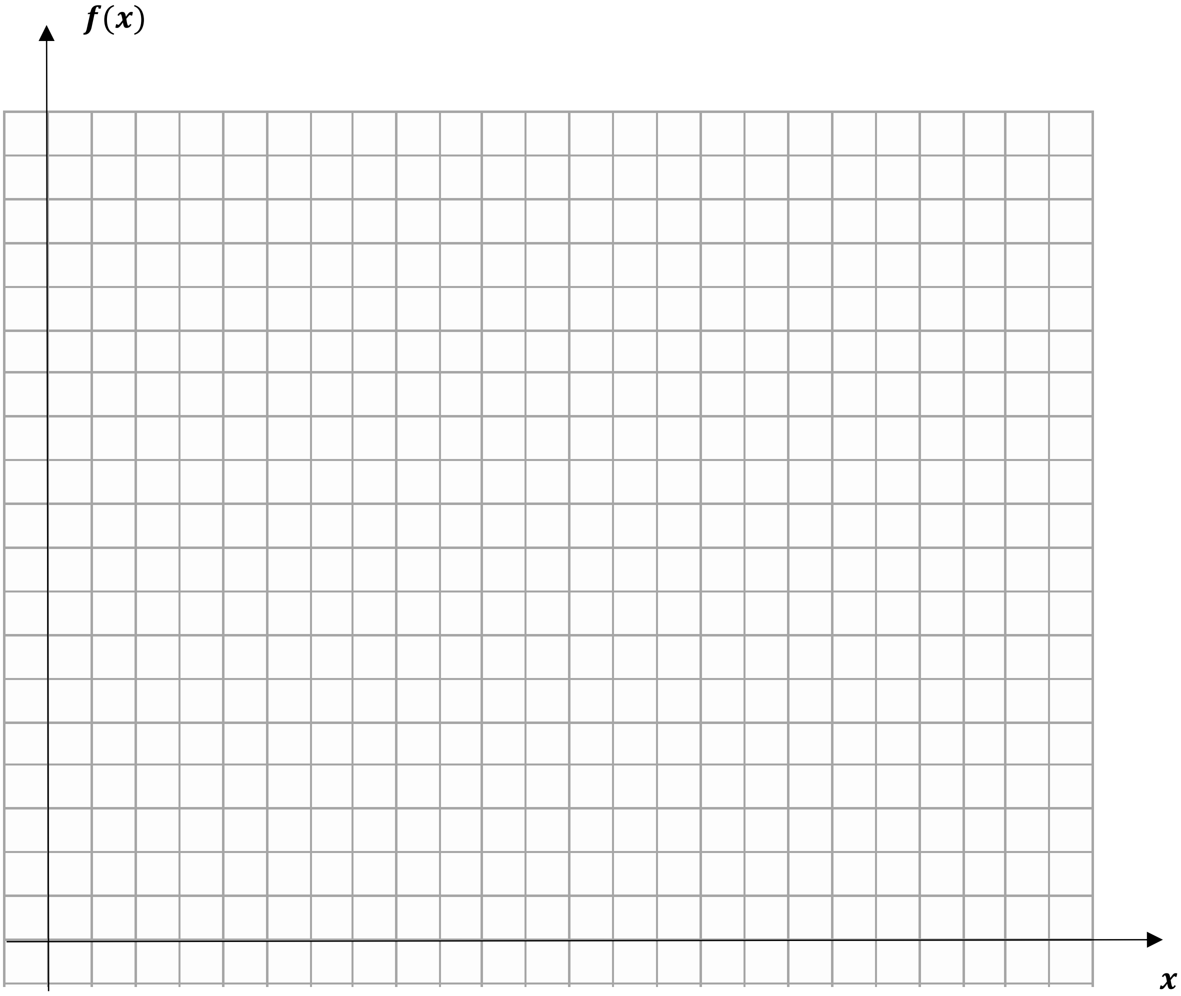
c) Que fração do salário de Ana representa as despesas com lazer da família e com compras de artigos pessoais para ela e seus filhos?

d) Considerando ser $\boldsymbol{x}$ o salário de Ana e $\boldsymbol{f(x)}$ as despesas com o lazer da família e com as compras de artigos pessoais para ela e seus filhos, que função polinomial de 1º grau relaciona o salário de Ana a essas despesas?

e) Usando os salários que vocês indicaram na questão *a*, preencham a tabela a seguir e desenhem, utilizando a estrutura de plano cartesiano dada, um gráfico que represente essa função.

[25] O objetivo se referencia, parcialmente, nas habilidades (EF06MA09): “resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora” (BRASIL, 2018, p. 301); (EF07MA08): “comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador” (BRASIL, 2018, p. 307) e (EM13MAT401): “converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica” (BRASIL, 2018, p.539). A habilidade (EF09MA06): “compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis” (BRASIL, 2018, p. 317), é contemplada, integralmente, pela atividade.

Salário de Ana (R$): x	Valor para gastos com lazer e compras (R$): $f(x)$



2) O desenho gráfico determina uma reta nesse plano cartesiano? Em caso afirmativo, como vocês podem demonstrar esse fato?

Atividade 2B

A atividade tem por objetivo[26] favorecer o desenvolvimento das seguintes habilidades:

- identificar a fração a ser adicionada às frações $\frac{1}{2}, \frac{1}{4} e \ \frac{1}{8}$ de modo a completar o inteiro a partir da sua representação em tira de papel;
- construir a noção de fração como operador.

Material

- 1 folha de papel color set

Orientações para o professor

- Aplicar esta atividade apenas nos grupos em que os estudantes apresentarem dúvidas em identificar a fração a ser adicionada às frações $\frac{1}{2}, \frac{1}{4} e \ \frac{1}{8}$ de modo a completar o inteiro e em determinar $\frac{1}{8}$ de uma quantia.
- Confeccionar uma tira com o papel color set (sugestão de medida: 24cm x 5cm).
- Finalizada a atividade, instruir os estudantes a retomar a 2A e concluí-la.

Orientações para os estudantes

Vocês estão recebendo uma tira de papel que representa 1 inteiro. Sigam estes passos:

A. Dobrem essa tira ao meio e recortem na dobra para obter duas partes.
B. Reservem uma dessas partes, que representa $\frac{1}{2}$ da tira.
C. Peguem a parte que restou, dobrem-na ao meio e recortem na dobra para obter duas partes.
D. Reservem uma dessas partes, que representa $\frac{1}{4}$ da tira.
E. Peguem a outra parte, que também representa $\frac{1}{4}$ da tira, dobrem-na ao meio e recortem na dobra, obtendo mais duas partes da tira.

Agora respondam:

1) Cada uma das duas últimas partes que recortaram corresponde a que fração da tira inteira?

2) No problema 1 da atividade 2A, foi dito que Ana destina, mensalmente, cerca de $\frac{1}{2}$ de seu salário para alimentação, $\frac{1}{4}$ para o pagamento de contas, e $\frac{1}{8}$ para as demais

[26] O objetivo se referencia, parcialmente, nas habilidades (EF06MA09): “resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora” (BRASIL, 2018, p. 301) e (EF07MA08): “comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador” (BRASIL, 2018, p. 307).

despesas fixas de sua casa. Foi dito também que, quando não acontecem imprevistos, ela destina o restante de seu salário ao lazer da família e à compra de artigos pessoais para ela e seus filhos. Analisem todas as tiras recortadas e identifiquem a que representa a fração do salário de Ana destinada aos gastos com lazer e à compra de artigos pessoais. Que fração essa tira representa?

3) Considerem que Ana recebe um salário mensal de R$ 1200,00. Preencham a tabela a seguir, considerando o problema 1 da atividade 2A e as frações obtidas nas tiras de papel:

Tipo de gasto	**Fração do salário**	**Valor do gasto (R$)**
Alimentação	$\frac{1}{2}$	
Pagamento de contas	$\frac{1}{4}$	
Outras despesas	$\frac{1}{8}$	
Lazer e compras		

Atividade 2C

A atividade tem por objetivo[27] favorecer o desenvolvimento das seguintes habilidades:

- utilizar noções de fração como operador;
- identificar a função polinomial de 1º grau que relaciona $f(x)$ à metade de x.

Orientações para o professor

- Propor esta atividade aos estudantes que necessitam compreender representações conceituais desenvolvidas nas atividades 2A e/ou 2B.
- Indicar a atividade para realização extraclasse.

Leia o trecho de uma matéria jornalística:

> *Uma pesquisa feita em Flandres, na Bélgica, com 1.656 estudantes de 13 a 17 anos, revelou que o uso do celular à noite é prática recorrente entre os adolescentes e isso está diretamente relacionado ao aumento do nível de cansaço desses jovens após algum tempo.* [...] *Especialistas recomendam que crianças e adolescentes tenham entre oito e dez horas de sono por noite para manter uma vida saudável e um bom desempenho durante o dia.*
> (Líria Alves. Equipe Brasil Escola: Celular e adolescentes: uma relação perigosa. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/curiosidades/celular-adolescentes-uma-relacao-perigosa.htm - Acesso em: 12 fev. 2021)

1) A realidade mostrada no trecho que vocês leram também é vivenciada por estudantes brasileiros e, em alguns casos, explica a sonolência desses jovens em sala de aula. Considerando o período de 22:00h às 06:00h, correspondente ao total mínimo, desejável, de 8 horas noturnas destinadas ao sono de crianças e adolescentes:

a) Preencha a tabela a seguir de modo a relacionar a quantidade de horas de uso do telefone, em cada um dos períodos, ao tempo total mínimo, desejável, de sono:

Período de uso do celular durante a noite	**Quantidade de horas de uso do telefone**	**Fração do tempo total mínimo, desejável, de sono**
22:00h às 23:00h		
22:00h às 00:00h		
22:00h às 02:00h		
22:00h às 04:00h		

b) Considere ser $\boldsymbol{x}$ o tempo total mínimo, desejável, de sono e $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ a função que indica o comprometimento do sono pelo uso do celular no período de 22:00h às 02:00h. Que função polinomial de 1º grau relaciona $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$?

[27] objetivo se referencia, parcialmente, nas habilidades (EF06MA09): “resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora” (BRASIL, 2018, p. 301) e (EF09MA06): “compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis” (BRASIL, 2018, p. 317).

Atividade 3A

A atividade tem por objetivo[28] favorecer o desenvolvimento da seguinte habilidade: reconhecer a igualdade entre as funções: $f(x) = \frac{1}{3}x$; $g(x) = \frac{2}{6}x$ e $h(x) = \frac{3}{9}x$, determinada pela relação de equivalência entre as frações $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$ e $\frac{3}{9}$.

Material

- 2 folhas de papel color set
- 8 folhas de papel ofício
- 1 pequena caixa

Orientações para o professor

- Propor a atividade em dois momentos. Um momento para realizar a 1ª parte, individual e com duração média de 20 minutos, e outro para realizar a 2ª parte, em grupos e com a duração média de 30 minutos.
- Avaliar a possibilidade de, no segundo momento, manter a composição dos grupos já definida para as atividades anteriores, fazendo apenas as alterações que julgar necessárias.
- Usar fichas, em formato de tickets, contendo valores distintos. Cada ticket conterá um número ímpar e múltiplo de 3, com valor entre R$ 100,00 e R$ 300,00, em quantidade igual ao número de estudantes matriculados na turma (Exemplos: R$ 105,00, R$ 111,00, R$ 117,00, ..., R$ 297,00).
- Colocar os tickets na pequena caixa para serem escolhidos pelos estudantes.
- Iniciar distribuindo a 1ª parte da atividade para cada um dos estudantes.
- Circular a caixa contendo os tickets, para que cada estudante apanhe o seu.
- Reproduzir, para cada estudante e em papel color set, a tabela de gastos apresentada na 1ª parte da atividade.
- Finalizada a 1ª parte da atividade, entregar a tabela feita em papel color set para que cada um dos estudantes anote, a lápis, os valores encontrados.
- Formar os grupos e entregar a folha contendo a 2ª parte da atividade e uma folha de papel ofício em branco, na qual cada estudante deverá colar a sua tabela contendo os valores encontrados por ele.

1ª parte da atividade

Orientação para o estudante

Você está recebendo um ticket mesada contendo um valor $\boldsymbol{x}$, a ser gasto da seguinte forma:

a) $\boldsymbol{\frac{1}{3}x}$ gasto com pagamento da passagem de ida e volta para a escola.
b) $\boldsymbol{\frac{2}{6}x}$ gastos com compra mensal de material escolar.

---

[28] O objetivo se referencia, parcialmente, nas habilidades (EF06MA09): "resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora" (BRASIL, 2018, p. 301); (EF07MA16): "reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes" (BRASIL, 2018, p. 307) e (EF09MA06): "compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis" (BRASIL, 2018, p. 317). A habilidade (EF05MA04): "identificar frações equivalentes" (BRASIL, 2018, p. 295) é contemplada, integralmente, pela atividade.

c) $\frac{3}{9}\boldsymbol{x}$ gastos com compra mensal de lanche.

1) De posse do seu ticket, faça suas contas e preencha a tabela a seguir com os valores encontrados:

Valor do ticket (R$)	**Gasto com passagem (R$)**	**Gasto com material escolar (R$)**	**Gasto com lanche (R$)**

2) Responda as perguntas:

a) Como você calculou $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$ e $\frac{3}{9}$ do ticket mesada?

b) Foram gastos valores iguais ou diferentes com passagem, material escolar e lanche?

3) Considerando ser $\boldsymbol{x}$ o valor do ticket mesada e $\boldsymbol{f(x)}$ o de cada uma das despesas, escreva a função que representa cada um desses gastos:

a) As despesas com pagamento da passagem de ida e volta para a escola correspondem a $\frac{1}{3}$ do ticket mesada.

b) As despesas com compra de material escolar correspondem a $\frac{2}{6}$ do ticket mesada.

c) As despesas com lanche correspondem a $\frac{3}{9}$ do ticket mesada.

2ª parte da atividade

Orientações para o grupo

- Cada participante deverá colar a sua tabela na folha de papel ofício em branco, recebida pelo grupo.
- Conversem sobre os valores encontrados por cada um de vocês, procurando identificar se os gastos com passagem, material escolar e lanche foram valores iguais ou diferentes. Procurem chegar a um consenso sobre isso antes de responderem as perguntas a seguir. Vocês poderão fazer alterações nos valores escritos nas tabelas, caso seja necessário.

Respondam as perguntas:

1) Os gastos com passagem, material escolar e lanche devem ser valores iguais ou diferentes?

2) $\frac{1}{3}x$, $\frac{2}{6}x$ e $\frac{3}{9}x$ são expressões algébricas que definem a mesma função ou funções distintas? Por quê?

3) Escolham três expressões algébricas que definam três funções iguais e inventem um problema para empregar essas funções e comprovar a igualdade entre elas.

Atividade 3B

A atividade tem por objetivo[29] favorecer o desenvolvimento da seguinte habilidade: identificar a relação de equivalência entre as frações $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}$ e $\frac{3}{9}$.

Orientações para o professor

- Aplicar esta atividade apenas nos grupos em que os estudantes apresentarem dúvidas em reconhecer que as expressões algébricas $\frac{1}{3}x$, $\frac{2}{6}\,x$ e $\frac{3}{9}x$ definem a mesma função polinomial de 1º grau.
- Finalizada a atividade, instruir os estudantes a retomar a 3A e concluí-la.

(Adaptada[30]) - A seguir veremos vários retângulos. Vamos imaginar que cada um deles seja uma barra de chocolate. Usem esses retângulos para resolver o problema:

Ana, Clara e João ganharam barras de chocolate idênticas. Cada um dos garotos recebeu uma barra inteira, igual à barra de chocolate da figura. Ana comeu $\frac{1}{3}$ da barra que ganhou, Clara comeu $\frac{2}{6}$ da dela e João comeu $\frac{3}{9}$ da dele. Pintem, nos retângulos correspondentes, a quantidade de chocolate que cada um dos garotos comeu e respondam as perguntas a seguir:

a) Quem comeu mais chocolate? Por quê?
b) As frações $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}$ e $\frac{3}{9}$ podem ser chamadas frações equivalentes? Por quê?

1 barra inteira de chocolate

Quantidade de chocolate que Ana comeu

Quantidade de chocolate que Clara comeu

Quantidade de chocolate que João comeu

[29] O objetivo se referencia nas habilidades (EF05MA04): "identificar frações equivalentes" (BRASIL, 2018, p. 295) e (EF06MA07): "compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes" (BRASIL, 2018, p. 301).
[30] FARIA, Diogo. *Descobrindo os segredos das frações*. Apostila de sala de aula. Educação Básica. Centro Pedagógico da UFMG, Universidade Federal de Minas Gerais, mar. 2018. Impresso.

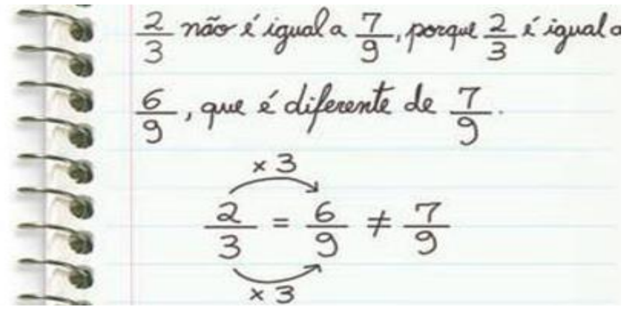
Atividade 3C

A atividade tem por objetivo[31] favorecer o desenvolvimento da seguinte habilidade: identificar a relação de equivalência entre frações e o seu uso na representação de uma mesma função polinomial de 1º grau de diferentes maneiras.

Orientações para o professor

- Propor esta atividade aos estudantes que necessitam compreender representações conceituais desenvolvidas nas atividades 3A e/ou 3B.
- Indicar a atividade para realização extraclasse.

1) (Adaptada[32]) - Veja o exemplo a seguir:



Agora, marque SIM ou NÃO e justifique sua resposta:

a) $\frac{1}{4}$ é igual a $\frac{4}{16}$?

☐ SIM

☐ NÃO

Justificativa:____

b) $\frac{3}{5}$ é igual a $\frac{11}{15}$?

☐ SIM

☐ NÃO

Justificativa:____

2) A professora de Matemática usará frações para apresentar a quantidade de acertos que seus alunos obtiveram num teste com 15 questões. A professora disse a Ana que ela acertou $\frac{1}{5}$ do total de questões e a João que ele acertou $\frac{3}{15}$ do total de questões.
a) Quantos acertos cada um desses estudantes obteve no teste?
b) O resultado de Ana foi maior, menor ou igual ao de João? Por que isso ocorreu?
c) Considerando ser $\boldsymbol{x}$ o total de questões do teste e $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ a quantidade de acertos no teste, escreva as funções polinomiais de 1º grau que indicam a quantidade de acertos que cada um dos estudantes obteve. Essas funções são iguais ou distintas? Por quê?

[31] O objetivo se referencia, parcialmente, nas habilidades (EF06MA09): "resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora" (BRASIL, 2018, p. 301) e (EF07MA16): "reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes" (BRASIL, 2018, p. 307). A habilidade (EF05MA04): "identificar frações equivalentes" (BRASIL, 2018, p. 295) é contemplada, integralmente, pela atividade.
[32] Atividade adaptada, mantida a concepção original: IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. *Matemática Imenes & Lellis*. Livro didático do 6º ano. 2ª ed. São Paulo: Moderna, 2012.

Atividade 4A

A atividade tem por objetivo[33] favorecer o desenvolvimento da seguinte habilidade: identificar relações que as frações $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{3}$ apresentam entre si e com o inteiro, a partir das funções $f(x) = \frac{1}{3}x,\ g(x) = \frac{2}{3}x$ e $h(x) = \frac{4}{3}x$.

Orientação para o professor

- Avaliar a possibilidade de manter a composição dos grupos já definida para as atividades anteriores, fazendo apenas as alterações que julgar necessárias.

1) Observem os valores na tabela 1 e respondam:

Tabela 1

x	$f(x)$
9	3
3	1
0	0
-3	-1
-9	-3

a) Qual a relação entre cada um dos números da segunda coluna e o seu correspondente na primeira coluna?

b) Que função polinomial de 1º grau relaciona $f(x)$ e x?

2) Observem os valores na tabela 2 e respondam:

Tabela 2

x	$g(x)$
9	6
3	2
0	0
-3	-2
-9	-6

[33] O objetivo se referencia, parcialmente, nas habilidades (EF06MA09): “resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora” (BRASIL, 2018, p. 301) e (EF09MA06): “compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis” (BRASIL, 2018, p. 317).

a) Qual a relação entre os valores de $g(x)$ da tabela 2 e os valores de $f(x)$ da tabela 1?

b) Que função polinomial de 1º grau relaciona $g(x)$ e x?

3) Agora são vocês que preenchem a tabela, considerando a função $h(x) = \frac{4}{3}x$.

Tabela 3

x	$h(x)$
9	
3	
0	
-3	
-9	

4) Observando a tabela 3, vocês verificam que os valores encontrados para $h(x)$ são maiores ou menores do que os valores de x? Por que isso ocorreu?

Atividade 4B

A atividade tem por objetivo[34] favorecer o desenvolvimento das seguintes habilidades:

- determinar $\frac{1}{3}$ de uma quantia, dados os $\frac{3}{3}$ dessa quantia;
- reconhecer a fração $\frac{2}{3}$ como o dobro de $\frac{1}{3}$ e a fração $\frac{4}{3}$ como o quádruplo de $\frac{1}{3}$.

Orientações para o professor

- Aplicar esta atividade apenas nos grupos em que os estudantes apresentarem dúvidas na identificação de relações que as frações $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{3}$ apresentam entre si e com o inteiro.
- Finalizada a atividade, instruir os estudantes a retomar a 4A e concluí-la.

(Adaptada[35]) - No Brasil, o senado é formado por 81 senadores e cada estado elege 3 deles. Os senadores têm um mandato de 8 anos, mas os elegemos a cada 4 anos. A razão disso é que eles não são eleitos todos ao mesmo tempo. Numa eleição, é preenchido $\frac{1}{3}$ das vagas do senado e, na seguinte, os outros $\frac{2}{3}$.

De 2014 a 2026, no calendário eleitoral está prevista esta sequência:

Ano da eleição	2014	2018	2022	2026
Fração de vagas em disputa	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Em 2018, foram preenchidos $\frac{2}{3}$ das vagas.

a) Usem as informações dadas e descubram quantos senadores foram eleitos em 2018.

b) Como vocês calcularam os $\frac{2}{3}$ dos senadores?

c) Quando temos $\frac{1}{3}$ de uma quantia, como podemos encontrar os $\frac{4}{3}$ dessa quantia?

---

[34] O objetivo se referencia, parcialmente, nas habilidades (EF06MA09): “resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora” (BRASIL, 2018, p. 301) e (EF07MA08): “Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador” (BRASIL, 2018, p. 307).

[35] Atividade adaptada, mantida a concepção original: IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. *Matemática Imenes & Lellis*. Livro didático do 6º ano. 2ª ed. São Paulo: Moderna, 2012.

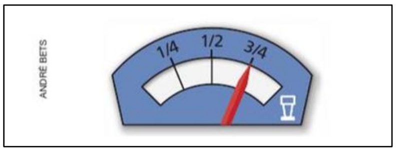
Atividade 4C

A atividade tem por objetivo[36] favorecer o desenvolvimento da seguinte habilidade: determinar frações de uma quantia, dada a quantia total e vice-versa.

Orientações para o professor

- Propor esta atividade aos estudantes que necessitam compreender representações conceituais desenvolvidas nas atividades 4A e/ou 4B.
- Indicar a atividade para realização extraclasse.

1) (Adaptada[37]) - Um automóvel estacionou no posto de gasolina com o tanque praticamente vazio. Veja como ficou o marcador de combustível depois de o automóvel ser abastecido com 42 litros de gasolina e responda: quantos litros de gasolina cabem no tanque cheio?



Para resolver o problema, preencha o esquema:

$\frac{3}{4} \rightarrow$ 42 L

$\frac{1}{4} \rightarrow \square$

$\frac{4}{4} \rightarrow \square$

2) (Adaptada[38]) - Complete o esquema para calcular as frações de $\frac{9}{9}$:

$\frac{9}{9} \rightarrow$ 54 alunos

$\frac{1}{9} \rightarrow \square$

$\frac{5}{9} \rightarrow \square$

3) Seja x, o número total de estudantes de uma escola de ensino médio e $f(x) = \frac{x}{4}$, o número de estudantes com 15 anos. Sabendo que o total de estudantes matriculados nessa escola é 1440 e a idade mínima dos discentes,15 anos, responda:
a) Quantos são os estudantes com 15 anos?
b) Quantos são os estudantes com mais de 15 anos?

---

[36] O objetivo se referencia, parcialmente, nas habilidades (EF06MA09): "resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora" (BRASIL, 2018, p. 301); (EF07MA08): "Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador" (BRASIL, 2018, p. 307) e (EF09MA06): "compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis" (BRASIL, 2018, p. 317).

[37] Atividade adaptada, mantida a concepção original: IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. *Matemática Imenes & Lellis*. Livro didático do 6º ano. 2ª ed. São Paulo: Moderna, 2012.

[38] Atividade adaptada, mantida a concepção original: IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. *Matemática Imenes & Lellis*. Livro didático do 6º ano. 2ª ed. São Paulo: Moderna, 2012.

Atividade 5A

A atividade tem por objetivo[39] favorecer o desenvolvimento das seguintes habilidades:

- investigar relações entre números expressos em tabelas, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização através de funções polinomiais de 1º grau;
- identificar e representar as relações $f(x) = \frac{x}{2}$ e $g(x) = \frac{x}{2} + 1$, apresentadas em tabelas.

Orientações para o professor

- Avaliar a possibilidade de manter a composição dos grupos já definida para as atividades anteriores, fazendo apenas as alterações que julgar necessárias.
- A utilização dos exercícios 3 e 4 ficará a critério do professor, por não estarem diretamente ligados às questões da pesquisa. Eles têm por objetivo favorecer o desenvolvimento das seguintes habilidades:
  a) representar graficamente, num mesmo sistema de eixos coordenados, as funções $f(x) = \frac{x}{2}$ e $g(x) = \frac{x}{2} + 1$;
  b) comparar as retas determinadas pelas funções $f(x) = \frac{x}{2}$ e $g(x) = \frac{x}{2} + 1$, para identificar a inclinação e a transladação de uma em relação à outra;
  c) determinar o conjunto domínio das funções $f(x) = \frac{x}{2}$ e $g(x) = \frac{x}{2} + 1$.

1) Descubram as relações entre os números e completem a tabela:

x	6	3	0			
$f(x)$	3	$\frac{3}{2}$				

Com base nos valores da tabela, respondam:
a) Qual a relação entre cada um dos números da 2ª linha da tabela e o seu correspondente na 1ª linha?
b) Que função polinomial de 1º grau relaciona $f(x)$ e x?

2) Considerando os valores dados na tabela a seguir e a relação entre $f(x)$ e x, descoberta na atividade anterior, completem a tabela:

x	6	3	0			
$g(x)$	4	$\frac{5}{2}$	1			

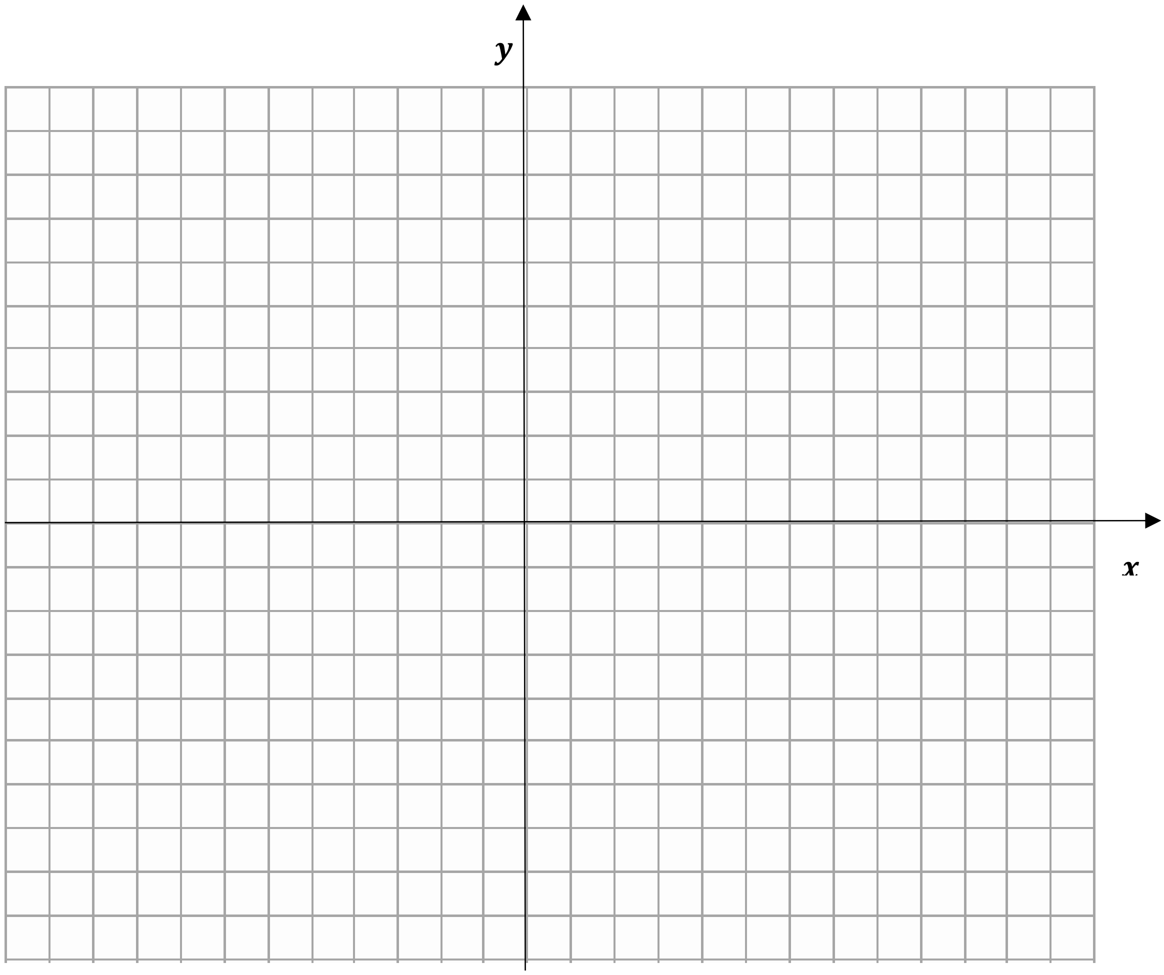
[39] O objetivo se referencia, parcialmente, nas habilidades (EF06MA10): "resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária" (BRASIL, 2018, p. 301); (EM13MAT401): "converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica" (BRASIL, 2018, p. 539). A habilidade (EM13MAT501): "investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau" (BRASIL, 2018, p. 541), é contemplada, integralmente, pela atividade.

Com base nos valores da tabela, respondam:

a) Qual a relação entre cada um dos números da 2ª linha da tabela e o seu correspondente na 1ª linha?

b) Que função polinomial de 1º grau relaciona $g(x)$ e x?

3) Construam, na estrutura de plano cartesiano a seguir, os gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$. Utilizem os valores nas tabelas e o mesmo plano cartesiano para construir os dois gráficos.



4) Comparem as duas retas, descritas no mesmo plano cartesiano, e coloquem V ou F para as afirmações. Caso a afirmação seja falsa, vocês devem reescrevê-la corretamente.

a) A inclinação das retas determinadas pelas duas funções é a mesma; logo, essas retas possuem os mesmos coeficientes angulares. (   )

b) O conjunto dos números reais é domínio apenas da função $f(x)$. (   )

c) O gráfico da função $g(x)$ corresponde ao gráfico da função $f(x)$ transladado uma unidade para cima. (   )

Atividade 5B

A atividade tem por objetivo[40] favorecer o desenvolvimento das seguintes habilidades:

- reconhecer a fração $\frac{1}{2}$ como uma das duas partes em que o inteiro foi dividido;
- realizar a adição $1 + \frac{1}{2}$, através da sua representação na forma $\frac{2}{2} + \frac{1}{2}$, usando duas tiras de papel, com formato retangular.

Material

- 1 folha de papel color set amarelo
- 1 folha de papel color set vermelho
- Papelão

Orientações para o professor

- Aplicar esta atividade apenas nos grupos em que os estudantes apresentarem dúvidas em representar, na forma fracionária, a relação $g(x) = \frac{x}{2} + 1$.
- Confeccionar duas tiras de papel de mesmo tamanho (medida sugerida: 24cm x 5cm), uma amarela e outra vermelha, e uma base de papelão em que possam ser encaixadas as duas tiras coloridas, conforme a imagem:

- Entregar a base de papelão com as duas tiras encaixadas e distribuir a atividade, com as orientações para a sua realização.
- Finalizada a atividade, instruir os estudantes a retomar a 5A e concluí-la.

Orientações para os estudantes

- Vocês estão recebendo duas tiras de papel, uma amarela e outra vermelha, elas têm o mesmo tamanho e estão encaixadas numa base de papelão.
- Retirem a tira vermelha da base. Dobrem essa tira ao meio e a recortem na dobra, formando dois pedaços. Coloquem na base as duas partes obtidas.
- Respondam as perguntas 1, 2, 3, 4 e 5.

1) Que fração representa:

a) 1 das 2 partes em que a tira vermelha foi dividida?

[40] O objetivo se referencia, parcialmente, nas habilidades (EF06MA07): “compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes” (BRASIL, 2018, p. 301) e (EF06MA10): “resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária” (BRASIL, 2018, p. 301).

b) 2 das 2 partes em que a tira vermelha foi dividida?

2) Quantas partes vermelhas são necessárias para formar 1 ficha amarela, ou seja, para formar 1 inteiro? Essas partes juntas representam qual fração?

3) Escrevam a adição $1 + \frac{1}{2}$, usando duas frações com denominadores iguais. Que fração representa o resultado dessa adição?

4) Se houvesse duas fichas amarelas, que fração representaria a adição $2 + \frac{1}{2}$?

5) E se houvesse três fichas amarelas, que fração representaria a adição $3 + \frac{1}{2}$?

Atividade 5C

A atividade tem por objetivo[41] favorecer o desenvolvimento da seguinte habilidade: representar, na forma fracionária, as relações $f(x) = \frac{x}{2}$ e $g(x) = \frac{x}{2} + 1$.

Orientações para o professor

- Propor esta atividade aos estudantes que necessitam compreender representações conceituais desenvolvidas nas atividades 5A e/ou 5B.
- Indicar a atividade para realização extraclasse.

1) Efetue os cálculos e preencha a tabela. Você pode utilizar a fração equivalente a 1 inteiro, obtida na atividade 5B.

Valor de x	**Fração que representa $f(x) = \frac{x}{2}$**	**Fração que representa $g(x) = \frac{x}{2} + 1$**
1		
3		
5		
7		

Cálculo de $g(x) = \frac{x}{2} + 1$

[41] O objetivo se referencia, parcialmente, nas habilidades (EF06MA07): “compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes” (BRASIL, 2018, p. 301) e (EF06MA10): “resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária” (BRASIL, 2018, p. 301).

Atividade 6A

A atividade tem por objetivo[42] favorecer o desenvolvimento das seguintes habilidades:

- realizar a adição de duas frações com denominadores iguais;
- representar um número racional nas suas formas fracionária e decimal;
- construir o gráfico da função polinomial $f(x) = \frac{1}{4}\,x + \frac{3}{4}$.

Orientação para o professor

- Avaliar a possibilidade de manter a composição dos grupos já definida para as atividades anteriores, fazendo apenas as alterações que julgar necessárias.

1) A lei de formação de uma função polinomial de 1º grau é: $f(x) = \frac{1}{4}\,x + \frac{3}{4}$. Escolham cinco números ímpares de 1 a 15 e anotem na tabela, colocando-os na coluna correspondente aos valores de x. Considerando a função dada, calculem os valores de $f(x)$ na forma de número fracionário e de número decimal. Usando os valores encontrados, completem a tabela a seguir:

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x)}$ ***Fração***	$\boldsymbol{f(x)}$ ***Decimal***

a) Expliquem, por escrito, como vocês calcularam os valores de $\frac{1}{4}\,x$.

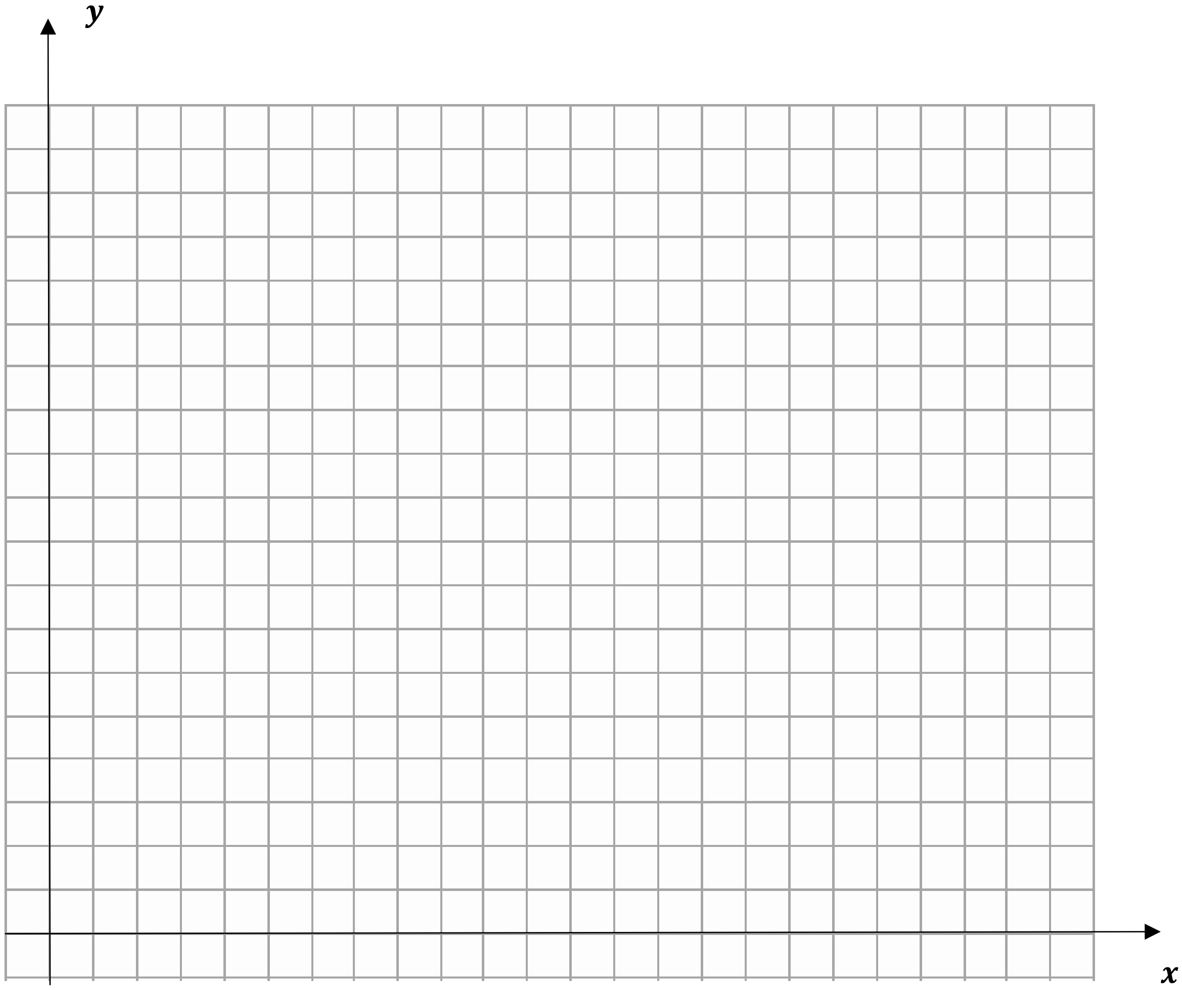
b) Expliquem, por escrito, como vocês realizaram a operação $\frac{1}{4}\,x + \frac{3}{4}$.

2) Usando os valores da tabela, representem, na estrutura de plano cartesiano a seguir, a função $f(x) = \frac{1}{4}\,x + \frac{3}{4}$.

Se o gráfico não definir uma reta, será necessário verificarem se os pontos foram localizados corretamente ou revisarem os valores encontrados, para fazerem as correções.

---

[42] O objetivo se referencia, parcialmente, nas habilidades (EF06MA08): "reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica" (BRASIL, 2018, p. 301); (EF06MA10): "resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária" (BRASIL, 2018, p. 301) e (EM13MAT401): "converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica" (BRASIL, 2018, p. 539).


y
x

Atividade 6B

A atividade tem por objetivo[43] favorecer o desenvolvimento das seguintes habilidades:

- construir a noção de fração como operador, a partir do cálculo de $\frac{1}{4}$ de uma quantia;
- realizar a adição de duas frações com denominadores iguais;
- transpor, para a forma decimal, a representação fracionária de um número racional.

Orientações para o professor

- Aplicar esta atividade apenas nos grupos em que os estudantes apresentarem dúvidas em calcular, nas formas fracionária e decimal, os valores de $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$, sendo x um número ímpar de 1 a 15.
- Finalizada a atividade, instruir os estudantes a retomar a 6A e concluí-la.

1) Como calcular $\frac{1}{4}$ de uma quantia? Coloquem suas ideias em prática e calculem os quartos para completar a tabela:

Situação considerada	**Fração que representa $\frac{1}{4}$ do valor considerado**	**Número decimal que representa $\frac{1}{4}$ do valor considerado**
A quantia total é 10 reais.		
A quantidade de combustível no tanque de um automóvel é 30 litros.		
A altura de um prédio é 37 metros.		

2) (Adaptada[44]) Agora é hora de juntarem os quartos. Completem as frações cruzadas:

$\frac{35}{4}$	**+**	—	**=**	$\frac{38}{4}$
+		**+**		**+**
—	**+**	$\frac{2}{4}$	**=**	$\frac{3}{4}$
=		**=**		**=**
9	**+**	—	**=**	—

[43] O objetivo se referencia, parcialmente, nas habilidades (EF06MA08): “reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica” (BRASIL, 2018, p. 301); (EF06MA09): “resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora” (BRASIL, 2018, p. 301) e (EF06MA10): “resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária” (BRASIL, 2018, p. 301).

[44] FARIA, Diogo. *Descobrindo os segredos das frações*. Apostila de sala de aula. Educação Básica. Centro Pedagógico da UFMG, Universidade Federal de Minas Gerais, mar. 2018. Impresso.

Atividade 6C

A atividade tem por objetivo[45] favorecer o desenvolvimento das seguintes habilidades:

- utilizar noções de fração como operador;
- realizar a adição de duas frações com denominadores iguais;
- transpor, para a forma decimal, a representação fracionária de um número racional.

Orientações para o professor

- Propor esta atividade aos estudantes que necessitam compreender representações conceituais desenvolvidas nas atividades 6A e/ou 6B.
- Indicar a atividade para realização extraclasse.

Resolva os problemas:

1) A primeira avaliação de Matemática do ano valeu 7 pontos. Sabendo que a nota de Ana foi $\frac{3}{5}$ do valor da prova, responda:

a) Qual fração representa a nota de Ana?
b) Qual número decimal representa a nota de Ana?

Escreva aqui como você calculou a nota de Ana.

2) O novo aplicativo de mobilidade urbana, *FractionX*, implantado na cidade de *Fraçolândia* define o preço a ser pago por viagens em carros cadastrados no aplicativo, segundo a função $P(x) = \frac{7}{5}\,x + \frac{1}{5}\,t + \frac{23}{5}$. Nessa função, $\boldsymbol{P}$ indica o preço a pagar, em reais; $\boldsymbol{x}$ indica a distância percorrida na viagem, em km; $\boldsymbol{t}$ indica o tempo de espera, em caso de engarrafamentos no trânsito e a fração $\frac{23}{5}$ representa o custo fixo, em reais, a ser pago em qualquer corrida, independentemente do deslocamento do automóvel. Um morador dessa cidade realizou uma viagem pelo aplicativo. A distância percorrida no percurso foi de 10 km e o tempo de espera num engarrafamento foi de 8 minutos. Sendo assim, responda:

a) Que fração representa o preço a pagar $\boldsymbol{P}$?
b) Que valor, em reais, será pago pela corrida?

[45] O objetivo se referencia, parcialmente, nas habilidades (EF06MA08): "reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica" (BRASIL, 2018, p. 301); (EF06MA09): "resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora" (BRASIL, 2018, p. 301) e (EF06MA10): "resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária" (BRASIL, 2018, p. 301).

Atividade 7A

A atividade tem por objetivo[46] favorecer o desenvolvimento das seguintes habilidades:

- identificar a relação de equivalência entre frações;
- resolver problemas de adição envolvendo duas frações com denominadores diferentes;
- construir sequência com quatro números fracionários, sendo o primeiro termo a fração $\frac{1}{4}$ e cada termo subsequente obtido pela adição de $\frac{1}{2}$ ao anterior.

Orientações para o professor

- Avaliar a possibilidade de manter a composição dos grupos já definida para as atividades anteriores, fazendo apenas as alterações que julgar necessárias.
- Os exercícios 3 e 4 envolvem objetivos ligados ao favorecimento da habilidade de construir a representação geométrica da função polinomial de 1º grau: $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$, (com $x \in N^*$)[47]. Essa função está associada à progressão aritmética $a_n = \frac{1}{4} + (n-1).\frac{1}{2}$, sendo n um número natural diferente de zero. O gráfico a ser construído no exercício 4 envolverá a representação do alinhamento dos pontos que associam ordem e termo dessa progressão aritmética. Neste exercício, se necessário, chamar a atenção dos estudantes para não traçarem a reta unindo os pontos representados no plano cartesiano, uma vez que o conjunto domínio da função está restrito à N^*.

1) (Adaptada[48]) Qual é a sequência de quatro frações, sendo a primeira fração $\frac{1}{4}$ e cada fração subsequente obtida pela adição de $\frac{1}{2}$ à fração anterior?

2) Qual seria a quinta fração dessa sequência?

3) Completem a tabela a seguir, colocando a fração correspondente a cada um dos termos da sequência descrita no exercício 1:

---

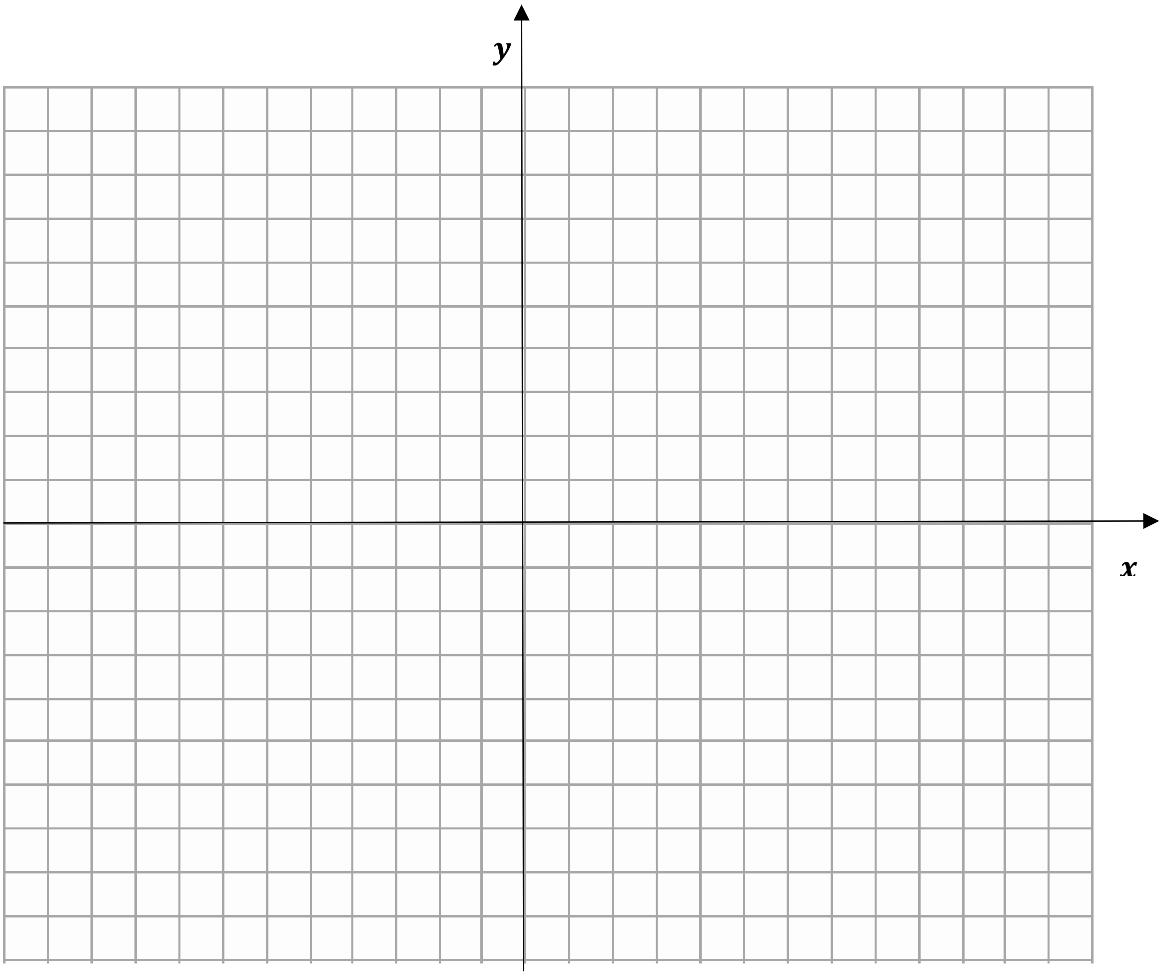
[46] O objetivo se referencia, parcialmente, nas habilidades (EF06MA10): "resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária" (BRASIL, 2018, p. 301); (EM13MAT401): "converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica" (BRASIL, 2018, p. 539) e (EM13MAT507): "identificar e associar progressões aritméticas a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas" (BRASIL, 2018, p. 541).

[47] A opção por domínio discreto, restrito à N^*, objetivou favorecer o desenvolvimento da habilidade "EM13MAT507" (BRASIL, 2018, p. 541). Portanto, a construção do gráfico, orientada no exercício 4, envolverá a representação do alinhamento dos pontos que associam ordem e termo da progressão aritmética $a_n = \frac{1}{4} + (n-1).\frac{1}{2}$, já que $f(1) = \frac{1}{4}$ e para todo $n \in N^*$, $f(n+1) - f(n) = \frac{1}{2}$.

[48] CARRIÃO, Airton. *Introdução à Função*. Apostila de sala de aula. Educação Básica. Coltec da UFMG, Universidade Federal de Minas Gerais, 2018. Impresso.

Ordem do termo na sequência: ($\boldsymbol{x}$)	Número fracionário correspondente: $\boldsymbol{f}\ (\boldsymbol{x})$
1	
2	
3	
4	

4) Usando os valores da tabela, representem, na estrutura de plano cartesiano a seguir, a situação dada no exercício 1.



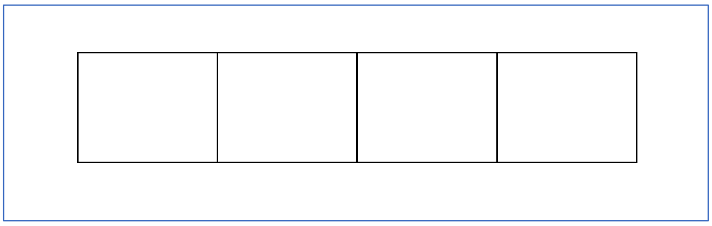
Atividade 7B

A atividade tem por objetivo[49] favorecer o desenvolvimento das seguintes habilidades:

- identificar a relação de equivalência entre frações;
- realizar a adição das frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$ a partir da sua representação em figuras.

Material

- Imprimir ou desenhar, em lâmina para retroprojetor, uma figura retangular, conforme modelo a seguir. Ela deverá ser congruente àquelas apresentadas nos exercícios 2 e 2.1.



- Como alternativa para substituir uso da lâmina, propomos o exercício 2.1, que envolve uma construção com régua e lápis.

Orientações para o professor

- Aplicar esta atividade apenas nos grupos em que os estudantes apresentarem dúvidas ao montar a sequência de frações composta por $\frac{1}{4}$, como primeiro termo, e cada termo subsequente obtido pela adição de $\frac{1}{2}$ ao anterior.
- Antes de entregar a atividade, sugerir que os estudantes assistam a um vídeo curto (4:55 minutos) pelo Youtube. O vídeo desenvolve a adição e a subtração das frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{2}$. O *link* para acessá-lo é https://youtu.be/B1vfPImhloQ.
- Após o vídeo, entregar a atividade e, caso seja escolhido o exercício 2, entregar também a lâmina para cada um dos estudantes do grupo.
- Finalizada a atividade, instruir os estudantes a retomar a 7A e concluí-la.

1) Acessem o *link*, https://youtu.be/B1vfPImhloQ e assistam a um vídeo curto (4:55 minutos) pelo Youtube e conheçam uma forma muito interessante de realizar a adição e a subtração de duas frações com denominadores diferentes.

2) No exercício 1 da atividade 7A, vocês deverão adicionar as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$ para obterem a segunda fração da sequência. Reparem que as partes coloridas, nas figuras a seguir, representam essas duas frações e têm tamanhos diferentes, tornando essa "missão impossível", pois só podemos "somar" quantidades de objetos iguais ou de mesmo nome, para obter a quantidade total do conjunto formado por todos eles. *Por exemplo, a operação 2 bananas + 2 maçãs, não nos dá como resultado 4 bananas nem 4 maçãs, mas podemos dizer que obtemos 4 frutas, que é a denominação comum*

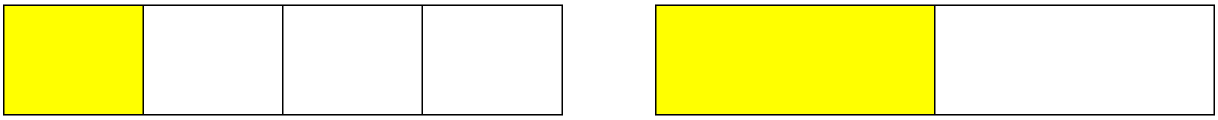
---

[49] O objetivo se referencia, parcialmente, nas habilidades (EF06MA07): "compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes" (BRASIL, 2018, p. 301) e (EF06MA10): "resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária" (BRASIL, 2018, p. 301). A habilidade (EF05MA04): "identificar frações equivalentes" (BRASIL, 2018, p. 295), é contemplada, integralmente, pela atividade.

aos objetos juntados. Dessa forma, para adicionar as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$, vocês precisarão realizar uma manobra para obterem denominadores comuns.

Pista para a manobra

Sobreponham a lâmina transparente a uma das figuras, de forma que as duas figuras fiquem divididas em partes iguais, conforme foi mostrado no vídeo. Aí sim, vocês poderão adicionar $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{4}$.



$\frac{1}{4}$ **+** $\frac{1}{2}$

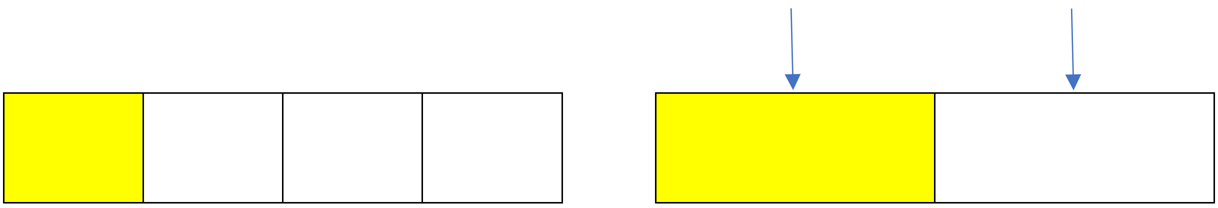
a) Reescrevam essa adição usando frações com denominadores iguais.
b) Qual é o segundo termo da sequência apresentada no exercício 1 da atividade 7A?
c) Usem o resultado encontrado e voltem à atividade 7A, para concluí-la.

Exercício alternativo

2.1) No exercício 1 da atividade 7A, vocês deverão adicionar as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$ para obterem a segunda fração da sequência. Reparem que as partes coloridas, nas figuras a seguir, representam essas duas frações e têm tamanhos diferentes, tornando essa "missão impossível", pois só podemos "somar" quantidades de objetos iguais ou de mesmo nome, para obter a quantidade total do conjunto formado por todos eles. *Por exemplo, a operação 2 bananas + 2 maçãs, não nos dá como resultado 4 bananas nem 4 maçãs, mas podemos dizer que obtemos 4 frutas, que é a denominação comum aos objetos juntados.* Dessa forma, para adicionar as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$, vocês precisarão realizar uma manobra para obterem denominadores comuns.

Pista para a manobra

Usando régua e lápis, sigam o sentido das setas e tracem linhas, fazendo duas divisões na segunda figura, de modo que ela fique dividida em partes idênticas às da primeira. Aí sim, vocês poderão adicionar $\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{4}$.



$\frac{1}{4}$ **+** $\frac{1}{2}$

a) Reescrevam essa adição usando frações com denominadores iguais.
b) Qual é o segundo termo da sequência apresentada no exercício 1 da atividade 7A?
c) Usem o resultado encontrado e voltem à atividade 7A, para concluí-la.

Atividade 7C

A atividade tem por objetivo[50] favorecer o desenvolvimento das seguintes habilidades:

- identificar a relação de equivalência entre frações;
- realizar a adição de duas frações com denominadores diferentes;
- determinar sequência de frações a partir da adição de frações com denominadores diferentes.

Orientações para o professor

- Propor esta atividade aos estudantes que necessitam compreender representações conceituais desenvolvidas nas atividades 7A e/ou 7B.
- Indicar a atividade para realização extraclasse.

1) Represente as frações $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{8}$ nas figuras abaixo e explique como resolver a adição entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{8}$.
Use régua para dividir as figuras em partes iguais.

2) Complete a sequência de frações a seguir. Use a soma que você encontrou no exercício anterior como primeiro termo da sequência.

$$\square + \frac{1}{4} = \square + \frac{1}{4} = \square + \frac{1}{4} = \square$$

3) O resultado que você encontrou é maior ou menor que um inteiro? Por quê?

[50] O objetivo se referencia, parcialmente, nas habilidades (EF06MA07): “compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes” (BRASIL, 2018, p. 301) e (EF06MA10): “resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária” (BRASIL, 2018, p. 301). A habilidade (EF05MA04): “identificar frações equivalentes” (BRASIL, 2018, p. 295), é contemplada, integralmente, pela atividade.

Atividade 8A

A atividade tem por objetivo[51] favorecer o desenvolvimento das seguintes habilidades:

- identificar a relação de equivalência entre frações;
- resolver problemas de adição envolvendo duas frações com denominadores diferentes;
- construir sequência com quatro números fracionários, sendo o primeiro termo a fração $\frac{1}{2}$ e cada termo subsequente obtido pela adição de $\frac{1}{3}$ ao anterior.

Orientações para o professor

- Avaliar a possibilidade de manter a composição dos grupos já definida para as atividades anteriores, fazendo apenas as alterações que julgar necessárias.
- Os exercícios 3 e 4 envolvem objetivos ligados ao favorecimento da habilidade de construir a representação geométrica da função polinomial de 1º grau: $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$, (com $x \in N^*$)[52]. Essa função está associada à progressão aritmética $a_n = \frac{1}{2} + (n-1).\frac{1}{3}$, sendo n um número natural diferente de zero. O gráfico a ser construído no exercício 4 envolverá a representação do alinhamento dos pontos que associam ordem e termo dessa progressão aritmética. Neste exercício, se necessário, chamar a atenção dos estudantes para não traçarem a reta unindo os pontos representados no plano cartesiano, uma vez que o conjunto domínio da função está restrito à N^*.

1) (Adaptada[53]) Qual é a sequência de quatro frações, sendo a primeira fração $\frac{1}{2}$ e cada fração subsequente obtida pela adição de $\frac{1}{3}$ à fração anterior?

2) Qual seria a sétima fração dessa sequência?

3) Completem a tabela a seguir, colocando a fração correspondente a cada um dos termos da sequência descrita no exercício 1:

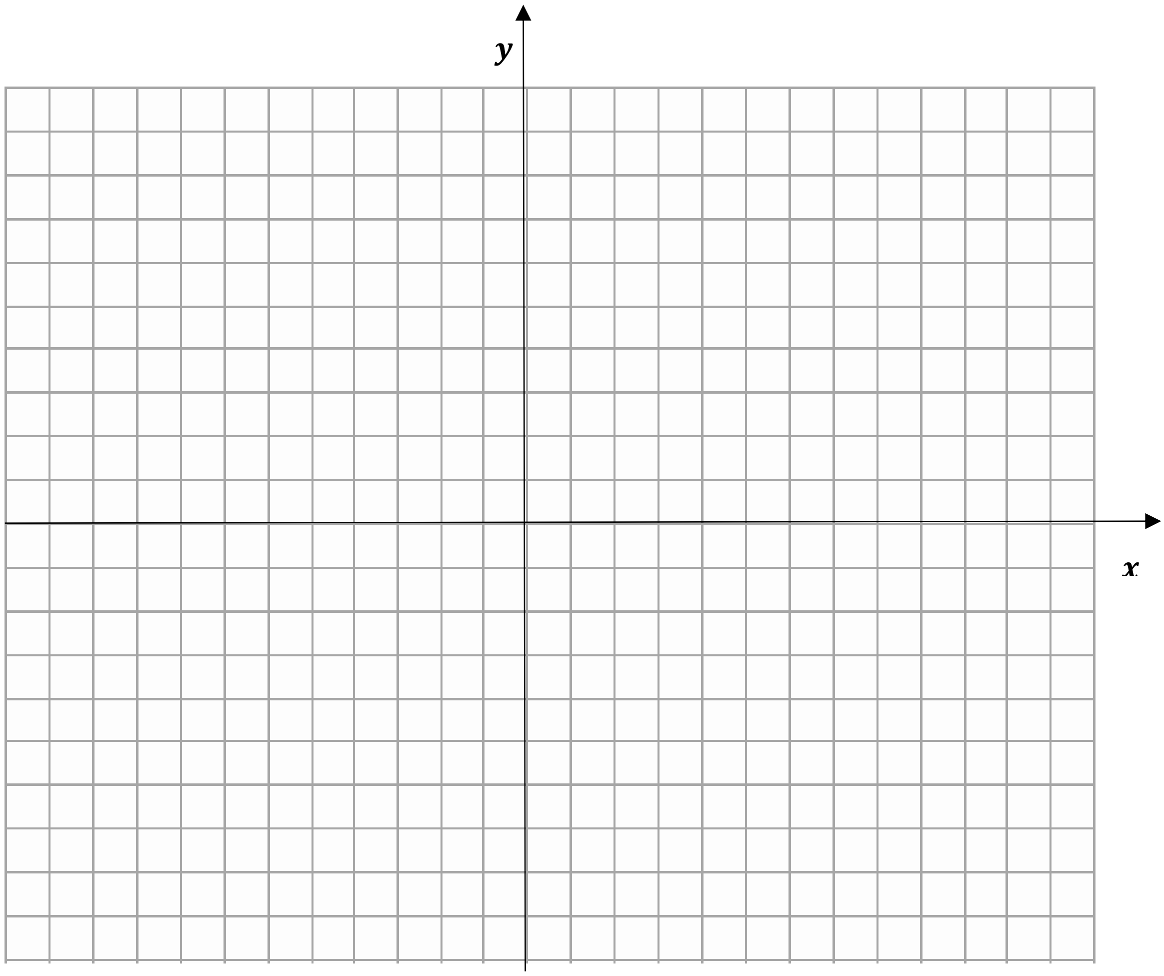
[51] O objetivo se referencia, parcialmente, nas habilidades (EF06MA10): "resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária" (BRASIL, 2018, p. 301); (EM13MAT401): "converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica" (BRASIL, 2018, p. 539) e (EM13MAT507): "identificar e associar progressões aritméticas a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas" (BRASIL, 2018, p. 541).

[52] A opção por domínio discreto, restrito à N^*, objetivou favorecer o desenvolvimento da habilidade "EM13MAT507" (BRASIL, 2018, p. 541). Portanto, a construção do gráfico, orientada no exercício 4, envolverá a representação do alinhamento dos pontos que associam ordem e termo da progressão aritmética $a_n = \frac{1}{2} + (n-1).\frac{1}{3}$, já que $f(1) = \frac{1}{2}$ e para todo $n \in N^*$, $f(n+1) - f(n) = \frac{1}{3}$.

[53] CARRIÃO, Airton. *Introdução à Função*. Apostila de sala de aula. Educação Básica. Coltec da UFMG, Universidade Federal de Minas Gerais, 2018. Impresso.

Ordem do termo na sequência: (x)	Número fracionário correspondente: $f\ (x)$
1	
2	
3	
4	

4) Usando os valores da tabela, representem, na estrutura de plano cartesiano a seguir, a situação dada no exercício 1.



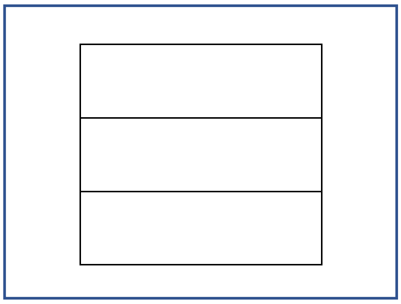
Atividade 8B

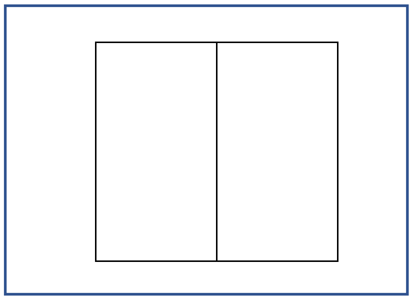
A atividade tem por objetivo[54] favorecer o desenvolvimento das seguintes habilidades:

- identificar a relação de equivalência entre frações;
- realizar a adição das frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ a partir da sua representação em figuras.

Material

- Imprimir ou desenhar, em lâmina para retroprojetor, duas figuras retangulares, conforme modelo a seguir. Elas deverão ser congruentes àquelas apresentadas nos exercícios 2 e 2.1.





- Como alternativa para substituir uso da lâmina, propomos o exercício 2.1, que envolve uma construção com régua e lápis.

Orientações para o professor

- Aplicar esta atividade apenas nos grupos em que os estudantes apresentarem dúvidas ao montar a sequência de frações composta por $\frac{1}{2}$, como primeiro termo, e cada termo subsequente obtido pela adição de $\frac{1}{3}$ ao anterior.
- Antes de entregar a atividade, sugerir que os estudantes assistam a um vídeo curto (5:15 minutos) pelo Youtube. O vídeo desenvolve a adição e a subtração das frações $\frac{2}{6}$ e $\frac{1}{4}$. O *link* para acessá-lo é https://youtu.be/8tB42QPwgcg.
- Após o vídeo, entregar a atividade e, caso seja escolhido o exercício 2, entregar também a lâmina para cada um dos estudantes do grupo.
- Finalizada a atividade, instruir os estudantes a retomar a 8A e concluí-la.

1) Acessem o *link* https://youtu.be/8tB42QPwgcg e assistam a um vídeo curto (5:15 minutos) pelo Youtube. O vídeo apresenta uma forma muito interessante de realizar a adição e a subtração de duas frações com denominadores diferentes.

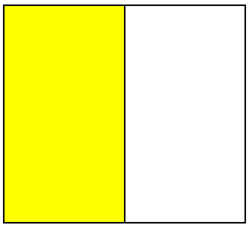
---

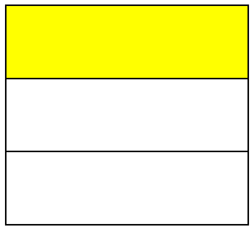
[54] O objetivo se referencia, parcialmente, nas habilidades (EF06MA07): “compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes” (BRASIL, 2018, p. 301) e (EF06MA10): “resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária” (BRASIL, 2018, p. 301). A habilidade (EF05MA04): “identificar frações equivalentes” (BRASIL, 2018, p. 295), é contemplada, integralmente, pela atividade.

2) As figuras a seguir são do mesmo tamanho e nelas estão representadas duas frações. Na primeira, a parte colorida representa $\frac{1}{2}$ da figura e, na segunda, a parte colorida representa $\frac{1}{3}$. O sinal de mais está indicando uma adição a ser realizada. Assim como na atividade 7B, as partes coloridas têm tamanhos diferentes, o que exigirá que façam uma manobra.

Pista para a manobra

Sobreponham as lâminas transparentes às duas figuras, de forma que elas fiquem divididas em partes iguais, conforme foi mostrado no vídeo. Dessa forma, vocês poderão adicionar $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{2}$.





$$\frac{1}{2} \qquad + \qquad \frac{1}{3}$$

a) Que nova fração representa $\frac{1}{2}$?
b) Que nova fração representa $\frac{1}{3}$?
c) Usando as novas frações, reescrevam a adição $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ e calculem o seu resultado.

3) Usem o resultado encontrado e voltem à atividade 8A, para concluí-la.

Exercício alternativo

2.1) As figuras a seguir são do mesmo tamanho e nelas estão representadas duas frações. Na primeira, a parte colorida representa $\frac{1}{2}$ da figura e, na segunda, a parte colorida representa $\frac{1}{3}$. O sinal de mais está indicando uma adição a ser realizada. Assim como na atividade 7B, as partes coloridas têm tamanhos diferentes, o que exigirá que façam uma manobra.

Pista para a manobra

Usando régua e lápis, sigam o sentido das setas e tracem linhas, fazendo novas divisões nas figuras, de modo que todas as suas partes fiquem do mesmo tamanho. Aí sim, vocês poderão adicionar $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{2} \qquad + \qquad \frac{1}{3}$$

a) Que nova fração representa $\frac{1}{2}$?

b) Que nova fração representa $\frac{1}{3}$?

c) Usando as novas frações, reescrevam a adição $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ e calculem o seu resultado.

3) Usem o resultado encontrado e voltem à atividade 8A, para concluí-la.

Atividade 8C

A atividade tem por objetivo[55] favorecer o desenvolvimento das seguintes habilidades:

- identificar a relação de equivalência entre frações;
- realizar a adição de duas frações com os mesmos denominadores e/ou com denominadores diferentes;
- construir sequência com cinco números fracionários, sendo o primeiro termo a fração $\frac{1}{4}$ e cada termo subsequente obtido pela adição de $\frac{1}{2}$ ao anterior.

Orientações para o professor

- Propor esta atividade aos estudantes que necessitam compreender representações conceituais desenvolvidas nas atividades 8A e/ou 8B.
- Indicar a atividade para realização extraclasse.

1) (Adaptada[56]) Complete as frações cruzadas. A primeira linha traz a adição $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, já realizada em sala e que pode servir de modelo para você fazer as outras adições.

Usando as sequências dos múltiplos de 2 e de 3, você encontra os denominadores iguais para que possa adicionar frações que representam partes iguais. Dê o resultado na forma de fração irredutível.

Múltiplos de 2:
Múltiplos de 3:

$\frac{1}{2}$	+	$\frac{1}{3}$	=	—
+		+		+
—	+	$\frac{3}{2}$	=	$\frac{13}{6}$
=		=		=
$\frac{7}{6}$	+	—	=	—

Cálculos

2) (Adaptada[57]) Qual é a sequência de quatro frações, sendo a primeira fração $\frac{1}{4}$ e cada fração subsequente obtida pela adição de $\frac{1}{2}$ à fração anterior?

[55] O objetivo se referencia, parcialmente, nas habilidades (EF06MA07): “compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes” (BRASIL, 2018, p. 301) e (EF06MA10): “resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária” (BRASIL, 2018, p. 301). A habilidade (EF05MA04): “identificar frações equivalentes” (BRASIL, 2018, p. 295), é contemplada, integralmente, pela atividade.
[56] FARIA, Diogo. Atividade adaptada, mantida a concepção original. *Descobrindo os segredos das frações*. Apostila de sala de aula. Educação Básica. Centro Pedagógico da UFMG, Universidade Federal de Minas Gerais, mar. 2018. Impresso.
[57] CARRIÃO, Airton. *Introdução à Função*. Apostila de sala de aula. Educação Básica. Coltec da UFMG, Universidade Federal de Minas Gerais, 2018. Impresso.

Atividade 9A

A atividade tem por objetivo[58] favorecer o desenvolvimento das seguintes habilidades:

- identificar a relação de equivalência entre frações;
- resolver e elaborar problemas de subtração envolvendo duas frações com denominadores diferentes;
- construir sequência com quatro números fracionários, sendo o primeiro termo a fração $\frac{3}{4}$ e cada termo subsequente obtido subtraindo-se $\frac{1}{3}$ do termo anterior.

Orientações para o professor

- Avaliar a possibilidade de manter a composição dos grupos já definida para as atividades anteriores, fazendo apenas as alterações que julgar necessárias.
- Os exercícios 3 e 4 envolvem objetivos ligados ao favorecimento da habilidade de construir a representação geométrica da função polinomial de 1º grau: $f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{12}$, (com $x \in N^{*}$)[59]. Essa função está associada à progressão aritmética $a_n = \frac{3}{4} - (n-1).\frac{1}{3}$, sendo n um número natural diferente de zero. O gráfico a ser construído no exercício 4 envolverá a representação do alinhamento dos pontos que associam ordem e termo dessa progressão aritmética. Neste exercício, se necessário, chamar a atenção dos estudantes para não traçarem a reta unindo os pontos representados no plano cartesiano, uma vez que o conjunto domínio da função está restrito à N^{*}.

1) (Adaptada[60]) Qual é a sequência de quatro frações, sendo a primeira fração $\frac{3}{4}$ e cada fração subsequente obtida subtraindo-se $\frac{1}{3}$ da fração anterior?

2) Inventem um problema envolvendo a subtração de frações com denominadores diferentes e resolvam-no.

3) Completem a tabela a seguir, colocando a fração correspondente a cada um dos termos da sequência descrita no exercício 1:

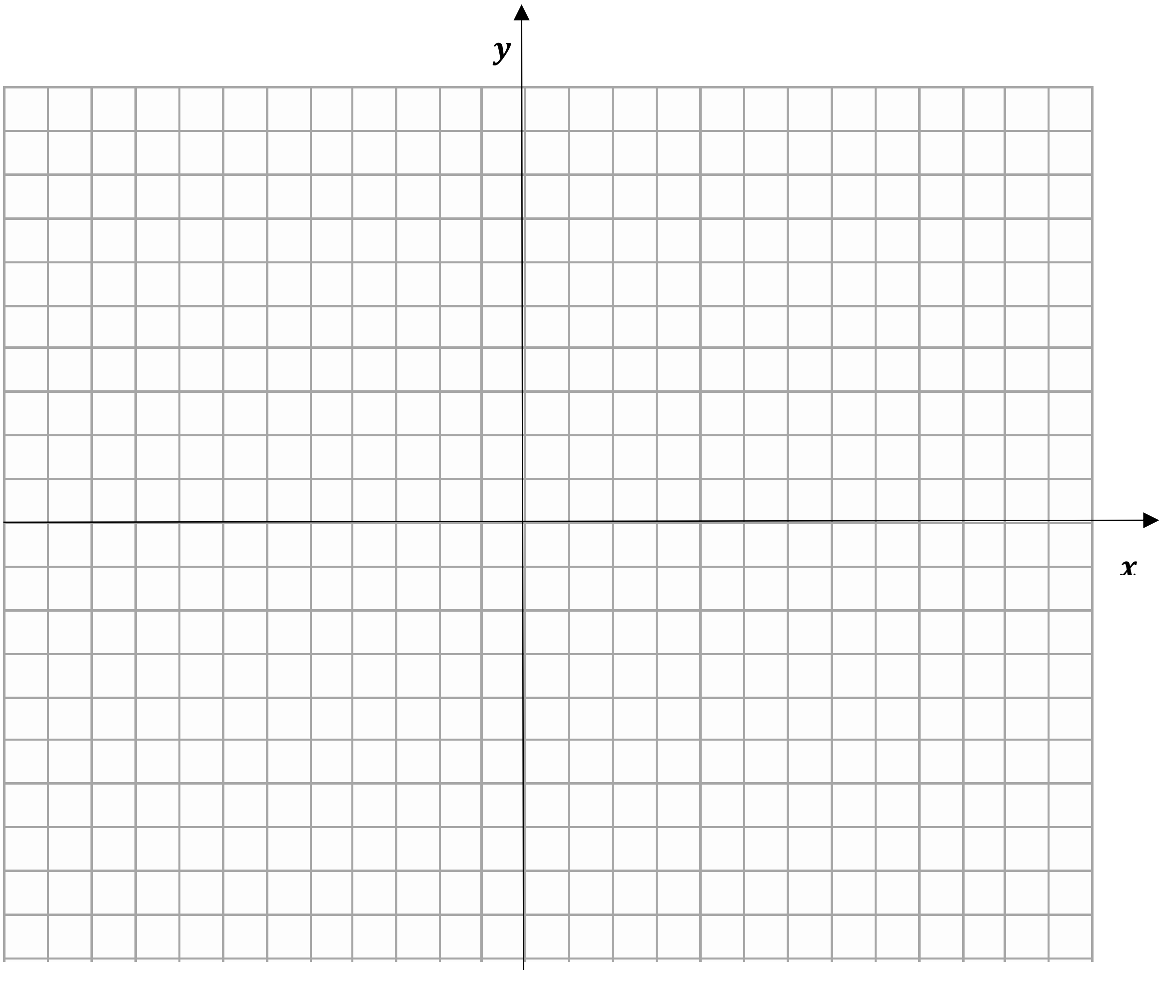
[58] O objetivo se referencia, parcialmente, nas habilidades (EF06MA10): “resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária” (BRASIL, 2018, p. 301); (EM13MAT401): “converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica” (BRASIL, 2018, p. 539) e (EM13MAT507): “identificar e associar progressões aritméticas a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas” (BRASIL, 2018, p. 541).

[59] A opção por domínio discreto, restrito à N^{*}, objetivou favorecer o desenvolvimento da habilidade “EM13MAT507” (BRASIL, 2018, p. 541). Portanto, a construção do gráfico, orientada no exercício 4, envolverá a representação do alinhamento dos pontos que associam ordem e termo da progressão aritmética $a_n = \frac{3}{4} - (n-1).\frac{1}{3}$, já que $f(1) = \frac{3}{4}$ e para todo $n \in N^{*}$, $f(n+1) - f(n) = -\frac{1}{3}$.

[60] CARRIÃO, Airton. *Introdução à Função*. Apostila de sala de aula. Educação Básica. Coltec da UFMG, Universidade Federal de Minas Gerais, 2018. Impresso.

Ordem do termo na sequência: **(x)**	Número fracionário correspondente: **$f\ (x)$**
1	
2	
3	
4	

4) Usando os valores da tabela, representem, na estrutura de plano cartesiano a seguir, a situação dada no exercício 1.



Atividade 9B

A atividade tem por objetivo[61] favorecer o desenvolvimento das seguintes habilidades:

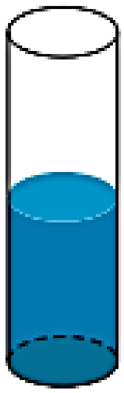
- utilizar a noção de fração como operador;
- identificar a relação de equivalência entre frações;
- realizar a subtração das frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ a partir da sua representação em figuras.

Orientações para o professor

- Aplicar esta atividade apenas nos grupos em que os estudantes apresentarem dúvidas em obter as frações da sequência, que tem por primeiro termo $\frac{3}{4}$ e cada termo subsequente obtido subtraindo-se $\frac{1}{3}$ do termo anterior.
- Finalizada a atividade, instruir os estudantes a retomar a 9A e concluí-la.

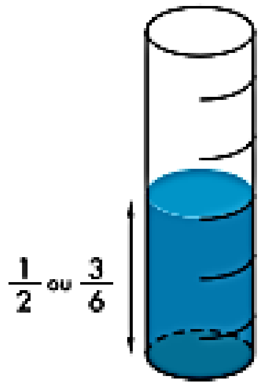
Situação 1

O frasco mostrado na imagem abaixo contém corante a ser usado num experimento. Ele está com $\frac{1}{2}$ da sua capacidade.



Situação 2

A imagem abaixo mostra que a quantidade de corante contida no frasco apresentado na situação 1 é equivalente a $\frac{3}{6}$ da sua capacidade.



O professor de Química realizava um experimento com a turma, ilustrado nas situações 1 e 2. Em certo momento, ele informou que precisaria de menor quantidade de corante. Então pediu à aluna Ana que retirasse do frasco, mostrado na situação 1, quantidade de corante equivalente a $\frac{1}{3}$ da sua capacidade total. Considerando esse pedido e analisando as imagens das duas situações, resolvam:

1) Usando frações com denominadores iguais, escrevam a subtração que representa o pedido feito à Ana e calculem o seu resultado.
2) A quantidade de corante que restará no frasco, a ser usada no experimento, corresponde a que fração da sua capacidade total?
3) Voltem à atividade 9A, para resolvê-la.

---

[61] O objetivo se referencia, parcialmente, nas habilidades (EF06MA07): “compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes” (BRASIL, 2018, p. 301) e (EF06MA10): “resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária” (BRASIL, 2018, p. 301). A habilidade (EF05MA04): “identificar frações equivalentes” (BRASIL, 2018, p. 295), é contemplada, integralmente, pela atividade.

Atividade 9C

A atividade tem por objetivo[62] favorecer o desenvolvimento das seguintes habilidades:

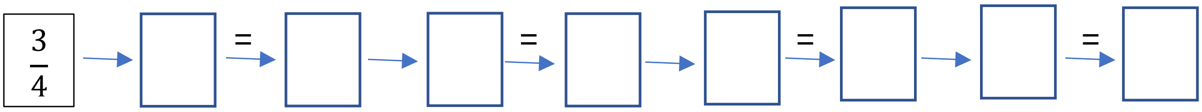
- identificar a relação de equivalência entre frações;
- realizar a subtração de duas frações com denominadores diferentes.

Orientações para o professor

- Propor esta atividade aos estudantes que necessitam compreender representações conceituais desenvolvidas nas atividades 9A e/ou 9B.
- Indicar a atividade para realização extraclasse.

1) Construa o esquema a seguir, seguindo os comandos e resolvendo as operações indicadas:

- 1º passo: subtrair $\frac{1}{2}$ da fração que inicia o esquema.
- 2º passo: adicionar $\frac{1}{3}$ ao resultado anterior.
- 3º passo: subtrair $\frac{4}{3}$ do resultado anterior.
- 4º passo: adicionar $\frac{1}{2}$ ao resultado da operação anterior.



2) O último resultado é maior, menor ou igual a $-\frac{1}{4}$? Por quê?

---

[62] O objetivo se referencia, parcialmente, nas habilidades (EF06MA07): "compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes" (BRASIL, 2018, p. 301) e (EF06MA10): "resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária" (BRASIL, 2018, p. 301). A habilidade (EF05MA04): "identificar frações equivalentes" (BRASIL, 2018, p. 295), é contemplada, integralmente, pela atividade.

Atividade 10A

A atividade tem por objetivo[63] favorecer o desenvolvimento das seguintes habilidades:

- identificar a relação de equivalência entre frações;
- resolver problemas que envolvam a adição de um número fracionário e um número natural, diferente de zero, e a adição de dois números fracionários;
- construir modelo algébrico que represente o perímetro de um quadrado de lado $x + a$, sendo x um número racional na representação fracionária.

Material

10 folhas de papel A4 colorido.

Orientações para o professor

- Avaliar a possibilidade de manter a composição dos grupos já definida para as atividades anteriores, fazendo apenas as alterações que julgar necessárias.
- Reproduzir, em papel A4 colorido, as figuras apresentadas no exercício 1.
- Distribuir para cada um dos estudantes, solicitando que recortem as quatro peças e componham um quadrado usando todas elas.
- A utilização dos exercícios 3 e 4 ficará a critério do professor, por não estarem diretamente ligados às questões da pesquisa. Eles têm por objetivo favorecer o desenvolvimento das seguintes habilidades:

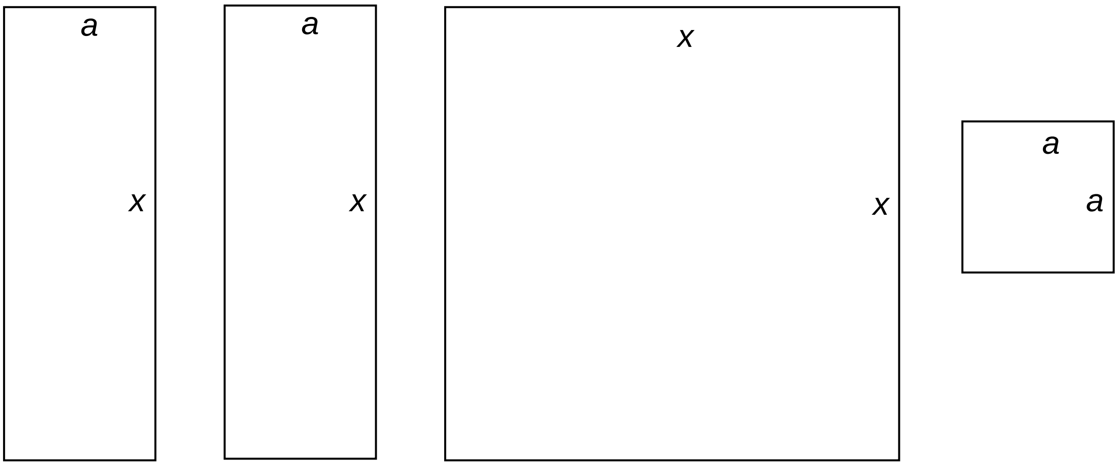
    a) construir tabela representativa do perímetro do quadrado de lado $x + a$;
    b) representar graficamente a variação do perímetro do quadrado de lado $x + a$, analisando e classificando a função envolvida;
    c) construir modelo empregando a função polinomial de 1º grau para representar o perímetro do quadrado de lado $x + a$;
    d) converter a representação algébrica da função polinomial de 1º grau, que expressa o perímetro do quadrado de lado $x + a$, em representação geométrica no plano cartesiano, identificando o seu comportamento proporcional.

1) (Adaptada[64]) Vocês estão recebendo quatro retângulos, sendo dois deles quadrados. Eles são congruentes aos das figuras a seguir. Recortem as quatro peças, formem um único quadrado e colem-no no espaço indicado.

---

[63] O objetivo se referencia, parcialmente, nas habilidades (EF06MA10): “resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária” (BRASIL, 2018, p. 301); (EM13MAT302): “construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais” (BRASIL, 2018, p. 536); (EM13MAT401): “converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica” (BRASIL, 2018, p. 539) e (EM13MAT506): “representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas” (BRASIL, 2018, p. 541).

[64] MONTEIRO, Eliziê Frans de Castro. *Estudo de expressões algébricas*. Atividade de sala de aula. Educação Básica. Colégio Santa Marcelina, Belo Horizonte, 2011. Impresso.



Cole aqui o seu quadrado

a) Perímetro de um quadrado é a soma das medidas de seus quatro lados. Escrevam a expressão algébrica que representa o perímetro $\boldsymbol{P}$ do quadrado que vocês formaram.

b) Considerando $x = \frac{1}{2}$ cm e $a = 2$ cm, encontrem a fração que representa o lado do quadrado que vocês formaram e a fração que representa o seu perímetro.

c) O perímetro do quadrado que vocês formaram pode ser representado por um número inteiro ou não?

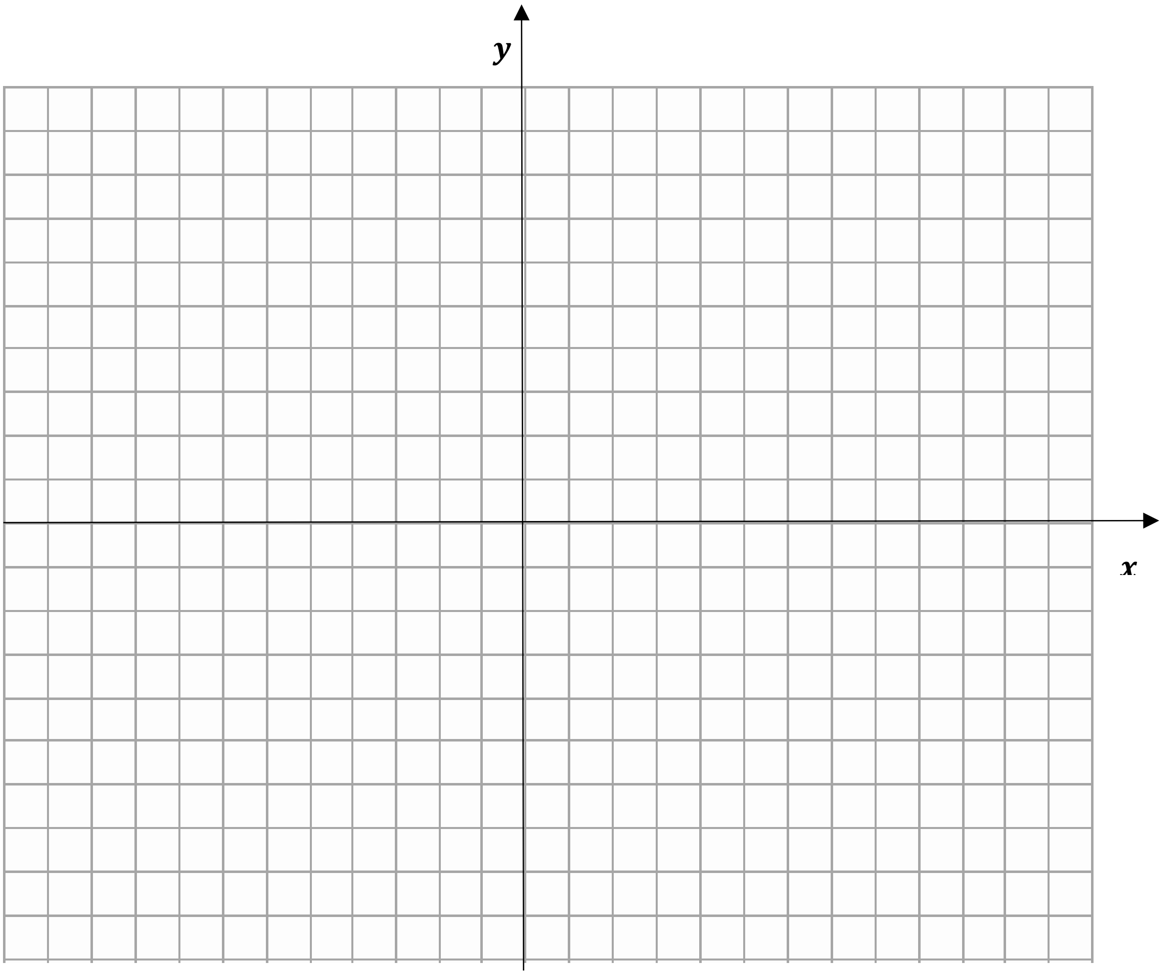
d) E se vocês mantiverem o valor de *x* e alterarem o valor de *a* para $\frac{1}{4}$ cm, qual será a fração correspondente ao perímetro do quadrado que vocês formaram? Essa fração representa qual número inteiro?

e) Mantenham o valor de *x* e inventem um valor fracionário para *a*. Qual será a fração correspondente ao perímetro do quadrado que vocês formaram?

2) Transfiram para a tabela a seguir, os valores encontrados para o perímetro do quadrado. O último valor de *a* não foi apresentado na tabela. Ele deverá ser registrado pelo grupo, conforme o valor que vocês inventaram.

Valor de x	**Valor de a**	**Perímetro (P) do quadrado**
$\frac{1}{2}$	2	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	
$\frac{1}{2}$		

3) Usando os valores da tabela, representem, na estrutura de plano cartesiano a seguir, a variação do perímetro do quadrado que vocês formaram.



4) O gráfico construído representa uma função polinomial de 1º grau? Em caso afirmativo, escrevam a função que determina o perímetro P do quadrado que vocês formaram. Usem a expressão algébrica que vocês escreveram no exercício 1, alternativa <u>a</u>.

Atividade 10B

A atividade tem por objetivo[65] favorecer o desenvolvimento das seguintes habilidades:

- identificar a relação de equivalência entre 1 inteiro e a fração $\frac{2}{2}$;
- realizar a adição da fração $\frac{1}{2}$ a 2 inteiros, a partir da sua representação em figuras.

Orientações para o professor

- Aplicar esta atividade apenas nos grupos em que os estudantes apresentarem dúvidas em obter o perímetro do quadrado de lado $x + a$, sendo x um número racional na representação fracionária e a um número natural ($a \neq 0$).
- Finalizada a atividade, instruir os estudantes a retomar a 10A e concluí-la.

As três figuras a seguir estão representando barras de chocolate. Na primeira, foi colorido o pedaço equivalente a $\frac{1}{2}$ barra de chocolate. As outras duas representam duas barras inteiras de chocolate.

1) No exercício 1 (alternativa *b*) da atividade 10A, vocês precisam encontrar a fração que resulta da adição entre $\frac{1}{2}$ e 2. Façam essa operação usando as barras de chocolate. Para isso, dividam cada uma das barras inteiras ao meio, assim como foi feito na primeira barra. Dessa forma, poderão adicionar pedaços de mesmo tamanho. Usem a régua para fazer essa divisão.

2) Se comermos 2 barras inteiras de chocolate, mais $\frac{1}{2}$ de outra barra, que fração de chocolate teremos comido?

3) Usem o resultado encontrado e voltem à atividade 10A, para concluí-la.

---

[65] O objetivo se referencia, parcialmente, nas habilidades (EF06MA07): “compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes” (BRASIL, 2018, p. 301) e (EF06MA10): “resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária” (BRASIL, 2018, p. 301). A habilidade (EF05MA04): “identificar frações equivalentes” (BRASIL, 2018, p. 295), está contemplada, integralmente, pela atividade.

Atividade 10C

A atividade tem por objetivo[66] favorecer o desenvolvimento das seguintes habilidades:

- representar um número natural, diferente de zero, na forma fracionária;
- realizar a adição entre uma fração e um número natural, diferente de zero;
- comparar a soma a uma das parcelas da adição, para descobrir a outra parcela dessa adição.

Orientações para o professor

- Propor esta atividade aos estudantes que necessitam compreender representações conceituais desenvolvidas nas atividades 10A e/ou 10B.
- Indicar a atividade para realização extraclasse.

1) Por que o resultado da adição $2 + \frac{1}{5}$ é igual a $\frac{11}{5}$?

2) Com base em sua resposta, resolva as adições a seguir, justificando o seu resultado:

a) $4 + \frac{1}{5} = \frac{\quad}{\quad}$, porque ____.

b) $6 + \frac{1}{5} = \frac{\quad}{\quad}$, porque ____.

c) $7 + \frac{1}{5} = \frac{\quad}{\quad}$, porque ____.

2) Nas adições abaixo, a soma já foi calculada. Descubra o número natural a ser adicionado às frações:

a) $\boxed{} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

b) $\boxed{} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

c) $\boxed{} + \frac{2}{5} = \frac{12}{5}$

d) $\boxed{} + \frac{3}{5} = \frac{28}{5}$

[66] O objetivo se referencia, parcialmente, nas habilidades (EF06MA07): “compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes” (BRASIL, 2018, p. 301); (EF06MA10): “resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária” (BRASIL, 2018, p. 301). A habilidade (EF05MA04): “identificar frações equivalentes” (BRASIL, 2018, p. 295), está contemplada, integralmente, pela atividade.

5 UMA ANÁLISE DO CONJUNTO DE ATIVIDADES

Nossa análise está de acordo com Silva e Menezes (2005). Ela se caracteriza por ser descritiva e interpretativa, uma decorrência da natureza qualitativa da pesquisa. Leva em conta a potencialidade do conjunto de atividades produzidas pela pesquisa em favorecer o desenvolvimento da capacidade operatória com números racionais na forma fracionária no Ensino Médio.

Desenvolvemos nossa discussão considerando o processo de construção das atividades, as estratégias indicadas na sua realização e suas interfaces com as questões e os objetivos da pesquisa.

Essa análise foi apresentada, separadamente, respeitando cada bloco de atividades, formado pelos tipos A, B e C. Desse modo, atividades 1A, 1B e 1C constituem um bloco. Atividades 2A, 2B e 2C constituem outro bloco, e assim sucessivamente. A exceção ocorreu nos blocos 7, 8 e 9. Para eles, propomos uma discussão conjunta pelo fato de as atividades apresentarem objetivos comuns e composição semelhante. Essa forma de estruturar a discussão foi motivada tanto pela interdependência entre os tipos A, B e C quanto pela perspectiva sequencial e progressiva das habilidades exploradas.

Levou em consideração, dentre as referências teóricas de suporte da pesquisa, (a) Druck (1995), sobre a importância de se garantir aos alunos convívio, discussão e atribuição de significados às noções cruciais à compreensão de frações, (b) Onuchic e Allevato (2011), sobre potencialidades do uso de problemas na construção de conhecimentos matemáticos e (c) Ponte (2003), sobre a fundamentalidade de que a aprendizagem escolar da Matemática leve em conta, além do conhecimento de fatos específicos e do domínio de processos, a capacidade de empregar raciocínio e de usar esses conhecimentos e processos para lidar com situações das mais diversas, de modo crítico e reflexivo.

Também foram consideradas habilidades da BNCC (BRASIL, 2018) para o estudo da função polinomial de 1º grau e para o estudo de algumas das noções associadas ao conceito de fração, à relação de equivalência e às operações de adição e subtração, como noções fundamentais à compreensão de frações, conforme Druck (1995).

A discussão da atividade 2A incluiu comentários sobre a resolução do exercício 2, como forma de explicitar alguns aspectos que podem ser explorados pelo professor durante o seu desenvolvimento em sala de aula.

Nossa análise considerou pontos de aproximação e de distanciamento em relação a questões e propósitos da pesquisa:

1) orientações teóricas que mais diretamente influenciaram a concepção e a estruturação de cada uma das atividades;
2) diálogos e avanços em relação às experiências vivenciadas no estudo exploratório;
3) perspectivas e desafios da vinculação entre o estudo da função polinomial de 1º grau e a exploração de noções relacionadas ao conceito de fração e às operações de adição e subtração com números racionais na forma fracionária;
4) potencialidades e limites em favorecer o desenvolvimento da competência operatória de estudantes do Ensino Médio, considerando sua intenção de propiciar intervenção embasada na discussão de aspectos conceituais que os números racionais na forma fracionária envolvem.

5.1 Bloco de atividades 1A, 1B e 1C

As atividades desse bloco exploram a ideia de divisão expressa em relações representadas pela expressão $\frac{Expressão\ algébrica}{Número\ natural}$. Esse objetivo está apoiado em Druck (1995), que considera a ideia de divisão como unificadora das acepções ligadas ao conceito de fração e, parcialmente referenciado, na habilidade EF05MA03 (BRASIL, 2018). Vincula-se à habilidade EF06MA08 (BRASIL, 2018), relacionada à construção de relações entre as representações fracionária e decimal de números racionais positivos, como forma de possibilitar o estudante passar de uma representação a outra.

Considerando funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis, em acordo com a habilidade EF09MA06 (BRASIL, 2018), as relações utilizadas envolveram a área do triângulo em função da sua altura, o número de diagonais de um polígono convexo em função do número de lados, o volume da esfera em função de seu raio e outras representadas pela expressão considerada.

Na atividade do tipo 1A, elaboramos questões que buscaram oportunizar a interpretação dessas relações de dependência, com o objetivo de explorar a ideia de divisão nelas expressa e de relacionar as representações decimal e fracionária de um mesmo número racional. Através de perguntas voltadas para a compreensão das relações e da solicitação de atribuição de valores ímpares como medidas para a altura de um triângulo de base 3 cm, buscamos envolver os estudantes em sua resolução de modo mais propositivo e reflexivo.

A atividade 1B foi orientada pelo mesmo objetivo e envolveu uma abordagem mais intuitiva, ao demandar que as situações dadas fossem relacionadas às suas representações fracionária e decimal e vice-versa. Essa relação abrangeu a habilidade EF07MA08 (BRASIL, 2018).

A realização em grupos, orientada para essas duas categorias, pode potencializar a sua interpretação e favorecer a atribuição de significados para os conceitos abordados.

A atividade 1C, indicada para os estudantes que demonstrarem participação menos ativa nos grupos, privilegia novo contato com os conceitos trabalhados nas atividades A e B e inclui a exigência de desenvolvimento do algoritmo da divisão, favorecendo a retomada dessa operação. Uma vez que se destina a uma parte da turma, impõe ao professor a necessidade de organizar estratégias para verificação e devolutiva.

Avaliamos que as atividades desse bloco são mais fechadas no que se refere à possibilidade de construção de diferentes respostas, apresentando variações apenas no exercício 2 da atividade 1A. Essa característica tende a limitar explorações relacionadas à diversidade de construções entre os grupos.

O foco das perguntas em sublinhar a representação da divisão expressa nas relações buscou evitar o ocorrido no estudo exploratório, onde o enunciado da atividade trouxe a afirmação: *toda fração indica uma divisão*, fato que não mobilizou discussões em nenhum dos grupos. As reflexões sobre possíveis causas das incompreensões dos estudantes nos remeteram, inevitavelmente, à avaliação da nossa tendência em oferecer a eles informações prontas, o que pode estar contribuindo para limitar a sua compreensão, autonomia e autoria. Ponte (2003) enfatiza a importância de que a Matemática escolar lide com os conhecimentos de modo crítico e reflexivo.

Considerando nosso objetivo de intervir nas inabilidades operatórias dos estudantes, avaliamos ser pertinente a vinculação entre a noção de divisão, indicada na representação fracionária de números racionais, e relações que representem funções polinomiais de 1º grau. A exploração simultânea desses conceitos dialoga com nossa busca por formas de abordar temas do currículo do Ensino Médio de modo a propiciar aquisições conceituais com números racionais na forma fracionária.

A elaboração desse bloco de atividades apontou a viabilidade dessa vinculação, particularmente, em situações introdutórias do estudo da função polinomial de 1º grau, o que pode favorecer a consolidação dessa noção essencial à compreensão de frações e evitar a sua retomada através de revisões que têm se mostrado pouco atrativas e eficazes. Acreditamos que esse tipo de abordagem, devidamente planejada, tende a proporcionar aos estudantes oportunidades para superarem algumas de suas incompreensões.

5.2 Bloco de atividades 2A, 2B e 2C

Nesse bloco, buscamos explorar problemas envolvendo a concepção de fração na "acepção relação parte-todo" (DRUCK, 1995, p. 1) e a noção de fração como operador, conforme referência parcial nas habilidades EF06MA09 e EF07MA08 (BRASIL, 2018), ligadas, respectivamente, à resolução de problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e à comparação de frações associadas às ideias de partes de inteiros, razão e operador.

Sua estruturação foi apoiada em Druck (1995), sobre a importância de expor os alunos a situações problema que envolvam o todo e as partes, como condição essencial à compreensão da noção de fração na sua relação parte-todo. Apoiou-se também em Onuchic e Allevato (2011) e Ponte (2003) no que se refere à potencialidade do uso de problemas na mobilização de atitudes exploratórias.

No exercício 1 da atividade 2A, propomos um problema buscando estimular os estudantes a estabelecerem conjecturas para uma faixa salarial, o "todo", que permita a Ana executar seus gastos, as "partes", conforme certas condições impostas. A relação entre as partes e o todo foi explorada no contexto da utilização desse salário e na perspectiva de completamento do inteiro. Ao estabelecermos essa referência mais ampla, associada a um intervalo dentro do qual o salário de Ana possa estar localizado, esperamos propiciar abertura para exploração de valores diversificados e relativização do que se considera o todo e suas partes.

A opção por um problema com essa característica aberta pode ampliar a exploração desses conceitos e oportunizar aos estudantes proposição de valores que os remetam a resultados representados por números racionais inteiros e não inteiros, contribuindo na compreensão do universo desse conjunto numérico. Também acreditamos que essa abertura pode favorecer a abordagem de aspectos relacionados à relativização e à interdependência entre as partes e o todo e à pertinência das respostas em relação aos parâmetros considerados no problema.

A relação funcional entre os gastos de Ana e o seu salário foi utilizada para contextualizar a noção de função polinomial de 1º grau e introduzir a sua representação gráfica, conforme habilidades EF09MA06 e EM13MAT401 (BRASIL, 2018).

Com o intuito de favorecer a identificação da reta na representação da função polinomial de 1º grau, na alternativa *e* do exercício 1, solicitamos a construção do desenho gráfico da função representada pela fração do salário de Ana, a ser destinada ao lazer da família e à compra de artigos pessoais para ela e os filhos. A partir daí, propomos, no exercício 2, as perguntas: O desenho gráfico determina uma reta nesse plano cartesiano? Em caso afirmativo, como vocês podem demonstrar esse fato?

Essa estratégia se fundamenta nos propósitos deste estudo, de privilegiar abordagem conceitual e de colocar os estudantes em posição de centralidade e reflexão sobre os conhecimentos construídos.

Ao propor a atividade 2B, propiciamos uma segunda representação da situação apresentada no problema 2A. Nessa proposta, os estudantes são estimulados a representarem, usando tiras de papel, o inteiro e as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$, correspondentes ao salário de Ana e aos seus gastos, respectivamente. Acreditamos que a utilização do material manipulável para representar a situação matemática exposta no problema pode colaborar na sua compreensão e favorecer a descoberta da parte que falta para completar o inteiro, ou seja, o valor que possibilitará a Ana investir no lazer da família e na compra de artigos pessoais para ela e seus filhos.

A atividade 2C objetivou nova retomada da noção de fração como operador. Partindo de um contexto próximo da realidade atual dos estudantes, o tempo de uso do celular durante a noite e sua influência no aumento do nível de cansaço entre jovens, elaboramos um problema envolvendo a relação funcional entre frações do tempo: horas de uso do celular no período noturno e tempo total (horas destinadas ao descanso noturno). Essa contextualização tende a favorecer o entendimento do problema e contribuir na sua compreensão e na sua resolução. Esse problema apresenta característica fechada e, diferentemente do problema proposto na atividade 2A, suas questões conduzem a respostas únicas.

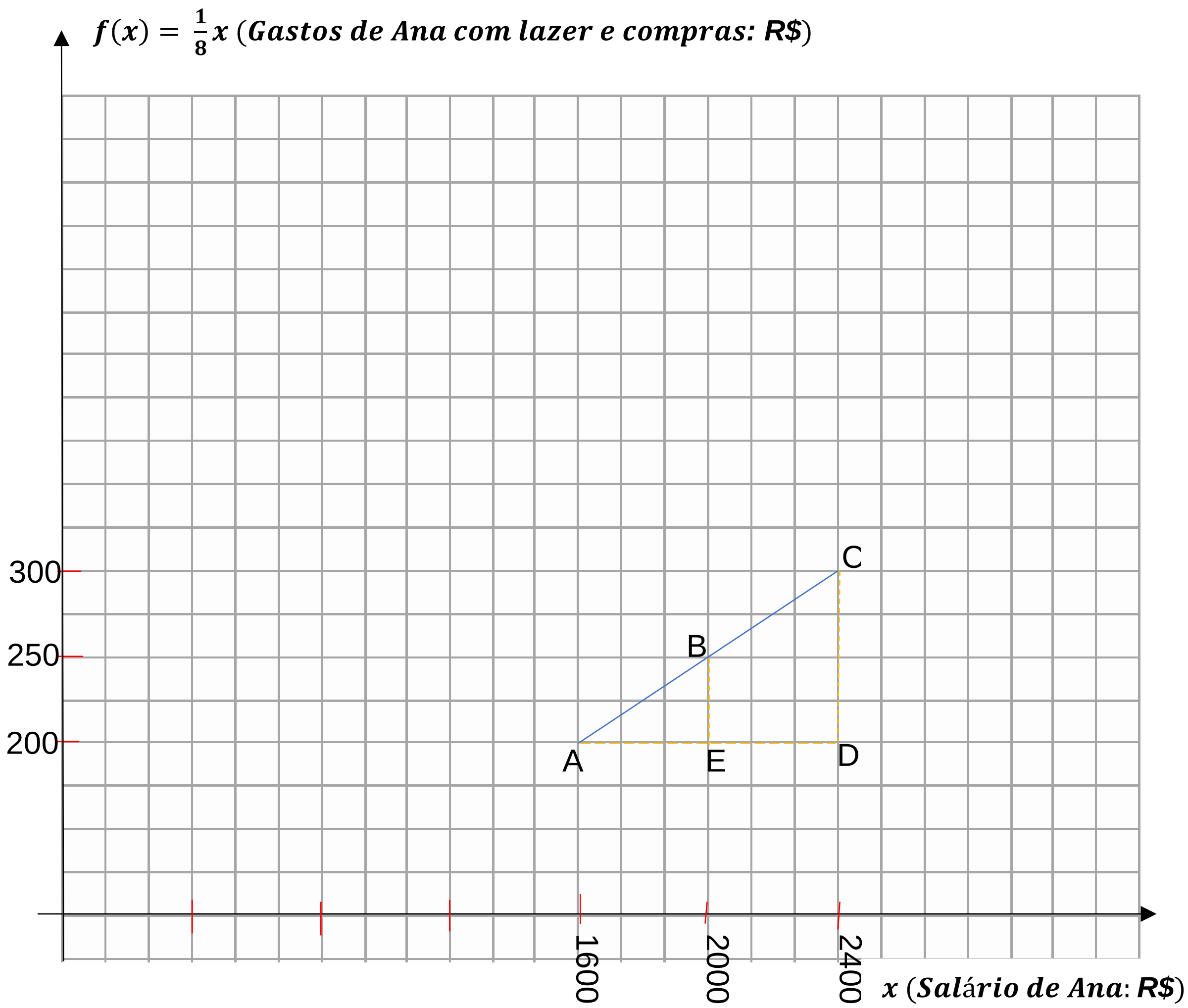
A proposição de problemas que busquem estimular os estudantes a descobrirem a relação funcional envolvida no seu contexto foi influenciada pela experiência vivenciada no estudo exploratório, na qual a apresentação da lei de formação da função, na atividade 8, gerou incompreensões quanto à relação entre $f(x)$ e x e, consequentemente, quanto às operações a serem realizadas.

Esse fato nos levou a acreditar que a descoberta da relação funcional tende a conduzir os estudantes a estabelecerem conjecturas que podem favorecer o operacional. A adoção desse critério reflete nossa intenção de considerar aspectos que possam motivar dificuldades na compreensão de alguns conceitos e operações envolvendo a forma fracionária dos números racionais.

Contemplando nossa finalidade de abordar temas de estudo do Ensino Médio de modo a favorecer aquisições conceituais e operatórias com números racionais na forma fracionária, as atividades propiciaram vinculação entre o estudo das noções de fração como parte-todo e operador e o estudo da função polinomial de 1º grau, em particular, da função linear. Essa forma de tratamento dos temas abre perspectivas que podem reafirmar essa abordagem vinculada como estratégia alternativa às revisões e retomadas, desconectadas, de conceitos não consolidados pelos estudantes.

Em complementaridade à essa discussão, destacamos, a seguir, algumas considerações sobre aspectos conceituais envolvidos na resolução do exercício 2 da atividade 2A. A especificidade das perguntas apresentadas nesse exercício, de requisitar representação e/ou argumentação matemática que justifique a ocorrência de uma reta para representar a função polinomial de 1º grau, nos levou a examinar possibilidades ligadas à sua resolução. Essa apreciação pode apoiar o professor no desenvolvimento da atividade e complementar a análise desse bloco.

Adotando três referências para o salário de Ana, de forma a garantir que $\frac{1}{8}$ desse salário esteja entre 200 e 300 reais, conforme condição estabelecida, e usando a estrutura de plano cartesiano dada na atividade, consideramos a seguinte representação da função $f(x) = \frac{1}{8}x$.



Entendemos ser oportuno estimular discussões em que os estudantes possam recorrer ao Teorema de Tales para demonstrar a ocorrência de uma reta. A estrutura de malha quadriculada adotada pode facilitar a visualização da proporcionalidade $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AD}}$.

A identificação da relação de semelhança entre os triângulos ABE e ACD também poderá ser utilizada como justificativa, podendo ser exploradas outras construções como:

1) $\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{BE}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AE}}$

$$\frac{100}{50} = \frac{800}{400}$$

2) $\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{AD}}$

$$\frac{50}{400} = \frac{100}{800}$$

A proporcionalidade entre x e $f(x)$ pode ser explicada ainda pela lei que relaciona $f(x)$ a $\frac{1}{8}$ do valor de x.

A escolha de valores salariais para os quais $\frac{1}{8}$ do salário resulte em números racionais não inteiros pode acarretar maior exigência na verificação da proporcionalidade entre as razões consideradas. Entretanto acreditamos ser pertinente ao 1º ano do Ensino Médio, além de enriquecedor, no sentido de propiciar aos estudantes o convívio com proporções que envolvam essa característica.

Independentemente de os argumentos apresentados pelos estudantes privilegiarem ou não demonstração fundada em relações matemáticas, acreditamos que a atividade sinaliza potencial em oferecer a eles a oportunidade de conjecturar sobre fatores que justificam a linearidade da função polinomial de 1º grau.

Outros dois aspectos que envolvem a representação da função no plano cartesiano também podem ser favorecidos pela atividade. São eles a distinção entre valores que constituem o universo de existência da função e aqueles que são determinados pela relação funcional e o modo como a leitura do comportamento gráfico pode influenciar na interpretação dessa relação.

5.3 Bloco de atividades 3A, 3B e 3C

O foco das atividades desse bloco foi desenvolver a noção de igualdade entre funções polinomiais de 1º grau, do tipo funções lineares, cujos coeficientes angulares foram representados por frações equivalentes.

A relação de equivalência entre frações, noção crucial à compreensão de frações (DRUCK, 1995), foi abordada segundo referência nas habilidades EF05MA04 e EF06MA07 (BRASIL, 2018). As atividades buscaram ainda favorecer a compreensão de função como relação de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica e algébrica; o cálculo de fração de quantidade, cujo resultado é um número natural; o reconhecimento da equivalência de expressões algébricas usadas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica. Esses objetivos estão parcialmente referenciados nas habilidades EF09MA06, EF06MA09 e EF07MA16 (BRASIL, 2018), respectivamente.

A atividade 3A foi organizada em duas etapas, sendo a primeira individual e a finalização, em grupos. Buscamos propiciar aos estudantes uma reflexão inicial sobre a seguinte situação envolvendo a relação de equivalência entre frações: a partir do sorteio de um valor hipotético para um ticket mesada, cada estudante deveria calcular seus gastos, segundo os operadores $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}$ e $\frac{3}{9}$ desse ticket. Na fase de conclusão da atividade, os valores calculados individualmente seriam levados para discussão em grupo e confrontados, a fim de decidirem se $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}$ e $\frac{3}{9}$ de uma mesma quantia resultam valores iguais ou diferentes. A partir daí, deveriam responder a questão: $\frac{1}{3}x$, $\frac{2}{6}\ x$ e $\frac{3}{9}x$ são expressões algébricas que definem a mesma função ou funções distintas? Esse processo de discussão e validação conjunta tende a contribuir na aprendizagem de conceitos e no desenvolvimento de representações (BRASIL, 2018, p. 529).

Destacamos o potencial da atividade do tipo A em exigir tomada de decisão do grupo, como explicita a orientação dada: “Conversem sobre os valores encontrados por cada um de vocês, procurando identificar se os gastos com passagem, material escolar e lanche foram valores iguais ou diferentes. Procurem chegar a um consenso sobre isso antes de responderem as perguntas a seguir. Vocês poderão fazer alterações nos valores escritos nas tabelas, caso seja necessário”. Essa orientação mobiliza os estudantes a fazerem comparações, discutirem sobre a forma como pensaram para organizar suas respostas individuais e, a partir daí, tomarem decisões sobre as respostas do grupo às perguntas anteriormente feitas a cada um deles na primeira etapa da atividade. Processos que exigem consensualidade e reelaboração coletiva geralmente possibilitam debate e reflexão em torno de argumentos pressupostos e podem contribuir na avaliação de sua efetividade.

A atividade 3B, adaptada de *Descobrindo os segredos das frações* (FARIA, 2018), tem por objetivo favorecer o desenvolvimento da habilidade de identificar a relação de equivalência entre as frações consideradas na 3A, a partir de sua simbolização em figuras representando barras de chocolate e da comparação entre as partes.

A atividade 3C, orientada pelos objetivos da 3A e destinada àqueles estudantes que encontrarem diferentes valores para representar $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}$ e $\frac{3}{9}$ do seu ticket mesada, inclui a comparação entre frações equivalentes e não equivalentes. A justificativa da relação de equivalência se apoiou na evidenciação do fator que multiplica o numerador e o denominador da fração.

Lançarmos mão do recurso de explorar a igualdade entre funções lineares cujos coeficientes angulares são frações equivalentes nos aproximou da validação de um dos propósitos de nosso estudo: a busca por formas de abordar temas de estudo do Ensino Médio de modo a favorecer compreensão de aspectos conceituais que os números racionais na forma fracionária envolvem.

Apesar de o conceito de igualdade entre funções polinomiais de 1º grau estar restrito ao caso de funções lineares, destacamos a relevância das atividades no sentido de abrangerem essa igualdade fundada na relação de equivalência entre frações. Essa condição, a nosso ver, dimensiona a relação entre os dois objetos de estudo ao patamar de relação causa e efeito, o que pode conferir prerrogativa de complementaridade a ambos.

Consideramos ainda, em acordo com Druck (1995), a indispensabilidade da compreensão da relação de equivalência entre frações, como importante fator na compreensão do próprio conceito de fração. A nosso ver, durante a Educação Básica, devem ser feitos investimentos na consolidação de habilidades relacionadas ao favorecimento da compreensão dessa noção.

A utilização de frações equivalentes como coeficientes angulares de funções lineares, na determinação da igualdade entre elas, viabiliza a abordagem interligada desses conceitos. Também evidencia perspectivas de seu uso na representação de uma mesma função polinomial de 1º grau de diferentes maneiras e abre possibilidades para que os estudantes discutam a relação de equivalência entre frações em contexto de estudo dessa função, representando alternativa à sua retomada através de revisões.

5.4 Bloco de atividades 4A, 4B e 4C

As atividades desse bloco estão voltadas ao desenvolvimento das noções de fração como operador e da compreensão de funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis, conforme referência parcial nas habilidades EF06MA09 e EF09MA06 (BRASIL, 2018), respectivamente.

Consideram o que afirma Ponte (2003). Segundo o teórico, a aprendizagem escolar da Matemática deve levar em conta o desenvolvimento integrado e harmonioso de competências e habilidades que envolvam não só a capacidade de raciocínio, mas também o emprego de ideias e conceitos de modo crítico e reflexivo.

Como no bloco anterior, utilizamos funções lineares com coeficientes angulares representados por números racionais na forma fracionária.

Na atividade 4A, objetivamos favorecer a identificação das relações que as frações $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{3}$ estabelecem entre si e com o inteiro, a partir das funções $f(x)=\frac{1}{3}x$, $g(x)=\frac{2}{3}x$ e $h(x)=\frac{4}{3}x$. Para tanto, apresentamos, inicialmente, uma tabela com valores para x e $f(x)$ e provocamos os estudantes a identificarem a relação $f(x)=\frac{1}{3}x$. Posteriormente, apresentamos uma segunda tabela na qual, usando a mesma referência de valores para x , atribuímos a $g(x)$ valores correspondentes ao dobro daqueles atribuídos a $f(x)$, na primeira.

A solicitação feita aos estudantes foi comparar as colunas correspondentes a $f(x)$ e $g(x)$ e descobrir a relação entre elas. O próximo passo foi apresentar a função $h(x)=\frac{4}{3}x$ e pedir que a coluna $h(x)$ fosse completada, usando os mesmos valores de x considerados nas duas primeiras tabelas. Finalmente, formulamos as perguntas: 1) Os valores encontrados para $\mathrm{h(x)}$ são maiores ou menores do que os valores de x? 2) Por que isso ocorreu? A intenção foi provocar os estudantes a estabelecerem relação entre coeficiente angular maior do que a unidade e valores de $h(x)$ maiores do que os valores de x.

A atividade 4B tem por objetivo favorecer o desenvolvimento da noção de fração como operador. Também considera a habilidade EF07MA08 (BRASIL, 2018), buscando possibilitar a comparação entre frações associadas às ideias de partes de inteiros. Para explorarmos as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ em sua relação com o todo, adaptamos uma atividade dos autores Imenes e Lellis (2012) que trata da eleição para recomposição do senado brasileiro. A adaptação realizada visou apenas atualizar o período de ocorrência da última eleição. O todo, ou seja, os $\frac{3}{3}$ desse senado, equivalente a 81 senadores, foi usado como referência na compreensão das partes.

A exploração da noção dos $\frac{2}{3}$ como o dobro de $\frac{1}{3}$ foi estendida para a relação entre $\frac{4}{3}$ e o quádruplo de $\frac{1}{3}$, através da pergunta: Quando temos $\frac{1}{3}$ de uma quantia, como podemos encontrar os $\frac{4}{3}$ dessa quantia?

A atividade 4C investe no desenvolvimento da habilidade de determinar frações de uma quantia, dada a quantia total e vice-versa. Ela dá a oportunidade de maior contato com esses conceitos àqueles estudantes que demonstrarem menor participação no desenvolvimento das atividades A e/ou B. Um dos problemas utilizados e o exercício foram adaptados dos autores Imenes e Lellis (2012).

Nosso interesse em envolver os estudantes na identificação das relações consideradas nas funções foi influenciado pela experiência pouco exitosa, no estudo exploratório, de apresentarmos aos alunos a relação funcional e esperarmos que calculassem os valores correspondentes à sua representação numérica. Nós nos interrogarmos sobre questões que possam estar por trás das dificuldades na compreensão de alguns conceitos matemáticos pode oferecer pistas para repensarmos formas de estruturar e propor as atividades.

A elaboração da atividade do tipo A nos possibilitou a compreensão da potencialidade da Matemática em favorecer relações dialógicas entre seus conceitos. Experenciar a produção de uma atividade com esse caráter nos mostrou que muito pode ser feito no sentido de estimularmos os estudantes a identificar e/ou criar interconexão conceitual, oportunizando atitude crítica e reflexiva. Explorar as relações funcionais entre $f(x) = \frac{1}{3}x$, $g(x) = \frac{2}{3}x$ e $h(x) = \frac{4}{3}x$, a partir do conceito de fração como operador, e das noções $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{3}$ de uma quantia, como o dobro e o quádruplo de $\frac{1}{3}$ dessa quantia, respectivamente, ratificou a possibilidade de usarmos situações de estudo da função polinomial de 1º grau no favorecimento da compreensão de relações entre frações de denominadores comuns e destas com o inteiro. Essa estratégia nos aproximou da validação de perspectivas na utilização de temas de estudo do Ensino Médio como forma de revisitar conceitos e contribuir na sua apropriação.

Nosso estudo não contempla a operação de multiplicação de um número natural por um número racional na representação fracionária. Porém ressaltamos que as atividades desse bloco têm potencial, se adaptadas, para explorar esse tema, já que abordam relações das partes entre si e com o todo.

5.5 Bloco de atividades 5A, 5B e 5C

As atividades desse bloco envolveram objetivos voltados ao favorecimento das habilidades de identificar e representar as relações $f(x) = \frac{x}{2}$ e $g(x) = \frac{x}{2} + 1$, apresentadas em tabela, e de realizar a adição $\frac{x}{2}+1$, sendo x um número inteiro e diferente de zero.

A atividade 5A está apoiada na habilidade EM13MAT501 (BRASIL, 2018) e envolve a investigação de relações entre números expressos em tabelas, a representação dessas relações no plano cartesiano e a criação de conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização. Considerou parcialmente a habilidade EF06MA10 (BRASIL, 2018), ao envolver adição de números racionais positivos na representação fracionária com a unidade.

Os exercícios 1 e 2, testados durante o estudo exploratório, evidenciaram contribuições no sentido de provocar a atitude investigativa dos alunos. Também propiciaram maior desenvoltura na realização de operações com números racionais na forma fracionária após a descoberta das leis de formação das duas funções consideradas. Chamou-nos a atenção a fluidez com que os alunos representaram numericamente as funções $f(x)=\frac{x}{2}$ e $g(x)=\frac{x}{2}+1$, após constatarem as relações envolvidas.

Na perspectiva de Ponte (2003, p. 2), “investigar não é mais do que procurar conhecer, procurar compreender, procurar encontrar soluções para os problemas com que nos deparamos”. A característica exploratória apresentada pela atividade e a percepção do envolvimento dos alunos na sua realização foram referências que nos levaram a integrá-la ao conjunto de atividades produzidas pela pesquisa.

Buscando favorecer o desenvolvimento da habilidade EM13MAT401 (BRASIL, 2018), relacionada à conversão de representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, incluímos os exercícios 3 e 4, que envolveram a representação das duas funções num mesmo plano cartesiano. Essa estratégia nos oportunizou explorar objetivos relacionados à comparação entre a inclinação das duas retas e a relação com seus coeficientes angulares, à identificação do conjunto domínio dessas funções e à representação gráfica da função $g(x)=\frac{x}{2}+1$ como transladação da função $f(x)=\frac{x}{2}$ em uma unidade para cima.

Com o intuito de darmos subsídio, especialmente aos grupos que não conseguirem realizar a adição $\frac{x}{2}+1$, sendo x um número natural, estruturamos a atividade 5B. Propomos a representação da fração $\frac{1}{2}$ como a metade de uma tira de papel. A seguir, orientamos os estudantes a compararem as duas metades dessa tira com uma tira inteira, buscando levá-los a identificar o inteiro como a composição de duas metades, ou seja, $\frac{2}{2}$. Essa comparação pode favorecer a compreensão da adição $1+\frac{1}{2}$, como equivalente à adição $\frac{2}{2}+\frac{1}{2}$. Assim como na atividade do tipo A, foi contemplada a adição de números racionais positivos na representação fracionária, operação referenciada na habilidade EF06MA10 (BRASIL, 2018).

A atividade 5C foi organizada buscando a complementaridade da 5A, estando voltada para o desenvolvimento da habilidade de representar, na forma fracionária, as relações $f(x)=\frac{x}{2}$ e $g(x)=\frac{x}{2}+1$. Cremos que a retomada desses conceitos num contexto que envolve a sua aplicação pode contribuir para que os estudantes tenham maior contato com eles.

Nossa avaliação sobre a contribuição positiva do desafio propiciado pelo exercício 2, nos remeteu à seguinte reflexão envolvendo nossa questão inicial de pesquisa: as dificuldades na compreensão de alguns conceitos e operações envolvendo a forma fracionária dos números racionais, no Ensino Médio, estariam sendo motivadas pela tendência em revisarmos as operações com base em regras para sua realização?

Nossa experiência na utilização de relações entre x e $f(x)$ na abordagem, mais intuitiva, da adição entre um número racional na representação fracionária e a unidade apontou que a construção significativa dessa operação é possível. O interesse e o desempenho dos alunos, durante o estudo exploratório, sinalizaram essa potencialidade.

Acreditamos que as complementações que integraram a proposta inicial, oportunizadas pelas atividades B e C, propiciando a representação e a aplicação da operação $\frac{1}{2}+1$, tendem a favorecer a compreensão do inteiro como $\frac{2}{2}$.

Na discussão das atividades dos próximos blocos, procuramos apontar possibilidades na abordagem mais compreensiva das operações de adição e subtração entre números racionais na forma fracionária como forma de transpormos a prevalência do uso de algoritmos na realização dessas operações.

5.6 Bloco de atividades 6A, 6B e 6C

Favorecer atribuição de significado à operação de adição entre frações, como uma das noções cruciais à compreensão de frações (DRUCK, 1995), foi o principal objetivo das atividades desse bloco, segundo referência na habilidade EF06MA10 (BRASIL, 2018).

Também foram contemplados os objetivos ligados à representação de um número racional nas suas formas fracionária e decimal e à representação gráfica da função polinomial de 1º grau, conforme referência parcial nas habilidades EF06MA08 e EM13MAT401 (BRASIL, 2018), respectivamente.

Atentos ao enfoque inicial de adições envolvendo frações de mesmos denominadores, consideramos, na atividade 6A, a relação $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$. A partir daí, orientamos os estudantes a escolherem, como valores de x, números ímpares entre 1 e 15 e a calcularem o valor numérico da função, em suas representações fracionária e decimal.

A solicitação da representação gráfica dessa função, no plano cartesiano, com recomendação para observância da exigência de determinação de uma reta, buscou favorecer a verificação da pertinência dos valores encontrados para $f(x)$. Entretanto consideramos alguns fatores que podem prejudicar o alcance desse objetivo. Dentre eles, citamos: a falta de padronização dos intervalos entre os pontos nos eixos x e y, a localização incorreta dos valores nesses eixos e a possibilidade de aumento no diâmetro dos pontos representados, o que pode causar a impressão de seu alinhamento.

Acreditamos que o acompanhamento do professor, levantando questões que estimulem os estudantes a refletirem sobre a estrutura do plano cartesiano, a relação entre as coordenadas dos pontos e a representação da reta, pode colaborar para que o objetivo da atividade seja alcançado.

A atividade 6B também abordou adições envolvendo frações com denominadores iguais. Ela incluiu objetivo parcialmente referenciado na habilidade EF06MA09 (BRASIL, 2018), ligada ao cálculo da fração de uma quantidade. Utiliza uma tabela adaptada de *Descobrindo os segredos das frações* (FARIA, 2018), que organiza as adições, de forma cruzada, em suas linhas e suas colunas. As “frações cruzadas”, em alusão às palavras cruzadas, proporcionam relação de dependência entre os resultados obtidos, podendo favorecer a realização das operações de forma mais assertiva e atrativa.

Na atividade 6C, procuramos retomar habilidades desenvolvidas nos tipos A e B. Elaboramos um problema que envolveu uma situação fictícia, simulando o funcionamento de aplicativos de transporte de passageiros. A situação criada nos permitiu explorar as noções de fração associadas às ideias de divisão e operador e a operação de adição.

O contexto, envolvendo dinheiro, distância no deslocamento e tempo de engarrafamento no trânsito, aproxima-se da realidade e tende a beneficiar a interação com as informações que apresenta. Segundo Onuchic e Allevato (2011), cabe ao professor preparar, ou escolher, problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito que pretende construir, colocando aos alunos a tarefa de assumir com responsabilidade a sua realização.

Avaliamos que a abordagem da adição entre números racionais na forma fracionária através de relações que representem funções polinomiais de 1º grau se apresenta como uma das estratégias capazes de incluir essa operação na pauta de estudo desse tema previsto para o Ensino Médio. Acreditamos que essa vinculação, diferentemente das revisões, tem potencial para possibilitar atribuição de significado a essa operação.

Planejar atividades com essa orientação certamente demandará do professor criação e/ou adaptação, já que elas precisam abranger objetivos que visem propiciar compreensão operatória em circunstâncias de estudo do tema. Nossa prática e evidências desta pesquisa apontam que esse investimento se configura como exigência de primeira ordem. O envolvimento demonstrado pelos alunos durante o estudo exploratório e a atitude de maior familiaridade e destreza no trato com as operações, à medida que passaram a lidar com elas de forma mais frequente e contextualizada nas atividades, reafirmam a potencialidade dessa estratégia.

A persistência de dificuldades operatórias com números racionais na forma fracionária, por parte de estudantes do 3º ano do Ensino Médio, constitui importante fator para, de um lado, questionarmos os motivos que levam à permanência das incompreensões e, de outro, experenciarmos alternativas na abordagem dessas operações. Julgamos que a vinculação propiciada pelas atividades desse bloco representa um caminho com potencialidade para favorecer o desenvolvimento da capacidade operatória dos estudantes.

5.7 Bloco de atividades 7, 8 e 9; categorias A, B e C

Buscando investimentos na significação das operações de adição e subtração entre frações com denominadores diferentes, elaboramos as atividades numeradas de 7 a 9, categorias A, B e C, segundo estrutura e objetivos bastante similares.

Druck (1995) afirma que, quando se trata de frações com denominadores distintos, a questão é a compreensão do como adicionar ou subtrair “pedaços” de tamanhos diferentes. A relevância de compreender como operar com esses números, conforme a afirmação, está ligada à visão holística da natureza das frações enquanto números que, apesar de formados pela composição de números inteiros, carregam significado próprio e distinto.

Moreira e David (2005) advertem para problemas ligados à ênfase aos procedimentos operatórios e uso de algoritmos para definir as operações com os racionais em detrimento de uma abordagem que favoreça a sua compreensão. Nesse sentido, ressaltam a importância do trabalho pedagógico de construção dos números racionais nas salas de aula da escola.

As evidências da falta de compreensão do como adicionar ou subtrair frações com denominadores distintos, traduzidas no insucesso dos alunos, observado tanto nas aulas regulares de Matemática quanto no período de realização do estudo exploratório, nos mobilizaram a embasar a construção dessas operações na relação de equivalência entre frações, em acordo com Druck (1995) e Llinares e Sánchez (1997).

Nas atividades do tipo A, levamos em conta, essencialmente, a resolução e/ou elaboração de problemas envolvendo adição e subtração entre números racionais positivos na representação fracionária, segundo habilidade EF06MA10 (BRASIL, 2018). Tomando por referência Carrião (2018), que utiliza sequências numéricas na introdução da função polinomial de 1º grau, elaboramos problemas informando a primeira fração de uma sequência e pedimos que os estudantes descubram os próximos termos adicionando ou subtraindo, da fração imediatamente anterior, fração com denominador distinto da primeira. Essa inter-relação entre progressões aritméticas e funções afins está apoiada na habilidade EM13MAT507 (BRASIL, 2018).

A representação geométrica das funções no plano cartesiano, conforme referência parcial na habilidade EM13MAT401 (BRASIL, 2018), também foi contemplada pelas atividades.

As atividades B estão embasadas, sobretudo, na habilidade EF06MA07 (BRASIL, 2018), quanto à comparação de frações associadas às ideias de partes de inteiros, identificando frações equivalentes. Os estudantes são incentivados a acessarem *links* de vídeos para obter orientações sobre como reescrever frações equivalentes, com denominadores comuns, que possam ser adicionadas ou subtraídas. Outro incentivo dado é a utilização de figuras para representar, por meio de frações equivalentes com denominadores comuns, a primeira operação requisitada na atividade A.

Concordando com o princípio de que “o ensino deveria ser mais orientado para o significado do que para o símbolo” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 82), avaliamos que as construções demandadas nas atividades B são adequadas ao propósito de oportunizar abordagem conceitual com vistas ao favorecimento de habilidade operatória.

As atividades do tipo C envolveram aplicação das habilidades consideradas nas atividades A e B, na construção de sequências numéricas, na utilização de figuras para representação de operações e na realização de operações estruturadas em tabela denominada “Frações Cruzadas”.

A adaptação de problemas que envolveram o conceito de função polinomial de 1º grau, associado a noções de progressão aritmética, possibilitou a retomada das operações no contexto de estudo desses assuntos, pertinentes ao currículo do Ensino Médio e em conformidade com habilidades previstas para essa etapa da Educação Básica. Essa vinculação pode representar vantagem sobre revisões descontextualizadas e regressivas.

Consideramos que a exploração dos vídeos e da representação das operações através de figuras, visando possibilitar a construção da noção de equivalência entre frações, apresenta potencialidade para favorecer o entendimento do como adicionar ou subtrair partes de tamanhos diferentes. Entretanto, diante da tendência observada nos alunos, de recorrerem a regras que não dominam e/ou não compreendem, admitimos ser necessário fazer outros investimentos a fim de consolidar essa noção, fundamentadora da adição e da subtração entre frações com denominadores distintos.

5.8 Bloco de atividades 10A, 10B e 10C

Esse bloco de atividades considerou nosso foco em favorecer o desenvolvimento da operação de adição entre frações com denominadores diferentes, estendendo para adições entre um número fracionário e um número natural, objetivo embasado na habilidade EF06MA10 (BRASIL, 2018).

A atividade A abrangeu construção de modelos algébricos envolvendo o perímetro de um quadrado em função da variação nos comprimentos de seus lados. Abordou também a conversão dessas representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano. As habilidades referenciadas foram EM13MAT302, EM13MAT401 e EM13MAT506 (BRASIL, 2018).

Sua elaboração envolveu modificações na atividade 3 do estudo exploratório, adaptada de Monteiro (2011), em que propusemos a montagem de um quadrado. O objetivo foi explorarmos as representações algébrica e numérica do perímetro desse quadrado a ser montado, a partir da composição de quatro peças: outros dois quadrados, cujos lados medem a e x, e dois retângulos de dimensões a e x.

A experiência bem-sucedida de oportunizar aos alunos o manuseio das peças e a montagem do quadrado para, posteriormente, solicitar que escrevessem uma expressão algébrica representando o perímetro do quadrado já montado nos influenciou a manter essa orientação para a atividade. Realizamos apenas adequações para abordar objetivos voltados ao estudo da função polinomial de 1º grau. A variação nas medidas de a nos possibilitou explorar a representação gráfica do perímetro do quadrado em função dos comprimentos de seus lados.

Através da atividade B, exploramos a relação de equivalência entre um inteiro e a fração $\frac{2}{2}$ a partir de sua representação em figuras. Essa estratégia buscou favorecer a compreensão da adição entre a fração $\frac{1}{2}$ e dois inteiros, uma das operações requisitadas pela atividade A.

As atividades do tipo C, voltadas ao propósito de oportunizar novo contato com adições entre frações e números naturais, abrangeram representação de números naturais, diferentes de zero, na forma fracionária e comparação entre a soma e uma das parcelas da adição, para descoberta da outra parcela.

Observamos a relativa facilidade com que, no estudo exploratório, os grupos de alunos representaram algebricamente o perímetro do quadrado. Essa observação e os investimentos das atividades anteriores, em apoiar a construção da operação de adição na relação de equivalência entre frações, nos levaram a acreditar que as atividades desse bloco têm potencial de acréscimo na atribuição de significado ao procedimento para adicionar números racionais com denominadores distintos e/ou números naturais não nulos e números racionais na forma fracionária.

A abrangência de habilidades relacionadas à construção de modelo algébrico, envolvendo o perímetro de um quadrado em função do comprimento de seus lados, e à conversão dessa representação algébrica em representação geométrica no plano cartesiano abre perspectivas para exploração de operações a partir da variação nas medidas do lado do quadrado.

Ponderamos que o objetivo de favorecer o desenvolvimento da habilidade de representar graficamente a variação do perímetro do quadrado em função da variação nos comprimentos de seus lados pode ser afetado por inabilidades operatórias. Por isso, as intervenções planejadas na atividade B buscam apoiar a realização de operações previstas em A. Salientamos, contudo, que a intervenção não contempla adições entre números racionais com denominadores distintos, já abordadas no bloco comentado anteriormente.

A experiência oportunizada pela aplicação da atividade 3, no estudo exploratório, no qual reafirmamos nossa tendência em enfatizar procedimentos operatórios com números racionais na forma fracionária, nos levou a pensar a atividade B com essa finalidade. Avaliamos ser essa uma das formas de investir em abordagem conceitual. Também é um caminho para transpor a prática fundada em regras que pode estar contribuindo para limitar a capacidade operatória dos estudantes do Ensino Médio.

.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A persistência das inabilidades operatórias com números racionais na forma fracionária no Ensino Médio nos levou a questionar o formato de revisão através de sínteses de conteúdos. A prática de sala de aula revela que esse modo de retomar o tema nas aulas de Matemática não tem atingido a efetividade necessária e vem contribuindo para reforçar ideias associadas ao insucesso dos estudantes e ao retrocesso a temas já estudados. A resistência à retomada de conceitos e operações nesse campo numérico é externada pela insatisfação dos alunos em rever assunto do currículo do Ensino Fundamental.

Nosso interesse em romper com essa lógica se manifesta na questão formulada pela pesquisa: *Como abordar temas de estudo do Ensino Médio de modo a favorecer aquisições conceituais e operatórias com números racionais na forma fracionária, ainda não consolidadas pelos estudantes?* Essa formulação orientou a nossa busca por uma proposta de intervenção integrada ao processo de formação no Ensino Médio.

A BNCC (2018) da Área de Matemática e suas Tecnologias preconiza a importância de consolidação, ampliação e aprofundamento de aprendizagens desenvolvidas no Ensino Fundamental. “Para tanto, propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática” (BRASIL, 2018, p. 527). Essa orientação, a nosso ver, traduz o objetivo central deste estudo e direcionou as escolhas que fizemos durante o seu desenvolvimento.

As demais questões, *O que pode estar por trás das dificuldades na compreensão de alguns conceitos e operações envolvendo a forma fracionária dos números racionais, no Ensino Médio?* e *Uma abordagem conceitual poderia facilitar a compreensão do número racional na forma fracionária e das operações com estes números, em situações de estudo da função polinomial de 1° grau?*; guiaram nosso olhar para a relevância de levarmos em conta essa demanda dos estudantes da etapa final da Educação Básica e descobrirmos potencialidades na abordagem da função polinomial de 1º grau, visando o seu atendimento.

O nosso contato com os alunos do 1º ano do Ensino Médio, durante a fase de estudo exploratório, nos permitiu (a) realizar o levantamento de algumas de suas dúvidas, (b) experimentar atividades que vincularam o estudo dos temas abordados no reforço escolar à exploração do conceito de fração e de operações com números racionais na forma fracionária e (c) observar evidências de que o contato mais frequente com esse tipo de abordagem diminuiu a resistência inicial no trato com as operações.

A impossibilidade de realização da segunda etapa da pesquisa em campo, devido à suspensão das aulas presenciais em março de 2020, em decorrência da pandemia de COVID-19, fez do estudo exploratório uma de nossas referências na elaboração e na análise do conjunto de atividades produzidas.

A literatura, discutida ao longo do texto, se constituiu como importante parâmetro na fundamentação das nossas questões. Também apoiou a estruturação do conjunto de atividades e a discussão que propomos sobre elas.

As considerações de Moreira e David (2005), em torno da complexidade que envolve o trabalho de construção do conjunto dos números racionais na Matemática escolar, indicam a necessidade de investimento maior e mais cuidadoso no aspecto conceitual do número racional, especialmente, em sua representação fracionária. O processo de aprendizagem a longo prazo é reafirmado por Llinares e Sánches (1997). Esses estudos confirmam a importância de que nossas percepções em sala de aula dialoguem com pesquisas na área, buscando compreender o problema e organizar métodos de intervenção.

Influenciados por Onuchic e Allevato (2011) e Ponte (2003), embasamos as atividades da pesquisa segundo dois eixos: o favorecimento do lugar de centralidade dos estudantes no processo ensino aprendizagem da Matemática e o foco em propiciar situações que estimulem o emprego de raciocínio, de ideias e de conhecimentos matemáticos, de modo crítico e reflexivo. O caráter relacional da função polinomial de 1º grau se constituiu como campo fértil à estruturação que desenvolvemos.

A inspiração para planejar a forma de abordagem dos conceitos nas atividades veio de Druck (1995). A autora ressalta a importância de garantir aos alunos convívio, discussão e atribuição de significados à própria ideia ou conceito de fração, à relação de equivalência entre frações e às quatro operações fundamentais, como noções cruciais para compreender frações. A ordem de apresentação das atividades considerou a gradação de objetivos com o intuito de favorecer o desenvolvimento de habilidades ligadas a essas noções, segundo relação de interdependência entre elas.

Entendemos que a organização das atividades em três níveis, A, B e C, não só contribui para ampliar as oportunidades de contato dos estudantes com os conceitos abordados, mas também possibilita discussão acerca deles, favorecendo a atribuição de significados.

Avaliamos que a estratégia adotada nas atividades A, de utilizar situações e/ou problemas que vinculem conceitos e operações com números racionais na forma fracionária ao estudo da função polinomial de 1º grau, apresenta potencialidade em propiciar o estudo integrado dos dois temas e levantar incompreensões dos estudantes quanto a esses números.

A opção pelas atividades de tipo B decorre do interesse em intervir nas possíveis dúvidas, advindas da realização das atividades A, de modo mais intuitivo e prezando pela compreensão de aspectos conceituais. A nosso ver, essa estratégia difere do procedimento usual de retomada e revisão de operações e constitui alternativa que favorece a compreensão.

Com as atividades A e B buscamos estimular os estudantes a interpretar situações, a discutir aspectos relacionados a elas e a expressar suas conclusões. Esse propósito, aliado à experiência bem-sucedida com o trabalho em grupo durante o estudo exploratório, foi determinante em nossa decisão por indicar essa metodologia na realização dessas duas categorias. A resolução em grupos pode favorecer elaborações colaborativas e discussões na busca pela construção de consensos.

As atividades do tipo C representam nosso objetivo de expor os estudantes a novo contato com os conceitos trabalhados nas atividades A e B, particularmente aqueles que demonstrarem menor envolvimento na sua realização, como forma de contribuir na aprendizagem.

O exercício de planejar o conjunto de atividades, com vistas a favorecer ampliação da capacidade operatória com números racionais na forma fracionária, no contexto de estudo da função polinomial de 1º grau, nos permitiu tornar viável nossa proposta de elaborar um plano de ação alternativo às retomadas do tema através de revisões. Também nos oportunizou oferecer um recurso educativo, em forma de livro, aplicável ao Ensino Médio e com potencialidade, a nosso ver, no desenvolvimento de habilidades e competências previstas para esse nível de ensino. Consideramos que essa produção evidencia perspectivas na abordagem dos conteúdos matemáticos de forma mais integrada, de modo a contribuir na construção de habilidades postas para a Educação Básica.

O recurso educativo intitula-se *Frações no Ensino Médio: Vinculando o Estudo às Funções Polinomiais de 1º Grau*. Ele está disponível não somente no formato físico, mas também na versão digital, acessando o *link* https://promestre.fae.ufmg.br/recursos-educacionais/ na página do Promestre FAE/UFMG. Através desse livro, nós nos propomos a levar às salas de aula de Matemática os principais fundamentos teóricos que embasaram nosso estudo, o conjunto de atividades produzidas e nossas discussões acerca de perspectivas e limites da vinculação desenvolvida, no favorecimento da capacidade operatória dos estudantes.

Acreditamos que este estudo cumpre o papel de abrir perspectivas para que estudantes do Ensino Médio tenham a oportunidade de vivenciar situações que possam contribuir na superação de sua limitação operatória e favorecer o seu desempenho escolar.

Esperamos que algumas das reflexões tecidas ao longo deste trabalho e o recurso educativo elaborado conversem com situações vivenciadas por professores da Educação Básica, especialmente, aqueles que atuam no Ensino Médio. Nossa proposta abre possibilidade para que os números racionais na forma fracionária e as operações com esses números compareçam, como objetos de estudo, integrados a temas do currículo de Matemática. O interesse é evitar constantes retomadas de regras operatórias que têm se apresentado insuficientes na consolidação das operações pelos estudantes.

Finalizamos externando nosso sentimento de gratidão pela trajetória de aprendizado e pela compreensão de que nossa caminhada, enquanto professores, ganha maior sentido quando entendemos que nossa ação pode estar mais implicada com as necessidades de aprendizagem de nossos alunos. “Como ensinamos o que ensinamos - é um ato responsivo, uma resposta responsável e não indiferente ao outro - sujeitos a quem o ensino se dirige” (CORSINO, 2015, p. 401). Esse trecho, destacado da citação que fizemos na página 31 deste trabalho, retoma os nossos fundamentos de estudo e, principalmente, enfatiza o caráter de construção permanente da nossa prática como professores.

REFERÊNCIAS

ABREU, Lorena Luquini de Barros. **Estudando conteúdos matemáticos com direcionamentos de modelagem matemática**: o caso da função afim. 2011. 244 f. Tese (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas, Juiz de Fora, 2014.

ALVES-MAZZOTTI, Alda Judith; GEWANDSZNAJDER, Fernando. O planejamento de pesquisas qualitativas. *In:* ALVES-MAZZOTTI, Alda Judith; GEWANDSZNAJDER, Fernando **O Método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa**. 2 ed. São Paulo: Pioneira, 1999.

ANPEd. Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação. **Ética e pesquisa em Educação: subsídios**. Rio de Janeiro: ANPEd, v.1, 133 p., 2019.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 15 ago. 2019.

BRASIL. Lei n 9.394, de 20 de dez. de 1996. BRASIL. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial da União**, Brasília, 1996. Disponível em: https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm. Acesso em: 18 nov. 2020.

BITTAR, Marilena; FREITAS, José Luiz Magalhães de. Números Racionais Absolutos. *In:* BITTAR, Marilena; FREITAS, José Luiz Magalhães de. **Fundamentos e Metodologia de Matemática para os Ciclos Iniciais do Ensino Fundamental.** Campo Grande, MS: UFMS, 2005.

BOTTA, Luciene Souto. **Números racionais e raciocínio proporcional: considerações sobre ensino-aprendizagem**. 1997. 185f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), UNESP, Rio Claro, 1997. Disponível em: http://www.lite.fe.unicamp.br/grupos/matema/Tese9697.html. Acesso em: 15 out. 2020.

CARRIÃO, Airton. **Problemas de introdução à função polinomial de 1º grau**. Colégio Técnico da Universidade Federal de Minas Gerais: material didático impresso, 2018.

CORSINO, Patrícia. Entre Ciência, Arte e Vida: a didática como ato responsivo. **Educação & Realidade**, Porto Alegre, v. 40, n. 2, p. 399-419, abr./jun, 2015.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Educação Matemática: Uma visão do Estado da Arte. **Pro-posições**. São Paulo, Unicamp: Faculdade de Educação da Unicamp, v. 4, n. 1, p. 7-17, 1993.

DAVID, Maria Manuela Martins Soares; FONSECA, Maria da Conceição Ferreira Reis. Sobre o Conceito de Número Racional e a Representação Fracionária. **Presença Pedagógica**, Belo Horizonte: Dimensão, Edição Especial: Educação Matemática, v. 1, n. 1, p.59-71, 2005.

DAYRELL, Juarez. A escola faz as juventudes? Reflexões em torno da socialização juvenil. **Educação e Sociedade**, Campinas: Cedes, Edição Especial, v. 28, n. 100, p. 1105-1128, out. 2007. Disponível em: https://www.cedes.unicamp.br. Acesso em: 02 nov. 2020.

DRUCK, Iole de Freitas. **Frações: uma análise de dificuldades conceituais**. São Paulo: IME-USP, 16p., 1995. Disponível em: https://repositorio.usp.br/item/001555913. Acesso em: 19 mai. 2019.

SILVA, Edna Lúcia da; MENEZES, Estera Muszkat. **Metodologia da pesquisa e elaboração de dissertação**. Florianópolis: UFSC, 2005.

FARIA, Diogo. **Descobrindo os segredos das frações**. Educação Básica. Centro Pedagógico da Universidade Federal de Minas Gerais: material didático impresso, mar. 2018.

FERREIRA, Maria Cristina Costa; MOREIRA, Plínio Cavalcanti; SOARES, Eliana Farias. FRAÇÕES: o que os ERROS dos alunos podem nos ENSINAR. **Presença Pedagógica**, Belo Horizonte: Dimensão, v. 5, n. 29, p.39-47, set./out., 1999.

GÓMEZ-GRANELL, C. A aquisição da linguagem matemática: símbolo e significado. In: TEBEROSKY, A.; TOLCHINSKY, L. (orgs.). **Além da alfabetização: a aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática**. São Paulo: Ática, 1997.

IMENES, Luiz márcio; LELLIS, Marcelo. **MATEMÁTICA Imenes & Lellis**. 6º ano. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2012.

LLINARES, S.; SÁNCHEZ, M.V. **Fracciones: la relación parte-todo**. Madrid: Sínteses, 1997.

LOURENÇO, Márcia Vieira. Matemática Rápida: Math Club. **Adição e subtração de frações**. Vídeo disponível em: https://youtu.be/B1vfPImhloQ. Acesso em: 30 mai. 2020.

LOURENÇO, Márcia Vieira. Matemática Rápida: Math Club. **Adição e subtração de frações**. Vídeo disponível em: https://youtu.be/8tB42QPwgcg. Acesso em: 30 mai. 2020.

LUDKE, Menga; ANDRÉ, Marli Eliza Dalmazo Afonso de. Abordagens qualitativas de pesquisa: a pesquisa etnográfica e o estudo de caso. *In:* LUDKE, Menga; ANDRÉ, Marli Eliza Dalmazo Afonso de. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MORIN, Edgar. **Os Sete Saberes Necessários à Educação do Futuro**. 2 ed. São Paulo: Cortez, 2011.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti; DAVID, Maria Manuela Martins Soares. O conhecimento sobre os números e a prática docente na escola básica. In: **A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar**. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, v. 11, p. 59 a 78, 2005.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. *In*: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (org.). **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, p.199-218, 1999.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. As diferentes “personalidades” do número racional trabalhadas através da resolução de problemas. **Bolema**, Rio Claro, São Paulo, ano 21, n° 31, p. 79-102, 2008.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro, São Paulo, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

OPAS. Organização Pan-Americana da Saúde. **Folha informativa COVID-19**. Disponível em: www.paho.org/bra/covid19. Acesso em: 14 out. 2020.

PONTE, João Pedro Mendes da, BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PONTE, João Pedro Mendes da. **Investigar, ensinar e aprender**. Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Actas do ProfMat 2003 (CD-ROM, pp. 25-39). Lisboa: APM, 2003.

PONTE, João Pedro Mendes da (org). **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, junho, 2014.

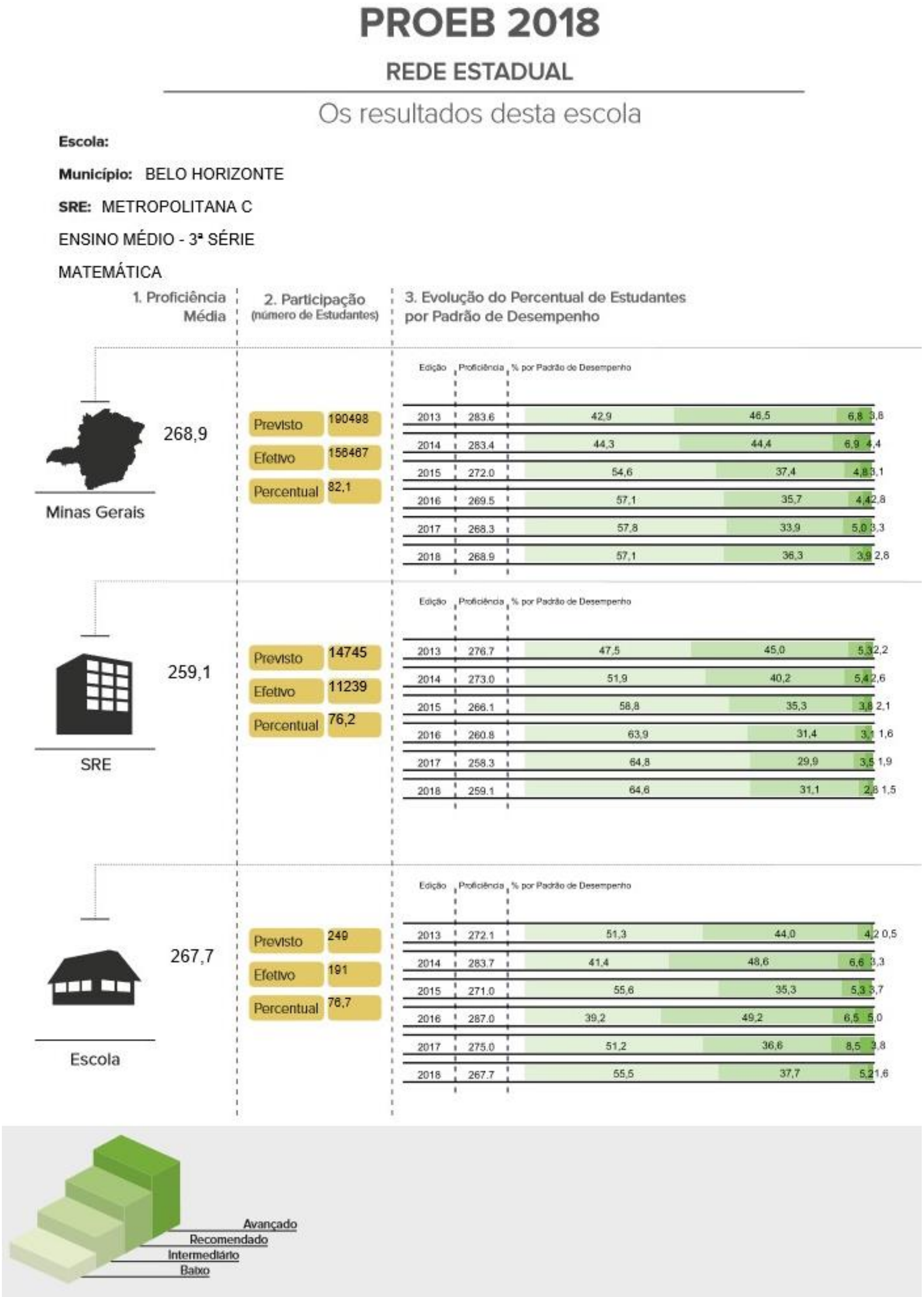
PROEB. **Revista pedagógica**. 2014. Disponível em: http://www.simave.caedufjf.net/wp-content/uploads/2015/06/MG-PROEB-2014-RP-MT-3EM-WEB.pdf. Acesso em:14 jun. 2019.

SEE. Secretaria de Estado de Educação de Minas Gerais. **Caderno de Orientações Metodológicas “Reforço Escolar para Fortalecimento das Aprendizagens”**. Minas Gerais, 2019. Disponível em: https://srefabricianodivep.files.wordpress.com/2019/10/diretrizes-metodolc3b3gicas-para-o-reforc3a7o-escolar-.pdf. Acesso em: 07 jun. 2020.

SIMAVE. **Revista da gestão escolar**. 2014. Disponível em: http://www.simave.caedufjf.net/wp-content/uploads/2015/06/SIMAVE-RGE-WEB.pdf. Acesso em:14 jun. 2019.

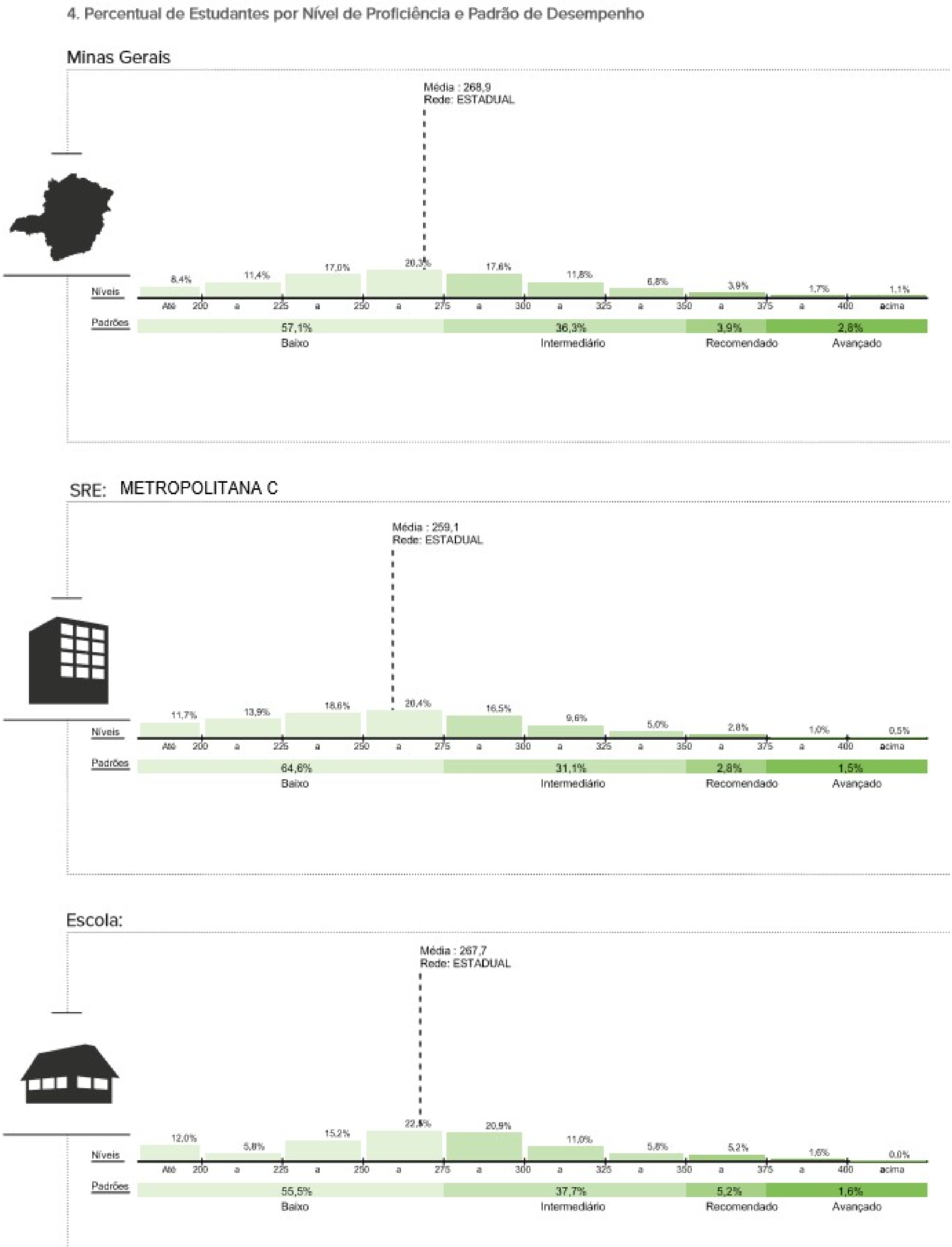
SKOVSMOSE, Ole. Cenários para Investigação. **Bolema**, Rio Claro, São Paulo, v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.

ANEXO A - Resultado de Proficiência e Participação em Matemática - PROEB 2018



Fonte: Portal SIMAVE – Resultados por escola: PROEB

ANEXO B – Percentual de Estudantes por Nível de Proficiência e Padrão de Desempenho



Fonte: Portal SIMAVE – Resultados por escola: PROEB