

Universidade Federal de Minas Gerais
Faculdade de Educação
Programa de Pós-Graduação em Educação: Conhecimento e Inclusão Social

Marina Andrade Alves da Silva

**VISUALIZAÇÃO GEOMÉTRICA EM UM AMBIENTE DE
MODELAGEM MATEMÁTICA**

Belo Horizonte
2020

Marina Andrade Alves da Silva

**VISUALIZAÇÃO GEOMÉTRICA EM UM AMBIENTE DE
MODELAGEM MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação: Conhecimento e Inclusão Social, da Faculdade de Educação, da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Educação.

Área de concentração: Educação.

Linha de pesquisa: Educação Matemática.

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Jussara de Loiola Araújo

S586v
T

Silva, Marina Andrade Alves da, 1994-
Visualização geométrica em um ambiente de modelagem
matemática [manuscrito] / Marina Andrade Alves da Silva. - Belo
Horizonte, 2020.

126 f. : enc, il.

Dissertação -- (Mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais,
Faculdade de Educação.

Orientadora: Jussara de Lóiola Araújo.

Bibliografia: f. 109-114.

Anexos: f. 120-126.

Apêndices: f. 115-119.

1. Educaç
ão -- Teses. 2. Matemática -- Estudo e ensino -- Teses. 3. Geometria --
Estudo e ensino -- Teses. 4. Modelagem matemática -- Teses. 5. Ensino
visual -- Teses. 6. Percepção visual -- Teses.

I. Título. II. Araújo, Jussara de Lóiola. III. Universidade Federal de
Minas Gerais, Faculdade de Educação.

CDD- 510.07

Catálogo da Fonte : Biblioteca da FaE/UFMG (Setor de referência)

Bibliotecário: Ivanir Fernandes Leandro CRB: MG-002576/O



ATA DA DEFESA DA DISSERTAÇÃO DA ALUNA MARINA ANDRADE ALVES DA SILVA

Realizou-se, no dia 14 de fevereiro de 2020, às 14:00 horas, Sala de Teleconferência, da Universidade Federal de Minas Gerais, a 1379ª defesa de dissertação, intitulada *Visualização geométrica em um ambiente de modelagem matemática*, apresentada por MARINA ANDRADE ALVES DA SILVA, número de registro 2018663598, graduada no curso de LICENCIATURA EM MATEMÁTICA, como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em EDUCAÇÃO - CONHECIMENTO E INCLUSÃO SOCIAL, à seguinte Comissão Examinadora: Prof(a). Jussara de Lóiola Araújo - Orientador (UFMG), Prof(a). Celio Roberto Melillo (CEFET-MG), Prof(a). Maria Laura Magalhães Gomes (UFMG).

A comissão considerou a dissertação: aprovada, destacando a boa qualidade da
expositiva articulação pertinente entre a base teórica-
metodológica e as análises.

A Banca sugeriu e o candidato acatou a mudança de título da dissertação para: _____

Finalizados os trabalhos, lavrei a presente ata que, lida e aprovada, vai assinada por mim e pelos membros da Comissão.
Belo Horizonte, 14 de fevereiro de 2020.


Lorena Maia - Secretário(a)


Prof(a). Jussara de Lóiola Araújo (Doutora)


Prof(a). Celio Roberto Melillo (Doutor)


Prof(a). Maria Laura Magalhães Gomes (Doutora)

DEDICATÓRIA

Aos meus alunos, pelos quais cursei o mestrado.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me dado forças para chegar até aqui.

Aos meus pais, Ângela e Paulo, que me apoiaram em todas as minhas decisões profissionais, mesmo quando essas me levaram para longe.

Aos meus irmãos, Letícia e João Paulo, que acreditaram mais em mim que eu mesma.

Ao Matheus, meu namorado, companheiro e amigo, que foi meu porto seguro nos últimos anos.

Aos meus amigos, especialmente à Polyana, Francielly e Tabatha, pelas horas de companhia e por todo o apoio que me deram.

À minha orientadora Jussara, por acreditar na minha proposta e me guiar ao longo da jornada da pós-graduação.

Ao grupo de orientação, pela paciência e suporte prestados ao longo dos últimos anos, contribuindo cada um com o seu melhor: Wallison, Thaís Fernanda, Thaís Ribeiro, Gabriel, Fernando, Renata, Ludmila e Juan.

Aos meus ex-alunos que participaram da pesquisa, pelo carinho e confiança.

RESUMO

Resumo: Esta pesquisa pretendeu investigar como se dá a visualização geométrica de alunos da educação básica em um ambiente de Modelagem Matemática. A abordagem escolhida para realização da pesquisa foi qualitativa, caracterizada como pesquisa intervenção, e teve como participantes um grupo de alunos do nono ano do ensino fundamental de uma escola estadual de Divinópolis, Minas Gerais. Para estabelecer o ambiente de Modelagem Matemática, inicialmente foi realizada uma entrevista com uma *designer* de produtos que tinha experiência com o *design* de embalagens. Os dados dessa entrevista foram utilizados para elaborar uma atividade de Modelagem Matemática, na qual os alunos tiveram que simular o trabalho de um *designer* de produtos, criando projetos de embalagens para produtos de sua escolha. Os projetos foram criados por meio de esboços com especificações de dimensões, materiais e cores, e por meio da construção de alguns protótipos. Para investigar a visualização geométrica durante a atividade de Modelagem, nove componentes da visualização geométrica – imagens pictóricas, imagens cinestésicas, imagens dinâmicas, percepção de posições espaciais, percepção de relações espaciais, percepção figura-fundo, constância perceptiva e discriminação visual – foram observados por meio de manifestações verbais, gráficas e gestuais. Como resultados da pesquisa, a manifestação desses componentes foi relacionada com as etapas da atividade de Modelagem – experimentação, abstração, resolução, validação e modificação – e uma nova organização desses componentes foi proposta, em que os nove componentes citados são reduzidos a oito e esses oito são organizados em três etapas da visualização, relacionadas ao que o aluno vê, o que ele interpreta e o que ele conclui.

Palavras-chave: Visualização. Modelagem Modelagem na Educação Matemática. Geometria.

ABSTRACT

This paper aimed to investigate how the geometric visualization of basic education students occurs in a Mathematical Modeling environment. The approach chosen for conducting the research was qualitative, characterized as intervention research, and had as participants a group of students from the ninth grade of elementary school in a public school in Divinópolis, Minas Gerais. To establish the Mathematical Modeling environment, an interview was conducted with a product designer who had experience with packaging design. The data from this interview was used to develop a Mathematical Modeling activity, in which students had to simulate the work of a product designer, creating packaging projects for products of their choice. The projects were created through sketches with specifications of dimensions, materials and colors, and through the construction of some prototypes. To investigate geometric visualization during the Modeling activity, nine components of geometric visualization - pictorial images, kinesthetic images, dynamic images, perception of spatial positions, perception of spatial relationships, figure-background perception, perceptual constancy and visual discrimination - were observed by verbal, graphic and gestural manifestations. As a result of the research, the manifestation of these components was related to the stages of the Modeling activity - experimentation, abstraction, resolution, validation and modification - and a new organization of these components was proposed, in which the nine components mentioned are reduced to eight and these eight are organized in three stages of visualization, related to what the student sees, what he interprets and what he concludes.

Keywords: Visualization. Modeling Modeling in Mathematics Education. Geometry.

SUMÁRIO

1 PROPOSIÇÃO DO PROBLEMA DE PESQUISA.....	10
2 VISUALIZAÇÃO GEOMÉTRICA: COMPONENTES E FORMAS DE MANIFESTAÇÃO DESSA HABILIDADE MENTAL.....	14
2.1 O ensino de Geometria: uma perspectiva histórica.....	14
2.2 Visualização como parte do processo de aprendizagem de Geometria.....	17
2.3 Componentes e formas de manifestação da visualização geométrica.....	20
2.4 Panorama das pesquisas sobre visualização no ensino de Geometria Espacial.....	21
3 MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: ESTABELECENDO UM AMBIENTE DE MODELAGEM PARA PESQUISAR A VISUALIZAÇÃO GEOMÉTRICA.....	22
3.1 O surgimento da Modelagem Matemática na Educação Matemática.....	23
3.2 Modelagem Matemática na Educação Matemática: diferentes concepções.....	24
3.3 A Modelagem como um ambiente de aprendizagem.....	25
4 METODOLOGIA.....	37
4.1 Delineamentos metodológicos gerais da pesquisa.....	38
4.2 Definição dos participantes da pesquisa.....	40
4.3 Entrevista com <i>designer</i> de embalagens e elaboração do “Roteiro do aluno”.....	41
4.4 Atividade de Modelagem.....	42
5 ANALISANDO MANIFESTAÇÕES DA VISUALIZAÇÃO GEOMÉTRICA EM UM AMBIENTE DE MODELAGEM.....	50
5.1 Entrevista com a <i>designer</i> de produtos: caminhos para a elaboração de uma atividade de Modelagem.....	50
5.2 A atividade de Modelagem.....	56
5.2.1 Primeiro encontro.....	60
5.2.2 Segundo encontro.....	67
5.2.3 Terceiro encontro.....	89
5.3 Como se dá a visualização geométrica em um ambiente de Modelagem Matemática?.....	95

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	101
REFERÊNCIAS.....	110
APÊNDICES.....	116
ANEXOS.....	121

1 PROPOSIÇÃO DO PROBLEMA DE PESQUISA

Ao longo dos quatro anos como aluna de licenciatura em Matemática, deparei-me, nas regências de aulas e monitorias realizadas durante os estágios e durante minha participação do Programa de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid), com alunos com dificuldades de aprendizagem em conteúdos de Geometria Espacial. Essas dificuldades eram diversas, como visualizar sólidos geométricos a partir de suas propriedades, aplicar conceitos e propriedades da Geometria Plana e reconhecer representações dos sólidos geométricos em diferentes posições. Observei também que muitos alunos tendiam a memorizar a forma como os sólidos eram representados nos desenhos dos livros didáticos e passavam a aceitar aquela forma de representação como única. Essa propensão se deve ao que Hershkowitz (1989) chama de fenômeno prototípico, que é a tendência de o ensino de Geometria ser realizado apenas por meio de objetos protótipos - figuras estereotipadas. Parzysz (1988, p. 79, tradução minha)¹ define: “A figura é o objeto geométrico que é descrito pelo texto que o define”, e não uma representação desse objeto. Aprender um conceito de uma figura apenas por meio de representações estereotipadas pode levar a uma compreensão equivocada desse conceito.

Nacarato e Passos (2003) dão alguns exemplos de como o fenômeno prototípico influencia no aprendizado de Geometria: o quadrado tende a ser desenhado de forma que os lados sejam paralelos às bordas do quadro negro ou da lousa, o que leva muitos alunos a considerarem que a mesma figura, desenhada em outras posições, represente um losango; o cilindro tende a ser desenhado com altura maior que o raio da base, de forma que uma moeda – cuja altura é bem menor que o raio da base – não seja considerada como cilindro por alguns alunos.

Aos poucos, Geometria Espacial passou a ser meu assunto favorito – sobre o qual eu tinha grande interesse de pesquisar, lecionar e procurar novas estratégias de ensino. Intrigava-me saber por que tantos alunos apresentavam dificuldades na aprendizagem desses conteúdos, principalmente no que se refere à visualização das formas. Visualização, segundo Presmeg (1986), pode ser entendida como uma habilidade que permite ver ou imaginar mentalmente objetos geométricos e realizar operações ou transformações com eles.

Meu interesse por pesquisar a respeito das dificuldades de aprendizagem dos conteúdos de Geometria Espacial levou à produção de um relato de experiência sobre o tema, intitulado “Geometria Espacial no ensino médio: investigação sobre as dificuldades no ensino-

¹ No original: “The figure is the geometrical object which is described by the text defining it” (PARZYSZ, 1988, p. 79).

aprendizagem”, escrito juntamente com uma professora do curso de licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de Minas Gerais (IFMG) e apresentado no VII Congresso Internacional de Ensino da Matemática (Ciem), em 2017 (BRAZ; SILVA, 2017).

Ainda em 2017, no oitavo período do curso, cursei a disciplina Modelagem Matemática. Segundo Araújo (2009, p. 61), “[...] de maneira geral, a Modelagem Matemática pode ser entendida como uma forma de resolver problemas da realidade usando a matemática”. Apesar de o enfoque da disciplina não ter sido a Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática, a professora da disciplina mencionou a existência dessa perspectiva, comentando que seria interessante que buscássemos conhecê-la, tendo em vista que estávamos nos formando para sermos professores de Matemática.

Dessa forma, procurei estudar um pouco a respeito da Modelagem². Descobri que não existe unanimidade quanto à conceituação de Modelagem na Educação Matemática. De maneira geral, “Modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade” (BARBOSA, 2001a, p. 6).

Tendo estudado um pouco sobre Modelagem, me encantei pelos aspectos desse campo da Educação Matemática, como a obtenção de um modelo matemático para solução de problemas reais, a possibilidade de realizar atividades de Matemática que promovessem maior envolvimento dos alunos e o fato de a Modelagem relacionar problemas da realidade com os conceitos matemáticos estudados em sala de aula. Como aponta Gravina (2011, p. 9): “A modelagem [...] torna-se particularmente interessante porque possibilita modificar nosso olhar diante das situações cotidianas – ela nos faz perceber a presença da matemática em atividades do nosso dia-a-dia”.

O fato de a Modelagem proporcionar a inserção de assuntos cotidianos ou problemas da realidade na sala de aula de Matemática me levou a pensar que utilizá-la para abordar os conteúdos de Geometria Espacial poderia exercitar a habilidade de visualização³, permitindo que os alunos relacionem esses conteúdos a objetos do mundo real que os circundam e que fazem parte de sua memória. Como afirmam Catalá, Flamarich e Aymemmi (1995), a

² A partir deste ponto da dissertação, ao utilizar os termos Modelagem e Modelagem Matemática, estarei me referindo à Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática.

³ A partir deste momento na dissertação utilizarei a expressão “visualização geométrica” para me referir especificamente à habilidade de visualização utilizada no aprendizado de conceitos geométricos.

visualização sofre interferências de nossa experiência prévia e está associada às imagens mentais de nossa memória.

Portanto, a pergunta de investigação que orientou a realização da pesquisa aqui relatada é:

Como se dá a visualização geométrica de alunos do ensino básico em um ambiente de Modelagem Matemática?

Como objetivo geral desta pesquisa, pretendo responder à questão de investigação levantada anteriormente e, como objetivos específicos desta pesquisa, elenquei:

- a) Identificar se, em quais momentos e como alguns componentes da visualização geométrica⁴ são manifestados por alunos da educação básica em um ambiente de Modelagem Matemática;
- b) Caracterizar a visualização geométrica dos alunos a partir dos componentes da visualização manifestados em um ambiente de Modelagem Matemática;
- c) Compreender como se relacionam a visualização geométrica e a Modelagem Matemática em uma atividade de simulação do trabalho de um *designer* de produto.

Para responder à questão de investigação, elaborei e apliquei uma atividade de Modelagem com uma turma de nono ano do ensino fundamental, na qual foi simulado o trabalho de um *designer* de produto que trabalha com embalagens: os alunos foram convidados a escolher um produto, criar embalagens para ele, por meio de esboços com especificações, e construir alguns protótipos.

A atividade de Modelagem foi elaborada a partir de informações obtidas em uma entrevista concedida por uma *designer* de produto que atuou no mercado do *design* de embalagens. Na entrevista, procurei identificar quais eram os critérios levados em consideração por um *designer* ao elaborar o projeto de uma embalagem. Esses critérios foram apresentados aos alunos participantes da pesquisa, e estes os utilizaram em seus projetos de embalagens.

Esta dissertação está organizada em seis seções. Considerando a questão de investigação e os objetivos desta dissertação, na seção seguinte, apresento um panorama da literatura a respeito da visualização geométrica, seus componentes e formas de manifestação e traço um breve histórico sobre como a visualização geométrica se relacionou às formas de trabalhar o ensino de Geometria no Brasil ao longo dos anos.

Na seção 3, trago algumas concepções e perspectivas acerca da Modelagem Matemática na Educação Matemática no Brasil e procuro situar minha pesquisa no cenário nacional.

⁴ Esses componentes serão apresentados e fundamentados teoricamente na seção 2 desta dissertação.

Na seção 4, apresento os procedimentos metodológicos utilizados para realização da pesquisa de campo.

Na seção 5, analiso os dados produzidos durante a pesquisa, relacionando-os com o embasamento teórico a respeito da visualização geométrica e da Modelagem Matemática na Educação Matemática.

A seção 6 consta das considerações finais da dissertação, apresentando conclusões da pesquisa de campo e apontamentos sobre os percalços e sucessos da pesquisa.

2 VISUALIZAÇÃO GEOMÉTRICA: COMPONENTES E FORMAS DE MANIFESTAÇÃO DESSA HABILIDADE MENTAL

Nesta seção, apresento parte da fundamentação teórica da pesquisa: o que é visualização, quais são seus componentes e formas de manifestação e como ela se relaciona com a aprendizagem de Geometria. Trago também um breve histórico do ensino da Geometria no Brasil e suas diferentes abordagens. Além disso, apresento um panorama das pesquisas envolvendo visualização e o ensino de Geometria para situar esta pesquisa no campo da Educação Matemática.

2.1 O ensino de Geometria: uma perspectiva histórica

A visualização geométrica é um dos aspectos relativos ao processo de aprendizagem conceitual em Geometria – o que será discutido de forma mais aprofundada na seção 2.2. Logo, um estudo a respeito da visualização geométrica deve ser inserido em um contexto mais amplo: o ensino de Geometria. Além disso, a forma como a visualização geométrica é desenvolvida se relaciona com a forma com que o ensino de Geometria é conduzido.

No Brasil, o ensino dessa disciplina passou por algumas fases e abordagens ao longo dos anos, sendo que um dos pontos marcantes dessa trajetória foi a influência do Movimento da Matemática Moderna.

O Movimento da Matemática Moderna surgiu entre o final da década de 1950 e início da década de 1960, nos Estados Unidos, como resultado das preocupações de professores com o ensino de Matemática, que vinham se acumulando nas décadas anteriores. O movimento foi o primeiro projeto de internacionalização do ensino de Matemática, e tinha a intenção de aproximar a Matemática ensinada na escola básica da Matemática produzida por pesquisadores da área. (WIELEWSKI, 2008). Como consequência dessa intenção, enfatizava aspectos do ensino de Matemática, como as estruturas algébricas e a teoria de conjuntos (SILVA, 2006). O movimento influenciou, nas décadas seguintes, o ensino de diversos países, entre eles o Brasil.

Antes de o Movimento da Matemática Moderna influenciar o ensino de Matemática no Brasil, o que ocorreu por volta da década de 1960, os documentos oficiais que orientavam o ensino de Matemática davam pouca ênfase à Geometria até o terceiro ano ginásial (atual oitavo ano). A partir dessa época do ginásio, a Geometria era introduzida de forma dedutiva, fortemente influenciada pela obra “Os elementos”, do geômetra grego Euclides. Eram, então, introduzidos os conceitos de ponto, reta, plano, em seguida apresentados os primeiros postulados e axiomas, sucedidos pelo estudo das demonstrações de teoremas. (IMENES, 1987)

O ensino de Geometria no Brasil, até os primeiros anos da década de 1970, era então voltado para o modelo axiomático-dedutivo. As mudanças decorridas da influência do Movimento da Matemática Moderna passaram a constituir uma tentativa de unificar o ensino dos três campos fundamentais da Matemática: Aritmética, Álgebra e Geometria. (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992)

Miguel, Fiorentini e Miorim (1992) afirmam que essa unificação se deu pela introdução de elementos como a própria teoria dos conjuntos e as estruturas algébricas. A abordagem dos conteúdos de Geometria deveria, então, passar por modificações para permitir essa unificação.

No caso do ensino da Geometria, havia um relativo consenso de que a abordagem euclidiana clássica deveria ser substituída por outras mais rigorosas e atualizadas, como, por exemplo, a geometria das transformações de Felix Klein, onde os conceitos de função e de grupo desempenham papel de destaque, ou a apresentação baseada nos conceitos de espaço vetorial e transformação linear. (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p. 47)

A intenção de modificar a abordagem dos conteúdos de Geometria foi apresentada pela *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI) e recomendada por grupos de estudos como o Geem (Grupo de Estudos do Ensino da Matemática – SP) e o Gempa (Grupo de Estudos do Ensino da Matemática de Porto Alegre) e, posteriormente, por guias curriculares para o ensino da Matemática. Apesar das propostas de mudanças, o ensino de Geometria não recebeu exatamente o novo enfoque previsto. (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p. 48)

De acordo com Imenes (1987), a Geometria acabou sofrendo poucas mudanças em sua abordagem, havendo apenas algumas alterações na linguagem do conteúdo:

Assim, por exemplo, passou-se a usar o termo **figuras congruentes** no lugar de **figuras iguais**. A mudança explicava-se: figuras são conjuntos de pontos e dois conjuntos são iguais se e somente se são ambos vazios ou possuem os mesmos elementos. Disto decorre que uma figura só é igual a ela mesma. Assim, por exemplo, para referir-se a duas circunferências distintas, de mesmo raio, passou-se a dizer que são congruentes (e não iguais). (IMENES, 1987, p. 56, grifos do autor)

A linguagem do conteúdo de Geometria passou então a ser adaptada de acordo com a teoria dos conjuntos. Houve também, como afirma Imenes (1987), maior preocupação com a precisão e o rigor dos conceitos e dos símbolos matemáticos, de forma que o aluno soubesse diferenciar, por exemplo, triângulo de região triangular, e ângulo de região angular, como ilustra a Figura 1:

Figura 1 – Diferença entre conceitos geométricos



Fonte: Imenes (1987, p. 56)

Essas mudanças levaram ao que Miguel, Fiorentini e Miorim (1992) chamam de ensino eclético da Geometria, caracterizado pela incompreensão do novo enfoque que se pretendia com essa área da Matemática. A justificativa para essa situação, segundo os autores, é que o ensino de Geometria por meio de espaços vetoriais ou transformações era inviável para os professores. Assim, o ensino de Geometria passou a ocupar lugar de menos prestígio no currículo escolar, sendo que seus conteúdos passaram a ser vistos como “[...] meios, úteis mas não indispensáveis para a construção e desenvolvimento das estruturas mentais básicas da inteligência”. (p. 49)

A partir da década de 1970, houve uma busca pela valorização do ensino da Geometria, de tal forma que se mantiveram os conceitos e propriedades da Geometria euclidiana, mas privilegiando aspectos intuitivos e experimentais, encaminhando-se para deduções das proposições mais fundamentais. (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p. 50)

Diferente das demonstrações presentes antes da influência do Movimento da Matemática Moderna, essas deduções, de acordo com Imenes (1987), tratavam de “[...] apresentar, em momentos adequados, um pequeno número de proposições que se encadeiam logicamente, numa sequência de teoremas”. (p. 61) O ensino de Geometria ganhava, aos poucos, nova abordagem.

Na reunião de 1980 do *National Council of Teachers of Mathematics* (Conselho Nacional de Professores de Matemática - NCTM), nos Estados Unidos, foi feita uma série de

recomendações para o ensino de Matemática, reunidas no documento “Agenda para ação”. Dentre as recomendações, destacava-se o ensino baseado na resolução de problemas, no uso de tecnologias e na promoção de um ensino voltado para a cidadania. Esse documento influenciou o ensino de diversos países nos anos seguintes, o que no Brasil culminou na criação, em 1998, dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). (LOBO; BAYER, 2004)

Os PCN de Matemática valorizam a habilidade do indivíduo de pensar geometricamente, com a justificativa de que esse tipo de aprendizagem é exigido no dia a dia de diversas profissões, como Engenharia, Arquitetura, Mecânica, Bioquímica entre outras. (BRASIL, 1998).

Os PCN de Matemática de 5ª a 8ª séries [atuais 6º a 9º anos] do ensino fundamental retomam o ensino de Geometria através de construções geométricas com régua e compasso, não só no estudo da Geometria mas associadas a outros conteúdos nas aulas de Matemática. Esse resgate da Geometria acontece devido a pesquisas realizadas a respeito do ensino de Geometria, dos questionamentos em relação ao abandono desse ramo da Matemática.
(LOBO, BAYER, 2004, p. 21)

Desde a retomada de sua valorização, iniciada no final da década de 1970 e reforçada ao longo dos anos por pesquisas e pelos PCN de Matemática, o ensino de Geometria tem sido realizado com o apoio de tendências da Educação Matemática. A visualização geométrica está intimamente relacionada com essas formas recentes de abordagem do ensino de Geometria, como será detalhado na seção a seguir.

2.2 Visualização como parte do processo de aprendizagem de Geometria

A visualização é tema muito discutido na literatura da Educação Matemática (KRUTETSKII, 1976; PRESMEG, 1986; PARZYSZ, 1988; HERSHKOWITZ, 1989; TARTRE, 1990; YAKIMANSKAYA, 1991; ZIMMERMANN; CUNNINGHAM, 1991; FISCHBEIN, 1993; GUTIÉRREZ, 1996; PAIS, 1996; ARCAVI, 2003; CASSELMAN, 2000; NACARATO; PASSOS, 2003; BATTISTA, 2007; GAL; LINCHEVSKI, 2010; RIVERA, 2011). Vários termos são utilizados como sinônimos de visualização, tais como: criação de imagens mentais, raciocínio visual, pensamento espacial, representações mentais, entre outros. A seguir, apresentarei algumas compreensões de visualização encontradas na literatura e, entre elas, a concepção que adotei nessa pesquisa.

Alguns autores consideram que “visualização oferece um método para ver o que não foi visto”⁵ (McCORMICK et al., 1987, p. 3, tradução minha). A visualização geométrica, que é o

⁵ No original: “Visualization offers a method of seeing the unseen” (McCORMICK et al., 1987, p.3)

foco desta pesquisa, é tratada na literatura como uma habilidade que permite ver mentalmente ou imaginar objetos geométricos e realizar operações ou transformações com os eles (PRESMEG, 1986; HERSHKOWITZ, 1989; GUTIÉRREZ, 1996; BATTISTA, 2007).

Apesar de essa compreensão de visualização geométrica ser praticamente unânime entre os pesquisadores do tema, alguns autores trazem a visualização como uma habilidade que ocorre na presença ou ausência do objeto, enquanto outros a tratam como uma habilidade que ocorre exclusivamente na ausência do objeto visualizado. Pertencente ao primeiro grupo de autores, Presmeg (1986) compreende visualização como um esquema de imagens mentais que representam informação visual ou espacial, sendo que tais imagens mentais podem ocorrer na presença ou ausência do objeto. Já no segundo grupo de autores podemos citar Pais (1996, p. 70), que afirma que o indivíduo constrói uma imagem mental quando é capaz de “[...] enunciar, de uma forma descritiva, propriedades de um objeto ou de um desenho na ausência desses elementos”, e Nacarato e Passos (2003, p. 78), que conceituam visualização como “[...] a habilidade de pensar, em termos de imagens mentais, naquilo que não está ante os olhos, no momento da ação do sujeito sobre o objeto”.

Como o interesse desta pesquisa é promover um ambiente de aprendizagem que permite a manifestação de uma visualização geométrica mais livre, pretendo assumir um entendimento de visualização geométrica em sintonia com as ideias desse segundo grupo de autores, compreendendo-a como a habilidade do indivíduo de formar imagens mentais de objetos geométricos, na ausência destes, e de operacionalizar e tirar conclusões com essas imagens mentais.

Tendo compreendido um pouco a respeito do que é visualização geométrica e como ela ocorre, procurei compreender qual era a relação entre a visualização e a aprendizagem de Geometria, mais especificamente de Geometria Espacial.

De acordo com Pais (1996), quatro elementos fundamentais intervêm fortemente no processo de ensino e aprendizagem da Geometria euclidiana plana e espacial: o objeto, o desenho, a imagem mental e o conceito. Segundo o autor:

O termo objeto é interpretado [...] como sendo uma parte material, claramente identificável no mundo vivenciado pelo aluno e que pode ser associado à forma de alguns dos conceitos geométricos estudados em nível da escola fundamental. Por exemplo, o objeto associado ao conceito de cubo pode ser um cubo construído em madeira, plástico, cartolina ou qualquer outro material. (PAIS, 1996, p. 66)

O desenho, assim como o objeto, é de natureza essencialmente concreta, e esses dois elementos constituem duas formas de representação de um conceito geométrico. (PAIS, 1996).

Para os interesses do ensino da geometria, são os objetos e os desenhos que podem principalmente estimular a formação de boas imagens mentais e, neste contexto, elas

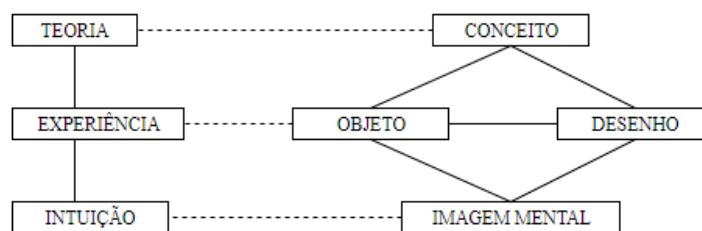
constituem uma terceira forma de representação das noções geométricas. A natureza desta representação é bem mais complexa em relação ao uso de um objeto ou de um desenho mas, por outro lado, permite uma utilização muito mais rápida e eficiente. (PAIS, 1996, p. 70)

Os desenhos e os objetos são considerados representações externas dos conceitos, enquanto que as imagens mentais constituem representações internas dos conceitos. As representações internas dos conceitos são sempre inferidas por meio da interação do indivíduo com as representações externas (BLANCO; GODINO; PEGITO, 2012).

De acordo com Fischbein (1993, p. 139, tradução minha, grifo do autor)⁶: “O que caracteriza um conceito é o fato de que ele expressa uma *ideia*, uma representação geral e ideal de uma classe de objetos baseada em suas características comuns”. Assim, o conceito de cubo, por exemplo, não é o desenho de um cubo ou a construção de um cubo de madeira, nem a imagem mental que o indivíduo possui de cubo, mas sim a ideia de cubo, que engloba suas características: um paralelepípedo reto-retângulo – paralelepípedo reto cujos polígonos da base são retângulos – cujas arestas têm todas a mesma medida. (PAIVA, 1995). As imagens mentais são representações sensoriais dos conceitos, como exemplifica Fischbein (1993, p. 139, tradução minha, grifos do autor)⁷: “O conceito de metal é a ideia geral de uma classe de substâncias que possuem em comum algumas propriedades: condutividade elétrica etc. A *imagem* [mental] de um objeto metálico é a representação *sensorial* do respectivo objeto [...]”.

Pais (1996) sintetiza a relação entre desenho, objeto, imagens mentais e conceito com o esquema representado na Figura 2:

Figura 2 – Relação entre representações e conceito em geometria



Fonte: Pais (1996, p. 72).

O conceito geométrico, conforme indicado na Figura 2, pertence ao campo da teoria. A forma como apreendemos esse conceito se dá por meio do que Pais (1996) chama de experiência ou de intuição. A interação com objetos ou desenhos que representam um conceito

⁶ No original: “What then characterizes a concept is the fact that it expresses an *idea*, a general, ideal representation of a class of objects, based on their common features”. (FISCHBEIN, 1993, p. 139)

⁷ No original: “The concept of metal is the general idea of a class of substances having in common a number of properties: electrically conductive, etc. The *image* of a metallic object is the *sensorial* representation of the respective object [...]”. (FISCHBEIN, 1993, p. 139)

– representações externas –constituem a experiência, e essas interações influenciam o indivíduo na criação de imagens mentais – representações internas – no processo que ele chama de intuição.

Como explica o autor, no processo de conceitualização geométrica, o aluno utiliza os recursos que lhe são mais próximos e disponíveis: primeiro as representações por objetos e desenhos e, posteriormente, as imagens mentais (PAIS, 1996). Logo, a visualização geométrica é um componente essencial para a aprendizagem de conceitos de Geometria Espacial.

No tópico seguinte trarei algumas reflexões sobre alguns componentes da visualização geométrica e sobre as formas como essa habilidade se manifesta no processo de aprendizagem de Geometria Espacial.

2.3 Componentes e formas de manifestação da visualização geométrica

Ao longo dos estudos para a construção desta dissertação, durante a reformulação de meu projeto de pesquisa, me deparei com a seguinte questão: quero pesquisar como se dá a visualização geométrica em um ambiente de Modelagem Matemática. Mas, como observar a visualização geométrica, sendo que ela é uma habilidade mental? Como identificar quando ela se manifesta?

É importante ressaltar que a visualização é uma atividade mental e, portanto, qualquer evidência de sua manifestação é indireta, pois não temos como examinar o interior das cabeças das pessoas e ver o que se passa em suas mentes. (TARTRE, 1990). Portanto, procurei investigar quais eram as formas de manifestação da visualização geométrica apontadas na literatura. Além de algumas formas de manifestação, alguns autores trazem a visualização como uma habilidade fragmentada no que chamarei de componentes. Dentre os componentes encontrados na literatura, destaco os seis componentes da visualização geométrica trazidos por Gutiérrez (1996):

- a) Percepção figura-fundo: Habilidade de identificar uma figura específica isolando-a de um plano de fundo complexo;
- b) Constância perceptiva: Habilidade de reconhecer que algumas propriedades de um objeto (real ou imagem mental) são independentes de tamanho, cor, textura ou posição, e não se confundir quando um objeto ou figura é apresentado(a) em diferentes posições;
- c) Rotação mental: Habilidade de produzir imagens mentais dinâmicas e visualizar uma configuração em movimento;

- d) Percepção de posições espaciais: Habilidade de relacionar a posição de uma figura – que pode estar representada por meio de um objeto, desenho ou imagem mental – ao observador ou a outro objeto;
- e) Percepção de relações espaciais: Habilidade de relacionar vários objetos, desenhos e/ou imagens mentais entre si ou simultaneamente em relação ao observador ou a outro objeto;
- f) Discriminação visual: Habilidade de comparar vários objetos, desenhos e/ou imagens mentais para identificar similaridades e diferenças entre eles.

Outra autora que investigou a visualização e categorizou alguns de seus componentes foi Presmeg (1986), que trata a visualização como composta de cinco componentes, dos quais três se relacionam especificamente à visualização geométrica⁸:

- a) Imagens concretas, pictóricas: Imagens que surgem como uma “foto na mente” de uma figura geométrica;
- b) Imagens cinestésicas: Imagens mentais que são criadas, transformadas ou comunicadas envolvendo atividade muscular. Um aluno possui uma imagem cinestésica quando gesticula com os dedos ou com o corpo a figura que está tentando visualizar, transformar ou comunicar para alguém;
- c) Imagens dinâmicas: Imagens mentais que possuem movimento. Um aluno possui uma dessas imagens quando consegue imaginar mentalmente uma figura ou parte dela se movimentando.

Nesta pesquisa, utilizei esses nove componentes da visualização geométrica – os seis propostos por Gutiérrez (1996) e os três trazidos por Presmeg (1986) – como norteadores das observações realizadas durante a pesquisa, para investigar como se dá a visualização geométrica em um ambiente de Modelagem Matemática.

Para observar a manifestação desses componentes da visualização geométrica, procurei na literatura trabalhos que discutiam quais eram as formas de manifestação dessa habilidade mental. As formas encontradas na literatura podem ser divididas em três categorias:

- a) Manifestações gráficas: desenhos, uso de figuras, objetos ou modelos manipuláveis (GUTIÉRREZ, 1996; NACARATO; PASSOS, 2003);

⁸ As demais classificações da autora são *imagens padrão* e *imagens de fórmulas*. *Imagens padrão* são relações matemáticas retratadas em um esquema de visualização espacial. O aluno utiliza esse tipo de imagem quando memoriza regras matemáticas em um esquema espacial, por exemplo: quando memoriza o sinal do seno e cosseno nos quatro quadrantes do plano cartesiano por meio da posição dos sinais de + e – nesses quadrantes. *Imagens de fórmulas* são imagens mentais de fórmulas matemáticas. Alguns alunos têm essas imagens, visualizando a fórmula escrita no quadro negro ou em seus cadernos.

- b) Manifestações verbais: comunicação por meio da linguagem falada;
- c) Manifestações gestuais: comunicação por meio de gestos (NACARATO; PASSOS, 2003).

Portanto, nesta pesquisa procurei identificar como se dá a visualização geométrica em um ambiente de Modelagem Matemática, por meio da observação de seus nove componentes, atentando às suas formas de manifestação: gráficas, verbais e gestuais.

Na seção seguinte trarei um levantamento das pesquisas encontradas na literatura que relacionam visualização e o ensino de Geometria Espacial, em busca de situar minha pesquisa em meio ao panorama já existente sobre o tema na Educação Matemática.

2.4 Panorama das pesquisas sobre visualização no ensino de Geometria Espacial

Após uma discussão de cunho teórico a respeito do que é visualização geométrica e como ela se relaciona com a aprendizagem de Geometria, realizei um levantamento da literatura sobre o tema nos sites da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), nos bancos de teses e de periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes); nos sites das Conferências Nacionais sobre Modelagem na Educação Matemática (CNMEM), no site da *Scientific Electronic Library Online* – Biblioteca Científica Eletrônica Online (SciELO); no Google Acadêmico e nos sites dos seguintes periódicos eletrônicos da Educação Matemática: *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematic* – Jornal Internacional da Educação Matemática (ZDM), *Educational Studies in Mathematics* (Estudos Educacionais em Matemática), *Bolema* (Boletim de Educação Matemática), *Zetetiké* e nos anais do Encontro Nacional de Educação Matemática (Enem).

Ao todo, encontrei 22 trabalhos que tratam da visualização no ensino de Geometria Espacial, sendo 1 tese, 8 dissertações, 11 artigos, 1 trabalho de conclusão de curso (TCC), 1 relato de experiência. Destes, apenas 2 tratavam desse assunto em atividades de Modelagem Matemática. Esses dois trabalhos são um trabalho de conclusão de curso, de Oliveira (2016), e um relato de experiência, de Mello e Fioreze (2016), apresentado no Encontro Nacional de Educação Matemática de 2016.

O TCC de Oliveira (2016) envolveu uma estratégia de Modelagem utilizando o software GeoGebra. O software foi utilizado para minimizar as dificuldades de alunos de uma turma do ensino fundamental e uma turma do ensino médio na visualização geométrica dos objetos, suas propriedades e construção. Como objetivo, o autor pretendia que os alunos, utilizando o GeoGebra, explorassem figuras geométricas por meio de sua visualização, construção, reconhecimento, posicionamento e classificação. As atividades realizadas no âmbito da

pesquisa tiveram início com a explanação de conceitos da Geometria: ponto, reta, reta paralela, segmento e figuras planas e espaciais. Em seguida, os alunos construíram polígonos regulares e irregulares utilizando palitos e balas de goma. Em um terceiro momento, os alunos foram levados ao laboratório de informática, onde tiveram uma aula sobre o GeoGebra e suas ferramentas, realizando algumas construções de quadriláteros e triângulos no software.

Apesar de um dos objetivos principais do trabalho ser minimizar as dificuldades de visualização geométrica dos alunos, a autora não traz reflexões a respeito de se esse objetivo foi alcançado com a atividade com o GeoGebra e, pela descrição das atividades, a utilização do software teve foco na construção de figuras planas, não sendo muito explorados os sólidos geométricos. A autora menciona que o uso do software e da Modelagem se mostraram como motivadores para o aprendizado dos conteúdos de Geometria e faz uma crítica a respeito da maneira como vêm sendo ensinados atualmente – de forma desinteressante e que não viabiliza a aprendizagem do aluno.

Já o relato de experiência de Mello e Fioreze (2016) envolveu o desenvolvimento de uma sequência didática para estudo de Geometria Espacial que tinha o intuito de auxiliar o desenvolvimento dos alunos na visualização e entendimento de superfícies prismáticas (especificamente o paralelepípedo retângulo). A sequência didática tinha como tema a investigação das vantagens e desvantagens das mudanças nas embalagens de leite. Os alunos trouxeram para a aula caixas de leite de dois formatos: uma mais alta e com tampa e outra sem tampa e um pouco mais baixa. A tarefa dada aos alunos foi investigar qual desses modelos de embalagem ocupava menor espaço de armazenamento na geladeira, no supermercado, ou ainda, na mesa. Os alunos deveriam verificar também relações entre as áreas totais e volume dessas embalagens, e discutir posteriormente qual seria o formato da embalagem ideal, considerando o consumo de papel da embalagem. As autoras trazem considerações no trabalho a respeito da apreensão dos conceitos e fórmulas do paralelepípedo retângulo pelos alunos, mas não tratam do desenvolvimento na visualização de superfícies prismáticas.

Entre os demais 20 trabalhos a respeito da visualização no ensino de Geometria Espacial, 10 envolveram o uso de tecnologias (GUTIÉRREZ, 1996; SILVA, 2006; COZZOLINO, 2008; RITTER, 2011; MOTA; LAUDARES, 2013; PALLES, 2013; SOUZA, 2014; SOUZA JÚNIOR; CARDOSO; CALIXTO, 2014; BORSOI, 2016; SOUZA, 2017) tais como os *softwares* GeoGebra 3D, Calques 3D, Cabri 3D, Construfig 3D, Poly e Sketchup, que foram empregados como metodologias de ensino para promover o desenvolvimento das habilidades de visualização dos alunos. Silva (2006) utilizou uma atividade *webquest*, que é uma estratégia de aprendizagem para o uso da internet em investigações em sala de aula. Dois

trabalhos apresentam pesquisas bibliográficas (GAL; LINCHEVSKI, 2010; PALLES; SILVA, 2012) e oito utilizaram materiais manipulativos e/ou técnicas de representação geométrica, como desenhos em perspectiva ou sólidos planificados (PRESMEG, 1986; KALEFF; REI; GARCIA, 1996; NEMETH, 2007; TENTOMAS, 2010; BLANCO; GODINO; PEGITO, 2012; FLORES, 2012; RODRIGUES, 2013; MARTINATTO; MENEGHETTI; SPEROTTO, 2015).

Encontrei também 8 trabalhos envolvendo Modelagem e o ensino de Geometria Espacial, sendo 3 dissertações, 3 TCCs e 2 artigos. Destes, um envolveu a etnomodelagem (SONEGO; BISOGNIN, 2010), um envolveu a construção de luminárias em formatos de prismas retos (FERNANDES, 2013), dois envolveram a construção de maquetes (MATTEI, 2012; PEREIRA, 2017) e os demais envolveram a construção de embalagens (SIMAN, 2012; ZUKAUSKAS, 2012; OLIVEIRA, 2013; COSTA, 2016; BITENCOURT, 2017). Essas quatro pesquisas mencionaram o estudo das embalagens como potencializador para o desenvolvimento de habilidades de visualização nos alunos, mas o foco de análise dessas pesquisas não foi a visualização de sólidos geométricos.

Considerando os diferentes recursos que existem para ensinar Geometria Espacial com o intuito de desenvolver nos alunos a habilidade de visualização geométrica, como os *softwares*, materiais manipulativos e *webquests*, com afirmei na seção 1, optei por utilizar a Modelagem em minha pesquisa pois ela permite que os alunos relacionem o conteúdo de geometria espacial ao mundo que os circunda, possibilitando que eles utilizem recursos de sua memória – imagens mentais de embalagens – no processo de visualização de sólidos geométricos. Além disso, acredito que um ambiente de Modelagem permite que ocorra uma visualização mais livre, diferente do que poderia ocorrer em uma aula expositiva sobre sólidos geométricos, por exemplo. O objetivo principal da pesquisa proposta é investigar como se dá a visualização geométrica de alunos da educação básica em um ambiente de Modelagem Matemática.

Na seção seguinte discutirei a respeito do que é Modelagem Matemática, mais especificamente do conceito de ambiente de Modelagem Matemática e de como a relação entre a Modelagem Matemática e a visualização geométrica foi estabelecida para realizar esta pesquisa.

3 MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: ESTABELECENDO UM AMBIENTE DE MODELAGEM PARA PESQUISAR A VISUALIZAÇÃO GEOMÉTRICA

Essa seção tem o objetivo de trazer o embasamento relativo ao ambiente de Modelagem desenvolvido nesta pesquisa, bem como justificar as escolhas teóricas realizadas para criação desse ambiente. Para tanto, realizo um breve histórico da utilização da Modelagem Matemática no campo da Educação Matemática, apresento as diferentes concepções e perspectivas de trabalho com essa tendência do ensino e procuro localizar minha pesquisa dentro dessas concepções, perspectivas e métodos de abordagem.

3.1 O surgimento da Modelagem Matemática na Educação Matemática

O termo Modelagem Matemática é proveniente das áreas ligadas à Matemática Aplicada, como as Engenharias e a Física. Nessas áreas, Modelagem Matemática se refere ao processo de descrever e formular modelos para resolver uma situação problema da realidade. (BIEMBENGUT, 2009)

Já na Educação Matemática, Barbosa (2016) afirma que a busca por metodologias de ensino que possibilitassem a compreensão dos conceitos matemáticos abstratos por meio de suas relações com situações concretas data do início do século XX. Em torno da década de 1960 essa busca passou a envolver o debate a respeito da Modelagem Matemática no campo da Educação Matemática. Nessa época, surge no cenário internacional um movimento chamado “utilitarista”, que buscava a aplicação prática dos conhecimentos matemáticos na sociedade. Esse movimento despertou o interesse de grupos de pesquisadores pela Modelagem.

Esses debates chegaram até o Brasil com maior impacto nas décadas de 1970 e 1980, mas com bastante influência das ideias e trabalhos de Paulo Freire e Ubiratan D’Ambrósio, que valorizavam aspectos sociais e culturais em suas aulas e textos (BORBA; VILLARREAL, 2005).

Além desses autores, que influenciaram o trabalho com Modelagem Matemática na Educação Matemática no Brasil, alguns outros podem ser citados, como Aristides C. Barreto, Rodney C. Bassanezi, Marineuza Gazzetta e Eduardo Sebastiani. (BIEMBENGUT, 2009)

Em sua pesquisa a respeito da trajetória da Modelagem Matemática na educação brasileira, Biembengut (2009) destaca a contribuição de Barreto e Bassanezi para o movimento. De acordo com a autora, Barreto utilizava-se de modelos matemáticos como estratégia de ensino em suas aulas ministradas para o nível superior na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC/Rio) desde 1970. Essa estratégia conquistou muitos adeptos, entre eles

Rodney Bassanezi, que já conhecia Modelagem por meio da Matemática Aplicada e passou a conhecer a Modelagem na Educação Matemática em um seminário sobre modelos matemáticos realizado pelo professor Barreto. Segundo Biembengut (2009), Bassanezi foi o coordenador do primeiro curso de pós-graduação sobre Modelagem na perspectiva da Educação Matemática.

A partir de então, muitos adeptos da Modelagem passaram a pesquisar essa tendência da Educação Matemática no Brasil. De acordo com Araújo (2010), a participação da comunidade brasileira em atividades internacionais dedicadas à Modelagem na Educação Matemática ainda era tímida na primeira década deste século, mas, em nível nacional, a comunidade está se expandindo rapidamente, sendo que de 1976 a 2007, o número de pesquisas de mestrado e doutorado sobre o tema mais que quadruplicou. Fatores que podem explicar esse interesse crescente pela Modelagem no Brasil são a criação dos fóruns de debate, como a Conferência Nacional de Modelagem na Educação Matemática (CNMEM), e do grupo de trabalho (GT) sobre Modelagem na Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM).

A Modelagem hoje compreende diferentes concepções dentro do cenário da Educação Matemática. Algumas delas serão discutidas na seção seguinte.

3.2 Modelagem Matemática na Educação Matemática: diferentes concepções

Ao longo do tempo, diferentes professores vêm usando várias formas de trabalhar a Modelagem em sala de aula, relacionadas às experiências vividas pelos adeptos dessa tendência da Educação Matemática. Assim, a Modelagem possui diferentes percepções, ou concepções. (BURAK, 2004). Araújo (2007) esclarece que o que essas concepções têm em comum é o objetivo de resolver um problema da realidade, utilizando conceitos e teorias da Matemática. A seguir apresentarei algumas das principais concepções da Modelagem na Educação Matemática no Brasil:

Burak (1992, p. 62), em sua tese, conceitua a Modelagem como um “[...] conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e tomar decisões”.

Durante o mestrado, Burak (1987 apud KLUBER; BURAK, 2008) trazia como foco do processo de Modelagem a construção do modelo. Esse foco na obtenção de um modelo pode justificar-se pelo fato de que, na época, os referenciais teóricos utilizados eram, em sua maioria, da Matemática Aplicada, que pelos interesses do campo visavam a obtenção do modelo matemático.

A partir dos estudos no campo da Educação Matemática, o autor vai reformulando suas concepções e, em Burak (2004), descreve o processo de Modelagem na Educação Matemática em cinco etapas:

- a) Escolha do tema;
- b) Pesquisa exploratória;
- c) Levantamento dos problemas;
- d) Resolução dos problemas e desenvolvimento do conteúdo matemático relacionado ao tema e
- e) Análise crítica das soluções.

Em outros trabalhos, o autor enfatiza que a escolha do tema da atividade de Modelagem deve ser de interesse do grupo de alunos que a desenvolve (BURAK, 2010) A ideia de Modelagem do autor se desvincula um pouco da necessidade de formulação do modelo matemático (BURAK, 1998 apud KLUBER, BURAK, 2008). A possibilidade de construção dos modelos não é excluída, ela só deixa de ser o foco do autor no processo de Modelagem, que se volta para o desenvolvimento do trabalho. A concepção de modelagem do autor passa a ser conduzida por pressupostos construtivistas, sociointeracionistas e de aprendizagem significativa.

Em relação às etapas de Modelagem trazidas pelo autor, Kluber e Burak (2008) ressaltam que o trabalho deve ser sempre desenvolvido entre professor-aluno-ambiente, sem que um predomine sobre o outro: “O aluno deve buscar, o professor deve mediar e o ambiente é a fonte de toda a pesquisa” (p. 22).

Outra forma de conceber a Modelagem é a trazida por Araújo (2002, p. 39), que a compreende como:

[...] uma abordagem, por meio da matemática, de um problema não matemático da realidade, ou de uma situação não matemática da realidade, escolhida pelos alunos reunidos em grupos, de tal forma que as questões da educação matemática crítica embasem o desenvolvimento do trabalho.

Araújo (2009, p. 64) explica o que quer dizer quando trata dessa abordagem da Modelagem por meio da educação matemática crítica:

[...] sustento uma abordagem da modelagem na educação matemática que não se preocupe, apenas, em dar instrumentos matemáticos aos estudantes ou em apresentar a eles exemplos de aplicação da matemática à realidade (o que poderia reforçar concepções absolutistas da matemática). Mais que isso, pretendo que a modelagem os faça refletir sobre a presença da matemática na sociedade, seja em benfeitorias ou em problemas sociais, e reagir contra as situações críticas que a matemática também ajudou a construir.

Como vimos nas concepções anteriores, o conceito de Modelagem, para alguns autores, está associado a diferentes aspectos da Educação Matemática, como a aprendizagem significativa e o construtivismo, para Burak, e a Educação Matemática crítica, para Araújo.

Outra concepção presente na literatura é a Modelagem Matemática como uma estratégia, ou metodologia de ensino e aprendizagem. Para exemplificar essa concepção, temos Blum et al. (2002), que compreendem a Modelagem como um instrumento para mobilizar e ampliar conhecimentos matemáticos, e Biembengut e Hein (2005), que entendem a Modelagem como um processo que envolve a obtenção de um modelo matemático. Modelo, por sua vez, é um conjunto de símbolos que interagem entre si, tais como desenhos, imagens, esquemas, gráficos, fórmulas matemáticas, entre outros. (BIEMBENGUT, 2004).

Para Biembengut (2004), a elaboração de um Modelo Matemático requer três etapas:

- a) Interação: fase na qual os alunos têm o primeiro contato com o problema a ser modelado;
- b) Matematização: fase na qual ocorre a formulação do problema como Modelo Matemático e sua resolução;
- c) Modelo Matemático: fase na qual ocorre a interpretação da solução encontrada e a verificação de sua validade tanto para o problema estudado quanto para outros do mesmo gênero. Caso a verificação falhe, deve-se retornar à etapa da matematização e repetir o processo a partir dela.

Biembengut e Hein (2005) apontam que a matemática possibilita a elaboração de modelos, o que oportuniza uma maior compreensão dos fenômenos estudados. Biembengut (2009) afirma que, para trazer a Modelagem para a sala de aula, é preciso “ensinar ao estudante, em qualquer nível de escolaridade, a fazer pesquisa sobre um assunto de seu interesse” (p. 22).

Outro autor que concebe a Modelagem Matemática como um processo realizado em etapas é Bassanezi (2002, p. 24), que compreende modelo matemático como sendo: “[...] um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado”. A Modelagem é concebida pelo autor como:

[...] um processo dinâmico para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual.

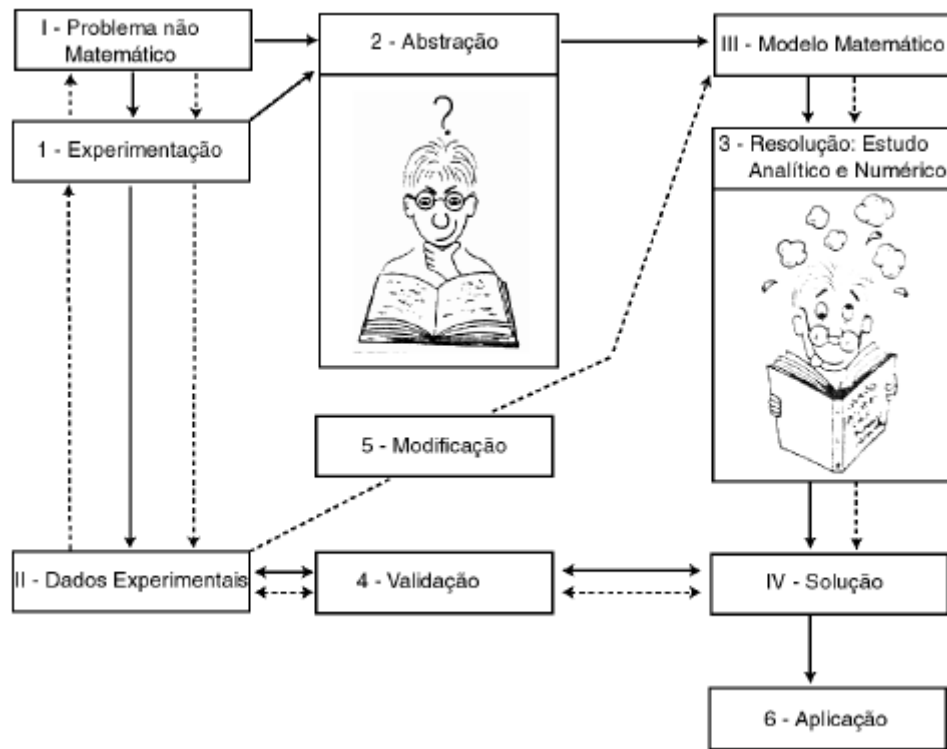
Esse processo de obtenção e validação de modelos matemáticos que constitui a Modelagem segue as seguintes etapas:

- a) Experimentação: Atividade onde se processa a obtenção dos dados por meio da experiência com o objeto a ser estudado;
- b) Abstração: Procedimento que leva à formulação dos modelos matemáticos. Nesta etapa procura-se estabelecer quais são as variáveis, problematiza-se a pergunta científica que explicita a relação entre essas variáveis e os fatos envolvidos no fenômeno estudado e formulam-se as hipóteses do problema a ser resolvido;
- c) Resolução: Etapa na qual a linguagem natural das hipóteses é substituída pela linguagem matemática, obtendo-se um modelo;
- d) Validação: Processo no qual os modelos, juntamente às hipóteses que lhes são atribuídas, obtidos na etapa anterior, são testados, comparando-se os valores obtidos no sistema real com as soluções e previsões do modelo. Nesta etapa, o modelo pode ser aceito ou refutado;
- e) Modificação: Quando os modelos são rejeitados por fatores tais como: alguma hipótese usada ser falsa ou insuficiente ou alguns dados experimentais ou informações terem sido obtidos de maneira incorreta; é preciso modifica-los, obtendo assim novos modelos.

Bassanezi (2002) ressalta que nenhum modelo deve ser considerado definitivo, e que a um bom modelo é aquele que propicia novos modelos.

A Figura 3 ilustra as etapas para obtenção de um modelo matemático, propostas por Bassanezzi (2002):

Figura 3 – Etapas da obtenção de um modelo matemático



Fonte: Bassanezi (2002, p. 27).

No esquema apresentado na Figura 3, as setas contínuas representam a primeira aproximação em relação às conjecturas feitas a respeito da situação proposta, e as setas pontilhadas representam a busca do modelo matemático que corresponda à solução do problema proposto.

Apesar da concepção da atividade de Modelagem como um processo em etapas (BASSANEZI, 2002), ressalto que a atividade de Modelagem realizada nessa pesquisa não ocorreu de forma linear, sendo que as etapas foram determinadas pelos próprios alunos de acordo com a forma que eles desenvolveram seus projetos de embalagens, sendo algumas retomadas em meio à atividade.

Além das concepções de Modelagem apresentadas até aqui, cito uma outra, interessante para essa pesquisa, apresentada por Barbosa (2001, 2004, 2007). Em seus trabalhos, o autor compreende a Modelagem como um ambiente de aprendizagem, no qual os alunos são convidados a indagar e investigar situações com referência na realidade. Essa noção de ambientes de aprendizagem provém das ideias de Skovsmose (2000). Por se tratar da concepção de Modelagem que assumi nesta pesquisa, a qual orientou o desenvolvimento do ambiente de Modelagem na pesquisa de campo, dedicarei a seção seguinte a essa concepção e procurarei justificar os motivos que me levaram a adotá-la para a pesquisa.

É importante ressaltar que meu contato com essas e outras concepções de Modelagem na Educação Matemática que apresentei, bem como a de Barbosa (2001) que trarei a seguir, se deu por meio principalmente do Grupo de Discussões sobre Modelagem na Educação Matemática (GDMEM), que é um grupo criado em 2011, pela Profa. Dra. Jussara de Loiola Araújo, onde são discutidos, quinzenalmente, textos sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática e também ocorre a elaboração de algumas atividades práticas e oficinas sobre o tema. O grupo é composto por alunos da graduação e da pós-graduação da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) e professores da Educação Básica e do Ensino Superior, e minha participação se deu em 2018.

3.3 A Modelagem como um ambiente de aprendizagem

Barbosa (2001) afirma que a Modelagem é uma oportunidade para que os alunos indaguem situações da realidade por meio da matemática sem que sejam fixados os procedimentos ou etapas para essas indagações. Dessa forma, existem diversos encaminhamentos possíveis em uma atividade de Modelagem, o que confere a essa tendência da educação matemática uma natureza mais “aberta”. Esse aspecto da Modelagem, sustentado pelo autor, me interessou durante a elaboração da pesquisa, pois um dos meus objetivos com a atividade de Modelagem era proporcionar que os alunos desenvolvessem uma visualização mais livre, menos direcionada, como acredito que aconteça muitas vezes em aulas de Matemática.

De acordo com o autor, apesar de a terminologia *método* poder ser utilizada para qualificar a Modelagem, é possível defini-la por outros termos que traduzam melhor seu entendimento da temática, como o termo *ambiente de aprendizagem*. (BARBOSA, 2001)

Assim, Barbosa (2001) concebe a Modelagem como “um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade” (p. 31) A noção de *ambiente de aprendizagem* provém de Skovsmose (2000), que define ambiente de aprendizagem como um conjunto de “[...] condições sob as quais os alunos desenvolvem as suas tarefas investigativas na sala de aula, partindo de um convite para formular questões e procurar explicações” (p. 75)

Para compreender a concepção de *ambiente de aprendizagem* de Skovsmose (2000), é preciso entender a que o autor se refere quando usa os termos *tarefas investigativas* e *convite*.

Em seu artigo, Ole Skovsmose (2000) afirma que a Educação Matemática tradicional se enquadra no paradigma do exercício, o que é diferente de um cenário para investigação. No paradigma do exercício, os alunos aprendem por meio de exemplos do professor e exercícios

repetitivos, enquanto que nos cenários para investigação os alunos se envolvem em processos de exploração e argumentação, formulando questões e procurando explicações para essas questões. O autor traz ainda três tipos de referências para cada paradigma – paradigma do exercício ou cenário para investigação – formando seis *ambientes de aprendizagem*, sintetizados no Quadro 1 a seguir:

Quadro 1 – Ambientes de aprendizagem

	Exercícios	Cenários para Investigação
Referências à matemática pura	(1)	(2)
Referências à semi-realidade	(3)	(4)
Referências à realidade	(5)	(6)

Fonte: Skovsmose (2000, p. 75)

Os ambientes (1), (3) e (5) ocorrem no paradigma do exercício, sendo que as atividades desenvolvidas podem se referir à matemática pura, à semirrealidade (situação fictícia) ou à realidade (dados extraídos inteiramente de situações reais). Já os ambientes de aprendizagem (2), (4) e (6) ocorrem por meio dos cenários de investigação (SKOVSMOSE, 2000).

Alguns exemplos desses ambientes de aprendizagem: um ambiente tipo (1) é um exercício no contexto da Matemática Pura, como por exemplo: resolva a equação: $2x + 4x - 7 = 80$. Já um ambiente que poderia ser classificado como do tipo (2) é a atividade “O que acontece com o gráfico de funções do tipo $f(x) = ax + b$ quando variamos os valores dos parâmetros a e b ?”. Um ambiente do tipo (3) seria um exercício que menciona alguma situação cotidiana, mas que tenha sido inventada pelo professor ou autor do livro texto, como por exemplo “Maria é costureira e lucra R\$ 8,50 para cada camiseta que faz. Se ela fizer 100 camisetas em janeiro e 5% a mais em fevereiro, qual será seu lucro total nesses dois meses?”. Um ambiente do tipo (4) é uma atividade investigativa realizada em uma situação fictícia, por exemplo: uma atividade em que os alunos simulem compras com um cartão de crédito, se dividindo entre vendedores e consumidores, estipulando taxas de juros e valores para os produtos. Os dados dessa atividade seriam fictícios, mas a atividade permitiria um trabalho investigativo dos alunos, de buscarem as melhores opções de compras. Um ambiente do tipo (5) poderia ser um exercício que trouxesse um gráfico do consumo de água em uma residência em determinado período de tempo e perguntasse o preço do m^3 da água, por exemplo. Já um ambiente do tipo (6) seria uma atividade que envolvesse investigação com dados da realidade,

como por exemplo uma atividade de Modelagem onde os alunos buscassem um modelo para cálculo do lucro de um empresário baseado nos dados reais de sua empresa.

É importante destacar que o que caracteriza os cenários para investigação não é o conteúdo matemático a que se referem, mas sim a forma como é desenvolvido o ambiente de aprendizagem. De acordo com o autor: “Quando os alunos assumem o processo de exploração e explicação, o cenário para investigação passa a constituir um novo ambiente de aprendizagem. No cenário para investigação, os alunos são responsáveis pelo processo” (SKOVSMOSE, 2000, p. 72).

Skovsmose (2000) ressalta que o cenário para investigação só ocorre quando os alunos aceitam o *convite*, sendo assim uma propriedade relacional. A aceitação do convite se dá por meio de sinais de envolvimento dos alunos na atividade. Um aluno demonstra que aceitou o convite quando passa a indagar, investigar as situações propostas, levantando questionamentos como “Qual será a melhor embalagem para esse produto?”; “Este formato é mais adequado?”.

A noção de Modelagem como *ambiente de aprendizagem* de Barbosa (2001) é colocada em termos desse *convite*, sendo ele a primeira etapa do processo de desenvolvimento da atividade de Modelagem.

Pelas características de uma atividade de Modelagem, tais como: fazer referência à realidade e envolver atividades investigativas, podemos categorizar as atividades de Modelagem como um ambiente de aprendizagem do tipo (6), conforme o Quadro 1. No entanto, apesar da elaboração de embalagens realizada pelos alunos participantes da pesquisa ter se baseado em uma atividade real de um profissional *designer* de produto, a situação elaborada na pesquisa foi, de certa forma, fictícia, pois não havia a necessidade real de criarmos embalagens para aqueles produtos e os projetos não foram levados adiante para a confecção das mesmas, o que caracteriza a atividade como um ambiente de aprendizagem do tipo (4), conforme o Quadro 1. Portanto, a atividade realizada na pesquisa se compreende como ambientes do tipo (4) e (6).

Considerando a Modelagem como um ambiente de aprendizagem, Barbosa (2001) ressalta ainda que ela pode assumir diferentes configurações, ou possibilidades de organização curricular. Essas diferentes configurações são classificadas pelo autor em três casos:

Caso 1: O professor apresenta a descrição de uma situação-problema e as informações necessárias para resolução desse problema, cabendo aos alunos apenas resolvê-lo.

Caso 2: O professor apresenta uma situação-problema e cabe aos alunos coletar informações sobre ela e resolvê-la.

Caso 3: Os alunos formulam e resolvem problemas, a partir de temas não-matemáticos. O professor auxilia em todas as etapas, desde a elaboração do problema a ser investigado até a coleta de dados e sua resolução. Esse caso se assemelha à metodologia de trabalho com projetos.

As tarefas do professor e do aluno em cada caso são sintetizadas pelo autor em um quadro (Quadro 2), apresentado a seguir:

Quadro 2 – Casos de Modelagem

	<i>Caso 1</i>	<i>Caso 2</i>	<i>Caso 3</i>
<i>Elaboração da situação-problema</i>	professor	professor	professor/aluno
<i>Simplificação</i>	professor	professor/aluno	professor/aluno
<i>Dados qualitativos e quantitativos</i>	professor	professor/aluno	professor/aluno
<i>Resolução</i>	professor/aluno	professor/aluno	professor/aluno

Fonte: Barbosa (2001, p. 9)

A atividade de Modelagem Matemática desenvolvida nesta pesquisa se encaixa no Caso 2, pois a situação-problema foi proposta por mim, que atuei como professora-pesquisadora no desenvolvimento do trabalho, e a coleta dos dados, a simplificação e a resolução da situação-problema foram feitas em maior parte pelos alunos, com meu auxílio nos momentos necessários.

O convite para que pudesse ocorrer o *ambiente de aprendizagem de modelagem* se deu em dois momentos, primeiramente na atividade piloto realizada com a turma, que serviu para checar se o trabalho com o tema construção de embalagens seria de interesse dos alunos, e durante a atividade de Modelagem, na qual os alunos foram estimulados – ou convidados – a responder questões como “Qual formato vai ser mais econômico para essa embalagem?”, “Qual material seria mais interessante para a embalagem ficar com melhor aparência estética, estimulando o afeto do consumidor?”. Mais detalhes a respeito dessas etapas da pesquisa serão apresentados nas seções 4 e 5.

Além da concepção de Modelagem adotada na pesquisa, é importante contextualizar em qual perspectiva de trabalho da Modelagem a atividade realizada se encontra, o que será apresentado na seção seguinte.

3.4 A perspectiva realística e a atividade de Modelagem

Kaiser e Sriraman (2006) categorizaram trabalhos das diferentes concepções de Modelagem existentes em cinco perspectivas:

Realística: Tem objetivos pragmáticos e utilitários, ou seja, está focada na resolução e compreensão de problemas reais e no desenvolvimento de competências de modelagem.

Contextual: Tem por objetivo mostrar a aplicação de conteúdos matemáticos em situações reais.

Educacional: Possui objetivos pedagógicos, relacionados ao sujeito, e que se diferenciam em:

Didáticos: Foco na estruturação dos processos de aprendizagem e na promoção da aprendizagem;

Conceituais: Foco na introdução dos conceitos e seu desenvolvimento.

Sóciocrítica: Possui objetivos pedagógicos tais como a compreensão crítica do mundo.

Epistemológica ou Teórica: Seu objetivo é orientado no desenvolvimento de teorias matemáticas.

Durante a elaboração do projeto de pesquisa, procurei não me enquadrar em uma perspectiva de trabalho da Modelagem, pois apesar de o foco da pesquisa ser o desenvolvimento de competências de Modelagem relacionadas à realidade de uma profissão, a de *designer* de embalagens, eu acreditava que durante a atividade poderiam surgir discussões de caráter social, relacionadas às embalagens, como por exemplo: por que determinado material é mais utilizado que outro, se o visual do *design* da embalagem é levado em conta acima de seu custo-benefício etc. Assim, a pesquisa poderia pender para as perspectivas realística ou sóciocrítica. Além disso, meu intuito no início da pesquisa era ensinar utilizar o trabalho de criação de embalagens para ensinar conteúdos de geometria espacial, o que se aproximaria da perspectiva educacional.

No entanto, durante o desenvolvimento da atividade de Modelagem, os alunos participantes se voltaram muito mais às questões práticas da atividade, o que fez com a atividade se enquadrasse mais na perspectiva realística da Modelagem.

Assim, a prática de Modelagem desenvolvida para a realização da pesquisa pode ser descrita com um *ambiente de aprendizagem*, desenvolvido sob uma perspectiva *realística* da

Modelagem. Mais detalhes sobre os aspectos metodológicos do desenvolvimento da atividade serão apresentados na seção seguinte.

4 METODOLOGIA

Nesta seção apresento a metodologia adotada para realização da pesquisa, desde a abordagem geral escolhida para a pesquisa até os procedimentos utilizados para realizar a entrevista com a *designer*, a elaboração do material utilizado nas atividades piloto de pesquisa e as maneiras com que foram produzidos e interpretados os dados.

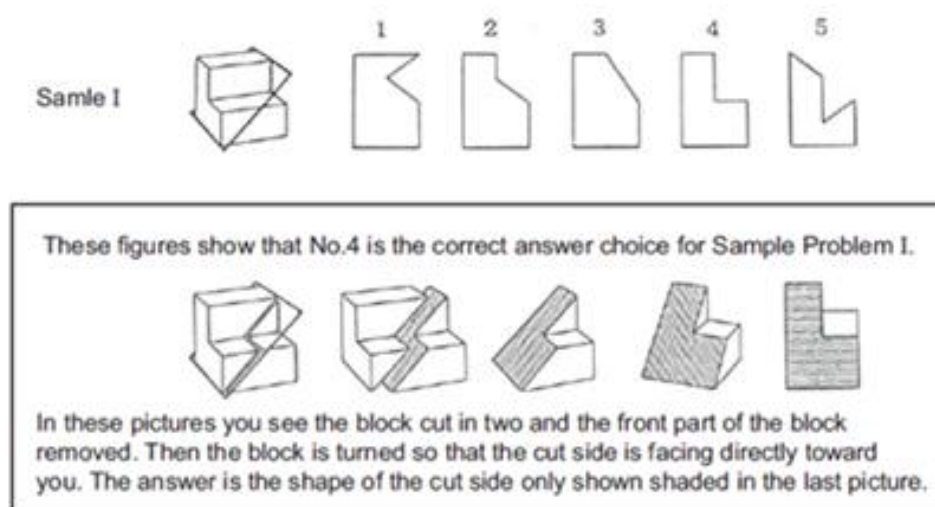
4.1 Delineamentos metodológicos gerais da pesquisa

Como já mencionado na subseção 2.3, Tartre (1990) afirma que a visualização é uma atividade mental e, portanto, qualquer evidência de sua manifestação é indireta, pois não temos como examinar o interior das cabeças das pessoas e ver o que se passa em suas mentes. O objetivo principal da pesquisa foi investigar como a visualização geométrica ocorre num ambiente de Modelagem, tendo como base os nove componentes de visualização trazidos por Gutiérrez (1996) e Presmeg (1986), que seriam observados por meio das manifestações gráficas, verbais e gestuais descritas na literatura. (GUTIÉRREZ, 1996; NACARATO; PASSOS, 2003)

Ao pensar em qual abordagem seria mais adequada para análise dos dados, cogitei a hipótese de trabalhar com uma análise quantitativa: poderiam ser contadas quantas vezes cada componente da visualização foi manifestado e quantas vezes cada forma de manifestação ocorreu, como algumas pesquisas o fazem. Para exemplificar essa abordagem, temos o trabalho de Németh (2007), que envolveu a aplicação de um teste de visualização – o *Mental Cutting Test*⁹ - que é um teste de 25 questões desenvolvido nos Estados Unidos para medir a capacidade de visualização espacial de vestibulandos. Cada questão desse teste apresenta um sólido geométrico que deve ser “cortado” mentalmente, seccionado por um plano, e em seguida deve-se mostrar qual figura plana corresponde à secção feita. A Figura 4 apresenta um dos problemas do teste:

⁹ Teste de Corte Mental (tradução minha).

Figura 4 – Questão do *Mental Cutting Test*



Fonte: https://connectingstem.org/connectingstem_v2/?cat=assessments.

Na figura, um sólido é seccionado por um plano, e a secção obtida deve corresponder a uma das cinco opções dadas. Abaixo da questão, está a explicação da resposta para o problema, que é a quarta alternativa¹⁰. Na pesquisa de Németh (2007) e em outras que utilizam testes de visualização como o *Mental Cutting Test*, a abordagem para análise dos dados costuma ser quantitativa, medindo-se a quantidade de acertos às questões dos testes.

No entanto, não me interessava saber quantas vezes cada componente de visualização se manifestava, mas sim como essa manifestação ocorria e, principalmente, como ela se relacionava com o ambiente de modelagem criado. Tendo isso em vista, a abordagem metodológica escolhida para pesquisa em questão é a qualitativa.

Algumas características da investigação qualitativa são trazidas por Bogdan e Biklen (1994), e a seguir específico como levei essas características em consideração ao longo da pesquisa:

- a) *A fonte de dados é o ambiente natural, sendo o investigador o instrumento principal:* A pesquisa proposta nesta dissertação foi realizada no interior de uma escola, e os principais dados produzidos foram por meio de observações da pesquisadora;
- b) *A investigação qualitativa é descritiva:* Os dados produzidos com a pesquisa são descritivos, pois foram obtidos por meio de transcrições e interpretações da entrevista

¹⁰ A explicação trazida na figura traduz-se como: Essas figuras mostram que a nº 4 é a opção correta de resposta para o Exemplo de Problema 1. Nessas figuras você vê o bloco cortado em dois e a parte da frente do bloco removida. Então o bloco é girado de tal forma que a face cortada está virada diretamente para você. A resposta é o formato do único lado do corte mostrado sombreado na última figura. (tradução minha)

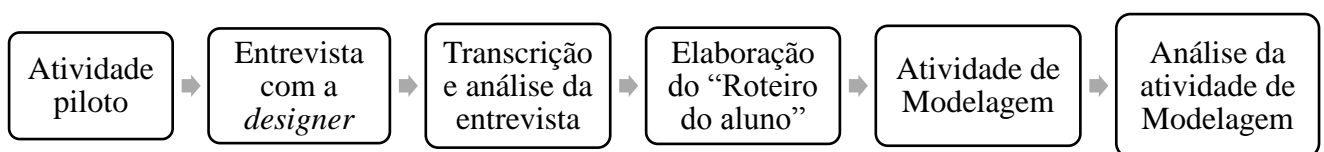
com o *designer* de embalagens, do diário de campo e das filmagens e gravações de áudio realizadas;

- c) *O interesse do pesquisador está mais no processo do que no produto/resultado*: O interesse da pesquisa é analisar como ocorrem as manifestações da visualização geométrica durante a atividade de Modelagem, e não o modelo matemático obtido em si;
- d) *O investigador tende a analisar os dados de forma indutiva*: Nesta pesquisa não foi levantada nenhuma hipótese, logo, os dados produzidos foram analisados de forma indutiva, procurando compreender o processo da visualização geométrica em um ambiente de Modelagem;
- e) *O significado possui importância vital na investigação qualitativa*: Ao observar como ocorre a visualização geométrica num ambiente de Modelagem, o intuito é observar como essas práticas se dão para os indivíduos da pesquisa, como eles relacionam – ou não – a visualização geométrica a objetos concretos da realidade. Em síntese, trata-se de observar quais são os significados envolvidos na visualização de sólidos e conceitos geométricos para os indivíduos da pesquisa.

Durante a pesquisa, atuei ao mesmo tempo como professora – apresentando a proposta e conduzindo a dinâmica da atividade de Modelagem – e como pesquisadora. Como a proposta da atividade de Modelagem foi uma iniciativa minha, o trabalho realizado pode ser considerado uma pesquisa de intervenção: “[...] investigação que visa planejar, implementar e avaliar práticas pedagógicas inovadoras” (DAMIANI, 2012, p.1).

O campo contou com a realização de uma atividade de Modelagem envolvendo sólidos geométricos: um grupo de alunos foi convidado a elaborar um protótipo de embalagem simulando o trabalho do profissional *designer* de embalagens. Ao todo, foram realizadas seis etapas, ilustradas na Figura 5, a seguir:

Figura 5 – Etapas da pesquisa de campo



Fonte: Elaborado pela autora.

A primeira etapa da pesquisa foi uma atividade piloto, realizada com os alunos selecionados para serem participantes da pesquisa, para verificar se aceitariam o convite para o ambiente de Modelagem, conforme definido por Skovsmose (2000). Essa etapa, bem como a definição dos participantes da pesquisa estão descritas na subseção 4.2.

Após a realização da atividade piloto foi feita uma entrevista com uma *designer* de produtos que trabalhou no ramo do *design* de embalagens, para procurar conhecer a respeito de como é o trabalho de um *designer* de produtos e quais são os critérios levados em consideração ao elaborar uma embalagem. Os procedimentos metodológicos utilizados para realização dessa entrevista, e para análise dos dados estão descritos na subseção 4.3. A análise da entrevista colocou em movimento o planejamento da atividade de Modelagem. Para essa atividade, foi criado um documento, intitulado “Roteiro do Aluno”, descrito detalhadamente na subseção 4.3.

As duas últimas e principais etapas do trabalho de campo de pesquisa foram a realização e análise dos dados da atividade de Modelagem, que ocorreu em três dias. O registro dessa etapa ocorreu por meio de gravações de áudios, vídeos, rascunhos produzidos pelos alunos e protótipos de embalagens construídos. Os procedimentos para produção desses dados estão descritos na subseção 4.4.

4.2 Definição dos participantes da pesquisa

Ao elaborar o projeto de pesquisa, a intenção era realizar uma atividade de Modelagem com uma turma de alunos do segundo ano do ensino médio de uma escola de Belo Horizonte, Minas Gerais. Os motivos para a delimitação desses participantes para a pesquisa eram dois: eu residia em Belo Horizonte no primeiro ano do mestrado e, no segundo ano do ensino médio, os alunos costumam estudar conteúdos de Geometria Espacial, e eu acreditava que minha pesquisa poderia contribuir para que esses alunos atribuíssem significado para os conteúdos estudados.

No entanto, ao final do primeiro ano de mestrado, me mudei para a cidade de Divinópolis, também em Minas Gerais, para trabalhar como professora de Matemática em uma escola de ensino fundamental, lecionando para alunos do sétimo, oitavo e nono anos. Naquela escola, eu era responsável por três turmas, sendo que a turma do nono ano apresentava caráter distinto das demais: essa turma contava com apenas 17 alunos na época da pesquisa.

Inicialmente, ao me mudar para Divinópolis, a intenção era procurar uma turma de ensino médio para realizar a pesquisa, conforme planejado, mas o contato com meus alunos do nono ano e diálogos com meus colegas do grupo de orientação do mestrado me fizeram considerar a possibilidade de fazer a pesquisa em meu próprio ambiente de trabalho. Percebi, ao longo das aulas que lecionei nessa turma, que havia muitos alunos que gostavam de desenhar.

Além disso, a turma se empolgava com propostas alternativas às aulas expositivas, como aulas de construção de poliedros com canudinhos e aulas realizadas na sala de informática. Como minha pesquisa envolvia Modelagem e desenho em perspectiva de sólidos geométricos, considerei fazer a pesquisa com meus alunos do 9º ano.

Levei a ideia para o grupo de orientação¹¹, e discutimos que poderia ser até mais interessante não fazer a pesquisa com alunos que estivessem estudando sólidos geométricos no ensino médio, pois esses alunos poderiam entender que a atividade de Modelagem estava sendo proposta apenas para que eles usassem o que estavam aprendendo sobre Geometria Espacial. Isso poderia limitar a criatividade dos alunos durante a atividade, interferindo na forma mais aberta de realizar a Modelagem, pretendida nesta pesquisa.

Outro fator motivador para a escolha da turma do nono ano foi o fato de muitos alunos dessa turma já trabalharem como jovens-aprendizes¹², e sempre estarem questionando qual é a utilidade dos conteúdos de Matemática. Como a atividade de Modelagem simulou o trabalho de um *designer* de embalagens, ela permitiu que os alunos verificassem, na prática, como um profissional da área de *design* de produto utiliza matemática na sua profissão.

Assim, optei por realizar a pesquisa com meus alunos do nono ano, atuando como professora-pesquisadora durante a atividade de Modelagem. Antes de falar da pesquisa com os alunos, realizei uma atividade piloto com a turma, para verificar se a temática e a dinâmica da Modelagem seriam de interesse deles, de forma a avaliar a aceitação do convite para o ambiente de Modelagem proposto, conforme o define Skovsmose (2000). De acordo com o autor, o convite é aceito quando os alunos mostram envolvimento na atividade proposta, procurando formular questões e explicações.

A atividade piloto de Modelagem foi realizada numa sexta-feira, dia no qual costumava levar propostas diferentes da aula expositiva, com o intuito de promover aulas mais divertidas e relaxantes para os alunos. Na atividade em questão, os alunos formaram quatro grupos, à escolha deles. Em seguida, cada grupo recebeu um objeto, um pequeno bibelô.

¹¹ Essa pesquisa foi produzida com o auxílio do grupo de orientação coletiva do qual participo, com coordenação da minha orientadora Dra. Jussara de Loiola Araújo. Embora esta dissertação seja resultado de discussões realizadas com este grupo, ela foi escrita na primeira pessoa do singular para deixar claro que eu assumo as responsabilidades pelas escolhas teóricas e metodológicas que foram feitas.

¹² O programa jovem aprendiz é um projeto do governo federal criado que tem como objetivo que as empresas desenvolvam programas de aprendizagem que visam a capacitação profissional de adolescentes e jovens. O programa é composto por curso de aprendizagem gratuito com duração de até dois anos. Durante este período o aprendiz recebe ensinamentos teórico (em sala de aula) e práticos (dentro da empresa contratante). Fonte: <https://www.vagasjovemaprendiz.com.br/jovem-aprendiz-o-que-e>.

Foi então proposta a seguinte questão para os alunos: *Quais seriam as dimensões (largura e comprimento) de um pedaço de papel retangular que seria utilizado para embalar, com o menor desperdício possível, o objeto que vocês receberam?*

Após a questão ser proposta, foram entregues para os alunos folhas de papel, e sobre minha mesa deixei algumas réguas, barbante e fita métrica, que poderiam ser utilizados pelos alunos. Com essa atividade, procurei trabalhar o conceito de área de superfícies irregulares e, principalmente, procurei conhecer o comportamento da turma em uma atividade de Modelagem. A análise dessa atividade piloto ocorreu por meio de observação da turma e exame dos rascunhos dos papéis de presente produzidos pelos alunos e entregues para mim ao final da aula. Mais detalhes sobre essa análise estarão presentes na seção 5.

Tendo escolhido os participantes da pesquisa e realizado a atividade piloto, foi feita uma entrevista com uma profissional *designer* de produtos, que será descrita na seção seguinte.

4.3 Entrevista com *designer* de embalagens e elaboração do “Roteiro do aluno”

Para conhecer melhor a respeito da profissão *designer* de produto e para entender quais critérios são levados em consideração ao elaborar uma embalagem, realizei uma entrevista com uma *designer* de produto, Denise¹³, que trabalhou como *design* de embalagens ao longo de sua carreira. Tendo em vista que resido em Divinópolis, e Denise, em Sabará, cidades distintas do interior de Minas Gerais, e considerando a rotina de trabalho e estudo de nós duas, optamos por realizar a entrevista via Skype. No dia da entrevista, tivemos dificuldades em estabelecer conexão pelo Skype, e então realizamos a entrevista por áudios do aplicativo Whatsapp. A entrevista foi realizada no dia 13 de maio de 2019, tendo início às 13:03 e término às 14:12, totalizando pouco mais de uma hora.

A modalidade escolhida para a entrevista foi a de entrevista semiestruturada, na qual “[...] não há imposição de uma ordem rígida de questões. O entrevistador propõe a temática ou as situações do seu objeto de estudo e o entrevistado fala sobre aquele tema proposto com base no seu repertório de conhecimentos e informações” (COUTO, 2011, p. 1).

Para essa entrevista, procurei fazer perguntas gerais a respeito de como é o trabalho de um *designer* de produto e, em específico, de um *designer* que atua no ramo das embalagens, com foco em quais critérios são levados em consideração nesse processo, tais como: escolha por um formato que gaste menos material ou que seja mais atrativo para o cliente etc. Foram elaboradas algumas questões para a entrevista, que constam no Apêndice A, no qual elenquei

¹³ Nome fictício. O nome da *designer* foi alterado para preservar sua identidade.

três tópicos principais que eu procurei abordar na entrevista. Além das questões gerais a respeito da profissão, procurei esclarecer algumas dúvidas durante a entrevista a respeito das definições dos termos *projeto* e *protótipo*, que são termos utilizados quando se trata de embalagens.

Os áudios gravados da entrevista foram transcritos na íntegra, e depois analisados de forma a identificar: *quais eram os principais critérios levados em consideração, por um designer de produto, ao elaborar uma embalagem?* Esses critérios foram então elencados e utilizados para elaborar um documento que chamei de “Roteiro do aluno”. Mais detalhes sobre os dados da entrevista serão apresentados na seção 5.

O “Roteiro do aluno” (Apêndice B) consiste de um material elaborado com algumas orientações para os alunos durante a atividade de Modelagem, como a definição das camadas de embalagens ¹⁴a serem elaboradas e os critérios que deveriam ser levados em consideração nessa elaboração, de forma semelhante à que um profissional *designer* de embalagens realiza essas tarefas. É importante frisar que o “Roteiro do aluno” não tinha o objetivo de direcionar a atividade de Modelagem, indicando quais etapas deveriam ser seguidas para chegar ao projeto da embalagem, mas sim explicitar para os alunos quais são os critérios envolvidos na elaboração de uma embalagem. O “Roteiro do aluno” serviu de material de consulta, para que os alunos pudessem verificar o que deveria ser levado em conta para que a atividade se assemelhasse ao trabalho de um *designer* de embalagens.

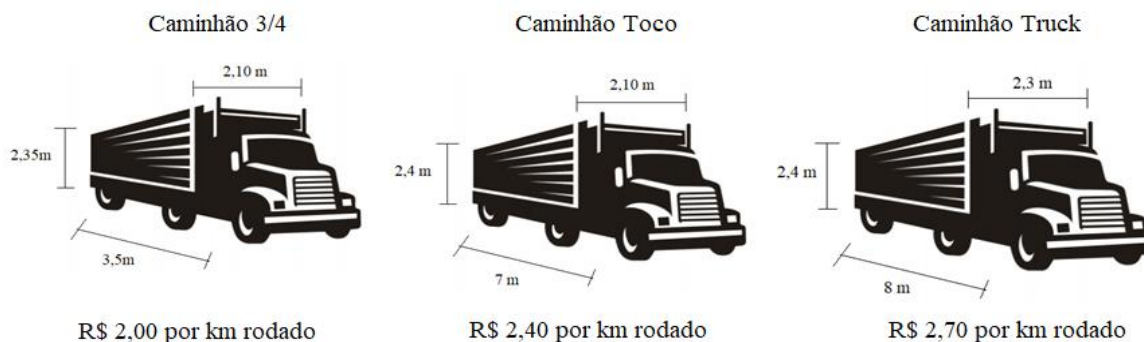
O guia também contém alguns espaços para preenchimento dos alunos que os ajudaram na organização da atividade. Alguns dados como, por exemplo, qual foi o produto escolhido, quantas camadas de embalagens foram elaboradas e quais são elas, foram registrados no guia.

Um acréscimo feito ao “Roteiro do aluno”, que não se baseou na entrevista concedida pela *designer*, foi solicitar a escolha do caminhão no qual seria realizado o transporte dos produtos embalados. Foram dadas três opções para os alunos: caminhão três quartos, toco e truck, que são os três tipos mais comumente utilizados no transporte de mercadorias. Os valores cobrados por cada caminhão e as dimensões do baú de cada tipo de caminhão estão ilustrados na Figura 6¹⁵:

¹⁴ Camadas de embalagens é um dos critérios levados em consideração por um *designer* de produtos ao elaborar o *design* de uma embalagem, como será melhor explicado no Apêndice B e na seção 5.

¹⁵ Os dados sobre quais tipos de caminhões são mais utilizados no transporte de cargas, e qual é o preço médio cobrado pelos caminhoneiros nesse transporte foram obtidos por meio de uma conversa com um representante de transportadoras e ex-gerente de transportadoras de Divinópolis, meu pai. O objetivo de obter esses dados por meio de uma entrevista foi aproximar a atividade de Modelagem da realidade local.

Figura 6 – Caminhões para transporte dos produtos embalados



Fonte: https://br.freepik.com/vetores-premium/silhueta-de-arte-de-clipe-de-caminhao_2740014.htm
(adaptada).

A intenção de oferecer opções de caminhões para os alunos foi tornar a atividade mais próxima possível da realidade, tendo em vista que um dos critérios que os *designers* levam em consideração ao elaborar uma embalagem são os gastos com transporte, que têm relação com o formato das embalagens que, por sua vez, influenciam na disposição dos produtos no espaço interno dos baús dos caminhões. Portanto, pretendi que os alunos avaliassem que tipo de caminhão seria mais financeiramente vantajoso para transportar as embalagens criadas na atividade.

Em resumo, o “Roteiro do aluno” consistiu de um documento de orientações por meio do qual os alunos se organizaram durante a atividade, anotando as decisões dos grupos e consultando informações, e se orientaram em relação a quais critérios deveriam ser utilizados para elaborar o projeto de embalagem.

A seguir apresentarei os procedimentos metodológicos para produção de dados durante a atividade de Modelagem.

4.4 Atividade de Modelagem

Como vimos, a turma na qual a atividade foi desenvolvida é uma turma do nono ano do ensino fundamental que, no momento em que a pesquisa foi realizada, contava com 17 alunos e tinha a mim como professora de Matemática. A pesquisa foi desenvolvida em três encontros, todos durante aulas de Matemática. As datas e durações desses encontros foram:

- Encontro 1: 17/06/2019 – Segunda-feira – de 08:40 às 09:30 (50 minutos);
- Encontro 2: 24/06/2019 – Segunda-feira – de 08:40 às 09:30 (50 minutos);
- Encontro 3: 27/06/2019 – Quinta-feira – de 09:45 às 11:25 (1 hora e 40 minutos).

Na semana anterior ao início da atividade de Modelagem, reservei alguns minutos da aula de Matemática para apresentar a ideia da pesquisa para os alunos. Expliquei que fazia mestrado em Educação na UFMG, e que parte da minha pesquisa de mestrado seria uma atividade sobre criação de projetos de embalagens, a ser desenvolvida com uma turma de alunos. Logo que mencionei a atividade, alguns alunos demonstraram interesse em participar. Informei que a participação seria voluntária, que não seria considerada como atividade avaliativa do bimestre em curso, e que o desenvolvimento da atividade seria filmado. Expliquei todas as demais questões relativas à ética da pesquisa, como o fato de os alunos terem nomes fictícios na dissertação e poderem desistir de serem incluídos na pesquisa a qualquer momento. A maioria dos alunos mostrou interesse em participar, principalmente quando souberam que fariam parte da minha dissertação. Sendo assim, interpretei o interesse dos alunos como parte da aceitação do convite ao ambiente de Modelagem, e providenciei, nos dias seguintes, os termos de assentimento e consentimento dos responsáveis e coletei as assinaturas.¹⁶

Todos os alunos afirmaram que aceitariam participar da pesquisa nos dias que se seguiram, mas apenas uma parte deles trouxe os termos de assentimento e consentimento assinados. Assim, no dia 17/06/2019, dia em que a atividade de Modelagem teve início, os alunos foram divididos em grupos de sua escolha, sendo que o único critério imposto para a formação dos grupos era que não houvessem alunos com e sem as autorizações assinadas em um mesmo grupo. Assim, foram formados três grupos: azul, vermelho e rosa. A atividade de Modelagem foi desenvolvida com toda a turma, mas, para a pesquisa, apenas os dados produzidos por dois grupos (vermelho e azul) foram considerados. Esses grupos eram compostos pelos seguintes alunos:

- a) Grupo vermelho: Pedro¹⁷, Larissa e Eduardo;
- b) Grupo azul: Otávio, Júlia, Rui, Davi e Vitor.

Observe que, dos 17 alunos da turma, apenas oito trouxeram os termos assinados e contribuíram com a produção de dados para a pesquisa. Esse foi um dos percalços encontrados na pesquisa: conseguir a assinatura dos termos de consentimento dos responsáveis pelos alunos. Sugiro, aos pesquisadores futuros, que pretenderem realizar pesquisas com alunos menores de idade, que peçam o auxílio da supervisão e direção da escola para explicar aos responsáveis do que se trata a pesquisa, de seus riscos e benefícios

¹⁶ Um modelo do TCLE (Termo de Consentimento Livre e Esclarecido) e um do TALE (Termo de Assentimento Livre e Esclarecido) utilizados na pesquisa está nos Anexos 1 e 2.

¹⁷ Foram atribuídos nomes fictícios para proteger a identidade dos alunos. Estes nomes foram escolhidos pelos próprios alunos.

para os alunos, e da importância, para o pesquisador, de obter a assinatura dos termos de consentimento.

Tendo sido definidos os agrupamentos, cada grupo recebeu uma pasta com a cor que os identificava. Dentro das pastas estava um “Roteiro do aluno” para cada aluno, folhas em branco e um gravador de voz.

Durante o desenvolvimento da atividade, foram posicionados uma filmadora e um gravador de voz para cada grupo, para filmar e gravar os alunos em atividade. Os diálogos estabelecidos pelos alunos durante a pesquisa foram transcritos a partir das filmagens, sendo que recorri aos gravadores de voz apenas para esclarecer trechos das falas dos alunos que não ficaram claros no áudio das filmagens.

Distribuídas as pastas com os materiais e posicionados gravadores e câmeras, a atividade de Modelagem teve início. Primeiramente, falei um pouco a respeito da profissão *designer* de produto, expliquei que uma das áreas em que esse profissional pode atuar é no *design* de embalagens, comentei que entrevistei uma *designer* de produtos que trabalhou por alguns anos no ramo das embalagens e apresentei o “Roteiro do aluno”, mencionando que seria nosso material de registro e consulta durante a atividade. Fizemos uma leitura dos critérios que são levados em consideração por um *designer* de embalagens ao criar uma embalagem. A ideia de que a atividade tinha a intenção de simular a tarefa de um *designer* de embalagens foi explicada aos alunos, e frisei que esses critérios deveriam ser levados em consideração.

Em seguida, os alunos puderam escolher qual seria o produto para o qual iriam criar embalagens, e quantas camadas de embalagens esse produto teria, passando das primeiras camadas até a caixa que é transportada no caminhão. As escolhas de cada grupo foram:

Grupo vermelho

O grupo vermelho, composto pelos alunos Pedro, Larissa e Eduardo, decidiu que iria criar um projeto de embalagem para um *fone de ouvido* de um dos integrantes do grupo. Eles decidiram que o projeto do grupo contaria com três camadas de embalagens, sendo elas:

- a) Embalagem primária: Pacotinho fechado a vácuo;
- b) Embalagem secundária: Caixa de papelão onde seriam colocados os pacotinhos;
- c) Embalagem terciária: Caixa de papelão que iria para o caminhão.

Grupo azul

O grupo azul, formado pelos alunos Otávio, Júlia, Rui, Davi e Vitor, decidiu criar um projeto de embalagem para o *celular* de um dos integrantes do grupo. Eles decidiram que o projeto contaria com três camadas de embalagens, sendo elas:

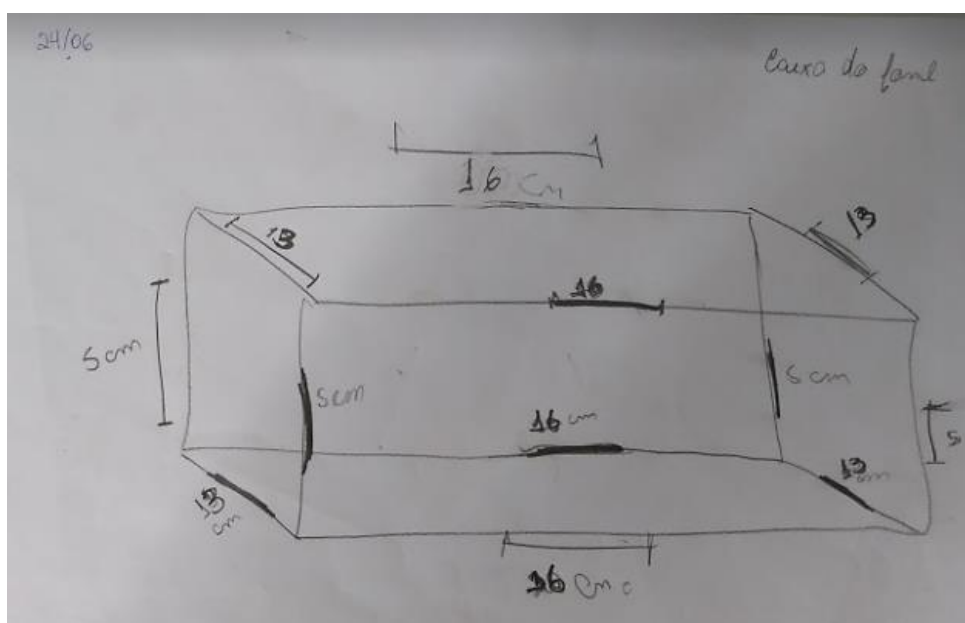
Embalagem primária: Plástico bolha

Embalagem secundária: Caixa na qual seria colocado o celular

Embalagem terciária: Caixa de papelão que iria para o caminhão

Decididos os produtos e a quantidade de camadas de embalagem de cada grupo, os alunos foram convidados a começar a esboçar o projeto das embalagens. Como cada grupo escolheu fazer três camadas de embalagens, eles deveriam fazer três esboços. Para auxiliar os alunos, foram colocados à disposição régua, trena e pedaços de barbante. Os esboços das camadas de embalagens e os guias de cada aluno foram recolhidos ao final de cada encontro, datados e colocados no interior da pasta de cada grupo. A Figura 7 mostra um esboço feito pelo grupo vermelho no dia 24/06/2019:

Figura 7 – Esboço de embalagem do grupo vermelho



Fonte: Imagem capturada pela autora.

Além de esboçar o formato das embalagens, os alunos tiveram que especificar suas medidas, materiais e cores. O último encontro, do dia 27/06/2019, foi dividido em dois momentos: um destinado à elaboração dos esboços finais das camadas de embalagens e à construção de protótipos das duas primeiras camadas de embalagens. Esses protótipos foram feitos com papelão, plástico e até mesmo com algumas embalagens prontas disponíveis no mercado, que foram trazidas pelos alunos. Mais detalhes sobre os esboços das camadas de embalagens e dos protótipos construídos estarão na seção 5.

Em síntese, o material produzido na pesquisa, para cada grupo, foi:

- a) Vídeos dos alunos elaborando os projetos de embalagens, durante a atividade de Modelagem;

- b) Áudios dos diálogos dos alunos durante a atividade de Modelagem;
- c) Guias do aluno preenchidos;
- d) Esboços dos projetos de embalagens;
- e) Protótipos da embalagem primária;
- f) Protótipos da embalagem secundária.

Os guias preenchidos, os esboços produzidos e os protótipos de embalagens construídos foram analisados como formas de manifestações gráficas da visualização (GUTIÉRREZ, 1996; NACARATO; PASSOS, 2003). Já os vídeos foram utilizados para buscar captar as manifestações verbais e gestuais da visualização (NACARATO; PASSOS, 2003). Para transcrever os vídeos, utilizei o método sugerido por Lima (2015) no trabalho “Um método de transcrição e análise de vídeos: a evolução de uma estratégia”. O método sugerido possui seis fases:

- a) Fase 1: Assistir aos vídeos;
- b) Fase 2: Selecionar os eventos críticos;
- c) Fase 3: Descrever os eventos críticos;
- d) Fase 4: Transcrever os eventos críticos;
- e) Fase 5: Discutir os dados encontrados;
- f) Fase 6: Limpar as transcrições.

A escolha por esse método se deu por seu enfoque na transcrição dos eventos críticos presentes nos vídeos, e não na transcrição total desses. Como o objetivo da realização das filmagens foi identificar as manifestações verbais e gestuais da visualização, os momentos que indicaram essas manifestações foram transcritos, sendo considerados os eventos críticos, que são acontecimentos que possuem relevância para responder à questão de pesquisa. Segundo Powell, Francisco e Maher (2004), considerar algo como um evento crítico depende da questão de pesquisa:

[...] uma instância na qual os aprendizes apresentam uma explicação matemática ou argumento, pode ser significativa para uma questão de pesquisa preocupada com a construção de justificção matemática ou demonstração pelos estudantes e, como tal, pode ser identificada como um evento crítico. (p. 104-105)

Os vídeos então foram assistidos; em seguida selecionei e anotei os momentos dos vídeos que representavam os eventos críticos, descrevi esses eventos e os transcrevi. Essa transcrição se deu da seguinte forma: transcrevi apenas as falas dos alunos envolvidos na atividade naquele momento da filmagem. Por exemplo, em alguns momentos, apenas os participantes Júlia e Davi, do grupo azul, estavam envolvidos na atividade de criação de embalagens, enquanto os demais integrantes do grupo tinham conversas paralelas. Nesses

momentos, transcrevi apenas os diálogos de Júlia e Davi. Ignorei também as vozes de integrantes de outros grupos enquanto fiz a transcrição dos vídeos, exceto quando esses diálogos entre alunos de grupos distintos eram relevantes para a pesquisa. As transcrições foram então analisadas, sendo algumas discutidas em reuniões de orientação em grupo. Após a discussão das transcrições, fiz uma limpeza, excluindo aquelas que eu não classificava como relevantes para a questão de pesquisa.

As transcrições dos vídeos serão apresentadas na seção seguinte, na qual procurei analisar os dados produzidos na pesquisa relacionando-os com os componentes de visualização e suas formas de manifestação.

5 ANALISANDO MANIFESTAÇÕES DA VISUALIZAÇÃO GEOMÉTRICA EM UM AMBIENTE DE MODELAGEM

Nesta seção trago a análise dos dados produzidos na pesquisa, em todas as suas etapas, desde a entrevista realizada com a *designer* de produtos até a atividade de Modelagem realizada com a turma de alunos do nono ano. A análise teve foco em procurar identificar como se dá a visualização geométrica em um ambiente de Modelagem Matemática, utilizando os componentes e as formas de manifestação da visualização apresentados na segunda seção desta dissertação.

5.1 Entrevista com a *designer* de produtos: caminhos para a elaboração de uma atividade de Modelagem

Quando decidi trabalhar com Geometria e Modelagem durante o mestrado, tive a ideia de elaborar uma atividade que simulasse o trabalho de um profissional da área de embalagens. Aos poucos, essa ideia evoluiu para: elaborar uma atividade que simulasse um trabalho de um *designer* de embalagens; o trabalho que este profissional tem ao criar a embalagem de determinado produto. Primeiramente, procurei saber se tal profissão existia e, por meio de conversas com uma colega *designer* gráfica, que estava cursando o doutorado em Educação Matemática, descobri que o profissional responsável pelo *design* de embalagens é o *designer* de produto. Por meio dessa colega, conheci uma *designer*, Denise, que me concedeu uma entrevista a respeito de sua profissão e do trabalho com embalagens.

Logo que me apresentei para Denise e falei superficialmente sobre o que pesquiso, ela pensou que escolhi desenvolver uma atividade sobre embalagens por causa da volumetria, como fica evidente em sua fala: “*Vai me falando... principalmente por que que você pensa a questão da embalagem, me parece que por essa questão espacial de volumetria, né? Talvez por isso a área do design de embalagens tenha te instigado a pensar nisso*” (Denise).

Isso me mostrou que uma das possibilidades do trabalho de Modelagem com a temática das embalagens seria desenvolver conhecimentos sobre volumes de sólidos geométricos. Em seguida, expliquei um pouco a respeito do que é Modelagem Matemática na Educação Matemática:

Modelagem Matemática é uma tendência do ensino em que a gente... usa situações da realidade pra poder... é... pra poder ensinar. Então a gente pega um problema da realidade, realidade mesmo, não uma realidade fictícia, algo que realmente exista, e usa da solução desse problema pra poder ensinar conteúdos matemáticos.
(Pesquisadora)

Expliquei também qual era a ideia da pesquisa, que envolveria a simulação do trabalho que um *designer* de produto tem ao elaborar o *design* de uma embalagem:

Eu queria que os alunos tivessem que elaborar uma embalagem para algum produto. [...] Nesse processo de elaboração dessa embalagem, eles vão... vão ter que fazer esboços, vão ter que levar em consideração algumas coisas que os designers de produto levam. (Pesquisadora)

Pedi à Denise que me falasse um pouco a respeito da profissão e de quais aspectos são levados em consideração por um *designer* de produto na elaboração de uma embalagem. A respeito da profissão, Denise me disse que a atividade de *design* surgiu no período da Revolução Industrial, para atender às demandas da produção em massa, suprimindo necessidades como a de diferenciação de produtos, comercialização e comunicação. Com o passar dos séculos, a profissão evoluiu, se ramificou em diferentes áreas de atuação, como *design* gráfico e *design* de produtos. Segundo Denise, atualmente o *designer* de produtos tem atuado numa gama de serviços, e uma definição básica do que esse profissional faz é:

A gente atua na interface entre o mundo material e a necessidade humana. Então a gente tá, através do mundo material, propondo soluções para as necessidades... necessidades das pessoas. E isso se dá em vários aspectos, né? Têm designers de produto que vão atuar no setor moveleiro, eles vão desenvolver móveis. Têm designers de produto que vão atuar com a parte eletrônica: eles vão desenvolver celulares, aplicativos. [...] você pode atuar em todos os bens de consumo que você puder imaginar. (Denise)

Denise também me explicou a diferença entre algumas áreas do *design*: “O pessoal do *design* gráfico normalmente trabalha só com a comunicação visual. Essa parte volumétrica, de configuração da embalagem como um produto tridimensional cabe ao *design* de produto” (Denise). Com essa fala de Denise, pude perceber que o *designer* de produto era realmente o profissional mais indicado para a minha pesquisa, e não o *designer* gráfico, por exemplo, pois meu interesse em propor uma atividade de criação de embalagens era que os alunos levassem em consideração aspectos como a forma, dimensões, materiais, meio de transporte etc., o que se encaixa mais no perfil do *designer* de produto.

Em relação aos critérios levados em consideração ao criar o *design* de uma embalagem, Denise elencou alguns, exemplificando com serviços que ela realizou quando trabalhou no mercado de embalagens. O primeiro deles, que foi uma grande surpresa para mim, foi que cabe ao *designer* de produto pensar em todas as camadas de embalagens que um produto precisa ter:

Tem produtos que têm embalagem primária, embalagem secundária. Geralmente embalagem primária é a embalagem que vai chegar no consumidor, então ela tem uma série de especificidades, ela tem uma determinada função, que além de conter o produto de forma segura, através dela vão ser comunicados vários atributos, né, estéticos, de qualidade e outros. [...] A embalagem secundária normalmente é aquela embalagem que vários produtos vão ser acoplados nela [...] para os produtos serem distribuídos no mercado. (Denise)

Para ficar mais claro o significado de camadas de embalagens, Denise usou como exemplo as embalagens que ela fez para um perfume:

Então você desenvolvia o vidro do perfume, que é a embalagem primária, que vai conter o líquido. Tinha a embalagem secundária, que era a embalagem que era entregue para o consumidor, e a embalagem terciária, que geralmente era a embalagem onde eles vão ser colocados, né, a paletização, as caixas maiores onde esses produtos vão ser colocados. (Denise)

Esse aspecto da elaboração de camadas de embalagens me fez pensar que seria interessante propor para os alunos participantes da pesquisa, a elaboração de todas as camadas de embalagens que um produto possui, desde a fabricação até o consumidor, ampliando minha proposta inicial para a atividade, que era elaborar uma embalagem apenas. Propus aos alunos que elaborassem todas as camadas de embalagens durante a atividade de Modelagem. Nesse ponto da entrevista, Denise ressaltou a relação do *design* de embalagens com a matemática, e a importância de levar em conta aspectos matemáticos na elaboração do *design* de uma embalagem para não fazer um *design* incoerente:

Eu acho que talvez seja um ponto interessante para se pensar, essa questão de embalagem, né? Porque tem que haver um cálculo, você tem que minimamente fazer algum cálculo específico para ver, vamos supor, a embalagem de um perfume ela... ela geralmente é retangular, aí você vai ter que pensar numa embalagem terciária que é a caixa onde ela vai ficar dentro do caminhão, e você tem que pensar: “Qual seria o tamanho dessa caixa para que o espaço seja aproveitado da melhor forma possível?”[...] Porque se eu fizer um projeto ruim de embalagem, vamos supor: eu penso na embalagem primária, secundária e terciária e não faço uma relação entre elas em termos geométricos, matemáticos. [...] O que pode acontecer? Eu posso ter espaços subutilizados dentro da embalagem terciária, logo, eu poderia tá mandando mais perfumes nas caixas, nos caminhões. (Denise)

Esse destaque que Denise fez para a matemática envolvida no *design* de uma embalagem me fez ficar atenta para que, no momento da elaboração das camadas de embalagens, eu orientasse os alunos para elaborarem as diferentes camadas de embalagens buscando relacioná-las, ao invés de pensa-las de forma isolada.

Ao elaborar o “Roteiro do aluno”, foi colocado “quantidade de camadas de embalagens” como um quesito a ser preenchido pelos alunos no guia. À medida que eles resolviam quantas e quais seriam as camadas de embalagens, essas deveriam ser preenchidas no guia, como mostra o trecho a seguir:

QUANTIDADE DE CAMADAS DE EMBALAGENS: _____

EMBALAGEM PRIMÁRIA: _____

EMBALAGEM SECUNDÁRIA: _____

EMBALAGEM TERCIÁRIA: _____

OUTRAS CAMADAS (Preencha apenas se necessário): _____

[Trecho extraído do “Roteiro do aluno”, disponível no Apêndice B]

Um critério levado em consideração por *designers* de produto ao elaborar uma embalagem, destacado por Denise, foi o que ela chamou de desmaterialização:

A gente tem caminhado para a desmaterialização, né. Não só de embalagens, mas de produtos também. [...] Desmaterialização no sentido de, cada vez mais, usar menos material para produção de bens de consumo e embalagens. Embalagens principalmente. Levando em conta essas questões ambientais. Hoje, você, por exemplo, tem uma marca de produtos orgânicos que a caixa do ovo, ela... a caixa é biodegradável, você pode descartar no seu jardim, e dentro dessa caixinha do ovo já tem uma semente que vai germinar ali dentro. [...] Então as coisas têm caminhado muito nesse sentido [...] a questão das embalagens que você desenvolve pra pessoa guardar o máximo de tempo possível [...] uma embalagem desenvolvida para criar uma relação de afeto mesmo, né, a pessoa não vai querer descartar aquela embalagem. (Denise)

Com essa fala de Denise, resolvi dividir o critério que ela apontou como desmaterialização em três: “desmaterialização”, “reutilização” e “afeto”, sendo a desmaterialização desenvolver embalagens usando o mínimo de material possível, ou pensar em materiais biodegradáveis; a reutilização desenvolver embalagens reutilizáveis, e o afeto desenvolver embalagens pensando que o consumidor possa criar afeto por elas, desejando guardá-las para reutilizá-las em seu cotidiano. Esses três aspectos: “desmaterialização”, “reutilização” e “afeto”, foram levados em consideração ao elaborar a proposta da atividade de Modelagem. A intenção de criar três critérios relacionados ao conceito de desmaterialização foi facilitar o entendimento de cada um por parte dos alunos, aumentando a chance de que eles levassem cada aspecto do que Denise chamou de desmaterialização em consideração.

Uma das minhas intenções com a elaboração das embalagens era que os alunos ficassem o mais livres possível para elaborá-las, pensando nos formatos que desejassem. Eu imaginava que, quanto mais elaborado e pouco convencional fosse o formato de uma embalagem, mais interessante seria o projeto dos alunos. No entanto, na entrevista Denise me contou sobre um projeto que envolvia um formato pouco convencional para uma embalagem, e como esse formato não ficou muito viável para o transporte do produto:

Eu peguei um projeto de uma empresa, que foi uma embalagem que deu errado. A pessoa que desenvolveu – foi para uma garrafa de cachaça cilíndrica, embalagem primária. A embalagem secundária era uma caixa. A pessoa fez uma caixa, ela era tipo um losango. Era muito bonita a embalagem, só que, a gente fez um cálculo e a gente fez um protótipo de uma outra caixa retangular. E no lugar da embalagem antiga que eu tava reformulando, a embalagem ocupava o espaço de duas garrafas, então a pessoa tava pagando o dobro pelo transporte. (Denise)

Ainda a respeito do formato de uma embalagem, Denise me alertou para um problema que temos hoje em dia com algumas embalagens, como as caixinhas de leite:

[...] a gente tem um problema sério aqui no Brasil principalmente, dessas embalagens de caixinha de leite. Não sei se você já reparou, quando o leite está acabando, você nunca consegue esvaziar a caixa, sempre fica com um pouquinho de leite ali dentro. Então, esse é um problema sério [...] que essas caixas estão sendo descartadas com esse leite. Ele tem contaminado os mananciais de água, ele entra no processo de decomposição, e libera uma série de gases. [...] esse descarte desse restinho de leite, além de ser um desperdício de alimento é uma coisa que tem impactado negativamente o ambiente. E é um problema geométrico do formato da caixa de leite. (Denise)

Sintetizei as ressalvas feitas por Denise a respeito da importância do formato de uma embalagem no critério que chamei de “formato inteligente”, segundo o qual os alunos teriam que pensar num formato de embalagem que não desperdiçasse produto, caso isso se aplicasse ao produto que escolhessem. Em relação a criarem um formato mais incomum ou não para as embalagens, deixei livre para que os alunos decidissem sobre o formato, mas fiz questão de ressaltar que estaríamos pensando em todas as etapas do transporte daquele produto, inclusive em qual tipo de caminhão ele iria ser transportado, como foi explicado na seção quatro. O transporte foi incluído para evitar que os alunos elaborassem projetos de embalagens pouco adequados para o transporte, causando desperdício de espaço nos caminhões, por exemplo.

Um último quesito mencionado por Denise foi a respeito da importância de pensar, ao elaborar uma embalagem, em quem serão as pessoas que terão contato com aquela embalagem. Além do consumidor, haverá pessoas responsáveis pelo transporte daquele produto, pela sua venda e, talvez, pela sua reciclagem, como fica evidente na fala da entrevistada, que exemplificou o impacto de uma embalagem no caso da garrafinha de água:

[...] o exemplo da garrafa de água é o seguinte: você tá desenvolvendo a garrafinha de água para uma pessoa que vai beber a água? Não, não é só para essa pessoa. Ela vai beber a água, ela pagou por ela, mas ela vai descartar a garrafa. Tem uma série de usuários que vão interagir com esse resíduo em algum momento do processo de desaparecimento dele ou não, no ambiente. Por exemplo, a associação de catadores de materiais recicláveis. Quando os catadores, eles pegam essa garrafa, a garrafinha, no mínimo, ela tem três tipos de plásticos diferentes. Ela tem o plástico da garrafa em si, que é o plástico que normalmente é transparente; o plástico que veda e... é a rosca; e a tampinha, ela é um outro tipo de polímero, e o plástico do rótulo. Quando isso vai para uma associação eles têm que separar esses materiais. Então as pessoas, normalmente, que vão separar esses materiais da garrafa... pra tirar o lacre e a parte que fica grudada na rosca da garrafa; eu imagino que [...] a pessoa vai pegar um estilete, que a pessoa vai pegar uma faca pra poder tirar aquilo porque aquilo não sai facilmente. Então, quando a pessoa tá projetando ela, tem que pensar não só em quem vai pagar, mas em quem vai interagir de alguma forma com esse produto. (Denise)

Essa importância de pensar em todas as pessoas que, de alguma forma, vão interagir com a embalagem elaborada eu chamei de “impacto humano”, e coloquei como um dos critérios a serem considerados pelos alunos na elaboração do projeto das embalagens, de tal forma que os alunos deveriam elaborar embalagens que não causassem danos físicos àqueles que tivessem contato com elas.

Assim, por meio da entrevista, foram elencados os critérios:

- a) Desmaterialização;
- b) Reutilização;
- c) Afeto;
- d) Formato inteligente;
- e) Impacto humano.

Continuando a elaboração do “Roteiro do aluno”, esses critérios elencados por meio da entrevista foram incluídos, com as devidas explicações, no “Roteiro do aluno” e foram todos explicados aos alunos. O trecho que continha esses critérios especificava que eles deveriam ser levados em consideração ao elaborar os esboços de cada camada de embalagem, como mostrado a seguir:

- *Desmaterialização*: As embalagens devem evitar o desperdício de material. Evitar esse desperdício faz com que os custos de produção e transporte sejam menores e também fazem com que aquela embalagem cause menos poluição ambiental.
- *Reutilização*: Se possível, crie embalagens que possam ser reutilizadas para outros propósitos, para evitar que sejam descartadas na natureza.
- *Afeto*: Tente criar uma embalagem que faça com que o consumidor crie certo afeto por ela, fazendo com que ele deseje a reutilizar. A reutilização evita o descarte de embalagens, diminuindo a poluição.
- *Formato inteligente*: Tente criar uma embalagem que permita que o consumidor utilize todo o produto, sem que nenhuma parte dele fique preso na embalagem (se este for um caso possível para seu produto).
- *Impacto humano*: Procure pensar em todas as pessoas que terão contato com esta embalagem, desde o vendedor, consumidor e, se for uma embalagem feita de material reciclável, os profissionais que trabalham com reciclagem. Esta embalagem pode causar danos para estas pessoas?

[Trecho extraído do “Roteiro do aluno”, disponível no Apêndice B]

Além dos critérios que um *designer* de produto leva em consideração ao elaborar um projeto de embalagem, perguntei para Denise, durante a entrevista, qual era a diferença entre os termos “projeto” e “protótipo”, que são termos do *design* que eu estava usando, ao me referir à atividade de Modelagem da pesquisa, sem ter certeza sobre o significado de cada um deles.

Denise me explicou que o protótipo é uma parte de um projeto, e exemplificou a diferença dos termos no ramo do *design* de produtos:

O projeto, ele... ele é tudo, todas as ações e todas as etapas que vão acontecer, que precisam acontecer, para que o produto seja produzido. Por exemplo, o que envolve um projeto: delimitações, [...] pesquisa de mercado, pesquisa de materiais. [...] Todas as ações que devem acontecer para que o produto seja produzido. [...] A prototipagem nada mais é do que uma etapa dentro do projeto. Depois que eu fizer uma série de ações, de começar a pensar em configuração de produto [...], aí você vai começar a fazer o protótipo. O protótipo é como se fosse um primeiro produto daquele que vai sair no mercado. Ele tem o tamanho que vai ser o produto, ele é feito dos mesmos materiais que o projeto definiu. (Denise)

Por meio das definições atribuídas por Denise para os termos “projeto” e “protótipo”, eu soube definir adequadamente o que eu pretendia que os alunos fizessem durante a atividade de Modelagem: elaborassem projetos de embalagens, por meio de esboços com as especificações das dimensões, materiais, cores etc. de determinado produto e, se possível, construíssem protótipos das primeiras camadas de embalagens, o que acabou sendo possível durante a pesquisa de campo.

Tendo realizado a entrevista e definido quais são os critérios que um *designer* de produtos utiliza na elaboração do projeto de uma embalagem, e tendo sintetizado essas informações no “Roteiro do aluno”, passei para a etapa seguinte da pesquisa de campo: a realização da atividade de Modelagem com a turma de alunos do nono ano, que será analisada na subseção 5.2.

5.2 A atividade de Modelagem

Retomo algumas etapas, já mencionadas na Metodologia, para descrever a atividade de Modelagem realizada na pesquisa. Esta contou ao todo com três encontros, sendo todos realizados em aulas de Matemática lecionadas para a turma do nono ano que participou da pesquisa:

- a) Encontro 1: 17/06/2019 – Segunda-feira – de 08:40 às 09:30 (50 minutos);
- b) Encontro 2: 24/06/2019 – Segunda-feira – de 08:40 às 09:30 (50 minutos);
- c) Encontro 3: 27/06/2019 – Quinta-feira – de 09:45 às 11:25 (1 hora e 40 minutos).

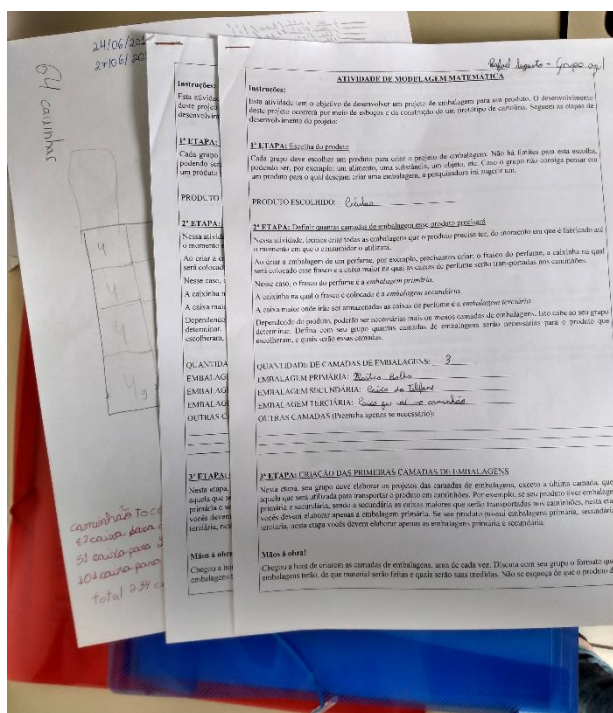
Apesar de todos os 17 alunos terem mostrado interesse em participarem da pesquisa, apenas oito alunos trouxeram os TCLEs (Termos de Consentimento Livre e Esclarecido) e TALEs (Termos de Assentimento Livre e Esclarecido) assinados, o que é exigido pelo Comitê de Ética em Pesquisa da UFMG e, portanto, condição necessária para participação na pesquisa. Sendo assim, apenas esses 8 alunos foram os participantes da pesquisa. Eles foram divididos em dois grupos: o grupo vermelho e o grupo azul:

Grupo vermelho: formado pelos alunos Pedro, Larissa e Eduardo.

Grupo azul: formado pelos alunos Otávio, Júlia, Rui, Davi e Vitor.

Tendo sido definidos os agrupamentos, cada grupo recebeu uma pasta com a cor do seu grupo, contendo um gravador de voz, folhas de papel em branco e um “Roteiro do aluno” para cada estudante. A Figura 8 traz as pastas com exemplos de como seu conteúdo foi utilizado: guias preenchidos e folhas que foram usadas para fazer o esboço das embalagens.

Figura 8 – Pastas distribuídas aos grupos



Fonte: Imagem capturada pela autora.

Durante o desenvolvimento da atividade, foram posicionados uma filmadora e um gravador de voz para cada grupo. A participação dos alunos na produção de dados teve início nesse momento. Como não pude levar os tripés das câmeras pela impossibilidade de carregá-los para o trabalho, os alunos, no início de cada encontro da atividade de Modelagem, auxiliaram a posicionar as câmeras sobre pilhas de cadernos em cima de carteiras. Senti que esse momento de posicionar as câmeras foi uma forma de envolver os alunos mais ativamente na pesquisa, e foi um momento que mostrou o interesse deles em participar da atividade, pois buscavam sempre o melhor ângulo e a mudavam de lugar caso se movimentassem pelo ambiente da sala, como ocorreu com o grupo vermelho em alguns momentos, que serão explicados posteriormente.

Distribuídas as pastas com os materiais e posicionados gravadores e câmeras, a atividade de Modelagem teve início. Para explicitar a relação dos dados produzidos durante a pesquisa com o ambiente de Modelagem criado, e, tendo em vista a forma como procurei conduzir a

atividade de Modelagem com os alunos, analisarei os dados produzidos ao longo da atividade a apresentando em etapas, usando como base as etapas de obtenção e validação de um modelo matemático de Bassanezi (2002), já apresentadas na subseção 3.2, que são:

- a) Experimentação: Atividade em que se processa a obtenção dos dados por meio da experiência com o objeto a ser estudado;
- b) Abstração: Procedimento que leva à formulação dos modelos matemáticos. Nesta etapa procura-se estabelecer quais são as variáveis, problematiza-se a pergunta científica que explicita a relação entre essas variáveis e os fatos envolvidos no fenômeno estudado e formulam-se as hipóteses do problema a ser resolvido;
- c) Resolução: Etapa na qual a linguagem natural das hipóteses é substituída pela linguagem matemática, obtendo-se um modelo matemático;
- d) Validação: Processo no qual os modelos obtidos na etapa anterior são testados, comparando-se os valores obtidos no sistema real com as soluções e previsões do modelo. Nesta etapa, o modelo pode ser aceitado ou refutado;
- e) Modificação: Quando os modelos são rejeitados por fatores tais como alguma hipótese usada ter sido falsa ou insuficiente ou alguns dados experimentais ou informações terem sido obtidos de maneira incorreta, é preciso modificá-los, obtendo assim novos modelos.

Os dados produzidos na pesquisa serão, então, apresentados conforme o decorrer das etapas da atividade de Modelagem realizada. Friso que o objetivo principal da pesquisa foi analisar, por meio dos dados da atividade de Modelagem, como se dá a visualização geométrica em um ambiente de Modelagem. Como discuti na seção 2, a visualização geométrica possui nove componentes (GUTIÉRREZ, 1996; PRESMEG, 1986) e estes componentes se manifestam por meio de três formas (GUTIÉRREZ, 1996; NACARATO; PASSOS, 2003). Na Figura 9, a seguir, apresento os nove componentes da visualização:

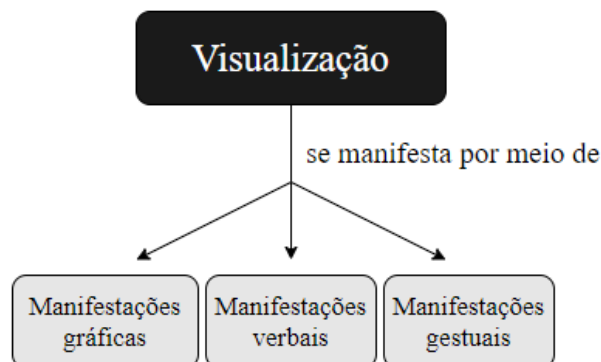
Figura 9 – Visualização e seus componentes



Fonte: Elaborado pela autora, baseado em Gutiérrez (1996) e Presmeg (1986).

Os nove componentes da visualização se manifestam por meio de três formas, que são as manifestações gráficas, verbais e gestuais, esquematizadas na Figura 10:

Figura 10 – Formas de manifestação da visualização



f

Fonte: Elaborado pela autora, baseado em Gutiérrez (1996); Nacarato; Passos (2003).

Na análise dos dados, procurei identificar, por meio das formas de manifestação gráficas, verbais e gestuais dos alunos, como os nove componentes da visualização se manifestaram durante a atividade de Modelagem. Na seção seguinte, trago a descrição dos encontros nos quais ocorreu essa atividade.

5.2.1 Primeiro encontro

No primeiro encontro da pesquisa foram realizadas as três primeiras etapas descritas por Bassanezi (2002): experimentação, abstração e resolução. Começando pela experimentação, primeiramente falei um pouco a respeito da profissão *designer* de produto, expliquei que uma das áreas em que esse profissional pode atuar é no *design* de embalagens, comentei que entrevistei uma *designer* de produtos que trabalhou por alguns anos no ramo das embalagens e fizemos a leitura do “Roteiro do aluno”, mencionando que seria nosso material de registro e consulta durante a atividade. Expliquei cada um dos critérios que são levados em consideração por um *designer* de embalagens ao criar uma embalagem, frisando que esses critérios deveriam ser levados em consideração durante a atividade.

Em seguida, os alunos puderam escolher qual seria o produto para o qual iriam criar embalagens, e quantas camadas de embalagens esse produto teria, passando das primeiras camadas até a caixa que é transportada no caminhão. As escolhas de cada grupo foram:

O grupo vermelho decidiu que iria criar uma embalagem para um *fone de ouvido* de um dos integrantes do grupo, cuja imagem é mostrada na Figura 11. Eles decidiram que o projeto do grupo contaria com três camadas de embalagens, sendo elas:

- a) Embalagem primária: Pacotinho fechado à vácuo;
- b) Embalagem secundária: Caixa de papelão onde seriam colocados os pacotinhos;
- c) Embalagem terciária: Caixa para ser transportada no caminhão.

Figura 11 – Fone de ouvido escolhido pelo grupo vermelho



Fonte: Imagem capturada pela autora.

O grupo vermelho chamou a embalagem secundária de “caixa para guardar” e os participantes me explicaram que se tratava da caixa onde seriam colocados os pacotinhos com fones de ouvido. Assim que decidiram quantas e quais seriam as camadas de embalagem de seu

projeto, os integrantes do grupo preencheram o que decidiram nos guias, como ilustra a Figura 12.

Figura 12 – Preenchimento do “Roteiro do aluno” pelo grupo vermelho

QUANTIDADE DE CAMADAS DE EMBALAGENS:	<u>3</u>
EMBALAGEM PRIMÁRIA:	<u>Bolote a vácuo</u>
EMBALAGEM SECUNDÁRIA:	<u>Caixa para guardar</u>
EMBALAGEM Terciária:	<u>Caixa de caminhão</u>
OUTRAS CAMADAS (Preencha apenas se necessário):	

Fonte: Imagem capturada pela autora.

O grupo azul decidiu criar um projeto de embalagem para o *celular* de um dos integrantes do grupo, cuja imagem é trazida na Figura 13. Eles decidiram que o projeto contaria com três camadas de embalagens, sendo elas:

- Embalagem primária: plástico bolha;
- Embalagem secundária: caixa na qual seria colocado o celular;
- Embalagem terciária: caixa para ser transportada no caminhão.

Figura 13 – Celular escolhido pelo grupo azul



Fonte: Imagem capturada pela autora.

Tendo decidido a quantidade de camadas de embalagens e quais seriam essas, o grupo preencheu os guias com as informações, como mostra a imagem seguinte:

Figura 14 – Preenchimento do “Roteiro do aluno” pelo grupo azul

QUANTIDADE DE CAMADAS DE EMBALAGENS: 3

EMBALAGEM PRIMÁRIA: Plástico bolha

EMBALAGEM SECUNDÁRIA: Caixa de telefone

EMBALAGEM TERCIÁRIA: Caixa que vai no caminhão

OUTRAS CAMADAS (Preencha apenas se necessário):

Fonte: Imagem capturada pela autora.

Tendo ficado clara a proposta da atividade, e tendo sido definidos os produtos a serem embalados e quais e quantas seriam as camadas de embalagens desses produtos, ainda no primeiro encontro foi pedido que os alunos elaborassem os esboços – com especificações por escrito – das embalagens primárias de seus produtos. Os alunos, tendo se familiarizado com a proposta da atividade, passaram a medir os objetos que escolheram para criarem embalagens e a dialogar uns com os outros, concluindo assim a etapa da experimentação.

Os grupos então partiram para a elaboração do projeto da embalagem primária, sendo a do grupo vermelho o pacotinho fechado a vácuo e a do grupo azul, o plástico bolha. O grupo vermelho, logo no início, apresentou uma dúvida em relação a se um arame utilizado para amarrar o fone de ouvido contaria como embalagem, como mostra o diálogo a seguir:

[V1]¹⁸ **Larissa:** Vai colocar o arame aqui? [apontando para o fone de ouvido enrolado, indicando a parte que seria presa com um pedaço de arame].

[V2] **Pedro:** O quê?

[V3] **Larissa:** Aquele arame lá vai prender aqui? [os alunos não tinham em mãos um arame, estavam imaginando um que poderia fazer parte da embalagem]

[V4] **Pedro:** Vai. Ô professora, vem cá.

[V5] **Pesquisadora:** [se aproxima dos alunos] Oi.

[V6] **Pedro:** Sabe aquele arame... de pão.

[V7] **Larissa:** Aquele arame de amarrar o pão. Isso conta como embalagem?

[V8] **Pesquisadora:** Ah, tá. Então, isso não conta como embalagem não.

[V9] **Pedro:** [falando com Larissa] Te falei!

[V10] **Pesquisadora:** Como embalagem contam só os materiais que vão embrulhar ele todo. Mas vocês podem colocar como parte da embalagem, junto com a primeira camada de embalagem.

¹⁸ Para identificação, as falas do grupo vermelho serão numeradas como V1, V2, V3... e as falas do grupo azul serão numeradas como A1, A2, A3... e assim por diante.

[V11] **Pedro:** [falando com Larissa] Então a primeira é o saco... o pacote a vácuo.

Vídeo gravado em 17/06/2019 - 08:56:20 – 08:57:07

Ficou decidido então, como mostra a transcrição da minha fala [V10], que só seriam consideradas embalagens aquelas que envolvessem o produto escolhido por completo. As falas [V1], [V3] e [V4] indicam que Larissa e Pedro, ao fazerem referência a um arame de amarrar pão que estavam imaginando, estavam formando uma *imagem pictórica* desse arame.

Tendo definido que a embalagem primária de seu produto seria, de fato, o pacotinho fechado a vácuo, os alunos passaram a elaborar o projeto dessa embalagem. Pedro e Larissa enrolaram o fone de ouvido e mediram a largura e o comprimento do fone enrolado, utilizando uma régua. Em seguida, Larissa pegou papel e lápis e fez uma expressão pensativa. Pedro interviu nesse momento, instruindo sobre o formato da primeira camada de embalagem:

[V12] **Pedro:** Aqui, ó. Faz tipo um quadradinho aqui. [gesticula com os dedos sobre o papel, formando um retângulo] 3 cm por... [pega a régua e confere o comprimento do fone enrolado] 8 cm. Professora, tem que colocar as medidas no desenho?

[Pesquisadora se aproxima do grupo]

[V13] **Pesquisadora:** Isso, tem que colocar as medidas e de que que é feito, qual o material, cor. Vocês podem desenhar várias vezes se precisar, deixa tudo no papel pra eu olhar depois. Essa camada que vocês tão desenhando é o quê? [aponta para o desenho que Larissa estava esboçando]

[V14] **Larissa:** Pacotinho a vácuo.

[V15] **Pesquisadora:** Então vocês colocam do que ele vai ser feito, a cor e as medidas.

[V16] **Pedro:** Plástico, então. Transparente. [Pedro pega o esboço de Larissa e escreve as informações sobre o material da embalagem]

[V17] **Larissa:** Mas tem que dar a volta nele, né não?

[V18] **Pedro:** Então tem que medir de novo. [Pega a régua e mede quais medidas seriam necessárias para dar uma volta completa no fone enrolado, girando a régua] 8 por 16 [centímetros].

[V19] **Larissa:** Não pode desperdiçar, tem que ser 7. [centímetros]

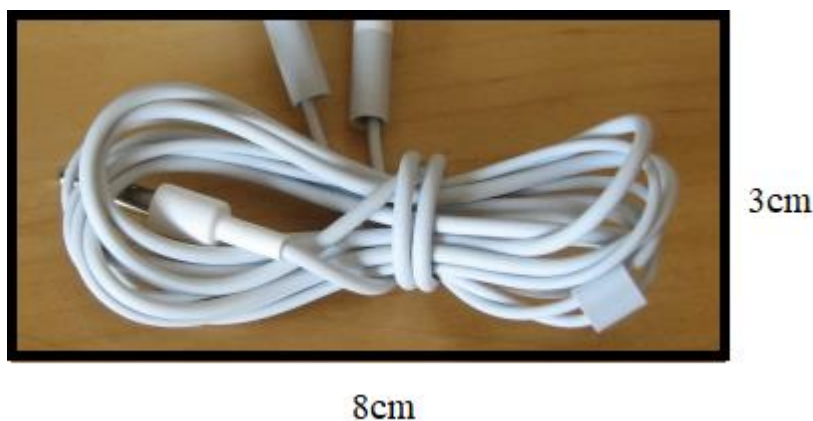
[V20] **Pedro:** Então é 16 por 7. [centímetros]

Vídeo gravado em 17/06/2019 - 09:07:11 – 09:09:07

O trecho descrito em [V12] indica que Pedro estava comunicando uma imagem mental por meio de atividade muscular, gesticulando com os dedos sobre o papel. Esse tipo de

manifestação gestual indica que Pedro estava tendo uma *imagem cinestésica* de uma figura. As medidas sugeridas por Pedro para a embalagem primária, o pacotinho a vácuo, não são aceitas por Larissa, pois ela percebeu que Pedro considerou apenas a vista de cima do fone enrolado, e sua sugestão era a de produzirem uma embalagem retangular de medidas 3cm por 8cm, como ilustrado na Figura 15:

Figura 15 – Embalagem primária sugerida por Pedro – grupo vermelho



Fonte: Elaborado pela autora.

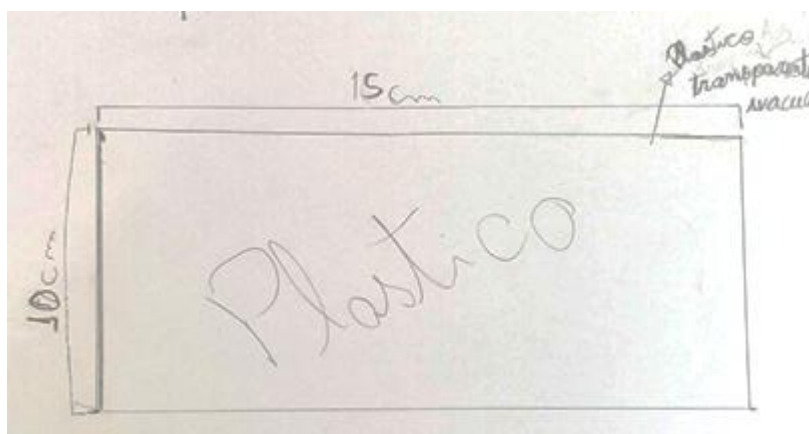
No trecho [V17], Larissa nota a necessidade de a embalagem envolver o fone de ouvido, não cobrindo somente sua vista superior. A fala de Larissa neste trecho indica que ela teve uma *imagem dinâmica* do plástico dando a volta no fone de ouvido, o envolvendo. Esse gesto é também um indicativo da visão espacial de Larissa que, diferente de Pedro, considerou as três dimensões do objeto ao elaborar a embalagem. A partir da consideração de Larissa, o grupo faz novas medições com a régua, contornando a largura e o comprimento do fone enrolado e chega às medidas: 16cm por 7cm. A fala [V19] mostra que Larissa levou em conta a *desmaterialização* – evitar o desperdício de materiais – ao escolherem as medidas da embalagem, o que indica que os critérios que um *designer* utiliza ao criar uma embalagem estavam sendo levados em consideração.

As tarefas descritas até aqui do grupo vermelho fazem parte das etapas de *experimentação* e *abstração* da Modelagem, pois os alunos, por meio de experiências de manipulação do objeto a ser embalado – o fone de ouvido – formularam o modelo da embalagem primária, uma embalagem de plástico a vácuo retangular que seria utilizada para embalar o fone enrolado. As variáveis¹⁹ desse modelo, por se tratar de um retângulo, foram

¹⁹ Por “variável” me refiro às variáveis envolvidas na criação de um modelo matemático, conforme a definição de modelo de Bassanezi (2002).

comprimento e largura. O esboço feito pelos alunos no primeiro encontro foi o de um retângulo com as medidas 16cm por 7cm. No segundo encontro, no entanto, o grupo fez algumas alterações nas medidas da embalagem primária. Note-se, na Figura 16, que as medidas 15cm e 10cm apresentam sinais de que foram corrigidas. Essa decisão está detalhada na seção seguinte, que relata o segundo encontro.

Figura 16 – Embalagem primária do grupo vermelho - projeto



Fonte: Imagem capturada pela autora.

Além das medidas, o grupo indicou, no esboço da embalagem primária, que esta seria feita de plástico transparente, que seria utilizada para embalar o fone de ouvido a vácuo. Mais detalhes a respeito das trocas das medidas da embalagem primária projetada pelo grupo azul serão discutidos mais adiante, no relato do segundo encontro.

O grupo azul, de maneira análoga ao grupo vermelho, teve como embalagem primária um plástico que envolveria o aparelho celular, que seria plástico bolha. Logo no início da atividade, dois membros do grupo, Davi e Júlia, discutem a respeito da embalagem secundária – a caixa do celular – usando-a como referência para escolherem as medidas da embalagem primária – o plástico bolha – conforme a transcrição a seguir:

[A1] **Davi:** A caixa é do tamanho do celular, é só medir ele.

[A2] **Júlia:** Tem que somar dois centímetros pra cima. [gesticula com os dedos uma linha horizontal, indicando uma das dimensões da embalagem]

[A3] **Davi:** Por que dois centímetros pra cima?

[A4] **Júlia:** Tem que sobrar.

[A5] **Davi:** Tem que faltar! O celular vem apertadinho na caixa.

[A6] **Otávio:** É 14,5 [centímetros] de lado...

[A7] **Júlia:** Tem que sobrar! Tem que caber as bolhas que vai [sic] enrolar o celular. [pega o celular e gesticula com as mãos envolta do aparelho, como se o enrolasse]

[A8] **Davi:** Ah, tá certo. Pega espaço por causa das bolhas.

[A9] **Otávio:** É 14 [centímetros] de lado, então, o celular.

[A10] **Júlia:** Isso, vamo na sua coisa então. [falando com Davi] É 14,5 [centímetros] de lado. [Pega o celular e uma régua, medindo seu comprimento] É 14 só, Davi.

[A11] **Davi:** E assim? [pega a régua na mão de Júlia e a coloca para medir a largura do celular]

A[12] **Júlia:** Assim é 7. [centímetros]

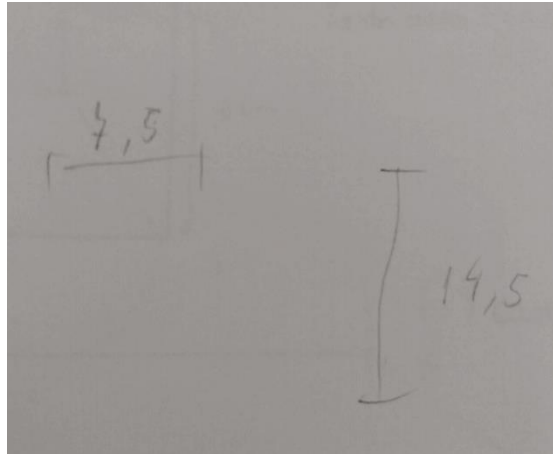
Vídeo gravado em 17/06/2019 - 08:57:30 – 08:57:40

De maneira semelhante ao grupo vermelho, os integrantes do grupo azul haviam determinado as variáveis de seu modelo: comprimento e largura de uma embalagem retangular feita de plástico. Em seguida, os alunos passaram para a abstração do modelo. Davi sugere, no trecho [A1], que as medidas de comprimento e largura devem ser as mesmas do celular, pois o plástico seria colocado dentro da embalagem secundária – a caixa do celular – e essa teria a mesma medida do aparelho. Júlia discorda de Davi, como fica evidente em [A2], [A4] e [A7], alegando que as bolhas fariam com que as medidas do plástico ficassem maiores do que as do celular. Os alunos parecem chegar então a um acordo, tirando as medidas do celular, que foram 14cm e 7cm, e aumentando 0,5cm em cada dimensão, para as medidas do plástico bolha.

Em relação aos componentes de visualização observados, temos nos trechos [A2], [A7] e [A11] manifestações gestuais de *imagens cinestésicas*. Nos trechos [A5] e [A7] temos duas visualizações diferentes: a de Davi, segundo a qual o celular viria apertado na caixa, sendo as medidas de seu plástico bolha iguais às do aparelho; e a de Júlia, que levou em consideração o espaço ocupado pelas bolhas ao envolverem o celular, e como esse espaço faria com que as dimensões da caixa do celular fossem um pouco maiores que as do aparelho. Nos dois casos, os alunos manifestaram verbalmente e gestualmente o componente *percepção de relações espaciais*, relacionando as dimensões das camadas primária e secundária de embalagens.

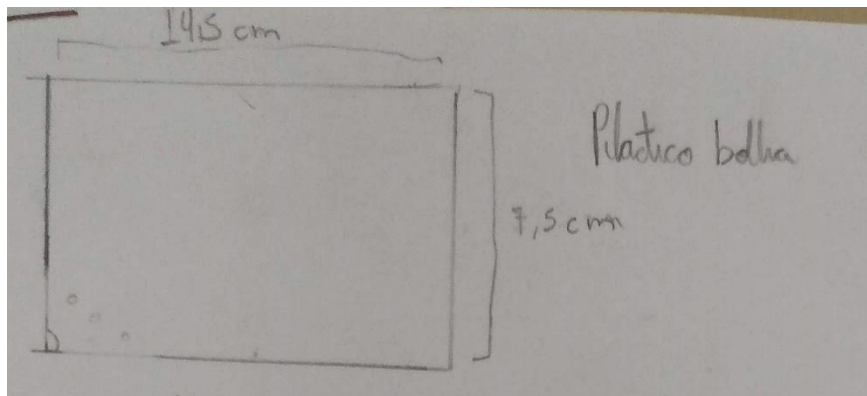
Após terem decidido as medidas da embalagem primária, Davi e Júlia fazem os esboços do grupo, produzindo primeiro um rascunho e em seguida um esboço mais elaborado, como mostram as figuras 17 e 18.

Figura 17 – Primeiro esboço da embalagem primária – grupo azul



Fonte: Imagem capturada pela autora.

Figura 18 – Esboço final da embalagem primária – grupo azul



Fonte: Imagem capturada pela autora.

O projeto da embalagem primária do grupo azul ficou sendo então um plástico bolha de medidas 14,5cm por 7,5cm. O esboço retrata apenas a vista de cima do plástico, sendo necessário o dobro de material para envolver o celular. Apesar de não terem discutido a respeito de o esboço trazer apenas a vista de cima da embalagem, ao construírem o protótipo os alunos utilizaram o dobro das medidas do esboço, o que indica que entenderam que este trazia apenas uma visão de cima da embalagem.

O primeiro encontro finalizou com os projetos das embalagens primárias. No segundo encontro, foram elaborados os projetos das embalagens secundárias e o início dos projetos das embalagens terciárias, como será relatado a seguir.

5.2.2 Segundo encontro

O segundo encontro foi realizado no dia 24/06/2019, tendo duração de uma hora e quarenta minutos. Nesse encontro, foi esclarecido para os alunos que deveriam, de maneira

semelhante ao primeiro encontro, elaborar os projetos das embalagens secundárias por meio de esboços com especificações de materiais, dimensões, cores etc. Se houvesse tempo suficiente, os grupos deveriam iniciar também os projetos das embalagens terciárias.

O grupo vermelho começou a atividade fazendo uma alteração nas medidas da embalagem primária, como mencionado na subseção anterior. A alteração se deu em função de uma embalagem de plástico utilizada no mercado para embalar fones de ouvido, trazida por Pedro no segundo encontro. A Figura 19 traz a imagem da embalagem de plástico trazida por Pedro.

Figura 19 – Embalagem trazida por Pedro – grupo vermelho



Fonte: Imagem capturada pela autora.

Pedro mostrou a embalagem para os colegas e disse que era melhor usar aquelas medidas para o projeto da embalagem primária. Os alunos, então, mediram seu comprimento e largura, encontrando 15cm por 10 cm, e alteraram os valores das medidas registrados no desenho do encontro anterior, como mostrado na figura 13. O que os alunos fizeram alterou um ponto importante de seu projeto: as novas medidas da embalagem primária consideravam apenas sua vista superior, sendo necessário o dobro de plástico para envolver o fone de ouvido. As medidas do projeto anterior, 16cm por 7cm, já eram a quantidade total de plástico necessária para envolver o fone de ouvido por completo. Quando perguntei sobre a alteração, os alunos disseram que acharam melhor usar uma embalagem pronta, pois seria mais seguro. Por mais que eu acredite que o projeto inicial dos alunos funcionaria melhor, economizando plástico, achei prudente não intervir nessa decisão dos alunos, pois acredito que *designers* de produto devem levar em consideração modelos já existentes no mercado como base na elaboração de algumas embalagens.

Tendo feito as alterações no projeto da embalagem primária, os alunos deram continuidade às etapas de *experimentação* e *abstração*, agora no projeto da embalagem secundária. A elaboração da embalagem secundária levou em consideração a embalagem primária elaborada, como mostra a transcrição a seguir:

[V21] **Eduardo:** E agora? Separa, separa esse. [entrega o desenho da embalagem primária à Larissa, que o coloca em um canto]

[V22] **Pedro:** Essa aqui era a do fone. [a embalagem primária]. Agora a caixa.

[V23] **Eduardo:** Isso, a caixa. Vinte e cinco centímetros por quinze?

[V24] **Pedro:** Quinze. [concordando com a cabeça]

[V25] **Larissa:** Não sei... Tem que ver quantos que vão caber um em cima do outro.

[V26] **Pedro:** Como assim?

[V27] **Larissa:** Assim. [gesticula com as mãos um movimento de empilhamento]

[V28] **Pedro:** Podia ser dez.

[V29] **Eduardo:** Dez o quê?

[V30] **Pedro:** Tem que caber dez desse aqui. [apontando para o desenho da embalagem primária, que é o plástico a vácuo].

[V31] **Eduardo:** Desse aqui? [aponta para o mesmo desenho]

[V32] **Pedro:** [gesticula afirmativamente com a cabeça] Essa aqui tem quanto mesmo? [se referindo às dimensões da embalagem]

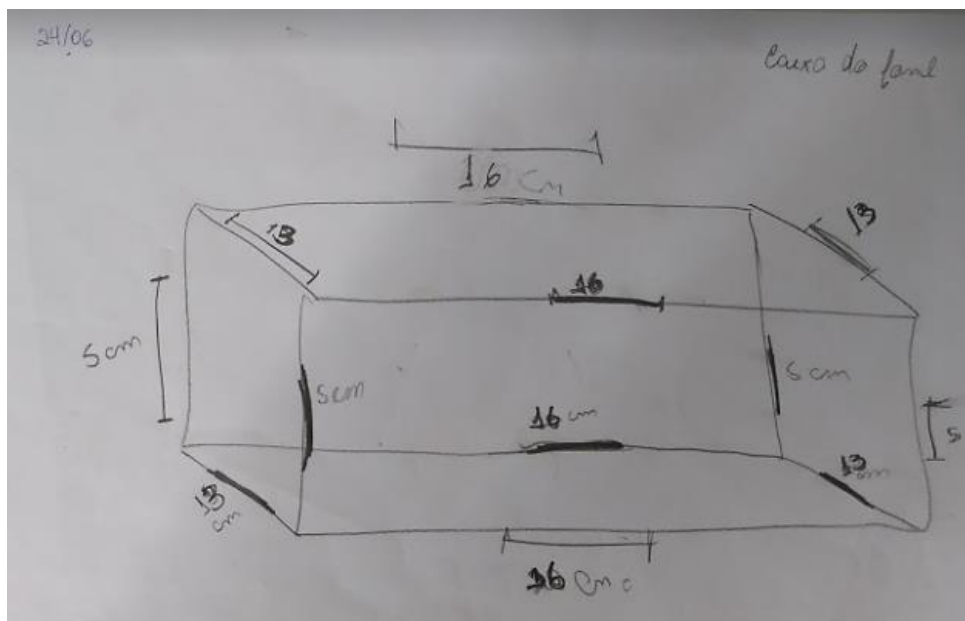
[V33] **Eduardo:** Dez e quinze. [centímetros]

[V34] **Larissa:** Pode ser assim. [pega lápis e borracha e começa a fazer um esboço]

Vídeo gravado em 24/06/2019 - 08:59:12 – 09:00:00

Larissa esboçou um paralelepípedo de dimensões 16cm de comprimento, 13cm de largura e 5cm de altura, com o qual o grupo pareceu concordar. Os alunos não discutiram a respeito das medidas colocadas por Larissa, mas parecem ter concordado que dentro da embalagem desenhada caberia a quantidade desejada de plásticos com fones de ouvido. Pedro auxiliou Larissa a colocar as medidas definidas para a embalagem secundária no esboço, e o grupo chegou ao projeto, apresentado na Figura 20:

Figura 20 – Projeto da embalagem secundária – grupo vermelho



Fonte: Imagem capturada pela autora.

A embalagem secundária elaborada pelo grupo possui três variáveis, cujos valores foram definidos como: comprimento, 16cm; largura, 13cm; e altura, 5cm. Observe que a embalagem primária do grupo possui medidas 15cm por 10cm, portanto caberiam embalagens primárias empilhadas no interior da embalagem secundária elaborada pelo grupo. Quanto à ideia inicial do grupo de colocar 10 embalagens primárias dentro da secundária, essa parece não ter sido mais discutida, ou a altura decidida como 5cm foi considerada satisfatória pelo grupo para empilhar as 10 embalagens.

Em relação aos componentes de visualização identificados na elaboração desse projeto, o trecho [V25] evidencia que Larissa apresentou o componente *percepção de relações espaciais*, relacionando as dimensões da embalagem primária com a secundária. Já em [V27], ela manifesta o componente *imagens cinestésicas*, ao gesticular o empilhamento das caixas com as mãos. A fala de Eduardo em [V23], ao sugerir medidas para a embalagem secundária, pode representar uma *imagem pictórica* que ele estava tendo dessa embalagem. O projeto da embalagem secundária desse grupo foi o que eles discutiram mais rapidamente entre as três camadas de embalagens.

Tendo elaborado o projeto da embalagem secundária, o grupo começou, ainda no segundo encontro, a elaborar a embalagem terciária. Embora a orientação dada aos alunos tenha sido elaborar projetos escritos, compostos por esboços com especificações; ao elaborar a embalagem terciária, o grupo abandonou o papel e passou a criar um esboço com giz no canto da sala de aula, utilizando o piso e a parede para desenhar. Acredito que o motivo para o qual

passaram para esse modelo de “esboço 3D” tenha sido para visualizarem melhor as medidas que estavam escolhendo para a embalagem terciária. As duas transcrições a seguir mostram como os alunos passaram para este tipo de esboço:

[V35] **Eduardo:** Agora a caixa do caminhão.

[V36] **Pedro:** Vai precisar de um metro. [aluno pega trena e abre em um metro, mostrando para os colegas]

[V37] **Eduardo:** Um metro vai ficar grande demais.

[V38] **Pedro:** Não, vai não. Quer ver? Professora!

Vídeo gravado em 24/06/2019 – 09:00:40 – 09:04:02

Enquanto Pedro me chamava, Larissa se levantou, pegou a trena, a abriu em um metro, e a posicionou na vertical, tocando o chão. Os três integrantes do grupo observaram a trena aberta, refletindo sobre a medida de um metro sugerida pelo colega.

[V39] **Pesquisadora:** [se aproxima do grupo] Oi, Pedro.

[V40] **Eduardo:** Acho que a gente vai precisar de um metro.

[V41] **Larissa:** [indicando a fita métrica] Cês tão ligados que a caixa de baixo vai amassar, né?

[Pedro e Eduardo olham para a fita posicionada na vertical, pensativos]

[V42] **Pesquisadora:** É, as medidas vocês podem escolher. Vocês têm que pensar em quantas caixas vão caber naquela caixa. [gesticulando entre o desenho da embalagem secundária e a fita métrica que Larissa segurava, indicando a embalagem terciária que estava começando a ser planejada]. Lembrando que o material tem que ser preservado, né? Vai pensando aí! [se afasta do grupo]

Vídeo gravado em 24/06/2019 – 09:00:40 – 09:04:02

Podemos observar, pelos trechos [V36] e [V37], que Pedro e Eduardo estavam tendo *imagens pictóricas* diferentes a respeito da embalagem terciária, a caixa do caminhão. Pedro sugere que ela tenha um metro de altura, o que, na visão de Eduardo, seria grande demais. O gesto de Larissa de abrir a trena e a posicionar na vertical para começar a criar uma imagem mental da embalagem indica que a aluna apresentou, neste momento, uma *imagem cinestésica*. Esse tipo de imagem apareceu também no trecho [V41], em que a aluna aponta para a parte de baixo da fita métrica, indicando uma embalagem secundária imaginária que, ao ficar na base da caixa do caminhão, iria amassar, devido ao peso das demais embalagens secundárias que estariam por cima dela. Esse trecho também indica que a aluna apresentou *percepção de posições espaciais*, se preocupando com o dano que a embalagem na posição mais inferior da

caixa do caminhão poderia sofrer, além de *percepção figura-fundo*, pois foi capaz de isolar uma única embalagem – a caixa de fones de ouvido colocada na parte inferior da embalagem terciária – do contexto para observar características relativas a ela.

Uma particularidade da discussão dos alunos a respeito da embalagem terciária é que o debate se deu enquanto eles observavam um canto da sala, apenas com o apoio de uma fita métrica aberta, ou seja, a discussão se deu em torno de objetos que estavam presentes apenas na imaginação dos alunos, em suas imagens mentais.

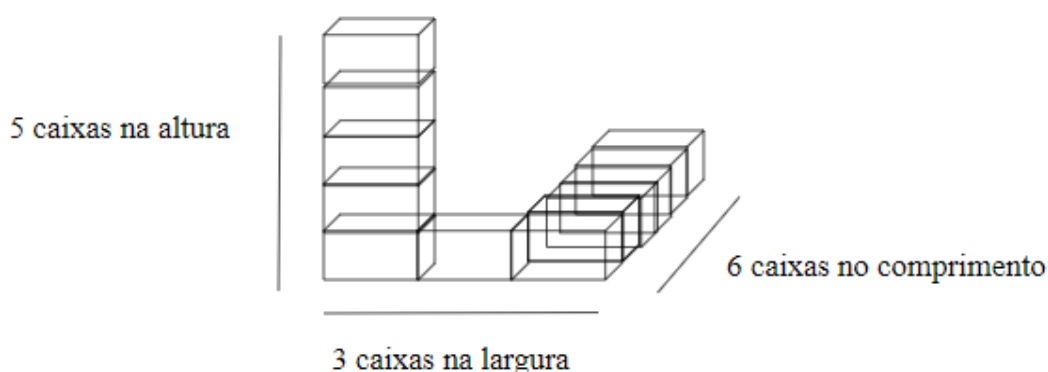
Ainda tentando chegar em um acordo em relação às medidas da embalagem terciária, os alunos passam a pensar em suas dimensões relacionando-as com a quantidade de embalagens secundárias que seriam transportadas nela, como mostra o diálogo a seguir:

- [V43] **Eduardo:** Meio metro? [falando com Pedro] Não, meio metro é muito.
- [V44] **Larrisa:** Vai caber umas cem caixas assim...
- [V45] **Pedro:** Não, quer ver? [Simula com as mãos a largura de uma embalagem secundária, e vai marcando com as mãos abertas essa largura no chão.] Uma... duas... três... .Vai caber três. [se referindo à quantidade de embalagens que caberia na largura da caixa do caminhão].
- [V46] **Larissa:** Tá, tem que pensar assim agora. [indicando com as mãos a fita métrica novamente, se referindo a quantas embalagens caberiam na vertical].
- [V47] **Eduardo:** É, desse jeitinho mesmo. Cinco, [gesticulando com as mãos na vertical, indicando caixas empilhadas] dez, quinze.
- [V48] **Pedro:** Tem seis caixas assim. [gesticula com as mãos na horizontal, se referindo ao comprimento da caixa do caminhão] Seis vezes três, dezoito. Vezes cinco, dá quanto?
- [V49] **Eduardo:** [faz as contas em uma folha] Noventa.
- [V50] **Pedro:** Noventa, vai dar noventa.
- [V51] **Eduardo:** Professora, nós já calculamos. Vai dar noventa caixas.
- [V52] **Pesquisadora:** Tá, escreve pra mim o raciocínio, tá bom?

Vídeo gravado em 24/06/2019 – 09:00:40 – 09:04:02

Nessa fase da de *abstração* da atividade de Modelagem, o grupo estabeleceu suas variáveis, que eram quantas caixas de fones de ouvido – embalagens secundárias dispostas na direção de cada dimensão da embalagem terciária – seriam dispostas na direção de cada dimensão da embalagem terciária. O que o grupo decidiu é que a embalagem terciária teria três caixas de fones de ouvido na largura, seis no comprimento e cinco na altura, como ilustra a Figura 21:

Figura 21 – Primeiro projeto da embalagem terciária – grupo vermelho



Fonte: Elaborado pela autora.

Os alunos também se preocuparam em determinar quantas embalagens secundárias iriam no interior da embalagem terciária, fazendo os cálculos: $6 \times 3 \times 5 = 90$ caixas. Os trechos [V43] e [V44] indicam que Eduardo e Larissa estavam tendo *imagens pictóricas* da embalagem terciária que estava sendo elaborada, e estavam achando essa embalagem muito grande. Pela fala [V44], podemos observar também que Larissa fez uma boa estimativa, dizendo que caberiam umas cem embalagens secundárias na embalagem terciária. Já os trechos de [V45] a [V48] envolveram gestos dos alunos, o que indica *imagens cinestésicas* sendo criadas ou comunicadas entre eles. Em [V47] e [V48], Pedro e Eduardo apresentam também *imagens pictóricas* comunicadas por meio das *imagens cinestésicas*, pois Pedro indica que havia – em sua imagem mental – cinco caixas empilhadas na vertical, e Pedro afirma “tem seis caixas assim”, indicando a quantidade de caixas no comprimento da embalagem terciária. Esses valores não haviam sido discutidos pelo grupo até então, mas a partir do momento em que os alunos comunicam suas *imagens pictóricas* com essas quantidades, o grupo todo parece concordar com elas.

Tendo definido os valores das variáveis da embalagem terciária – quantidades de embalagens secundárias que seriam dispostas na direção de cada dimensão da embalagem terciária – o grupo passou a procurar quais seriam as dimensões da embalagem terciária. Para tal, pegaram um giz, uma trena e uma régua e começaram a esboçar utilizando o chão e a parede do canto da sala. Primeiramente, Pedro sugere uma medida única de meio metro para comprimento, largura e altura da caixa, desconsiderando o projeto anterior que levava em conta a quantidade de embalagens secundárias que iriam na terciária, como mostra o diálogo seguinte:

[V53] **Pedro:** Ó, eu acho que meio metro assim por meio metro assim vai dar. [Pedro risca com o giz aproximadamente meio metro de altura na parede e meio metro de comprimento no chão]

[V54] **Eduardo:** Aí seria meio metro assim também? [Eduardo gesticula na horizontal com a mão, indicando a largura da caixa do caminhão]

[V55] **Pedro:** Isso, tudo igual.

[V56] **Eduardo:** [expressão pensativa] Aí a gente vai empilhar as caixas de fone assim? [gesticula com as mãos na horizontal, indicando camadas sobrepostas]

[V57] **Pedro:** É, assim.

[V58] **Eduardo:** Aí aqui vai colocar tipo uma caixa assim, outra assim, e as pilhas? [indica com as mãos a base da caixa e depois a sobreposição de caixas ao longo da altura]

[V59] **Pedro:** Aham.

Vídeo gravado em 24/06/2019 - 09:06:10 – 09:09:17

Os trechos [V53], [V54], [V56] e [V58] mostram que Pedro e Eduardo estavam construindo, por meio de gestos, *imagens cinestésicas* a respeito da embalagem terciária. Quando Pedro diz, em [V55], “tudo igual”, ele mostra que estava tendo uma *imagem pictórica* da embalagem terciária, já com o formato de cubo de 50 centímetros de lado. Isso se dá pelo fato de ele e Eduardo só terem discutido altura e comprimento da embalagem terciária até então. Apesar das sugestões de criar uma embalagem terciária cúbica, pouco depois de sugerir as dimensões da embalagem Pedro muda de ideia, e apresenta outra proposta para os colegas. O grupo decide ajustar as dimensões da embalagem terciária para que esta se adapte às da embalagem secundária, que possui 16cm de comprimento, 13cm de largura e 5cm de altura. A transcrição a seguir mostra essa mudança de tática dos estudantes:

[V60] **Pedro:** Tipo assim, tem 16 centímetros. [Pega a trena e abre em 16 cm, e coloca sobre o comprimento marcado com giz no chão] Aí tem que ver quantas caixas vai [sic] caber.

[V61] **Larissa:** Na altura tem que ver quanto a caixa mede assim. [abre os dedos indicador e polegar simulando a altura da caixa do fone de ouvido]

[V62] **Pedro:** Vê aí quanto que é.

[Eduardo pega as anotações do grupo]

[V63] **Eduardo:** A gente pôs 5. [centímetros]

[V64] **Larissa:** Mas tá certo isso mesmo?

[V65] **Pedro:** Como assim?

[V66] **Larissa:** Será que a gente fez as contas direito? Porque o pacotinho vai fechar a vácuo, será que não vai ficar menor não?

Vídeo gravado em 24/06/2019 - 09:06:10 – 09:09:17

Nesse momento, Eduardo pega o pacote de fone de ouvido usado como modelo para a embalagem primária, abre, coloca o fone de ouvido enrolado dentro e o fecha. Os alunos passam

então a verificar a medida da altura da embalagem primária na prática, como mostra a transcrição seguinte:

[V67] **Eduardo:** Pedro, mede aqui a altura desse negócio com o fone.
 [Pedro pega a trena e começa a medir o comprimento do pacotinho. Eduardo ri e vira a posição da trena na mão de Pedro]
 [V68] **Eduardo:** Altura, sô!
 [V69] **Pedro:** 7 centímetros.
 [V70] **Larissa:** Mas vai fechar a vácuo, então vai ficar mais apertado o fone.
 [V71] **Pedro:** Cinco centímetros então tá certo.

Vídeo gravado em 24/06/2019 - 09:06:10 – 09:09:17

Os trechos de [V64] a [V71] mostram uma etapa diferente da atividade de Modelagem, na qual os alunos, ao conferirem a medida da altura da embalagem secundária, medindo a altura do fone de ouvido enrolado e colocado dentro do protótipo da embalagem primária, passaram para a etapa de *validação*. Nessa etapa, os resultados obtidos com o modelo – esboço – foram testados no sistema real. Nos trechos anteriores [V60], [V61] e [V68], os alunos apresentam *imagens cinestésicas*, pois gesticulam com as mãos e posicionam a trena para dialogarem entre si sobre a imagem mental que estavam tendo da embalagem terciária.

O momento em que Pedro mede o comprimento, e não a altura, da embalagem secundária, e Eduardo o corrige, pode indicar que Pedro não estava acompanhando o raciocínio dos colegas em relação à necessidade de conferir a dimensão da embalagem secundária, ou que ele estava tendo uma *percepção de posição espacial* diferente dessa embalagem no interior da embalagem terciária. De toda forma, após Eduardo ter o auxiliando, o grupo passou a definir quais seriam as dimensões da embalagem terciária. Para definirem essas dimensões, eles partiram da sugestão de embalagem cúbica com meio metro de lado e foram mudando essas medidas de forma que estas se ajustassem às medidas da embalagem secundária, como mostra a transcrição seguinte:

[V72] **Pedro:** Tem que ver quantas caixas com 5 centímetros vai dar até dar pra chegar aqui.
 [gesticula com as mãos indicando empilhamento de caixas ao longo da altura da caixa do caminhão]
 [V73] **Eduardo:** 50 centímetros... [expressão pensativa] Então é 10.
 [V74] **Larissa:** Isso.
 [V75] **Pedro:** Beleza. E assim de lado, tem quantos? [centímetros] Tem 13. [se referindo ao comprimento da caixa de fone de ouvido, em centímetros]

[V76] **Eduardo:** Podia colocar umas 5. [gesticula com as mãos ao longo do comprimento da caixa do caminhão, indicando que iriam 5 caixas de fones de ouvido].

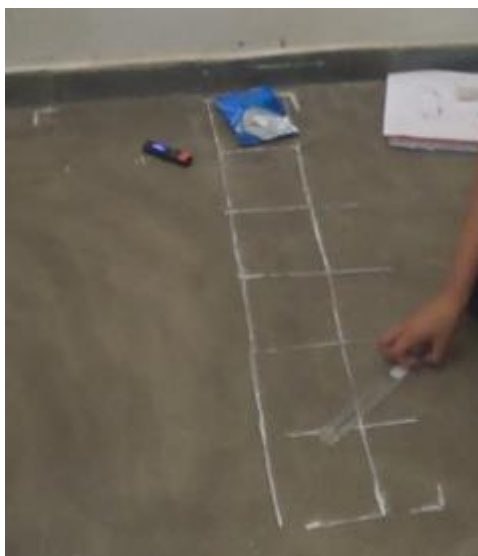
[V77] **Larissa:** Tá. Vamo desenhar as caixas então pra ver quantas vai [sic] dar.

[V78] **Eduardo:** Tá, e vai somando pra ver até dar 50. [centímetros]

Vídeo gravado em 24/06/2019 - 09:17:40 – 09: 20:25

Nesse momento, Larissa começa a esboçar com a régua e o giz no chão no canto da parede. Para fazer o esboço, ela também utilizou o pacote de fone de ouvido trazido como molde para a embalagem primária. A Figura 22 mostra o desenho feito por Larissa:

Figura 22 – Esboço da embalagem terciária – grupo vermelho



Fonte: Imagem capturada pela autora.

Enquanto Larissa trabalhava no esboço, Pedro observou pensativo, pegou a calculadora e faz uns cálculos em silêncio. Após uns instantes, chegou a uma conclusão, e a apresentou para o grupo:

[V79] **Pedro:** Ô Eduardo, eu acho que a gente podia aumentar esse lado da caixa.

[V80] **Eduardo:** Pra quê?

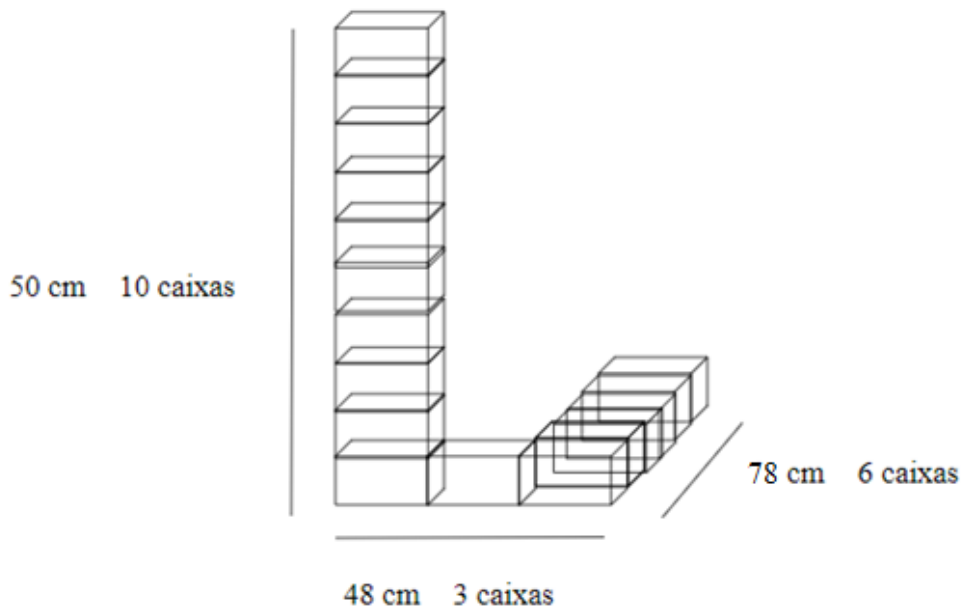
[V81] **Pedro:** Porque aí vai caber 6 certinho. [6 caixas de fones de ouvido no comprimento da caixa do caminhão]. Aqui [mostra a calculadora do celular] 13 vezes 6 dá 78. [centímetros]

[V82] **Eduardo:** Entendi. Melhor então. Ô Larissa, desenha 6 caixas assim. [gesticula com as mãos ao longo do comprimento da caixa do caminhão. Larissa acena concordando e continua o esboço.]

Vídeo gravado em 24/06/2019 - 09:17:40 – 09: 20:25

Após realizarem alguns esboços usando o giz no canto da sala, os alunos decidiram que a caixa do caminhão teria as medidas 50 centímetros de altura, 48 centímetros de comprimento e 78 centímetros de largura. Essas medidas foram pensadas de tal forma que coubessem dez embalagens secundárias na altura da caixa do caminhão, três no comprimento e seis na largura, como ilustra o esquema da Figura 23.

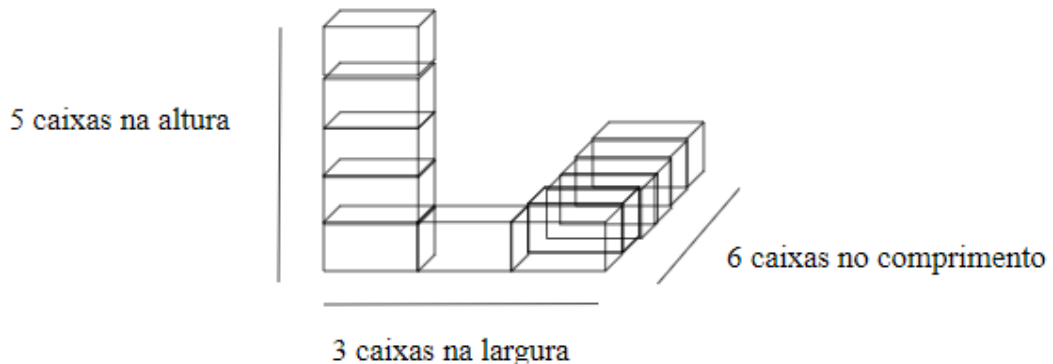
Figura 23 – Segundo projeto da embalagem terciária – grupo vermelho



Fonte: Elaborada pela autora.

Vamos comparar as novas dimensões da embalagem terciária escolhida pelo grupo com o projeto produzido inicialmente. Retomo a seguir a imagem do projeto anterior na Figura 21:

Figura 21 – Primeiro projeto da embalagem terciária – grupo vermelho



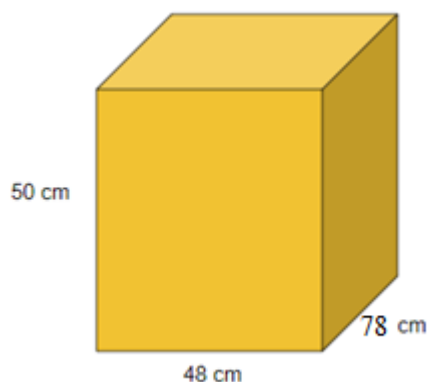
Fonte: Própria autoria.

Observe-se que a única alteração foi a quantidade de embalagens secundárias dispostas na vertical – ao longo da altura – da embalagem terciária. Esse número, que originalmente era de 5 caixas, passou para 10. Essa etapa da atividade de Modelagem consiste na *modificação*, quando os alunos ajustam um modelo para melhor atender às necessidades do problema. Apesar de não falarem categoricamente sobre o motivo desse ajuste, os alunos mostraram que buscavam uma embalagem mais próxima possível de um cubo, com aresta medindo 50 centímetros, talvez por essas serem medidas que eles considerem costumeiras para uma caixa que vai em um caminhão, ou talvez porque com esse formato seria mais fácil de organizar as caixas dentro do caminhão, ou ainda por questão de estética da caixa. De qualquer forma, os estudantes se atentaram para o não desperdício de espaço dentro da embalagem terciária. O ajuste proposto por Pedro, mostrado em [V79] e [V81], de aumentar a largura da embalagem terciária para comportar exatamente seis embalagens secundárias, mostra especialmente essa consideração.

Em relação aos componentes da visualização apresentados pelo grupo no desenvolvimento da embalagem terciária, nos trechos [V72], [V76] e [V82] os alunos comunicam e/ou constroem suas imagens mentais com gestos de empilhamento, gestos que mostram medidas etc., indicando manifestações de *imagens cinestésicas*. Em [V72] e [V73] Pedro e Eduardo mostram *percepção de posições espaciais*, tanto pelos gestos de empilhamento das caixas quanto pela fala de Pedro – “Tem que ver quantas caixas com 5 centímetros vai dar até dar pra chegar aqui”, pois os alunos mostram que relacionaram a posição das embalagens secundárias umas com as outras e com a embalagem terciária, para determinar a medida da altura desta. Em [V76], quando Pedro sugere que os colegas colocassem cinco embalagens secundárias no comprimento da embalagem terciária, ele mostra estar tendo uma *imagem pictórica* de como a embalagem terciária poderia ser. O fato de ele ter conferido os cálculos e mudado sua sugestão para seis caixas no comprimento mostra que essa imagem se alterou, considerando dimensões mais adequadas de modo a não sobrar espaço na embalagem terciária.

O projeto da embalagem terciária dos alunos não foi esboçado em papel, como pedido. Ao finalizarem o esboço no canto da sala com o giz, o encontro já estava quase ao final. Os alunos decidiram tirar uma foto do esboço feito com giz e finalizá-lo no próximo encontro. O projeto da embalagem terciária do grupo ficou sendo então um paralelepípedo de dimensões 50 centímetros de altura, 48 centímetros de comprimento e 45 centímetros de largura, como ilustra a Figura 24:

Figura 24 – Esquema do projeto da embalagem terciária – grupo vermelho



Fonte: Elaborada pela autora.

O grupo azul, de maneira semelhante ao vermelho, começou o segundo encontro elaborando a embalagem secundária de seu produto, que foi a caixa do celular. O grupo deu continuidade à atividade de Modelagem com um processo de *experimentação*, no qual Davi e Júlia colocaram o celular sobre a mesa e o mediram com o auxílio de uma régua. Em seguida, tendo realizado algumas medições, Davi e Júlia partiram para a fase da *abstração*, procurando estabelecer quais seriam as variáveis da embalagem e encontrar valores com que acordassem. É interessante observar que, nessa elaboração da caixa do celular, os alunos não consideraram apenas as dimensões do objeto em si, mas também outros itens que viriam nesta embalagem, como um fone de ouvido e o carregador do aparelho, como pode ser observado no diálogo seguinte:

[A13] **Davi:** É sete centímetros. [se referindo à largura do celular]

[A14] **Júlia:** Mas tem que sobrar um pouco aqui, ó. Não pode ser certinho não. [apontando para as extremidades do celular] Tem que colocar mais um pouco.

[A15] **Davi:** Põe mais um de cada lado.

[A16] **Júlia:** Tá, mais um então.

[A17] **Davi:** Então tem que ser nove centímetros.

[A18] **Júlia:** Isso.

Vídeo gravado em 24/06/2019 - 08:50:00 – 08:51:40

Como mostra o diálogo anterior, Davi e Júlia concordaram que uma das dimensões da caixa do celular – que vou chamar aqui de largura – fosse 9cm, o que equivale à largura do aparelho com um adicional de 1cm em cada lado, de forma que ele não ficasse muito apertado no interior da caixa. Em [A14] podemos notar que Júlia apresenta uma *imagem cinestésica*, indicando com as mãos a medida que pretendia para a embalagem. Nesse mesmo trecho a aluna

apresenta indícios de *percepção de relações espaciais*, mostrando se preocupar com a dimensão da embalagem secundária em função do tamanho do celular. Em seguida, os alunos procuram determinar as demais dimensões da embalagem terciária, como mostra a transcrição seguinte:

[A19] **Júlia:** Aqui, escuta... agora falta [sic] as outras medidas.

[A20] **Davi:** [mede a altura do celular com a régua] É, mas aqui, embaixo do celular tem que caber o foninho, carregador... [gesticulando com as mãos no espaço atrás do celular]

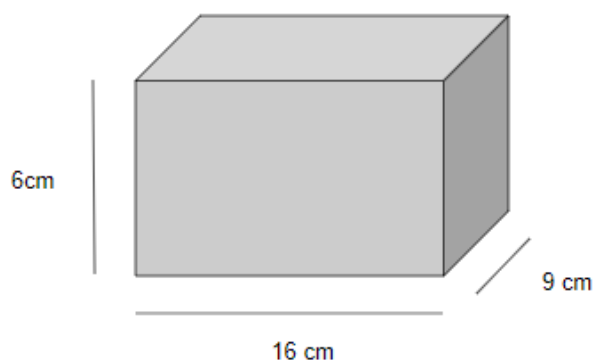
[A21] **Júlia:** É, então pode ser... [medindo com o indicador e o polegar um espaço atrás do celular] ... pode ser um tanto assim [mostra uma medida com o indicador e o polegar abertos]

Vídeo gravado em 24/06/2019 - 08:50:00 – 08:51:40

Nesse momento, Davi pega uma régua e mede o espaço marcado por Júlia com o indicador e o polegar. Essa medida, de 6cm, é registrada em um pedaço de papel. Em seguida, Davi mede o comprimento do celular, 15cm, e anota em um papel 16cm. Apesar de não comunicar ao grupo, os demais integrantes o observaram anotar a medida 16cm e pareceram concordar. Acredito que o raciocínio de aumentar 1cm na medida do comprimento da embalagem tenha sido semelhante ao de aumentar dois centímetros na largura: não deixar que o aparelho ficasse muito apertado na embalagem secundária. Em relação aos componentes de visualização desenvolvidos pelo grupo nos trechos anteriores, em [A20] e [A21] tanto Davi quanto Júlia utilizam recursos gestuais para construir e comunicar suas imagens mentais, o que novamente indica que os alunos estavam apresentando *imagens cinestésicas*. O fato de Davi, em [A20], ter sugerido que fosse colocado um espaço adicional para os demais itens que iriam na caixa do celular, como o carregador, indica também que o aluno apresentou *percepção de posições espaciais*, relacionando a posição do celular com os demais itens no interior da embalagem secundária.

Até então o grupo havia apenas anotado as três medidas encontradas, sem chegar a fazer um esboço da embalagem. Na Figura 25, apresento um esquema do projeto que estava sendo imaginado pelo grupo até esse momento:

Figura 25 – Esquema da embalagem secundária – grupo azul



Fonte: Elaborada pela autora.

Logo depois de anotarem as medidas, o grupo passou para a elaboração da embalagem terciária. Quando o projeto desta ficou pronto é que os estudantes voltaram, ainda no segundo encontro, para o projeto da embalagem secundária, trabalhando em seu esboço e especificações. Para que fique mais fácil compreender como se deu o desenvolvimento de cada camada de embalagem, vou relatar primeiro como se deu o desenvolvimento completo da embalagem secundária, e em seguida falarei sobre como o grupo desenvolveu o projeto da embalagem terciária.

O esboço da embalagem secundária foi feito por Júlia, utilizando papel, lápis e régua. Davi a auxiliou durante o processo, e a dupla não parecia concordar, inicialmente, com os valores de cada dimensão da embalagem. Júlia desenhou inicialmente um retângulo, e Davi a instruiu sobre como continuar o desenho:

[A22] **Davi:** Agora você tem que fazer um negócio tipo 3D aqui. [indicando a largura com o lápis no papel, dizendo como Júlia deveria desenhar]

[A23] **Júlia:** Como assim?

[A24] **Davi:** Porque tem que ter a fundura da caixa, que é 6 [centímetros]. Aí você desenha e anota aqui. [indica novamente a largura com o lápis].

[A25] **Júlia:** Não, a fundura é isso aqui, ó. [indica com o lápis a linha vertical do retângulo que havia traçado].

[A26] **Davi:** Não, a fundura é aqui, ó. [faz um risco com o lápis indicando a largura que seria a profundidade da caixa] Aqui então [indica o traço que ele fez] tem que ser 6[centímetros], e esse que você fez [se referindo ao traço da altura] tem que ser 9.

[A27] **Júlia:** Mas o telefone tá assim. [Pega o celular e coloca na horizontal com a frente virada para cima]

[A28] **Davi:** Não, ele tá assim. [Davi pega o celular e o coloca sobre a mesa, com a frente para si] Júlia, aqui já é o fundo dela! [da caixa] Coloca 6 aí.

[Júlia gesticula negativamente com a cabeça, mostrando não compreender]

[A29] **Júlia:** Não era 9? [centímetros]

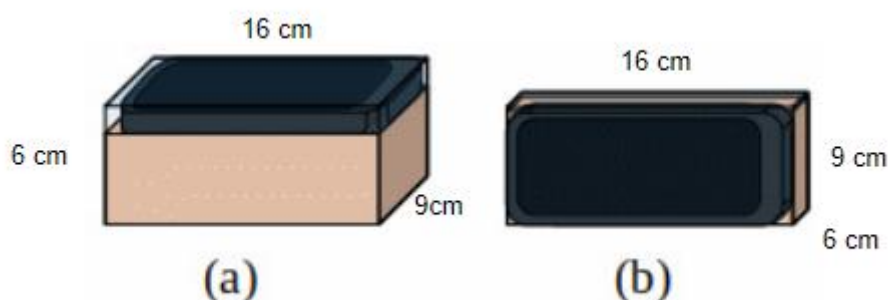
[A30] **Davi:** É, mas essa parte aqui [indica com o lápis a profundidade da caixa] é onde coloca o foninho e o carregador.

[A31] **Júlia:** Ah, tá. Dá na mesma. Pode ser.

Vídeo gravado em 24/06/2019 - 09:14:22 – 09:15:07

O que aconteceu nesse momento é que cada aluno estava visualizando o celular em uma posição diferente e, portanto, eles não conseguiam concordar com as medidas do esboço que Júlia estava fazendo. Para explicar melhor, trago um esquema do que estava sendo visualizado por cada aluno na Figura 26:

Figura 26 – Visualizações distintas da embalagem secundária – grupo azul



Fonte: Elaborada pela autora.

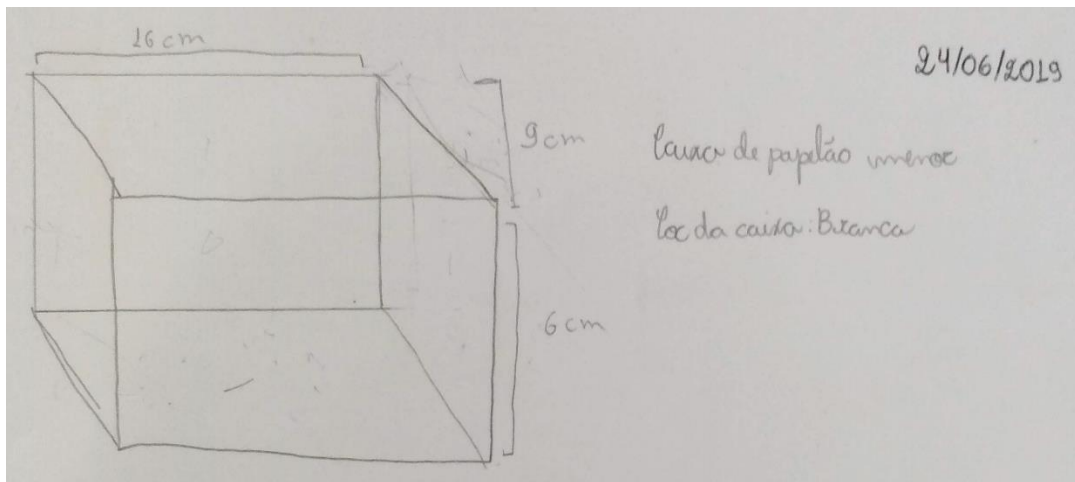
O desenho (a) representa a visão que Júlia estava tendo da embalagem, na qual o celular estaria na horizontal, com a face virada para cima, com os itens adicionais – carregador e fone de ouvido – posicionados abaixo dele dentro da embalagem secundária, a caixa do telefone. Já Davi estava visualizando o celular com a face virada para frente no interior da embalagem, como mostra o desenho (b). Ambos os alunos pareceram concordar com a medida horizontal do retângulo que Júlia traçou inicialmente, pois essa, de 16 cm, era a mesma na visualização dos dois alunos. As medidas que eles não concordaram foi o que chamaram de “fundura” e a altura da embalagem, pois para Júlia essas deveriam ser 9cm e 6cm, respectivamente, e para Davi, 6cm e 9cm. Ao final do diálogo, Júlia mostra em [A31] que havia compreendido que de qualquer das duas formas resultaria na mesma embalagem, o que mostra que a aluna apresentou

uma *constância perceptiva*, reconhecendo que as dimensões da embalagem são independentes de sua posição.

Outro componente da visualização apresentado pelo grupo nesse momento foram as *imagens cinestésicas*, que se manifestaram por meio de gestos utilizando as mãos, o lápis e até mesmo o próprio celular, como aconteceu em [A22], [A24], [A25], [A26], [A27], [A28] e [A30]. Nesses trechos, Júlia e Davi apresentam diferentes *percepções de relações espaciais* entre as dimensões da embalagem secundária que estão visualizando e o esboço dessas, além de *percepção de relações espaciais* entre a posição do celular e a posição da embalagem secundária.

Assim que Júlia entendeu que ela e Davi estavam visualizando a mesma embalagem em posições diferentes, ela prosseguiu com o esboço, considerando que o celular estava posicionado na horizontal com a face virada para cima, como ela havia visualizado. A Figura 27 traz o projeto feito pelo grupo:

Figura 27 – Projeto da embalagem secundária – grupo azul



Fonte: Imagem capturada pela autora.

Observe-se pela figura que o projeto contou com a especificação da cor da caixa, que seria branca. Pelos diálogos do grupo, a escolha por essa cor foi para que a caixa ficasse bonita para ser reutilizada depois, o que mostra que o grupo levou em consideração o critério *afeto*, que é um dos critérios que um *designer* de produto tem em mente ao elaborar uma embalagem.

O projeto da embalagem terciária do grupo começou de forma diferente da secundária. Para elaborar a secundária, os alunos escolheram primeiro as dimensões da embalagem e, muito depois, partiram para seu esboço. Já o projeto da embalagem terciária começou com o esboço e, só a partir dele, foram escolhidas as dimensões dessa camada de embalagem.

Inicialmente Davi desenhou um grande retângulo em uma folha e o dividiu em 16 partes, sendo quatro no comprimento e quatro na largura. Rui e Vitor, que até então não tinham participado muito da atividade de Modelagem, questionam Davi sobre seu esboço:

[A32] **Rui:** Credo, uai! Que tamanho de caixa...

[A33] **Davi:** Ué... [observa o esboço pensativo]

[A34] **Júlia:** [observando o esboço de Davi] 16? Pra que 16?

[A35] **Davi:** É o tanto de caixas de celular que vai dentro [da embalagem terciária].

[A36] **Júlia:** Não vai uma em cada?

[A37] **Davi:** Péra, deixa eu ver. [vai chamar a pesquisadora, que se aproxima para auxiliar o grupo]

[A38] **Júlia:** Pode ter várias caixas de celular dentro de uma caixa grande?

[A39] **Pesquisadora:** Isso, pode pôr várias caixas de telefone dentro da caixa que vai no caminhão.

[A40] **Júlia:** Aí tem que falar a quantidade de caixas que vai dentro da caixa grande?

[gesticulando com as mãos como se guardasse caixas menores em uma maior]

[A41] **Pesquisadora.** Isso, tá certinho. A caixa do caminhão, você pode escolher o tamanho dela.

[A42] **Júlia:** [falando com Davi e Vitor] A gente tem que ver quantas caixas cabe [sic] dentro de uma caixa.

[A43] **Vitor:** Vamo ver então.

[A44] **Júlia:** Tem quantos centímetros assim? [gesticula com as mãos indicando a altura da caixa do celular.]

[A45] **Rui:** Seis.

[A46] **Júlia:** Então vamo ter que contar 6, 6, 6, 6... [gesticula com as mãos indicando a sobreposição das caixas verticalmente]

[A47] **Davi:** Tá, e assim? [gesticula com as mãos a largura da caixa do caminhão]

Vídeo gravado em 24/06/2019 - 09:06:00 – 09:09:06

Nesse momento, Vitor busca uma trena e entrega para Davi. Davi abre a trena na medida 24cm e a deita sobre a mesa, indicando a medida para o grupo. Júlia observa a medida e sugere algumas alterações, como mostram os trechos seguintes:

[A48] **Júlia:** Só isso? A largura da caixa do caminhão?

[A49] **Davi:** É, tá pequeno. Maior então. [abre a trena em uma medida consideravelmente maior e mostra para Júlia e Rui] Assim?

[A50] **Rui:** Tá bom. Assim tá bom.

[A51] **Davi:** Pera aí, é melhor fazer a conta. Vamo colocar quatro caixas de cima pra baixo [gesticula com as mãos indicando o empilhamento vertical das caixas de celular], quatro caixas assim [gesticula com as mãos na horizontal] e quatro assim [gesticula com as mãos na horizontal, formando 90° com o gesto anterior] – quatro, quatro e quatro. Dá 16 caixas de telefone em quatro camadas.

[Júlia observa mas gesticula que não com a cabeça, indicando que não entendeu o que o colega disse]

[A52] **Davi:** Quatro uma em cima da outra, quatro deitada [sic] e quatro fileiras. [Davi explica repetindo os gestos feitos anteriormente com as mãos]

[A53] **Júlia:** Ah, tá! Entendi.

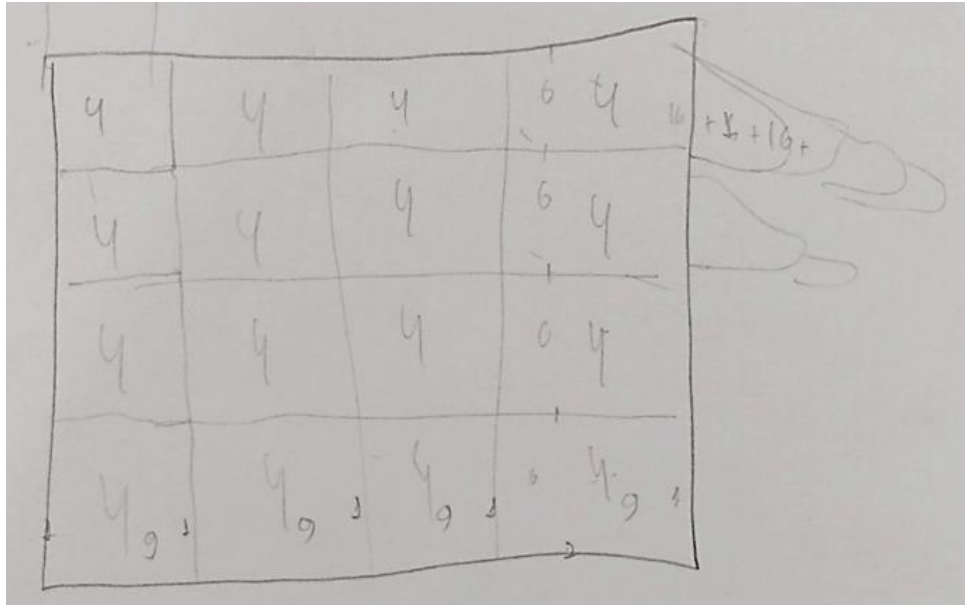
Vídeo gravado em 24/06/2019 - 09:06:00 – 09:09:06

Observamos, pelos diálogos, que os alunos procuraram determinar as medidas da embalagem terciária em função da quantidade de embalagens secundárias que seriam dispostas na direção de cada dimensão da embalagem terciária: altura, comprimento e largura, sendo essas as variáveis determinadas pelo grupo. Em [A44] e [A46] Júlia já começa a pensar em qual seria a altura da caixa do caminhão, em função de quantas caixas de 6cm de altura – embalagens secundárias – seriam colocadas dentro dela. Todo o diálogo destacado na caixa de texto anterior, em especial os trechos [A44], [A46] e [A51], mostram que os alunos tiveram *percepção de relações espaciais*, relacionando as medidas da embalagem terciária em função das medidas da embalagem secundária. Essa percepção também é evidenciada no trecho [A48], quando Júlia questiona a proposta inicial de Davi de colocar a largura da embalagem terciária como 24cm, dizendo “a largura da caixa do caminhão”, pois ela dá a entender que está relacionando a dimensão da caixa com a dimensão do caminhão, e achou incoerente a medida proposta pelo colega.

Os trechos [A40], [A44], [A46], [A47], [A49] e [A51] mostram que os alunos apresentaram, a todo momento, *imagens cinestésicas*, gesticulando com as mãos ou com a trena a imagem mental que estavam tentando construir e/ou comunicar entre si.

Em resumo, a decisão dos alunos a respeito da embalagem terciária foi construí-la em forma de paralelepípedo, de maneira que coubessem quatro caixas de celular no comprimento, quatro na largura e quatro na altura. Após terem decidido, Davi continuou seu esboço inicial, que era o de um retângulo dividido em 16 partes, preenchendo-o com alguns números. Esse esboço está apresentado na Figura 28.

Figura 28 – Esboço da embalagem terciária – grupo azul

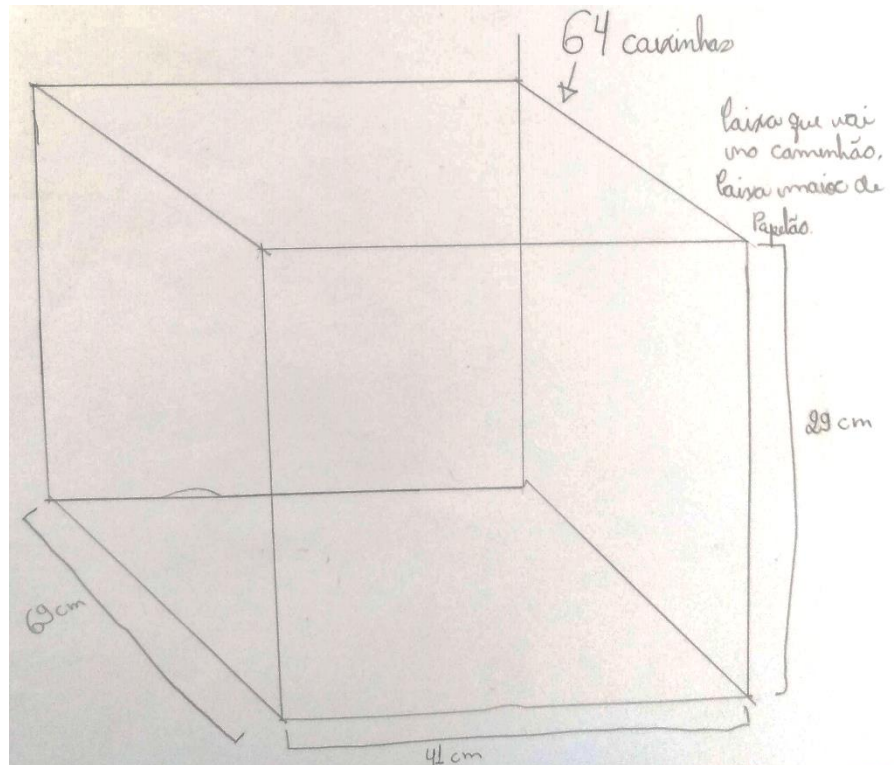


Fonte: Imagem capturada pela autora.

Observamos que o esboço feito por Davi contém 16 divisões, cada uma com um número 4 registrado em seu interior. O que Davi fez em seu esboço foi mostrar a visão superior da embalagem terciária – a caixa do caminhão – que conta com 16 embalagens secundárias dispostas quatro no comprimento e quatro na largura. O número 4 escrito no interior de cada divisão dessa vista superior indica a quantidade de caixas empilhadas naquele local. Dessa forma, a embalagem terciária do grupo continha ao todo $4 \times 4 \times 4 = 64$ embalagens secundárias.

Nota-se ainda que Davi fez alguns registros com as medidas da altura da embalagem secundária – 6 centímetros – e do comprimento desta – 16 centímetros – ainda nesse esboço, acredito que para facilitar os cálculos. Após ter feito esses registros no primeiro esboço, Davi partiu para um segundo esboço da embalagem terciária, este tridimensional, no qual colocou o resultado de seus cálculos – considerando as dimensões e quantidades de embalagens secundárias que seriam colocadas na caixa do caminhão – acrescentando 5cm em cada medida. A Figura 30 traz o novo esboço feito por Davi:

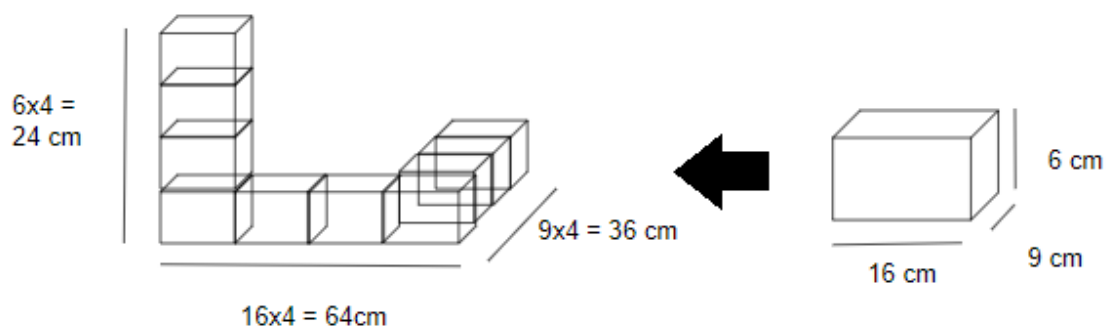
Figura 29 – Projeto da embalagem terciária – grupo azul



Fonte: Imagem captura pela autora.

Vamos pensar no esboço de Davi a partir do que o grupo tinha decidido até então. O esquema da Figura 30 representa o que havia sido decidido pelo grupo em relação à embalagem terciária: que essa teria 64 embalagens secundárias em seu interior.

Figura 30 – Esquema inicial da embalagem terciária – grupo azul



Fonte: Elaborada pela autora.

Considerando as medidas da embalagem secundária, a embalagem terciária deveria ter 24 cm, 64 cm e 36 cm em suas dimensões, que é o equivalente a cada uma das medidas da embalagem secundária multiplicadas por 4 – quantidade de embalagens secundárias dispostas na direção de cada dimensão da embalagem terciária. No entanto, observa-se que, na figura 27, Davi coloca como medidas 29 cm, 69 cm e 41 cm, ou seja, ele acrescenta 5 centímetros em

cada dimensão da embalagem terciária. Júlia, observando seu esboço, questiona a respeito do aumento de 5cm em cada dimensão da embalagem terciária:

[A54] **Júlia:** Por que esses [centímetros] a mais aí?

[A55] **Davi:** Porque as caixas têm grossura. Tem que contar um tanto a mais pra caber, se não espreme.

[Júlia pega uma folha de papel e a enrola, simulando a largura de uma caixa. Balança a folha enrolada na frente de Davi]

[A56] **Júlia:** Mas aí elas [embalagens secundárias] vão ficar assim, ó. [balançando o papel enrolado]

[A57] **Davi:** Não, vai dar pouco, sá. [Davi pega uma régua, a segura na marca 5 cm e coloca a régua formando 90° com um lápis] Imagina esse espaço aqui em cada quina. É pouco.

[Júlia observa a régua e lápis por um tempo]

[A58] **Júlia:** Tá, pode ser.

Vídeo gravado em 24/06/2019 - 09:09:10 –09:09:51

Em [A55], podemos notar que Davi leva em consideração a espessura do material das embalagens secundárias – caixas de celular – ao decidir as medidas da embalagem terciária, o que mostra que o aluno apresenta o componente *percepção de relações espaciais*. Esse mesmo componente da visualização é apresentado por Júlia, quando ela menciona que, com as medidas sugeridas por Davi, as embalagens secundárias ficariam bambas no interior da embalagem terciária. São opiniões diferentes a respeito de uma mesma coisa: a relação entre as dimensões das duas camadas mais externas de embalagens. Outros componentes da visualização que ficaram evidentes nos trechos destacados anteriormente foram a *imagem dinâmica* que Júlia apresentou em [A56], quando utiliza uma folha de papel enrolada para mostrar o movimento que estava visualizando em relação às embalagens secundárias. Esse gesto, bem como outros feitos por Davi em [A57], mostram que os alunos construíram e comunicaram *imagens dinâmicas*, usando mãos e objetos.

Assim que Davi explicou a necessidade de aumentarem 5 cm em cada dimensão da embalagem terciária, o esboço feito por ele, presente na figura 27, foi aceito como projeto da embalagem terciária. Nota-se na figura que o esboço conta com algumas informações adicionais, como o fato de o material da caixa ser papelão e que em seu interior iriam 64 caixas de celular armazenadas.

O segundo encontro finalizou com ambos os grupos tendo terminado os projetos das embalagens secundárias e adiantado bastante, ou terminado, como no caso do grupo azul, o

projeto da embalagem terciária. A seguir, relato o que ocorreu no terceiro encontro, no qual os projetos das camadas de embalagens foram finalizados e alguns protótipos foram construídos.

5.2.3 Terceiro encontro

O terceiro encontro foi realizado no dia 27/06/2019, tendo duração de uma hora e quarenta minutos. Para este encontro, procurei providenciar alguns materiais para que os alunos construíssem protótipos das primeiras camadas de embalagens. Consegui um plástico firme para simular as embalagens primárias dos alunos, que eram feitas de plástico, papelão bege e branco e fita adesiva. Logo no início do encontro, expliquei aos alunos que gostaria que eles, ao terminarem os projetos das embalagens, tentassem construir protótipos das embalagens primárias e secundárias. Assim, os grupos partiram para a finalização dos projetos das camadas de embalagens. Os grupos vermelho e azul tinham parado em pontos diferentes no segundo encontro. O grupo azul havia terminado o projeto da embalagem terciária, bastava apenas fazer os cálculos para decidirem qual seria o tipo de caminhão empregado no transporte. Já o grupo vermelho, que no encontro anterior tinha feito o esboço da embalagem terciária usando um giz, o chão e a parede da sala, começou o terceiro encontro com a retomada desse projeto.

Começarei relatando o que foi desenvolvido pelo grupo vermelho. Assim que chegaram à sala de aula, Larissa abriu, em seu celular, a foto que havia tirado do esboço da embalagem terciária e, usando giz, régua, trena e o canto do chão e parede da sala, repetiu o esboço feito no encontro anterior. Enquanto ela trabalhava nesse esboço tridimensional, Pedro e Eduardo começaram a confeccionar os protótipos das camadas de embalagem. Em relação à embalagem primária, os alunos decidiram utilizar, como protótipo, a embalagem que haviam trazido do mercado, pois ela foi utilizada como molde para o projeto da embalagem primária. Assim, partiram para a construção do protótipo da embalagem secundária usando papelão bege.

Durante a construção do protótipo da embalagem secundária, Pedro e Eduardo se comunicaram em vários momentos utilizando *imagens cinestésicas*, como pode ser observado na transcrição a seguir:

[V79] **Pedro:** É [sic] 16 centímetros assim [traça com os dedos uma linha vertical sobre o papelão] por 13 assim, que é tipo o fundo da caixa. [traça com os dedos uma linha perpendicular à anterior].

[V80] **Eduardo:** Tá, a gente tá fazendo essa parte primeiro então. [aponta para a base da caixa do fone de ouvido no esboço]

[V81] **Pedro:** Isso.

Em [V79], Pedro traça um esboço com os dedos, procurando mostrar para Eduardo o que estava visualizando que seria construído da caixa. As *imagens cinestésicas* acontecem também quando Pedro utiliza o papelão que estavam cortando para explicar a imagem mental que estava visualizando, como mostram a transcrição a seguir e a figura 31:

[V82] **Pedro:** Isso, vai ficar assim, tá vendo? [coloca o papel numa posição que corresponde às partes de cima, lateral e de baixo da caixa do fone de ouvido] E esse lado aqui vai ficar aberto?

[aponta com o polegar o que seria a frente da caixa]

[V83] **Eduardo:** Uai, depende.

[V84] **Pedro:** A gente coloca o fone por aqui e depois fecha. [apontando para a abertura da caixa]

[V85] **Eduardo:** Pode ser.

Vídeo gravado em 27/06/2019 - 10:55:13 – 10:55:58

Figura 31 – Construção do protótipo da embalagem secundária – grupo vermelho



Fonte: Imagem capturada pela autora.

A situação descrita em [V82] está ilustrada na figura anterior, em que Pedro utiliza o papelão para mostrar como vai ficar o protótipo da embalagem. Notemos que os alunos já estavam pensando em como colocariam a embalagem primária no interior da secundária, o que mostra que eles haviam passado para uma outra etapa da atividade de Modelagem, que é a *validação* do modelo obtido.

Os alunos terminaram o protótipo da embalagem secundária, deixando de colar apenas uma das laterais da caixa. Os alunos pegam então o fone de ouvido, colocam dentro da embalagem de plástico que foi usada como embalagem primária, e colocam essa embalagem no interior do protótipo da embalagem secundária que estava sendo construída. Nesse momento, percebem que sobrou espaço no interior da embalagem. Eduardo sugere uma solução, que seria colocar dois fones de ouvido em cada caixa. O grupo acata a sugestão e essa fica sendo uma alteração no projeto da embalagem, configurando a etapa de *modificação* da Modelagem. Uma

foto do protótipo completo da embalagem secundária confeccionado pelo grupo está apresentada na Figura 32:

Figura 32 – Protótipo da embalagem secundária – grupo vermelho



Fonte: Imagem capturada pela autora.

Larissa terminou o esboço do protótipo da embalagem terciária no canto da sala e, em seguida, os alunos posicionam um protótipo da embalagem secundária sobre o esboço da terciária, para verificar se esse havia ficado adequado, como mostra a Figura 33.

Figura 33 – Alunos do grupo vermelho testando o projeto da embalagem terciária



Fonte: Imagem capturada pela autora.

O protótipo da embalagem secundária encaixou perfeitamente no da embalagem terciária, e os alunos se deram por satisfeitos com o projeto. Essa etapa de verificação realizada pelos alunos consiste na *validação* dos modelos – protótipo das embalagens. Apesar de não terem desenhado no papel o projeto da embalagem terciária, o esboço feito com giz pelo grupo

foi uma maneira de projetar uma embalagem tridimensional: por meio de um esboço tridimensional. Tendo feito os esboços e protótipos, os alunos fizeram alguns cálculos para decidirem em qual caminhão seria transportado seu produto. Durante esses cálculos, algumas manifestações de visualização ocorreram, como mostra a transcrição seguinte:

[V86] **Pedro:** Ó, tem meio metro de altura. [a caixa do caminhão] Então vai caber quatro assim [gesticula com a mão na vertical], sete assim [gesticula com as mãos no comprimento] e quatro assim [gesticula com as mãos indicando a largura do caminhão três quartos]

[V87] **Eduardo:** Marca aí. [pega um papel e entrega para Pedro]

[V88] **Pedro:** Faz aí na calculadora, quatro pro lado... pra cima quatro... e pra frente é sete. Dezesesseis vezes sete, faz aí.

[Larissa faz os cálculos]

[V89] **Larissa:** 112.

[V90] **Eduardo:** Quanto?

[V91] **Pedro:** Dá 112 caixas.

Vídeo gravado em 27/06/2019 - 11:21:43 – 11:22:50

Em [V86], Pedro visualiza quantas caixas caberiam em determinado tipo de caminhão com gestos, o que indica *imagens cinestésicas*, e em [V88] ele comunica a quantidade de caixas que estava visualizando em cada dimensão do caminhão, ou seja, *imagens pictóricas* que ele estava tendo.

Após fazerem os cálculos, o grupo optou por transportar suas mercadorias no caminhão truck, no qual, apesar de ser mais caro, caberia uma quantidade bem maior de caixas que os demais, compensando o valor do transporte. O raciocínio usado pelo grupo para verificar quantas caixas caberiam nos demais modelos de caminhão foram semelhantes ao do diálogo destacado anteriormente, com algumas manifestações de *imagens cinestésicas*.

Semelhante aos integrantes do grupo vermelho, o grupo azul procurou calcular quantas embalagens terciárias – caixas que seriam transportadas no caminhão – caberiam em cada modelo de caminhão. O processo para fazerem esses cálculos mostrou manifestações de *imagens cinestésicas*, como mostra a transcrição seguinte:

[A59] **Davi:** Vai 4 caixas dessa [aponta para o esboço da embalagem secundária] em pé.

[A60] **Júlia:** Então é 6 centímetros, 6 centímetros, 6 centímetros... [gesticula com as mãos indicando o empilhamento das caixas]

[A61] **Davi:** Isso. Então são 4 aqui, 4 aqui... [continua esboçando] Tá, agora nós tem [sic] que ver atrás da caixa. [gesticula com a mão a largura da caixa] Tinha ficado 4 assim [gesticula

com as mãos na horizontal] 4 assim [gesticula com as mãos na vertical] e 4 na fundura [gesticula com as mãos indicando a largura da caixa].

[A62] **Júlia:** Aqui, ó. Vamo fazer a conta. [faz 4x4x4 no papel] 64 caixinhas. Professora, pode ser 64 caixas dentro da caixa do caminhão?

[A63] **Pesquisadora:** Pode, uai. Se couber, tá valendo. Vai caber?

[A64] **Júlia:** Esperamos que sim.

[A65] **Davi:** Tá, vamos ver as medidas agora. Em pé, 6 centímetros... 6 centímetros... 6 centímetros... [vai anotando no papel]

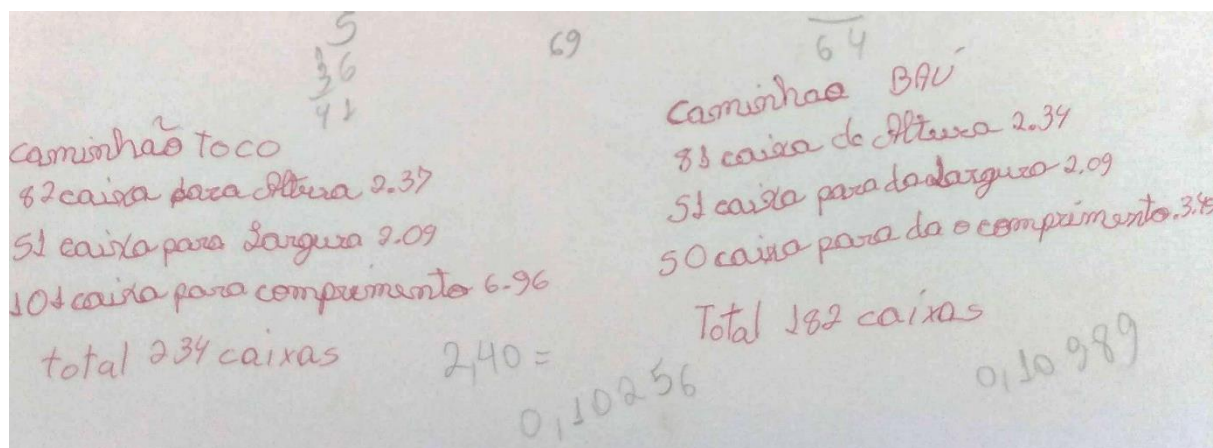
[A66] **Júlia:** Não esquece dessa caixa aqui, ó. [Indica uma das caixas esboçadas no papel, que correspondem às primeiras vistas de cima da caixa do caminhão]

[A67] **Davi:** Aham. [continua calculando]

Vídeo gravado em 27/06/2019 - 09:59:30 – 10:04:50

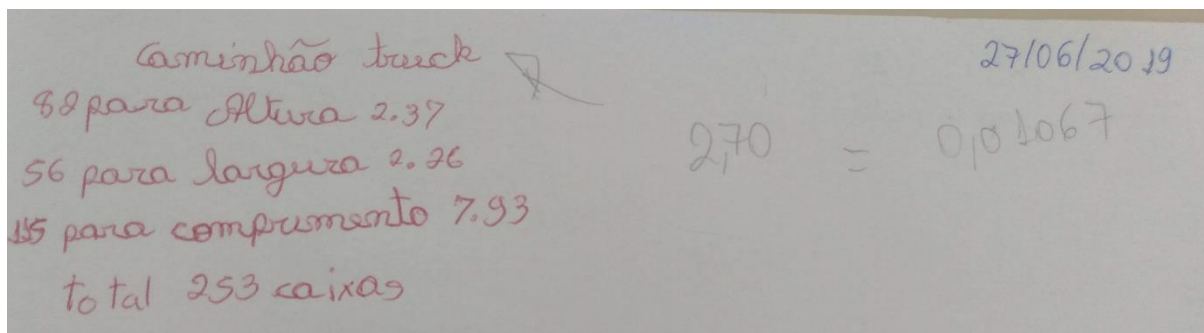
Em [A60] e [A61] podemos notar que os alunos constroem e/ou comunicam imagens mentais por meio de *imagens cinestésicas*, gesticulando no ar com as mãos para auxiliarem os cálculos referentes aos caminhões. Enquanto faziam os cálculos, Davi fez alguns registros para o grupo, calculando quantas embalagens terciárias cabiam na direção de cada dimensão – altura, largura e comprimento – de cada modelo de caminhão. As figuras 34 e 35 trazem esses registros:

Figura 34 – Cálculos referentes aos caminhões toco e baú – grupo azul



Fonte: Imagem capturada pela autora.

Figura 35 – Cálculos referentes ao caminhão truck – grupo azul



Fonte: Imagem capturada pela autora.

Após terem determinado o total de caixas que caberiam em cada caminhão, o grupo me perguntou qual cálculo deveria ser feito para determinar o caminhão mais vantajoso. Informei a eles que deveriam pegar o preço que cada caminhão cobra por quilômetro rodado e dividir pelo total de caixas que caberiam naquele caminhão. Assim, obteríamos o custo para transporte de cada caixa. Os alunos fizeram esses cálculos e obtiveram três respostas: R\$ 0,010256 por caixa para o caminhão toco, R\$ 0,010989 por caixa para o caminhão baú e R\$ 0,01067 por caixa para o caminhão truck. Como o caminhão toco teve o melhor custo benefício, o grupo me informou que este seria o escolhido para o transporte.

Tendo resolvido a escolha do caminhão, o grupo passou para a construção dos protótipos das embalagens primária e secundária. Durante essa construção, Davi e Otávio foram mais participativos, mas não dialogaram muito a respeito da construção, apenas observaram os projetos das embalagens, cortaram e coloram os materiais. Durante essa construção, não consegui observar manifestações dos componentes de visualização. As figuras 36 e 37 apresentam imagens dos protótipos construídos pelos estudantes:

Figura 36 – Protótipo da embalagem primária – grupo azul



Fonte: Imagem capturada pela autora.

Figura 37 – Protótipo da embalagem secundária – grupo azul



Fonte: Imagem capturada pela autora.

Antes de o grupo terminar a construção do protótipo da embalagem secundária, eles pegaram o objeto escolhido – o celular – o colocaram no interior do protótipo da embalagem primária que, por sua vez, foi colocada no interior do protótipo da embalagem secundária. Essa etapa da atividade de Modelagem consiste na *validação*, processo no qual os modelos obtidos – os projetos de embalagens – foram testados. Ambos os protótipos serviram perfeitamente, ficando o celular bem rente ao plástico – embalagem primária – e este bem encaixado na embalagem secundária – a caixa do celular. Os estudantes me mostraram os testes com os protótipos e ficaram empolgados com o resultado. Esses protótipos foram aceitos como modelos finais – etapa de *resolução* da atividade de Modelagem – sem haver necessidade de modificações.

Com a finalização dos projetos e construção dos protótipos das embalagens, a atividade de Modelagem foi finalizada. Na subseção seguinte, trago uma visão geral dos dados obtidos.

5.3 Como se dá a visualização geométrica em um ambiente de Modelagem Matemática?

Essa seção da análise dos dados tem o objetivo de responder à questão de pesquisa, que é “Como se dá a visualização geométrica em um ambiente de Modelagem Matemática?”. Para responder a essa questão, começarei falando sobre a criação do ambiente de Modelagem. Minha maior preocupação ao elaborar a atividade de Modelagem foi que os alunos aceitassem o convite para participarem do ambiente de Modelagem, de tal forma que a atividade fosse algo de seu interesse. Embora esse não tenha sido o objetivo da pesquisa, era importante criar o

contexto no qual a pesquisa seria realizada, o que é uma prática comum em pesquisas sobre modelagem na Educação Matemática (ARAÚJO, 2019). Desde o início, a proposta de organização de algumas aulas com dinâmica diferente das aulas expositivas – com participação mais ativa dos alunos, que envolvesse um tema não matemático e nas quais eles tivessem que trabalhar com a construção de objetos – fez com que os alunos se mostrassem interessados e participativos.

Ao longo do desenvolvimento da atividade, o convite para o ambiente de Modelagem foi aceito em diversos momentos, pois os alunos se indagaram a todo momento: “Qual deve ser o tamanho?”; “Essa medida está certa?”, e eles mesmos procuraram responder aos próprios questionamentos, trocando ideias, fazendo experimentações com os objetos, fazendo cálculos. Tais características são apontadas por Skovsmose (2000) como sinais de que os alunos aceitaram o convite para o ambiente de aprendizagem. Por essas razões, acredito que o ambiente de aprendizagem de Modelagem que propus tenha atendido às expectativas.

Em relação ao objetivo da atividade de modelagem, que era a simulação do trabalho de um *designer* de produtos, acredito que tenha sido alcançado com sucesso, pois os alunos levaram em conta, na elaboração de seus projetos e protótipos, alguns dos critérios que um *designer* tem em mente ao elaborar uma embalagem. Os alunos procuraram elaborar embalagens atrativas, que os consumidores gostariam de guardar para reutilizarem, atendendo aos critérios de *reutilização* e *afeto*. Além disso, se preocuparam em evitar o desperdício de materiais nas embalagens, e as fizeram de materiais não tóxicos e recicláveis, atendendo aos critérios *desmaterialização* e *impacto humano*. O critério *design inteligente* não apareceu durante a atividade, mas nenhum dos objetos escolhidos para criar embalagens proporcionava desperdício, como poderia acontecer caso de tratassem de líquidos ou alimentos, portanto a ausência desse critério é justificada.

Em relação ao ambiente de Modelagem criado, a proposta de elaborar múltiplas camadas de embalagens foi interessante, pois permitiu que algumas etapas da atividade de Modelagem (BASSANEZI, 2002) acontecessem repetidamente: a cada novo projeto de embalagem, os alunos passavam pelas etapas de *experimentação* com o objeto, *abstração* a respeito de qual seria o melhor formato de embalagem e quais variáveis era necessário determinar, e *resolução* dos valores dessas variáveis, opção por um formato de embalagem e criação de um esboço.

A construção dos protótipos de embalagens foi crucial para que ocorressem as etapas de *validação* dos modelos e, quando necessário, *modificação*. O fato de o grupo azul ter criado o projeto da embalagem terciária antes de ter finalizado o da embalagem secundária também

permitiu maior permutação entre essas etapas, o que é natural em atividades de modelagem, como aponta Borromeo Ferri (2007). Dessa forma, a atividade de Modelagem não ocorreu de forma linear, sendo que as etapas foram determinadas pelos próprios alunos de acordo com a maneira com que eles desenvolveram seus projetos de embalagens.

Minha intenção com a atividade de Modelagem, além de trazer um tema da realidade para a sala de aula, era promover um ambiente mais livre para que a visualização se manifestasse. O fato de o tema da atividade ser “embalagens” e não “sólidos geométricos” e o fato de os alunos terem tido a liberdade de criarem os formatos de embalagens que desejassem, podendo até mesmo escolher o que desejariam embalar, fez com que os alunos usassem expressões mais informais em seus diálogos, como “caixa”, “fundura”, “quantidade que vai em pé”, “quantidade que vai deitado” no lugar de “paralelepípedo”, “altura”, “profundidade”, “largura”. Foi por meio desses termos e expressões informais que os alunos conseguiram comunicar o que estavam visualizando e elaboraram os protótipos de embalagens. O ambiente mais livre promovido pela Modelagem teve, então, papel fundamental para que a visualização dos alunos pudesse ser construída e comunicada.

Esse preâmbulo permite-me encaminhar para o objetivo da pesquisa, que é identificar, por meio das três formas de manifestação – gráficas, verbais e gestuais (GUTIÉRREZ, 1996; NACARATO; PASSOS, 2003) – como se dá a visualização geométrica de alunos da educação básica em um ambiente de Modelagem Matemática, considerando-a como uma habilidade de nove componentes (GUTIÉRREZ, 1996; PRESMEG, 1986). Esses se apresentaram muitas vezes de forma simultânea ou sequencial: em alguns momentos da atividade, os alunos comunicavam verbalmente as propriedades de uma embalagem enquanto faziam gestos ou esboços; em outros, comunicavam verbalmente, por exemplo, e, caso o colega não o compreendesse, buscavam outros meios como os gestos e os desenhos para explicar melhor o que estavam visualizando.

Dos nove componentes da visualização geométrica que foram categorizados por meio da literatura sobre o tema (GUTIÉRREZ, 1996; PRESMEG, 1986), ao longo da pesquisa pude identificar a manifestação de sete, sendo eles *imagens cinestésicas*, *imagens pictóricas*, *percepção de relações espaciais*, *percepção de posições espaciais*, *imagens dinâmicas*, *constância perceptiva* e *percepção figura-fundo*.

Dos sete componentes identificados na pesquisa, as *imagens cinestésicas* foi o que mais se manifestou, o que pode ter uma série de justificativas: ser um componente mais comumente utilizado para comunicar imagens mentais a outras pessoas, o fato de a atividade de Modelagem envolver experimentação manual com os objetos a serem embalados, o fato de os alunos terem

tido que construir protótipos de embalagem etc. De qualquer maneira, acredito que as *imagens cinestésicas* são o componente de visualização geométrica que teve maior relação com o ambiente de Modelagem criado, se manifestando em todas as etapas da atividade de Modelagem, desde à experimentação até a validação dos modelos.

O componente *imagens pictóricas* também se manifestou em vários momentos ao longo da atividade de Modelagem, mas senti que as formas de manifestação gráficas, verbais e gestuais podem não ter sido o suficiente para identificar esse componente, pois imagino que, a todo momento da atividade, os alunos tiveram *imagens pictóricas* dos objetos e embalagens, e que essas imagens foram sendo modificadas ao longo da atividade. Acredito que nem sempre que tinham uma *imagem pictórica* os alunos a comunicavam aos colegas, o que torna difícil identificar a manifestação desse componente.

Outro componente que apresentou muitas manifestações foi *percepção de relações espaciais*, que apareceu principalmente durante a formulação dos projetos de embalagens, nas etapas da *experimentação, abstração e resolução* da atividade de Modelagem. Acredito que um fator importante para a manifestação desse componente foi o fato de a atividade envolver a elaboração de várias camadas de embalagens para um mesmo produto, e não apenas uma ou embalagens de produtos diferentes. A necessidade de relacionar as dimensões entre as camadas de embalagens foi o que fez com que os alunos manifestassem esse componente da visualização geométrica.

O componente *percepção de posições espaciais* se manifestou pelo mesmo motivo da *percepção de relações espaciais*: quando os alunos precisaram relacionar as camadas de embalagens, estudando a posição das embalagens secundárias no interior da terciária, principalmente.

As *imagens dinâmicas* se manifestaram em apenas um diálogo dos alunos do grupo azul, no qual eles comunicam a respeito da preocupação com o fato de as embalagens secundárias ficarem balançando no interior da embalagem terciária, ou seja, esse componente teve ocorrência bem isolada, relacionada à etapa de *resolução* da Modelagem.

O componente *constância perceptiva* teve uma única manifestação, quando dois integrantes do grupo azul estavam visualizando uma mesma embalagem em posições diferentes, e tiveram dificuldades em concordar com seu esboço, até que uma aluna percebeu que estavam falando da mesma embalagem e que a posição dessa não resultava em mudança de suas propriedades. Esse componente talvez seja um dos mais avançados da visualização, pois reconhecer que as propriedades de um objeto independem de sua posição vai contra o fenômeno prototípico, que acontece quando um estudante, tendo contato sempre com o mesmo

desenho de um sólido geométrico, não o reconhece quando representado em outras perspectivas.

O último componente cuja manifestação foi possível observar foi a *percepção figura-fundo*, durante as etapas de *abstração e resolução* da atividade de Modelagem, quando os integrantes do grupo vermelho procuraram determinar a altura da embalagem terciária. Um integrante do grupo mostrou preocupação com a altura sugerida por seu colega, pois visualizou que, se a embalagem fosse muito alta, a embalagem secundária que ficasse na base poderia amassar. Acredito que esse componente, de forma semelhante às *imagens pictóricas*, possa ter ocorrido com mais frequência sem ser identificado todas as vezes, o que não aconteceu porque os alunos não comunicaram toda vez que visualizavam uma parte de um todo, ou uma figura destacada de um plano de fundo.

Os únicos componentes que não foram possíveis de serem identificados foram a *discriminação visual* e a *rotação mental*. Esse primeiro talvez pelo fato de que os alunos pensaram juntos nas camadas de embalagens, decidindo por seguirem projetos únicos para essas camadas, não surgindo opções de embalagens para uma mesma camada. Essas opções, se tivessem surgido, poderiam ter levado os estudantes a comparar suas similaridades e diferenças, manifestando *discriminação visual*. Já a *rotação mental* não foi possível de ser identificada, mas acredito que este componente pode fazer parte das *imagens dinâmicas*, que foi um componente de visualização geométrica identificado.

Para sintetizar as considerações a respeito de como se dá a visualização geométrica de alunos da educação básica em um ambiente de Modelagem Matemática, considerando que a atividade de Modelagem foi descrita por meio das etapas de Bassanezi (2002), a relação dos componentes da visualização geométrica com essas etapas ocorreu da seguinte maneira:

Experimentação: Etapa na qual se manifestaram os componentes *imagens pictóricas* e *imagens cinestésicas*. Esses componentes estiveram relacionados à formação e comunicação de imagens mentais iniciais a respeito dos produtos a serem embalados ou do início do projeto das embalagens.

Abstração e Resolução: Etapas nas quais se manifestaram *imagens pictóricas*, *imagens dinâmicas*, *imagens cinestésicas*, *percepção de posições espaciais*, *percepção de relações espaciais* e *percepção figura-fundo*. Não foi possível distinguir, na maioria dos casos, quais desses componentes da visualização se manifestaram especificamente na *abstração* e na *resolução*, pois essas etapas aconteceram repetidas vezes e a transição de uma para outra e vice-versa foi muito sutil. O que foi possível perceber é que, ao buscarem elencar as variáveis e seus valores para os projetos de embalagens e ao relacionarem as dimensões de uma camada de

embalagem com outra, os alunos manifestaram, além das imagens pictóricas e cinestésicas, *imagens dinâmicas, percepção de posições espaciais e percepção de relações espaciais*.

A etapa da *validação* contou com forte manifestação das *imagens cinestésicas*. Nessa etapa, a *percepção de posições espaciais* também se manifestou, quando os alunos procuraram posicionar o protótipo da embalagem primária no interior do da embalagem secundária e o desta no interior do desenho da embalagem terciária, como aconteceu com o grupo vermelho.

Por fim, na etapa de *modificação* se manifestaram as *imagens cinestésicas, pictóricas* e também a *percepção de relações espaciais*. Destaco que os componentes *percepção de posições espaciais e percepção de relações espaciais* se manifestaram pelo fato de os alunos terem sido convidados a elaborarem mais de uma camada de embalagem, e terem que relacionar dimensões de uma camada de embalagem com as demais. Portanto, a manifestação desses componentes esteve fortemente relacionada com o ambiente de Modelagem estabelecido.

Mais considerações a respeito da relação entre os componentes de visualização serão apresentadas na seção seguinte, que contém as considerações finais deste trabalho.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pergunta que orientou o desenvolvimento desta pesquisa é: *Como se dá a visualização de sólidos geométricos de alunos do ensino básico em um ambiente de Modelagem Matemática?*

Para responder a essa questão de pesquisa, foi desenvolvida, com uma turma de alunos 9º ano do Ensino Fundamental, uma atividade de Modelagem Matemática baseada no trabalho de Barbosa (2001), que concebe a Modelagem como “um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade” (p. 31) A noção de *ambiente de aprendizagem* provém de Skovsmose (2000), que define ambiente de aprendizagem como um conjunto de “[...] condições sob as quais os alunos desenvolvem as suas tarefas investigativas na sala de aula, partindo de um convite para formular questões e procurar explicações” (p. 75)

Em relação às perspectivas de Modelagem apresentadas na pesquisa, a atividade de Modelagem desenvolvida apresentou características mais próximas da perspectiva realística da Modelagem (KAISER; SIRIRAMAN, 2006), pois teve objetivos pragmáticos e utilitários, ou seja, esteve focada na resolução e compreensão de problemas reais e no desenvolvimento de competências de modelagem.

A organização da atividade de Modelagem realizada durante a pesquisa se apoiou nas informações obtidas em uma entrevista concebida por uma *designer* de produtos que atuou no ramo do *design* de embalagens. A entrevista apresentou alguns critérios que um *designer* leva em consideração ao elaborar o projeto de uma embalagem. Esses critérios foram sintetizados em um documento, chamado “Roteiro do aluno”, que serviu para orientar os alunos durante a atividade de Modelagem.

A atividade ocorreu em três encontros, e durante os mesmos procurei observar a manifestação da visualização geométrica relacionando-a com as etapas da atividade de Modelagem trazidas por Bassanezi (2002), que são: experimentação, abstração, resolução, validação e modificação.

Para identificar como se dá a manifestação da visualização em um ambiente de Modelagem Matemática, utilizei os nove componentes da visualização geométrica encontrados na literatura de Gutiérrez (1996) e Presmeg (1986).

Para observar e analisar a manifestação desses componentes da visualização geométrica, utilizei três formas de manifestação presentes na literatura a respeito dessa habilidade mental (GUTIÉRREZ, 1996; NACARATO; PASSOS, 2003).

Tendo em vista as considerações já feitas na subseção 5.3, a respeito de como a visualização se relacionou com o ambiente de aprendizagem de Modelagem proposto nessa pesquisa, o objetivo geral e alguns dos objetivos específicos da pesquisa foram respondidos, sendo eles:

Objetivo geral: Investigar como se dá a visualização geométrica de alunos da educação básica em um ambiente de Modelagem Matemática.

Objetivos específicos:

a) Identificar se, em quais momentos e como alguns componentes da visualização geométrica são manifestados por alunos da educação básica em um ambiente de Modelagem Matemática.

b) Compreender como se relacionam a visualização geométrica e a Modelagem Matemática em uma atividade de simulação do trabalho de um *designer* de produto

Trarei agora algumas considerações a respeito da visualização como um todo, procurando estabelecer relação entre os componentes e suas formas de manifestação, procurando responder a objetivo específico restante, que é:

c) Caracterizar a visualização geométrica dos alunos a partir dos componentes da visualização manifestados em um ambiente de Modelagem Matemática.

Como discuti na subseção 2.3, Gutiérrez (1996) e Presmeg (1986) tratam os componentes da visualização de maneira independente, de tal forma que o aluno pode apresentar cada um deles de forma isolada quando visualiza determinado sólido geométrico. Porém, durante a atividade de Modelagem desenvolvida na pesquisa, por meio da observação da manifestação dos componentes da visualização, percebi uma relação diferente à proposta no esquema da Figura 9, que mostra os componentes dispostos igualmente, compondo a visualização.

Primeiramente, acredito que o componente *rotação mental*, de Gutiérrez (1996) pode ser englobado no componente *imagens dinâmicas*, trazido por Presmeg (1986), pois o primeiro é definido como uma habilidade de produzir imagens mentais dinâmicas e visualizar uma configuração em movimento, o que se assemelha à definição do segundo, que são imagens mentais que possuem movimento. Assim, a partir daqui, irei englobar esses dois componentes em um só, me referindo a eles apenas como *imagens dinâmicas*.

Assim, ficamos agora com oito componentes, sendo eles:

- a) Percepção figura-fundo;
- b) Constância perceptiva;
- c) Percepção de posições espaciais;

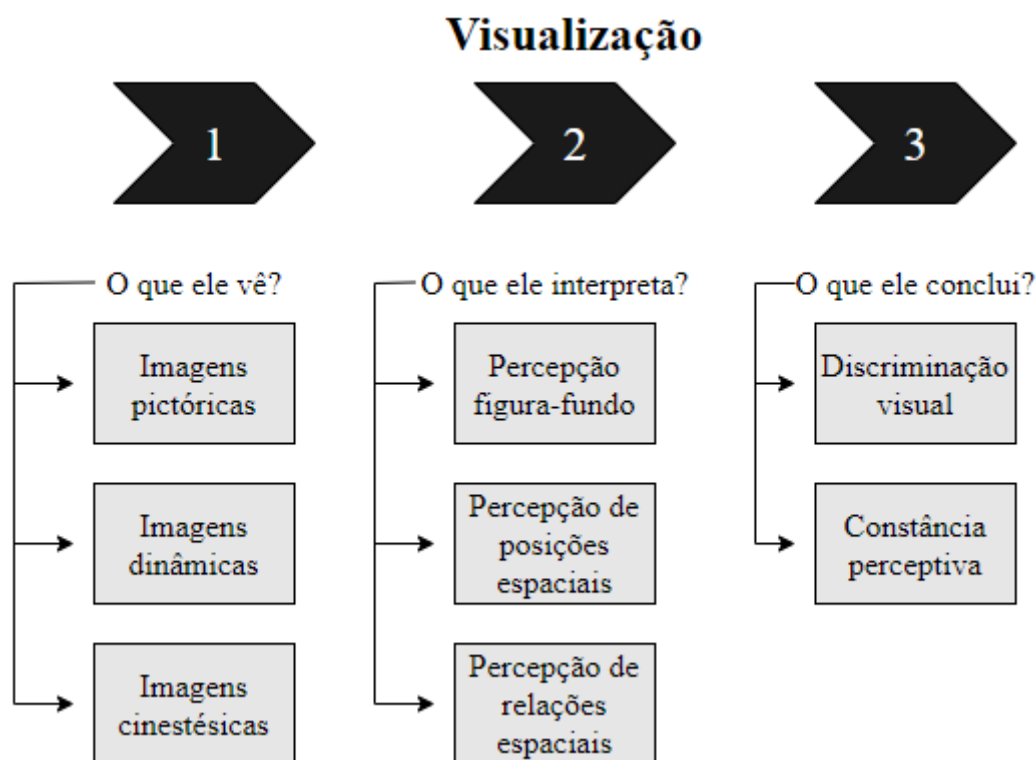
- d) Percepção de relações espaciais;
- e) Discriminação visual;
- f) Imagens pictóricas;
- g) Imagens cinestésicas;
- h) Imagens dinâmicas.

Em relação a esses oito componentes, percebi durante a pesquisa que possuem relação com o que vou chamar de três etapas da visualização geométrica:

- a) *O que o aluno vê?*
- b) *O que ele interpreta?*
- c) *O que ele conclui?*

Quando digo “*O que o aluno vê?*” me refiro às imagens mentais que o aluno vai tendo enquanto a visualização vai acontecendo. Com “*O que ele interpreta?*” me refiro ao que o aluno é capaz de perceber, interpretar, a partir das imagens mentais que vê. E com “*O que ele conclui?*”, me refiro às conclusões, em termos de visualização, que o aluno chega a partir do que ele interpretou. A partir dessas perguntas, estou propondo uma concepção de visualização como um processo, composto dessas três etapas sequenciais, de tal forma que determinados componentes da visualização se relacionam com cada uma dessas etapas. Na Figura 38, procurei mostrar a relação entre os oito componentes e essas três etapas da visualização:

Figura 38 – Relação entre componentes e etapas da visualização



Fonte: Elaborado pela autora, baseado em Gutiérrez (1996) e Presmeg (1986).

Entendo a visualização geométrica como um processo que ocorre em três etapas, que estão numerados de 1 a 3 na Figura 38, e essas etapas são relacionados a como o aluno vê mentalmente, em seguida interpreta o que vê e quais conclusões ele tira a respeito de suas interpretações das imagens mentais.

Em relação à primeira etapa, “*O que ele vê?*”, ao começar a visualizar, algumas imagens iniciais surgem na mente do aluno. Essas imagens podem ser pictóricas, surgindo como uma foto na mente; como a imagem apresentada por Pedro em [V36], no trecho de transcrição a seguir:

[V36] Pedro: Vai precisar de um metro. [aluno pega trena e abre em um metro, mostrando para os colegas]

Vídeo gravado em 24/06/2019 – 09:00:40 – 09:04:02

Ao dizer “Vai precisar de um metro” e utilizar a trena para indicar a medida para os colegas, Pedro comunicou ao grupo uma *imagem pictórica* que teve por meio de uma *imagem cinestésica*.

Essas imagens mentais iniciais podem também ser construídas por meio de *imagens cinestésicas*, se manifestando por meio de movimentos físicos, como a imagem apresentada por Pedro na transcrição a seguir:

[V12] **Pedro:** Aqui, ó. Faz tipo um quadradinho aqui. [gesticula com os dedos sobre o papel, formando um retângulo] 3 cm por... [pega a régua e confere o comprimento do fone enrolado] 8 cm.

Vídeo gravado em 17/06/2019 - 09:07:11 – 09:09:07

Ou ainda serem *imagens dinâmicas*, se apresentarem movimentos, como a imagem que Júlia apresenta na transcrição seguinte:

[A7] **Júlia:** Tem que sobrar! Tem que caber as bolhas que vai [sic] enrolar o celular. [pega o celular e gesticula com as mãos envolta do aparelho, como se o enrolasse]

Vídeo gravado em 17/06/2019 - 08:57:30 – 08:57:40

A partir dessas primeiras imagens mentais, o aluno pode ter uma série de interpretações e fazer operacionalizações com essas, passando pela etapa 2: *O que ele interpreta?*. Nesse momento, os alunos podem apresentar percepção figura-fundo, sendo capazes de isolar uma figura de um plano de fundo complexo. Por exemplo, após os integrantes do grupo vermelho terem visualizado a imagem mental que Pedro dialogou em [V36], Larissa faz a seguinte observação:

[V41] **Larissa:** [indicando a fita métrica] Cês ‘tão ligados’ que a caixa de baixo vai amassar, né?

Vídeo gravado em 24/06/2019 – 09:00:40 – 09:04:02

Ou seja, tendo tido uma *imagem pictórica* do que foi proposto por Pedro, a medida de um metro para o lado da embalagem terciária, Larissa apresenta *percepção figura-fundo*, como uma conclusão que ela chegou a respeito da imagem mental que teve até então.

Outras interpretações que os alunos podem apresentar são: perceber relações entre a posição ou propriedades de figuras, manifestando os componentes *percepção de posições espaciais* e *percepção de relações espaciais*. Notei isto principalmente quando os alunos passaram a elaborar os protótipos das embalagens secundárias. Na transcrição a seguir, por exemplo, Larissa apresenta, em [V25] e [V27], uma preocupação a respeito de quantas embalagens secundárias caberiam empilhadas uma sobre a outra no interior da embalagem terciária, apresentando *percepção de posições espaciais*.

[V25] **Larissa:** Não sei... Tem que ver quantos que vão caber um em cima do outro.

[V26] **Pedro:** Como assim?

[V27] Larissa: Assim. [gesticula com as mãos um movimento de empilhamento]

Vídeo gravado em 24/06/2019 - 08:59:12 – 09:00:00

Já a transcrição seguinte mostra que Davi, ao considerar a espessura da embalagem secundária para determinar as dimensões da embalagem terciária, apresentou *percepção de relações espaciais*.

[A54] Júlia: Por que esses [centímetros] a mais aí?

[A55] Davi: Por que as caixas têm grossura. Tem que contar um tanto a mais pra caber, senão espreme.

Vídeo gravado em 24/06/2019 - 09:09:10 – 09:09:51

Tanto a *percepção de posições espaciais* quanto a *percepção de relações espaciais* foram componentes que se manifestaram após os participantes terem apresentado algum tipo de imagem da categoria “*O que o aluno vê?*”, ou seja, imagens pictóricas, cinestésicas ou dinâmicas. Ressalto que as *imagens cinestésicas* foram presentes em todos os momentos da atividade de Modelagem, servindo em alguns casos como um instrumento para comunicar uma *imagem pictórica* e em outros como uma forma de criação de imagem mental.

Por meio dessas interpretações e percepções, os alunos podem ou não alcançar uma terceira etapa da visualização: *O que ele conclui?*. As conclusões dos alunos nessa etapa são de dois tipos: observar similaridades e diferenças entre objetos, desenhos e/ou imagens mentais, apresentando o componente *discriminação visual*; e reconhecer que algumas propriedades de um objeto (real ou imagem mental) são independentes de tamanho, cor, textura ou posição, e não se confundir quando um objeto ou figura é apresentado(a) em diferentes posições, apresentando *constância perceptiva*.

Na atividade de Modelagem desenvolvida nessa pesquisa, houve apenas uma ocorrência de *discriminação visual*. Retomo a transcrição em que ela ocorreu para uma segunda análise:

[A22] Davi: Agora você tem que fazer um negócio tipo 3D aqui. [indicando a largura com o lápis no papel, dizendo como Júlia deveria desenhar]

[A23] Júlia: Como assim?

[A24] Davi: Porque tem que ter a fundura da caixa, que é 6 [centímetros]. Aí você desenha e anota aqui. [indica novamente a largura com o lápis].

[A25] Júlia: Não, a fundura é isso aqui, oh. [indica com o lápis a linha vertical do retângulo que havia traçado].

[A26] Davi: Não, a fundura é aqui, ó. [faz um risco com o lápis indicando a largura que seria a profundidade da caixa] Aqui então [indica o traço que ele fez] tem que ser 6[centímetros], e esse que você fez [se referindo ao traço da altura] tem que ser 9.

[A27] **Júlia:** Mas o telefone tá assim. [Pega o celular e coloca na horizontal com a frente virada para cima]

[A28] **Davi:** Não, ele tá assim. [Davi pega o celular e o coloca sobre a mesa, com a frente para si] Júlia, aqui já é o fundo dela! [da caixa] Coloca 6 aí.

[Júlia gesticula negativamente com a cabeça, mostrando não compreender]

[A29] **Júlia:** Não era 9? [centímetros]

[A30] **Davi:** É, mas essa parte aqui [indica com o lápis a profundidade da caixa] é onde coloca o foninho e o carregador.

[A31] **Júlia:** Ah, tá. Dá na mesma. Pode ser.

Vídeo gravado em 24/06/2019 - 09:14:22 – 09:15:07

No diálogo estabelecido entre Júlia e Davi, em [A22] e [A24] Davi procura comunicar uma *imagem pictórica* a Júlia por meio de *imagens cinestésicas*, o que corresponde à fase “*O que ele vê?*”. Júlia, que estava tendo outra *imagem pictórica* que Davi, procura comunicá-la ao colega, em [A25], por meio de uma *imagem cinestésica*. Em seguida, os alunos utilizam mais *imagens cinestésicas* para tentar entrar em acordo sobre as dimensões da embalagem secundária, em [A26], [A27]. [A28] e [A30]. Nesses trechos, Júlia e Davi apresentam diferentes *percepções de relações espaciais* entre as dimensões da embalagem secundária que estão visualizando e o esboço dessas, além de *percepção de relações espaciais* entre a posição do celular e a posição da embalagem secundária, passando pela fase “*O que ele percebe?*”. Só depois, em [A31], Júlia percebe que as dimensões da embalagem secundária são independentes da posição do celular e de seu esboço, apresentando *discriminação visual*, o que indica que ela alcançou a fase “*O que ele conclui?*”.

Essa terceira etapa da visualização não é sempre necessária, pois nem todas as atividades que envolvem visualização requerem que os alunos identifiquem semelhanças ou diferenças entre entes geométricos.

Compreendo então a visualização como esse processo que ocorre em três etapas, e ressalto que essas etapas não sejam sequenciais nem aconteçam uma única vez em cada atividade. Ao chegar no segundo momento, *o que ele percebe?*, os alunos muitas vezes voltam à primeira etapa, vendo novas imagens mentais pictóricas, cinestésicas ou dinâmicas, e partem dessas imagens para a segunda etapa e assim por diante.

Acredito que certos componentes só são possíveis de serem manifestados uma vez que outros componentes tenham se manifestado em um momento anterior. Dessa forma, os componentes *percepção figura-fundo*, *percepção de posições espaciais* e *percepção de relações espaciais* podem acontecer apenas após os alunos terem tido algum tipo de imagem

mental para interpretar, ou seja, apenas após a ocorrência das *imagens pictóricas, dinâmicas e cinestésicas*. A *discriminação visual* e a *constância perceptiva*, por se tratarem de conclusões que os alunos tiram do que visualizaram, só ocorrem após eles terem passado pelos componentes de interpretação, no momento “*O que ele percebe?*”.

Outra observação que faço a respeito dos componentes da visualização é que as atividades que envolvem trabalho em grupo, como as atividades de Modelagem, promovem maior ocorrência das *imagens cinestésicas*, pois essas se mostraram muito presentes quando os alunos tentaram comunicar imagens mentais aos colegas.

Por fim, defendo atividades que envolvam elaboração de embalagens ou outras que requeiram criação de sólidos geométricos como uma boa alternativa para trabalhar a visualização geométrica, pois aproveitam os conhecimentos prévios dos alunos, que são fatores que influenciam na formação das imagens mentais.

Em relação à visualização geométrica, por meio da revisão de literatura percebi que muitos trabalhos buscam identificar se ela ocorre de forma adequada ou não, ou quais são os componentes que constituem essa habilidade mental. Além de analisar essa ocorrência ou não da visualização geométrica, acredito que novas pesquisas sobre visualização geométrica possam ser feitas com o intuito de estudá-la como um processo composto por etapas, quais dificuldades os alunos apresentam em cada uma dessas etapas e como essas podem ser trabalhadas.

Acho relevante, para além das considerações a respeito da pesquisa, ressaltar também alguns aspectos relativos à minha relação de professora-pesquisadora durante a realização do trabalho. Apesar de a atividade de Modelagem ter ocorrido de maneira fluida e frutífera para a produção de dados para a pesquisa, houveram alguns percalços, como a obtenção da assinatura dos termos de consentimento dos responsáveis pelos alunos, como mencionado na seção 4. Antes mesmo da pesquisa de campo, levei cinco meses para conseguir a aprovação do Comitê de Ética em Pesquisa da UFMG, o que foi um tempo considerável dentro do mestrado. Esses aspectos burocráticos da pesquisa devem ser levados em consideração por futuros pesquisadores que queiram investigar situações de sala de aula, principalmente com alunos menores de idade. Sugiro que procurem se informar sobre todos os riscos que sua pesquisa possui e como minimizá-los, e também quais são os termos e autorizações que devem providenciar antes mesmo de submeterem o projeto a qualquer comitê de ética.

Além disso, a sala de aula possui desafios que nós, professores, já conhecemos bem: indisciplina, conversas paralelas, interrupção das aulas por motivos relacionados à dinâmica de

funcionamento da escola, problemas de relacionamento entre alunos, etc. Tudo isso fez parte da realidade da minha sala de aula em 2019 e, conseqüentemente, da minha pesquisa.

Apesar disso, a pesquisa realizada e relatada nesta dissertação mudou minha visão a respeito da relação existente entre pesquisa e sala de aula. Até mesmo durante o mestrado, eu sentia que existia certo distanciamento entre o que se é pesquisado e a realidade da sala de aula de muitos professores no Brasil. Eu me perguntava como aquelas pesquisas poderiam ajudar a promover um ensino melhor. Durante a pesquisa, vi com meus próprios olhos a importância da pesquisa para a sala de aula. Ela permite evidenciar características do ensino, dos alunos e da dinâmica das aulas que não se mostraram, ao menos para mim, durante as aulas de Matemática. O envolvimento dos alunos, e o interesse deles em contribuir para algo maior deu gosto de ser professora-pesquisadora nas semanas em que realizei a atividade de Modelagem.

Hoje entendo que pesquisa e sala de aula andam juntas, e que ser professor-pesquisador não deve ser algo difícil, mas necessário para procurar promover melhorias no ensino. Que nunca percamos a vontade de lecionar, nem a de pesquisar.

REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, J. de L. Cálculo, tecnologias e modelagem matemática: as discussões dos alunos. 2002. 173f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. 2002.
- _____. Toward a framework for a dialectical relationship between pedagogical practice and research. In: STILLMAN, G.; BROWN, J. (Eds.) **Lines of inquiry in mathematical modelling research in education**. Chennai: Springer International Publishing, 2019. p. 21-36.
- _____. Uma abordagem Sócio-Crítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. **Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 2, n. 2, p. 55-68, 2009.
- _____. Relação entre matemática e realidade em algumas perspectivas de modelagem matemática na educação matemática. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. de L. (Orgs.) **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais**. Recife: SBEM. p. 17-32. 2007.
- _____. Brazilian Research on modelling in mathematics education. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, v. 42, p. 337-348. 2010.
- ARCAVI, A. The role of visual representation in the learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, n. 52, p. 215-241, 2003.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.
- BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática e os professores: a questão da formação. **Bolema**, Rio Claro, n. 15, p. 5-23, 2001.
- _____. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? **Veritati**, n. 4, p. 73- 80, 2004.
- _____. Mathematical Modelling in classroom: a sócio-critical and discursive perspective. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, v. 38, n. 3, p.293-301, 2006.
Disponível em: < <http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm063a8.pdf>>. Acesso em: 10 abril 2018.
- _____. A prática dos alunos no ambiente de modelagem matemática: o esboço de um framework. In: BARBOSA, J.C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. de L. (Orgs.) **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais**. Recife: SBEM. p. 161-174. 2007.
- BATTISTA, M. The development of geometric and spatial thinking. In: LESTER JR, F. (Ed.). **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics**, Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc., p. 843-909, 2007.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem Matemática & Implicações no Ensino e na Aprendizagem de Matemática**. 2ª ed. Blumenau:Edfurb, 2004.

_____. 30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das Propostas primeiras às propostas atuais. Alexandria - **Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 2, p. 7-32, 2009.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. Modelagem matemática no ensino. 4. ed. São Paulo: **Contexto**, 2005. 127p.

BITENCOURT, O. B. **O uso da modelagem matemática como recurso pedagógico no estudo de áreas de figuras espaciais**. 2017. 22f. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade do Estado do Amazonas, Centro de Estudos Superiores de Parintins, Parintins, 2017.

BLANCO, T. F.; GODINO, J. D.; PEGITO, J. A. C. Razonamiento Geométrico y Visualización Espacial desde el Punto de Vista Ontosemiótico. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 26, n. 42A, p. 39-63, abril 2012.

BLUM, W. et al. Modelling and Applications in Mathematics Education. **Springer**: New York, 2007.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Ed., 1991, 336p. (Coleção ciência da educação; 12).

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. v. 39, New: **Springer**, 2005.

BORROMEO FERRI, R. Modelling problems from a cognitive perspective. In: HAINES, C.; GALBRAITH, P.; BLUM, W.; KHAN, S. (Eds.). **Mathematical modelling: education, engineering and economics**. Chichester: Horwood Publishing Limited, 2007. p. 260 –270.

BORSOI, C. **Geogebra 3D no ensino médio: uma possibilidade para a aprendizagem da geometria espacial**. 2016. 159f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, 2016.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental Brasília, 1998.

BRAZ, L. H. C.; SILVA, M. A. A. Geometria espacial no ensino médio: investigação sobre as dificuldades no ensino-aprendizagem. In: Congresso Internacional de Ensino da Matemática (CIEM), 7., 2017, Canoas – RS. **Anais...** ULBRA (Universidade Luterana do Brasil): Canoas, 2017. Disponível em: <<http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vii/paper/viewFile/7559/3692>>. Acesso em: 15 nov. 2017.

BURAK, D.. **Modelagem Matemática: Ações e Interações no Processo de ensino aprendizagem**. Campinas, 1992. 329f. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992.

_____. Modelagem matemática e a sala de aula. In: Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática, 1, 2004, Londrina, **Anais...** Londrina: [S.I.], 2004.

CASSELMAN, B. Pictures and proofs. **Notices of the MAS**, n. 47, p. 1257-1266, 2000.

CATALÁ, C. A.; FLAMARICH, C. B.; AYMEMMI, J. M. F. **Invitación a la Didáctica de la Geometría**. Madrid: Editorial Síntesis. 1995.

CONNECTINGSTEM. Disponível em: <
https://connectingstem.org/connectingstem_v2/?cat=assessments>. Acesso em: jun. 2019.

COSTA, S. C. **Modelação Matemática e Geometria Espacial**: o ensino de prismas retos a partir da construção de embalagens. 2016. 52f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências Aplicadas e Educação, Rio Tinto (PB), 2016.

COUTO, M. E. S. **A elaboração da entrevista na pesquisa em educação**. 2011. Disponível em: <<http://nead.uesc.br/arquivos/pedagogia/seminario-integrador3/ENTREVISTA-NA-PESQUISA-EM-EDUCACAO.pdf>>. Acesso em: 15 jul. 2018.

COZZOLINO, A. M. **O ensino da perspectiva usando o Cabri 3d**: uma experiência com alunos do ensino médio. 2008. 192f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

FERNANDES, E. A. **Geometria, modelagem e código de barras na construção de luminárias**. 2013. 84f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Universidade de São Carlos, São Carlos, 2013.

FISCHBEIN, E. The theory of figural concepts. **Educational Studies in Mathematics**, n. 24, p. 139-162, 1993.

FLORES, C. R. Iconografia Militar e Práticas do Olhar: ressonâncias na visualização matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 26, n. 42A, p. 87-103, abril 2012.

GAL, H.; LINCHEVSKI, L. To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. **Educational Studies Mathematics**, Netherlands, v. 74, n. 2, p. 163-183, jun. 2010.

GRAVINA, M. A.; CONTIERO, L. O. Modelagem com o GeoGebra: uma possibilidade para a educação interdisciplinar?. **Novas Tecnologias na Educação**, v. 9, n. 1, p. 1-10, jul. 2011.

GUTIÉRREZ, A. Visualisation in 3-dimensional geometry: In search of a framework, In: Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 20., 1996, Valencia. **Proceedings...** Valencia, Universidad de Valencia, 1996. p. 3-19, 1996.

HERSHKOWITZ, R. Visualization in geometry - two sides of a coin. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, n. 11, p. 61-76, 1989.

IMENES, L. M. A geometria no primeiro grau: experimental ou dedutiva? **Revista de Ensino de Ciências**, n. 19, p. 55-61, out. 1987.

KAISER, G.; SIRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **ZDM**, v. 38, n. 3, p. 302-310, 2006.

KALEFF, A. M.; REI, D. M.; GARCIA, S. S. Como adultos interpretam desenhos e calculam volumes de sólidos construídos por pequenos cubos. **Zetetiké**, Campinas (SP), v. 4, p. 135-152, jul./dez. 1996.

KLUBER, T. E.; BURAK, D. Concepções de modelagem matemática: contribuições teóricas. **Educ. Mat. Pesqui.**, São Paulo, v.10, n.1, pp. 17-34, 2008.

KRUTETSKII, V. A. **The psychology of mathematical abilities in schoolchildren**. Chicago: The University of Chicago, 1976.

LIMA, F. H. de. Um método de transcrição e análise de vídeos: a evolução de uma estratégia. **VII Emem**, out. 2015.

LOBO, J. S.; BAYER, A. The Teaching of Geometry in Primary Schools. **Acta Scientiae**, Canoas, v.6, n.1, p. 19-26. 2004.

MARTINATTO, M. A.; MENEGHETTI, C. M. S.; SPEROTTO, F. A. Atividades e problemas de geometria espacial para o ensino médio. **Ciência e Natura**, v. 37, n. 3, p. 254-264, 2015. Disponível em: < <http://www.redalyc.org/pdf/4675/467547643021.pdf>>. Acesso em: 29 jun. 2018.

MATTEI, F. **A modelagem como ferramenta para a construção de conhecimentos matemáticos**. 2012. 100f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Centro Universitário UNIVATES, Lajeado, 2012. Disponível em: < <https://www.univates.br/bdu/bitstream/10737/272/1/FabianaMattei.pdf>>. Acesso em: 10 abril 2018.

MCCORMICK, B. H. et al.. Visualization in Scientific Computing, **ACM SIGGRAPH**, v. 21, nº 6. 1987.

MELLO, L. J. P.; FIOREZE, L. A. Geometria espacial e as embalagens de leite: uma experiência com modelagem no ensino médio. – ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., São Paulo, p. 1-9, 2016.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo? **Pro-Posições**, v.3, n.1, p. 39-54. 1992.

MOTA, J. F.; LAUDARES, J. B. Um estudo de planos, cilindros e quádricas, na perspectiva da habilidade de visualização, com o software Winplot. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 27, n. 46, p. 497-512. ago. 2013.

NACARATO, A. M.; PASSOS, C. L. B. **A geometria nas séries iniciais**: uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores. São Carlos: EdUFSCar, 2003.

NÉMETH, B. Measurement of the development of spatial ability by Mental Cutting Test. **Annales Mathematicae et Informaticae**, n. 34, p. 123-128, 2007.

OLIVEIRA, D. M. S. **A Modelagem e o Geogebra: sua eficiência e eficácia no ensino da Geometria Espacial**. 2016. 21f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de São João Del Rei, São João Del Rei (MG), 2016.

OLIVEIRA, E. C. S. **Modelagem matemática: uma alternativa pedagógica para o ensino da geometria**. 2013. 40f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Plano Nacional de Formação de Professores do Ensino Básico, Cruz das Almas, 2013.

PAIS, L. C. Intuição, experiência e teoria geométrica. **Zetetiké**, Campinas, SP, v. 4, n. 6, p. 65-74, jul/dez, 1996.

PAIVA, M. R. **Matemática (2º grau)**. v. 2. São Paulo: Moderna, 1995.

PALLES, C. M. **Um estudo do icosaedro a partir da visualização em geometria dinâmica**. 2013. 74f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontífca Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

PALLES, C. M.; SILVA, M. J. F. Visualização em geometria dinâmica. – ENCONTRO DE PRODUÇÃO DISCENTE PUCSP/CRUZEIRO DO SUL. Cruzeiro do Sul (SP), p. 1-9, 2012.

PARZYSZ, B. “Knowing” vs “seeing”: problems of the plane representation of space geometry figures. **Educational Studies in Mathematics**, n. 19, p. 79-92, 1988.

PEREIRA, L. D. **Projetos de modelagem matemática no ensino para a aprendizagem de geometria espacial no 2º ano do ensino médio**. 2017. 124f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2017.

POWELL; A. B.; FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento de ideias e raciocínios matemáticos de estudantes. **Bolema**, Rio Claro, SP. v. 17, n. 21, p. 81-140, mai. 2004.

PRESMEG, N. C. Visualization in high school mathematics. **For the Learning of Mathematics**, Montreal, v. 6, n. 3, p. 42-46, nov. 1986.

RITTER, A. M. **A visualização no ensino de geometria espacial: possibilidades com o software calques 3D**. 2011. 143f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011. Disponível em: <
<http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/32385>>. Acesso em: 02 mai 2018.

RIVERA, F. **Toward a visually-oriented school mathematics curriculum**. New York: Springer. 2011.

RODRIGUES, J. D. **Construção civil e relações geométricas: um caminho para aprender e ensinar matemática?** 2013. 203f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) (Campus Sorocaba), Sorocaba, 2013.

Disponível em: <

<https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/4451/5697.pdf?sequence=1&isAllowed=y>>. Acesso em: 2 mai. 2018.

SILVA, M. B. **A geometria espacial no ensino médio a partir da atividade *webquest*: análise de uma experiência.** 2006. 127f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2006. Disponível em: <<https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11091>>. Acesso em: 10 abril 2018.

SIMAN, M. As embalagens como alternativa para o estudo de conceitos de geometria euclidiana. 2012. 29f. In: SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO ESTADO DO PARANÁ. **O professor PDE e os desafios da escola pública paranaense.** v. 1. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2010/2010_fecilcam_mat_artigo_marines_siman.pdf>. Acesso em: 15 jun. 2018.

SKOVSMOSE, O. Cenários para Investigação. **Bolema.** Ano 13 ,n. 14, p. 66 a 91, 2000.

SOUZA, G. M. F. **Uso do Geogebra 3D no ensino de geometria espacial.** 2017. 54f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2017.

SOUZA, L. A. **Uma proposta para o ensino de geometria espacial usando o Geogebra 3D.** 2014. 79f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande (PB), 2014.

SOUZA JÚNIOR, J. C.; CARDOSO, A.; CALIXTO, R. A. Geogebra 3D: uma ferramenta para estudo de volumes no ensino médio. **Revista da Universidade do Vale do Rio Verde, Três Corações,** v. 12, n. 1, p. 755-764, jan./jul. 2014.

TARTRE, L. A. Spatial Orientation Skill and Mathematical Problem Solving. **Journal for Research in Mathematics Education,** Reston, v. 21, n. 3, p. 216-229, May. 1990.

TENTOMAS, P. C. **Creation and assessment of a ten-day spatial transformation intervention in a secondary school geometry class.** 2010. 151f. Tese (Doutorado em Educação) – Columbia University, Teachers College, Nova York, 2010.

YAKIMANSKAYA, I. S. **The development of spatial thinking in schoolchildren.** Reston: Soviet Studies in Mathematics Education, v. 3, 1991.

WIELEWSKI, G. D. **O movimento da matemática moderna e a formação de grupos de professores de matemática no Brasil.** 2008. Disponível em: <http://www.apm.pt/files/_Co_Wielewski_4867d3f1d955d.pdf>. Acesso em: set. 2019.

ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. (Ed.). **Visualization in teaching and learning Mathematics.** Mathematical Association of America (MAA Notes), 1991.

ZUKAUSKAS, N. Z. T. **Modelação matemática no ensino fundamental: Motivação dos estudantes em aprender geometria.** 2012. 189f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

APÊNDICE A

Tópicos para entrevista com o *designer* de embalagens

- Como é a profissão de *designer* de produto? Me fale um pouco a respeito do dia a dia dessa profissão, de como você se envolveu com ela.
- Como é o processo de criação do *design* de uma embalagem? Quais são as etapas desse processo de criação?
- Quais fatores são importantes ter em mente ao se elaborar um protótipo de embalagem? Custo, estética, armazenamento, outros?

APÊNDICE B

ROTEIRO DO ALUNO

Instruções:

Esta atividade tem o objetivo de desenvolver um projeto de embalagem para um produto. O desenvolvimento deste projeto ocorrerá por meio de esboços e da construção de um protótipo de cartolina. Seguem as etapas de desenvolvimento do projeto:

1ª ETAPA: Escolha do produto

Cada grupo deve escolher um produto para criar o projeto de embalagem. Não há limites para esta escolha, podendo ser, por exemplo: um alimento, uma substância, um objeto, etc. Caso o grupo não consiga pensar em um produto para o qual desejam criar uma embalagem, a pesquisadora irá sugerir um.

PRODUTO ESCOLHIDO: _____

2ª ETAPA: Definir quantas camadas de embalagem esse produto precisará

Nessa atividade, iremos criar todas as embalagens que o produto precisa ter, do momento em que é fabricado até o momento em que o consumidor o utilizará.

Ao criar a embalagem de um perfume, por exemplo, precisamos criar: o frasco do perfume, a caixinha na qual será colocado esse frasco e a caixa maior na qual as caixas de perfume serão transportadas nos caminhões.

Nesse caso, o frasco do perfume é a *embalagem primária*.

A caixinha na qual o frasco é colocado é a *embalagem secundária*.

A caixa maior onde irão ser armazenadas as caixas de perfume é a *embalagem terciária*.

Dependendo do produto, poderão ser necessárias mais ou menos camadas de embalagens. Isto cabe ao seu grupo determinar. Defina com seu grupo quantas camadas de embalagens serão necessárias para o produto que escolheram, e quais serão essas camadas.

QUANTIDADE DE CAMADAS DE EMBALAGENS: _____

EMBALAGEM PRIMÁRIA: _____

EMBALAGEM SECUNDÁRIA: _____

EMBALAGEM TERCIÁRIA: _____

OUTRAS CAMADAS (Preencha apenas se necessário):

3ª ETAPA: CRIAÇÃO DAS PRIMEIRAS CAMADAS DE EMBALAGENS

Nesta etapa, seu grupo deve elaborar os projetos das camadas de embalagens, exceto a última camada, que é aquela que será utilizada para transportar o produto em caminhões. Por exemplo, se seu produto tiver embalagens primária e secundária, sendo a secundária as caixas maiores que serão transportadas nos caminhões, nesta etapa vocês devem elaborar apenas a embalagem primária. Se seu produto possui embalagens primária, secundária e terciária, nesta etapa vocês devem elaborar apenas as embalagens primária e secundária.

Mãos à obra!

Chegou a hora de criarem as camadas de embalagens, uma de cada vez. Discuta com seu grupo o formato que as embalagens terão, de que material serão feitas e quais serão suas medidas. Não se esqueça de que o produto deve caber dentro delas, sem deformá-las. Nesta etapa, os projetos de embalagens deverão ser criados por meio de esboços. Façam quantos desenhos forem necessários, troquem ideias, mudem de ideia no meio do caminho, se quiserem. Os esboços não precisam ser perfeitos, devem apenas explicar o formato das embalagens. Juntamente com os esboços, escreva as medidas das embalagens e os materiais de que serão feitas.

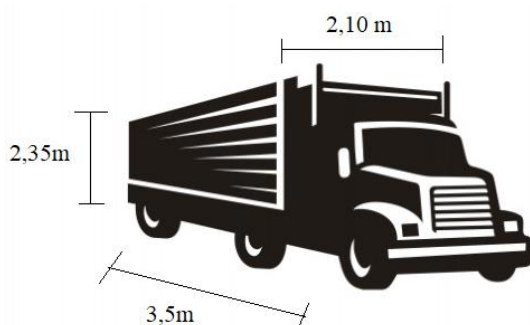
Ao elaborar os esboços, devem levar em consideração as mesmas coisas que um *designer* de produto considera, que são:

- *Desmaterialização*: As embalagens devem evitar o desperdício de material. Evitar este desperdício faz com que os custos de produção e transporte sejam menores e também fazem com que aquela embalagem cause menos poluição ambiental.
- *Reutilização*: Se possível, crie embalagens que possam ser reutilizadas para outros propósitos, para evitar que sejam descartadas na natureza.
- *Afeto*: Tente criar uma embalagem que faça com que o consumidor crie certo afeto por ela, fazendo com que ele deseje a reutilizar. A reutilização evita o descarte de embalagens, diminuindo a poluição.
- *Formato inteligente*: Tente criar uma embalagem que permita que o consumidor utilize todo o produto, sem que nenhuma parte dele fique preso na embalagem (se este for um caso possível para seu produto).
- *Impacto humano*: Procure pensar em todas as pessoas que terão contato com esta embalagem, desde o vendedor, consumidor e, se for uma embalagem feita de material reciclável, os profissionais que trabalham com reciclagem. Esta embalagem pode causar danos para estas pessoas?

4ª ETAPA: CRIAÇÃO DA CAMADA FINAL DE EMBALAGEM

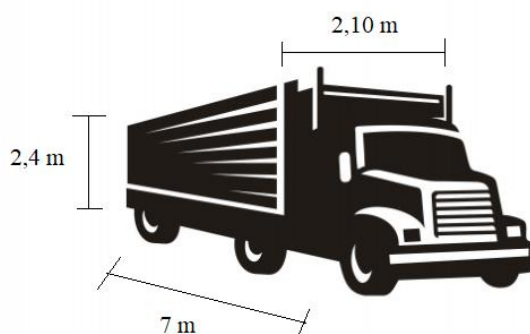
Chegou a hora de pensar na última camada de embalagem de seu produto: aquela que irá ser colocada em caminhões para o transporte. Faça esboços dessa camada de embalagem, indique seu material, tamanho e, por fim, em qual tipo de caminhão esta embalagem será transportada:

- Caminhão $\frac{3}{4}$:



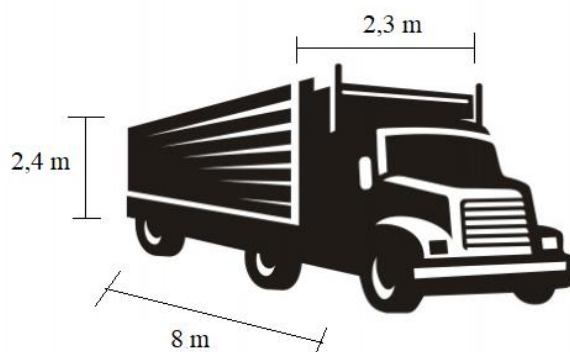
Preço por km rodado: R\$ 2,00

- Caminhão Toco:



Preço por km rodado: R\$ 2,40

- Caminhão Truck



Preço por km rodado: R\$ 2,70

CAMINHÃO ESCOLHIDO: _____

5ª ETAPA: CONSTRUÇÃO DO PROTÓTIPO DA EMBALAGEM PRIMÁRIA

Nesta etapa seu grupo deve construir um protótipo da embalagem primária de seu produto. Importante! Não é preciso construir com o material exato com que a embalagem foi planejada, é apenas um protótipo para verificarmos se o produto cabe na embalagem criada. Este protótipo pode ser feito de papel, cartolina, papelão, plástico ou qualquer outro material que o grupo desejar. Assim que construído, devem verificar se o produto coube na embalagem. Se sim, perfeito! Se não coube, respondam à pergunta seguinte:

O QUE PODERIA SER ALTERADO EM SUA EMBALAGEM PARA QUE O PRODUTO CAIBA NA MESMA?

Muito obrigada por sua participação!

ANEXO 1**Universidade Federal de Minas Gerais****Faculdade de Educação****Programa de Pós-Graduação em Educação: Conhecimento e Inclusão Social – 2018****Projeto de Pesquisa:** Visualização geométrica em um ambiente de Modelagem Matemática**Pesquisadora:** Marina Andrade Alves da Silva**Pesquisadora responsável:** Prof. Dra. Jussara de Loiola Araújo**TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO****Prezado(a) Responsável**

Seu(sua) filho(a) está sendo convidado(a) a participar da pesquisa “Visualização geométrica em um ambiente de Modelagem Matemática” que tem, como objetivo geral, investigar como se dá a visualização de sólidos geométricos de alunos da educação básica em um ambiente de Modelagem Matemática.

A participação dele(a) na pesquisa ocorrerá através de uma atividade de Modelagem Matemática envolvendo a elaboração de um protótipo de embalagem por meio de desenhos, simulando o trabalho de um profissional *designer* de embalagens. A atividade será desenvolvida durante o 1º semestre letivo de 2019, no ambiente da escola, em horário extraclasse a ser combinado com os participantes da pesquisa. Nesses encontros, os alunos aprenderão um pouco a respeito do trabalho do *designer* de embalagens e devem, em grupos, elaborar um protótipo de embalagem por meio de desenhos e anotações.

Para realizar a pesquisa, pretendo: 1) filmar o desenvolvimento da atividade de Modelagem realizada com os alunos voluntários; 2) gravar o áudio dos diálogos dos alunos durante a atividade de Modelagem; 3) ter acesso aos materiais feitos pelos alunos durante a atividade de Modelagem – esboços de embalagens e demais registros feitos em papel.

O risco envolvido nessa pesquisa é constrangimento por parte dos alunos ao realizarem a atividade de Modelagem Matemática, por envolver trabalho em grupo e exposição de trabalho para os colegas.

A pesquisa contribuirá para que seu(sua) filho(a) conheça a aplicação de conhecimentos matemáticos – no caso, os conteúdos de geometria espacial – no dia-a-dia de uma profissão, a de *designer* de embalagens.

A participação no desenvolvimento desta pesquisa é totalmente voluntária e não terá nenhum custo. Seu(sua) filho(a) não receberá vantagem financeira por participar da pesquisa e poderá escolher, a qualquer momento, desistir de participar da mesma.

O Sr. (a) terá o esclarecimento sobre o estudo em qualquer aspecto que desejar e estará livre para autorizar ou recusar a participação de seu(sua) filho(a).

Peço sua autorização para: 1) gravar em vídeo o desenvolvimento da atividade de Modelagem; 2) gravar em áudio os diálogos de seu(sua) filho(a) durante a atividade de Modelagem; 3) ter acesso ao material produzido por seu(sua) filho(a) durante a atividade de Modelagem.

Rubrica da pesquisadora responsável: _____

Rubrica da pesquisadora (mestranda): _____

Rubrica do responsável: _____

Os resultados da pesquisa serão divulgados na Dissertação de Mestrado da pesquisadora e sob a forma de trabalhos científicos que visam colaborar para a compreensão do processo de aprendizagem da geometria. Estes resultados estarão à sua disposição quando finalizada a pesquisa.

Este termo de consentimento encontra-se impresso em duas vias originais, sendo que uma será arquivada pela pesquisadora responsável, por um período de 5 (cinco) anos, na sala 4085 do Departamento de Matemática, no Instituto de Ciências Exatas da UFMG e a outra será fornecida ao Sr. (a). As pesquisadoras tratarão a identidade de seu(sua) filho(a) com padrões profissionais de sigilo, atendendo a legislação brasileira (Resoluções N° 466/12; 441/11 e a Portaria 2.201 do Conselho Nacional de Saúde e suas complementares), utilizando as informações somente para fins acadêmicos e científicos.

Para ser preenchido pelo(a) Responsável do(a) Aluno(a)

Eu, _____, portador do documento de Identidade _____ fui informado (a) dos objetivos, métodos, riscos e benefícios da pesquisa “**Visualização geométrica em um ambiente de Modelagem Matemática**”, de maneira clara e detalhada e esclareci minhas dúvidas e declaro que compreendi o papel da colaboração do(a) aluno(a) _____ para o desenvolvimento da pesquisa. Sei que a qualquer momento poderei solicitar novas informações e modificar minha decisão de participar se assim o desejar.

Declaro que autorizo o(a) aluno(a) _____ a participar desta pesquisa. Recebi uma via original deste termo de consentimento livre e esclarecido assinado por mim e pelo pesquisador, que me deu a oportunidade de ler e esclarecer todas as minhas dúvidas.

Nome completo do responsável

Data

Assinatura do responsável

Nome completo do Pesquisador Responsável: Prof. Dra. Jussara de Loiola Araújo

Endereço: Departamento de Matemática, Sala 4085, Instituto de Ciências Exatas – UFMG

Av. Presidente Antônio Carlos, 6627. Pampulha, Belo Horizonte, MG

CEP: 31.270-901 / Belo Horizonte – MG

Telefones: (31) 3409-5786

E-mail: jussara.loiola@gmail.com

Assinatura do pesquisador responsável

Data

Nome completo do Pesquisador: Marina Andrade Alves da Silva

Endereço: Rua Felício Brandi, 56. Bloco 5, apartamento 301. Bandeirantes.

CEP: 31340-335 / Belo Horizonte – MG

Telefones: (37) 99855-7521

E-mail: marinaandrade206@gmail.com

Assinatura do pesquisador (mestrando ou doutorando)

Data

Em caso de dúvidas, com respeito aos aspectos éticos desta pesquisa, você poderá consultar:

COEP-UFMG - Comissão de Ética em Pesquisa da UFMG

Av. Antônio Carlos, 6627. Unidade Administrativa II - 2º andar - Sala 2005.

Campus Pampulha. Belo Horizonte, MG – Brasil. CEP: 31270-901.

E-mail: coep@prpq.ufmg.br. Tel: 34094592.

ANEXO 2

Universidade Federal de Minas Gerais

Faculdade de Educação

Programa de Pós-Graduação em Educação: Conhecimento e Inclusão Social – 2018

Projeto de Pesquisa: Visualização geométrica em um ambiente de Modelagem Matemática

Pesquisadora: Marina Andrade Alves da Silva

Pesquisadora responsável: Prof. Dra. Jussara de Loiola Araújo

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado(a) Aluno(a)

Você está sendo convidado(a) a participar da pesquisa “Visualização de sólidos geométricos em um ambiente de Modelagem Matemática”, que tem como objetivo geral, investigar como se dá a visualização de sólidos geométricos de alunos da educação básica em um ambiente de Modelagem Matemática.

Sua participação na pesquisa ocorrerá através de uma atividade de Modelagem Matemática envolvendo a elaboração de um protótipo de embalagem por meio de desenhos, simulando o trabalho de um profissional *designer* de embalagens. A atividade será desenvolvida durante o 1º semestre letivo de 2019, no ambiente da escola, em horário extraclasse a ser combinado com os participantes da pesquisa. Nesses encontros, você aprenderá um pouco a respeito do trabalho do *designer* de embalagens e deve, em grupos, elaborar um protótipo de embalagem por meio de desenhos e anotações.

Para realizar a pesquisa, pretendo: 1) filmar o desenvolvimento da atividade de Modelagem realizada com os alunos voluntários; 2) gravar o áudio dos diálogos dos alunos durante a atividade de Modelagem; 3) ter acesso aos materiais feitos pelos alunos durante a atividade de Modelagem – esboços de embalagens e demais registros feitos em papel.

O risco envolvido nessa pesquisa é constrangimento ao realizar a atividade de Modelagem Matemática, por envolver trabalho em grupo e exposição de trabalho para os colegas. Para minimizar este risco, apenas os alunos que se sentirem confortáveis ficarão encarregados de fazer a exposição do trabalho do grupo para os demais alunos.

A pesquisa contribuirá para que você conheça a aplicação de conhecimentos matemáticos – no caso, os conteúdos de geometria espacial – no dia-a-dia de uma profissão, a de *designer* de embalagens.

A participação no desenvolvimento desta pesquisa é totalmente voluntária e não terá nenhum custo. Você não receberá vantagem financeira por participar da pesquisa e poderá escolher, a qualquer momento, desistir de participar da mesma.

Você terá o esclarecimento sobre o estudo em qualquer aspecto que desejar e estará livre para autorizar ou recusar a participação na pesquisa.

Peço sua autorização para: 1) gravar em vídeo o desenvolvimento da atividade de Modelagem; 2) gravar em áudio os diálogos que ocorrerem durante a atividade de Modelagem

Rubrica da pesquisadora responsável: _____

Rubrica da pesquisadora (mestranda): _____

Rubrica do participante: _____

3) ter acesso ao material produzido por você durante a atividade de Modelagem.

Os resultados da pesquisa serão divulgados na Dissertação de Mestrado do pesquisador e sob a forma de trabalhos científicos que visam colaborar para a compreensão do processo de aprendizagem da geometria. Estes resultados estarão à sua disposição quando finalizada a pesquisa.

Este termo de consentimento encontra-se impresso em duas vias originais, sendo que uma será arquivada pela pesquisadora responsável, por um período de 5 (cinco) anos, na sala 4085 do Departamento de Matemática, no Instituto de Ciências Exatas da UFMG e a outra será fornecida ao Sr. (a). As pesquisadoras tratarão sua identidade com padrões profissionais de sigilo, atendendo a legislação brasileira (Resoluções N° 466/12; 441/11 e a Portaria 2.201 do Conselho Nacional de Saúde e suas complementares), utilizando as informações somente para fins acadêmicos e científicos.

Para ser preenchido pelo(a) Aluno(a)

Eu, _____, portador do documento de Identidade _____ fui informado (a) dos objetivos, métodos, riscos e benefícios da pesquisa “**Visualização geométrica em um ambiente de Modelagem Matemática**”, de maneira clara e detalhada e esclareci minhas dúvidas e declaro que compreendi o papel da minha colaboração para o desenvolvimento da pesquisa. Sei que a qualquer momento poderei solicitar novas informações e modificar minha decisão de participar se assim o desejar.

Declaro que concordo em participar desta pesquisa. Recebi uma via original deste termo de consentimento livre e esclarecido assinado por mim e pelo pesquisador, que me deu a oportunidade de ler e esclarecer todas as minhas dúvidas.

Nome completo do(a) aluno(a)

Data

Assinatura do(a) aluno(a)

Nome completo do Pesquisador Responsável: Prof. Dra. Jussara de Loiola Araújo

Endereço: Departamento de Matemática, Sala 4085, Instituto de Ciências Exatas – UFMG

Av. Presidente Antônio Carlos, 6627. Pampulha, Belo Horizonte, MG

CEP: 31.270-901 / Belo Horizonte – MG

Telefones: (31) 3409-5786

E-mail: jussara.loiola@gmail.com

Assinatura do pesquisador responsável

Data

Nome completo do Pesquisador: Marina Andrade Alves da Silva

Endereço: Rua Felício Brandi, 56. Bloco 5, apartamento 301. Bandeirantes.

CEP: 31340-335 / Belo Horizonte – MG

Telefones: (37) 99855-7521

E-mail: marinaandrade206@gmail.com

Assinatura do pesquisador (mestrando ou doutorando)

Data

Em caso de dúvidas, com respeito aos aspectos éticos desta pesquisa, você poderá consultar:

COEP-UFMG - Comissão de Ética em Pesquisa da UFMG

Av. Antônio Carlos, 6627. Unidade Administrativa II - 2º andar - Sala 2005.

Campus Pampulha. Belo Horizonte, MG – Brasil. CEP: 31270-901.

E-mail: coep@prpq.ufmg.br. Tel: 34094592.