

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Emerson Lech Taipe Huamani

Esquema de Hilbert para três pontos em \mathbb{P}^2 ($\text{HILB}^3 \mathbb{P}^2$)

Belo Horizonte-MG
Março de 2018

Emerson Lech Taipe Huamani

Esquema de Hilbert para três pontos em \mathbb{P}^2 ($\text{HILB}^3 \mathbb{P}^2$)

Versão final

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para obtenção do título de *Mestre em Matemática*.

Orientador: Prof. Dr. Israel Vainsencher

Belo Horizonte-MG
Março 2018

© 2018, Emerson Lech Taípe Huamani.
Todos os direitos reservados

Taípe Huamani, Emerson Lech.

T134e Esquema de Hilbert para três pontos em $P^2(\text{HILB}^3 P^2)$
[manuscrito] / Emerson Lech Taípe Huamani– 2018.
59 f. il.

Orientador: Israel Vainsencher.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais,
Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f.58-59.

1. Matemática – Teses. 2. Seções cônicas – Teses. 3.
Hilbert, Esquema de – Teses. I. Vainsencher, Israel. II.
Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências
Exatas, Departamento de Matemática. IV. Título.

CDU 51 (043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende Costa
CRB 6ª Região nº 1510



Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática



FOLHA DE APROVAÇÃO

Esquema de Hilbert para três pontos em P^2
($HILB^3 P^2$)

EMERSON LECH TAIPE HUAMANI

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores: /

Prof. Israel Vainsencher
UFMG

Prof. André Luis Contiero
UFMG

Prof. Paulo Antônio Fonseca Machado
UFMG

Belo Horizonte, 16 de maio de 2018.

A mis padres Carmen y Melquiades.

Agradecimientos

Ao professor e orientador Israel Vainsencher por todo o incentivo, apoio, amizade e dedicação ao longo desse trabalho e em especial por toda a paciência e os ensinamentos que tem me passado. Tem sido uma honra ter trabalhado com você.

Ao meu grande amor e companheira Daniela, por toda paciência e compreensão nesse período, por todos aqueles dias de trabalho, café e música que compartilhamos.

A minha mãe Carmen cujo exemplo faz me esforçar cada vez mais e continuar em frente toda vez que eu enfraquecia.

Ao meu pai Melquiades com quem eu aprendi a trabalhar e que o trabalho é bom.

Aos amigos que fizeram essa jornada ser ainda mais agradável, em especial par Gilson Granja F. Filho quem se converteu em um co-orientador e um grande amigo.

Aos professores da pós-graduação em matemática da UFMG com os quais eu tive aula, em especial para o professor Bhalchandra Digambar Thatte pela amizade.

Finalmente, o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-Brasil (CAPES)-Código de financiamento 001.

Resumo

Neste trabalho apresentaremos um estudo dos sistemas lineares de 3 cônicas em $S = k[x, y, z]$, também chamados de redes de cônicas. Nosso foco é caracterizar a família das cônicas que passam por três pontos em \mathbb{P}^2 . Tais redes de cônicas são do tipo determinantal, o que significa que provêm dos menores maximais de uma matriz 3×2 cujas entradas são formas lineares. Pretendemos com este estudo de caso relativamente simples, ilustrar as ideias em torno da construção de espaços de parâmetros para famílias de variedades algébricas. Faremos a descrição do lugar, $\mathcal{D} \subset G(3, 6)$, de redes determinantis por equações numa vizinhança coordenada na grassmanniana dos subespaços de dimensão 3 do espaço de cônicas. Mostraremos que \mathcal{D} é não singular e que sua explosão ao longo da órbita da rede $\langle x^2, xy, xz \rangle$ mergulha em $G(7, 10)$ e se identifica a $Hilb^3\mathbb{P}^2$, o desejado espaço para a família de ternas não ordenadas em \mathbb{P}^2 .

Palavras-chave: Redes de cônicas, esquema de Hilbert, polinômio de Hilbert, espaço de parâmetros, grassmanniana de cônicas.

Abstract

In this dissertation we present a study of the linear systems of 3 conics in $S = k[x, y, z]$, also called nets of conics. Our focus is to characterize the family of conics that go through three points in \mathbb{P}^2 . Such nets of conics are of the determinantal type, which means that they come from the maximal minors of a 3×2 matrix whose elements are linear forms. With this relatively simple case study, we intend to illustrate the ideas around the construction of parameter spaces for families of algebraic varieties. We will describe the place, $\mathcal{D} \subset G(3, 6)$, of determinantal nets by equations in a coordinated neighborhood in the grassmannian of the 3-dimensional subspaces of the space of conics. We will show that \mathcal{D} is non singular and that it is the blow-up along the orbit of the net $\langle x^2, xy, xz \rangle$ embedded into $G(7, 10)$ and matches $Hilb^3\mathbb{P}^2$, the desired space for the family of unordered triplets in \mathbb{P}^2 .

Keywords: Nets of conics, Hilbert scheme, Hilbert polynomial, parameters spaces, grassmannian of conics.

Sumário

1	Introdução	9
2	Preliminares	11
2.1	Grassmanniana	11
2.2	Plücker	11
2.3	Redes de Cônicas	12
2.4	Órbitas	12
2.5	Espaço de parâmetros de cônicas	14
2.6	Esquema de Hilbert	14
3	Caracterizando redes de cônicas que passam por três pontos	16
3.1	O problema	16
3.2	Órbitas fechadas	18
	Epílogo	33
	Referências Bibliográficas	59

Capítulo 1

Introdução

É de interesse da geometria algébrica o estudo dos chamados espaços de parâmetros para certas configurações geométricas.

Nesta dissertação focaremos na família dos triângulos de \mathbb{P}^2 . Um triângulo em \mathbb{P}^2 é um subconjunto formado por três pontos não colineares.

A coleção dos triângulos está em bijeção natural com uma subvariedade algébrica localmente fechada $\Delta \subset G(3, 6)$ da Grassmanniana dos subespaços de dimensão 3 do espaço vetorial $S_2 = \langle xy, xz, yz, x^2, y^2, z^2 \rangle$ de dimensão 6 formado pelos polinômios homogêneos de grau 2 (ver seção 3.1).

Cada triângulo é bem determinado por 3 cônicas que passam pelos vértices. Mas em casos degenerados, como quando os vértices estão sobre uma reta, as cônicas não são suficientes para descrever a configuração dos pontos.

Lembremos que cada subesquema fechado $X \subset \mathbb{P}^n$ é definido por um ideal homogêneo $I \subset S := K[x_0, \dots, x_n]$ e que o mais importante invariante discreto de X é seu polinômio de Hilbert,

$$\begin{aligned} p_X(t) &= \dim_K S_t/I_t, \quad t \gg 0 \\ &= a_m \binom{t}{m} + a_{m-1} \binom{t}{m-1} + \dots + a_0 \end{aligned}$$

sendo a dimensão de X o grau m de $p_X(t)$ enquanto o coeficiente líder a_m é o grau de $X \subset \mathbb{P}^n$.

Em geral, a coleção dos sub-esquemas fechados de \mathbb{P}^n com um polinômio de Hilbert pré-fixado está em bijeção natural com um esquema projetivo, chamado de *Esquema de Hilbert*. Nosso objetivo é ilustrar este importante teorema devido a A. Grothendieck [11], no caso especial da coleção de triângulos em \mathbb{P}^2 .

O esquema de Hilbert para três pontos em \mathbb{P}^2 , que denotaremos por $Hilb^3\mathbb{P}^2$, parametriza as ternas de pontos não ordenadas de \mathbb{P}^2 , mais precisamente, sub-esquemas de dimensão 0 de comprimento 3. George Elencwajg-P. Le Barz [5], afirmam que $Hilb^3\mathbb{P}^2$ é a compactificação natural do espaço dos triângulos (não ordenados) do plano.

Nas seguintes seções estudaremos os sistemas lineares de 3 cônicas em \mathbb{P}^2 , também chamados “redes de cônicas”, tendo como objetivo caracterizar a família das que passam por três pontos em \mathbb{P}^2 .

Mostraremos que tais redes de cônicas são de tipo “determinantal”. Isto significa que provêm dos menores maximais de matrizes 2×3 cujas entradas são formas lineares.

Na seção 2 trataremos de alguns pré-requisitos como a Grassmanniana e veremos como ela pode ser vista como uma subvariedade projetiva e calcularemos sua dimensão. Faremos

um exemplo de espaço de parâmetros, definiremos certos grupos algébricos e a ação deles sobre os espaços projetivos. Enunciaremos alguns resultados sobre esquemas de Hilbert.

Na seção 3 faremos a descrição do lugar, $\mathcal{D} \subset G(3, S_2)$, de redes determinantis por meio de equações numa vizinhança coordenada na Grassmanniana dos subespaços de dimensão 3 do espaço das cônicas, $G(3, S_2)$. Mostraremos também que \mathcal{D} é não singular e irredutível, de dimensão seis. Veremos que \mathcal{D} possui duas únicas órbitas fechadas o que nós permitirá provar a não singularidade de \mathcal{D} . Usaremos o programa algébrico SINGULAR para mostrar que o lugar ao redor daquelas duas únicas órbitas fechadas é não singular e veremos que isso é suficiente para deduzir que \mathcal{D} é não singular. Provaremos que a órbita da rede $\langle xy, xz, yz \rangle$ é aberta em \mathcal{D} o que nós permitirá mostrar que a dimensão de \mathcal{D} é 6. Mostraremos que existe uma submersão de um aberto $U \subset \mathcal{M}_{2 \times 3}(S_1)$ sobre \mathcal{D} . Faremos uso de SINGULAR para calcular o mapa tangente em cada ponto de \mathcal{D} e veremos que o mapa $U \rightarrow \mathcal{D}$ tem posto constante igual a 6.

Na parte final, no epílogo, veremos como a família \mathcal{H}_3 de todos os subesquemas de \mathbb{P}^2 de polinômio de Hilbert constante igual a 3 mapeia para $\mathcal{D} \subset G(3, S_2)$. O mapa $\mathcal{H}_3 \rightarrow \mathcal{D}$ é de fato a explosão de \mathcal{D} ao longo da órbita formada pelas redes cujos geradores tem mdc $\neq 1$.

Por fim, introduziremos a subvariedade $\mathcal{C} \subset G(7, S_3)$, imagem isomorfa de $\text{Hilb}^3 \mathbb{P}^2$. Mostraremos que \mathcal{C} parametriza a família de subespaços vetoriais $J \subset S_3$ de codimensão 3 que satisfazem a condição de que o mapa $J \otimes S_1 \rightarrow S_4$ tem posto ≤ 12 . Também usaremos SINGULAR para mostrar que o espaço tangente $T_J \mathcal{C}$ tem dimensão igual a 6.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Grassmanniana

Definição 2.1. *Seja K um corpo. A coleção dos subespaços de dimensão k do espaço vetorial K^n é chamado a **Grassmanniana**- (k, n) e denotado por $G(k, n)$.*

Como cada K -subespaço vetorial de dimensão k é um $(k-1)$ -plano no correspondente espaço projetivo \mathbb{P}^{n-1} , quando queremos ver o $G(k, n)$ como a coleção dos $(k-1)$ -planos escreveremos $G[k-1, n-1]$.

2.2 Plücker

Podemos realizar a Grassmanniana como uma subvariedade de um espaço projetivo \mathbb{P}^N .

Seja V um K -espaço vetorial de dimensão n . Para cada $1 \leq k \leq n$, a k -ésima potência exterior $\bigwedge^k V$ é um K -espaço vetorial de dimensão $\binom{n}{k}$. Dado $W \subset V$ um K -subespaço vetorial, sejam $\mathfrak{B}_1 = \{w_1, \dots, w_k\}$, $\mathfrak{B}_2 = \{\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_k\}$ duas bases de W . Escrevendo cada $w_j = \sum_{i=1}^k a_{ji} \tilde{w}_i$ temos que:

$$w_1 \wedge \dots \wedge w_k = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_k} \text{Sig}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{k\sigma(k)} \tilde{w}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{w}_k$$

onde \mathcal{P}_k é o conjunto das permutações de k elementos, $\text{Sig}(\sigma)$ é o sinal da permutação σ e

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{P}_k} \text{Sig}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{k\sigma(k)}$$

é o determinante da matriz de mudança de base de \mathfrak{B}_1 para \mathfrak{B}_2 .

Então podemos definir o mapa

$$\begin{aligned} \psi : G(k, n) &\rightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^k V) \\ W &\mapsto [w_1 \wedge \dots \wedge w_k] \end{aligned}$$

Pelo feito acima podemos ver que o mapa ψ está bem definido: independe da escolha de uma base para V .

Proposição 2.1. *O mapa $\psi : G(k, n) \rightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^k V)$, definido acima, é injetivo.*

Demonstração. Veja [3].

□

Definição 2.2. O mapa definido acima $\psi : G(k, n) \rightarrow \mathbb{P}(\wedge^k V)$ é chamado **imersão de Plücker**, que nós permite ver a Grassmanniana como uma subvariedade de um espaço projetivo $\mathbb{P}(\wedge^k V)$.

Podemos identificar o espaço $\mathbb{P}(\wedge^k V)$ com um espaço projetivo \mathbb{P}^N onde $N = \binom{n}{k} - 1$. Podemos também representar os elementos da Grassmanniana (a imagem via a imersão de Plücker) em coordenadas homogêneas. Fixando uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ para V . Dado um $W \in G(k, n)$ e tomando alguma base $\{w_1, \dots, w_k\}$ de W , podemos escrever cada $w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}v_j$, logo temos que:

$$w_1 \wedge \dots \wedge w_k = \sum_{\bar{i} \in I_k} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_k} \text{Sig}(\sigma) a_{i_1 \sigma(1)} \dots a_{i_k \sigma(k)} v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_k}$$

onde $I_k := \{\bar{i} = (i_1, \dots, i_k) ; 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n\}$ e $M_{\bar{i}} := \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_k} \text{Sig}(\sigma) a_{i_1 \sigma(1)} \dots a_{i_k \sigma(k)}$ (polinômio homogêneo nas variáveis a_{ij}) é o determinante do menor $k \times k$ formado pelas linhas i_1, i_2, \dots, i_k da matriz

$$M_W = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}_{n \times k}.$$

Logo as coordenadas homogêneas são dadas por $\psi_{\bar{i}}(W) := M_{\bar{i}}$. Note que as colunas da matriz M_W são as coordenadas dos w_i .

Definição 2.3. As imagens $\psi_{\bar{i}}(W)$ são chamadas **Coordenadas de Plücker**.

Podemos construir abertos afins $\mathcal{U}_{\bar{i}} \subset G(k, n)$, com $\bar{i} = \{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n\}$, onde a coordenada de Plücker correspondente à $e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k}$ é não nulo. Logo $G(k, n)$ é recoberto por abertos afins

$$G(k, n) = \bigcup_{i=0}^{\binom{n}{k}-1} \mathcal{U}_i, \quad \mathcal{U}_i \cong \mathbb{A}^{k(n-k)}$$

e portanto a dimensão de $G(k, n)$ é $k(n - k)$.

2.3 Redes de Cônicas

Uma cônica é um elemento não nulo do espaço vetorial $S_2 = \mathbb{C}[x, y, z]_2$ dos polinômios homogêneos de grau 2, módulo multiplicação por constante. Chamaremos uma rede de cônicas a um subespaço de dimensão 3 de S_2 ou um ponto da Grassmanniana $G(3, S_2)$. Dado um elemento C de $G(3, S_2)$ e uma base $\{C_1, C_2, C_3\}$ para ele, podemos escrever:

$$C = \{aC_1 + bC_2 + cC_3 \mid (a : b : c) \in \mathbb{P}^2\} \cup \{0\}$$

2.4 Órbitas

Definição 2.4. Um grupo algébrico G é uma variedade algébrica munida de operações de grupo

$$\begin{aligned} * & : G \times G \rightarrow G \\ & (x, y) \mapsto x * y \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} i &: G \rightarrow G \\ x &\mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

que são morfismos.

Definição 2.5. Uma **ação** de um grupo algébrico G sobre uma variedade algébrica \mathbb{X} é um morfismo

$$\varphi : G \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$$

tal que

- $\varphi(1, x) = x$ e
- $\varphi(g, \varphi(h, x)) = \varphi(gh, x)$, $\forall g, h \in G, x \in \mathbb{X}$

Definida a ação, simplificamos a notação, escrevendo $\varphi(g, x) = g * x$.

Por exemplo, seja $GL_n\mathbb{C}$ o grupo de todas as matrizes $n \times n$ invertíveis cujas entradas pertencem a \mathbb{C} . Temos que

1. $GL_n\mathbb{C}$ é grupo algébrico.

Podemos identificar $GL_n\mathbb{C}$ com o subconjunto $G := \{(x_{ij}, 1/\det([x_{ij}])) \mid [x_{ij}] \in GL_n\mathbb{C}\}$ do espaço afim \mathbb{A}^{n^2+1} com coordenadas afins (x_{ij}, t) e observe que $G = V(\det([x_{ij}])t - 1 = 0)$. Segue que G é uma subvariedade algébrica de \mathbb{A}^{n^2+1} cujo anel de coordenadas é $\mathbb{C}[x_{ij}, 1/\det([x_{ij}])]$. Também note que as operações de grupo $(A, B) \mapsto AB$ e $A \mapsto A^{-1}$ são morfismos, pois suas respectivas coordenadas são funções polinomiais.

2. $GL_{n+1}\mathbb{C}$ age em \mathbb{P}^n .

Basta notar que a ação

$$GL_{n+1}\mathbb{C} \times \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n, \text{ definida } (A, [a_0 : a_1 : \dots : a_n]) \mapsto [A(a_0, a_1, \dots, a_n)']$$

é um morfismo, onde $(a_0, a_1, \dots, a_n)'$ é a transposta do vetor $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^{n+1}$.

Proposição 2.2. A ação de $GL_n\mathbb{C}$ sobre $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ induz uma ação sobre o espaço projetivo associado $\mathbb{P}(\bigwedge^k \mathbb{C}^n)$. Esta ação preserva a Grassmanniana $G(k, n) \subset \mathbb{P}(\bigwedge^k \mathbb{C}^n)$.

Demonstração. Tome a ação de $GL_n\mathbb{C}$ sobre $\bigwedge^k \mathbb{C}^n$ definida por $(A, v_1 \wedge \dots \wedge v_k) \mapsto Av_1 \wedge \dots \wedge Av_k$. Ela induz uma ação em $\mathbb{P}(\bigwedge^k \mathbb{C}^n)$ definida por

$$(A, [v_1 \wedge \dots \wedge v_k]) \mapsto [Av_1 \wedge \dots \wedge Av_k] \tag{2.1}$$

que preserva a grassmanniana $G(k, n)$. Com efeito, da proposição (2.1) podemos identificar $W \in G(k, n)$ com um elemento $[w_1 \wedge \dots \wedge w_k] \in \mathbb{P}(\bigwedge^k \mathbb{C}^n)$ onde os $w_1, \dots, w_k \in W$ são l.i. e geram W . Agindo com $A \in GL_n\mathbb{C}$ sobre $[w_1 \wedge \dots \wedge w_k]$ segundo a ação em (2.1), temos um elemento $[Aw_1 \wedge \dots \wedge Aw_k] \in \mathbb{P}(\bigwedge^k \mathbb{C}^n)$ o qual se identifica com $\langle Aw_1, \dots, Aw_k \rangle \in G(k, n)$ (via a imersão de Plücker). Ver [3], Teorema 10.19. \square

Definição 2.6. Dadas duas variedades algébricas \mathbb{X} e \mathbb{Y} sob a ação de G um grupo algébrico. Um **mapa equivariante** é um morfismo $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ tal que $f(g * x) = g * f(x)$ para todo $g \in G$ e todo $x \in \mathbb{X}$.

Proposição 2.3. *Seja \mathbb{X} uma variedade algébrica sob ação de G um grupo algébrico. Para todo $x \in \mathbb{X}$ a órbita de $G * x$ é uma subvariedade não singular localmente fechada e qualquer componente de $G * x$ tem dimensão $\dim G - \dim G_x$, onde G_x é o estabilizador de x . Além disso, o fecho de $G * x$ é a união de $G * x$ com as órbitas de dimensão estritamente menor. Qualquer órbita de dimensão minimal é fechada; em particular $\overline{G * x}$ contém uma órbita fechada. (Ver II.1.3 de [6], seção 2.3 de [9], seção 8 de [10]).*

2.5 Espaço de parâmetros de cônicas

Seja Σ a coleção de todas as hiper-superfícies de grau 2 de \mathbb{P}^2 , i.e., cônicas $C \subset \mathbb{P}^2$. Uma cônica projetiva é dada pelo lugar dos zeros dos polinômios da forma

$$F(X) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$$

onde $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{C}$, não todos nulos. Note que existe uma correspondência bijetiva entre as cônicas de \mathbb{P}^2 e os pontos de \mathbb{P}^5 :

$$V(ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz) \longleftrightarrow [a : b : c : d : e : f].$$

Assim, nós podemos dizer que a coleção de cônicas Σ é **parametrizada por** \mathbb{P}^5 .

Tome $[x : y : z]$ e $[a : b : c : d : e : f]$ como as coordenadas projetivas de \mathbb{P}^2 e \mathbb{P}^5 respectivamente. Podemos definir

$$\mathfrak{X} := \{([a : b : c : d : e : f], [x : y : z]) \in \mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^2 \ ; \ ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = 0\},$$

uma hiper-superfície $\mathfrak{X} \subset \mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^2$. Observe que a fibra de \mathfrak{X} sobre qualquer ponto $C \in \mathbb{P}^5$ é a cônica $C \cong \pi^{-1}(C) \subset \{C\} \times \mathbb{P}^2$, onde π é a projecção sobre \mathbb{P}^5 .

A hiper-superfície \mathfrak{X} é chamada a **família universal** das cônicas. (ver Lecture 21 de [3]).

Definimos $S = \mathbb{C}[x, y, z] = \bigoplus_{i \geq 0} \mathbb{C}[x, y, z]_i = \bigoplus_{i \geq 0} H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(i))$ o anel de polinômios em três variáveis e $S_i := \mathbb{C}[x, y, z]_i$ o espaço dos polinômios homogêneos de grau i .

Em particular, o espaço das cônicas é a projetivização $\mathbb{P}(S_2) = \mathbb{P}^5$ do espaço vetorial $S_2 = \mathbb{C}[x, y, z]_2$ de dimensão 6. O subespaço gerado por três cônicas linearmente independentes é um ponto na Grassmanniana $G(3, S_2)$.

2.6 Esquema de Hilbert

Considere a coleção

$$\mathcal{H}_p := \{X \text{ sub-esquema de } \mathbb{P}^n \text{ com polinômio de Hilbert } p\}.$$

Para cada sub-esquema fechado $X \subset \mathbb{P}^n$, denotamos por $I(X)$ seu ideal homogêneo e $I(X)_m$ denota sua parte homogênea de grau m .

Teorema 2.1. *Dado p um polinômio, existe m_0 tal que para qualquer $m \geq m_0$ e para qualquer $X \subset \mathbb{P}^n$ com polinômio de Hilbert p , vale que $\dim(I(X)_m) = \binom{m+n}{n} - p(m)$ e $I(X)_m$ determina o ideal homogêneo $I(X)$ a menos de saturação. (Lecture 21 [3], VI.2.2 [4])*

Segue que para a coleção \mathcal{H}_p existe m_0 que satisfaz as condições do teorema. Tomemos um $m \geq m_0$. Nós temos o seguinte mergulho fechado (ver VI.2.2 [4]):

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_p &\hookrightarrow G\left(\binom{m+n}{n} - p(m), \binom{m+n}{n}\right) \\ X &\mapsto I(X)_m \subset S_m \end{aligned} \quad (2.2)$$

Para obter as equações da imagem considere os mapas de multiplicação

$$\mu_k : \Lambda \otimes S_k \rightarrow S_{m+k} \quad (2.3)$$

tal que tem posto no máximo $\binom{m+k+n}{n} - p(m+k)$, para qualquer $\Lambda \subset S_m$ subespaço vetorial e qualquer $k \geq 0$.

Para o caso específico de r pontos em \mathbb{P}^2 o polinômio de Hilbert é constante igual a r . Nós temos a seguinte

Proposição 2.4. \mathcal{H}_r mergulha na grassmanniana de subespaços de codimensão r do espaço S_r de polinômios homogêneos de grau r . (Ver proposição 2.1 [2]).

Capítulo 3

Caracterizando redes de cônicas que passam por três pontos

3.1 O problema

Dados três pontos $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}^2$ não colineares, existem exatamente três cônicas independentes que passam por eles. Estes três pontos constituem uma subvariedade algébrica $\{p_1, p_2, p_3\} \subset \mathbb{P}^2$ (ou um triângulo de \mathbb{P}^2 como foi mencionado na introdução) com polinômio de Hilbert igual a 3.

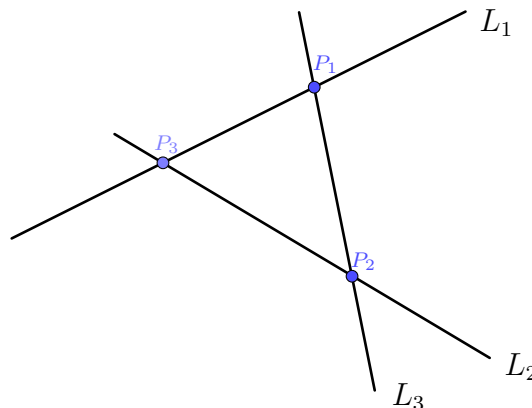
Por exemplo o “triângulo padrão” T formado pelos três pontos básicos $p_1 = [1 : 0 : 0]$, $p_2 = [0 : 1 : 0]$, $p_3 = [0 : 0 : 1]$ tem como seu ideal homogêneo o ideal de três cônicas $I(T) = \langle xy, xz, yz \rangle$ com polinômio de Hilbert constante igual a 3. Este ideal é de tipo “determinantal”, ou seja que os geradores do ideal $I(T)$ são os menores maximais (2×2) da matriz

$$\begin{pmatrix} x & 0 & -z \\ 0 & y & z \end{pmatrix}.$$

Isso nós faz pensar na existência de um mapa entre o espaço das matrizes 2×3 cujas entradas são formas lineares e $G(3, S_2)$, a Grassmanniana dos subespaços gerados por 3 cônicas l.i. do espaço dos polinômios homogêneos de grau 2. Na seguinte seção trataremos de tal correspondência (ver teorema (3.4)).

Por outro lado observe que o polinômio de Hilbert do ideal $\langle y, x^3 \rangle$ também é constante igual a 3. Ele é uma das possíveis “degenerações” de T .

O caso dos três pontos $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}^2$ não alinhados fica bem descrito pelo caso do triângulo padrão, por mudanças de coordenadas.



O ideal dos três pontos $\{p_1, p_2, p_3\}$ é $\langle L_1L_2, L_1L_3, L_2L_3 \rangle$ onde $L_1, L_2, L_3 \in S_1$ são as retas que passam por 2 daqueles três pontos.

Mas nem todo sistema de três cônicas determinam três pontos. Por exemplo se temos as cônicas x^2, y^2, z^2 ; o lugar dos zeros delas é $V(x^2, y^2, z^2) = \emptyset$, vazio em \mathbb{P}^2 . Também, se temos duas cônicas que se cortam em 4 pontos, não existe nenhuma outra cônica independente que passe pelos 4 pontos de interseção.

Podemos também considerar os casos degenerados em que os três pontos estejam alinhados. Nesse caso três cônicas não bastam para determinar os três pontos. Precisamos de 7 cúbicas que passam pelos três pontos, reparando que a dimensão do espaço das cúbicas planas S_3 tem dimensão 10. Retornaremos a esta observação no epílogo (3.2).

Definição 3.1. *Definimos*

$$\mathcal{D} := \{ \langle Q_1, Q_2, Q_3 \rangle \in G(3, S_2) ; \langle Q_1, Q_2, Q_3 \rangle \otimes S_1 \rightarrow S_3 \text{ tem posto } \leq 7 = 10 - 3 \}$$

O mapa linear

$$\langle Q_1, Q_2, Q_3 \rangle \otimes S_1 \rightarrow S_3$$

é definido como $Q_i \otimes u \mapsto Q_i u \in S_3$ com $u \in S_1$.

Mostraremos que este conjunto \mathcal{D} é uma subvariedade algébrica irredutível e não singular. A prova disso será feita através do estudo das órbitas das redes

$$I = \langle x^2, xy, y^2 \rangle$$

e

$$I^* = \langle z^2, xz, yz \rangle.$$

Elas são as duas únicas órbitas fechadas em \mathcal{D} (de fato em $G(3, S_2)$) (ver 3.6). Mostraremos também que \mathcal{D} é o lugar de nossas redes que geram um ideal de tipo determinantal.

Proposição 3.1. *\mathcal{D} é fechado.*

Demonstração. Dado um elemento $\langle Q_1, Q_2, Q_3 \rangle$ de \mathcal{D} , a condição de que o posto do mapa $\langle Q_1, Q_2, Q_3 \rangle \otimes S_1 \rightarrow S_3$ seja ≤ 7 se expressa pelo requerimento de que a matriz 9×10 que tem por linhas os coeficientes das imagens dos geradores de $\langle Q_1, Q_2, Q_3 \rangle \otimes S_1$, tenha posto no máximo 7. Ou seja que os menores 8×8 são todos nulos. Logo \mathcal{D} é fechado. \square

Proposição 3.2. *\mathcal{D} é invariante pela ação do grupo $GL_3(\mathbb{C})$.*

Demonstração. Seja T um automorfismo de $S_1 = \mathbb{C}^3$, visto como mudança de coordenadas lineares. Tome $I = \langle Q_1, Q_2, Q_3 \rangle \in \mathcal{D}$. Seja $I^T = \langle Q_1^T, Q_2^T, Q_3^T \rangle$ (mudança de coordenadas). Como o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} I \otimes S_1 & \longrightarrow & S_3 \\ \cong \uparrow & \nearrow & \\ I^T \otimes S_1 & & \end{array}$$

segue que o mapa multiplicação $I^T \otimes S_1 \rightarrow S_3$ tem posto ≤ 7 .

Portanto \mathcal{D} é invariante por pela ação do grupo $GL_3(\mathbb{C})$. \square

Observação 3.1.

I e I^ pertencem a \mathcal{D} , como se verifica pelo critério de posto ≤ 7 . Segue também, da proposição que acabamos de provar, que as respectivas órbitas estão contidas em \mathcal{D} .*

3.2 Órbitas fechadas

Lembremos a seguinte proposição:

Proposição 3.3. *Seja $\Gamma : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ um morfismo de uma variedade projetiva \mathbb{X} para uma outra variedade \mathbb{Y} . Então $\Gamma(\mathbb{X}) \subseteq \mathbb{Y}$ é fechado em \mathbb{Y} . (Ver [3], [8] teorema 1.10, seção 5.2.*

Lembre também que o ideal homogêneo de um ponto $p = [a : b : c] \in \mathbb{P}^2$ é

$$I(p) = (bx - ay, cx - az, cy - bz).$$

Verifica-se facilmente (tomando p num aberto afim U_i de \mathbb{P}^2) que o subespaço

$$(I(p)^2)_2 = \langle (bx - ay)^2, (bx - ay)(cx - az), \dots, (cy - bz)^2 \rangle \subset S_2$$

tem dimensão 3. $(I(p)^2)_2$ representa a parte homogênea de grau 2 de $I(p)^2$, o quadrado do ideal $I(p)$.

Alternativamente podíamos usar SINGULAR para analisar a independência dos geradores de

$$(I(p)^2)_2 = \langle \begin{aligned} &b^2x^2 - 2abxy + a^2y^2, \\ &c^2x^2 - 2acxz + a^2z^2, \\ &c^2y^2 - 2bcyz + b^2z^2, \\ &bcx^2 - abxz - acxy + a^2yz, \\ &bcxy - b^2xz - acy^2 + abyz, \\ &c^2xy - cbxz - acyz + abz^2 \end{aligned} \rangle.$$

Já que como espaço vetorial (como subespaço do espaço das cônicas) $(I(p)^2)_2$ tem uma representação matricial

$$\begin{bmatrix} x^2 & xy & y^2 & yz & xz & z^2 \\ b^2 & -2ab & a^2 & 0 & 0 & 0 \\ c^2 & 0 & 0 & 0 & -2ac & a^2 \\ 0 & 0 & c^2 & -2bc & 0 & b^2 \\ bc & -ac & 0 & a^2 & -ab & 0 \\ 0 & bc & -ac & ab & -b^2 & 0 \\ 0 & c^2 & 0 & -ac & -cb & ab \end{bmatrix}.$$

Podemos provar que esta matriz tem posto 3. Isso pode ser feito usando SINGULAR verificando que os menores 4×4 são nulos, pois além disso o ideal dos menores 3×3 só se anula para $a = b = c = 0$. As linhas de comando em SINGULAR são as seguintes:

```
ring r=0,(a,b,c),dp;
matrix B[6][6]=
b2,-2ab,a2,0,0,0,
c2,0,0,0,-2ac,a2,
0,0,c2,-2bc,0,b2,
bc,-ac,0,a2,-ab,0,
0,bc,-ac,ab,-b2,0,
0,c2,0,-ac,-cb,ab;
```

```

minor(B,4);
//_[1]=0

```

```

radical(minor(B,3));
//_[1]=c
//_[2]=b
//_[3]=a

```

Assim nós temos que $(I(p)^2)_2$ pertence a $G(3, S_2)$.

Proposição 3.4. *O mapa*

$$\begin{aligned} \Psi_1 &: \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathcal{D} \subset G(3, S_2) \\ p &\mapsto (I(p)^2)_2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

é um morfismo injetivo equivariante e a imagem dele é a órbita de I , portanto a órbita de I é fechada (proposição (3.3)).

Demonstração. Tome a restrição do mapa para um aberto afim U_i ,

$$\Psi_{1i} : U_i \rightarrow \mathcal{D}$$

com $\Psi_{1i}(x) = \Psi_1(x)$ para todo $x \in U_i$. Fixe em particular o aberto

$$U_2 = \{[a : b : c] \in \mathbb{P}^2 ; c \neq 0\}$$

(outros casos são análogos); segue que

$$I(p) = (bx - ay, x - az, y - bz) = (x - az, y - bz)$$

e

$$(I(p)^2)_2 = \langle x^2 - 2axz + a^2z^2, xy - bxz - ayz + abz^2, y^2 - 2byz + b^2z^2 \rangle.$$

Pode-se notar que $(I(p)^2)_2 \in \mathcal{D}$ dado que ele pertence à órbita de I e da observação (3.1) a órbita de I está contida em \mathcal{D} . Para provar que $(I(p)^2)_2$ está na órbita de I basta fazer uma mudança de coordenadas

$$x - az = x' \quad y - bz = y' \quad z = z'$$

pela qual temos que

$$(I(p)^2)_2 = \langle (x')^2, x'y', (y')^2 \rangle \in \mathcal{O}(I).$$

Se segue que a imagem de Ψ_1 está contida na órbita de I . Para provar que a órbita de I está contida na imagem de Ψ_1 tome um elemento da órbita de I , a rede $\langle L_1^2, L_1L_2, L_2^2 \rangle$ onde os L_i são as mudanças de coordenadas $x = L_1$ e $y = L_2$. Vemos que o ideal gerado por aquela rede $(L_1^2, L_1L_2, L_2^2) = (L_1, L_2)^2$ é o ideal de um ponto triplo. Portanto a órbita de I é igual á imagem de Ψ_1 .

O mapa Ψ_1 é um morfismo pois sua imagem tem como coordenadas polinômios.

Para provar a injetividade de Ψ_1 lembre que todo ponto em \mathbb{P}^2 é uma variedade fechada irreduzível, então o ideal do ponto é primo em $\mathbb{C}[x, y, z]$. Dados dois pontos p_1, p_2 , tais que $(I(p_1)^2)_2 = (I(p_2)^2)_2$, logo $I(p_1)^2 = I(p_2)^2$ pelo que $I(p_1) = I(p_2)$ ou seja Ψ_1 é injetivo. \square

De maneira análoga temos a seguinte

Proposição 3.5. *O mapa*

$$\begin{aligned} \Psi_2 : (\mathbb{P}^2)^* &\rightarrow \mathcal{D} \subset G(3, S_2) \\ \lambda = a_0x + a_1y + a_2z &\mapsto \langle \lambda x, \lambda y, \lambda z \rangle \end{aligned} \quad (3.2)$$

é um morfismo injetivo equivariante e sua imagem é a órbita de I^* , portanto a órbita de I^* é fechada.

Observação 3.2. *Nós acabamos de provar com as duas proposições anteriores que*

- A órbita da rede I é isomorfa a \mathbb{P}^2 .
- A órbita da rede I^* é isomorfa a $(\mathbb{P}^2)^*$.

Proposição 3.6. *Existem duas únicas órbitas fechadas em $G(3, S_2)$, a saber, as órbitas das redes $I = \langle x^2, xy, y^2 \rangle$ e $I^* = \langle z^2, xz, yz \rangle$.*

Demonstração. Dada uma rede de cônicas $\langle C_1, C_2, C_3 \rangle$, podemos reduzir os geradores da rede mediante mudanças de variáveis até obter os geradores da seguinte forma

$$\begin{aligned} C_1 &= x^2 + a_{13}y^2 + a_{14}xz + a_{15}yz + a_{16}z^2 \\ C_2 &= xy + a_{23}y^2 + a_{24}xz + a_{25}yz + a_{26}z^2 \\ C_3 &= a_{33}y^2 + a_{34}xz + a_{35}yz + a_{36}z^2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Agora, considere que $a_{33} \neq 0$. Fazendo uma mudança de variáveis $z = tz$, com $t \neq 0$, nossa rede ficaria da seguinte forma

$$\langle x^2 + \dots, xy + \dots, a_{33}y^2 + a_{34}txz + a_{35}tyz + a_{36}t^2z^2 \rangle.$$

Esta rede, depois de tomar limite na grassmanniana quando $t \rightarrow 0$, pode ser reduzida a

$$\langle x^2 + a_{13}y^2, xy + a_{23}y^2, a_{33}y^2 \rangle = \langle x^2, xy, y^2 \rangle = I.$$

Voltando para a rede $\langle C_1, C_2, C_3 \rangle$ com geradores como em (3.3), considere que $a_{33} = 0$ e $a_{34} \neq 0$. A continuação fazemos uma mudança de variáveis $z = tz$ com a qual a rede se tornaria da seguinte forma

$$\begin{aligned} &\langle x^2 + a_{13}y^2 + \dots, xy + a_{23}y^2 + \dots, a_{34}txz + a_{35}tyz + a_{36}t^2z^2 \rangle \\ &= \langle x^2 + a_{13}y^2 + \dots, xy + a_{23}y^2 + \dots, a_{34}xz + a_{35}yz + a_{36}t^2z^2 \rangle. \end{aligned}$$

Depois de tomar limite na grassmanniana quando $t \rightarrow 0$, obtemos a seguinte rede

$$\langle x^2 + a_{13}y^2, xy + a_{23}y^2, a_{34}xz + a_{35}yz \rangle.$$

Fazendo novamente uma mudança de variáveis $y = ty$ e logo tomando limite na grassmanniana quando $t \rightarrow 0$, temos a seguinte rede

$$\langle x^2, xy, a_{34}xz \rangle = \langle x^2, xy, xz \rangle = I^*.$$

No caso em que $a_{33} = 0$ e $a_{34} = 0$ temos que considerar outros dois casos, quando $a_{35} \neq 0$ e $a_{36} = 0$, ou quando $a_{36} \neq 0$ e $a_{35} = 0$. Em ambos casos podemos proceder analogamente ao anterior, fazendo mudança de variáveis e tomando limites na grassmanniana, provaremos que nossa rede I^* está no fecho da órbita de nossa rede $\langle C_1, C_2, C_3 \rangle$.

Concluimos que, dada uma rede de cônicas em geral $\langle C_1, C_2, C_3 \rangle$, as redes I ou I^* aparecem como limites na grassmanniana de nossa rede inicial, i.e. as redes I ou I^* pertencem ao fecho da órbita da rede $\langle C_1, C_2, C_3 \rangle$. Portanto o fecho de toda órbita contém uma das órbitas fechadas $\mathcal{O}(I)$ ou $\mathcal{O}(I^*)$. Segue também que elas são únicas. \square

Proposição 3.7. \mathcal{D} é não singular.

Demonstração. Faremos a prova por contradição.

Suponha que $Sing(\mathcal{D}) \neq \emptyset$. Como $Sing(\mathcal{D})$ é fechado e invariante, pois \mathcal{D} é invariante (proposição (3.2)), ela contém uma órbita fechada, pois toda variedade fechada e invariante contém uma órbita fechada (proposição (2.3)). Logo $Sing(\mathcal{D})$ deve conter I ou I^* uma vez que são as únicas órbitas fechadas de \mathcal{D} (proposição 3.6). Deduz-se que \mathcal{D} é singular sobre I ou I^* , mas podemos ver que isso não é verdade, como mostramos a continuação.

Vamos estudar o mapa de $\langle Q_1, Q_2, Q_3 \rangle \otimes S_1 \rightarrow S_3$ numa vizinhança afim de um representante de cada órbita fechada e impor a condição de ter posto no máximo igual a 7.

Vejam os caso da rede $I = \langle x^2, xy, y^2 \rangle$.

Tomamos os pontos numa vizinhança afim de I em $G(3, S_2)$, como:

$$\begin{pmatrix} x^2 & xy & y^2 & xz & yz & z^2 \\ 1 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Multiplicamos pelos lineares $S_1 = \langle x, y, z \rangle$

$$\begin{pmatrix} x^3 & x^2y & x^2z & xy^2 & xyz & xz^2 & y^3 & y^2z & yz^2 & z^3 \\ 1 & 0 & a_{11} & 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a_{11} & 0 & 0 & a_{12} & a_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a_{11} & 0 & 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{21} & 0 & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{21} & 0 & 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{21} & 0 & 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{31} & 1 & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{31} & 0 & 1 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{31} & 0 & 1 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Reduzimos a matriz com operações-linha e calculamos os pivôs. Vemos da matriz reduzida que temos 7 linhas linearmente independentes; então para que se satisfaça a condição do posto ser no máximo 7 precisamos que a submatriz complementar:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{21}a_{22} + a_{12}a_{31} + a_{23} & 0 & 0 & -a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22} - a_{22}^2 & -a_{13}a_{21} + a_{11}a_{23} \\ & & & & & & & & +a_{12}a_{32} - a_{13} & -a_{22}a_{23} + a_{12}a_{33} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{21}^2 - a_{11}a_{31} + a_{22}a_{31} & 0 & 0 & a_{21}a_{22} - a_{12}a_{31} - a_{23} & a_{21}a_{23} - a_{13}a_{31} \\ & & & & & -a_{21}a_{32} + a_{33} & & & & -a_{23}a_{32} + a_{22}a_{33} \end{pmatrix}$$

seja identicamente nula, ou seja obtemos as equações para \mathcal{D} na vizinhança do nosso ponto I . Calculamos a decomposição primária do ideal cujos geradores provêm daquelas equações e vemos que o ideal é radical, gerado pelos seguintes polinômios

$$\begin{aligned} & a_{23} - a_{21}a_{22} + a_{12}a_{31}, \\ & a_{33} + a_{21}^2 - a_{11}a_{31} + a_{22}a_{31} - a_{21}a_{32}, \\ & a_{13} + a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} + a_{22}^2 - a_{12}a_{32} \end{aligned}$$

Note que, nas equações dadas por estes geradores, nós podemos por em evidência os termos lineares

$$\begin{aligned} a_{23} &= a_{21}a_{22} - a_{12}a_{31}, \\ a_{33} &= -a_{21}^2 + a_{11}a_{31} - a_{22}a_{31} + a_{21}a_{32}, \\ a_{13} &= -a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22} - a_{22}^2 + a_{12}a_{32}. \end{aligned}$$

Segue que \mathcal{D} é localmente o gráfico de uma função regular e assim I é ponto não singular em \mathcal{D} .

No caso da outra rede $I^* = \langle x^2, xy, xz \rangle$, procedemos analogamente. Tomamos um ponto na vizinhança afim:

$$\left(\begin{array}{cccccc} x^2 & xy & xz & y^2 & yz & z^2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right)$$

Multiplicamos pelas lineares $\langle x, y, z \rangle$ e escrevemos a matriz de coeficientes:

$$\left(\begin{array}{cccccccccc} x^3 & x^2y & x^2z & xy^2 & xyz & xz^2 & y^3 & y^2z & yz^2 & z^3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right)$$

Reduzimos a matriz e calculamos os pivôs. A matriz reduzida tem 6 linhas linearmente independentes. Para que se satisfaça a condição de posto ser no máximo 7 precisamos que os menores 2×2 da submatriz complementar:

$$\left(\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{21}^2 - a_{11} & -2a_{21}a_{22} - a_{23}a_{31} & -a_{22}^2 - a_{21}a_{23} & -a_{22}a_{23} - a_{23}a_{33} \\ & & & & & & & -a_{12} & -a_{23}a_{32} - a_{13} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{21}a_{31} & -a_{22}a_{31} - a_{21}a_{32} & -a_{23}a_{31} - a_{22}a_{32} & -a_{23}a_{32} - a_{33}^2 \\ & & & & & & & -a_{31}a_{33} - a_{11} & -a_{32}a_{33} - a_{12} & -a_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{31} & -a_{21} + a_{32} & -a_{22} + a_{33} & -a_{23} \end{array} \right).$$

sejam nulos, ou seja obtemos as equações de \mathcal{D} em uma vizinhança afim ao redor de I^* .

O ideal que tem por geradores os menores 2×2 desta matriz não é radical, como podemos ver da decomposição primária deste ideal.

Calculamos o ideal radical daquele ideal dos menores 2×2 e temos os seguintes geradores

$$\begin{aligned} &a_{21}a_{23} + a_{23}a_{32} + a_{33}^2 + a_{13}, \\ &a_{21}a_{22} + a_{23}a_{31} + a_{22}a_{32} - a_{21}a_{33} + a_{32}a_{33} + a_{12}, \\ &a_{21}^2 + a_{22}a_{31} + a_{31}a_{33} + a_{11}. \end{aligned}$$

Analogamente ao caso anterior, segue que \mathcal{D} é localmente o gráfico de uma função regular, pelo que I^* é um ponto não singular em \mathcal{D} .

Estes procedimentos foram calculados usando **SINGULAR**. Ver os algoritmos (3.2) e (3.1) em anexos.

□

Observação 3.3. *Segue da demonstração que a componente irredutível $D_I \subset \mathcal{D}$ que contém a rede I tem*

$$\dim D_I = 6.$$

Observação 3.4. *Segue da demonstração que a componente irredutível $D_{I^*} \subset \mathcal{D}$ que contém a rede I^* tem*

$$\dim D_{I^*} = 6.$$

Proposição 3.8. *A órbita da rede $\langle xy, xz, yz \rangle$ é aberta em \mathcal{D} .*

Demonstração. Escreva $G = GL_3\mathbb{C}$ e $u = \langle xy, xz, yz \rangle$. Logo considere o mapa

$$\begin{array}{ccc} G & \rightarrow & \mathcal{D} \\ A & \mapsto & A * u \end{array}$$

onde $A * u = \langle x'y', x'z', y'z' \rangle$ provém da ação induzida por $GL_3\mathbb{C}$ em \mathcal{D} .

Note também que a imagem do mapa é a órbita de u , que escreveremos por $\mathcal{O}(u)$.

Veremos que o mapa tangente tem posto constante igual a 6.

Tome um ponto $A \in G$, sua imagem $A \mapsto \langle x'y', x'z', y'z' \rangle$ pertence a um aberto \mathcal{U}_i da grassmanniana $G(3, S_2)$. A pré-imagem deste aberto é uma vizinhança ao redor de A . Como a matriz A pode ser reduzida a uma matriz identidade por operações elementares por filas, será suficiente tomar $A = Id_{3 \times 3}$ (a pre-imagem de u).

Vamos perturbar $Id_{3 \times 3}$ com a matriz $\varepsilon[a_{ij}]$, sob a condição de $\varepsilon^2 = 0$

$$Id + \varepsilon[a_{ij}] \mapsto \langle x'y', x'z', y'z' \rangle.$$

Pela ação do grupo $GL_3(\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} x' &= x + \varepsilon(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z) \\ y' &= y + \varepsilon(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z) \\ z' &= z + \varepsilon(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z). \end{aligned}$$

A rede $\langle x'y', x'z', y'z' \rangle$ na vizinhança $\mathcal{U}_i \cong \mathbb{A}^9$ de $G(3, S_2)$ pode se escrever como

$$\left(\begin{array}{cccccc} xy & xy & xz & x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 + \varepsilon(a_{11} + a_{22}) & \varepsilon a_{23} & \varepsilon a_{13} & \varepsilon a_{21} & \varepsilon a_{12} & 0 \\ \varepsilon a_{32} & 1 + \varepsilon(a_{11} + a_{33}) & \varepsilon a_{12} & \varepsilon a_{31} & 0 & \varepsilon a_{13} \\ \varepsilon a_{31} & \varepsilon a_{21} & 1 + \varepsilon(a_{22} + a_{33}) & 0 & \varepsilon a_{32} & \varepsilon a_{23} \end{array} \right)$$

multiplicando por $1 - \varepsilon(a_{ii} + a_{jj})$, com $i, j \in \{1, 2, 3\}$ ($i \neq j$), a linha respectiva, obtemos a matriz seguinte

$$\left(\begin{array}{cccccc} xy & xy & xz & x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 & \varepsilon a_{23} & \varepsilon a_{13} & \varepsilon a_{21} & \varepsilon a_{12} & 0 \\ \varepsilon a_{32} & 1 & \varepsilon a_{12} & \varepsilon a_{31} & 0 & \varepsilon a_{13} \\ \varepsilon a_{31} & \varepsilon a_{21} & 1 & 0 & \varepsilon a_{32} & \varepsilon a_{23} \end{array} \right).$$

Reduzindo esta matriz por operações por linhas obtemos

$$\left(\begin{array}{cccccc} xy & xy & xz & x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 & 0 & 0 & \varepsilon a_{21} & \varepsilon a_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \varepsilon a_{31} & 0 & \varepsilon a_{13} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \varepsilon a_{32} & \varepsilon a_{23} \end{array} \right).$$

Sejam u_1, \dots, u_9 as coordenadas afins de $\mathcal{U}_i \cong \mathbb{A}^9$. Temos que a imagem do mapa tangente é

$$(u_1, \dots, u_9) = (\varepsilon a_{21}, \varepsilon a_{12}, 0, \varepsilon a_{31}, 0, \varepsilon a_{13}, 0, \varepsilon a_{32}, \varepsilon a_{23}).$$

Assim, obtemos as coordenadas u_1, \dots, u_9 de \mathbb{A}^9 parametrizadas pelos a_{ij} .

Fazendo uma eliminação dos parâmetros a_{ij} temos três equações independentes: $u_{13} = u_{22} = u_{31} = 0$. Portanto o mapa tangente tem posto 6.

Agora, como as órbitas são não singulares, temos que

$$\dim T_p \mathcal{O}(u) = \dim \mathcal{O}(u) = 6, \quad \forall p \in \mathcal{O}(u). \quad (3.4)$$

Para culminar com a prova, basta verificar que $\overline{\mathcal{O}(u)} = \mathcal{D}$, dado que toda órbita é aberta no seu fecho.

Primeiro lembremos os seguintes fatos:

Seja \mathbb{X} uma variedade algébrica sob ação de um grupo algébrico G .

- i) As componentes irredutíveis de \mathbb{X} são invariantes pela ação do grupo algébrico conexo G .

Dada $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$ uma componente irredutível. Seja $G \cdot \mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$ a imagem do mapa de ação $G \times \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ definido por $(g, y) \mapsto gy$. Temos que $\mathbb{Y} \subset G \cdot \mathbb{Y} \subset \overline{G \cdot \mathbb{Y}}$, como $G \cdot \mathbb{Y}$ é irredutível (pois é a imagem de um aberto conexo) então $\overline{G \cdot \mathbb{Y}}$ é irredutível e fechado, logo $\overline{G \cdot \mathbb{Y}} = \mathbb{Y}$. Assim $\mathbb{Y} = G \cdot \mathbb{Y}$ é invariante pela ação do grupo.

- ii) As órbitas em \mathbb{X} são irredutíveis, se G é um grupo conexo.

Pois uma órbita é a imagem do mapa $G \rightarrow \mathbb{X}$ definido por $g \mapsto gx$, para algum $x \in \mathbb{X}$. Como G é conexo então é irredutível, logo a imagem do mapa, a órbita do ponto x , é irredutível.

- iii) O fecho de uma órbita é invariante pela ação do grupo.

Pois é a união da órbita com as órbitas de dimensão estritamente menor.

Continuando com a prova da proposição, se $D_1 \subset \mathcal{D}$ é uma componente irredutível de \mathcal{D} e como $G = GL_3(\mathbb{C})$ é um grupo algébrico conexo, segue do item (i) que D_1 é invariante pela ação do grupo G . Segue que:

$$I \in D_1 \text{ ou } I^* \in D_1 \quad (3.5)$$

dado que todo fechado e invariante pela ação de um grupo conexo contém uma órbita fechada (ver proposição 2.3) e existem só duas órbitas fechadas (ver proposição 3.6).

Como \mathcal{D} é invariante pela ação de $GL_3(\mathbb{C})$, então pelo item (iii) temos $\overline{\mathcal{O}(u)} \subset \mathcal{D}$. Além disso, \mathcal{D} é não singular (ver proposição 3.7), então componentes irredutíveis que contêm I e I^* são disjuntas dado que as componentes irredutíveis se intersectam em pontos singulares.

Agora nós mostraremos que tanto I como I^* pertencem à $\overline{\mathcal{O}(u)}$. Com efeito, nós podemos agir por grupos a um-parâmetro na órbita $\mathcal{O}(u)$ e usando limites na grassmanniana, ver que de fato I e I^* estão em $\overline{\mathcal{O}(u)}$.

Se nós tomarmos a rede $\langle xy, xz, yz \rangle$ e fizermos a mudança de variáveis $y = x + ty$ e depois tomamos o limite quando $t \rightarrow 0$, obtemos:

$$\langle xy, xz, yz \rangle \xrightarrow{y=x+ty} \langle x(x+ty), xz, (x+ty)z \rangle = \langle x^2 + txy, xz, yz \rangle \xrightarrow{t \rightarrow 0} \langle x^2, xz, yz \rangle$$

Se fazemos uma nova mudança de coordenadas $z = y + tz$ e depois tomamos limite quando $t \rightarrow 0$, obtemos:

$$\langle x^2, xz, yz \rangle \xrightarrow{z=y+tz} \langle x^2, xy + txz, y^2 + tz^2 \rangle \xrightarrow{t \rightarrow 0} \langle x^2, xy, y^2 \rangle = I$$

Mas se no passo anterior fizermos outra mudança de coordenadas $z = x + tz$ e tomamos limite quando $t \rightarrow 0$, temos que:

$$\langle x^2, xz, yz \rangle \xrightarrow{z=x+tz} \langle x^2, x^2 + txz, xy + tyz \rangle = \langle x^2, xz, xy + tyz \rangle \xrightarrow{t \rightarrow 0} \langle x^2, xz, xy \rangle = I^*$$

Assim, vemos que as redes I e I^* pertencem a $\overline{\mathcal{O}(u)}$. Segue do item (iii) que

$$\mathcal{O}_I \bigsqcup \mathcal{O}_{I^*} \subset \overline{\mathcal{O}(u)}. \quad (3.6)$$

Seja $D_I \subset \mathcal{D}$ a componente irredutível que contém I . Do item (ii) temos que $\mathcal{O}(u)$ é irredutível, logo $\overline{\mathcal{O}(u)}$ é irredutível. Como $\overline{\mathcal{O}(u)}$ é um fechado irredutível que passa por I , então $\overline{\mathcal{O}(u)} \subset D_I$. Segue que $\overline{\mathcal{O}(u)} = D_I$ desde que $\dim \overline{\mathcal{O}(u)} = \dim D_I = 6$ por (3.4) e pela observação 3.3. Analogamente $\overline{\mathcal{O}(u)} = D_{I^*}$. Portanto $\overline{\mathcal{O}(u)} = \mathcal{D}$, pois por (3.5) qualquer componente irredutível de \mathcal{D} contém I ou I^* . \square

Segue da proposição :

Corolário 3.1. *Seja \mathcal{D} como na definição 3.1. Então*

- $\dim \mathcal{D} = 6$
- \mathcal{D} é irredutível.

Dado um anel Noetheriano R . Seja M uma matriz com entradas em R . Nós escreveremos $I_t(M)$ para denotar o ideal gerado pelos subdeterminantes $t \times t$ de M .

Teorema 3.2. *Se $I \subset S$ é o ideal homogêneo de um número finito de pontos em \mathbb{P}^2 , então I tem uma resolução livre de comprimento 1. (Ver proposição 3.1 de [7]).*

Teorema 3.3 (Hilbert-Burch). *Suponha que um ideal I de um anel Noetheriano R admite uma resolução livre de comprimento 1*

$$0 \rightarrow F \xrightarrow{M} G \rightarrow I \rightarrow 0.$$

Se o posto do módulo livre F é t , então o posto do módulo G é $t + 1$ e existe um não divisor de zero $a \in R$ tal que $I = aI_t(M)$. Considerando M como uma matriz em relação as bases dadas de F e G , o gerador de I que é a imagem do i -ésimo vetor básico de G é $\pm a$ vezes o determinante da submatriz de M formada de todas exceto a i -ésima fila. Além disso, a codimensão (ou profundidade) de $I_t(M)$ é dois. (Ver teorema 3.2 de [7])

Pode se concluir também do teorema de Hilbert-Burch que t é o número mínimo de geradores de I .

Denotaremos por $\mathcal{M}_{2 \times 3}(S_1)$ o a coleção das matrizes 2×3 cujas entradas são elementos de S_1 (formas lineares de $\mathbb{C}[x, y, z]$) que nós identificaremos com \mathbb{A}^{18} devido ao isomorfismo $\mathcal{M}_{2 \times 3}(S_1) \cong \mathbb{A}^{18}$.

Do seguinte teorema poderemos concluir que cada elemento de nossa coleção das redes de cônicas \mathcal{D} é de tipo “determinantal”, o que significa que para cada elemento de \mathcal{D} existe uma matriz de $\mathcal{M}_{2 \times 3}(S_1)$ cujos menores maximais geram dito elemento.

Teorema 3.4. Para cada matriz $M = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(S_1) = \mathbb{A}^{18}$, sejam

$$\begin{aligned} M_{23} &= L_{12}L_{23} - L_{13}L_{22} \\ M_{13} &= L_{11}L_{23} - L_{13}L_{21} \\ M_{12} &= L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21} \end{aligned}$$

os menores maximais da matriz M . Seja $U = \{M \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(S_1) \mid \langle M_{12}, M_{13}, M_{23} \rangle \in G(3, S_2)\}$. Então U é aberto e o mapa

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : \quad U &\longrightarrow \mathcal{D} \subset G(3, S_2) \\ M = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \end{pmatrix} &\longmapsto \langle M_{12}, M_{13}, M_{23} \rangle \end{aligned} \quad (3.7)$$

é um morfismo que é uma submersão e $\mathcal{T}(U) = \mathcal{D}$, onde \mathcal{D} é definido em (3.1).

Demonstração. Observe que $U \subset \mathbb{A}^{18}$ é aberto pois a condição de $\langle M_{12}, M_{13}, M_{23} \rangle \in G(3, S_2)$ diz que a matriz que tem por linhas os geradores daquele subespaço de S_2 tem um menor maximal 2×2 não nulo, que é uma condição aberta em \mathbb{A}^{18} .

O mapa é um morfismo pois escrevendo sua imagem em cada vizinhança afim $\mathcal{U}_i \cong \mathbb{A}^9$ de $G(3, S_2)$ (na forma $(I[a_{ij}])$), ela está dada por entradas polinomiais.

A demonstração de que \mathcal{T} é um morfismo equivariante segue do fato que $GL_3(\mathbb{C})$ age tanto em $U \subset \mathcal{M}_{2 \times 3}(S_1)$ quanto em $G(3, S_2)$ tal que $\mathcal{T}(M^T) = \langle M_{12}^T, M_{13}^T, M_{23}^T \rangle$, para T um automorfismo de S_1 considerando ele como uma mudança de coordenadas.

A seguir nós provaremos que $\mathcal{T}(U) = \mathcal{D}$.

Para a primeira inclusão $\mathcal{T}(U) \subset \mathcal{D}$, tome

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \end{pmatrix} \in U.$$

Se adicionamos uma linha repetida temos uma matriz 3×3 cujo determinante é zero:

$$\begin{vmatrix} L_{12} & L_{13} & L_{23} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{i1} & L_{i2} & L_{i3} \end{vmatrix} = 0, \quad \forall i = 1, 2$$

Escrevendo na expansão de Laplace do determinante temos

$$L_{i1}M_{23} - L_{i2}M_{13} + L_{i3}M_{12} = 0 \quad \forall i = 1, 2.$$

Note que os elementos $u_i := L_{i1} \otimes M_{23} - L_{i2} \otimes M_{13} + L_{i3} \otimes M_{12}$, $i = 1, 2$ estão no núcleo do mapa $\langle M_{12}, M_{13}, M_{23} \rangle \otimes \langle x, y, z \rangle \rightarrow S_3$. Além disso os u_i são linearmente independentes. De fato, suponha que existem $a, b \in \mathbb{C}$ tais que

$$a(L_{11} \otimes M_{23} - L_{12} \otimes M_{13} + L_{13} \otimes M_{12}) - b(L_{21} \otimes M_{23} - L_{22} \otimes M_{13} + L_{23} \otimes M_{12}) = 0.$$

Pela bilinearidade podemos reescrever como

$$(aL_{11} - bL_{21}) \otimes M_{23} - (aL_{12} - bL_{22}) \otimes M_{13} + (aL_{13} - bL_{23}) \otimes M_{12} = 0.$$

Pondo $\gamma_i = aL_{1i} - bL_{2i}$, com $i = 1, 2, 3$ reescrevemos a expressão anterior

$$\gamma_1 \otimes M_{23} - \gamma_2 \otimes M_{13} + \gamma_3 \otimes M_{12} = 0.$$

Como os M_{ij} são linearmente independentes, se por absurdo os γ_k fossem l.i. então os produtos $\gamma_1 \otimes M_{23}, \gamma_2 \otimes M_{13}, \gamma_3 \otimes M_{12}$ seriam l.i.; logo teríamos uma contradição. Então supondo $\gamma_3 = r\gamma_1 + s\gamma_2$, com $r, s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, segue que

$$\gamma_1 \otimes (M_{23} + rM_{12}) - \gamma_2 \otimes (M_{13} - sM_{12}) = 0.$$

Observe que $(M_{23} + rM_{12}), (M_{13} - sM_{12})$ são l.i. e analogamente ao raciocínio anterior, os γ_1, γ_2 não podem ser l.i., logo podemos supor $\gamma_2 = t\gamma_1$ com $t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, fazendo a substituição temos

$$\gamma_1 \otimes (M_{23}) - \gamma_1 \otimes (tM_{13}) + \gamma_1 \otimes ((r + ts)M_{12}) = 0.$$

Se γ_1 for não nulo segue-se que os $\gamma_1 \otimes (M_{23}), \gamma_1 \otimes (tM_{13}), \gamma_1 \otimes ((r + ts)M_{12})$ são l.i., logo teríamos uma contradição. Portanto $\gamma_1 = 0$, logo $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$. Assim temos que

$$aL_{11} - bL_{21} = aL_{12} - bL_{22} = aL_{13} - bL_{23} = 0$$

e isso acontece se, e só se $a = b = 0$, pois as linhas (L_{11}, L_{12}, L_{13}) e (L_{21}, L_{22}, L_{23}) são l.i.. Segue que os u_i são l.i. então o núcleo do mapa $\langle M_{12}, M_{13}, M_{23} \rangle \otimes \langle x, y, z \rangle \rightarrow S_3$ tem pelo menos dimensão 2 e do teorema do núcleo e imagem segue que o mapa tem no máximo posto 7, desde que $\langle M_{12}, M_{13}, M_{23} \rangle \otimes \langle x, y, z \rangle$ tem dimensão 9. Segue que a imagem de \mathcal{T} está contida em \mathcal{D} .

Para provar a outra inclusão $\mathcal{T}(U) \supset \mathcal{D}$ lembremos que, na construção de nossa variedade \mathcal{D} , a condição que o mapa linear $S_1 \otimes \langle C_1, C_2, C_3 \rangle \rightarrow S_3$ tenha posto no máximo 7, onde $\langle C_1, C_2, C_3 \rangle \in \mathcal{D}$, é dada para que nossas redes de cônicas fixem os três vértices de um triângulo em \mathbb{P}^2 , ou seja para que $V(C_1, C_2, C_3)$ tenha 3 pontos (ver definição 3.1). Embora no caso degenerado, no qual os três vértices estão alinhados, o ideal dos três pontos seja gerado, a menos de mudança de coordenadas, pela rede $I^* = \langle x^2, xy, xz \rangle$ cujo conjunto dos zeros não tem três pontos, $V(I^*) \cong \mathbb{P}^1$. No caso dos ideais gerados pelas redes que não pertencem à órbita da rede I^* podemos aplicar os teoremas acima (3.2) e (3.3).

Tome uma rede de cônicas $\Lambda \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{O}(I^*)$, como falamos acima o conjunto de zeros do ideal gerado por ela são pontos em \mathbb{P}^2 , no máximo 3. Pelo teorema (3.2) o ideal gerado pela rede, que por abuso de notação escreveremos também como Λ , tem uma resolução livre de comprimento 1. Segue do teorema de Hilbert-Burch (3.3) que o ideal gerado pela rede tem uma resolução livre

$$0 \rightarrow R^2 \rightarrow R^3 \rightarrow \Lambda \rightarrow 0,$$

onde $R = \mathbb{C}[x, y, z]$ e $t = 3$ é o número de geradores de Λ .

A matriz M associada ao mapa $R^2 \rightarrow R^3$ é uma matriz 3×2 com entradas em $\mathbb{C}[x, y, z]$, cujos menores maximais geram o ideal Λ , dado que os geradores do ideal são polinômios homogêneos de grau 2 temos que as entradas da matriz M são formas lineares. Assim, transposta da matriz M está na pré-imagem em $U \subset \mathcal{M}_{2 \times 3}(S_1)$ da rede Λ .

Note que a rede I^* tem na pré-imagem $\begin{pmatrix} x & 0 & -z \\ 0 & x & y \end{pmatrix} \in U$.

Agora, como o mapa \mathcal{T} é equivariante pela ação de $GL_3(\mathbb{C})$ então temos a sobrejetividade, $\mathcal{T}(U) = \mathcal{D}$.

Uma outra forma de provar a sobrejetividade do mapa \mathcal{T} é tomar a classificação das redes de cônicas em $G(3, S_2)$ feita por C.T.C. Wall [1]. Ele classificou as redes de cônicas,

sobre o corpo dos complexos \mathbb{C} , nas seguintes 16:

$$\begin{array}{l|lll}
A & 2xz + y^2 & 2yz & -x^2 - 2gy^2 + cz^2 + 2gxz \\
B & 2xz + y^2 & 2yz & -x^2 - 2gy^2 - 9g^2z^2 + 2gxz \\
B^* & 2xz + y^2 & 2yz & -x^2 - 2gy^2 + 2gxz \\
C & 2xz + y^2 & 2yz & -x^2 \\
D & x^2 & y^2 & z^2 + 2xy \\
D^* & 2xz & 2yz & z^2 + 2xy \\
E & x^2 & y^2 & z^2 \\
E^* & 2yz & 2zx & 2xy \\
F & x^2 & y^2 & 2zx + 2zy \\
F & 2xz & 2yz & x^2 + z^2 \\
F^* & x^2 & 2xy & y^2 + z^2 \\
G & x^2 & y^2 & 2yz \\
G^* & x^2 & 2xy & 2yz \\
H & x^2 & 2xy & y^2 + 2xz \\
I & x^2 & 2xy & y^2 \\
I^* & 2xz & 2yz & z^2
\end{array}$$

onde $c, g \in \mathbb{C}$ são parâmetros. Esta classificação é única a menos de mudanças de coordenadas (conferir [1]).

Mas, as que satisfazem a condição do posto ser no máximo 7, ou seja pertencem à \mathcal{D} , são as seguintes:

$$\begin{array}{l|lll}
E^* & 2yz & 2zx & 2xy \\
G^* & x^2 & 2xy & 2yz \\
I & x^2 & 2xy & y^2 \\
I^* & 2xz & 2yz & z^2
\end{array} .$$

Como já verificamos em linhas acima, as redes E^* (a rede que gera a órbita aberta), I e I^* tem pré-imagem em U . Podemos verificar que a rede G^* também tem uma pré-imagem em U , por exemplo $\begin{pmatrix} x & z & 0 \\ 0 & x & y \end{pmatrix}$.

Agora, como o mapa \mathcal{T} é equivariante, segue a sobrejetividade, $\mathcal{T}(U) = \mathcal{D}$.

Para provar que \mathcal{T} é um morfismo dominante usaremos o fato que acabamos de provar: $\mathcal{T}(U) \subset \mathcal{D}$. Como \mathcal{D} contém a órbita aberta de $\langle xy, xz, yz \rangle$ (ver proposição (3.8)), que tem uma pré-imagem em U , segue que $\langle xy, xz, yz \rangle$ e sua órbita (que é aberta em \mathcal{D}) também estão contidas na imagem $\mathcal{T}(U)$ desde que \mathcal{T} é equivariante. Agora, nós temos que $\mathcal{O}(\langle xy, xz, yz \rangle) \subset \mathcal{T}(U) \subset \mathcal{D}$ pelo que $\mathcal{T}(U)$ é denso em \mathcal{D} .

Finalmente provaremos que \mathcal{T} é uma submersão.

Considere o conjunto

$$F := \{\Lambda \in \mathcal{D} \ ; \ \text{o mapa tangente não é sobrejetivo em algum ponto de } \mathcal{T}^{-1}(\Lambda)\}.$$

Nós vamos provar que $F = \emptyset$.

Suponha, por contradição, que $F \neq \emptyset$. Como F é fechado e invariante, F deve conter uma órbita fechada. Então basta verificar num representante de cada órbita fechada. Como já provamos (proposição (3.6)), existem duas únicas órbitas fechadas, as órbitas das redes I e I^* . Nós demonstraremos que o mapa tangente é sobrejetivo naquelas duas redes I e I^* o que resultará na contradição desejada.

1. Para a rede

$$I^* = \langle x^2, xy, xz \rangle$$

note que os geradores da rede tem divisor comum $\text{mdc}(I^*) = x$.

Esta rede tem com pré-imagem, via nosso morfismo \mathcal{T} , a matriz com entradas lineares:

$$m = \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & x & y \end{pmatrix} \in U$$

Se nós a perturbarmos em U , para obter um vetor tangente, por uma matriz

$$\begin{pmatrix} b_1x + b_2y + b_3z & b_4x + b_5y + b_6z & b_7x + b_8y + b_9z \\ b_{10}x + b_{11}y + b_{12}z & b_{13}x + b_{14}y + b_{15}z & b_{16}x + b_{17}y + b_{18}z \end{pmatrix},$$

onde $b_i b_j = 0$, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} m_0 &= \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & x & y \end{pmatrix} + \\ &\begin{pmatrix} b_1x + b_2y + b_3z & b_4x + b_5y + b_6z & b_7x + b_8y + b_9z \\ b_{10}x + b_{11}y + b_{12}z & b_{13}x + b_{14}y + b_{15}z & b_{16}x + b_{17}y + b_{18}z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1x + b_2y + b_3z + x & b_4x + b_5y + b_6z & b_7x + b_8y + b_9z + z \\ b_{10}x + b_{11}y + b_{12}z & b_{13}x + b_{14}y + b_{15}z + x & b_{16}x + b_{17}y + b_{18}z + y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Calculamos o ideal dos menores 2 por 2 desta matriz m_0 ,

$$\begin{aligned} &\langle -b_1x^2 - b_2xy - b_3xz - b_{13}x^2 - b_{14}xy - b_{15}xz - x^2, \\ &-b_1xy - b_2y^2 - b_3yz + b_{10}xz + b_{11}yz + b_{12}z^2 - b_{16}x^2 - b_{17}xy - b_{18}xz - xy, \\ &b_4xy + b_5y^2 + b_6yz - b_7x^2 - b_8xy - b_9xz - b_{13}xz - b_{14}yz - b_{15}z^2 - xz \rangle, \end{aligned} \quad (3.8)$$

agora note que este ideal pertence à vizinhança de $q_0 = \langle -x^2, -xy, -xz \rangle = \langle x^2, xy, xz \rangle$ (nossa origem) em $G(3, S_2)$, onde um ponto nesta vizinhança afim de q_0 pode se representar, em forma geral, como uma matriz:

$$\begin{pmatrix} x^2 & xy & xz & y^2 & yz & z^2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Por outro lado, a representação matricial de (3.8) é:

$$\begin{pmatrix} x^2 & xy & xz & y^2 & yz & z^2 \\ \hline (b_1 + b_{13} + 1) & (b_2 + b_{14}) & (b_3 + b_{15}) & 0 & 0 & 0 \\ b_{16} & (b_1 + b_{17} + 1) & (b_{18} - b_{10}) & b_2 & (b_3 - b_{11}) & -b_{12} \\ b_7 & (b_8 - b_4) & (b_9 + b_{13} + 1) & -b_5 & (-b_6 + b_{14}) & b_{15} \end{pmatrix},$$

que podemos reduzir na seguinte matriz

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz & y^2 & yz & z^2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 & b_3 - b_{11} & -b_{12} \\ 0 & 0 & 1 & -b_5 & (-b_6 + b_{14}) & b_{15} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Comparando (3.10) e (3.9), temos as coordenadas afins a_{ij} , da vizinhança ao redor da rede I^* , em função dos parâmetros b_k .

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0 & a_{12} &= 0 & a_{13} &= 0 \\ a_{21} &= b_2 & a_{22} &= b_3 - b_{11} & a_{23} &= -b_{12} \\ a_{31} &= -b_5 & a_{32} &= -b_6 + b_{14} & a_{33} &= b_{15} \end{aligned}$$

Logo de fazer uma eliminação dos parâmetros b_k , encontramos as relações independentes $a_{11} = a_{12} = a_{13} = 0$.

Portanto vemos que o mapa tem posto igual à $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{T}_{I^*} \mathcal{D} = 6$ sobre a rede I^* . Como já provamos que \mathcal{D} é não singular (proposição (3.7)), temos que $6 = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{T}_{I^*} \mathcal{D}) = \dim \mathcal{D}$. Ou seja o mapa tangente neste ponto é sobrejetivo.

Analogamente num representante da outra órbita fechada, a rede $I = \langle x^2, xy, y^2 \rangle$, teremos que $6 = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{T}_I \mathcal{D}) = \dim \mathcal{D}$, pelo qual o mapa tangente na rede I é sobrejetivo.

Assim nós temos uma contradição, portanto $F = \emptyset$ e temos que o mapa tangente é sobrejetivo em todo ponto de U , ou seja \mathcal{T} é uma submersão.

2. Como outro exemplo, tome a rede de cônicas

$$u = \langle xy, xz, yz \rangle$$

cujos geradores não tem fator comum, $\text{mdc}(u) = 1$. Vamos a provar que esta rede é de tipo determinantal. Considere a relação:

$$Axy + Bxz + Cyz = 0.$$

Como y não divide x nem z temos então que y divide B , ou seja $B = by$. Substituindo temos:

$$Ax + bxz + Cz = 0.$$

Analogamente, como z não divide x então z divide A , ou seja $A = az$. Substituindo temos:

$$ax + bx + C = 0.$$

Logo temos a relação $C = (-a - b)x$.

Finalmente podemos representar todas as relações da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} C & B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-a - b)x & by & az \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x & y & 0 \\ -x & 0 & z \end{pmatrix},$$

onde

$$m := \begin{pmatrix} -x & y & 0 \\ -x & 0 & z \end{pmatrix}$$

é a matriz cujos menores maximais geram a rede esperada $\langle -xy, -xz, yz \rangle = u$.

Definimos :

$$b := \begin{pmatrix} b_1x + b_2y + b_3z & b_4x + b_5y + b_6z & b_7x + b_8y + b_9z \\ b_{10}x + b_{11}y + b_{12}z & b_{13}x + b_{14}y + b_{15}z & b_{16}x + b_{17}y + b_{18}z \end{pmatrix}$$

sob a condição de que $b_i b_j = 0$ (por se tratar de vetor tangente).

Agora vamos a perturbar a matriz m com o vetor b fazendo

$$m_0 = m + b = \begin{pmatrix} -x & y & 0 \\ -x & 0 & z \end{pmatrix} + b$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 x + b_2 y + b_3 z - x & b_4 x + b_5 y + b_6 z + y & b_7 x + b_8 y + b_9 z \\ b_{10} x + b_{11} y + b_{12} z - x & b_{13} x + b_{14} y + b_{15} z & b_{16} x + b_{17} y + b_{18} z + z \end{pmatrix}$$

Calculamos a rede de cônicas gerada pelos menores maximais da matriz m_0 :

$$\langle -b_4 x z - b_5 y z - b_6 z^2 - b_{16} x y - b_{17} y^2 - b_{18} y z - y z, \\ b_4 x^2 + b_5 x y + b_6 x z - b_{10} x y - b_{11} y^2 - b_{12} y z - b_{13} x^2 - b_{14} x y - b_{15} x z + x y, \\ -b_1 x z - b_2 y z - b_3 z^2 - b_7 x^2 - b_8 x y - b_9 x z + b_{16} x^2 + b_{17} x y + b_{18} x z + x z \rangle.$$

Escrevendo esta rede na forma de uma matriz

$$u = \begin{pmatrix} yz & xy & xz & x^2 & y^2 & z^2 \\ -b_5 - b_{18} - 1 & -b_{16} & -b_4 & 0 & -b_{17} & -b_6 \\ -b_{12} & +b_5 - b_{10} - b_{14} + 1 & +b_6 - b_{15} & b_4 - b_{13} & -b_{11} & 0 \\ -b_2 & -b_8 + b_{17} & -b_1 - b_9 + b_{18} + 1 & -b_7 + b_{16} & 0 & -b_3 \end{pmatrix}$$

Reduzindo esta matriz por operações linha, temos

$$u = \begin{pmatrix} yz & xy & xz & x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & b_{17} & b_6 \\ 0 & 1 & 0 & b_4 - b_{13} & -b_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_{16} - b_7 & 0 & -b_3 \end{pmatrix}$$

Esta rede pertence à vizinhança de $q_0 = \langle -yz, xy, xz \rangle = \langle xy, xz, yz \rangle$.

Um elemento da vizinhança afim ao redor desta rede em \mathcal{D} é da forma

$$\begin{pmatrix} yz & xy & xz & x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Logo temos as coordenadas afins a_{ij} em função dos parâmetros b_k

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0 & a_{12} &= b_{17} & a_{13} &= b_6 \\ a_{21} &= b_4 - b_{13} & a_{22} &= -b_{11} & a_{23} &= 0 \\ a_{31} &= -b_7 + b_{16} & a_{32} &= 0 & a_{33} &= -b_3 \end{aligned}$$

Fazendo uma eliminação dos parâmetros b_k , temos novamente três equações independentes $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$. Pelo que o mapa tangente na rede u tem posto $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{T}_u \mathcal{D}) = 6$. \square

A última parte da prova anterior, provar que o mapa \mathcal{T} é uma submersão, pode ser feita também verificando a sobrejetividade do mapa tangente em todos os pontos de U , pelo qual também teríamos que o mapa \mathcal{T} tem posto constante igual à 6. Mas na verdade, só precisemos escolher alguns pontos específicos.

Seja $\langle Q_1, Q_2, Q_3 \rangle \in G(3, S_2)$. Como $G(3, S_2)$ pode ser coberto por abertos afins \mathcal{U}_i , então $\langle Q_1, Q_2, Q_3 \rangle \in \mathcal{U}_i$ para algum i e pode ser representado por uma matriz:

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ 1 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

onde os $u_i \in \{x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz\}$. Segue que só precisamos olhar para as vizinhanças de alguns pontos $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle \in \mathcal{D}$, onde $u_1, u_2, u_3 \in \{x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz\}$. Temos em total $\binom{6}{3} = 20$ possíveis pontos em $G(3, S_2)$, mas precisamos que eles estejam em \mathcal{D} (note que por exemplo $\langle x^2, y^2, z^2 \rangle \in G(3, S_2)$ mas não pertence a \mathcal{D}). Ou seja $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ tem que satisfazer a condição de que o mapa linear:

$$\langle u_1, u_2, u_3 \rangle \otimes S_1 \rightarrow S_3, \quad \text{tem posto} \leq 7$$

Isto pode ser feito usando **SINGULAR**. No algoritmo (3.3) calculamos que são 13 os pontos que satisfazem a condição do posto e verificamos que naqueles 13 pontos o mapa

$$\mathcal{T} : \mathcal{T}^{-1}(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{D}) \cap U \subset \mathbb{A}^{18} \rightarrow \mathcal{U}_i \cap \mathcal{D} \subset \mathbb{A}^9$$

tem posto constante 6.

Epílogo

Sejam dados três pontos $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}^2$ não alinhados. Um fato conhecido é que a variedade $\mathbb{X} := \{P_1, P_2, P_3\}$ tem polinômio de Hilbert $Ph_{\mathbb{X}} = 3$.

Então podemos observar que a família de três pontos não colineares em \mathbb{P}^2 , está contida em

$$\mathcal{H}_3 := \{\mathbb{X} \subset \mathbb{P}^2 ; Ph_{\mathbb{X}} = 3\}$$

que tem uma estrutura de esquema (seção VI.2.2 [4]). Além disso, pela proposição (2.4), \mathcal{H}_3 mergulha em $G(7, S_3)$ ($\mathbb{X} \mapsto I(\mathbb{X})_3$) e sua imagem será o esperado $Hilb^3\mathbb{P}^2$ (seção VI.2.2 [4]).

Nós caracterizamos as redes de cônicas que são de tipo determinantal em nossa variedade \mathcal{D} . Mas observe que nem todas as redes nós permitem determinar três pontos. O problema é nos pontos alinhados, por exemplo o lugar dos zeros da rede $\langle x^2, xy, xz \rangle$ é \mathbb{P}^1 e tem polinômio de Hilbert $1 + t \neq 3$. Como dissemos na seção (3.1), precisamos estudar as cúbicas que passam pelos 3 pontos.

Usando o programa **SINGULAR** fizemos um algoritmo (3.4) para calcular a família \mathcal{C} de 7 cúbicas linearmente independentes que passam pelos 3 pontos, ou seja a família $\mathcal{C} \subset G(7, S_3)$ de sub-espacos vetoriais de dimensão 7 de S_3 , satisfazendo a condição de que o mapa $\Lambda \otimes S_1 \rightarrow S_4$ tem posto ≤ 12 , para todo $\Lambda \in \mathcal{C}$. Além disso, calcularemos o espaco tangente em cada ponto de \mathcal{C} (na verdade precisamos olhar só em alguns pontos, os determinados por 7 monômios cúbicos que satisfazem a condição do posto ≤ 12) e verificaremos que em cada ponto a dimensão do espaco tangente é igual a 6, a dimensão esperada. \mathcal{C} será nosso $Hilb^3\mathbb{P}^2$ mergulhado na grassmanniana de 7 cúbicas.

Os subespacos que precisamos examinar são os 22 seguintes, cujos geradores são os monômios que se encontram em cada linha da lista abaixo, que satisfazem a referida condição do posto:

(1)	xy^2	xyz	xz^2	y^3	y^2z	yz^2	z^3
(2)	x^2z	xyz	xz^2	y^3	y^2z	yz^2	z^3
(3)	x^2z	xy^2	xyz	xz^2	y^2z	yz^2	z^3
(4)	x^2z	xy^2	xyz	xz^2	y^3	y^2z	yz^2
(5)	x^2y	xy^2	xyz	y^3	y^2z	yz^2	z^3
(6)	x^2y	xy^2	xyz	xz^2	y^2z	yz^2	z^3
(7)	x^2y	xy^2	xyz	xz^2	y^3	y^2z	yz^2
(8)	x^2y	x^2z	xyz	xz^2	y^2z	yz^2	z^3
(9)	x^2y	x^2z	xy^2	xyz	y^3	y^2z	yz^2
(10)	x^2y	x^2z	xy^2	xyz	xz^2	yz^2	z^3
(11)	x^2y	x^2z	xy^2	xyz	xz^2	y^2z	yz^2
(12)	x^2y	x^2z	xy^2	xyz	xz^2	y^3	y^2z
(13)	x^3	x^2z	xyz	xz^2	y^2z	yz^2	z^3
(14)	x^3	x^2y	xy^2	xyz	y^3	y^2z	yz^2
(15)	x^3	x^2y	x^2z	xyz	xz^2	yz^2	z^3
(16)	x^3	x^2y	x^2z	xyz	xz^2	y^2z	yz^2
(17)	x^3	x^2y	x^2z	xy^2	xyz	y^2z	yz^2
(18)	x^3	x^2y	x^2z	xy^2	xyz	y^3	y^2z
(19)	x^3	x^2y	x^2z	xy^2	xyz	xz^2	z^3
(20)	x^3	x^2y	x^2z	xy^2	xyz	xz^2	yz^2
(21)	x^3	x^2y	x^2z	xy^2	xyz	xz^2	y^2z
(22)	x^3	x^2y	x^2z	xy^2	xyz	xz^2	y^3

Todos eles tem polinômio de Hilbert igual a 3.

Vamos encontrar a dimensão do espaço tangente de um destes subespaços, os demais seguem do algoritmo. Por exemplo, para o subespaço cujos geradores são os monômios da linha 22:

$$J_{22} = \langle x^3, x^2y, x^2z, xy^2, xyz, xz^2, y^3 \rangle.$$

Lembremos que nós podemos representar o subespaço $J_{22} \in G(7, S_3)$ como uma matriz 7×10 cujas entradas são os coeficientes dos monômios de grau três em $\mathbb{C}[x, y, z]$. Se perturbarmos por uma matriz $[a_{ij}]_{7 \times 3}$ tal que os produtos $a_{ij}a_{kl} = 0$ (condição para o cálculo do espaço tangente), temos agora a matriz perturbada $J_{22} + [a_{ij}]$ (um ponto de $G(7, S_3)$ em uma vizinhança de J_{22}). Podemos multiplicar pelas formas lineares S_1 e impor a condição de que o mapa $\Lambda \otimes S_1 \rightarrow S_4$ tem posto menor o igual que 12, onde $\Lambda = J_{22} + [a_{ij}]$. Podemos representar a imagem do mapa na seguinte matriz, onde cada linha é a imagem dos geradores de $\Lambda \otimes S_1$.

$$\begin{pmatrix}
x^4 & x^3y & x^3z & x^2y^2 & x^2yz & x^2z^2 & xy^3 & xy^2z & xyz^2 & xz^3 & y^4 & y^3z & y^2z^2 & yz^3 & z^4 \\
\boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\
0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{41} & a_{42} & a_{43} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a_{51} & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & a_{51} & a_{52} & a_{53} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & a_{51} & a_{52} & a_{53} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a_{61} & a_{62} & a_{63} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a_{61} & a_{62} & a_{63} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & a_{61} & a_{62} & a_{63} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{71} & a_{72} & a_{73} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & a_{71} & a_{72} & a_{73} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & a_{71} & a_{72} & a_{73}
\end{pmatrix}$$

Observe que temos 12 pivôs pelos quais poderemos reduzir a matriz. Depois de fazer a redução por operações linhas até obter uma matriz por blocos com um bloco 12×15 , que possui um bloco identidade $I_{12 \times 12}$, para que a condição de posto ≤ 12 se satisfaça precisamos que a matriz complementar seja nula:

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{12} & -a_{13} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{21} + a_{32} & -a_{22} + a_{33} & -a_{23} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{22} & -a_{23} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{41} + a_{52} & -a_{42} + a_{53} & -a_{43} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{51} + a_{62} & -a_{52} + a_{63} & -a_{53} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{42} & -a_{43} & 0
\end{pmatrix}$$

Obtemos assim as equações do espaço tangente a J_{22} no lugar de $G(7, S_3)$ definido pela condição de que o posto do mapa $\Lambda \otimes S_1 \rightarrow S_3$ tem que ser ≤ 12 , cujas equações estão dadas pelas seguintes 15 relações independentes:

$$\begin{aligned}
& a_{53}, \quad a_{52} - a_{63}, \quad a_{51} - a_{62}, \\
& a_{43}, \quad a_{42} - a_{53}, \quad a_{41} - a_{52}, \\
& a_{33}, \quad a_{32}, \quad a_{31}, \\
& a_{23}, \quad a_{22} - a_{33}, \quad a_{21} - a_{32}, \\
& a_{13}, \quad a_{12}, \quad a_{11}
\end{aligned}$$

De onde temos que a dimensão cai para $21 - 15 = 6$ (observe que $\dim G(7, S_3) = 21$).

Da lista acima, de nossos subespaços de cúbicas, podemos ver como alguns deles provêm de nossas redes de cônicas através do mapa de multiplicação $\Lambda \otimes S_1 \rightarrow S_3$, com $\Lambda \in \mathcal{D}$.

Usando o algoritmo (3.3) encontraremos quais subespaços de cúbicas provêm de redes de cônicas que pertencem a \mathcal{D} , mas veja que analogamente como no caso das cúbicas, precisamos de estudar só 13 tipos de redes (dadas pelos monômios quadráticos) que a seguir enumeramos:

$$\begin{array}{l|l} (A) & x^2 \quad xy \quad xz \\ (B) & x^2 \quad xy \quad y^2 \\ (C) & x^2 \quad xy \quad yz \\ (D) & x^2 \quad xz \quad yz \\ (E) & x^2 \quad xz \quad z^2 \\ (F) & xy \quad xz \quad y^2 \\ (G) & xy \quad xz \quad yz \\ (H) & xy \quad xz \quad z^2 \\ (I) & xy \quad y^2 \quad yz \\ (J) & xy \quad yz \quad z^2 \\ (K) & xz \quad y^2 \quad yz \\ (L) & xz \quad yz \quad z^2 \\ (M) & y^2 \quad yz \quad z^2 \end{array}$$

multiplicando pelas lineares via o mapa $\Lambda \otimes S_1 \rightarrow S_3$, temos que:

$$\begin{array}{l|l} (A) & x^3 \quad x^2y \quad x^2z \quad xy^2 \quad xyz \quad xz^2 \\ (B = 18) & x^3 \quad x^2y \quad x^2z \quad xy^2 \quad xyz \quad y^3 \quad y^2z \\ (C = 17) & x^3 \quad x^2y \quad x^2z \quad xy^2 \quad xyz \quad y^2z \quad yz^2 \\ (D = 16) & x^3 \quad x^2y \quad x^2z \quad xyz \quad xz^2 \quad y^2z \quad yz^2 \\ (E = 15) & x^3 \quad x^2y \quad x^2z \quad xyz \quad xz^2 \quad yz^2 \quad z^3 \\ (F = 12) & x^2y \quad xy^2 \quad xyz \quad x^2z \quad xz^2 \quad y^3 \quad y^2z \\ (G = 11) & x^2y \quad xy^2 \quad xyz \quad x^2z \quad xz^2 \quad y^2z \quad yz^2 \\ (H = 10) & x^2y \quad xy^2 \quad xyz \quad x^2z \quad xz^2 \quad yz^2 \quad z^3 \\ (I) & x^2y \quad xy^2 \quad xyz \quad y^3 \quad y^2z \quad yz^2 \\ (J = 6) & x^2y \quad xy^2 \quad xyz \quad y^2z \quad yz^2 \quad xz^2 \quad z^3 \\ (K = 4) & x^2z \quad xyz \quad xz^2 \quad xy^2 \quad y^3 \quad y^2z \quad yz^2 \\ (L) & x^2z \quad xyz \quad xz^2 \quad y^2z \quad yz^2 \quad z^3 \\ (M = 1) & xy^2 \quad y^3 \quad y^2z \quad xyz \quad yz^2 \quad xz^2 \quad z^3 \end{array}$$

logo, podemos ver quais cúbicas provêm das redes de cônicas. Note que nas redes que tem $mdc \neq 1$ o mapa racional

$$\Gamma : \mathcal{D} \dashrightarrow G(7, S_3), \quad \Lambda \mapsto \mu_1(\Lambda)$$

onde μ_1 é como na seção (2.6), não está definido.

De fato, uma forma de calcular o \mathcal{H}_3 é fazer a explosão (blow-up) de \mathcal{D} ao longo da órbita I^* formada pelas redes com $mdc \neq 1$ o mapa:

$$\Gamma : \mathcal{D} \setminus I^* \rightarrow G(7, S_3), \quad \Lambda \mapsto \mu_1(\Lambda)$$

está bem definido. Definimos $\mathcal{D}' := \overline{\text{Graf}(\Gamma)} \subset \mathcal{D} \times G(7, S_3)$, onde $\text{Graf}(\Gamma)$ denota o gráfico de Γ . Mostra-se que \mathcal{D}' é a explosão de \mathcal{D} ao longo de I^* e isomorfa a imagem do

mergulho de \mathcal{H}_3 em $G(7, S_3)$, a família \mathcal{C} de subespaços de codimensão 3 do espaço das cúbicas S_3 , nosso $Hilb^3\mathbb{P}^2$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_3 \cong \mathcal{D}' & \longrightarrow & \mathcal{D} \times G(7, S_3) \\ & \searrow \text{blow-up} & \downarrow \pi_1 \\ & & \mathcal{D} \end{array}$$

□

Apêndice

Todos os algoritmos usam as rotinas de “myprocs” de autoria do professor Israel Vainsencher, que estão disponibilizadas em um script no final deste apêndice.

Os algoritmos podem ser copiados/colados para a página pública:

<https://www.singular.uni-kl.de:8003/>

Algoritmo 3.1.

```
//-----INICIO-----

<"myprocs";
ring P2=0,x(0..2),dp;
ideal xx=ideal(x(0..2));
poly xxx=product(xx);

ring R=0,(a(1..3)(1..3)),dp;
R=R+P2;
setring R;
imapall(P2);

//Definimos o ideal I*=(x(0)^2,x(0)*x(1),x(0)*x(2))

ideal q0= x(0)*x(0..2);
q0;
ideal q=q0;
ideal xx20=omit(xx^2,q0);

//perturbamos "q0" numa vizinhanca afim a(1..3)(1..3)

for(int i=1;i<=3;i++){
  q[i]=q[i]+dotprod(xx20,[a(i)(1..3)]);
}

ideal q3=q*xx;
matrix m=transpose(coeffs(q3,xx^3,xxx));

list L=rowsnopivo(m);
m=L[1];
matrix m0=submat(m,L[2],1..10);
```

```
list primdec=primdecGTZ(minor(m0,2));
ideal rad=radical(minor(m0,2));

//As equações de D ao redor de I*
ideal putsolv=putsolvform(rad);
putsolv;
//-----FIN-----
```


Algoritmo 3.2.

```
//-----INICIO-----

<"myprocs";
ring P2=0,x(0..2),dp;
ideal xx=ideal(x(0..2));
poly xxx=product(xx);

ring R=0,(a(1..3)(1..3)),dp;
R=R+P2;
setring R;
imapall(P2);

//Definimos o ideal I=(x(0)^2,x(0)*x(1),x(1)^2)

ideal q0= ideal(x(0),x(1))^2;
q0;
ideal q=q0;
ideal xx20=omit(xx^2,q0);

//perturbamos "q0" numa vizinhanca afim a(1..3)(1..3)

for(int i=1;i<=3;i++){
  q[i]=q[i]+dotprod(xx20,[a(i)(1..3)]);
}

ideal q3=q*xx;
matrix m=transpose(coeffs(q3,xx^3,xxx));

def L=rowsnopivo(m);
m=L[1];
matrix m0=submat(m,L[2],1..10);

list l=primdecGTZ(ideal(m0));
ideal putsolv=putsolvform(l[1][1]);
putsolv;
//-----FIN-----
```

Algoritmo 3.3.

```

//-----INICIO-----
<"myprocs";
ring P2=0,x(0..2),dp;
ideal xx=ideal(x(0..2));
poly xxx=product(xx);
ideal xx2=xx^2;
ring rx=basing;

//Vizinhanca afim em G(3,S_2)
ring r=0,(a(1..3)(1..(size(xx2)-3))),dp;
r=r+rx;
setring r;
imapall(rx);
ideal aa=ideal(a(1..3)(1..(size(xx2)-3)));

//Calculamos a imagem do mapa tangente

ring r1=0,(b(1..2*3*size(xx))),dp;
r1=r1+r;
setring r1;
imapall(r);

ideal bb=ideal(b(1..6*size(xx)));
ideal bb2=std(bb^2);

//Lista das redes de cônicas
list ptf;
ideal q0;
poly p;

for(int i=1;i<=size(xx2);i++) {
  for(int j=i+1;j<=size(xx2);j++) {
    for(int k=j+1;k<=size(xx2);k++) {
      q0=(xx2[i],xx2[j],xx2[k]);
      p=mdc(q0);
      if(p==1 or size(indets(q0))<=3) {
        if(size(std(q0*xx))<=size(ideal(x(0..1))^2*xx)) {
          ptf[1+size(ptf)]=q0;
        }
      }
    }
  }
}

ptf;" ";

ideal u,bb0,nmldet;
matrix m[2][3];

```

```

matrix m0[2][3];

for(int i=1;i<=size(ptf);i++){
  //"start i="+see(i);
  if(defined(remember)){
    kill remember;
  }
  u=ptf[i];
  p=mdc(u);

  // Se os geradores da rede tem MDC...
  if(p<>1){
    u=omit(std(ideal(u/p)),p);
    m=p,0,u[1],
      0,p,u[2];
  }

  // Se os geradores da rede não tem MDC...
  else{
    def l=res(u,0);
    m=transpose(matrix(l[2]));
  }

  m0=m;
  bb0=bb;
  for(int i0=1;i0<=2;i0++){
    for(int j0=1;j0<=3;j0++){
      m0[i0,j0]=m0[i0,j0]+dotprod([bb0[1..size(xx)]],(xx));
      bb0=omit(bb0, ideal(bb0[1..size(xx)]));
    }
  }

  u=reduce(minor(m0,2),bb2);
  q0=origin(bb,u);

  for(int i0=1;i0<=size(q0);i0++){
    q0[i0],u[i0]=um(xx,q0[i0])*q0[i0],um(xx,q0[i0])*u[i0];
  }

  ideal q;
  for(int i0=1;i0<=3;i0++){
    q[1+size(q)]=q0[i0]+dotprod(omit(xx2,q0),[a(i0)(1..(size(xx2)-3))]);
  }

  intvec iv;
  int ij;
  for(int ii=1;ii<=3;ii++){
    iv=omit(1..3,ii);

```

```

    p=coefmon(u[ii],q0[ii]);
    u[ii]=reduce(u[ii]*(2-p),bb2);
    p=coefmon(u[ii],q0[ii]);

    for(int j=1;j<=2;j++){
        ij=iv[j];
        p=coefmon(u[ij],q0[ii]);
        u[ij]=reduce(u[ij]-p*u[ii],bb2);
    }
}

//A imagem do mapa tangente, em coordenadas a(i)(j)
nmldet=ideal(matrix(q)-matrix(u));
nmldet=ideal(transpose(coeffs(nmldet,xx2,xxx)));
nmldet=eliminate(nmldet,product(bb));
nmldet;" ";

ptf[i]=list(q,nmldet);

}

//-----FIN-----

```

Algoritmo 3.4.

```
//-----INICIO-----

<"myprocs";
ring P2=0,x(0..2),dp;
ideal xx=ideal(x(0..2));
poly xxx=product(xx);
ideal xx2,xx3,xx4=xx^2,xx^3,xx^4;

ring R=0,(a(1..7)(1..3)),dp;
R=R+P2;
setring R;
imapall(P2);

//Lista de subespaços de Cúbicas
list redesC;
list m;

//Encontramos os possíveis subespaços de monômios cúbicos (C1,...,C7)
for(int i=1; i<=10; i++){
  for(int j =i+1; j<=10; j++){
    for(int k=j+1; k<=10; k++){
      if( size(std(omit(xx3,ideal(xx3[i],xx3[j],xx3[k]))*xx)) <= 12 ){
        redesC[1+size(redesC)]=omit(xx3,ideal(xx3[i],xx3[j],xx3[k]));
      }
    }
  }
}

"//Os subespaços de cúbicas (C1,...,C7)";" ";
redesC;" ";
list redesC1=redesC;
list IredesC1;
list quart;
list L;
list m0;

for(j=1; j<=size(redesC);j++){
  for(i=1;i<=7;i++){
    redesC1[j][i]=redesC1[j][i]+dotprod(omit(xx3,redesC[j]),[a(i)(1..3)]);
  }

  quart[j]=redesC1[j]*xx;
  m[j]=transpose(coeffs(quart[j],xx4,xxx));
  L[j]=rownopivo(m[j]);
  m[j]=jet(L[j][1],1);
  m0[j]=submat(m[j],L[j][2],1..15);
  IredesC1[j]=ideal(minor(m0[j],size(L[j][2])-8));
}
```

```
IredesC1[j]=std(jet(IredesC1[j],1));  
  
}  
  
"//Equações do espaço tangente ao redor de cada rede de cúbicas"; "  
IredesC1;  
  
//-----FIN-----
```

Algoritmo 3.5.

```

//||=====||
//||                      MYPROCS                      ||
//||=====||

option (noloadLib,noredefine);
//=====

LIB "linalg.lib";
LIB "poly.lib";
//=====

proc summ//(ideal y)
{
  def s,ty=size(#),typeof(#[1]);
  poly p;int i;
  if(ty=="ideal"){
    def y=#[1];
    matrix m=matrix(y);//bypass size problem
    for(i=1;i<=ncols(m);i++){
      p=p+m[1,i];
    }
  }
  else{
    for(i=1;i<=s;i++){
      p=p+#[i];
    }
  }
  return(p);
}
//=====

proc pol2id(poly p)
{
  ideal I;
  for(int i=1;i<=size(p);i++){
    I[i]=p[i];
  }
  return(I);
}
//=====

proc indets(p)//returns sum of variables
{
  int i,j,s;poly v,w,v1;ideal pp;
  //typeof(p);
  if (typeof(p)=="int" or typeof(p)=="intvec"
    or typeof(p)=="intmat" or typeof(p)=="number"){
    v=0;return(v);
  }
}

```

```

}
else{
  //"//not int,intvec,intmat...";
  if(typeof(p)=="poly"){
    //"//poly";
    for (i=1;i<=nvars(basering);i++){
      if(reduce(p,std(var(i))<>p){
        v=v+var(i);
      }
    }
    return(v);
  }
  else{
    if(typeof(p)=="ideal") {
      //"//ideal";
      pp=simplify(p,2);s=size(pp);w=0;
      if(s==0){v=0;return(v);}
      else{
        for(i=1;i<=s;i++){
          v=indets(pp[i]);
          if(v<>0){
            v1=leadmonom(v);
            w=w+v*v1^i;
          }
        };
        return(indets(w));
      }
    }
    else{
      if (typeof(p)=="vector" or typeof(p)=="matrix"){
        //"//vec,mat";
        return(indets(ideal(p)));
      }
      else{
        if (typeof(p)=="list"){
          //"//list";
          def s=size(p);
          if (s==0){return(poly(0));}
          else{
            ideal pp;
            for(i=1;i<=s;i++){
              pp[i]=indets(p[i]);
            }
            return(indets(pp));
          }
        }
      }
    }
  }
}

```



```

    }
  }
}

//=====

proc coefmon(poly p, poly m)
//coeff of monom m in poly p
{
  if(m==1 or p==0){
    return(jet(p,0));
  }
  else{
    ideal m1=std(m);
    def v=std(pol2id(indets(m)));
    poly q0;
    for(int i=1;i<=size(p);i++){
      def q=reduce(p[i],m1);
      if(q==0){
        q=p[i]/m;
        if(reduce(q,v)==q){
          q0=q0+q;
        }
      }
    }
    return(q0);
  }
}

//=====

proc row(matrix mm,int i)
{
  ideal w;
  for (int j=1;j<=ncols(mm);j++){
    w[j]=mm[i,j];
  }
  return(w);
}

//=====
def stm,stp,comma="-","+",",",";
//=====
proc dotprod( w1, w2)
{
  //"//type "+typeof(w1)+typeof(w2);
  if(typeof(w1)=="list"& typeof(w1)=="list"){
    int s=min(size(w1),size(w2));
    poly p;

```

```

    for (int j=1;j<=s;j++){
        p=p+w1[j]*w2[j];
    }
    return(p);
}
else{
    list v1,v2;
    if(typeof(w1)=="vector"){//"/w1 vector";
        for(int i=1;i<=nrows(w1);i++){
            v1[i]=w1[i];
        }
    }
    else{
        if(typeof(w1)=="ideal") {//"/w1 ideal";
            for(int i=1;i<=ncols(w1);i++){
                v1[i]=w1[i];
            }
        }
        else{
            if(typeof(w1)=="intvec"){//"/w1 intvec";
                for(int i=1;i<=size(w1);i++){
                    v1[i]=w1[i];
                }
            }
            else{
                ERROR(typeof(w1)+"?w1?not (int)vector nor ideal");
            }
        }
    }
    if(typeof(w2)=="vector") {//"/w2 vector";
        for(int i=1;i<=nrows(w2);i++){
            v2[i]=w2[i];
        }
    }
    else{
        if(typeof(w2)=="ideal") {//"/w2 ideal";
            for(int i=1;i<=ncols(w2);i++){
                v2[i]=w2[i];
            }
        }
        else{
            if(typeof(w2)=="intvec"){//"/w2 intvec";
                for(int i=1;i<=size(w2);i++){
                    v2[i]=w2[i];
                }
            }
            else{
                ERROR(typeof(w2)+"?w2?not (int)vector nor ideal");
            }
        }
    }
}

```

```

        }
    }
}
return(dotprod(v1,v2));
}
}

//=====
proc omit(@w,@a)//22/10/06 12:15 pm
{
    list ll,lw,@v;int @i,@j,@s,@t,ch;
    @s,@t=size(@w),size(@a);
    if(typeof(@a)<>"list"){
        list ll;
        if(typeof(@a)=="poly"){//print("//poly");
            @t=1;ll[1]=@a;
        }
        if(typeof(@a)=="ideal"){//print("//ideal");
            @t=size(matrix(@a));ch=1;
        }
        if(typeof(@a)=="intvec" or typeof(@a)=="int"){
            //print("//int or intvec");
            @t=size((@a));ch=1;
        }
        if(ch==1){
            for(@i=1; @i<= @t; @i++){
                ll[@i]=@a[@i];
            }
        }
    }
    else{
        ll=@a;
    }
    if(typeof(@w)<>"list"){
        list lw;
        if(typeof(@w)=="poly"){//print("//w poly");
            @s=1;lw[1]=@w;
        }
        if(typeof(@w)=="ideal"){//print("//w ideal");
            @s=size(matrix(@w));ch=1;
        }
        if(typeof(@w)=="intvec" or typeof(@w)=="int"){
            //print("//w int or intvec");
            @s=size((@w));ch=1;
        }
        if(ch==1){
            for(@i=1; @i<= @s; @i++){

```

```

        lw[@i]=@w[@i];
    }
}
def @ty=typeof(@w);
}
else{
    lw=@w;
}
for(@i=1;@i<=@s;@i++){
    ch=0;
    for(@j=1;@j<=@t;@j++){
if(lw[@i]==ll[@j]){
        ch=1;break;
    }
}
    if(ch==0){
        @v=insert(@v,lw[@i],size(@v));
    }
}
if(defined(@ty)<>0){
    if(size(@v)<>0){
        def st=string(@v);
    }
    else{
        def st="0";
    }
    execute(@ty+" vv="+st);
}
else{
    def vv=@v;
}
return(vv);
}
//=====

proc see //04/09/05 10:02 am
{
    def args=(#);def nargs=size(args);string I,ty_;
    def ty_=typeof(args[1]);
    if(ty_=="list"
    or ty_=="vector"
    or ty_=="intvec"
    or ty_=="matrix"
    or ty_=="intmat"
    or ty_=="ideal"){
        I=string(ideal(args[1]));
        if(ty_=="matrix" or ty_=="intmat"){
            print("//"+ty_+" "+string(nrows(args[1]))+comma+

```

```

string(ncols(args[1])));
I="";
    for(int i=1;i<=nrows(args[1]);i++) {
    if(i<nrows(args[1])) {
        I=I+string(row(args[1],i))+comma+newline;
        }
    else{
        I=I+string(row(args[1],i))+newline;
        }
    }
}
else{
    I=string(args[1]);
    for(int i=2;i<=nargs;i++){
        I=I+comma+string(args[i]);
    }
}
return((I));
}
//=====
proc mymap(ideal vs,ideal ps)//list of vars, list of values, in ideal form
{
    ideal w;
    poly p=summ(vs);
    int i,j;
    for( i=1;i<=nvars(basering);i++){
        if(diff(p,var(i))<>0){
            for(j=1;j<=size(vs);j++){
                if(vs[j]==var(i)){
                    break;
                }
            }
            if(size(vs)==1){
                w[i]=ps[1];
            }
            else{
                w[i]=ps[j];
            }
        }
        else{
            w[i]=var(i);
        }
        //print(string(var(i))+"->" +string(w[i]));
    }
    map f=basering,w;
    return(f);
}

```

```

//=====
//Wednesday, July 01 2009
proc um(@vs,@p)
{
  //def vs=vars(basing);
  def f=mymap(@vs,minor(diag(1,size(@vs)),1));
  return(f(@p));
}

//=====
proc origin(v,p)//12/30/04
{
  def q=p;
  if(typeof(q)<>"list"){
    for(int i=1;i<=size(v);i++){
      q=subst(q,v[i],poly(0));
    }
    return(q);
  }
  else{
    for(int i=1;i<=size(q);i++){
      q[i]=origin(v,q[i]);
    }
    return(q);
  }
}

//=====

proc mdc
{
  int s,i;s=size(#);string ty=typeof#[1];
  if(s==1){
    if (ty=="poly" or ty=="int" ){
      return#[1];
    }
  }
  else{
    if(ty=="list" or ty=="vector"
      or ty=="ideal" or ty=="intvec"
      or ty=="matrix" ){
      if(ty=="vector" or ty=="matrix"){
        ideal ii=ideal#[1];
      }
      else{
        execute(ty+" ii=#[1];");
      }
      if (ty<>"intvec"){
        ii=simplify(ii,2);
      }
    }
  }
}

```

```

        }
        i=size(ii);
        if(i==0){
            return(poly(0));
        }
        else{
            return(mdc(ii[1..i]));
        }
    }
}
}
if (s==2){
    return(gcd#[1],#[2]);
}
if (s>2){
    execute(ty+" p=#[1];");
    p=gcd#[1],#[2];
    for(i=3;i<=s;i++){
        p=gcd(p,#[i]);
    }
    return(p);
};
}
//=====

proc dosubs0(poly p,q)
{
    poly p1=jet(p,1)-jet(p,0);def p0=p1;int j;
    while(p1<>0) {
        def p2=leadmonom(p1[1]);
        if(coefmon(p-p1[1],p2)<>0) {
            p1=p1-p1[1];
        }
        else{
            j=1;p1=0;
        }
    }
    if(j==1) {
        //print("//solvform ok w.r. to "+see(p2));
        if(typeof(q)<>"list") {
            return(subst(q,p2,-p/coefmon(p,p2)+p2));
        }
        else{
            def q1=q;
            for(int i=1;i<=size(q1);i++){
                q1[i]=dosubs0(p,q1[i]);
            }
            return(q1);
        }
    }
}

```

```

    }
  }
  else{
    print("//solvform NOT ok, return=input");
    return(q);
  }
}

//=====
proc dosubs(p,q)//Tue May 8 14:38:31 2007
{
  if(typeof(p)=="poly") {
    return(dosubs0(p,q));
  }
  else {
    def q0=q;
    if(typeof(p)=="ideal") {
      for(int i=1;i<=size(p);i++){
        q0=dosubs0(p[i],q0);
      }
      return(q0);
    }
  }
}

//=====
proc putsolvform1(poly p)
{
  poly p1=jet(p,1)-jet(p,0);
  def p0=p1;int j;
  while(p1<>0) {
    def p2=leadmonom(p1[1]);
    if(coefmon(p-p1[1],p2)<>0) {
      p1=p1-p1[1];
    }
    else{
      j=1;p1=0;
    }
  }
  if(j==1) {
    //print("//solvform ok w.r. to "+see(p2));
    map f=mymap(p2,-p/coefmon(p,p2)+p2);
    return(f);
  }
  else{
    return("//solvform NOT ok");
  }
}

```



```

//=====
proc putsolvform(ideal I)//
{
  ideal eq,eq1=simplify(I,2),0;int ii=size(eq);
  while(ii>0){
    //if(size(eq) mod 50==1)
    //{print("//faltam "+see(size(eq)));}
  def f=putsolvform1(eq[1]);
  if(typeof(f)<>"string"){
    if(size(eq1)>=1){
      eq1=f(eq1);
      eq1[1+size(eq1)]=eq[1];
    }
    else{
      eq1=eq[1];
    }
    eq=simplify(f(eq),2);ii=size(eq);
  }
  else{
    if(ii==1){
      break;
    }
    else{
      eq=eq[2..ii];ii=ii-1;
    }
  }
}
if(size(dosubs(eq1,I))==0){//case1;
  return(eq1);
}
else{
  if(size(eq1)>0) {
    print("//no solvform? best possible: "+
    newline+see(eq1[1])+",...",+see(eq1[size(eq1)]));
  return((eq1));
  }
  else{
    print("//no solvform");return(ideal(0));
  }
}
}

//=====
proc pivo(matrix m,int i)
{
  int c,j;poly po;
  for (j=1;j<=ncols(m);j++){

```

```

        po=jet(m[i,j],0);
        if(po<>0 and po==m[i,j]){
            c=j;break;
        };
    }
    return(c);//this is 0 if no pivo
}
//=====
proc testunit(poly f)
{
    int i;
    if(size(simplify(reduce(maxideal(1),std(f)),2))==0){
        i=1;
    }
    else{
        i=0;
    }
    return(i);
}
//=====

proc gausselim (matrix m,int r,int c, l)
{
    matrix m1=m;
    if (testunit(m[r,c])==1){
        int co,j,ro,s;s=size(l);
        poly p;
        // co =ncols(m);
        for (j=1;j<=s;j=j+1){
            ro=l[j];//print("row now is");print(ro);
            p=m[ro,c];
            if(p<>0 and ro<>r){
                p=-p/m[r,c];m1=addrow(m1,r,p,ro);
            }
        }
    }
    else{
        print("bad choice of pivot");
        print(m[r,c]);
    }
    return(m1);
}
//=====
proc rowsnopivo (matrix m)
{
    matrix @m1=m;int ro,@co,i,j,s;poly p;list pivos;
    intvec nopivo;

```

```
ro=nrows(@m1);@co=ncols(@m1);
intvec @l=1..ro;
for (i=1;i<=ro;i++){
  j=pivo(@m1,i);
  if(j<>0){
    pivos=insert(pivos,intvec(i,j));@l=omit(@l,i);
    if((@l)<>0){
      @m1=gausselim(@m1,i,j,@l);
    }
  }
  else{
    if(nopivo[1]==0){
      nopivo[1]=i;
    }
    else{
      nopivo=nopivo,i;
    }
  }
}
return(list(@m1,nopivo,pivos));
}
//=====END=====
```

Referências Bibliográficas

- [1] Wall, C. T. C. Nets of conics. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 81 (1977), no. 3, 351-364. [3.2](#)
- [2] Avritzer, D.; Vainsencher, I. $Hilb^4\mathbb{P}^2$. Enumerative geometry (Sitges, 1987), 30-59, *Lecture Notes in Math.*, 1436, Springer, Berlin, 1990. [2.4](#)
- [3] Harris, Joe. Algebraic geometry. A first course. Corrected reprint of the 1992 original. *Graduate Texts in Mathematics*, 133. Springer-Verlag, New York, 1995. xx+328 pp. ISBN: 0-387-97716-3 14-01 [2.2](#), [2.4](#), [2.5](#), [2.1](#), [3.3](#)
- [4] Eisenbud, David; Harris, Joe. The geometry of schemes. *Graduate Texts in Mathematics*, 197. Springer-Verlag, New York, 2000. x+294 pp. ISBN: 0-387-98638-3; 0-387-98637-5. [2.1](#), [2.6](#), [3.2](#)
- [5] Elencwajg, G.; Le Barz, P. Explicit computations in $Hilb^3\mathbb{P}^2$. Algebraic geometry (Sundance, UT, 1986), 76-100, *Lecture Notes in Math.*, 1311, Springer, Berlin, 1988. [1](#)
- [6] Algebraic geometry. IV. Linear algebraic groups. Invariant theory. A translation of Algebraic geometry. 4 (Russian), Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1989 [MR1100483]. Translation edited by A. N. Parshin and I. R. Shafarevich. *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, 55. Springer-Verlag, Berlin, 1994. vi+284 pp. ISBN: 3-540-54682-0 14-06 (20-06). [2.3](#)
- [7] Eisenbud, David The geometry of syzygies. A second course in commutative algebra and algebraic geometry. *Graduate Texts in Mathematics*, 229. Springer-Verlag, New York, 2005. xvi+243 pp. ISBN: 0-387-22215-4. [3.2](#), [3.3](#)
- [8] Shafarevich, Igor R. Basic algebraic geometry. 1. Varieties in projective space. Third edition. Translated from the 2007 third Russian edition. Springer, Heidelberg, 2013. xviii+310 pp. ISBN: 978-3-642-37955-0; 978-3-642-37956-7 14-01. [3.3](#)
- [9] Springer, T. A. Linear algebraic groups. Reprint of the 1998 second edition. *Modern Birkhäuser Classics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2009. xvi+334 pp. ISBN: 978-0-8176-4839-8. [2.3](#)
- [10] Humphreys, James E. Linear algebraic groups. *Graduate Texts in Mathematics*, No. 21. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975. xiv+247 pp. (Reviewer: T. Ono). [2.3](#)
- [11] Grothendieck, Alexander. Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique IV : les schémas de Hilbert, in *Séminaire Bourbaki : années*

1960/61, exposés 205-222, Séminaire Bourbaki, no. 6 (1961), Talk no. 221, pp. 249-276. http://www.numdam.org/item/SB_1960-1961__6__249_0/ 1