

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS  
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA



# O algoritmo de Newton-Puiseux para formas Pfaffianas

*Mariana de Oliveira Lourenço*

Belo Horizonte - MG  
2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS  
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA



Mariana de Oliveira Lourenço  
Orientador: Prof. Dr. Rogério Santos Mol

## O algoritmo de Newton-Puiseux para formas Pfaffianas

Dissertação submetida à banca examinadora, designada pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas-ICEX da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Belo Horizonte - MG  
2021

Lourenço, Mariana de Oliveira.

L892a O algoritmo de Newton-Puiseux para formas Pfaffianas  
[manuscrito] / Mariana de Oliveira Lourenço – 2021.  
93 f. il.

Orientador: Rogério Santos Mol.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas  
Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de  
Matemática.

Referências: f.93.

1. Matemática – Teses. 2. Polígono de Newton – Teses. 3.  
Formas Pfaffianas – Teses. I. Mol, Rogério Santos. II.  
Universidade Federal de Minas Gerais; Instituto de Ciências  
Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51(043)



Universidade Federal de Minas Gerais  
Departamento de Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Matemática



## FOLHA DE APROVAÇÃO

*O algoritmo de Newton-Puiseux para formas Pfaffianas*

**MARIANA DE OLIVEIRA LOURENÇO**

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Prof. Rogério Santos Mol  
UFMG

Prof. Fernando Lourenço  
UFLA

Prof. Percy Fernández  
PUCP-Lima

Belo Horizonte, 25 de fevereiro de 2021.

Av. Antônio Carlos, 6627 – Campus Pampulha - Caixa Postal: 702  
CEP-31270-901 - Belo Horizonte – Minas Gerais - Fone (31) 3409-5963  
e-mail: [pgmat@mat.ufmg.br](mailto:pgmat@mat.ufmg.br) - home page: <http://www.mat.ufmg.br/pgmat>

# Agradecimentos

Agradeço a Deus por conceder-me a graça de mais uma conquista e por permitir que eu chegasse até aqui. A Santa Teresinha, que desde o processo seletivo, esteve ao meu lado todos os dias dessa caminhada não permitindo que eu desistisse. A minha vida é marcada pela presença de vocês e de pessoas especiais que colocam no meu caminho. Minha gratidão pelas proteções e bênçãos diárias.

Agradeço aos meus pais, que mediante as dificuldades, não mediram esforços para que eu seguisse em frente. Obrigada por me apoiarem e por acreditarem em mim.

Ao meu noivo Joel, minha gratidão por todo companheirismo, apoio e paciência. Obrigada por todo o seu amor e por sempre dizer "SIM" aos meus projetos!

Um agradecimento especial à Carol Ramos. Flor, obrigada por me acolher e abrir as portas da sua casa e de sua vida para que eu pudesse realizar este sonho. Você sabe que é peça fundamental para a conclusão deste mestrado. Agradeço sempre pela sua vida!

Aos amigos que fiz na UFMG, agradeço por me acolherem e estarem comigo nos momentos de alegria e de angústia, especialmente no primeiro semestre. Obrigada pela parceria nos estudos e pelos momentos felizes na salinha do mestrado e no café. Em especial, agradeço à Fernanda, melhor veterana que eu poderia ter, por sempre me aconselhar e dividir comigo !

A minha amiga da vida, Elaine, agradeço pelas orações e por sempre fazer parte da minha vida. E aos amigos que trago da graduação, muito obrigada por acreditarem em meu potencial e incentivarem sempre. Sinto muitas saudades de vocês!

Ao meu orientador Rogério Mol, agradeço por aceitar me orientar antes mesmo de me conhecer. Obrigada por tantos ensinamentos, pela disponibilidade e empenho durante todo o nosso trabalho, principalmente durante a pandemia. Sou grata pela oportunidade de trabalhar com o profissional que você é. Muito obrigada!

Agradeço a todos os professores que passaram pela minha vida acadêmica e contribuíram com o conhecimento que tenho hoje.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro deste trabalho, com a tão sonhada bolsa!

Por fim, manifesto aqui a minha gratidão a todos da Universidade Federal de Minas Gerais(UFMG).

Muito obrigada!

*“Nada é pequeno se feito com amor”.*  
*Santa Teresinha do Menino Jesus*

## Resumo

O Algoritmo de Newton-Puiseux é uma ferramenta usada para parametrizar curvas analíticas, bem como para encontrar soluções analíticas de uma forma Pfaffiana  $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ , onde  $A$  e  $B$  são germes de funções holomorfas na origem de  $\mathbb{C}^2$ . O principal objetivo dessa dissertação é entender a extensão do Algoritmo de Newton-Puiseux feita por J. Cano no artigo "An extension of the Newton-Puiseux polygon construction to give solutions of Pfaffian forms" [3]. A extensão realizada por J. Cano consiste em um método geral que se aplica para formas  $s$ -Gevrey, uma condição mais fraca de convergência para séries formais. Esse método permite encontrar soluções  $s$ -Gevrey para formas Pfaffianas com coeficientes  $s$ -Gevrey.

**Palavras Chave:** Matemática; Polígono de Newton; Algoritmo de Newton-Puiseux; Formas Pfaffianas.

## Abstract

The Newton-Puiseux Algorithm is used to parameterize analytical curves, as well as to find analytic solutions of a Pfaffian form  $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ , where  $A$  and  $B$  are germs of holomorphic functions at the origin of  $\mathbb{C}^2$ . The main objective of this dissertation is to understand the extension of the Newton-Puiseux Algorithm proposed by J. Cano in the article "An extension of the Newton-Puiseux polygon construction to give solutions of Pfaffian forms"[3]. J. Cano extension consists of a general method that applies to  $s$ -Gevrey forms, a weaker convergence condition for formal series. This method allows to find  $s$ -Gevrey solutions for Pfaffian forms with  $s$ -Gevrey coefficients.

**Key words:** Mathematics; Newton's polygon; Newton-Puiseux algorithm; Pfaffian forms.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>4</b>
1.1	Germes de funções holomorfas e curvas analíticas . . . . .	4
1.2	Séries de potências formais e o polígono de Newton . . . . .	5
1.3	A construção do polígono de Newton . . . . .	6
1.4	Séries de potências fracionárias . . . . .	7
1.5	O algoritmo de Newton-Puiseux . . . . .	7
<b>2</b>	<b>O polígono de Newton de uma 1-forma Pfaffiana</b>	<b>10</b>
2.1	O polinômio diferencial e o polígono de Newton . . . . .	10
2.2	A transformada de Newton-Puiseux . . . . .	13
2.3	Relacionando os polinômios inicial e característico . . . . .	27
<b>3</b>	<b>O algoritmo de Newton-Puiseux</b>	<b>34</b>
3.1	O algoritmo . . . . .	34
3.2	O lado principal . . . . .	39
3.3	Encontrando uma solução . . . . .	42
<b>4</b>	<b>A solução de uma forma Pfaffiana</b>	<b>54</b>
4.1	A solução formal . . . . .	54
4.2	A convergência da solução . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Soluções de uma forma Pfaffiana <math>s</math>-Gevrey</b>	<b>79</b>
5.1	Séries $s$ -Gevrey . . . . .	79
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>93</b>

# Introdução

Em meados do século XVII, Isaac Newton descreveu métodos algorítmicos para a construção de aproximações de soluções de equações polinomiais em duas variáveis em seu livro "Métodos de fluxões e séries infinitas". Dentre os métodos descritos por Newton, destacamos o chamado *método do polígono de Newton*, que permite computar, para uma equação  $F(x, y) = 0$ , a variável  $y$  como uma série de potências  $y(x)$  com expoentes fracionários, de forma que  $F(x, y(x)) = 0$ .

Anos mais tarde, em 1850, Victor Puiseux, em seus estudos sobre integrais de funções de variáveis complexas, teve a necessidade de considerar diferentes ramos definidos pela curva  $F(x, y) = 0$ . O método desenvolvido consiste essencialmente no *método do polígono de Newton* anterior, considerado porém de uma forma mais completa. A prova realizada por V. Puiseux se baseia na Fórmula Integral de Cauchy e pode ser aplicada a séries de potências convergentes com coeficientes complexos. Por outro lado, a formulação proposta por Newton se aplica a séries convergentes ou não, uma vez que é uma formulação algorítmica. Este método completo é conhecido hoje como algoritmo de Newton-Puiseux.

O algoritmo de Newton-Puiseux é uma ferramenta usada para parametrizar curvas analíticas. Ele também é usado para encontrar soluções analíticas de equações diferenciais de campos de vetores analíticos em  $0 \in \mathbb{C}^2$ , ou equivalentemente, soluções analíticas de uma forma Pfaffiana  $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$ , onde  $A$  e  $B$  são germes de funções holomorfas na origem de  $\mathbb{C}^2$ .

C. Camacho e P. Sad mostraram em [2] que uma forma Pfaffiana possui uma solução convergente. Eles usaram resultados sobre índices de folheações complexas holomorfas e o processo de redução de singularidades. Observe que uma curva formal com parametrização  $(x(t), y(t)) \in \mathbb{C}[[t]]^2$ , com  $x(0) = y(0) = 0$ , é solução de  $(\omega = 0)$  se

$$\omega(x(t), y(t)) = A(x(t), y(t))x'(t) + B(x(t), y(t))y'(t) = 0.$$

Sendo assim, uma solução da forma Pfaffiana  $\omega$  é associada a uma solução de uma equação diferencial de primeira ordem definida por  $f(x, y, y') = A(x, y) + B(x, y)y' = 0$ .

Em 1856, C. Briot e J. Bouquet apresentaram, em [1], ideias iniciais de métodos para obter soluções de uma equação diferencial de primeira ordem  $f(x, y, y') = 0$ . Por volta de 1890, H. Fine, nos trabalhos [6] e [7], utilizou-se da construção do polígono de Newton para estender as ideias iniciais de C. Briot e J. Bouquet. Mais tarde, em 1926, E. Ince modificou as ideias de H. Fine em [9], apresentando uma extensão da construção do Polígono de Newton-Puiseux, a fim de encontrar soluções de equações diferenciais de primeira ordem. No entanto, o método de E. Ince pode apresentar falhas na iteração do algoritmo.

Para contornar esse problema, em 1993, J. Cano propôs uma variante desse método, com condições sobre cada etapa do algoritmo, para garantir que ele seja efetivamente aplicável e

que produza uma solução convergente de uma equação diferencial de primeira ordem, e por conseguinte, de uma forma Pfaffiana  $\omega$ . O método proposto por J. Cano é um método geral no que diz respeito a sua aplicabilidade, sem necessitar condições iniciais determinadas. O texto "*An extension of the Newton-Puiseux polygon construction to give solutions of Pfaffian forms*" [3], escrito por J. Cano, é a principal referência deste trabalho.

O método de J. Cano também se aplica a busca de soluções de formas  $s$ -Gevrey. Para  $s \geq 0$ -finito, uma série de potências formal  $s$ -Gevrey é definida pela condição seguinte:

$$\sum_{ij} A_{ij} x^i y^j \text{ é } s\text{-Gevrey} \iff \sum_{ij} \frac{A_{ij}}{(i+j)!^{s-1}} x^i y^j \text{ é convergente.} \quad (1)$$

Uma forma  $\omega$  é  $s$ -Gevrey se seus coeficientes o são. Em 1903, E. Maillet provou que uma solução formal de uma equação diferencial ordinária algébrica tem alguma ordem  $s$ -Gevrey. Mais tarde, o resultado foi estendido para equações diferenciais analíticas por R. Gérard [8] e B. Malgrange [10]. Em [3], J. Cano mostrou, por esse método algorítmico, que para uma forma Pfaffiana  $s$ -Gevrey existe ao menos uma solução de índice  $s$ -Gevrey, com  $s$  fixo. Isso estende para  $s$  qualquer, o resultado obtido por C. Camacho e P. Sad, para  $s = 1$ .

Nosso objetivo nesta dissertação é entender o método algorítmico proposto por J. Cano em [3], desenvolvendo os cálculos e as demonstrações de forma detalhada. Acreditamos que esse método possa revelar informações de caráter geométrico e topológico sobre um germe de uma forma Pfaffiana e suas soluções, tendo grande potencial como objeto de pesquisa futura, em que os cálculos apresentados aqui poderão ter utilidade.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: no Capítulo 1, apresentamos as ferramentas matemáticas e definições necessárias para o desenvolvimento deste trabalho, bem como apresentamos o Algoritmo de Newton-Puiseux para funções formais. No Capítulo 2, trabalhamos com a construção do polígono de Newton de uma forma Pfaffiana, bem como algumas propriedades desta construção. No Capítulo 3, discorremos sobre o método do algoritmo de Newton-Puiseux proposto por J. Cano e sobre as condições impostas neste novo método. No Capítulo 4, trabalhamos com a convergência da solução construída anteriormente. Finalmente, no Capítulo 5, discorremos sobre séries  $s$ -Gevrey e mostramos a existência de soluções  $s$ -Gevrey para formas  $s$ -Gevrey.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo, apresentamos as definições preliminares usadas neste trabalho. Descrevemos o Algoritmo de Newton-Puiseux, o qual é um objeto utilizado para parametrizar curvas analíticas, e apresentamos resultados que garantem a convergência destas parametrizações. Para maiores detalhes, veja [5], [11] e [12].

### 1.1 Germes de funções holomorfas e curvas analíticas

Seja  $U$  um conjunto aberto de  $\mathbb{C}^n$ .

**Definição 1.1.1.** Uma função  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  é *analítica ou holomorfa* se para todo  $A = (a_1, \dots, a_n) \in U$ , existe um aberto  $V \subset U$ , com  $A \in V$ , onde  $f$  possui expansão em série de potências

$$f(z) = \sum_{i_0, \dots, i_n} c_{i_0, \dots, i_n} (z_1 - a_1)^{i_1} \cdots (z_n - a_n)^{i_n}, \quad (1.1)$$

convergente para todo  $z = (z_1, \dots, z_n) \in V$ .

Denotamos o conjunto das funções holomorfas em  $U$  por  $\mathcal{O}(U)$ .

**Definição 1.1.2.** Dado  $A \in \mathbb{C}^n$ , considere o conjunto  $\Omega := \{(F, U) : A \in U, F \in \mathcal{O}(U)\}$ . Dizemos que um *germe de função holomorfa* no ponto  $A$  é uma classe de equivalência pela relação em  $\Omega$ :

$$(F, U) \sim (G, V) \iff \text{existe um aberto } W \subset U \cap V, \quad A \in W \quad \text{e} \quad F|_W \equiv G|_W.$$

Denotamos o conjunto dos germes de funções holomorfas em  $A$  por  $\mathcal{O}_A$ .

O conjunto dos germes de funções holomorfas em  $0 \in \mathbb{C}^n$  é denotado por  $\mathcal{O}_n$ . Este conjunto possui estrutura de anel comutativo com unidade, o qual é isomorfo ao anel das séries de potências convergentes de centro em  $0 \in \mathbb{C}^n$ . Para mais detalhes, veja [11].

Seja  $\mathcal{O}_2$  o anel de germes de funções holomorfas em  $0 \in \mathbb{C}^2$ . Definimos a relação de equivalência:

$$F \sim G \text{ se, e somente se, existe } U \in \mathcal{O}_2 \text{ unidade tal que } F = UG. \quad (1.2)$$

**Definição 1.1.3.** Uma *curva analítica plana local* em  $0 \in \mathbb{C}^2$  é uma classe de equivalência pela relação em 1.2 de um germe  $F \in \mathcal{O}_2$  satisfazendo  $F \neq 0$  e  $F(0) = 0$ .

Uma vez que germes de funções holomorfas em  $0 \in \mathbb{C}^2$  correspondem bijetivamente a séries de potências convergentes com centro na origem, segue que uma curva analítica plana local em  $0 \in \mathbb{C}^2$  é identificada a uma série de potências convergente não nula, centrada e se anulando na origem. Por essa razão, podemos trabalhar com séries de potências para estudar curvas analíticas.

## 1.2 Séries de potências formais e o polígono de Newton

**Definição 1.2.1.** Uma *série de potências formal* nas variáveis  $x$  e  $y$  é um objeto da forma

$$F(x, y) = \sum_{r, s \geq 0} A_{rs} x^r y^s,$$

com  $A_{rs} \in \mathbb{C}$ , para cada  $r, s \geq 0$ . Cada  $A_{rs}$  é chamado de *coeficiente de índice*  $(r, s)$ , e o monômio  $A_{rs} x^r y^s$  é chamado *termo de bigrau*  $(r, s)$  e *grau*  $d = r + s$ . O conjunto das séries de potências formais é denotado por  $\mathbb{C}[[x, y]]$ .

Dadas duas séries de potências em  $\mathbb{C}[[x, y]]$

$$F(x, y) = \sum_{r, s \geq 0} A_{rs} x^r y^s \quad \text{e} \quad G(x, y) = \sum_{r, s \geq 0} B_{rs} x^r y^s,$$

podemos definir as operações de soma e multiplicação usuais da seguinte forma:

$$F + G = \sum_{r, s \geq 0} (A_{rs} + B_{rs}) x^r y^s \quad \text{e} \quad FG = \sum_{r, s \geq 0} C_{rs} x^r y^s$$

em que  $C_{rs} = \sum A_{r's'} + B_{r''s''}$ , onde  $r' + r'' = r$  e  $s' + s'' = s$ .

Observe que a série constante nula, bem como a série constante  $F = 1$ , consistem respectivamente nos elementos neutro e identidade para as operações definidas em  $\mathbb{C}[[x, y]]$ . Observe que as duas séries aqui mencionadas são de fato séries de potências formais. Em suma, o conjunto de séries de potências formais de duas variáveis, com as operações anteriormente definidas, possui estrutura de um anel comutativo com unidade, o qual será denotado por  $\mathbb{C}[[x, y]]$ , e o chamaremos de *anel de séries de potências formais nas variáveis  $x$  e  $y$* .

A proposição abaixo apresenta uma caracterização importante sobre as unidades de  $\mathbb{C}[[x, y]]$ , que são os elementos do conjunto que possuem inverso multiplicativo.

**Proposição 1.2.2.** *A série  $F = \sum A_{rs} x^r y^s \in \mathbb{C}[[x, y]]$  tem inverso multiplicativo em  $\mathbb{C}[[x, y]]$  se, e somente se,  $A_{00} \neq 0$ .*

*Demonstração.* A demonstração é realizada invertendo formalmente a série, e calculando coeficiente a coeficiente. Esta pode ser encontrada em [11], p. 51.  $\square$

### 1.3 A construção do polígono de Newton

Vamos construir o Polígono de Newton de uma série de potências formal. Para tanto, seja  $F(x, y) = \sum A_{rs}x^r y^s \in \mathbb{C}[[x, y]]$ . O conjunto dos índices correspondentes aos coeficientes não nulos de  $F$ , é dado por

$$\Delta(F) = \{(r, s) \mid A_{rs} \neq 0\}.$$

Considere a região

$$(\mathbb{R}^+)^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}.$$

A partir dessa região, definimos o polígono de Newton  $F$ .

**Definição 1.3.1.** Definimos  $R(F) \subset (\mathbb{R}^+)^2$  como sendo a região dada por

$$R(F) = \Delta(F) + (\mathbb{R}^+)^2 = \bigcup_{(r,s) \in \Delta(F)} \{(r, s) + (\mathbb{R}^+)^2\}.$$

Observe que a fronteira do fecho convexo desta região é formada por duas semiretas paralelas aos eixos coordenados e por uma linha poligonal ligando-as. Tal linha poligonal é chamada de *Polígono de Newton de  $F$*  e é denotada por  $N = N(f)$ .

Os resultados abaixo consistem em propriedades relacionadas ao polígono de Newton associado a  $F$ .

**Lema 1.3.2.** *O bigrau  $(r, s) \in \Delta(F)$  está em  $N(F)$  se, e somente se, vale a propriedade: se  $(r', s') \in \Delta(F)$  é tal que  $r' < r$  e  $s' < s$ , então  $(r', s') = (r, s)$ .*

*Demonstração.* Vide [11], p. 52. □

Em outras palavras, os pontos localizados no polígono de Newton,  $N(F)$ , são aqueles localizados mais abaixo e à esquerda de  $\Delta(F)$ . Para maiores informações e detalhes, veja [5] ou [11].

**Proposição 1.3.3.** *Seja  $F(x, y) = \sum A_{rs}x^r y^s \in \mathbb{C}[[x, y]]$ . O polígono de Newton  $N(F)$  satisfaz:*

1.  $N(F)$  começa à direita do eixo  $s$  se, e somente se,  $x$  é fator da série  $F$ .
2.  $N(F)$  termina acima do eixo  $r$  se, e somente se,  $y$  é fator da série  $F$ .
3.  $N(F)$  possui um único ponto se, e somente se,  $F = x^\rho y^\sigma U$ , para alguma unidade  $U$ .
4.  $U \in \mathbb{C}[[x, y]]$  é uma unidade, então  $\Delta(UF) = \Delta(F)$  e portanto  $N(UF) = N(F)$ .

*Demonstração.* Vide [11], p. 54. □

## 1.4 Séries de potências fracionárias

De forma análoga à construção de  $\mathbb{C}[[x, y]]$ , podemos construir o anel de séries de potências formais  $\mathbb{C}[[x]]$ . Considere  $\mathbb{C}((x))$  o corpo de frações de  $\mathbb{C}[[x]]$ .

Para nossa construção, seja  $\mathbb{C}((t))$  o corpo de frações na variável  $t$  e fixe  $m \in \mathbb{N}$ . A cada série  $f = \sum a_i x^i$  em  $\mathbb{C}((x))$ , associamos  $f' = \sum a_i t^{mi}$  em  $\mathbb{C}((t))$ . De acordo com tal correspondência obtemos a relação  $x = t^m$ , a qual escrevemos  $t = x^{1/m}$ . Consequentemente, temos  $\mathbb{C}((t)) = \mathbb{C}((x^{1/m}))$ . Através desta identificação definimos as operações entre os elementos de  $\mathbb{C}((x^{1/m}))$  e construímos o conjunto  $\mathbb{C}\langle x \rangle$ , chamado *corpo de séries de potências fracionárias* na variável  $x$ . Para mais detalhes, veja [5],[11].

**Definição 1.4.1.** Seja  $f = \sum a_i x^{i/m} \in \mathbb{C}((x^{1/m}))$ . Definimos a *ordem de  $f$*  como a menor potência  $i/m$  cujo coeficiente  $a_i$  de  $f$  é não nulo. Se  $f = 0$ , dizemos que a ordem de  $f$  é infinita. Denotamos a ordem de  $f$  é denotada por  $o(f)$ .

**Definição 1.4.2.** Se  $f \in \mathbb{C}((x^{1/m}))$ , dizemos que  $f$  é uma *série de Puiseux* se  $f$  possui ordem não negativa, isto é,  $o(f) \geq 0$ . O conjunto  $\mathbb{C}[[x^{1/m}]]$  é chamado *conjunto das séries de Puiseux*.

**Definição 1.4.3.** Sejam  $f \in \mathbb{C}[[x^{1/m}]]$  uma série de Puiseux e  $F \in \mathbb{C}[[x, y]]$  uma série de potências formal, então  $F(x, f(x))$  é uma série de potências fracionárias em  $x$ . Defina

$$\begin{aligned} \Gamma_f : \mathbb{C}[[x, y]] &\longrightarrow \mathbb{C}[[x^{1/m}]] \\ F(x, y) &\mapsto F(x, f(x)). \end{aligned}$$

Dizemos que  $f \in \mathbb{C}[[x^{1/m}]]$  é uma  *$y$ -raiz* de  $F$  se  $\Gamma_f(F) = 0$ .

O algoritmo de Newton-Puiseux é um instrumento para encontrar uma  $y$ -raiz de uma série formal  $F$ , o qual apresentamos na próxima seção.

## 1.5 O algoritmo de Newton-Puiseux

O algoritmo de Newton-Puiseux permite encontrar uma  $y$ -raiz de  $F(x, y) = 0$ , ou seja, uma solução formal de  $F(x, f(x))$ . Encontrar tal  $y$ -raiz, é o mesmo que escrever  $y$  como uma série de Puiseux de  $x$ . Sendo assim, seja

$$F(x, y) = \sum_{(r,s) \geq 0} A_{rs} x^r y^s$$

uma série de potências formal. Vamos encontrar  $f \in \mathbb{C}[[x^{1/m}]]$ , uma série fracionária candidata a uma  $y$ -raiz de  $F$  por este método.

**Definição 1.5.1.** Definimos a *altura* do polígono de Newton  $N(F)$ , denotada por  $h(N(F))$ , como a maior das ordenadas dos pontos de  $N$ .

Durante o algoritmo vamos sempre supor que  $h(N(f)) > 0$ , pois caso contrário  $F$  não teria  $y$ -raízes, veja [5].

**Definição 1.5.2.** Sejam  $L_0$  um lado de  $N(F)$  e  $(r^*, s^*)$  o ponto de menor ordenada de  $L_0$ . Definimos o *polinômio de  $F$  associado a  $L_0$*  por

$$P_{L_0}^F = \sum_{r,s \in L_0} A_{rs} z^{s-s^*} \in \mathbb{C}[z].$$

Observe que o polinômio possui termo constante não nulo, assim,  $z = 0$  não é uma raiz de  $P_{L_0}^F$ .

Observe que, se  $N(F)$  possui um único ponto, pela Proposição 1.3.3,  $F$  é uma unidade. Caso  $N(F)$  termine acima do eixo  $r$ , a Proposição 1.3.3 garante que  $y$  é fator de  $F(x, y)$ . Dividindo  $F$  por um fator  $y$ , obtemos  $N(F)$  terminando no eixo  $r$ . Procedendo de maneira análoga para a variável  $x$ , podemos supor que  $N(F)$  comece e termine nos eixos  $r$  e  $s$ . Assim, sempre supomos o polígono  $N(F)$  não degenerado, começando e terminando em ambos os eixos.

Escrevemos, em cada etapa, a série  $F = F_j$  e  $f_j$  a aproximação da  $y$ -raiz. Exibimos aqui, os passos da etapa inicial do algoritmo e as seguintes se dão de forma análoga. Para maiores detalhes, sugerimos a leitura de [5] e [11].

Seja  $F = F_0$  e escolha  $L_0$ , um lado de  $N(F_0)$  com inclinação  $-m_0/n_0$ , e reta suporte  $rm_0 + sn_0 = k_0$ , com  $(m_0, n_0) = 1$ . Considere  $c_0$  uma raiz do polinômio  $P_{L_0}^F$ . Nossa  $y$ -raiz terá termo inicial  $c_0 x^{n_0/m_0}$ . Para tanto, introduzimos as variáveis

$$x = x_1^{m_0} \quad \text{e} \quad y = x_1^{n_0}(c_0 + y_1).$$

A primeira aproximação da  $y$ -raiz é

$$y = f_0(x) = x^{n_0/m_0}(c_0 + y_1),$$

onde  $y_1$  aqui representa termos de ordens superiores. Observe que como escolhemos  $c_0$  como uma raiz do polinômio  $P_{L_0}^F$ , os termos de menor grau em  $F_0(x, f_0(x))$  devem se anular, e por isso,  $F_0(x, f_0(x))$  somente contém termos de ordens maiores que  $k_0/m_0$ . Assim,

$$\begin{aligned} F_0(x, y) &= F(x_1^{m_0}, x_1^{n_0}(c_0 + y_1)) \\ &= \sum_{rm_0+n_0s \geq 0} A_{rs} x_1^{rm_0+n_0s} (c_0 + y_1)^s, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} F_0(x, y) &= x_1^{k_0} \sum_{rm_0+n_0s \geq 0} A_{rs} x_1^{rm_0+n_0s-k_0} (c_0 + y_1)^s \\ &= x_1^{k_0} F_1(x_1, y_1), \end{aligned} \tag{1.3}$$

onde  $F_1(x_1, y_1) \in \mathbb{C}[[x_1, y_1]]$ . Em [11], vemos que  $x_1$  não é fator de  $F_1(x_1, y_1)$ , o que significa que  $N(F_1)$  inicia no eixo  $s$ .

**Afirmção 1.5.3.** Ou  $y_1$  divide  $F_1(x_1, y_1)$  ou  $N(F_1)$  é não trivial.

*Demonstração.* Vide [11]. □

Temos duas situações:



1. Se  $y_1$  não divide  $F_1(x_1, y_1)$ , então  $N(F_1)$  é não trivial. Passamos para a próxima etapa, procedendo para  $F_1$  igualmente ao que fizemos para  $F_0$ .
2. Se  $y_1$  divide  $F_1(x_1, y_1)$ , então  $(y_1 = 0)$  é fator de  $F_1$ , isto é,

$$y = f_0(x) = c_0 x^{n_0/m_0}$$

é a  $y$ -raiz procurada.

Procedendo indutivamente, obtemos a cada etapa uma série de Puiseux  $f_j(x)$  que será uma aproximação para uma  $y$ -raiz de  $F$ . É importante mencionar que se o algoritmo fornece uma  $y$ -raiz exata de  $F$  na  $j$ -ésima etapa, então ele pode ser finalizado ali. No entanto, existem casos em que o algoritmo não pode ser finalizado, e precisamos garantir que a aproximação fornecida pelo algoritmo converge para uma  $y$ -raiz de  $F$ , veja [11]. O teorema abaixo garante que o processo converge para uma  $y$ -raiz de  $F$ .

**Teorema 1.5.4.** *Seja  $F$  uma função formal, então  $f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$  é uma  $y$ -raiz de  $F$ .*

Uma vez que o algoritmo de Newton-Puiseux fornece uma  $y$ -raiz para uma série de potências formais, o resultado abaixo permite dizer que toda série  $F \in \mathbb{C}[[x, y]]$  possui uma  $y$ -raiz.

**Teorema 1.5.5.** *(Puiseux) Se  $F \in \mathbb{C}[[x, y]]$  é tal que  $h(N(F)) > 0$ , então existe uma série de Puiseux  $f \in \mathbb{C}[[x^{1/m}]]$  a qual é  $y$ -raiz de  $F$ .*

O resultado abaixo garante que todas as  $y$ -raízes de  $F$  são fornecidas por tal método.

**Teorema 1.5.6.** *Se  $f \in \mathbb{C}[[x^{1/m}]]$  é uma  $y$ -raiz não nula de  $F$ , então é obtida pelo algoritmo de Newton-Puiseux.*

Tendo provado a existência de uma  $y$ -raiz  $f$  de uma série  $F$ , e que  $f$  é dada pelo algoritmo de Newton-Puiseux, um fato importante a se considerar é quanto a convergência dessas raízes. O resultado abaixo garante tal convergência.

**Teorema 1.5.7.** *Seja  $F(x, y)$  uma função analítica. Então as  $y$ -raízes de  $F$  são séries fracionárias convergentes. Ou seja, se  $f(x) \in \mathbb{C}[[x^{1/m}]]$  é uma  $y$ -raiz de  $F$ , então  $f(t^m)$  é uma função analítica local na variável  $t \in \mathbb{C}$ .*

Em resumo, exibimos um algoritmo que permite encontrar uma série de Puiseux que é  $y$ -raiz de uma série convergente  $F(x, y)$ , ou de uma curva analítica centrada na origem. Mostramos ainda que as  $y$ -raízes obtidas são séries fracionárias convergentes e analíticas, e somente são obtidas por tal algoritmo.

## Capítulo 2

# O polígono de Newton de uma 1-forma Pfaffiana

Neste capítulo vamos trabalhar com formas Pfaffianas. Usaremos as técnicas de construção do polígono de Newton descritas no capítulo anterior, para o estudo das  $y$ -soluções de formas Pfaffianas.

### 2.1 O polinômio diferencial e o polígono de Newton

Considere  $\mathbb{C}[[x, y]]$  o anel de séries de potências formais nas variáveis  $x$  e  $y$ , conforme definimos no capítulo anterior.

**Definição 2.1.1.** Uma *forma Pfaffiana*  $\omega$  é uma 1-forma dada por

$$\omega = A_\omega(x, y)dx + B_\omega(x, y)dy, \quad (2.1)$$

onde  $A_\omega(x, y)$ ,  $B_\omega(x, y)$  são coeficientes em  $\mathbb{C}[[x, y]]$ .

A uma forma Pfaffiana  $\omega$  assim definida, podemos associar o polinômio diferencial  $f_\omega$ , um polinômio de grau 1 em uma nova variável  $y'$ , cujos coeficientes são séries de potências formais de  $x$  e  $y$ .

**Definição 2.1.2.** O *polinômio diferencial associado à forma Pfaffiana*  $\omega$  definida em (2.1) é o polinômio linear na variável  $y'$ , dado por

$$f_\omega = A_\omega(x, y) + B_\omega(x, y)y'.$$

Para  $q \in \mathbb{N}$ , definimos o seguinte conjunto de polinômios denotado por  $C_q$ .

**Definição 2.1.3.** Seja  $q \in \mathbb{N}$ . Dizemos que o polinômio  $f \in C_q$  se

$$f = A(x, y) + B(x, y)y' = \sum_{(\alpha, \beta)} M_{\alpha\beta}(f),$$

onde  $M_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta + B_{\alpha\beta}x^{\alpha+1}y^{\beta-1}y'$ , com  $A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$ , e  $B_{(\alpha, 0)} = 0$ , para cada  $\alpha$ , sendo

que os índices  $(\alpha, \beta)$  são tais que  $\alpha$  percorre o conjunto

$$\left(\frac{\mathbb{Z}}{q}\right)_{(\geq -1)} = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \geq -1 \text{ e } rq \in \mathbb{Z}\}$$

e  $\beta \in \mathbb{N}$ . O termo  $M_{\alpha\beta}$  é chamado de *binômio diferencial associado a*  $(\alpha, \beta)$ .

Considere agora,  $\mathbb{C}\langle\langle x \rangle\rangle$ , o *corpo de séries de potências fracionárias* na variável  $x$ . Sejam  $f$  um polinômio diferencial e  $z \in \mathbb{C}[[x^{1/n}]]$  uma série de Puiseux em  $\mathbb{C}\langle\langle x \rangle\rangle$ , então  $o_x(z) \geq 0$ , (veja Seção 1.4).

**Definição 2.1.4.** Dada uma série de Puiseux  $z \in \mathbb{C}[[x^{1/n}]]$ , dizemos que  $z$  é uma solução de  $(f = 0)$  se

$$f[z] = A(x, z) + B(x, z)\frac{dz}{dx} = 0.$$

**Observação 2.1.5.** Seja  $\omega$  a forma Pfaffiana dada em (2.1). Observe que uma curva parametrizada por  $(x(t), y(t))$  é solução de  $(\omega = 0)$  se, e somente se,

$$\omega(x(t), y(t)) = A_\omega(x(t), y(t))x'(t) + B_\omega(x(t), y(t))y'(t) = 0.$$

**Afirmção 2.1.6.** A série de Puiseux  $z \in \mathbb{C}[[x^{1/n}]]$  é solução de  $(f_\omega = 0)$  se, e somente se, a curva  $(t^n, z(t^n))$  é solução de  $(\omega = 0)$ .

*Demonstração.* Com efeito, observe que se  $z$  é solução de  $(f_\omega = 0)$ , então

$$f_\omega[z] = A_\omega(x, z) + B_\omega(x, z)\frac{dz}{dx} = 0.$$

Como

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \frac{dx}{dt},$$

isto implica que

$$f_\omega[z] = A_\omega(x, z)\frac{dx}{dt} + B_\omega(x, z)\frac{dz}{dt} = 0. \quad (2.2)$$

Note que se  $(t^n, z(t^n))$  é solução de  $\omega$ , temos

$$\omega(t^n, z(t^n)) = A_\omega(t^n, z(t^n))\frac{dx}{dt} + B_\omega(t^n, z(t^n))\frac{dz}{dt} = 0. \quad (2.3)$$

Uma vez que (2.3) e (2.2) são equivalentes, segue que,

$$\omega(t^n, z(t^n)) = 0 \text{ se, e somente se, } f_\omega[z] = 0,$$

provando a afirmação. □

Em suma, isto significa que uma solução da forma  $\omega$  está diretamente associada a uma solução do polinômio diferencial  $f_\omega$ .

**Definição 2.1.7.** Dizemos que  $(x = 0)$  é uma solução de  $(f_\omega = 0)$  se o par  $(0, t)$  é uma solução de  $(\omega = 0)$ .

Em outras palavras, dizemos que  $(x = 0)$  é uma solução de  $(f_\omega = 0)$  se  $B_\omega(0, y) = 0$ .

Trabalhamos agora as definições do polígono de Newton para funções em  $C_q$  de forma semelhante a que fizemos para séries formais. Para tanto, seja  $f \in C_q$  e defina

$$\Delta(f) = \{(\alpha, \beta) \mid M_{\alpha\beta}(f) \neq 0\},$$

isto é,  $\Delta(f)$  consiste do conjunto dos pontos correspondentes aos bi-índices  $(\alpha, \beta)$  cujos binômios diferenciais,  $M_{\alpha\beta}$ , são não nulos. Considere o fecho convexo da região

$$\bigcup_{P \in \Delta(f)} (P + \mathbb{R}^2),$$

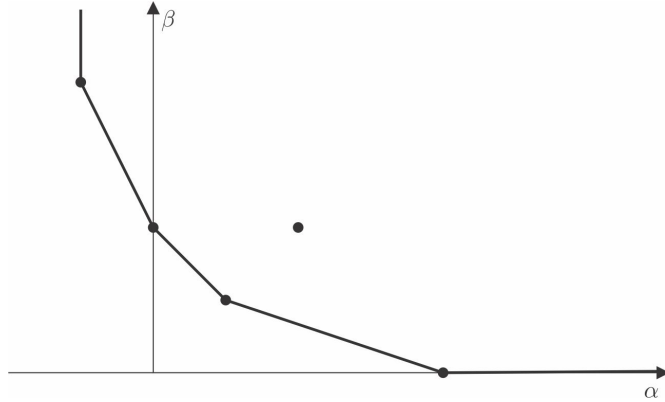
onde  $\mathbb{R}^2 = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$ , o qual denotamos por  $\overline{P}(f)$ . A fronteira de  $\overline{P}(f)$  é formada por duas semi-retas paralelas aos eixos do plano cartesiano e por uma poligonal conectando-as, passando por pontos de  $\Delta(f)$ .

**Definição 2.1.8.** O *polígono de Newton* de  $f$  é dado pela linha poligonal contida na fronteira de  $\overline{P}(f)$ , e é denotado por  $N(f)$ .

**Exemplo 2.1.9.** Seja  $f = x^4 + y^2 + x^2y^2 + y^3y' + xy + x^2y'$  um polinômio diferencial. Observe que

$$\Delta(f) = \{(1, 1); (4, 0); (0, 2); (2, 2); (-1, 4)\}.$$

Consequentemente, o polígono de Newton de  $f$  é dado pela figura abaixo.



**Figura 2.1:** Polígono de Newton de  $f$ .

Para cada racional positivo  $\mu \in \mathbb{Q}_+$ , existe uma única reta com inclinação  $-1/\mu$  que intercepta a fronteira de  $\overline{P}(f)$  em um lado ou um único vértice de  $N(f)$ , a qual definimos a seguir.

**Definição 2.1.10.** A *reta distinguida de coincidência*  $\mu$  é a única reta com inclinação  $-1/\mu$  que intercepta a fronteira de  $\overline{P}(f)$  em um lado ou um único vértice de  $N(f)$ . Esta reta é denotada por  $L(f, \mu)$ .

**Definição 2.1.11.** Sejam  $\mu \in \mathbb{Q}_+$  e  $L(f, \mu)$  a reta distinguida de coincidência  $\mu$  associada a  $f$ .

Definimos o *polinômio característico de  $f$  relativo a  $\mu$*  por

$$\varphi_{(f,\mu)}(c) = \sum_{(\alpha,\beta) \in L(f,\mu)} (A_{\alpha\beta} + \mu B_{\alpha\beta})c^\beta$$

e o *polinômio diferencial inicial relativo a  $\mu$*  por

$$In^{(\mu)}(f) = \sum_{(\alpha,\beta) \in L(f,\mu)} M_{\alpha\beta}(f).$$

O resultado seguinte permite relacionar as raízes de  $\varphi_{(f,\mu)}$  a uma solução de  $(f = 0)$ .

**Lema 2.1.12.** *Seja  $z = c_0x^{\mu_0} + r(x)$ , onde  $r(x)$  contém termos de ordens maiores que  $\mu_0$ . Se  $z$  é uma solução de  $(f = 0)$ , então  $\varphi_{(f,\mu_0)}(c_0) = 0$ .*

*Demonstração.* Considere  $z = c_0x^{\mu_0} + r(x)$ . Como  $z$  é uma solução de  $(f = 0)$ , segue que  $f[z] = 0$ , isto é,

$$\sum_{(\alpha,\beta)} M_{\alpha\beta}(f)[x, z, z'] = \sum_{(\alpha,\beta)} A_{\alpha\beta}x^\alpha z^\beta + B_{\alpha\beta}x^{\alpha+1}z^{\beta-1} \frac{dz}{dx} = 0. \quad (2.4)$$

Isto significa que a série descrita acima é identicamente nula, ou seja, seus termos devem todos se anular. Desprezando os termos de ordem mais alta, consideremos o termo de menor grau em (2.4), o qual é evidentemente nulo. Como  $z = c_0x^{\mu_0} + r(x)$ , o menor grau na equação acima é  $\alpha + \mu_0\beta$  e o coeficiente correspondente

$$\sum_{(\alpha,\beta)} (A_{\alpha\beta}c_0^\beta + \mu_0 B_{\alpha\beta}c_0^\beta),$$

onde  $(\alpha, \beta)$  são bi-índices de  $\Delta(f)$  que satisfazem  $\alpha + \mu_0\beta = k_0$ , com  $k_0 \in \mathbb{R}$  fixo. Da unicidade de  $L(f, \mu_0)$ , os bi-índices considerados aqui estão sobre  $L(f, \mu_0)$ . Temos, portanto,

$$\varphi_{(f,\mu_0)}(c_0) = \sum_{(\alpha,\beta) \in L(f,\mu_0)} (A_{\alpha\beta} + \mu_0 B_{\alpha\beta})c_0^\beta = 0,$$

isto é,  $c_0$  é uma raiz de  $\varphi_{(f,\mu_0)}$ . □

## 2.2 A transformada de Newton-Puiseux

Sejam  $\mu \in \mathbb{Q}_+$  e  $c$  um número complexo não nulo. Definimos um novo polinômio diferencial associado a  $f$  alterando a variável  $y$  por  $cx^\mu + y$ .

**Definição 2.2.1.** *Seja  $\mu \in \mathbb{Q}_+$  e  $c \in \mathbb{C}^*$ . A transformada de  $f$  com respeito a  $\mu$  e  $c$  é definida como o polinômio diferencial*

$$f[cx^\mu + y] = f(x, cx^\mu + y, c\mu x^{\mu-1} + y').$$

No decorrer do texto, chamamos  $f[cx^\mu + y]$  de  $(\mu, c)$ -transformada de  $f$ . Listamos algumas propriedades desta definição.

## 2.2. A TRANSFORMADA DE NEWTON-PUISEUX

**Propriedade 2.2.2.** Seja  $z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^{\mu_i}$  uma série de Puiseux. Então,  $z$  é solução de  $(f = 0)$  se, e somente se,  $z_1 = \sum_{i=2}^{\infty} c_i x^{\mu_i}$  é uma solução de  $(f[c_1 x^{\mu_1} + y] = 0)$ .

*Demonstração.* Note que a série  $z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^{\mu_i}$  é uma solução de  $(f = 0)$  se, e só se,  $f[z] = 0$ . Isto é,

$$0 = f[z] = \sum_{(\alpha, \beta)} M_{\alpha\beta}(f)(x, z, z') = \sum_{(\alpha, \beta)} A_{\alpha\beta} x^{\alpha} z^{\beta} + B_{\alpha\beta} x^{\alpha+1} z^{\beta-1} \frac{dz}{dx}. \quad (2.5)$$

Como

$$z = c_1 x^{\mu_1} + \sum_{i=2}^{\infty} c_i x^{\mu_i} = c_1 x^{\mu_1} + z_1,$$

então

$$\frac{dz}{dx} = c_1 \mu_1 x^{\mu_1-1} + \frac{dz_1}{dx}.$$

Segue da equação (2.5) que

$$\begin{aligned} f[c_1 x^{\mu_1} + y](z_1) &= \sum_{\alpha, \beta} A_{\alpha\beta} x^{\alpha} (c_1 x^{\mu_1} + z_1)^{\beta} + B_{\alpha\beta} x^{\alpha+1} (c_1 x^{\mu_1} + z_1)^{\beta-1} (c_1 \mu_1 x^{\mu_1-1} + \frac{dz_1}{dx}) \\ &= \sum_{\alpha, \beta} A_{\alpha\beta} x^{\alpha} z^{\beta} + B_{\alpha\beta} x^{\alpha+1} z^{\beta-1} \frac{dz}{dx} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Portanto, as equações (2.5) e (2.6) são equivalentes, provando nossa afirmação.  $\square$

**Observação 2.2.3.** Em particular,  $z = c_1 x^{\mu_1}$  é solução de  $(f = 0)$  se, e somente se,  $(y = 0)$  é solução de  $(f[c_1 x^{\mu_1} + y]) = 0$ .

**Propriedade 2.2.4.** Se  $\Delta(f) \subset \left(\frac{\mathbb{Z}}{q}\right)_{(\geq -1)} \times \mathbb{N}$ , então existe um inteiro  $q' > 0$  tal que

$$\Delta(f') \subset \left(\frac{\mathbb{Z}}{q'}\right)_{(\geq -1)} \times \mathbb{N},$$

onde  $f' = f[cx^{\mu} + y]$ .

*Demonstração.* Seja

$$f = \sum_{(\alpha, \beta)} M_{\alpha\beta}(f) = \sum_{(\alpha, \beta)} A_{\alpha\beta} x^{\alpha} y^{\beta} + B_{\alpha\beta} x^{\alpha+1} y^{\beta-1} y'$$

e consideremos  $\Delta(f) = \{(\alpha, \beta) \mid M_{\alpha\beta} \neq 0\}$ , onde  $\alpha$  e  $\beta$  percorrem os conjuntos da definição. Considere  $\mu \in \mathbb{Q}^+$  e escreva  $\mu = a/b$ , com  $a, b \in \mathbb{Z}^+$  e  $a, b$  não nulos. Tome  $c$  um número complexo não nulo, e consideremos a  $(\mu, c)$ -transformada de  $f$ :

$$f[cx^{\mu} + y] = \sum_{(\alpha, \beta)} M_{\alpha\beta}(f[cx^{\mu} + y]),$$

isto é,

$$f' = f[cx^\mu + y] = \sum_{(\alpha, \beta)} A_{\alpha\beta} x^\alpha (cx^\mu + y)^\beta + B_{\alpha\beta} x^{\alpha+1} (cx^\mu + y)^{\beta-1} (c\mu x^{\mu-1} + y'). \quad (2.7)$$

Queremos encontrar  $q' \in \mathbb{N}$  de maneira que as potências  $\bar{\alpha}$  da variável  $x$  em (2.7) possam ser escritas como  $\bar{\alpha} = t/q'$ , com  $t$  inteiro tal que  $t \geq -q'$ . Para tanto, analisaremos as potências da variável  $x$  em (2.7). Reescreva a equação da seguinte forma:

$$f[cx^\mu + y] = \sum_{(\alpha, \beta)} A_{\alpha\beta} x^\alpha (cx^\mu + y)^\beta + B_{\alpha\beta} c\mu x^{\alpha+\mu} (cx^\mu + y)^{\beta-1} + B_{\alpha\beta} x^{\alpha+1} (cx^\mu + y)^{\beta-1} y'. \quad (2.8)$$

Observe que podemos escrever  $\alpha = r/q$ , com  $r \in \mathbb{Z}_{(\geq -q)}$ . Assim, termos em (2.8) da forma  $A_{\alpha\beta} x^\alpha (cx^\mu + y)^\beta$ , possuem expoentes da variável  $x$  escritos como

$$\bar{\alpha} = \alpha + \mu k,$$

onde  $0 \leq k \leq \beta$ , isto é,

$$\bar{\alpha} = \frac{r}{q} + \frac{a}{b} k.$$

Logo,

$$\bar{\alpha} = \frac{rb + aqk}{qb} \in \frac{\mathbb{Z}}{qb}.$$

Note que  $\bar{\alpha} \geq -1$ , uma vez que  $ak/b$  é um termo não negativo.

Do mesmo modo, os termos da equação (2.8) que possuem a forma  $B_{\alpha\beta} c\mu x^{\alpha+\mu} (cx^\mu + y)^{\beta-1}$  apresentam expoentes da variável  $x$  escritos da forma

$$\bar{\alpha} = \alpha + \mu + \mu k = \alpha + \mu(k + 1)$$

para  $0 \leq k \leq \beta - 1$ , ou seja,

$$\bar{\alpha} = \frac{r}{q} + \frac{a}{b} (k + 1).$$

Conseqüentemente,

$$\bar{\alpha} = \frac{rb + aq(k + 1)}{qb} \in \frac{\mathbb{Z}}{qb}.$$

Observe que  $\bar{\alpha} \geq -1$  pelos mesmos motivos explicitados anteriormente.

Por fim, analisaremos os termos da forma  $B_{\alpha\beta} x^{\alpha+1} (cx^\mu + y)^{\beta-1} y'$ . Note que os expoentes de  $x$  e  $y$  destes termos podem ser escritos como

$$\bar{\alpha} = \alpha + 1 + \mu k \quad \text{e} \quad \bar{\beta} = \beta - 1 - k,$$

para  $0 \leq k \leq \beta - 1$ , e uma vez que tais termos acompanham a variável  $y'$ , temos que os bigraus

gerados são da forma

$$\bar{\alpha} = \alpha + \mu k \quad \text{e} \quad \bar{\beta} = \beta - k.$$

Logo,

$$\bar{\alpha} = \frac{r}{q} + \frac{a}{b}k,$$

isto é,

$$\bar{\alpha} = \frac{rb + aqk}{qb} \in \frac{\mathbb{Z}}{qb}.$$

Em suma, tomando  $q' = qb \in \mathbb{N}$ , segue que os expoentes  $\bar{\alpha}$  gerados pela transformada são da forma  $t/q'$ , com  $t \geq -q'$  e  $\bar{\beta} \in \mathbb{N}$ , ou seja,

$$\Delta(f[cx^\mu + y]) \subset \left( \frac{\mathbb{Z}}{q'} \right)_{(\geq -1)} \times \mathbb{N}.$$

□

**Observação 2.2.5.** Na demonstração anterior, escolhemos tomar  $q' = qb$  apenas para simplificar a escrita dos cálculos. Porém, chamamos a atenção para o fato que podemos tomar  $q' = mmc(q, b)$  e o resultado segue de forma análoga em todos os casos. Em resumo, se  $f \in C_q$ , então a transformada  $f' = f[cx^\mu + y] \in C_{q'}$ , onde  $q' = mmc(q, b)$  e  $\mu = a/b$ .

Em particular, podemos destacar que os termos de bigrau  $(\alpha, \beta)$  em uma transformada  $f' = f[cx^\mu + y]$ , são limitados pelas retas  $\alpha = -1$  e  $\beta = 0$ , respectivamente. Isto significa que o polígono de Newton de  $f$  está bem definido e possui um número finito de lados.

**Afirmção 2.2.6.** Sejam  $f$  um polinômio diferencial em  $C_q$ ,  $\mu' < \mu$ , com  $\mu', \mu \in \mathbb{Q}_+$  e  $(\alpha, \beta)$  um ponto de  $L(f, \mu') \cap N(f)$ . Então, os bi-índices obtidos pela  $(\mu, c)$ -transformada  $f[cx^\mu + y]$ , distintos de  $(\alpha, \beta)$ , estão localizados sempre à direita de  $L(f, \mu')$ .

*Demonstração.* Sejam  $f = \sum M_{\alpha\beta}$  e  $N(f)$  como na Figura 2.2. Considere  $L(f, \mu')$ , a reta distinguida de coincidência  $\mu'$  em  $f$ , isto é, a única reta de inclinação  $-1/\mu'$  que contém um lado ou um vértice de  $N(f)$ . Tome  $(\alpha, \beta) \in L(f, \mu') \cap N(f)$ , então

$$\alpha + \mu'\beta = \alpha_0,$$

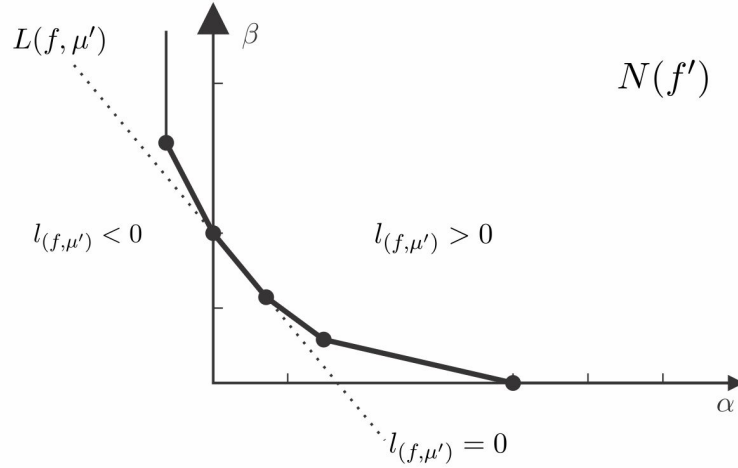
para algum  $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ . Definimos uma função auxiliar por

$$l_{(f, \mu')}(\alpha, \beta) = \alpha + \mu'\beta - \alpha_0, \tag{2.9}$$

e considere os semi-planos correspondentes às respectivas regiões localizadas acima e abaixo de  $L(f, \mu')$ :

$$\pi_1 = \{(\alpha, \beta) \mid l_{(f, \mu')} > 0\} \quad \text{e} \quad \pi_2 = \{(\alpha, \beta) \mid l_{(f, \mu')} < 0\}.$$





**Figura 2.2:** Polígono de Newton de  $f$  e  $L(f, \mu')$ .

Note que os pontos de  $L(f, \mu')$  correspondem exatamente aos pontos nos quais  $l(f, \mu')$  é nulo.

Considere o binômio diferencial

$$M_{\alpha\beta}(f) = A_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta + B_{\alpha\beta}x^{\alpha+1}y^{\beta-1}y',$$

e tal binômio transformado pela substituição de  $y$  por  $cx^\mu + y$ :

$$M_{\alpha\beta}^t(f) = A_{\alpha\beta}x^\alpha (cx^\mu + y)^\beta + B_{\alpha\beta}x^{\alpha+1} (cx^\mu + y)^{\beta-1} (c\mu x^{\mu-1} + y'),$$

ou seja,

$$M_{\alpha\beta}^t(f) = A_{\alpha\beta}x^\alpha (cx^\mu + y)^\beta + B_{\alpha\beta}c\mu x^{\alpha+\mu} (cx^\mu + y)^{\beta-1} + B_{\alpha\beta}x^{\alpha+1} (cx^\mu + y)^{\beta-1} y'. \quad (2.10)$$

Para analisar o efeito ocasionado por  $M_{\alpha\beta}^t(f)$  nos expoentes das variáveis  $x$  e  $y$ , dividiremos a equação acima em dois casos:

**Caso I:** Analisaremos aqui os bi-índices da equação (2.10) que não acompanham a variável  $y'$ . Seja

$$A_{\alpha\beta}x^\alpha (cx^\mu + y)^\beta + B_{\alpha\beta}c\mu x^{\alpha+\mu} (cx^\mu + y)^{\beta-1}.$$

*i)* Se  $A_{\alpha\beta} \neq 0$ , obtemos termos não nulos com expoentes  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  da forma

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \alpha + k\mu \\ \bar{\beta} &= \beta - k, \end{aligned} \quad (2.11)$$

com  $0 \leq k \leq \beta$ . Calculemos para estes  $l_{(f, \mu')}(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ :

$$\begin{aligned} l_{(f, \mu')}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) &= \bar{\alpha} + \bar{\beta}\mu' - \alpha_0 \\ &= (\alpha + k\mu) + (\beta - k)\mu' - \alpha_0 \\ &= \alpha + \beta\mu' - \alpha_0 + k\mu - k\mu'. \end{aligned}$$

Logo,

$$l_{(f,\mu')}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = l_{(f,\mu')}(\alpha, \beta) + k(\mu - \mu'). \quad (2.12)$$

Uma vez que assumimos  $(\alpha, \beta) \in L(f, \mu')$ , ou seja,  $l_{(f,\mu')}(\alpha, \beta) = 0$ , segue que a equação (2.12) é estritamente positiva, pois  $k > 0$  e  $\mu' < \mu$ . Portanto, os termos obtidos pela transformada com  $k > 0$ , estão em  $\pi_1$ , isto é, à direita de  $L(f, \mu')$ . Além disso,  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in L(f, \mu')$  se, e somente se,  $k = 0$ , isto é,  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = (\alpha, \beta)$ .

ii) Se  $B_{\alpha\beta} \neq 0$ , por (2.11) obtemos termos não nulos com bigraus da forma

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \alpha + \mu + k\mu \\ \bar{\beta} &= \beta - 1 - k, \end{aligned} \quad (2.13)$$

com  $0 \leq k \leq \beta - 1$ . Calculemos para tais  $l_{(f,\mu')}(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ :

$$\begin{aligned} l_{(f,\mu')}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) &= (\alpha + \mu + k\mu) + (\beta - 1 - k)\mu' - \alpha_0 \\ &= \alpha + k\mu + \mu + \beta\mu' - \mu' - k\mu' - \alpha_0 \\ &= \alpha + \beta\mu' - \alpha_0 + (k+1)\mu - (k+1)\mu'. \end{aligned}$$

Assim,

$$l_{(f,\mu')}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = l_{(f,\mu')}(\alpha, \beta) + (k+1)(\mu - \mu'). \quad (2.14)$$

Da mesma forma, temos  $l_{(f,\mu')}(\alpha, \beta) = 0$ , e como  $\mu' < \mu$ , segue que a equação (2.14) é estritamente positiva, pois  $k \geq 0$ . Logo, estes termos transformados estão sempre à direita de  $L(f, \mu')$ .

**Caso II:** Analisaremos aqui os bi-índices de  $M_{\alpha\beta}^t$  dos termos de

$$B_{\alpha\beta}x^{\alpha+1}(cx^\mu + y)^{\beta-1}y'.$$

iii) Se  $B_{\alpha\beta} \neq 0$ , obtemos expoentes da forma

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \alpha + k\mu + 1 \\ \bar{\beta} &= \beta - k - 1, \end{aligned}$$

com  $0 \leq k \leq \beta - 1$ . Como estes termos acompanham a variável  $y'$ , os bigraus obtidos serão dados por

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \alpha + k\mu \\ \bar{\beta} &= \beta - k, \end{aligned} \quad (2.15)$$

com  $0 \leq k \leq \beta - 1$ . Aplicando  $l_{(f, \mu')}(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  para estes bi-índices, temos

$$\begin{aligned} l_{(f, \mu')}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) &= \bar{\alpha} + \bar{\beta}\mu' - \alpha_0 \\ &= (\alpha + k\mu) + (\beta - k)\mu' - \alpha_0 \\ &= \alpha + \beta\mu' - \alpha_0 + k\mu - k\mu'. \end{aligned}$$

Logo,

$$l_{(f, \mu')}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = l_{(f, \mu')}(\alpha, \beta) + k(\mu - \mu').$$

Pelo mesmo motivo de  $i$ ), os termos transformados com  $k > 0$ , estão em  $\pi_1$ , ou seja, à direita de  $L(f, \mu')$ . Assim,  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in L(f, \mu')$  se, e somente se,  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = (\alpha, \beta)$ .

Portanto, os bigraus obtidos pela transformada, distintos de  $(\alpha, \beta)$ , estão localizados sempre à direita de  $L(f, \mu')$ .  $\square$

**Definição 2.2.7.** Se  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  é um bi-índice da  $(\mu, c)$ -transformada de  $f$  satisfazendo as equações (2.11), (2.13) e (2.15) dizemos que  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  é *produzido* por  $(\alpha, \beta)$ . No mesmo caso, dizemos que o bi-índice  $(\alpha, \beta)$  *produz*  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ .

**Observação 2.2.8.** Escrevemos

$$M_{\alpha\beta}^t = \sum_{(\alpha', \beta')} D_{\alpha'\beta'}, \quad (2.16)$$

onde  $D_{\alpha'\beta'}$  são binômios transformados de  $M_{\alpha\beta}$  e  $(\alpha', \beta')$  são produzidos por  $(\alpha, \beta)$ .

Ressaltamos que quando  $k = 0$  nas equações (2.11) e (2.15), obtemos o bigrau original  $(\alpha, \beta)$ . Em particular, se  $(\alpha, \beta) \in N(f) \cap L(f, \mu')$ , isto significa que  $D_{\alpha\beta}$  é não nulo em (2.16), e pela Afirmção 2.2.6, segue que os coeficientes de  $D_{\alpha\beta}$  são dados pelos coeficientes originais de  $M_{\alpha\beta}$ . Logo,

$$D_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}.$$

**Observação 2.2.9.** Da mesma forma, o binômio diferencial associado a transformada,  $M'_{\alpha\beta}$ , é dado por um somatório de binômios diferenciais  $D_{\alpha'\beta'}$  transformados, nos quais  $(\alpha', \beta')$  produzem o bigrau  $(\alpha, \beta)$ .

**Proposição 2.2.10.** Para  $(\alpha, \beta) \in L(f, \mu') \cap N(f)$ , temos

$$M'_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta},$$

onde  $M'_{\alpha\beta}$  é o binômio diferencial associado a  $f' = f[cx^\mu + y]$ , onde  $\mu' < \mu$ .

*Demonstração.* Queremos mostrar que o binômio diferencial associado a  $f'$  para  $(\alpha, \beta)$  não provém de outros binômios transformados, ou seja, não existem bi-índices produzindo  $(\alpha, \beta)$  distintos de  $(\alpha, \beta)$ . Suponhamos então que exista um bi-índice  $(\alpha_1, \beta_1)$ , distinto de  $(\alpha, \beta)$ , que o produza. Isto significa que  $(\alpha, \beta)$  é escrito de uma das formas descritas em (2.11), (2.13) ou (2.15).

## 2.2. A TRANSFORMADA DE NEWTON-PUISEUX

---

Primeiramente note que, como  $(\alpha, \beta) \in L(f, \mu')$ , temos  $l_{(f, \mu')}(\alpha, \beta) = 0$ , isto é

$$\alpha + \beta\mu' - \alpha_0 = 0. \quad (2.17)$$

i) Se  $(\alpha, \beta)$  é tal que

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 + k\mu \\ \beta &= \beta_1 - k, \end{aligned}$$

para  $k \neq 0$ , de (2.17) temos

$$0 = (\alpha_1 + k\mu) + (\beta_1 - k)\mu' - \alpha_0 = \alpha_1 + \beta_1\mu' - \alpha_0 + k\mu - k\mu',$$

isto é,

$$l_{(f, \mu')}(\alpha_1, \beta_1) + k(\mu - \mu') = 0.$$

Como  $k(\mu - \mu') > 0$ , segue que  $l_{(f, \mu')}(\alpha_1, \beta_1) < 0$ , isto é,  $(\alpha_1, \beta_1)$  se encontra abaixo de  $L(f, \mu')$ . Uma vez que estamos considerando a transformada de  $M_{\alpha_1\beta_1}$ , segue que  $M_{\alpha_1\beta_1}$  é não nulo, uma contradição, pois não existem pontos de  $\Delta(f)$  abaixo desta reta.

ii) Se  $(\alpha, \beta)$  é tal que

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 + \mu + k\mu \\ \beta &= \beta_1 - 1 - k, \end{aligned}$$

a equação (2.17) implica que

$$0 = (\alpha_1 + \mu + k\mu) + (\beta_1 - 1 - k)\mu' - \alpha_0 = \alpha_1 + \beta_1\mu' - \alpha_0 + (k+1)(\mu - \mu').$$

Assim,

$$l_{(f, \mu')}(\alpha_1, \beta_1) + (k+1)(\mu - \mu') = 0.$$

Como  $(k+1)(\mu - \mu') > 0$ , segue que  $l_{(f, \mu')}(\alpha_1, \beta_1) < 0$  e, pelos mesmos motivos explicitados anteriormente, temos uma contradição.

Tendo considerado todos os casos possíveis, segue que  $M'_{\alpha\beta}$  não recebe contribuições de outros binômios transformados. Logo,

$$M'_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta}.$$

Pela Observação 2.2.9, segue que

$$M'_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}.$$

□

Na propriedade seguinte, obtemos a igualdade das retas de distinguidas de coincidência  $\mu'$  associadas a  $f$  e  $f[x^\mu + y]$ , bem como a igualdade entre os polinômios característicos e iniciais associados a  $f$  e a transformada  $f' = f[cy^\mu + y]$ , para  $\mu' < \mu$ .

**Propriedade 2.2.11.** Se  $\mu' \in \mathbb{Q}_+$  é tal que  $\mu' < \mu$ , então:

$$i) L(f, \mu') = L(f[cx^\mu + y], \mu')$$

$$ii) In^{(\mu')}(f) = In^{(\mu')}(f[cx^\mu + y])$$

$$iii) \varphi_{(f, \mu')}(c) = \varphi_{(f[cx^\mu + y], \mu')}(c).$$

*Demonstração.* *i)* Seja  $(\alpha, \beta) \in L(f, \mu') \cap N(f)$ . Se  $(\alpha, \beta)$  não é o único ponto de  $L(f, \mu') \cap N(f)$ , tome  $(\alpha, \beta)$  como o ponto mais alto de  $L(f, \mu') \cap N(f)$ . Uma vez que da Proposição 2.2.10 temos

$$M'_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta} \neq 0,$$

segue que  $(\alpha, \beta) \in \Delta(f')$ . Pela Afirmação 2.2.6, termos produzidos por  $M'_{\alpha\beta}$  estão sempre à direita deste ponto, em ambos os casos considerados. Isso significa que  $(\alpha, \beta)$  é o ponto que se localiza "mais à esquerda" de  $\Delta(f')$ , e então

$$(\alpha, \beta) \in N(f').$$

Observe que  $L(f, \mu')$  e  $L(f', \mu')$  são as únicas retas de inclinação  $-1/\mu'$  que contém pontos de  $N(f)$  e  $N(f')$ , respectivamente. Como as coincinações de  $L(f[cx^\mu + y], \mu')$  e  $L(f, \mu')$  coincidem, e esta última possui um ponto em comum com  $N(f')$ , segue da unicidade desta reta que

$$L(f, \mu') = L(f[cx^\mu + y], \mu').$$

*ii)* Para mostrar que os respectivos polinômios diferenciais iniciais coincidem, observe que

$$In^{(\mu')}(f') = In^{(\mu')}(f[cx^\mu + y]) = \sum_{(\alpha, \beta) \in L(f', \mu')} M'_{\alpha\beta}.$$

Pela Proposição 2.2.10 e o item anterior, temos que

$$In^{(\mu')}(f') = \sum_{(\alpha, \beta) \in L(f, \mu')} M_{\alpha\beta} = In^{(\mu')}(f). \quad (2.18)$$

Logo,

$$In^{(\mu')}(f[cx^\mu + y]) = In^{(\mu')}(f).$$

*iii)* Seja o polinômio característico associado a  $f'$ , dado por

$$\varphi_{(f', \mu')}(c) = \sum_{(\alpha, \beta) \in L(f', \mu')} (A'_{\alpha\beta} + \mu' B'_{\alpha\beta}) c^\beta.$$

Como  $A_{\alpha\beta} = A'_{\alpha\beta}$  e  $B_{\alpha\beta} = B'_{\alpha\beta}$ , temos que

$$\varphi_{(f', \mu')}(c) = \sum_{(\alpha, \beta) \in L(f, \mu')} (A_{\alpha\beta} + \mu' B_{\alpha\beta}) c^\beta.$$

Logo,

$$\varphi_{(f,\mu')}(c) = \varphi_{(f[cx^\mu+y],\mu')}(c).$$

□

O exemplo a seguir ilustra os fatos obtidos na Propriedade 2.2.11, no caso em que  $\mu' = 1/2 < 1 = \mu$ .

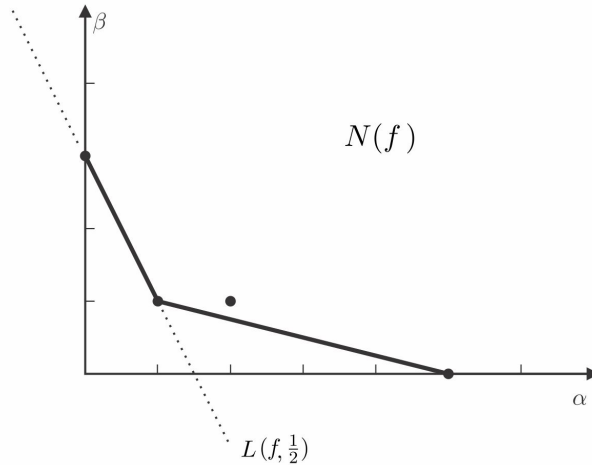
**Exemplo 2.2.12.** Seja  $f = xy + 2y^3 + x^5 + x^2y' + x^3y'$ , ou seja,  $f = A(x, y) + B(x, y)y'$  com  $A(x, y) = xy + 2y^3 + x^5$  e  $B(x, y) = x^2 + x^3$ . Temos,

$$\begin{aligned} M_{1,1}(f) &= A_{11}xy + B_{11}x^2y' = xy + x^2y' \\ M_{0,3}(f) &= A_{03}y^3 + B_{11}xy^2y' = 2y^3 \\ M_{2,1}(f) &= A_{21}x^2y + B_{21}x^3y' = x^3y' \\ M_{5,0}(f) &= A_{50}x^5 + B_{50}x^6y^{-1}y' = x^5. \end{aligned}$$

Como esses binômios são os únicos não nulos na escrita de  $f$ , segue que

$$\Delta(f) = \{(1, 1), (0, 3), (2, 1), (5, 0)\},$$

e o polígono de Newton de  $f$  é ilustrado no Diagrama 2.3.



**Figura 2.3:** Polígono de Newton de  $f$ .

Observe que o lado de  $N(f)$  que contém os pontos  $(0, 3)$  e  $(1, 1)$  está contido em uma reta com inclinação  $-2 = -\frac{1}{1/2}$ , isto é,  $(0, 3), (1, 1) \in L(f, 1/2)$ . Denotemos  $\mu' = 1/2$ , e calculemos a transformada de  $f$  por  $c \in \mathbb{C}^*$  e  $\mu = 1$ , isto é,  $f[cx + y]$ . Note que  $\mu' < \mu$ . Então,

$$\begin{aligned} f' = f[cx^1 + y] &= x(cx + y) + 2(cx + y)^3 + x^5 + x^2(c + y') + x^3(c + y') \\ &= cx^2 + xy + 2(c^3x^3 + 3c^2x^2y + 3cxy^2 + y^3) + x^5 + cx^2 + x^2y' + cx^3 + x^3y' \\ &= 2cx^2 + xy + (2c^3 + c)x^3 + 6c^2x^2y + 6cxy^2 + 2y^3 + x^5 + x^2y' + x^3y'. \end{aligned}$$

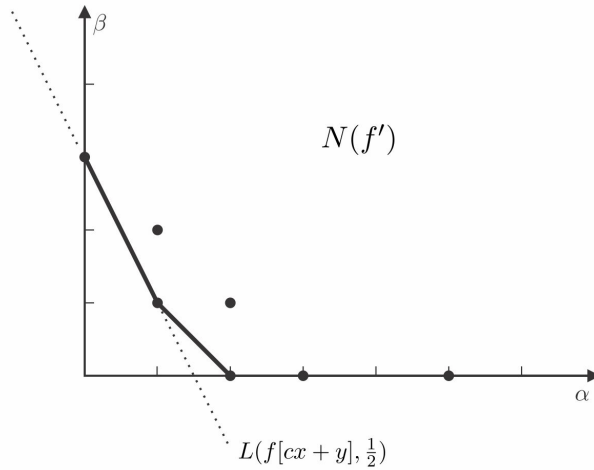
## 2.2. A TRANSFORMADA DE NEWTON-PUISEUX

Para exibir aos pontos de  $\Delta(f')$ , calculamos os binômios diferenciais associados a  $f'$ , que denotamos por  $M'_{\alpha\beta}$ . Temos,

$$\begin{aligned} M'_{2,0}(f') &= A'_{20}x^2 + B'_{20}x^3y^{-1}y' = 2cx^2 \\ M'_{3,0}(f') &= A'_{30}x^3 + B'_{30}x^4y^{-1}y' = (2c^3 + c)x^3 \\ M'_{2,1}(f') &= A'_{21}x^2y + B'_{21}x^3y' = 6c^2x^2y + x^3y' \\ M'_{1,1}(f') &= A'_{11}xy + B'_{11}x^2y' = xy + x^2y' \\ M'_{1,2}(f') &= A'_{12}xy^2 + B'_{12}x^2yy' = 6cxy^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M'_{0,3}(f') &= A'_{03}y^3 + B'_{03}xy^2y' = 2y^3 \\ M'_{5,0}(f') &= A'_{50}x^5 + B'_{50}x^6y^{-1}y' = x^5. \end{aligned}$$

Logo,  $\Delta(f') = \{(2, 0), (3, 0), (1, 1), (2, 1), (1, 2), (0, 3), (5, 0)\}$ , e  $N(f')$  é ilustrado pelo Diagrama 2.4.



**Figura 2.4:** Polígono de Newton de  $f' = f[cx + y]$ .

Note que os pontos  $(0, 3), (1, 1) \in L(f, 1/2)$  estão em  $\Delta(f')$  e correspondem aos pontos que estão à esquerda dos demais e, assim, pertencem a  $N(f')$ . Dessa forma, como  $L(f', 1/2)$  é a única reta com inclinação  $-2$  que intersecta  $N(f')$ , segue que

$$L(f, 1/2) = L(f[cx + y], 1/2). \quad (2.19)$$

Observe que da construção acima temos que  $M_{\alpha\beta} = M'_{\alpha\beta}$ , bem como  $A_{\alpha\beta} = A'_{\alpha\beta}$  e  $B_{\alpha\beta} = B'_{\alpha\beta}$  para pontos sobre a reta  $L(f, 1/2)$ . Assim, o polinômio diferencial inicial é

$$In^{(\mu')}(f') = \sum_{(\alpha,\beta) \in L(f', 1/2)} M'_{\alpha\beta} = 2y^3 + xy + x^2y'.$$

Por outro lado,

$$In^{(\mu')}(f) = \sum_{(\alpha,\beta) \in L(f,1/2)} M_{\alpha\beta} = 2y^3 + xy + x^2y'.$$

Logo,

$$In^{(\mu')}(f[cy + y]) = In^{(\mu')}(f).$$

Olhando para o polinômio característico, note que

$$\varphi_{(f',\mu')}(c) = \sum_{(\alpha,\beta) \in L(f',\mu')} (A'_{\alpha\beta} + \mu' B'_{\alpha\beta})c^\beta = 2c^3 + \left(1 + \frac{1}{2}\right)c = c \left(2c^2 + \frac{3}{2}\right),$$

enquanto

$$\varphi_{(f,\mu)}(c) = \sum_{(\alpha,\beta) \in L(f,\mu)} (A_{\alpha\beta} + \mu B_{\alpha\beta})c^\beta = 2c^3 + \left(1 + \frac{1}{2}\right)c = c \left(2c^2 + \frac{3}{2}\right).$$

Logo,

$$\varphi_{(f,\mu)}(c) = \varphi_{(f[cy+y],\mu)}(c).$$

**Definição 2.2.13.** Sejam  $L(f, \mu)$  a reta distinguida de coincinação  $\mu$  e  $N(f)$  o polígono de Newton de  $f$ . Definimos o ponto  $Q(f, \mu)$  como o *ponto mais alto* de  $N(f) \cap L(f, \mu)$ .

**Observação 2.2.14.** Note que  $Q(f, \mu)$  é o ponto mais alto do lado de  $N(f)$  que intersecta  $L(f, \mu)$ , ou o único ponto de  $N(f)$  que intersecta  $L(f, \mu)$ .

Na Propriedade 2.2.11, obtemos relações importantes entre os objetos associados a uma coincinação  $\mu'$  dos polígonos de Newton de  $f$  e da transformada  $f' = f[cy^\mu + y]$ , no caso em que  $\mu' < \mu$ . Usando a definição acima, considere o caso particular em que  $\mu = \mu'$ , isto é,  $f' = f[cy^\mu + y]$ , bem como as retas  $L(f, \mu)$  e  $L(f', \mu)$ . Seguem algumas propriedades que relacionam os polígonos de Newton de  $f$  e  $f'$ .

**Observação 2.2.15.** Seja  $(\alpha, \beta) \in L(f, \mu) \cap N(f)$  e seja  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  um bi-índice produzido por  $M_{\alpha\beta}^t$  pela transformada  $f' = f[cy^\mu + y]$ . Então,  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  possui uma das formas descritas pelas equações (2.11), (2.13) ou (2.15), para  $\mu' = \mu$ . Se  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  satisfaz as equações (2.11) e (2.15), temos

$$\begin{aligned} l_{(f,\mu)}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) &= \bar{\alpha} + \bar{\beta}\mu - \alpha_0 \\ &= (\alpha + k\mu) + (\beta - k)\mu - \alpha_0 \\ &= \alpha + \beta\mu - \alpha_0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

uma vez que  $(\alpha, \beta) \in L(f, \mu)$ . Logo,

$$(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in L(f, \mu).$$



Se  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  possui uma forma descrita em (2.13), perceba que

$$\begin{aligned} l_{(f,\mu)}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) &= \bar{\alpha} + \bar{\beta}\mu - \alpha_0 \\ &= (\alpha + k\mu + \mu) + (\beta - k - 1)\mu - \alpha_0, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} l_{(f,\mu)}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) &= \alpha + \beta\mu - \alpha_0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Também neste caso,

$$(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in L(f, \mu).$$

Portanto, os bi-índices produzidos por  $M_{\alpha\beta}^t$  estão todos localizados sobre a reta  $L(f, \mu)$ .

**Observação 2.2.16.** Sejam  $Q(f, \mu)$  o ponto mais alto de  $L(f, \mu) \cap N(f)$  e  $(\alpha', \beta')$  um ponto de  $N(f)$  localizado acima de  $Q(f, \mu)$ . Uma vez que  $Q(f, \mu)$  é o ponto mais alto de  $L(f, \mu) \cap N(f)$ , segue que o ponto  $(\alpha', \beta')$  pertence a um lado de  $N(f)$  cuja inclinação é  $-1/\mu'$ , com  $\mu' < \mu$ . Tal lado é denotado por  $L_{\mu'}$ . Considere  $r$  a reta que passa por  $(\alpha', \beta')$  com inclinação  $-1/\mu$ , cuja equação é dada por

$$x + y\mu - \gamma_0 = 0,$$

com  $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ . Vamos mostrar que os bi-índices produzidos por  $(\alpha', \beta')$  estão localizados na reta  $r$ . Para tanto, seja  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  um bi-índice produzido por  $(\alpha', \beta')$ . Sabe-se que  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  satisfaz uma das equações (2.11), (2.13) e (2.15).

i) No caso em que  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  satisfaz (2.11) e (2.15), temos

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \alpha' + k\mu \\ \bar{\beta} &= \beta' - k, \end{aligned}$$

com  $0 \leq k \leq \beta'$ . Então,

$$\bar{\alpha} + \bar{\beta}\mu - \gamma_0 = (\alpha' + k\mu) + (\beta' - k)\mu - \gamma_0,$$

e como  $(\alpha', \beta') \in r$ , segue que

$$\bar{\alpha} + \bar{\beta}\mu - \gamma_0 = \alpha' + \beta'\mu - \gamma_0 = 0.$$

Logo,  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in r$ .

ii) No caso em que  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  é produzido por  $(\alpha', \beta')$  e satisfaz (2.13), temos

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \alpha' + \mu + k\mu \\ \bar{\beta} &= \beta' - 1 - k, \end{aligned}$$

com  $0 \leq k \leq \beta' - 1$ . Assim,

$$\bar{\alpha} + \bar{\beta}\mu - \gamma_0 = (\alpha' + \mu + k\mu) + (\beta' - 1 - k)\mu - \gamma_0.$$

Uma vez que  $(\alpha', \beta') \in r$ , segue que

$$\bar{\alpha} + \bar{\beta}\mu - \gamma_0 = \alpha' + \beta'\mu - \gamma_0 = 0,$$

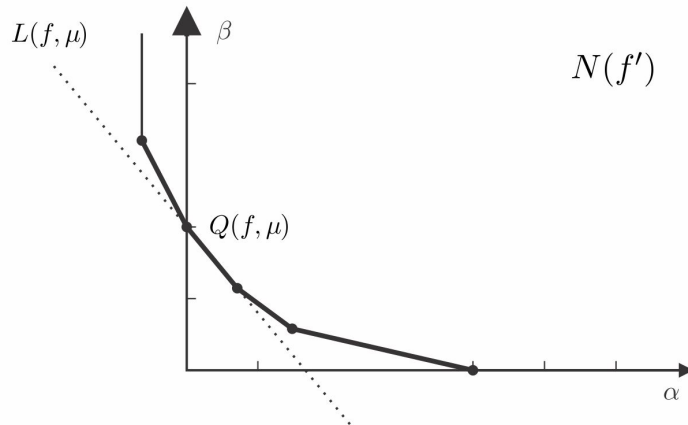
e  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) \in r$ .

Portanto, todos os bi-índices produzidos por  $(\alpha', \beta')$  estão em uma reta  $r$  inclinação  $-1/\mu$ .

Na propriedade anterior, mostramos que pontos acima de  $Q(f, \mu)$  produzem, pela  $(\mu, c)$ -transformada, pontos em uma reta de coincidência  $\mu$  que passa pelo ponto original. A propriedade a seguir, garante que as porções dos polígonos de Newton associados a  $f$  e a  $f' = f[cx^\mu + y]$ , localizadas acima do ponto  $Q(f, \mu)$ , são iguais.

**Propriedade 2.2.17.** As porções de  $N(f)$  e  $N(f')$  que se localizam acima de  $Q(f, \mu)$  são iguais.

*Demonstração.* Considere  $Q(f, \mu) = (\alpha, \beta)$  e  $(\alpha', \beta')$  um ponto de  $N(f)$  localizado acima de  $Q(f, \mu)$ . Pela Observação 2.2.16, temos que  $(\alpha', \beta') \in L_{\mu'}$ . Na demonstração da Observação



**Figura 2.5:** O ponto  $Q(f, \mu)$ .

2.2.16, mostramos que os termos gerados por  $M_{\alpha'\beta'}^t$  se localizam sempre à direita de  $L_{\mu'}$  para  $f' = f[cx^\mu + y]$ , com  $\mu' < \mu$ . Mostramos também que, nestas circunstâncias,  $(\alpha', \beta')$  não é produzido por nenhum outro bi-índice, e pela Proposição 2.2.10,

$$M_{\alpha'\beta'}^t = M_{\alpha'\beta'} \neq 0.$$

Deste modo,  $(\alpha', \beta') \in \Delta(f')$ , e por estar localizado à esquerda dos demais, temos que  $(\alpha', \beta') \in N(f')$ . Assim, pontos localizados acima de  $Q(f, \mu)$  estão em  $N(f')$ .

Uma vez que pontos  $(\alpha', \beta')$  localizados acima de  $Q$  estão em  $N(f')$ , e que pela Observação 2.2.16, os pontos produzidos por  $(\alpha', \beta')$  estão sobre uma reta com coincidência  $\mu$  localizada à direita de  $L(f, \mu)$ , segue que estes poderão realizar modificações somente nos lados de  $N(f)$  que se localizam abaixo de  $Q(f, \mu)$ , garantindo que as partições acima deste ponto são idênticas em ambos os polígonos  $N(f)$  e  $N(f')$ .

Por fim, segue que as porções de  $N(f)$  e  $N(f')$  acima de  $Q(f, \mu)$  coincidem.  $\square$

Na Propriedade 2.2.11, mostramos a igualdade das retas de inclinação  $-1/\mu'$  que interceptam  $N(f)$  e  $N(f')$ , onde  $f' = f[cx^\mu + y]$  e  $\mu' < \mu$ . Agora, mostraremos agora tal igualdade no caso em que  $\mu' = \mu$ .

**Propriedade 2.2.18.**  $L(f, \mu) = L(f[cx^\mu + y], \mu)$ .

*Demonstração.* Considere novamente  $Q(f, \mu) = (\alpha, \beta)$  como definimos, e  $f' = f[cx^\mu + y]$ . Pela Propriedade 2.2.17, as porções de  $N(f)$  e  $N(f')$  acima de  $Q(f, \mu)$  coincidem. Uma vez que  $Q(f, \mu)$  é o ponto mais alto de  $L_\mu$  ou o único ponto de  $N(f) \cap L(f, \mu)$ , segue da Proposição 2.2.10 que nenhum ponto localizado acima de  $Q(f, \mu)$  poderá produzi-lo. Da mesma forma,  $Q(f, \mu)$  não é produzido pelos pontos localizados abaixo dele, pois caso contrário, estaria à direita destes. Então, temos

$$M'_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta} \neq 0,$$

isto é,  $Q(f, \mu) \in \Delta(f')$ . Como  $Q$  é um ponto de  $\Delta(f')$  localizado à esquerda dos pontos de  $\Delta(f')$  que se localizam abaixo dele, segue que  $Q(f, \mu) = (\alpha, \beta) \in N(f')$ . Note que  $Q(f, \mu) \in L(f, \mu)$ , ou seja,  $L(f, \mu)$  é uma reta de inclinação  $\mu$  contendo pontos de  $N(f')$ . Da unicidade de  $L(f', \mu)$ , temos

$$L(f, \mu) = L(f', \mu).$$

$\square$

## 2.3 Relacionando os polinômios inicial e característico

Na seção anterior, trabalhamos com a construção do polígono de Newton para o polinômio diferencial associado a uma forma Pffafiana. A essa construção definimos o polinômio diferencial inicial e o polinômio característicos associados a esse polinômio. Nesta seção, vamos relacionar a escrita destes polinômios.

Seja

$$In^{(\mu)}(f) = \sum_{(\alpha, \beta) \in L(f, \mu)} M_{\alpha\beta}(f)$$

e considere  $(\alpha, 0)$  e  $(\alpha_i, i)$  pontos sobre a reta  $L(f, \mu)$ . Então, temos que

$$-\frac{1}{\mu} = \frac{i - 0}{\alpha_i - \alpha}.$$

Note que existem finitos pontos de  $L(f, \mu)$  para os quais o binômio diferencial é não nulo, e tais pontos serão representados por  $(\alpha_i, i)$ , para  $i = 1, \dots, t$ . Usando a escrita dos binômios diferenciais  $M_{\alpha_i i}$ , podemos escrever

$$In^{(\mu)}(f) = A_0 x^\alpha + \sum_{i=1}^t A_i x^{\alpha_i} y^i + B_i x^{\alpha_i+1} y^{i-1} y', \quad (2.20)$$

onde  $\alpha_i = \alpha - \mu i$ . Obtemos assim, uma importante caracterização do polinômio diferencial inicial  $In^{(\mu)}(f')$ , onde  $f' = f[cx^\mu + y]$ .

**Afirmção 2.3.1.** Sendo  $f' = f[cx^\mu + y]$ , temos

$$In^{(\mu)}(f') = (In^{(\mu)}(f))^t,$$

isto é, o polinômio diferencial inicial de  $f'$  associado a  $\mu$  é igual ao polinômio diferencial inicial associado a  $\mu$ , do transformado de  $f$  pela substituição de  $y$  por  $cx^\mu + y$ .

*Demonstração.* O polinômio diferencial inicial associado a transformada  $f' = f[cx^\mu + y]$  é dado por

$$In^{(\mu)}(f') = \sum_{(\alpha, \beta) \in L(f', \mu)} M'_{\alpha\beta}(f'),$$

e como  $L(f, \mu) = L(f', \mu)$ , temos

$$In^{(\mu)}(f') = \sum_{(\alpha, \beta) \in L(f, \mu)} M'_{\alpha\beta}(f'). \quad (2.21)$$

Da Observação 2.2.9, temos que

$$M'_{\alpha\beta} = \sum_{(\alpha', \beta')} D_{\alpha'\beta'},$$

onde cada  $D_{\alpha'\beta'}$  é um binômio transformado em que  $(\alpha', \beta')$  produz o bigrau  $(\alpha, \beta)$ . Pelas Observações 2.2.15 e 2.2.16, termos em  $L(f, \mu)$  produzem e são produzidos somente por bigraus que estão sobre esta mesma reta. Em outras palavras,

$$M'_{\alpha\beta} = \sum_{(\alpha', \beta')} M_{\alpha'\beta'}^t,$$

onde  $(\alpha', \beta') \in L(f, \mu)$  e produz  $(\alpha, \beta)$ . Assim,

$$\sum_{(\alpha, \beta) \in L(f, \mu)} M'_{\alpha\beta} = \sum_{(\alpha, \beta) \in L(f, \mu)} M_{\alpha\beta}^t.$$

Logo, pela equação (2.21),

$$In^{(\mu)}(f') = \sum_{(\alpha, \beta) \in L(f, \mu)} M_{\alpha\beta}^t,$$

o que é equivalente a

$$In^{(\mu)}(f') = (In^{(\mu)}(f))^t, \quad (2.22)$$

provando o enunciado. □

### 2.3. RELACIONANDO OS POLINÔMIOS INICIAL E CARACTERÍSTICO

Dessa forma, o polinômio diferencial inicial da transformada é

$$In^{(\mu)}(f[cx^\mu + y]) = A_0x^\alpha + \sum_{i=1}^t (A_i x^{\alpha_i} (cx^\mu + y)^i + B_i x^{\alpha_i+1} (cx^\mu + y)^{i-1} (c\mu x^{\mu-1} + y')), \quad (2.23)$$

e organizando os termos, podemos escrever

$$In^{(\mu)}(f[cx^\mu + y]) = A_0(c)x^\alpha + \sum_{i=1}^t A_i(c)x^{\alpha_i}y^i + B_i(c)x^{\alpha_i+1}y^{i-1}y', \quad (2.24)$$

onde  $A_0(c)$ ,  $A_i(c)$  e  $B_i(c)$  são polinômios em  $c$ , para  $i = 1, \dots, t$ . Considere agora o polinômio característico de  $f$  escrito como

$$\varphi(c) = \varphi_{(f,\mu)}(c) = \alpha(c) + \mu c\beta(c),$$

onde

$$\beta(c) = \sum_{i=1}^t B_i c^{i-1} \quad \text{e} \quad \alpha(c) = \sum_{i=0}^t A_i c^i.$$

A propriedade seguinte permite relacionar os coeficientes da equação (2.24), isto é, do polinômio diferencial inicial transformado, com a escrita do polinômio característico acima.

**Propriedade 2.3.2.** São válidas as igualdades:

i)  $A_0(c) = \varphi(c)$ .

ii) Para  $j = 1, \dots, t$ , temos  $A_j(c) = \frac{1}{j!} \varphi^{(j)}(c) - \mu \frac{1}{(j-1)!} \beta^{(j-1)}(c)$ .

iii) Para  $j = 1, \dots, t$ , temos  $B_j(c) = \frac{1}{(j-1)!} \beta^{(j-1)}(c)$ .

*Demonstração.* i) Observe que  $A_0(c)$  é o polinômio em  $c$  que acompanha os termos de expoentes  $x^\alpha$  e  $y^0$ , ou seja, o bi-índice  $(\alpha, 0)$ . Como a equação (2.24) é obtida a partir de (2.23), vamos exibir  $A_0(c)$ . Expandindo a equação (2.23) pelo binômio de Newton, temos:

$$\begin{aligned} A_0(c)x^\alpha &= A_0x^\alpha + \sum_{i=1}^t A_i c^i x^{\alpha_i + \mu i} + \sum_{i=1}^t B_i c^{i-1} x^{\alpha_i+1} x^{\mu(i-1)} (c\mu x^{\mu-1}) \\ &= A_0x^\alpha + \sum_{i=1}^t A_i c^i x^{\alpha_i + \mu i} + \sum_{i=1}^t B_i \mu c^i x^{\alpha_i+1 + \mu i - \mu + \mu - 1} \end{aligned}$$

e uma vez que  $\alpha_i = \alpha - \mu i$ , segue que

$$A_0(c)x^\alpha = \left( A_0 + \sum_{i=1}^t A_i c^i + \sum_{i=1}^t B_i \mu c^i \right) x^\alpha.$$

Assim,

$$\begin{aligned} A_0(c) &= A_0 + \sum_{i=1}^t A_i c^i + \sum_{i=1}^t B_i \mu c^i \\ &= \sum_{i=0}^t A_i c^i + \mu c \sum_{i=1}^t B_i c^{i-1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$A_0(c) = \alpha(c) + \mu c \beta(c),$$

isto é,

$$A_0(c) = \varphi(c).$$

ii) Para  $j$  fixo, note que  $A_j(c)$  é o polinômio em  $c$  que acompanha os fatores  $x^{\alpha_j} y^j$ , isto é, o bi-índice  $(\alpha_j, j)$  em (2.24). Para exibí-lo, dividiremos a equação (2.23) em duas partes. Defina

$$\begin{aligned} \rho_1(x, y) &= A_0 x^\alpha + \sum_{i=1}^t A_i x^{\alpha_i} (cx^\mu + y)^i \\ \rho_2(x, y) &= \sum_{i=1}^t B_i x^{\alpha_i+1} (cx^\mu + y)^{i-1} (c\mu x^{\mu-1} + y'). \end{aligned}$$

Os termos de  $\rho_1(x, y)$  que acompanham o bigrau  $(\alpha_j, j)$  são independentes de  $y'$ , são dados por:

$$\sum_{i=j}^t A_i \binom{i}{j} x^{\alpha_i} (cx^\mu)^{i-j} y^j = \sum_{i=j}^t \binom{i}{j} A_i c^{i-j} x^{\alpha - \mu j} y^j, \quad (2.25)$$

para  $i \geq j$ , com  $\binom{i}{j} = i!/(i-j)!j!$  e  $\alpha_j = \alpha - \mu j$ . Por outro lado, os termos de  $\rho_2(x, y)$  com bigrau  $(\alpha_j, j)$  são da forma:

$$\sum_{i=j+1}^t B_i \binom{i-1}{j} x^{\alpha_i+1} (cx^\mu)^{i-1-j} y^j (c\mu x^{\mu-1}) = \sum_{i=j+1}^t \binom{i-1}{j} B_i \mu c^{i-j} x^{\alpha - \mu j} y^j, \quad (2.26)$$

sempre que  $i \geq j+1$ , onde  $\binom{i-1}{j} = (i-1)!/(i-1-j)!j!$ .

Então,  $A_j(c)$  é formado por termos das equações (2.25) e (2.26), isto é,

$$A_j(c) = \sum_{i=j}^t \binom{i}{j} A_i c^{i-j} + \mu \sum_{i=j+1}^t \binom{i-1}{j} B_i c^{i-j}. \quad (2.27)$$

Para exibir  $\varphi^{(j)}(c)$ , afirmamos:

**Afirmção 2.3.3.**  $\varphi^{(j)}(c) = \alpha^{(j)}(c) + \mu(j\beta^{(j-1)}(c) + c\beta^{(j)}(c)).$

### 2.3. RELACIONANDO OS POLINÔMIOS INICIAL E CARACTERÍSTICO

*Demonstração.* Vamos provar tal afirmação por indução em  $j \in \mathbb{N}$ . Para  $j = 1$ , temos

$$\varphi'(c) = \alpha'(c) + \mu\beta(c) + \mu c\beta'(c) = \alpha'(c) + \mu(\beta(c) + c\beta'(c)),$$

sendo válida a etapa de inicialização. Suponha que a propriedade seja válida para  $j = 1, \dots, k \in \mathbb{N}$ , isto é,

$$\varphi^{(j)}(c) = \alpha^{(j)}(c) + \mu(j\beta^{(j-1)}(c) + c\beta^{(j)}(c)).$$

Mostremos então que a propriedade é satisfeita para  $j = k + 1 \in \mathbb{N}$ . Para isto, note que

$$\varphi^{(k+1)}(c) = (\varphi^{(k)}(c))',$$

e da hipótese de indução,

$$\begin{aligned} \varphi^{(k+1)}(c) &= (\alpha^{(k)}(c))' + \mu k(\beta^{(k-1)}(c))' + \mu(c\beta^{(k)}(c))' \\ &= \alpha^{(k+1)}(c) + \mu k\beta^{(k)}(c) + \mu(\beta^{(k)}(c) + c\beta^{(k+1)}(c)) \\ &= \alpha^{(k+1)}(c) + \mu(k+1)\beta^{(k)}(c) + \mu c\beta^{(k+1)}(c) \\ &= \alpha^{(k+1)}(c) + \mu((k+1)\beta^{(k)}(c) + c\beta^{(k+1)}(c)), \end{aligned}$$

o que demonstra o resultado. □

Para exibir os termos de  $\varphi^{(j)}(c)$ , é necessário realizar derivações sucessivas de  $\alpha$  e  $\beta$ , obtendo

$$\alpha^{(j)}(c) = \sum_{i=j}^t i(i-1)(i-2)\cdots(i-(j-1))A_i c^{i-j}$$

e

$$\beta^{(j)}(c) = \sum_{i=j+1}^t (i-1)(i-2)\cdots((i-1)-(j-1))B_i c^{i-1-j}. \quad (2.28)$$

Da Afirmação 2.3.3, segue que

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^{(j)}(c)}{j!} &= \sum_{i=j}^t \frac{i(i-1)(i-2)\cdots(i-(j-1))}{j!} A_i c^{i-j} \\ &\quad + \mu j \frac{\beta^{(j-1)}(c)}{j!} + \mu c \sum_{i=j+1}^t \frac{(i-1)(i-2)\cdots((i-1)-(j-1))}{j!} B_i c^{i-1-j}. \end{aligned}$$

Note que

$$\binom{i}{j} = \frac{i!}{j!(i-j)!} = \frac{i(i-1)(i-2)\cdots(i-(j-1))}{j!}$$

e

$$\binom{i-1}{j} = \frac{(i-1)!}{((i-1)-j)!} = \frac{(i-1)(i-2)\cdots((i-1)-(j-1))}{j!},$$

donde segue que,

$$\frac{\varphi^{(j)}(c)}{j!} = \sum_{i=j}^t \binom{i}{j} A_i c^{i-j} + \mu \frac{\beta^{(j-1)}(c)}{(j-1)!} + \mu \sum_{i=j+1}^t \binom{i-1}{j} B_i c^{i-j}.$$

Então,

$$\frac{\varphi^{(j)}(c)}{j!} - \mu \frac{\beta^{(j-1)}(c)}{(j-1)!} = \sum_{i=j}^t \binom{i}{j} A_i c^{i-j} + \mu \sum_{i=j+1}^t \binom{i-1}{j} B_i c^{i-j}.$$

Portanto, de (2.27), temos

$$A_j(c) = \frac{\varphi^{(j)}(c)}{j!} - \mu \frac{\beta^{(j-1)}(c)}{(j-1)!}.$$

iii) Analisando a equação (2.24), temos que  $B_j(c)$  consiste dos termos que acompanham o termo  $x^{\alpha_j+1}y^{j-1}y'$ . Abrindo os termos de (2.24) é fácil ver que

$$B_j(c) = \sum_{i=j}^t \binom{i-1}{j-1} B_i c^{(i-1)-(j-1)} = \sum_{i=j}^t \binom{i-1}{j-1} B_i c^{i-j}. \quad (2.29)$$

Por outro lado, a equação (2.28) garante que

$$\frac{\beta^{(j-1)}(c)}{(j-1)!} = \sum_{i=j}^t \frac{(i-1)(i-2)\cdots((i-1)-(j-2))}{(j-1)!} B_i c^{i-j},$$

isto é,

$$\frac{\beta^{(j-1)}(c)}{(j-1)!} = \sum_{i=j}^t \binom{i-1}{j-1} B_i c^{i-j}. \quad (2.30)$$

Logo, de (2.29) e (2.30), segue que

$$B_j(c) = \frac{\beta^{(j-1)}(c)}{(j-1)!}.$$

□

**Observação 2.3.4.** Do item *i*) temos,  $A_0(c) = 0$  se, e somente se,  $\varphi(c) = 0$ .

**Observação 2.3.5.** Em particular, note que  $A_t = A_t(c)$  e  $B_t = B_t(c)$ . Com efeito, do item *iii*) temos

$$\begin{aligned} B_t(c) &= \frac{\beta^{(t-1)}(c)}{(t-1)!} = \sum_{i=t}^t \frac{(i-1)(i-2)\cdots((i-1)-(t-2))}{(t-1)!} B_i c^{i-t} \\ &= \frac{(t-1)(t-2)\cdots((t-1)-(t-2))}{(t-1)!} B_t c^{t-t} \end{aligned}$$



isto é,

$$B_t(c) = B_t.$$

Por outro lado,

$$A_t(c) = \frac{\varphi^{(t)}(c)}{t!} - \mu \frac{\beta^{(t-1)}(c)}{(t-1)!} = \frac{\varphi^{(t)}(c)}{t!} - \mu B_t,$$

e da Afirmação 2.3.3, temos

$$\frac{\varphi^{(t)}(c)}{t!} = \frac{\alpha^{(t)}(c)}{t!} + \frac{\mu(t\beta^{(t-1)}(c) + \beta^{(t)}(c))}{t!}.$$

Como  $\deg(\beta(c)) = t - 1$ , segue que  $\beta^{(t)}(c) = 0$  e

$$\frac{\varphi^{(t)}(c)}{t!} = \frac{\alpha^{(t)}(c)}{t!} + \frac{\mu t \beta^{(t-1)}(c)}{t!} = \frac{\alpha^{(t)}(c)}{t!} + \mu B_t.$$

Então,

$$\begin{aligned} A_t(c) &= \frac{\alpha^{(t)}(c)}{t!} \\ &= \sum_{i=t}^t \frac{i(i-1)(i-2)\cdots(i-(t-1))}{t!} A_i c^{i-t} \\ &= \frac{t(t-1)(t-2)\cdots(t-(t-1))}{t!} A_t c^{t-t} \\ &= A_t. \end{aligned}$$

## Capítulo 3

# O algoritmo de Newton-Puiseux

Para encontrar uma solução de uma forma Pfaffiana  $\omega$ , basta que encontremos uma solução ( $f_\omega = 0$ ), onde  $f_\omega$  é o polinômio diferencial associado a  $\omega$ . Para encontrar tal solução, E. Ince em [9] modificou as ideias de H. Fine em [6] e [7], realizando uma extensão da teoria de Newton-Puiseux para equações diferenciais de primeira ordem. No entanto, tal extensão do algoritmo de Newton-Puiseux, em termos de aplicabilidade, é restrita a determinadas situações. Em vista disso, J. Cano em [3] apresenta uma versão geral do algoritmo em questão, impondo condições relacionadas aos lados dos polígonos de Newton e às raízes do polinômio característico em cada etapa, para garantir que tal algoritmo seja efetivo para encontrar a solução desejada. Neste capítulo, apresentamos a extensão do algoritmo de Newton-Puiseux de J. Cano como instrumento usado para encontrar uma possível solução da equação ( $f_\omega = 0$ ).

### 3.1 O algoritmo

Nesta seção, descrevemos o Algoritmo de Newton-Puiseux modificado por E. Ince [9] para encontrar uma candidata a solução de ( $f_\omega = 0$ ).

Para tanto, suponhamos inicialmente que nem ( $x = 0$ ) e nem ( $y = 0$ ) sejam soluções de ( $f_\omega = 0$ ). Observe que se ( $y = 0$ ) não é solução de ( $f_\omega = 0$ ), temos que  $f_\omega(x, 0)$  é não nulo, isto é,

$$A_\omega(x, 0) + B_\omega(x, 0) \cdot 0 = A_\omega(x, 0) \neq 0.$$

Isto significa que  $y$  não divide  $A_\omega$ , ou seja, existe um ponto da forma  $(\alpha, 0)$  em  $\Delta(f_\omega)$ , e consequentemente, em  $N(f_\omega)$ . Em outras palavras, se ( $y = 0$ ) não é solução de ( $f_\omega = 0$ ), o polígono de Newton de  $f_\omega$  termina no eixo horizontal.

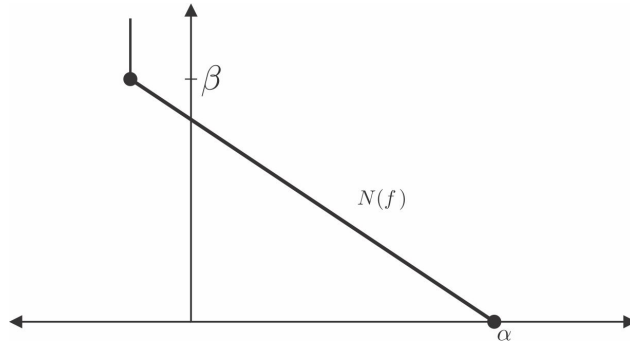
**Proposição 3.1.1.** Se nem ( $x = 0$ ) e nem ( $y = 0$ ) são soluções de ( $f_\omega = 0$ ), então existe um lado com inclinação  $-1/\mu_0$  tal que  $\varphi_{(f_\omega, \mu_0)}(c)$  possui uma raiz não nula  $c_0$ .

*Demonstração.* Como ( $y = 0$ ) não é solução de ( $f_\omega = 0$ ), temos que  $N(f_\omega)$  termina no eixo horizontal e existe um ponto  $(\alpha, 0)$  em  $N(f_\omega)$ . Caso  $B_{\alpha, 0} \neq 0$ , teríamos um termo  $B_{\alpha, 0}x^{\alpha+1}y^{-1}$  na série  $B$  o que não é possível. Consequentemente, temos  $A_{\alpha, 0}$  não nulo. Por outro lado, como ( $x = 0$ ) não é solução de ( $f_\omega = 0$ ) temos que  $B_\omega(0, y) \neq 0$ , isto é,  $x$  não é fator de  $B_\omega$ . Isto significa que existe um ponto da forma  $(-1, \beta)$  em  $\Delta(f_\omega)$ , e consequentemente, em  $N(f_\omega)$ , onde  $B_{-1, \beta} \neq 0$  e  $A_{-1, \beta} = 0$ , pois caso contrário, teríamos um termo  $A_{-1, \beta}x^{-1}y^\beta$ , uma contradição.

### 3.1. O ALGORITMO

Uma vez que  $\beta \in \mathbb{N}$ , exibimos dois pontos de  $N(f_\omega)$  com ordenadas distintas. Logo, garantimos a existência de um lado do polígono com coincinação positiva. Para mostrar a existência de uma raiz não nula do polinômio característico, vamos analisar alguns casos distintos.

**Caso 1:** Se os pontos  $(-1, \beta)$  e  $(\alpha, 0)$  formam um lado de  $N(f_\omega)$  com coincinação  $\mu_0$ , temos



**Figura 3.1:** Polígono de Newton de  $f$ .

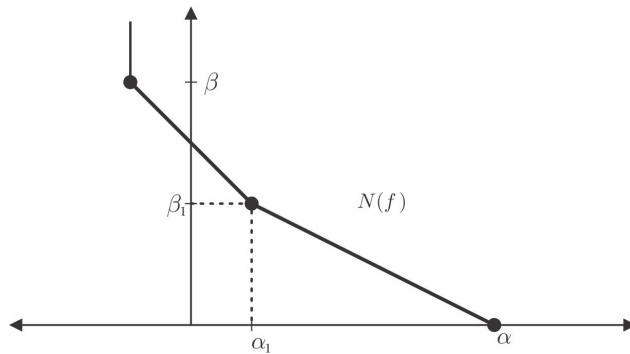
que o polinômio característico é dado por

$$\varphi_{(f_\omega, \mu_0)} = \mu_0 B_{(-1, \beta)} c^\beta + A_{(\alpha, 0)},$$

e, conseqüentemente, existe uma raiz não nula de  $\varphi$ .

**Caso 2:** Suponha agora que  $N(f_\omega)$  seja formado por dois lados como na Figura abaixo.

Sejam  $L$  e  $L'$  os lados de  $N(f_\omega)$  com pontos extremos  $(-1, \beta)$ ,  $(\alpha_1, \beta_1)$  e  $(\alpha, 0)$  com  $\alpha_1, \beta_1 > 0$ .



**Figura 3.2:** Polígono de Newton de  $f$ .

Considere  $L$  o lado de coincinação  $\mu$ , com extremos  $(-1, \beta)$  e  $(\alpha_1, \beta_1)$ . O polinômio característico associado a esse lado é denotado por

$$\varphi_{(f_\omega, \mu)} = \mu B_{-1, \beta} c^\beta + (A_{\alpha', \beta'} + \mu B_{\alpha', \beta'}) c^{\beta'} + \cdots + (A_{\alpha_1, \beta_1} + \mu B_{\alpha_1, \beta_1}) c^{\beta_1},$$

onde  $(\alpha', \beta') \in N(f) \cap L(f, \mu)$ . Suponha que o polinômio característico associado a esse lado não possua raiz não nula. Se isso acontece, então

$$A_{\alpha_1, \beta_1} + \mu B_{\alpha_1, \beta_1} = 0. \quad (3.1)$$

Seja  $L'$  o lado de  $N(f_\omega)$  localizado abaixo de  $L$ , com coincinação  $\mu' > \mu$ . Pela equação (3.1),

### 3.1. O ALGORITMO

temos

$$A_{\alpha_1, \beta_1} + \mu' B_{\alpha_1, \beta_1} \neq 0.$$

Temos que o polinômio característico associado a esse lado,

$$\varphi_{(f_\omega, \mu')} = (A_{\alpha_1, \beta_1} + \mu' B_{\alpha_1, \beta_1})c^{\beta_1} + \cdots + A_{\alpha, 0},$$

possui uma raiz não nula.

**Caso Geral:** Esse caso segue usando a mesma ideia do caso anterior.  $\square$

Começamos a descrever o algoritmo de Newton-Puiseux. Suponhamos que nem  $(y = 0)$  e nem  $(x = 0)$  sejam soluções de  $(f_\omega = 0)$ . Pela Proposição 3.1.1, existem um lado de  $N(f_\omega)$  com inclinação  $-1/\mu_0$  e  $c_0$  uma raiz não nula de  $\varphi_{(f_\omega, \mu_0)}(c)$ .

Seja  $f_1 = f_\omega[c_0 x^{\mu_0} + y]$ , a  $(\mu_0, c_0)$ -transformada de  $f_\omega$ , onde  $c_0 \in \mathbb{C}^*$ . Pela Propriedade 2.2.4,  $(y = 0)$  é solução de  $(f_1 = 0)$  se, e somente se,  $c_0 x^{\mu_0}$  é solução de  $(f_\omega = 0)$ . Se isto ocorre, temos a solução de  $(f_\omega = 0)$  que estamos procurando. Caso contrário, busquemos um lado de  $N(g)$  cuja inclinação seja  $-1/\mu_1$ , com  $\mu_1 > \mu_0$ , tal que  $\varphi_{(f_1, \mu_1)}(c)$  possui uma raiz  $c_1$ , não nula. Veja que isto torna-se possível devido a Proposição 3.1.1.

Este processo é realizado iteradamente até que encontremos a candidata a solução desejada para  $(f_\omega = 0)$ . No entanto, tal algoritmo poderá não funcionar em alguns casos. Vejamos um exemplo em que isto acontece.

**Exemplo 3.1.2.** Seja  $f(x, y) = y^6 y' + xy^2 y' + xy^2 - 3x^2 y y' - x^2 y + 2x^3 y' + x^5$ . Temos,

$$\begin{aligned} M_{-1,7}(f) &= A_{-1,7} x^{-1} y^5 + B_{-1,7} y^6 y' = y^6 y' \\ M_{1,2}(f) &= A_{1,2} x y^2 + B_{1,2} x^2 y y' = x y^2 - 3x^2 y y' \\ M_{0,3}(f) &= A_{0,3} y^3 + B_{1,1} x y^2 y' = x y^2 y' \\ M_{2,1}(f) &= A_{2,1} x^2 y + B_{2,1} x^3 y' = -x^2 y + 2x^3 y' \\ M_{5,0}(f) &= A_{5,0} x^5 + B_{5,0} x^6 y^{-1} y' = x^5. \end{aligned}$$

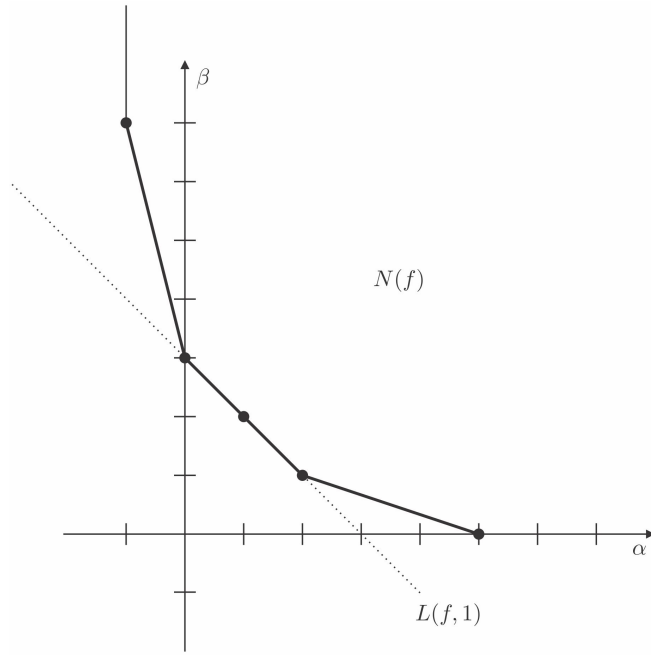
Deste modo, segue que

$$\Delta(f) = \{(-1, 7), (1, 2), (0, 3), (2, 1), (5, 0)\},$$

e o polígono de Newton de  $f$  é dado na Figura 3.3.

Considere a reta distinguida com inclinação igual a  $-1$ , e a denote por  $L(f, 1)$ . Observe que o lado de  $N(f)$  que está contido em  $L(f, 1)$  contém os pontos  $(0, 3)$ ,  $(2, 1)$  e  $(1, 2)$ , e o polinômio característico para  $\mu = 1$  é escrito como

$$\varphi_{(f,1)}(c) = c^3 + c - 2c^2 = c(c^2 - 2c + 1) = c(c-1)^2,$$



**Figura 3.3:** Polígono de Newton de  $f$ .

o qual tem como única raiz não nula de  $c = 1$ . Seja a  $(1, 1)$ -transformada de  $f$  dada por:

$$f_1 = f[x + y] = (x + y)^6(1 + y') + x(x + y)^2(1 + y') + x(x + y)^2 - 3x^2(x + y)(1 + y') - x^2(x + y) + 2x^3(1 + y') + x^5,$$

isto é,

$$f_1 = (x + y)^6(1 + y') + x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^3y' + 2x^2yy' + xy^2y' + x^3 + 2x^2y + xy^2 - 3x^3 - 3x^2y - 3x^3y' - 3x^2yy' - x^3 - x^2y + 2x^3 + 2x^3y' + x^5.$$

Logo,

$$f_1 = (x + y)^6(1 + y') + 2xy^2 - x^2yy' + xy^2y' + x^5. \quad (3.2)$$

Desenvolvendo a equação (3.2), segue que

$$f_1 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6 + 2xy^2 + x^5 + x^6y' + 6x^5yy' + 15x^4y^2y' + 20x^3y^3y' + 15x^2y^4y' + 6xy^5y' + y^6y' - x^2yy' + xy^2y'.$$

Vamos encontrar  $\Delta(f_1)$  calculando os binômios diferenciais associados a  $g$ . Então,

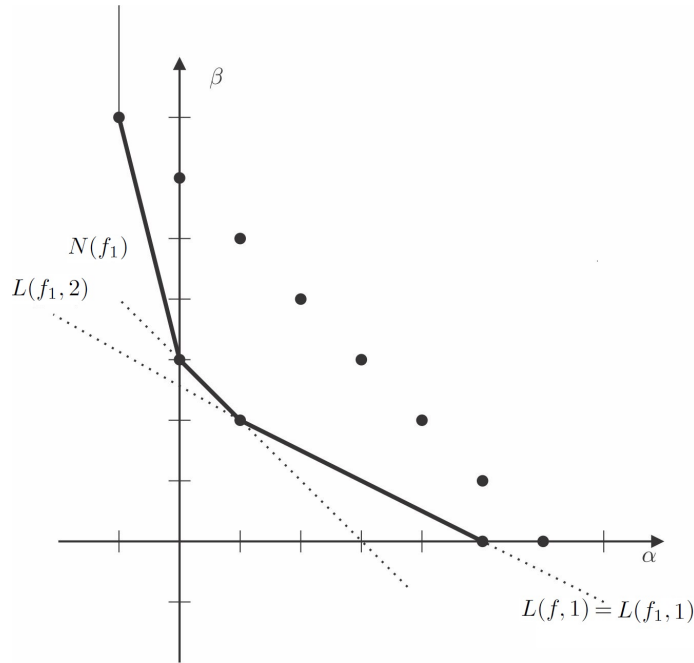
$$\begin{aligned} M_{-1,7}(f_1) &= A'_{-1,7}x^{-1}y^7 + B'_{-1,7}y^6y' = y^6y' \\ M_{1,2}(f_1) &= A'_{1,2}xy^2 + B'_{1,2}x^2yy' = 2xy^2 - x^2yy' \\ M_{5,0}(f_1) &= A'_{5,0}x^5 + B'_{5,0}x^6y^{-1}y' = x^5 \\ M_{0,6}(f_1) &= A'_{0,6}y^6 + B'_{0,6}xy^5y' = y^6 + 6xy^5y' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{2,1}(f_1) &= 0 \\
 M_{1,5}(f_1) &= A'_{1,5}xy^5 + B'_{1,5}x^2y^4y' = 6xy^5 + 15x^4y^2y' \\
 M_{2,4}(f_1) &= A'_{2,4}x^2y^4 + B'_{2,4}x^3y^3y' = 15x^2y^4 + 20x^3y^3y' \\
 M_{3,3}(f_1) &= A'_{3,3}x^3y^3 + B'_{3,3}x^3y^3y' = 20x^3y^3 + 15x^4y^2y' \\
 M_{4,2}(f_1) &= A'_{4,2}x^4y^2 + B'_{4,2}x^5yy' = 15x^4y^2 + 6x^5yy' \\
 M_{5,1}(f_1) &= A'_{5,1}x^5y + B'_{5,1}x^6y' = 6x^5y + x^6y' \\
 M_{6,0}(f_1) &= A'_{6,0}x^6 + B'_{6,0}x^7y^{-1}y' = x^6 \\
 M_{0,3}(f_1) &= A'_{0,3}y^3 + B'_{0,3}xy^2y' = xy^2y'.
 \end{aligned}$$

Segue que

$$\Delta(f_1) = \{(0, 3), (6, 0), (5, 1), (4, 2), (3, 3), (2, 4), (1, 5), (0, 6), (5, 0), (1, 2), (2, 1), (-1, 7)\},$$

e o polígono de Newton de  $N(f_1)$  é ilustrado no Diagrama 3.4



**Figura 3.4:** Polígono de Newton de  $f_1$ .

Note que o único lado de  $N(f_1)$  cuja inclinação maior que  $-1$ , é o lado com inclinação  $-1/2$ , o qual contém os pontos  $(1, 2)$  e  $(5, 0)$ . Assim,

$$\varphi_{(f_1, 1/2)}(c) = (A_{1,2} + 2B_{1,2})c^2 + (A_{5,0} + 2B_{5,0}) = (2 - 2)c^2 + 1 = 1.$$

Deste modo, observe que o algoritmo não poderá prosseguir, uma vez que não existe raiz não nula de  $\varphi(f_1, \frac{1}{2})$ . Assim, para  $\mu > 1$ , o polinômio  $\varphi(f_1, \frac{1}{2})$  não possui raiz em  $\mathbb{C}^*$ , o que significa que o processo proposto não fornece uma solução de  $(f = 0)$ .

A partir da situação exemplificada anteriormente, vamos apresentar, nas próximas seções, condições sobre os lados de  $N(f)$  e raízes de  $\varphi$  em cada etapa do algoritmo, a fim de que ele

possa prosseguir.

## 3.2 O lado principal

No exemplo anterior, usamos o Algoritmo de Newton-Puiseux para encontrarmos uma solução para  $(f = 0)$ , onde  $f$  é um polinômio diferencial, em uma situação em que tal processo não pode prosseguir. Um ponto importante em cada etapa é a escolha de lados do polígono de Newton de maneira que estes garantam a existência de raízes não nulas dos respectivos polinômios característicos. Nesta seção, apresentamos um critério para escolhermos, em cada etapa, os lados do polígono de Newton, visando evitar situações semelhantes a anterior. Procedendo dessa forma, o algoritmo sempre prossegue.

Por um momento, considere  $L$  um lado de  $N(f)$  cuja inclinação é  $-1/\mu$ . Denote por

$$(a'(L), b'(L)) \quad \text{e} \quad (a(L), b(L))$$

os pontos mais baixo e mais alto de  $L$ , respectivamente.

**Definição 3.2.1.** Dizemos que  $L$  é um *lado bom* de  $N(f)$  se os pontos extremos  $(a'(L), b'(L))$  e  $(a(L), b(L))$  satisfazem:

$$(a, L)_f := B_{(a(L), b(L))} \neq 0 \quad \text{e} \quad -\frac{A_{(a(L), b(L))}}{B_{(a(L), b(L))}} \notin \mathbb{Q}_{(\geq \mu)} = \{r \in \mathbb{Q} \mid r \geq \mu\}.$$

$$(b, L)_f := A_{(a'(L), b'(L))} + \mu B_{(a'(L), b'(L))} \neq 0.$$

**Definição 3.2.2.** Se  $(y = 0)$  não é solução de  $(f = 0)$ , dizemos que  $L$  é o *lado principal* de  $N(f)$  se  $L$  é o lado bom de maior inclinação em  $N(f)$ , isto é, se  $L$  é o lado de maior inclinação de  $N(f)$  que satisfaz  $(a, L)_f$  e  $(b, L)_f$ .

**Observação 3.2.3.** Em outras palavras, o lado principal é o lado bom mais baixo de  $N(f)$ .

Em cada etapa do algoritmo de Newton-Puiseux, impomos a condição tomarmos sempre o lado principal do polígono de Newton em questão, uma vez que as condições  $(a, L)_f$  e  $(b, L)_f$  garantem, simultaneamente, que

$$A_{(a'(L), b'(L))} + \mu B_{(a'(L), b'(L))} \neq 0 \quad \text{e} \quad A_{(a(L), b(L))} + \mu B_{(a(L), b(L))} \neq 0,$$

e isso implica na existência de raízes não nulas do polinômio característico associado a  $L$ . Observe que isto possibilita que o algoritmo continue. Para evidenciar a importância de estarmos considerando um lado principal no algoritmo, vamos mostrar a razão pela qual o processo não pode continuar no Exemplo 3.1.2.

**Exemplo 3.2.4.** Sejam  $f$  e  $f_1$  dadas como o Exemplo 3.1.2, e consideremos o lado de  $N(f_1)$  cuja inclinação seja  $-1/2$  com  $\mu = 2$ , o qual chamaremos de  $L_2$ . Observe que tal lado possui dois pontos  $(1, 2)$  e  $(5, 0)$ , os quais são os pontos mais alto e mais baixo de  $L_2$ , respectivamente. No exemplo anterior, exibimos os coeficientes  $A_{\alpha\beta}$  e  $B_{\alpha\beta}$  que formam os binômios diferenciais associados a  $f_1$  e encontramos respectivamente,

### 3.2. O LADO PRINCIPAL

---

$$\begin{aligned} A'_{1,2} = 2 & \quad \text{e} \quad B'_{1,2} = -1 \\ A'_{0,5} = 1 & \quad \text{e} \quad B'_{0,5} = 0. \end{aligned}$$

Evidentemente, temos que  $(b, L)_f$  é satisfeita, pois

$$A_{(5,0)} + 2B_{(5,0)} = 1 \neq 0.$$

No entanto, note que  $(a, L)_f$  não é satisfeita, uma vez que temos

$$-\frac{A'_{12}}{B'_{12}} = 2 \in \mathbb{Q}_{(\geq 2)}.$$

Logo,  $L_2$  não é um lado bom de  $N(f_1)$ .

O lema a seguir, assegura a existência de um lado principal do polígono de Newton  $N(f)$ , desde que exista um lado satisfazendo a condição  $(a, L)_f$ .

**Lema 3.2.5.** *Assumimos que  $(y = 0)$  não seja solução de  $(f = 0)$  e que exista um lado  $L$  de  $N(f)$  com inclinação  $-1/\mu$  satisfazendo  $(a, L)_f$ . Então, existe um lado principal de  $f$  que possui inclinação maior ou igual a  $-1/\mu$ .*

*Demonstração.* Sejam  $L$  o lado de  $N(f)$  com inclinação  $-1/\mu$  e  $(a(L), b(L))$  o ponto mais alto de  $L$ . Temos por hipótese que  $L$  satisfaz  $(a, L)_f$ , isto é,

$$B_{(a(L), b(L))} \neq 0 \quad \text{e} \quad -\frac{A_{(a(L), b(L))}}{B_{(a(L), b(L))}} \notin \mathbb{Q}_{(\geq \mu)}.$$

Podemos denotar os lados de  $N(f)$  com inclinações maiores que  $-1/\mu$  e suas respectivas inclinações por  $L_i$  e  $-1/\mu_i$ , com  $i = 1, \dots, k$ , onde estas últimas satisfazem

$$-\frac{1}{\mu} < -\frac{1}{\mu_1} < \dots < -\frac{1}{\mu_k}.$$

Observe que  $L_k$  é o lado de  $N(f)$  com maior inclinação e, como  $(y = 0)$  não é uma solução de  $(f = 0)$ , segue que o ponto mais baixo de  $L_k$  é da forma  $(a'(L_k), b'(L_k)) = (\alpha, 0)$ , para algum  $\alpha$ . Pela Definição 2.1.1, temos  $B_{(a'(L_k), b'(L_k))} = 0$ , o que implica que  $A_{(a'(L_k), b'(L_k))}$  é não nulo. Assim,

$$A_{(a'(L_k), b'(L_k))} + \mu B_{(a'(L_k), b'(L_k))} \neq 0,$$

isto é, vale  $(b, L_k)_f$ .

**Afirmção 3.2.6.** *Para  $i = 1, \dots, k - 1$ , se  $L_i$  não satisfaz  $(b, L_i)_f$ , então  $L_{i+1}$  satisfaz  $(a, L_{i+1})_f$ .*

*Demonstração.* Com efeito, se  $L_i$  não satisfaz  $(b, L_i)_f$ , temos

$$A_{(a'(L_i), b'(L_i))} + \mu_i B_{(a'(L_i), b'(L_i))} = 0.$$

Note que, nestas circunstâncias, temos  $B_{(a'(L_i), b'(L_i))}$  não nulo e

$$-\frac{A_{(a'(L_i), b'(L_i))}}{B_{(a'(L_i), b'(L_i))}} = \mu_i. \tag{3.3}$$



### 3.2. O LADO PRINCIPAL

---

Uma vez que  $\mu_{i+1} > \mu_i$ , segue que

$$\mathbb{Q}_{(\geq \mu_{i+1})} \subset \mathbb{Q}_{(\geq \mu_i)},$$

e como  $(a'(L_i), b'(L_i)) = (a(L_{i+1}), b(L_{i+1}))$ , segue que

$$-\frac{A_{(a(L_{i+1}), b(L_{i+1}))}}{B_{(a(L_{i+1}), b(L_{i+1}))}} = \mu_i < \mu_{i+1},$$

ou seja,

$$-\frac{A_{(a(L_{i+1}), b(L_{i+1}))}}{B_{(a(L_{i+1}), b(L_{i+1}))}} \notin \mathbb{Q}_{(\geq \mu_{i+1})}.$$

Assim,  $(a, L_{i+1})_f$  é válida, o que prova nossa afirmação.  $\square$

Por fim, analisando  $(a, L_{i+1})_{f_{i+1}}$  e  $(b, L_i)_{f_i}$  para cada  $i$ , garantimos a existência de um lado dentre  $L, L_1, \dots, L_k$ , satisfazendo ambas as condições que determinam um lado bom de  $N(f)$ . Portanto,  $N(f)$  possui um lado principal com inclinação maior ou igual a  $-1/\mu$ .  $\square$

O corolário abaixo permite uma caracterização de um lado principal do polígono de Newton de  $f$ .

**Corolário 3.2.7.** *Assumimos que  $L$  é o lado principal de  $f$  com inclinação  $-1/\mu$  e pontos extremos  $(a'(L), b'(L))$  e  $(a(L), b(L))$ . Então uma das propriedades é válida:*

*i)  $B_{(a'(L), b'(L))} = 0$ ;*

*ii)  $B_{(a'(L), b'(L))} \neq 0$  e  $-\frac{A_{(a'(L), b'(L))}}{B_{(a'(L), b'(L))}} \in \mathbb{Q}_{(>\mu)} = \{r \in \mathbb{Q} \mid r > \mu\}$ .*

*Demonstração.* Considere o polígono de Newton de  $f$  e  $L$  o lado principal de  $N(f)$ . Suponha que  $L$  é o lado com maior inclinação de  $N(f)$ , então o ponto mais baixo de  $L$  é dado da forma  $(a'(L), b'(L)) = (\alpha, 0)$ , e é imediato que  $B_{(a'(L), b'(L))} = 0$ , isto é, *i*) é satisfeita. Caso  $L$  não seja o lado com maior inclinação, tomemos  $L_1$  o lado de  $N(f)$  cujo vértice mais alto é igual ao vértice mais baixo de  $L$ , isto é,

$$(a'(L), b'(L)) = (a(L_1), b(L_1)).$$

Como  $L$  é o lado principal, segue que  $(b, L)_f$  é válida, ou seja,

$$A_{(a'(L), b'(L))} + \mu B_{(a'(L), b'(L))} \neq 0.$$

Assim,  $(a, L_1)_f$  não poderá ser satisfeita, pois caso o fosse, o Lema 3.2.5 implicaria que  $N(f)$  possui um lado principal com coincinação maior que  $\mu$ , uma contradição, pois estamos supondo que  $L$  é o lado principal de  $N(f)$  e este é único.

Afirmamos que o conjunto  $\{(b, L)_f$  e não  $(a, L_1)_f\}$  implica *i*) ou *ii*), e o resultado está provado. Primeiro observe que supondo  $(b, L)_f$  e não  $(a, L_1)_f$  simultaneamente, temos duas situações distintas. Se

$$A_{(a'(L), b'(L))} + \mu B_{(a'(L), b'(L))} \neq 0 \quad \text{e} \quad B_{(a'(L), b'(L))} = 0,$$

### 3.3. ENCONTRANDO UMA SOLUÇÃO

e temos  $i$ ). Caso contrário, temos

$$A_{(a'(L), b'(L))} + \mu B_{(a'(L), b'(L))} \neq 0 \quad \text{e} \quad -\frac{A_{(a'(L), b'(L))}}{B_{(a'(L), b'(L))}} \in \mathbb{Q}_{(\geq \mu)},$$

isto é,  $ii$ ) é válido. □

O corolário seguinte garante a existência de um lado principal do polígono de Newton do polinômio diferencial associado a uma forma  $\omega$ .

**Corolário 3.2.8.** *Seja  $f_\omega$  o polinômio diferencial associado a uma forma  $\omega$  e assumamos que  $(x = 0)$  e  $(y = 0)$  não são soluções de  $(f_\omega = 0)$ . Então  $N(f_\omega)$  possui um lado principal.*

*Demonstração.* Se  $(x = 0)$  não é solução de  $(f_\omega = 0)$ , a Proposição 3.1.1 garante a existência de um ponto  $(-1, \beta)$  em  $N(f_\omega)$ , com  $A_{(-1, \beta)} = 0$ , e necessariamente  $B_{(-1, \beta)}$  não nulo. Considere  $L$  o lado do polígono de Newton associado a  $f_\omega$  cujo vértice mais alto é o ponto  $(-1, \beta)$ . Nessas condições, claramente  $(a, L)_{f_\omega}$  é satisfeita, e pelo Lema 3.2.5, existe um lado principal de  $N(f_\omega)$  localizado abaixo de  $L$ . Logo, o polígono de Newton de  $f_\omega$  possui lado principal. □

### 3.3 Encontrando uma solução

Na seção anterior apresentamos a definição de lado principal do polígono de Newton, e impomos a utilização deste objeto no algoritmo para que o processo possa continuar. Além disso, garantimos a existência deste, desde que  $x$  e  $y$  não sejam fatores de  $f$ . Nesta seção, definimos uma classe de raízes do polinômio característico que permitem que o algoritmo de Newton-Puiseux possa ser aplicado recursivamente para encontrar uma candidata a solução de  $(f = 0)$ , onde  $f$  é uma função formal em  $C_q$ .

Suponha que  $N(f)$  possua um lado principal  $L$  com inclinação positiva  $\mu$ . Considere o polinômio diferencial inicial como na equação (2.20), isto é,

$$h(x, y) = In^{(\mu)}(f) = A_0 x^\alpha + \sum_{i=k}^t (A_i x^{\alpha_i} y^i + B_i x^{\alpha_i+1} y^{i-1} y'),$$

onde  $\alpha_i = \alpha - \mu i$ , e  $k \leq t$ , com  $(A_k, B_k) \neq (0, 0)$  e  $(A_t, B_t) \neq (0, 0)$ . Isto significa que  $k$  e  $t$  são respectivamente, a menor e maior ordenada cujos coeficientes correspondentes são não nulos simultaneamente.

O lema a seguir fornece uma importante caracterização dos coeficientes de  $\varphi$  que decorrem da Propriedade 2.3.2. Essas relações serão usadas na demonstração da Proposição 3.3.10, principal resultado do Capítulo 3.

**Lema 3.3.1.** *Usando a notação da Propriedade 2.3.2, são válidas as propriedades:*

- $i)$   $A_i(c) = B_i(c) = 0 \iff \varphi^{(i)}(c) = 0 \quad \text{e} \quad \beta^{(i-1)}(c) = 0$  para  $i = 1, \dots, k-1$ .
- $ii)$   $B_k(c) = 0 \quad \text{e} \quad A_k(c) \neq 0 \iff \varphi^{(k)}(c) \neq 0 \quad \text{e} \quad \beta^{(k-1)}(c) = 0$ .
- $iii)$   $B_k(c) \neq 0 \quad \text{e} \quad -\frac{A_k(c)}{B_k(c)} \in \mathbb{Q}_{(> \mu)} \iff \beta^{(k-1)}(c) \neq 0 \quad \text{e} \quad -\frac{\varphi^{(k)}(c)}{k\beta^{(k-1)}(c)} \in \mathbb{Q}_+$ .

### 3.3. ENCONTRANDO UMA SOLUÇÃO

---

*Demonstração.* *i)* Pela Propriedade 2.3.2, temos que

$$B_i(c) = \frac{1}{(i-1)!} \beta^{(i-1)}(c) \quad \text{e} \quad \frac{\varphi^{(i)}(c)}{i!} = A_i(c) + \mu \frac{1}{(i-1)!} \beta^{(i-1)}(c).$$

É fácil ver que,  $B_i(c) = 0$  se, e somente se,  $\beta^{(i-1)}(c) = 0$  e  $\varphi^{(i)}(c) = 0$  se, e somente se,  $A_i(c) = B_i(c) = 0$ , para  $i = 1, \dots, k-1$ .

*ii)* Pela Propriedade 2.3.2, é fácil ver que  $B_k(c) = 0$  se, e somente se,  $\beta^{(k-1)}(c) = 0$ . Nestas condições, temos  $A_k(c) \neq 0$  se, e somente se,  $\varphi^{(k)}(c) \neq 0$ .

*iii)* Suponha que  $B_k(c) \neq 0$  e

$$-\frac{A_k(c)}{B_k(c)} = q,$$

com  $q \in \mathbb{Q}$  e  $q > \mu$ . Pela Propriedade 2.3.2,  $B_k(c)$  não nulo implica em  $\beta^{(k-1)}(c)$  não nulo, e

$$\begin{aligned} \frac{\varphi^{(k)}(c)}{k\beta^{(k-1)}(c)} &= \frac{\varphi^{(k)}(c)(k-1)!}{k!\beta^{(k-1)}(c)} \\ &= \frac{A_k(c)(k-1)!}{\beta^{(k-1)}(c)} + \mu \\ &= \frac{A_k(c)(k-1)!}{B_k(c)(k-1)!} + \mu \\ &= -q + \mu \end{aligned}$$

Logo,

$$-\frac{\varphi^{(k)}(c)}{k\beta^{(k-1)}(c)} = q - \mu,$$

e como  $q > \mu$ , temos

$$-\frac{\varphi^{(k)}(c)}{k\beta^{(k-1)}(c)} \in \mathbb{Q}_+.$$

Por outro lado, suponha  $-\frac{\varphi^{(k)}(c)}{k\beta^{(k-1)}(c)} = q \in \mathbb{Q}_+$  e  $\beta^{(k-1)}(c)$  não nulo. Então,  $B_k(c)$  é diferente de zero e

$$\frac{A_k(c)}{B_k(c)} = \frac{\varphi^{(k)}(c)}{k!B_k(c)} - \mu.$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{A_k(c)}{B_k(c)} &= \frac{\varphi^{(k)}(c)(k-1)!}{k!\beta^{(k-1)}(c)} - \mu \\ &= \frac{\varphi^{(k)}(c)}{k\beta^{(k-1)}(c)} - \mu \\ &= -q - \mu \end{aligned}$$

e

$$-\frac{A_k(c)}{B_k(c)} = q + \mu \in \mathbb{Q}_{(>\mu)}.$$

□

Seja  $\mathcal{R} = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s\}$  o conjunto de raízes não nulas do polinômio característico  $\varphi_{(f,\mu)}(c)$ , e sejam  $(\alpha, \beta)$  e  $(\alpha', \beta')$  respectivamente os pontos mais alto e mais baixo de  $L$ . Evidentemente, temos  $\beta'$  e  $\beta$  naturais, com  $\beta' < \beta$ . Observe que as condições  $(a, L)_f$  e  $(b, L)_f$  implicam respectivamente que

$$A_{\alpha'\beta'} + \mu B_{\alpha'\beta'} \neq 0 \quad \text{e} \quad A_{\alpha\beta} + \mu B_{\alpha\beta} \neq 0.$$

Essas duas condições, por sua vez, garantem a existência de uma raiz não nula de  $\varphi$ , o que significa que  $\mathcal{R}$  é não vazio.

Para cada raiz  $\gamma_j$  de  $\varphi$  em  $\mathcal{R}$ , a Afirmação 2.3.1 garante que

$$In^{(\mu)}(f[\gamma_j x^\mu + y]) = h[\gamma_j x^\mu + y] = \sum_{i=k_j}^t A_i(\gamma_j) x^{\alpha_i} y^i + B_i(\gamma_j) x^{\alpha_i+1} y^{i-1} y', \quad (3.4)$$

onde  $k_j$  é o menor índice em que ao menos um dos coeficientes  $A_i(\gamma_j)$  ou  $B_i(\gamma_j)$  é não nulo.

**Observação 3.3.2.** Uma vez que  $\gamma_j$  é uma raiz de  $\varphi$ , segue da Propriedade 2.3.2 que

$$A_0(\gamma_j) = \varphi(\gamma_j) = 0. \quad (3.5)$$

**Observação 3.3.3.** Observe que pela definição de  $k_j$ , temos  $A_i(\gamma_j) = B_i(\gamma_j) = 0$ , para  $i = 1, \dots, k_j - 1$ . Pelo Lema 3.3.1, segue que

$$\varphi^{(i)}(\gamma_j) = 0 \quad \text{e} \quad \beta^{(i-1)}(\gamma_j) = 0,$$

sempre que  $i < k_j$ .

**Definição 3.3.4.** Seja  $\gamma_j$  uma raiz do polinômio característico  $\varphi$ . Dizemos que  $\gamma_j$  é uma *raiz perfeita* de  $\varphi$  se as seguintes condições são satisfeitas:

$$B_{k_j}(\gamma_j) \neq 0 \quad \text{e} \quad -\frac{A_{k_j}(\gamma_j)}{B_{k_j}(\gamma_j)} \notin \mathbb{Q}_{(>\mu)} = \{r \in \mathbb{Q} | r > \mu\}. \quad (3.6)$$

**Observação 3.3.5.** Se  $\gamma_j$  não é uma raiz perfeita em  $\mathcal{R}$ , ou melhor, se  $\gamma_j$  não satisfaz a propriedade (3.6), podemos ter duas situações distintas:

$$B_{k_j}(\gamma_j) = 0 \quad \text{e} \quad A_{k_j}(\gamma_j) \neq 0$$

ou

$$B_{k_j}(\gamma_j) \neq 0 \quad \text{e} \quad -\frac{A_{k_j}(\gamma_j)}{B_{k_j}(\gamma_j)} \in \mathbb{Q}_{(>\mu)}.$$

### 3.3. ENCONTRANDO UMA SOLUÇÃO

Pelo Lema 3.3.1, estas condições são equivalentes respectivamente a:

$$\varphi^{(k_j)}(\gamma_j) \neq 0 \quad \text{e} \quad \beta^{(k_j-1)}(\gamma_j) = 0 \quad (3.7)$$

ou

$$\beta^{(k_j-1)}(\gamma_j) \neq 0 \quad \text{e} \quad -\frac{1}{k_j} \frac{\varphi^{(k_j)}(\gamma_j)}{\beta^{(k_j-1)}(\gamma_j)} \in \mathbb{Q}_+. \quad (3.8)$$

As relações acima são importantes caracterizações das raízes não perfeitas do polinômio característico.

Conforme definimos, o polinômio característico é dado por

$$\varphi(c) = \varphi_{(f,\mu)}(c) = A_0 + \sum_{i=k}^t (A_i + \mu B_i) c^i, \quad (3.9)$$

e considerando as raízes de  $\varphi$  em  $\mathcal{R}$ , podemos fatorar tal polinômio na seguinte forma:

$$\varphi(c) = (A_t + \mu B_t) c^t (c - \gamma_1)^{e_1} (c - \gamma_2)^{e_2} \cdots (c - \gamma_s)^{e_s}. \quad (3.10)$$

onde  $e_i$  representa a ordem da raiz  $\gamma_j$ . Observe que, pelo Lema 3.3.1,  $\varphi^{(k_j)}(\gamma_j)$  é sempre não nulo, o que implica que  $e_i = k_i$  para cada  $i = 1, \dots, s$ .

A afirmação abaixo relaciona as raízes não perfeitas de  $\varphi$  em termos da função

$$\beta(c) = \sum_{i=k}^t B_i c^{i-1},$$

definida no capítulo anterior.

**Afirmação 3.3.6.** Suponha que  $\gamma_j$  não seja uma raiz perfeita de  $\varphi(c)$ . Então uma das propriedades é válida:

- i)  $\beta(\gamma_j) = \beta'(\gamma_j) = \cdots = \beta^{(k_j-1)}(\gamma_j) = 0$ ;
- ii)  $\beta(\gamma_j) = \beta'(\gamma_j) = \cdots = \beta^{(k_j-2)}(\gamma_j) = 0$  e existe um racional  $q_j \in \mathbb{Q}_+$  tal que

$$\beta^{(k_j-1)}(\gamma_j) = (k_j - 1)! (-q_j) (A_t + \mu B_t) \gamma_j^t \prod_{i \neq j}^s (\gamma_j - \gamma_i)^{k_i}.$$

*Demonstração.* Primeiramente, note que como  $\gamma_j$  não é uma raiz perfeita de  $\varphi$ , a Observação 3.3.5 garante que  $\gamma_j$  satisfaz (3.7) ou (3.8). Se  $\gamma_j$  satisfaz (3.7), temos  $\beta^{(k_j-1)}(\gamma_j) = 0$  e usando Observação 3.3.3, segue

$$\beta(\gamma_j) = \beta'(\gamma_j) = \cdots = \beta^{(k_j-1)}(\gamma_j) = 0,$$

e o item i) é imediato. Se  $\gamma_j$  satisfaz (3.8), escreva

$$-\frac{\varphi^{(k_j)}(\gamma_j)}{k_j \beta^{(k_j-1)}(\gamma_j)} = q$$

### 3.3. ENCONTRANDO UMA SOLUÇÃO

e tome  $q_j = \frac{1}{q}$ . Então

$$\beta^{(k_j-1)}(\gamma_j) = -\frac{q_j}{k_j} \varphi^{(k_j)}(\gamma_j), \quad (3.11)$$

e basta exibir  $\varphi^{(k_j)}(\gamma_j)$ . Sendo assim, calculemos a  $k_j$ -ésima derivada do polinômio característico avaliada em  $\gamma_j$ . Observe que

$$\begin{aligned} \varphi'(c) = & (A_t + \mu B_t) [rc^{r-1} \prod_{i=1}^s (c - \gamma_i)^{k_i} + c^r (k_1(c - \gamma_1)^{k_1-1} \prod_{i=2}^s (c - \gamma_i)^{k_i} \\ & + (c - \gamma_i)^{k_1} (k_2(c - \gamma_i)^{k_2-1} \prod_{i \neq 2}^s (c - \gamma_i)^{k_i} + (c - \gamma_i)^{k_2} (\dots)))] , \end{aligned}$$

e para exibir as derivadas de ordens superiores, note que  $\gamma_j$  possui ordem  $k_j$  em  $\varphi$ . Assim, apenas a  $k_j$ -ésima derivada de  $\varphi$  é não nula em  $\gamma_j$ , e é expressa por um fator independente de  $(c - \gamma_j)$ , o qual é dado por

$$\varphi^{(k_j)}(c) = (A_t + \mu B_t) c^r k_j! \prod_{i \neq j}^s (c - \gamma_i)^{k_i}.$$

Logo,

$$\varphi^{(k_j)}(\gamma_j) = (A_t + \mu B_t) \gamma_j^r k_j! \prod_{i \neq j}^s (\gamma_j - \gamma_i)^{k_i}$$

e conseqüentemente, pela equação (3.11), temos

$$\beta^{(k_j-1)}(\gamma_j) = (-q_j)(A_t + \mu B_t) \gamma_j^r (k_j - 1)! \prod_{i \neq j}^s (\gamma_j - \gamma_i)^{k_i}.$$

Com a Observação 3.3.3, temos  $\beta^{(i-1)} = 0$  para  $i = 1, \dots, k_j - 1$ , e provamos o item *ii*).  $\square$

Na afirmação anterior, apresentamos condições que caracterizam raízes não perfeitas de  $\varphi$ . Suponha que  $\gamma_1, \dots, \gamma_{s'}$  são raízes não perfeitas de  $\varphi$ . Nomeamos  $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ , raízes que satisfazem *i*) da afirmação anterior. Necessariamente, segue que  $\gamma_{1+1}, \dots, \gamma_{s'}$  satisfazem o item *ii*), com  $s' \leq s$ . Note que podemos escrever

$$\varphi(c) = A_0 + \sum_{i=k}^t (A_i + \mu B_i) c^i = \alpha(c) + \mu c \beta(c),$$

onde

$$\alpha(c) = \sum_{i=k}^t A_i c^i \quad \text{e} \quad \beta(c) = \sum_{i=k}^t B_i c^{i-1}. \quad (3.12)$$

### 3.3. ENCONTRANDO UMA SOLUÇÃO

---

Uma vez que  $(A_t, B_t) \neq (0, 0)$ , segue que  $\deg(\varphi(c)) = t$ , e pela equação (3.10), temos que

$$t = r + \sum_{i=1}^s k_i.$$

Os resultados seguintes apresentam relações para o termo  $\beta$  acima decorrentes dos casos distintos nos quais o coeficiente  $A_0 = 0$  ou  $A_0 \neq 0$ .

**Lema 3.3.7.** Se  $A_0 = 0$ , então

$$\beta(c) = B_t c^{k-1} \prod_{i=1}^s (c - \gamma_i)^{k_i} + \sum_{i=l+1}^s -q_i \gamma_i (A_t + \mu B_t) c^{k-1} (c - \gamma_i)^{k_i-1} \prod_{j \neq i}^s (c - \gamma_j)^{k_j}.$$

*Demonstração.* Primeiramente, considere as funções

$$q_1(c) = B_t c^{k-1} \prod_{i=1}^s (c - \gamma_i)^{k_i} \quad \text{e} \quad q_2(c) = \sum_{i=l+1}^s -q_i \gamma_i (A_t + \mu B_t) c^{k-1} (c - \gamma_i)^{k_i-1} \prod_{j \neq i}^s (c - \gamma_j)^{k_j},$$

e defina

$$\rho(c) = \beta(c) - q(c),$$

onde  $q(c) = q_1(c) + q_2(c)$ . Faremos uma análise sobre o grau de  $\rho(c)$ . De início, observe que como  $A_0 = 0$ , temos que  $r = k$ . Note que  $\deg(\beta(c)) \leq t - 1$ , com termo de maior grau dado por  $B_t c^{k-1}$ . Além disso, o termo de maior grau de  $q_1(c)$  é dado por  $B_t c^{k-1} c^{k_1} \cdots c^{k_s}$ , isto é,  $B_t c^{t-1}$ . Isto significa que os termos de grau máximo de  $\beta(c)$  e  $q_1(c)$  coincidem, e conseqüentemente,

$$\deg(\beta(c) - q_1(c)) < t - 1.$$

Além disso, observe que para cada  $i = l + 1, \dots, s$ , o termo de maior grau em  $q_2(c)$  é dado por

$$-q_i \gamma_i (A_t + \mu B_t) c^{k-1} c^{k_i-1} \prod_{j \neq i}^s c^{k_j},$$

que é evidentemente não nulo e cujo grau é  $t - 2$ . Portanto,

$$\deg(\rho(c)) < t - 1.$$

Por outro lado, note que para  $j = 1, \dots, l$ , temos

$$q(\gamma_j) = q'(\gamma_j) = \cdots = q^{(k_j-1)}(\gamma_j) = 0,$$

uma vez que a ordem de  $\gamma_j$  em  $q$  é exatamente  $k_j$ , e pela Afirmação 3.3.6, segue que

$$\rho(\gamma_j) = \rho'(\gamma_j) = \cdots = \rho^{(k_j-1)}(\gamma_j) = 0.$$

### 3.3. ENCONTRANDO UMA SOLUÇÃO

Para  $j = l + 1, \dots, s$ , a Afirmação 3.3.6 garante que  $\beta^{(i)}(\gamma_j) = 0$ , para  $i = 0, \dots, k_j - 2$  e

$$\beta^{(k_j-1)}(\gamma_j) = (k_j - 1)!(-q_j)(A_t + \mu B_t)\gamma_j^k \prod_{i \neq j}^s (\gamma_j - \gamma_i)^{k_i}. \quad (3.13)$$

Uma vez que a ordem de  $\gamma_j$  em  $q_1$  é  $k_j$ , segue que  $q_1(\gamma_j) = q_1'(\gamma_j) = \dots = q_1^{(k_j-1)}(\gamma_j) = 0$ . Agora, para realizarmos o mesmo raciocínio em  $q_2$ , suponha, sem perda de generalidade, que  $l + 1 < j < s$  e escreva

$$\begin{aligned} q_2(c) &= -q_{l+1}\gamma_{l+1}(A_t + \mu B_t)c^{k-1}(c - \gamma_{l+1})^{k_{l+1}-1} \prod_{i \neq l+1}^s (c - \gamma_i)^{k_i} \\ &\quad - q_j\gamma_j(A_t + \mu B_t)c^{k-1}(c - \gamma_j)^{k_j-1} \prod_{i \neq j}^s (c - \gamma_i)^{k_i} \\ &\quad - q_s\gamma_s(A_t + \mu B_t)c^{k-1}(c - \gamma_s)^{k_s-1} \prod_{i \neq s}^s (c - \gamma_i)^{k_i}. \end{aligned}$$

Observe que a ordem de  $\gamma_j$  em  $q_2$  é  $(k_j - 1)$ , o que significa apenas a  $(k_j - 1)$ -ésima derivada de  $q_2$  é não nula em  $\gamma_j$ . Assim,

$$\begin{aligned} q_2^{(k_j-1)}(\gamma_j) &= -q_j\gamma_j(A_t + \mu B_t)\gamma_j^{k-1}(k_j - 1)! \prod_{i \neq j}^s (\gamma_j - \gamma_i)^{k_i} \\ &= -q_j(A_t + \mu B_t)\gamma_j^k(k_j - 1)! \prod_{i \neq j}^s (\gamma_j - \gamma_i)^{k_i}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Nesse caso, pelas equações (3.13) e (3.14), temos

$$q_2^{(k_j-1)}(\gamma_j) = \beta^{(k_j-1)}(\gamma_j),$$

isto é,

$$\rho^{(k_j-1)}(\gamma_j) = 0.$$

Mostramos então que

$$\rho(\gamma_j) = \rho^{(1)}(\gamma_j) = \dots = \rho^{(k_j-1)}(\gamma_j) = 0,$$

para todo  $j = 1, \dots, s$ . Isto significa que  $\gamma_j$  possui ordem maior ou igual a  $k_j$  em  $\rho(c)$ . Além disso,  $c = 0$  possui ordem pelo menos  $k - 1$  em  $\rho(c)$ . Logo,

$$\deg(\rho(c)) \geq k - 1 + \sum_{i=1}^s k_j = t - 1.$$

Pelo que foi provado anteriormente, temos simultaneamente que  $\deg(\rho(c)) < t - 1$  e  $\deg(\rho(c)) \geq t - 1$ , implicando que

$$\rho(c) = 0,$$



### 3.3. ENCONTRANDO UMA SOLUÇÃO

---

isto é,

$$\beta(c) = q(c),$$

o que mostra nossa afirmação.  $\square$

Temos ainda:

**Lema 3.3.8.** Se  $A_0 \neq 0$  em (3.9), então

$$\beta(c) = \sum_{i=l+1}^s -q_i(A_t + \mu B_t)(c - \gamma_1)^{k_1} \cdots (c - \gamma_i)^{k_i-1} \cdots (c - \gamma_s)^{k_s}$$

*Demonstração.* Defina a função auxiliar  $\rho(c) = \beta(c) - q(c)$ , onde

$$q(c) = \sum_{i=l+1}^s -q_i(A_t + \mu B_t)(c - \gamma_1)^{k_1} \cdots (c - \gamma_i)^{k_i-1} \cdots (c - \gamma_s)^{k_s}.$$

Como  $A_0 \neq 0$ , segue que  $r = 0$  e  $t = k_1 + \cdots + k_j$ . Para  $j = 1, \dots, l$ , a Afirmação 3.3.6 implica que

$$\beta(\gamma_j) = \beta'(\gamma_j) = \cdots = \beta^{(k_j-1)}(\gamma_j) = 0,$$

e como  $\gamma_j$  possui ordem  $k_j$  na escrita de  $q$ , segue que todas as derivadas de ordem menores ou iguais a  $k_j - 1$  são nulas em  $\gamma_j$ . Consequentemente,

$$\rho(\gamma_j) = \rho'(\gamma_j) = \cdots = \rho^{(k_j-1)}(\gamma_j) = 0.$$

Para  $j = l + 1, \dots, s$ , segue da Afirmação 3.3.6 que

$$\beta^{(i)}(\gamma_j) = q^{(i)}(\gamma_j) = 0$$

para  $i = 1, \dots, k_j - 2$  e

$$\beta^{(k_j-1)}(\gamma_j) = q^{(k_j-1)}(\gamma_j),$$

pelo raciocínio realizado na demonstração da afirmação anterior. Assim, para cada  $j = 1, \dots, s$ , temos

$$\rho(\gamma_j) = \rho'(\gamma_j) = \cdots = \rho^{(k_j-1)}(\gamma_j) = 0.$$

Dessa forma, temos  $\text{ord}_\rho(\gamma_j) \geq k_j$  e  $\text{deg}(\rho(c)) \geq \sum_{i=1}^s k_j = t$ . Do provado anteriormente, temos

$$t \leq \text{deg}(\rho(c)) = t - 1,$$

uma contradição. Logo,  $\rho(c) = 0$ , e

$$\beta(c) = q(c).$$

$\square$

Seja um polinômio diferencial  $f \in C_q$  e considere  $L$  o lado principal de  $\mathcal{N}(f)$  com coincidência  $\mu$ . O resultado abaixo permite dizer que o Algoritmo de Newton-Puiseux pode ser aplicado recursivamente mediante a existência de uma raiz perfeita e considerando sempre o lado principal de  $\mathcal{N}(f)$ .

### 3.3. ENCONTRANDO UMA SOLUÇÃO

**Lema 3.3.9.** *Suponha a existência de uma raiz perfeita  $\gamma_{j_0}$  de  $\varphi$  em  $\mathcal{R}$  e seja  $f_1 = f[\gamma_{j_0}x^\mu + y]$ . Se  $(y = 0)$  não é solução de  $(f_1 = 0)$ , então  $N(f_1)$  possui um lado principal com inclinação maior que  $-1/\mu$ .*

*Demonstração.* De fato, suponha  $\gamma_{j_0}$  uma raiz perfeita de  $\varphi$ , e seja  $(\alpha_{k_{j_0}}, k_{j_0}) = (\alpha', \beta')$  o ponto de polígono de Newton determinado pelo bigrau associado a  $\gamma_{j_0}$ . Segue da Propriedade (3.6) que tal ponto pertence a  $\Delta(f_1)$  e pela equação (3.4), este ponto é único com ordenada  $k_{j_0}$ . Assim,  $(\alpha', \beta')$  pertence ao polígono  $N(f_1)$ . Deste modo, considere  $L'$  o lado de  $N(f_1)$  cujo vértice mais alto é o ponto  $(\alpha', \beta')$ . Evidentemente,  $L'$  está localizado abaixo de  $L$ , uma vez que é obtido a partir da transformada de  $f$  por  $\mu$  e estes produzem termos abaixo e à direita de  $L$ . Assim, a coincidência  $\mu'$  de  $L'$  é maior que  $\mu$ , a coincidência de  $L$ .

Além disso, observe que o binômio diferencial associado a  $f_1$  para  $(\alpha', \beta')$  é dado por

$$M_{\alpha'\beta'}(f_1) = A_{k_{j_0}}(\gamma_{j_0})x^{\alpha'}y^{\beta'} + B_{k_{j_0}}(\gamma_{j_0})x^{\alpha'+1}y^{\beta'-1}y'. \quad (3.15)$$

Como  $\mu' > \mu$ , segue que  $\mathbb{Q}_{(>\mu')} \subset \mathbb{Q}_{(>\mu)}$ . Então a Propriedade (3.6) implica que

$$-\frac{A_{k_{j_0}}(\gamma_{j_0})}{B_{k_{j_0}}(\gamma_{j_0})} \notin \mathbb{Q}_{(>\mu')} \quad \text{e} \quad B_{k_{j_0}}(\gamma_{j_0}) \neq 0.$$

Logo, temos  $(a, L')_{f_1}$  satisfeita e pelo Lema 3.2.5 garantimos a existência de um lado principal de polígono de Newton da transformada  $f_1$ , com inclinação maior que  $-1/\mu'$ .  $\square$

Por fim, a proposição seguinte garante que o algoritmo de Newton-Puiseux funcionam, desde que sejam tomadas em cada etapa a  $(\mu, c_0)$ -transformada de  $f$ , onde  $\mu$  é a coincidência do lado principal de  $N(f)$  e  $c_0$  é uma raiz perfeita de  $\varphi$ .

**Proposição 3.3.10.** *Seja  $f$  um polinômio diferencial em  $C_q$ . Assuma que o lado principal de  $N(f)$  possua inclinação  $-1/\mu$ . Então é possível escolher uma raiz não nula  $c_0$  de  $\varphi(f, \mu)$  tal que se  $f_1 = f[c_0x^\mu + y]$ , então uma das propriedades é válida:*

*i)  $(y = 0)$  é uma solução de  $(f_1 = 0)$ .*

*ii)  $N(f_1)$  possui um lado principal com inclinação maior que  $-1/\mu$ .*

*Demonstração.* Pelo Lema 3.3.9, podemos afirmar que uma raiz perfeita de  $\varphi$  satisfaz o enunciado. Basta então mostrarmos a existência de uma raiz perfeita do polinômio característico  $\varphi(c)$ . Para tanto, suponha que não exista raiz perfeita de  $\varphi$ , ou seja,  $\mathcal{R} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_s\}$  não são raízes perfeitas. Retome a escrita do polinômio característico  $\varphi(c)$  dado na equação (3.9), isto é,

$$\varphi(c) = \varphi_{(f, \mu)}(c) = A_0 + \sum_{i=k}^t (A_i + \mu B_i)c^i.$$

Primeiro, suponha  $A_0 = 0$ . Então, pela Afirmação 3.3.7, temos

$$\beta(c) = B_t c^{k-1} \prod_{i=1}^s (c - \gamma_i)^{k_i} + \sum_{i=l+1}^s -q_i \gamma_i (A_t + \mu B_t) c^{k-1} (c - \gamma_i)^{k_i-1} \prod_{j \neq i}^s (c - \gamma_j)^{k_j}. \quad (3.16)$$

Relacionando os coeficientes de  $c^{k-1}$  em (3.12) e (3.16), temos:

$$\begin{aligned}
 B_k &= B_t \prod_{i=1}^s (-\gamma_i^{k_i}) + \sum_{i=l+1}^s -q_i (A_t + \mu B_t) \gamma_i \gamma_i^{k_i-1} \prod_{j \neq i}^s (-\gamma_j^{k_j}) \\
 &= B_t \prod_{i=1}^s (-\gamma_i^{k_i}) + \sum_{i=l+1}^s q_i (A_t + \mu B_t) \prod_{j=1}^s (-\gamma_j^{k_j}) \\
 &= \prod_{i=1}^s (-\gamma_i^{k_i}) \left\{ B_t + \left( \sum_{i=l+1}^s q_i \right) (A_t + \mu B_t) \right\}. \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

Uma vez que, neste caso, temos  $r = k$ , escreva:

$$\varphi(c) = (A_t + \mu B_t) c^k (c - \gamma_1)^{e_1} (c - \gamma_2)^{e_2} \cdots (c - \gamma_s)^{e_s}.$$

Como o coeficiente de  $c^k$  de  $\varphi$  em (3.9) é  $(A_k + \mu B_k)$ , segue que

$$(A_k + \mu B_k) = \left( \prod_{i=1}^s -\gamma_i^{k_i} \right) (A_t + \mu B_t). \tag{3.18}$$

Sendo  $L$  é o lado principal de  $N(f)$ , temos que as condições  $(a, L)_f$  e  $(b, L)_f$  são válidas simultaneamente, e pelo Corolário 3.2.7, segue que

$$B_k = 0 \quad \text{ou} \quad \left\{ B_k \neq 0 \quad \text{e} \quad -\frac{A_k}{B_k} \in \mathbb{Q}_{(>\mu)} \right\}. \tag{3.19}$$

De (3.19), assuma primeiramente que  $B_k = 0$ . Como as raízes  $\gamma_j$  são todas não nulas, segue de (3.17) que

$$B_t + \left( \sum_{i=l+1}^s q_i \right) (A_t + \mu B_t) = 0,$$

ou seja,

$$\left( \sum_{i=l+1}^s q_i \right) (A_t + \mu B_t) = -B_t. \tag{3.20}$$

Dividindo ambos os lados da equação (3.20) por  $B_t$ , temos

$$\left( \sum_{i=l+1}^s q_i \right) \left( \frac{A_t}{B_t} + \mu \right) = -1.$$

Uma vez que  $q_i$  é um número positivo, para cada  $i$ , segue que

$$\frac{A_t}{B_t} + \mu < 0.$$

### 3.3. ENCONTRANDO UMA SOLUÇÃO

---

Logo,

$$-\frac{A_t}{B_t} \in \mathbb{Q}_{(>\mu)}$$

e, como  $(A_t, B_t)$  são os coeficientes do ponto mais alto de  $L$ , isto contradiz  $(a, L)_f$ .

Então, de (3.19) temos necessariamente  $B_k \neq 0$  e vale

$$-\frac{A_k}{B_k} \in \mathbb{Q}_{(>\mu)}.$$

Dividindo a equação (3.18) pela equação (3.17), temos

$$\frac{A_k + \mu B_k}{B_k} = \frac{(\prod_{i=1}^s -\gamma_i^{k_i})(A_t + \mu B_t)}{(\prod_{i=1}^s -\gamma_i^{k_i})\{B_t + (\sum_{i=l+1}^s q_i)(A_t + \mu B_t)\}}$$

ou seja,

$$\frac{A_k}{B_k} + \mu = \frac{(A_t + \mu B_t)}{\{B_t + (\sum_{i=l+1}^s q_i)(A_t + \mu B_t)\}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{A_k}{B_k} + \mu &= \frac{1}{B_t/(A_t + \mu B_t) + (\sum_{i=l+1}^s q_i)} \\ &= \left( \frac{1}{(\frac{A_t}{B_t} + \mu)} + \left( \sum_{i=l+1}^s q_i \right) \right)^{-1} \end{aligned}$$

Como  $q_i \in \mathbb{Q}_+$ , segue que

$$\frac{A_k}{B_k} + \mu > 0$$

Logo,

$$-\frac{A_k}{B_k} < \mu,$$

uma contradição por (3.19).

Evidentemente, segue que o coeficiente  $A_0$  é não nulo. Então,  $c = 0$  não é fator de  $\varphi(c)$  e temos  $k_1 + k_2 + \dots + k_s = t$ . Da Afirmação 3.3.8, temos que

$$\beta(c) = \sum_{i=l+1}^s -q_j(A_t + \mu B_t)(c - \gamma_1)^{k_1} \dots (c - \gamma_i)^{k_i-1} \dots (c - \gamma_s)^{k_s}.$$

Comparando os coeficientes obtidos pela Afirmação 3.3.8 e na equação (3.12), temos que

$$B_t = \left( \sum_{i=l+1}^s -q_i \right) (A_t + \mu B_t).$$

Dividindo ambas as equações por  $B_t$ , temos

$$1 = \left( - \sum_{i=l+1}^s q_i \right) \left( \frac{A_t}{B_t} + \mu \right).$$

Como cada  $q_i$  é um número positivo, segue que

$$\frac{A_t}{B_t} < \mu,$$

contradizendo  $(a, L)_f$ . Dessa forma, estamos garantindo a existência de uma raiz perfeita de  $\varphi$  e a proposição está provada.  $\square$

Observe que garantimos sempre a existência de lados principais dos polígonos de Newton das transformadas e de raízes perfeitas dos respectivos polinômios característicos. Assim, impondo a condição de que em cada etapa do algoritmo sejam tomados lados principais e raízes perfeitas, estamos garantindo que o algoritmo de Newton-Puiseux sempre prossegue.

O processo recursivo funciona da seguinte forma: Seja  $f_\omega = f_0$ . Pelo Corolário 3.2.7,  $N(f_\omega)$  possui um lado principal  $L_0$  com coincidência  $\mu_0$ . As condições de  $(L_0, a)_f$  e  $(L_0, b)_f$  garantem a existência de uma raiz não nula do polinômio característico  $\varphi_{(f, \mu_0)}$ . Dentre as tais raízes mostramos haver uma raiz perfeita, digamos  $c_0$ . Se  $(y = 0)$  é uma solução de  $f_1 = f_0[c_0x^{\mu_0} + y]$ , pela Observação 2.2.3, segue que  $c_0x^{\mu_0}$  é uma solução de  $f_\omega$ . Caso contrário, a Proposição 3.3.10 garante que  $N(f_1)$  possui um lado principal  $L_1$  com coincidência  $\mu_1 > \mu_0$  e que o polinômio característico associado a tal lado possui uma raiz perfeita não nula  $c_1$ . Novamente, se  $(y = 0)$  é uma solução de  $(f_2 = 0)$ , onde  $f_2 = f_1[c_1x^{\mu_1} + y]$ , segue que  $c_1x^{\mu_1}$  é solução de  $(f_1 = 0)$ , ou melhor,  $c_0x^{\mu_0} + c_1x^{\mu_1}$  é solução de  $(f_\omega = 0)$ . Caso contrário, da Proposição 3.3.10 garante que  $N(f_2)$  possui um lado principal  $L_2$  com coincidência  $\mu_2 > \mu_1$ , possuindo uma raiz perfeita  $c_2$  do polinômio característico associado a tal lado.

Aplicando a Proposição 3.3.10 recursivamente, obtemos uma solução da forma  $z = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{\mu_i}$ , para  $(f_\omega = 0)$ . Note que a única exigência que estamos fazendo é tomar sempre lados principais e raízes perfeitas em cada etapa. No capítulo seguinte, vamos mostrar que esta série é de fato uma solução convergente de  $(f_\omega = 0)$ .

## Capítulo 4

# A solução de uma forma Pfaffiana

No capítulo anterior, apresentamos condições que permitem estender o algoritmo de Newton-Puiseux para exibir uma candidata a solução de  $(f_\omega = 0)$ , onde  $f_\omega$  é o polinômio diferencial associado a forma Pfaffiana  $\omega$ . Evidentemente, uma solução de  $(f_\omega = 0)$ , é também uma solução de  $(\omega = 0)$ . Neste capítulo, mostramos que a série obtida trata-se de fato, de uma solução formal de  $(f_\omega = 0)$ . Além disso, mostramos, no caso em que  $\omega$  é analítica, que a solução é convergente.

### 4.1 A solução formal

Sejam  $\omega = A_\omega(x, y)dx + B_\omega(x, y)dy$  uma forma Pfaffiana com  $A_\omega, B_\omega \in \mathbb{C}[[x, y]]$  e

$$z(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^{q_i} \in \mathbb{C}[[x]],$$

uma série de Puiseux fracionária, com  $q_i \in \mathbb{Q}_+$ . Considere  $f_\omega$  o polinômio diferencial associado à forma Pfaffiana  $\omega$ .

**Definição 4.1.1.** Dizemos que  $z$  é uma *solução formal* de  $f_\omega$  se, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $i(n) \in \mathbb{N}$  tal que

$$\text{ord}_x[f_\omega(x, z_n(x))] = \text{ord}_x[A_\omega(x, z_n(x)) + B_\omega(x, z_n(x))z'_n(x)] \geq n,$$

onde  $z_n(x) = \sum_{i=1}^{i(n)} a_i x^{q_i}$ .

No capítulo anterior, descrevemos as etapas do algoritmo de Newton-Puiseux. Vamos analisar alguns aspectos deste processo recursivo. Escreva  $f_0 = f_\omega$  e  $f_{i+1} = f_i[c_i x^{\mu_i} + y]$  as transformadas sucessivas de  $f$ .

Para cada etapa  $i$  do algoritmo, considere  $Q_i = (a_i, b_i)$  o vértice mais alto do lado principal de  $N(f_i)$ , o qual representamos por  $L_i = L(f_i, \mu_i)$ . Pela Afirmação 2.2.17, as porções de  $N(f_i)$  e  $N(f_{i+1})$  acima de  $Q_i$  coincidem, e além disso,  $Q_i \in N(f_{i+1})$ . Uma vez que na aplicação do algoritmo garantimos a existência de lados principais com inclinações cada vez maiores, segue que tais lados estão sempre localizados abaixo de  $N(f_i)$ . Logo,  $b_{i+1} < b_i$ . Isto significa, que existe um índice  $i_0$  tal que

$$b_i = b_{i_0},$$

#### 4.1. A SOLUÇÃO FORMAL

para todo  $i \geq i_0$ , e conseqüentemente,

$$Q_i = Q_{i_0},$$

para  $i \geq i_0$ . Observe que  $b_{i_0} > 0$ , por ser a ordenada do vértice mais alto de um lado principal.

**Definição 4.1.2.** O ponto  $Q_{i_0} = (a, b)$ , é chamado de *ponto pivô de  $f$  com respeito a  $z$* . O índice  $i_0$  é chamado de *índice estacionário*.

O estudo da natureza da solução envolve o estudo de propriedades relacionadas ao ponto pivô. Apresentamos alguns resultados relacionados ao ponto pivô, quando  $Q_{i_0} = (a, 1)$ .

**Lema 4.1.3.** *Seja  $Q_{i_0} = (a, 1)$ . Se  $f_{i_0} \in C_q$ , então  $\mu_i \in \frac{\mathbb{N}}{q}$  e  $f_{i+1} \in C_q$ , para cada  $i \geq i_0$ .*

*Demonstração.* Sejam  $Q_{i_0} = (a, 1)$  o ponto pivô de  $f$  com respeito a  $z$  e para  $i \geq i_0$  fixo e  $f_i \in C_q$ . Então,

$$f_i = \sum_{(\alpha, \beta)} M_{\alpha, \beta}(f_i),$$

onde  $M_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta + B_{\alpha\beta}x^{\alpha+1}y^{\beta-1}y'$ , com  $\alpha \in \{z/q \mid z \in \mathbb{Z} \text{ e } z \geq -q\}$  e  $\beta \in \mathbb{N}$ . Considere  $L_i$  o lado principal de  $N(f_i)$  com coincidência  $\mu_i$ . Uma vez que  $Q_{i_0} = (a, 1)$  é o ponto mais alto de  $L_i$ , é fácil ver que o ponto mais baixo deste lado é  $(a + \mu_i, 0)$ . Assim, os coeficientes de  $x^\alpha y$  e  $x^{a+\mu_i}$  são não nulos em  $f_i$ . Como  $f_i \in C_q$ , temos

$$a = \frac{z_1}{q} \quad \text{e} \quad a + \mu_i = \frac{z_2}{q},$$

com  $z_2 > z_1$ , uma vez que  $\mu_i \in \mathbb{Q}_+$ . Então,

$$\mu_i = a + \mu_i - a = \frac{z_2}{q} - \frac{z_1}{q} = \frac{z_2 - z_1}{q}.$$

Tomando  $n = z_2 - z_1$ , segue que

$$\mu_i \in \frac{\mathbb{N}}{q}.$$

Vamos mostrar que  $f_{i+1} \in C_q$ . Para tanto, considere  $f_{i+1} = f_i[c_i x^{\mu_i} + y]$  e  $\mu_i = n/q$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , como provado anteriormente. Considere o binômio diferencial transformado pela substituição de  $y$  por  $c_i x^{\mu_i} + y$

$$(M_{\alpha\beta})^t = A_{\alpha\beta}x^\alpha (c_i x^{\mu_i} + y)^\beta + c_i \mu_i B_{\alpha\beta}x^{\alpha+\mu_i} (c_i x^{\mu_i} + y)^{\beta-1} + B_{\alpha\beta}x^{\alpha+1} (c_i x^{\mu_i} + y)^{\beta-1} y'.$$

i) Se  $A_{\alpha\beta} \neq 0$ , temos bi-índices da forma

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \alpha + k\mu_i \\ \bar{\beta} &= \beta - k \end{aligned}$$

com  $0 \leq k \leq \beta$ . Note que  $\bar{\beta} \in \mathbb{N}$  e

$$\bar{\alpha} = \frac{z}{q} + k \frac{n}{q} = \frac{z'}{q}.$$

ii) Se  $B_{\alpha\beta} \neq 0$ , temos bi-índices da forma

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} &= \alpha + k\mu_i + \mu_i \\ \bar{\beta} &= \beta - k - 1\end{aligned}$$

com  $0 \leq k \leq \beta - 1$ . Da mesma forma,  $\bar{\beta} \in \mathbb{N}$ , e

$$\bar{\alpha} = \frac{z}{q} + k\frac{n}{q} + \frac{n}{q} = \frac{z'}{q}.$$

iii) Se  $B_{\alpha\beta} \neq 0$ , temos bi-índices produzidos da forma

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} &= \alpha + k\mu_i \\ \bar{\beta} &= \beta - k\end{aligned}$$

com  $0 \leq k \leq \beta - 1$ . Note que  $\bar{\beta} \in \mathbb{N}$  e

$$\bar{\alpha} = \frac{z}{q} + k\frac{n}{q} = \frac{z'}{q}.$$

Em todos os casos considerados, temos

$$\bar{\alpha} \in \left( \frac{\mathbb{Z}}{q} \right)_{(\geq -1)},$$

uma vez que  $-1 < \alpha < \bar{\alpha}$ , e portanto,

$$f_{i+1} \in C_q.$$

Usando este raciocínio recursivamente, temos o resultado. □

**Observação 4.1.4.** Suponha que  $f \in C_q$ , para algum  $q \in \mathbb{N}$ . Então, os expoentes da variável  $x$  são dados por

$$\alpha = \frac{z}{q},$$

com  $z \geq -q$ . Evidentemente, se  $t \in \mathbb{N}$

$$\alpha = \frac{zt}{qt},$$

isto é,

$$f \in C_{qt}.$$

Em outros termos, se  $f \in C_q$ , então  $f \in C_p$ , onde  $p$  é qualquer múltiplo positivo de  $q$ .

**Lema 4.1.5.** *Seja  $Q_{i_0} = (a, 1)$ . Existe  $\bar{q} \in \mathbb{N}$  tal que*

$$\mu_i \in \frac{\mathbb{N}}{\bar{q}},$$

para todo  $i \geq 0$ .



#### 4.1. A SOLUÇÃO FORMAL

---

*Demonstração.* Suponha  $f_\omega = f_0 \in C_q$  e escreva

$$\mu_0 = \frac{r_0}{s_0},$$

para  $r_0, s_0 \in \mathbb{N}$ . Pela Propriedade 2.2.4,  $f_1$  a  $(\mu_0, c_0)$ -transformada de  $f$ , é tal que  $f_1 \in C_{q_1}$ , onde  $q_1 = mmc(q, s_0)$ . Considere  $\mu_1$  a coincinação do lado principal de  $N(f_1)$ , dada por

$$\mu_1 = \frac{r_1}{s_1},$$

com  $r_1, s_1 \in \mathbb{N}$ . Pela Propriedade 2.2.4, temos  $f_2 \in C_{q_2}$ , onde

$$q_2 = mmc(q_1, s_1) = mmc(q, s_0, s_1).$$

Procedendo dessa forma, na  $i_0$ -ésima etapa, obtemos  $f_{i_0} \in C_{q_{i_0}}$ , onde

$$q_{i_0} = mmc(q, s_0, s_1, \dots, s_{i_0-1})$$

e  $\mu_i = r_i/s_i$  e  $\mu_{i_0-1} = r_{i_0-1}/s_{i_0-1}$ . Pela Observação 4.1.4, temos  $f_i \in C_{q_{i_0}}$  para todo  $i, \dots, i_0$ . Por outro lado, o Lema 4.1.3 implica que  $f_i \in C_{q_{i_0}}$ , para todo  $i \geq i_0$ . Logo, tomando  $\bar{q} = q_{i_0}$ , temos  $f_i \in C_{\bar{q}}$ , para cada índice  $i \geq 0$ . Conseqüentemente,

$$\mu_i \in \frac{\mathbb{N}}{\bar{q}}.$$

□

Suponha agora que o ponto pivô  $Q_{i_0} = (a, b)$  tenha ordenada  $b \geq 2$ . Defina a função por

$$g = \frac{\partial^{(b-1)} f_\omega}{\partial^{(b-2)} y \partial y'}.$$

Ela define uma curva formal em  $C_q$ . Observe que, se

$$f_\omega(x, y) = \sum_{(\alpha, \beta)} A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta + B_{\alpha\beta} x^{\alpha+1} y^{\beta-1} y',$$

é fácil ver que

$$g(x, y) = \sum_{(\alpha, \beta)} (\beta - 1)(\beta - 2) \cdots ((\beta - 1) - (b - 2)) B_{\alpha\beta} x^{\alpha+1} y^{\beta-b+1},$$

sempre que  $\beta - 1 \geq b - 2$ . Considere para cada par  $(\alpha, \beta)$  o coeficiente,

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \begin{cases} \frac{(\beta - 1)!}{((\beta - 1) - (b - 1))!}, & \text{se } \beta - 1 \geq b - 2. \\ 0, & \text{se } \beta - 1 < b - 2. \end{cases}$$

Então,

$$g(x, y) = \sum_{(\alpha, \beta)} \Lambda_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} x^{\alpha+1} y^{\beta-b+1}. \quad (4.1)$$

A partir da escrita de  $g$ , definimos uma família de funções formais pelas transformadas sucessivas  $g_{i+1} = g_i[c_i x^{\mu_i} + y]$ . O resultado abaixo permite relacionar as famílias de transformadas  $f_i$  e  $g_i$ .

**Lema 4.1.6.** *Sejam  $Q_{i_0} = (a, b)$ , com  $b \geq 2$ , e as funções formais  $g_0 = g$  e  $g_{i+1} = g_i[c_i x^{\mu_i} + y]$ . Então,*

$$g_i = \frac{\partial^{(b-1)} f_i}{\partial^{(b-2)} y \partial y'}.$$

*Demonstração.* Considere o operador

$$D = \frac{\partial^{(b-1)}}{\partial^{(b-2)} y \partial y'}.$$

Devemos mostrar que  $g_i = Df_i$ , para cada  $i \geq 0$ . Da definição, é imediato que

$$g_0 = g = Df_0.$$

Para mostrar o resultado usaremos indução. Para tanto, observe que

$$g_1 = g_0[c_0 x^{\mu_0} + y] = \sum_{(\alpha, \beta)} \Lambda_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} x^{\alpha+1} (c_0 x^{\mu_0} + y)^{\beta-b+1}. \quad (4.2)$$

Como  $f_1 = f_0[c_0 x^{\mu_0} + y]$ , temos

$$f_1 = \sum_{(\alpha, \beta)} A_{\alpha\beta} x^{\alpha} (c_0 x^{\mu_0} + y)^{\beta} + B_{\alpha\beta} c_0 \mu_0 x^{\alpha+\mu_0} (c_0 x^{\mu_0} + y)^{\beta-1} + \sum_{(\alpha, \beta)} B_{\alpha\beta} x^{\alpha+1} (c_0 x^{\mu_0} + y)^{\beta-1} y'.$$

Uma vez que  $\frac{\partial}{\partial y} (c_0 x^{\mu_0} + y) = 1$ , segue usando a regra da cadeia que

$$Df_1 = \sum_{(\alpha, \beta)} (\beta - 1)(\beta - 2) \cdots ((\beta - 1) - (b - 2)) B_{\alpha\beta} x^{\alpha+1} (c_0 x^{\mu_0} + y)^{\beta-b+1},$$

isto é,

$$Df_1 = \sum_{(\alpha, \beta)} \Lambda_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} x^{\alpha+1} (c_0 x^{\mu_0} + y)^{\beta-b+1}. \quad (4.3)$$

De (4.2) e (4.3), segue que

$$g_1 = Df_1.$$

Suponha, por hipótese de indução, que  $g_k = Df_k$ . Como  $g_{k+1} = g_k[c_k x^{\mu_k} + y]$ , mostrar  $g_{k+1} = Df_{k+1}$  é o mesmo que mostrar

$$Df_k[c_k x^{\mu_k} + y] = D(f_k[c_k x^{\mu_k} + y]).$$

#### 4.1. A SOLUÇÃO FORMAL

---

Para tanto, escreva

$$f_k = \sum A_{\alpha\beta}^{(k)} x^\alpha y^\beta + B_{\alpha\beta}^{(k)} x^{\alpha+1} y^{\beta-1} y',$$

onde  $A_{\alpha\beta}^{(k)}$  e  $B_{\alpha\beta}^{(k)}$  são os coeficientes de  $(\alpha, \beta)$  na  $k$ -ésima etapa. Observe que

$$Df_k = \sum_{(\alpha, \beta)} \Lambda_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}^{(k)} x^{\alpha+1} y^{\beta-b+1},$$

e conseqüentemente,

$$Df_k[c_k x^{\mu_k} + y] = \sum_{(\alpha, \beta)} \Lambda_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}^{(k)} x^{\alpha+1} (c_k x^{\mu_k} + y)^{\beta-b+1}. \quad (4.4)$$

Por outro lado, temos

$$f_k[c_k x^{\mu_k} + y] = \sum A_{\alpha\beta}^{(k)} x^\alpha (c_k x^{\mu_k} + y)^\beta + B_{\alpha\beta}^{(k)} x^{\alpha+1} (c_k x^{\mu_k} + y)^{\beta-1} (c_k \mu_k x^{\mu_k-1} + y').$$

Note que, pela regra da cadeia, temos

$$D(f_k[c_k x^{\mu_k} + y]) = \sum_{(\alpha, \beta)} \Lambda_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}^{(k)} x^{\alpha+1} (c_k x^{\mu_k} + y)^{\beta-b+1}. \quad (4.5)$$

Portanto, de (4.4) e (4.5), temos

$$g_{k+1} = Df_{k+1},$$

e o resultado está provado. □

**Observação 4.1.7.** Seja  $\varphi(\alpha, \beta) = (\alpha + 1, \beta - b + 1)$ . Então

$$\Delta(g_i) \subset \varphi(\Delta(f_i)) \cap \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta \geq 0\}.$$

Com efeito, seja  $g_i = \sum \Lambda_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} x^{\alpha+1} y^{\beta-b+1}$  e  $(\alpha', \beta') \in \Delta(g_i)$ . Então

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha + 1 \\ \beta' &= \beta - b + 1, \end{aligned}$$

para algum  $(\alpha, \beta)$  em  $\Delta(f_i)$ . Como o coeficiente de  $(\alpha, \beta)$  é não nulo em  $g_i$ , temos que  $B_{\alpha\beta}$  não nulo em  $f_i$  e conseqüentemente,  $\Lambda_{\alpha\beta}$  não nulo. Ambas as condições, implicam respectivamente que  $(\alpha, \beta) \in \Delta(f_i)$  e  $\beta - 1 \geq b - 2$ , isto é,  $\beta' \geq 0$ . Note que  $(\alpha', \beta') = \varphi(\alpha, \beta)$ .

Logo,  $(\alpha', \beta') \in \varphi(\Delta(f_i)) \cap \{(\alpha', \beta') \in \mathbb{R}^2 \mid \beta' \geq 0\}$ , ou seja,

$$\Delta(g_i) \subset \varphi(\Delta(f_i)) \cap \{(\alpha', \beta') \in \mathbb{R}^2 \mid \beta' \geq 0\}.$$

**Observação 4.1.8.** Pela observação anterior, segue que os bi-índices de  $g_i$  estão relacionados com os bi-índices de  $f_i$ . Isto significa que se  $f_i \in C_q$  para algum número natural  $q$ , necessariamente temos  $g_i \in C_q$ .

**Observação 4.1.9.** Seja  $Q_{i_0} = (a, b)$ . Como  $\varphi(a, b) = (a+1, 1)$  e  $L_i = L(f_i, \mu_i)$  é o lado principal de  $N(f_i)$  para  $i \geq i_0$ , temos que o coeficiente  $B_{ab}^{(i)} = B_{ab}^{(i_0)} = B^{(0)}$  é não nulo. Note que  $\Lambda_{ab}$  e  $B_{ab}$  simultaneamente não nulos implicam que o coeficiente de  $(a+1, 1)$  em  $g_i$  é não nulo, e

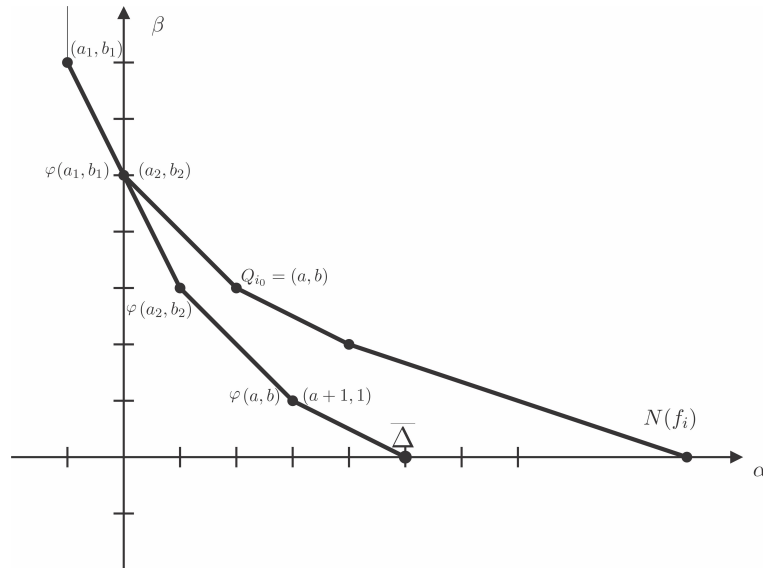
$$(a+1, 1) \in \Delta(g_i),$$

para  $i \geq i_0$ .

**Observação 4.1.10.** Pela Observação 4.1.9, temos que  $(a+1, 1) \in \Delta(g_i)$ , para  $i \geq i_0$ . Uma vez que

$$\Delta(g_i) \subset \varphi(\Delta(f_i)) \cap \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta \geq 0\},$$

segue que  $\Delta(g_i)$  é obtido por um deslocamento em  $\Delta(f_i)$  ocasionado pelo operador  $D$  e tal deslocamento é representado por  $\varphi$ . Veja, por exemplo, o Diagrama 4.1.



**Figura 4.1:** Deslocamento de  $\varphi$ .

Seja  $N(f_i)$  o polígono de Newton de  $f_i$ , e denote por  $\overline{\Delta}$  a porção da linha poligonal que liga os pontos de  $\varphi(\alpha, \beta)$  para  $(\alpha, \beta) \in N(f_i)$ , localizada acima do eixo das abcissas. Observe que  $\Delta(g_i)$  está contido na região delimitada por  $\overline{\Delta}$ , e como  $(a+1, 1) = \varphi(a, b)$ , temos que  $(a+1, 1) \in \overline{\Delta}$ . Além disso,  $(a+1, 1)$  está localizado à esquerda dos pontos abaixo dele, o que significa que este ponto está localizado no fecho de  $\Delta(g_i)$ . Logo,

$$(a+1, 1) \in N(g_i),$$

para  $i \geq i_0$ .

**Observação 4.1.11.** Seja  $L(f_i, \mu_i) = L_i$ , o lado principal de  $N(f_i)$ , no qual o ponto mais alto é  $Q_{i_0} = (a, b)$ , para  $i \geq i_0$ . Evidentemente, seja  $(a', b')$  o ponto mais baixo de  $L_i$ , onde  $b' = b - k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Note que a inclinação de  $L_i$  vale

$$-\frac{1}{\mu_i} = \frac{b - b'}{a - a'}.$$

#### 4.1. A SOLUÇÃO FORMAL

---

Consideremos a inclinação do lado  $\bar{L}$  de  $\bar{\Delta}$ . Ele está contido na reta que contém os pontos  $(a+1, 1)$  e  $\varphi(a', b') = (a'+1, b'-b+1)$ . Então, a inclinação de  $\bar{L}$  é dada por

$$\frac{1 - (b' - b + 1)}{a + 1 - (a' + 1)} = \frac{b - b'}{a - a'} = -\frac{1}{\mu_i}.$$

Isto significa que a coincidência de  $\bar{L}$  é  $\mu_i$  e, como  $(a+1, 1)$  está no polígono de Newton de  $g_i$  para  $i \geq i_0$ , segue da unicidade da reta distinguida de coincidência  $\mu_i$  associada a  $g_i$ , que  $L(g_i, \mu_i) = \bar{L}$ . Logo,

$$(a+1, 1) \in L(g_i, \mu_i),$$

$i \geq i_0$ .

**Observação 4.1.12.** Na Observação 4.1.8, afirmamos que os bi-índices de  $g$  estão relacionados com os bi-índices de  $f$ . Suponha  $g_0 \in C_q$  e  $\mu_0 = r_0/s_0$ , com  $r_0, s_0 \in \mathbb{N}$ . Observe que os bi-índices produzidos pela  $(\mu_0, c_0)$ -transformada de  $g_0$ , são forma

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \alpha + 1 + k\mu_0; \\ \bar{\beta} &= \beta - b + 1 - k, \end{aligned}$$

com  $0 \leq k \leq \beta - b + 1$ . Procedendo como na Propriedade 2.2.4, temos que  $g_1 \in C_{q_1}$ , onde  $q_1 = mmc(q, s_0)$ . Utilizando este raciocínio recursivamente, temos que

$$g_{i_0} \in C_{q_{i_0-1}},$$

onde  $q_{i_0-1} = mmc(q, s_0, \dots, s_{i_0-1})$  e  $\mu_i = r_i/s_i$ . Assim, pela Observação 4.1.4, temos  $g_i \in C_{q_{i_0-1}}$ , para cada  $i = 1, \dots, i_0$ , e conseqüentemente

$$\mu_i \in \frac{\mathbb{N}}{q_{i_0-1}}.$$

**Lema 4.1.13.** Seja  $i \geq i_0$ , se  $g_i \in C_q$  e

$$\mu_i \in \frac{\mathbb{N}}{q},$$

então  $g_{i+1} \in C_q$ .

*Demonstração.* Considere  $i \geq i_0$ , suponha  $g_i \in C_q$  e escreva

$$\mu_i = \frac{n}{q}.$$

Como  $g_{i+1} = g_i[c_i x^{\mu_i} + y]$ , considere o binômio diferencial transformado dado por

$$M_{\alpha\beta}(g_i)[c_i x^{\mu_i} + y] = \Lambda_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} x^{\alpha+1} (c_i x^{\mu_i} + y)^{\beta-1}.$$

Analisamos os bi-índices  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  produzidos pela  $(\mu_i, c_i)$ -transformada de  $g_i$ . Os bi-índices de  $g_i$

são da forma

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} &= \alpha + 1 + k\mu_i \\ \bar{\beta} &= \beta - 1 - k\end{aligned}$$

com  $0 \leq k \leq \beta - 1$ , analogamente, temos  $\bar{\beta} \in \mathbb{N}$ , e

$$\bar{\alpha} = \frac{z}{q} + 1 + k\frac{n}{q} = \frac{z'}{q},$$

pois  $\mu_i = n/q$ . Logo,

$$\bar{\alpha} \in \left( \frac{\mathbb{Z}}{q} \right)_{(\geq -1)},$$

uma vez que  $-1 < \alpha < \bar{\alpha}$ . Portanto,

$$g_{i+1} \in C_q.$$

□

Em resumo, neste capítulo mostramos que as coinclições dos lados principais dos polígonos de Newton das transformadas, podem ser escritas com um denominador comum no caso em que o ponto pivô  $Q_{i_0}$  possui ordenada 1. No caso onde o ponto pivô  $Q_{i_0}$  possui ordenada  $b \geq 2$ , reduzimos o caso para uma função formal com ponto pivô de ordenada 1, cujas coinclições também possuem um denominador comum.

O Teorema a seguir é um dos principais resultados deste capítulo. Nele verificamos que a candidata a solução de  $(f_\omega = 0)$ , obtida pela Proposição 3.3.10, é de fato consiste em uma solução formal de  $(f_\omega = 0)$ .

**Teorema 4.1.14.** *Seja  $f_\omega$  o polinômio diferencial associado a  $\omega$  e assumamos que nem  $(x = 0)$  e nem  $(y = 0)$  são soluções de  $(f_\omega = 0)$ . Então, o algoritmo apresentado produz uma solução de  $(f_\omega = 0)$  do tipo*

$$z = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{i/q}.$$

*Demonstração.* Aplicando a Proposição 3.3.10 recursivamente, obtemos uma solução de  $(f_\omega = 0)$  escrita da forma

$$z = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{\mu_i},$$

onde alguns  $\mu_i$  são as coinclições dos polígonos de Newton das transformadas de  $f_\omega$ , e outros tomados com nulos. Escrevendo  $f_0 = f_\omega$  e  $f_{i+1} = f_i[c_i x^{\mu_i} + y]$  as respectivas transformadas de cada etapa, segue que são válidas uma das propriedades:

- i) O polígono de Newton  $N(f_i)$  possui um lado principal com inclinação  $-1/\mu_i$  e  $c_i$  uma raiz não nula de  $\varphi_{(f_i, \mu_i)}$  de forma que a transformada  $f_{i+1}$  ou possui  $(y = 0)$  como solução ou  $N(f_{i+1})$  possui um lado principal  $L_{i+1}$  com coinclição  $\mu_{i+1} > \mu_i$ .
- ii) O polígono de Newton  $N(f_i)$  não possui um lado principal,  $(y = 0)$  é uma solução de  $(f_i = 0)$  e  $c_j = 0$  para  $j \geq i$ .

Se *ii*) ocorre, não há nada que provar, basta tomar

$$q = mmc(r_0, r_1, \dots, r_{i-1}),$$

com  $\mu_j = s_j/r_j$ , e a solução possui a forma enunciada. Assumindo a propriedade *i*), resta agora mostrar que  $z$  é uma solução formal de  $(f_\omega = 0)$  e possui a forma descrita acima. Nestas condições, considere  $Q_{i_0} = (a, b)$  o ponto pivô de  $f$  com respeito a  $z$  e  $i_0$  o índice estacionário. Note que  $b \geq 1$ , uma vez que assumimos a existência de uma raiz não nula de  $\varphi_{(f_i, \mu_i)}$ , em cada índice  $i \geq 0$ .

Assumimos inicialmente  $b = 1$  e considere sempre  $i \geq i_0$ . Então, o polinômio diferencial inicial é dado por

$$In^{(\mu_i)}(f_i) = A_{(a,1)}^{(i)} x^a y + B_{(a,1)}^{(i)} x^{a+1} y' + A_{(a+\mu_i,0)}^{(i)} x^{a+\mu_i},$$

onde  $A_{(\alpha,\beta)}^{(i)}$ ,  $B_{(\alpha,\beta)}^{(i)}$  são os coeficientes de bi-índice  $(\alpha, \beta)$  na  $i$ -ésima etapa do algoritmo. Note que o ponto  $(a + \mu_i, 0)$  é o ponto mais baixo de  $L_i$ , o lado principal do polígono de Newton nesta etapa. Pela Propriedade 2.2.11, temos que o ponto  $Q_{i_0}$  não poderá ser produzido por nenhum bi-índice da transformada  $f[c_{i_0-1}x^{\mu_{i_0-1}} + y]$ , com  $\mu_{i_0-1} < \mu_{i_0}$ . Isso significa que os coeficientes correspondentes a esse ponto em cada etapa coincidem, isto é,

$$A_{(a,1)}^{(i)} = A_{(a,1)}^{(i_0)} \quad \text{e} \quad B_{(a,1)}^{(i)} = B_{(a,1)}^{(i_0)},$$

para cada  $i \geq i_0$ , os quais denotamos por  $A^{(0)}$  e  $B^{(0)}$ , respectivamente. Observe que por definição, o polinômio característico  $\varphi_{(f_i, \mu_i)}$  é dado por

$$\varphi_{(f_i, \mu_i)}(c) = (A^{(0)} + \mu_i B^{(0)})c + A_{(a+\mu_i,0)}^{(i)},$$

uma vez que  $B_{(a+\mu_i,0)}^{(i)} = 0$ . Como estamos assumindo a validade de *i*), segue que existe uma raiz  $c_i$  não nula, que é dada por

$$c_i = -\frac{A_{(a+\mu_i,0)}^{(i)}}{A^{(0)} + \mu_i B^{(0)}}. \quad (4.6)$$

Observe que sendo assim, temos  $A_{(a+\mu_i,0)}^{(i)}$  não nulo. Além disso, como  $L(f_{i_0}, \mu_{i_0})$  é o lado principal de  $N(f_{i_0})$ , segue das propriedades  $(a, L)_{f_{i_0}}$  e  $(b, L)_{f_{i_0}}$ , que

$$B_{(a,1)}^{(i_0)} = B^{(0)} \neq 0 \quad \text{e} \quad A^{(0)} + \mu_i B^{(0)} \neq 0.$$

Analisando o polígono de Newton de  $f_{i+1}$ , temos que

$$ord_x(f_\omega[c_1 x^{\mu_1} + \dots + c_i x^{\mu_i}]) = ord_x(f_{i+1}[0]) \geq a + \mu_i, \quad (4.7)$$

para  $i \geq i_0$ . Pelo Lema 4.1.5, as coincinações  $\mu_i$  podem ser escritas com um denominador comum, isto é,

$$\mu_i \in \frac{\mathbb{N}}{q},$$

e como  $\mu_i < \mu_{i+1}$ , segue que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_i = \infty.$$

Logo, temos que  $z$  obtida no processo anterior é uma solução formal de ( $f_\omega = 0$ ), isto é,

$$f_\omega[z] = 0.$$

Novamente pelo Lema 4.1.5,  $z$  possui a forma descrita no enunciado.

Suponha agora que  $Q_{i_0} = (a, b)$ , com  $b \geq 2$ . Sejam  $g_0 = g$  e  $g_{i+1} = g_i[c_i x^{\mu_i} + y]$  conforme definimos. Pela Observação 4.1.7, temos que

$$\Delta(g_i) \subset \varphi(\Delta(f_i)) \cap \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 | \beta \geq 0\},$$

onde  $\varphi(\alpha, \beta) = (\alpha + 1, \beta - b + 1)$ . Além disso, as Observações 4.1.9 e 4.1.10 implicam que

$$(a + 1, 1) \in N(g_i),$$

para  $i \geq i_0$ .

**Afirmção 4.1.15.** O coeficiente de  $(a + \mu_i + 1, 0)$  é não nulo em  $g_i$ , para  $i \geq i_0$ .

*Demonstração.* De fato, como  $g_{i+1}$  é a  $(\mu_i, c_i)$ -transformada de  $g_i$ , considere a transformada do termo  $B^{(0)}x^{a+1}y$  em  $g_i$ :

$$B_{ab}^{(0)}x^{a+1}(c_i x^{\mu_i} + y) = B_{ab}^{(0)}c_i x^{a+\mu_i+1} + B_{ab}^{(0)}x^{a+1}y.$$

Pela Observação 4.1.11, temos  $(a + 1, 1) \in L(g_i, \mu_i)$  para cada  $i \geq i_0$ , e sendo  $\mu_{i+1} > \mu_i$  temos que

$$(a + 1, 1) \in L(g_{i+1}, \mu_{i+1}) \text{ implica que } (a + \mu_i + 1, 0) \notin \Delta(g_{i+1}),$$

pois caso contrário teríamos  $(a + 1, 1) \in L(g_{i+1}, \mu_i)$ .

Dessa forma, o termo de bigrau  $(a + 1 + \mu_i, 0)$  deve se anular pela transformada de  $g_i$ . Isto acontece se existe um termo  $Cx^{a+\mu_i+1}$  em  $g_i$ , com  $C$  não nulo, cuja transformada é o próprio, e

$$B^{(0)}c_i + C = 0.$$

Portanto, o coeficiente de  $(a + \mu_i + 1, 0)$  é não nulo em  $g_i$ . □

Observe que  $(a + 1, 1)$  e  $(a + \mu_i + 1, 0)$  são os únicos pontos de  $\Delta(g_i)$  em  $L(g_i, \mu_i)$ . Além disso, o polinômio característico associado a tal lado é dado por

$$\varphi_{(f_i, \mu_i)} = B^{(0)}c + C,$$

cuja única raiz é

$$c = -\frac{C}{B^{(0)}} = c_i.$$



## 4.2. A CONVERGÊNCIA DA SOLUÇÃO

---

Aplicando o algoritmo de Newton-Puiseux para a função formal  $g_{i_0}$ , obtemos

$$z_{i_0} = \sum_{i=i_0}^{\infty} c_i x^i,$$

uma solução de  $g_{i_0}(x, y)$ . Note que

$$\text{ord}_x(g_{i_0}[c_{i_0}x^{\mu_{i_0}}]) = \text{ord}_x(g_{i_0+1}[0]) \geq a + 1 + \mu_i. \quad (4.8)$$

Da Observação 4.1.12, se temos que  $g_i \in C_q$ , para algum natural  $q$  e  $i = 0, \dots, i_0$ . Além disso,

$$\mu_i \in \frac{\mathbb{N}}{q},$$

para  $i = 0, \dots, i_0 - 1$ . Como  $(a + 1, 1), (a + 1 + \mu_i, 0) \in \Delta(g_i)$  para cada  $i \geq i_0$ , temos

$$a + 1 = \frac{z_1}{q} \quad \text{e} \quad a + 1 + \mu_i = \frac{z_2}{q},$$

com  $z_1 < z_2$ . Conseqüentemente,

$$\mu_i = (a + 1 + \mu_i) - (a + 1) = \frac{z_2 - z_1}{q} \in \frac{\mathbb{N}}{q}.$$

Pelo Lema 4.1.13, temos  $g_i \in C_q$ , e

$$\mu_i \in \frac{\mathbb{N}}{q},$$

para cada  $i \geq 0$ . Uma vez que  $\mu_{i+1} > \mu_i$ , temos que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_i = \infty.$$

Pela equação (4.8), segue que  $z_{i_0}$  é uma solução formal de  $g_{i_0}$ .

Por outro lado, analisando os polígonos de Newton de  $f_i$  e  $g_i$ , segue que

$$\text{ord}_x([f_i = 0]) \geq \text{ord}_x([g_i = 0]),$$

veja a Figura 4.1. Isto significa que  $z_{i_0}$  é uma solução formal de  $f_{i_0}$ . Logo,  $z$  é solução formal de  $f_\omega$  e o resultado está provado.  $\square$

Em suma, mostramos que a série obtida pelo algoritmo de Newton-Puiseux é dada por  $z = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{i/q}$ , e é de fato uma solução formal de  $(f_\omega = 0)$ . Pela afirmação 2.1.6, segue que a curva parametrizada  $(t^q, z(t^q))$  é uma solução da forma Pfaffiana. No próximo capítulo vamos mostrar que tal solução é convergente.

## 4.2 A convergência da solução

Na seção anterior, mostramos que o algoritmo proposto produz, de fato, uma solução do polinômio diferencial  $f_\omega$  e conseqüentemente, da forma Pfaffiana. Nesta seção, vamos mostrar que a solução produzida é analítica, caso a forma  $\omega$  seja analítica.

## 4.2. A CONVERGÊNCIA DA SOLUÇÃO

---

**Definição 4.2.1.** Seja  $A(x, y) \in \mathbb{C}[[x^{1/q}, y]]$  uma série fracionária em  $x$ , e  $q \in \mathbb{N}$ . Dizemos que  $A$  é *convergente* se  $A(t^q, y) \in \mathbb{C}\{t, y\}$ . Se  $f = A(x, y) + B(x, y)y' \in C_q$ , dizemos que  $f$  é *convergente* se  $A$  e  $B$  o são.

Observe que estamos fazendo a correspondência  $t = x^{1/q}$ , ou seja,  $t^q = x$ .

**Definição 4.2.2.** Seja  $q \in \mathbb{N} - \{0\}$ . Definimos o  $q$ -*polinômio associado a  $f$*  por

$$\Lambda_q(f) = t^{q-1}A(t^q, y) + \frac{1}{q}B(t^q, y)y'.$$

**Observação 4.2.3.** O binômio diferencial associado ao  $q$ -polinômio é dado por

$$M_{\alpha\beta}(\Lambda_q(f)) = t^{q-1}A_{\alpha\beta}t^{q\alpha}y^\beta + \frac{1}{q}B_{\alpha\beta}t^{q(\alpha+1)}y^{\beta-1}y'.$$

**Observação 4.2.4.** Uma série  $z(t)$  é uma solução do  $q$ -polinômio associado a  $f$  se

$$\Lambda_q(f)[z] = t^{q-1}A(t^q, z(t)) + \frac{1}{q}B(t^q, z(t))\frac{dz}{dt} = 0.$$

Listamos algumas propriedades do  $q$ -polinômio associado a  $f$ , denotado por  $\Lambda_q(f)$ .

**Propriedade 4.2.5.** Se  $z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^{i/q}$  é solução de  $f$ , então  $\bar{z} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i t^i$  é uma solução de  $\Lambda_q(f)$ .

*Demonstração.* Seja  $z(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^{i/q}$  uma solução de  $(f = 0)$ , então

$$A(x, z(x)) + B(x, z(x))\frac{dz}{dx} = 0.$$

Uma vez que estamos fazendo a mudança de variável de  $x$  para  $t$  tal que  $x = t^q$ , temos:

$$A(t^q, z(t^q)) + B(t^q, z(t^q))\frac{dz}{dx} = 0.$$

Como

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \frac{dx}{dt},$$

temos que

$$A(t^q, z(t^q)) + B(t^q, z(t^q))\frac{dz/dt}{dx/dt} = 0.$$

Observe que  $z(t^q) = \bar{z}(t)$  e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\bar{z}}{dt}.$$

Então

$$A(t^q, \bar{z}(t)) + B(t^q, \bar{z}(t)) \left( \frac{d\bar{z}/dt}{qt^{q-1}} \right) = 0,$$

isto é,

$$\frac{1}{t^{q-1}}(t^{q-1}A(t^q, \bar{z}(t)) + \frac{1}{q}B(t^q, \bar{z}(t))(d\bar{z}/dt) = 0.$$

Logo,

$$\Lambda_q(f) = t^{q-1}A(t^q, \bar{z}) + \frac{1}{q}B(t^q, \bar{z})\frac{d\bar{z}}{dt} = 0,$$

ou seja,  $\bar{z}$  é uma solução de  $\Lambda_q(f)$ . □

**Propriedade 4.2.6.** Se  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dada por  $\varphi(x, y) = (qx + q - 1, y)$ , então

$$\varphi(N(f)) = N(\Lambda_q(f)),$$

onde  $f \in C_q$ .

*Demonstração.* Seja  $f \in C_q$  tal que  $f = \sum M_{\alpha\beta}(f)$ , onde  $M_{\alpha\beta}(f)$  é o binômio diferencial de  $f$  associado a  $(\alpha, \beta)$ . O binômio diferencial de  $\Lambda_q(f)$  é

$$M_{\alpha\beta}(\Lambda_q(f)) = A_{\alpha\beta}t^{q-1+q\alpha}y^\beta + \frac{1}{q}B_{\alpha\beta}t^{q\alpha+q}y^{\beta-1}y'.$$

Note que para cada bigrau  $(\alpha, \beta) \in \Delta(f)$ , associamos um bigrau  $(\alpha', \beta') = (q\alpha + q - 1, \beta) = \varphi(\alpha, \beta)$  em  $\Delta(\Lambda_q(f))$ , uma vez que os coeficientes de ambos estão relacionados. Como  $\varphi$  é uma aplicação bijetiva, segue que existe uma correspondência biunívoca entre  $\Delta(f)$  e  $\Delta(\Lambda_q(f))$ , donde

$$\varphi(\Delta(f)) = \Delta(\Lambda_q(f)).$$

Como  $\varphi$  é uma aplicação bijetiva que possui efeito somente nas abcissas e mantendo a ordenada, segue que pontos de  $N(f)$  somente geram pontos de  $N(\Lambda_q(f))$ . Conseqüentemente,

$$\varphi(N(f)) = N(\Lambda_q(f)).$$
□

**Observação 4.2.7.** Como  $\varphi$  é uma bijeção e  $\varphi(\Delta(f)) = \Delta(\Lambda_q(f))$ , observe que os coeficientes de  $(\alpha, \beta)$  e  $\varphi(\alpha, \beta)$  estão relacionados da seguinte forma:

$$A_{\varphi(\alpha,\beta)} = A_{\alpha\beta} \quad \text{e} \quad B_{\varphi(\alpha,\beta)} = \frac{B_{\alpha\beta}}{q}.$$

**Propriedade 4.2.8.** Os lados dos polígonos  $N(f)$  e  $N(\Lambda_q(f))$  possuem uma correspondência bijetiva e as coinclições são multiplicadas por  $q$ .

*Demonstração.* Seja  $L$  um lado de  $N(f)$  com coinclição  $\mu$ , no qual  $(a, b)$  e  $(c, d)$  são respectivamente os pontos mais alto e mais baixo de  $L$ . Pela Propriedade 4.2.6, temos que  $\varphi(N(f)) = N(\Lambda_q(f))$ , e  $\varphi$  é uma correspondência bijetiva entre os lados destes polígonos. Isto

## 4.2. A CONVERGÊNCIA DA SOLUÇÃO

---

significa que  $\varphi(L)$  é um lado de  $N(\Lambda_q(f))$ , cujos pontos extremos são respectivamente

$$\varphi(a, b) = (qa + q - 1, b) \quad \text{e} \quad \varphi(c, d) = (qc + q - 1, d).$$

Como a coincinação de  $L$  é  $\mu$ , temos que

$$-\frac{1}{\mu} = \frac{b-d}{a-c}.$$

Então, note que a inclinação  $\lambda$  de  $\varphi(L)$  é dada por

$$\lambda = \frac{b-d}{(qa+q-1)-(qc+q-1)} = \frac{b-d}{q(a+c)} = -\frac{1}{q} \frac{b-d}{a-c} = -\frac{1}{q\mu}.$$

Logo, a coincinação de  $\varphi(L)$  é  $q\mu$ , como queríamos demonstrar. □

**Propriedade 4.2.9.** Para todo  $\mu \in \mathbb{Q}_+$ , temos que

$$\varphi_{(f,\mu)}(c) = \varphi_{(\Lambda_q(f),q\mu)}(c),$$

isto é, os polinômios característicos correspondentes de  $f$  e  $\Lambda_q(f)$  coincidem.

*Demonstração.* Seja  $L(f, \mu)$  a reta distinguida de coincinação  $\mu$  e o polinômio característico associado

$$\varphi_{(f,\mu)}(c) = \sum_{(\alpha,\beta) \in L(f,\mu)} (A_{\alpha\beta} + \mu B_{\alpha\beta}) c^\beta.$$

Pela Propriedade 4.2.8, segue que  $\varphi(L(f, \mu)) = L(\Lambda_q(f), q\mu)$ , isto é,

$$\varphi(\alpha, \beta) \in L(\Lambda_q(f), q\mu) \quad \text{se, e somente se,} \quad (\alpha, \beta) \in L(f, \mu).$$

Pela Observação 4.2.7, temos que

$$A_{\varphi(\alpha,\beta)} = A_{\alpha\beta} \quad \text{e} \quad B_{\varphi(\alpha,\beta)} = \frac{B_{\alpha\beta}}{q}.$$

Assim,

$$\varphi_{(f,\mu)}(c) = \sum_{\varphi(\alpha,\beta) \in L(\Lambda_q(f),q\mu)} (A_{\varphi(\alpha\beta)} + q\mu B_{\varphi(\alpha\beta)}) c^\beta.$$

Logo,

$$\varphi_{(f,\mu)}(c) = \varphi_{(\Lambda_q(f),q\mu)}(c).$$

□

**Propriedade 4.2.10.** Seja  $L$  um lado de  $N(f)$ . Então,

$$i) (a, L)_f \iff (a, \varphi(L))_{\Lambda_q(f)}.$$

## 4.2. A CONVERGÊNCIA DA SOLUÇÃO

$$ii) (b, L)_f \iff (b, \varphi(L))_{\Lambda_q(f)}.$$

*Demonstração.* *i)* Seja  $L$  um lado de  $N(f)$  com coincidência  $\mu$ . Se  $(\alpha, \beta)$  é o ponto mais alto de  $L$ , a propriedade  $(a, L)_f$  diz que

$$B_{\alpha\beta} \neq 0 \quad \text{e} \quad -\frac{A_{\alpha\beta}}{B_{\alpha\beta}} \notin \mathbb{Q}_{(\geq \mu)}.$$

Note que  $\varphi(L)$  é o lado de  $N(\Lambda_q(f))$  cujo ponto mais alto é  $\varphi(\alpha, \beta)$ . Pela Observação 4.2.7, segue que

$$B_{\varphi(\alpha, \beta)} \neq 0 \quad \text{e} \quad -\frac{A_{\varphi(\alpha, \beta)}}{B_{\varphi(\alpha, \beta)}} < q\mu,$$

isto é,

$$B_{\varphi(\alpha, \beta)} \neq 0 \quad \text{e} \quad -\frac{A_{\varphi(\alpha, \beta)}}{B_{\varphi(\alpha, \beta)}} \notin \mathbb{Q}_{(\geq q\mu)},$$

que são as condições de  $(a, \varphi(L))_{\Lambda_q(f)}$ . Logo,  $(a, L)_f$  é equivalente a  $(a, \varphi(L))_{\Lambda_q(f)}$ .

*ii)* Note que  $(b, L)_f$  é satisfeito se, e somente se,

$$A_{\alpha\beta} + \mu B_{\alpha\beta} \neq 0.$$

Pela Observação 4.2.7, isto é equivalente a

$$A_{\varphi(\alpha, \beta)} + q\mu B_{\varphi(\alpha, \beta)} \neq 0.$$

Logo,  $(b, L)_f$  é equivalente a  $(a, \varphi(L))_{\Lambda_q(f)}$ . □

**Propriedade 4.2.11.** Seja  $f \in C_q$ . Para todo  $c \in \mathbb{C}$  e  $\mu \in \mathbb{Q}_+$ , temos

$$\Lambda_q(f[cx^\mu + y]) = \Lambda_q(f)[ct^{q\mu} + y],$$

isto é, o  $q$ -polinômio associado à transformada  $cx^\mu + y$  é o  $q$ -polinômio associado a  $f$ , transformado por  $ct^{q\mu} + y$ .

*Demonstração.* Seja  $f \in C_q$ . Considere o binômio diferencial de  $f$  dado por

$$M_{\alpha\beta}(f) = A_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta + B_{\alpha\beta}x^{\alpha+1}y^{\beta-1}y'.$$

Considere  $c \in \mathbb{C}$  e  $\mu \in \mathbb{Q}_+$  e o binômio diferencial transformado por  $cx^\mu + y$ , isto é,

$$M_{\alpha\beta}(f[cx^\mu + y]) = A_{\alpha\beta}x^\alpha (cx^\mu + y)^\beta + B_{\alpha\beta}x^{\alpha+1}(cx^\mu + y)^{\beta-1}(c\mu x^{\mu-1} + y'),$$

ou melhor,

$$M_{\alpha\beta}(f[cx^\mu + y]) = A_{\alpha\beta}x^\alpha (cx^\mu + y)^\beta + c\mu B_{\alpha\beta}x^{\alpha+\mu}(cx^\mu + y)^{\beta-1} + B_{\alpha\beta}x^{\alpha+1}(cx^\mu + y)^{\beta-1}y'.$$

## 4.2. A CONVERGÊNCIA DA SOLUÇÃO

Assim, pela definição, o binômio diferencial do  $q$ -polinômio associado é dado por

$$M_{\alpha\beta}(\Lambda_q(f[cx^\mu + y])) = t^{q-1}A_{\alpha\beta}t^{q\alpha}(ct^{q\mu} + y)^\beta + t^{q-1}B_{\alpha\beta}c\mu t^{q(\alpha+\mu)}(ct^{q\mu} + y)^{\beta-1} \\ + \frac{1}{q}B_{\alpha\beta}t^{q(\alpha+1)}(ct^{q\mu} + y)^{\beta-1}y', \quad (4.9)$$

Por outro lado, o binômio diferencial associado a  $\Lambda_q(f)$  de bigrau  $\varphi(\alpha, \beta)$  é da forma

$$M_{\varphi(\alpha,\beta)}(\Lambda_q(f)) = A_{\alpha\beta}t^{q-1}t^{q\alpha}y^\beta + \frac{1}{q}B_{\alpha\beta}t^{q(\alpha+1)}y^{\beta-1}y'.$$

Fazendo a substituição de  $y$  por  $(ct^{q\mu} + y)$ , observe que

$$M_{\varphi(\alpha,\beta)}(\Lambda_q(f))[ct^{q\mu} + y] = A_{\alpha\beta}t^{q-1}t^{q\alpha}(ct^{q\mu} + y)^\beta + \frac{1}{q}B_{\alpha\beta}t^{q(\alpha+1)}(ct^{q\mu} + y)^{\beta-1}(c\mu t^{q\mu-1} + y'),$$

isto é,

$$M_{\alpha\beta}(\Lambda_q(f))[ct^{q\mu} + y] = A_{\alpha\beta}t^{q-1}t^{q\alpha}(ct^{q\mu} + y)^\beta + c\mu B_{\alpha\beta}t^{q(\alpha+1)+q\mu-1}(ct^{q\mu} + y)^{\beta-1} \\ + \frac{1}{q}B_{\alpha\beta}t^{q(\alpha+1)}(ct^{q\mu} + y)^{\beta-1}y'. \quad (4.10)$$

Considerando todos os bi-índices, as equações (4.9) e (4.10) implicam que os respectivos binômios diferenciais coincidem, o que significa que

$$\Lambda_q(f[cx^\mu + y]) = \Lambda_q(f)[ct^{q\mu} + y].$$

□

As propriedades anteriores são importantes ferramentas para o estudo da convergência de uma solução de  $(f_\omega = 0)$  obtida pelo algoritmo de Newton-Puiseux, uma vez que relacionam os objetos envolvidos no algoritmo com os objetos associados ao  $q$ -polinômio.

**Observação 4.2.12.** Seja uma solução fracionária  $z = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{i/q}$ , com  $q \in \mathbb{N}$ , obtida no Teorema 4.1.14. Na seção anterior mostramos que  $f_i \in C_q$ , para todo  $i \geq 0$ . No entanto, pelas propriedades anteriores, os objetos utilizados no algoritmo estão todos relacionados pela mudança de variável  $x = t^q$  e o  $q$ -polinômio associado. Sendo assim, podemos trabalhar com uma solução não fracionária, isto é,

$$z = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i.$$

**Observação 4.2.13.** Seja  $z = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$  uma solução não fracionária de  $(f_\omega = 0)$ . Suponha que o ponto pivô seja  $Q_{i_0} = (a, 1)$ , com índice estacionário igual a  $i_0$ . Considere  $A^{(0)}$  e  $B^{(0)}$  os respectivos coeficientes de  $x^a y$  e  $x^{a+1} y'$ , na  $i_0$ -ésima etapa do algoritmo. Observe que

$$f_i = f[c_1 x + \cdots + c_{i-1} x^{i-1} + y],$$

com  $i \geq i_0$ . Nessas condições,  $L(f_i, i)$  é o lado principal de  $N(f_i)$ , do qual o ponto mais alto é

## 4.2. A CONVERGÊNCIA DA SOLUÇÃO

---

( $a, 1$ ). Então, por  $(a, L)_f$ , temos

$$B^{(0)} \neq 0 \quad \text{e} \quad A^{(0)} + jB^{(0)} \neq 0, \quad (4.11)$$

para  $j \geq i$ .

**Observação 4.2.14.** Observe que, se o quociente

$$\left| \frac{i}{A^{(0)} + iB^{(0)}} \right|$$

for ilimitado, teríamos

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{A^{(0)} + iB^{(0)}}{i} \right| = \lim_{i \rightarrow \infty} \left| \frac{A^{(0)}}{i} + B^{(0)} \right| = 0,$$

isto é,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} |B^{(0)}| = 0,$$

uma contradição. Logo existe  $k_1 \in \mathbb{N}$  tal que

$$\left| \frac{i}{A^{(0)} + iB^{(0)}} \right| < k_1,$$

para todo  $i$ .

Suponha que tenhamos um processo de transformadas com índice estacionário  $i_0$  e ponto pivô  $Q = (a, 1)$ . Para  $i \geq i_0$ , definimos agora uma família de polinômios que serão úteis no estudo da convergência da solução. Para tanto, considere os seguintes conjuntos:

$$N_1 = N(f_{i_0}) \cap \mathbb{N}^2 \quad \text{e} \quad N_2 = N(f_{i_0}) \cap \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 \mid \alpha \geq -1, \beta \geq 1\}.$$

**Definição 4.2.15.** Para  $j = 1, 2, 3$ , os polinômios  $H_{i+1}^{(j)} \in \mathbb{N}[c_{i_0}, \dots, c_i, \{T_{\alpha\beta}\}_{(\alpha,\beta) \in N_j}][[x, y, y']]$  são dados por

$$\begin{aligned} H_{i+1}^{(1)} &= \sum_{(\alpha,\beta) \in N_1} T_{\alpha\beta} x^\alpha (c_{i_0} x^{i_0} + \dots + c_i x^i + y)^\beta \\ H_{i+1}^{(2)} &= \sum_{(\alpha,\beta) \in N_2} T_{\alpha\beta} x^{\alpha+1} (c_{i_0} x^{i_0} + \dots + c_i x^i + y)^{\beta-1} (i_0 c_{i_0} x^{i_0-1} + \dots + i c_i x^{i-1} + y') \\ H_{i+1}^{(3)} &= \sum_{(\alpha,\beta) \in N_2} T_{\alpha\beta} x^{\alpha+1} (c_{i_0} x^{i_0} + \dots + c_i x^i + y)^{\beta-1} (c_{i_0} x^{i_0-1} + \dots + c_i x^{i-1} + y'). \end{aligned}$$

Em cada polinômio definido acima, o coeficiente de  $x^{a+i+1}$  é dado por um polinômio nas variáveis  $c_j$  e  $T_{\alpha\beta}$ , o qual definimos a seguir.

**Definição 4.2.16.** O coeficiente de  $x^{a+i+1}$  em  $H_{i+1}^{(j)}$  é dado por

$$\text{Coef } f_{x^{a+i+1}}(H_{i+1}^{(j)}) = P_{i+1}^{(j)}(c_{i_0}, \dots, c_i, \{T_{\alpha\beta}\}). \quad (4.12)$$

$j = 1, 2, 3$ .

**Observação 4.2.17.** Observe que, quando  $y = y' = 0$ , temos

$$xH_i^{(3)}(c_{i_0}, \dots, c_{i-1}, \{T_{\alpha\beta}\}) = \sum_{(\alpha,\beta) \in N_2} T_{\alpha\beta} x^{\alpha+1} (c_{i_0} x^{i_0} + \dots + c_i x^{i-1})^{\beta-1} (c_{i_0} x^{i_0} + \dots + c_i x^{i-1}),$$

isto é,

$$xH_i^{(3)}(c_{i_0}, \dots, c_{i-1}, \{T_{\alpha\beta}\}) = \sum_{(\alpha,\beta) \in N_2} T_{\alpha\beta} x^{\alpha+1} (c_{i_0} x^{i_0} + \dots + c_i x^i)^\beta.$$

**Afirmção 4.2.18.** Os coeficientes de  $P_{i+1}^{(2)}$  são menores em módulo que os coeficientes correspondentes no polinômio  $iP_{i+1}^{(3)}$ .

*Demonstração.* Por definição,  $P_{i+1}^{(2)}$  é o coeficiente de  $x^{a+i+1}$  em  $H_{i+1}^{(2)}$ , que é escrito como

$$P_{i+1}^{(2)}(c_{i_0}, \dots, c_i, \{T_{\alpha\beta}\}) = \sum_{(\alpha,\beta)} j B_{(\alpha,\beta,d_{i_0}, \dots, d_i)} T_{\alpha\beta} c_{i_0}^{d_{i_0}} \dots c_i^{d_i}$$

para  $j \leq i$ , onde  $B_{(\alpha,\beta,d_{i_0}, \dots, d_i)}$  é um coeficiente binomial e  $d_j$  é um expoente não negativo.

Por outro lado,  $P_{i+1}^{(3)}$  é o coeficiente de  $x^{a+i+1}$  em  $H_{i+1}^{(3)}$ , que é escrito como somatório de monômios cujos bi-índices são correspondentes aos de  $P_{i+1}^{(2)}$ , isto é,

$$P_{i+1}^{(3)}(c_{i_0}, \dots, c_i, \{T_{\alpha\beta}\}) = \sum_{(\alpha,\beta)} B_{(\alpha,\beta,d_{i_0}, \dots, d_i)} T_{\alpha\beta} c_{i_0}^{d_{i_0}} \dots c_i^{d_i}.$$

Temos

$$iP_{i+1}^{(3)}(c_{i_0}, \dots, c_i, \{T_{\alpha\beta}\}) = \sum_{(\alpha,\beta)} i B_{(\alpha,\beta,d_{i_0}, \dots, d_i)} T_{\alpha\beta} c_{i_0}^{d_{i_0}} \dots c_i^{d_i},$$

e como  $j \leq i$ , segue que os coeficientes de  $P_{i+1}^{(2)}$  são menores que os coeficientes correspondentes no polinômio  $iP_{i+1}^{(3)}$ .  $\square$

Seja  $\varphi(x, w) \in \mathbb{C}\{x, w\}$ , uma função formal dada por

$$\varphi(x, w) = x \sum_{(\alpha,\beta) \in N'_1} |A_{\alpha\beta}| x^\alpha y^\beta + \sum_{(\alpha,\beta) \in N'_2} |B_{\alpha\beta}| x^{\alpha+1} y^\beta, \quad (4.13)$$

onde  $N'_j = N_j \setminus \{(a, 1), (a + i_0, 0)\}$ , com  $j = 1, 2$ .

**Observação 4.2.19.** Observe que  $\varphi(x, w)$  define uma curva analítica, uma vez que  $f$  é uma curva analítica.

Defina a variável

$$w_0 = \sum_{j=i_0}^{i-1} c'_j x^j,$$



## 4.2. A CONVERGÊNCIA DA SOLUÇÃO

---

onde  $c'_j$  são coeficientes quaisquer, e escreva

$$\varphi_1(x, y) = x \sum_{(\alpha, \beta) \in N'_1} |A_{\alpha\beta}| x^\alpha y^\beta \quad \text{e} \quad \varphi_2(x, y) = \sum_{(\alpha, \beta) \in N'_2} |B_{\alpha\beta}| x^{\alpha+1} y^\beta.$$

Observe que

$$\text{Coeff}_{x^{a+i+1}}(\varphi(x, w_0)) = \text{Coeff}_{x^{a+i+1}}(\varphi_1(x, w_0)) + \text{Coeff}_{x^{a+i+1}}(\varphi_2(x, w_0)).$$

Pela definição dos polinômios  $H_{i+1}^{(j)}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , é fácil ver que os pontos  $(a, 1)$  e  $(a + i_0, 0)$  não podem contribuir para o coeficiente de  $x^{a+i+1}$  em  $\varphi$ . De um lado, temos

$$\begin{aligned} \text{Coeff}_{x^{a+i+1}}(\varphi_1(x, w_0)) &= \text{Coeff}_{x^{a+i+1}}(xH_i^{(1)}(c'_{i_0}, \dots, c'_{i-1}, \{|A_{\alpha\beta}|\})) \\ &= \text{Coeff}_{x^{a+i}}(H_i^{(1)}(c'_{i_0}, \dots, c'_{i-1}, \{|A_{\alpha\beta}|\})) \\ &= P_i^{(1)}(c'_{i_0}, \dots, c'_{i-1}, \{|A_{\alpha\beta}|\}). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Por outro, segue da Observação 4.2.17, que

$$\text{Coeff}_{x^{a+i+1}}(\varphi_2(x, w_0)) = \text{Coeff}_{x^{a+i+1}}(xH_i^{(3)}(c'_{i_0}, \dots, c'_{i-1}, \{|B_{\alpha\beta}|\})),$$

quando  $y = y' = 0$ . Assim,

$$\begin{aligned} \text{Coeff}_{x^{a+i+1}}(\varphi_2(x, w_0)) &= \text{Coeff}_{x^{a+i+1}}(xH_i^{(3)}(c'_{i_0}, \dots, c'_{i-1}, \{|B_{\alpha\beta}|\})) \\ &= P_i^{(3)}(c'_{i_0}, \dots, c'_{i-1}, \{|B_{\alpha\beta}|\}). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Portanto, de (4.14) e (4.15), segue que

$$\text{Coeff}_{x^{a+i+1}}(\varphi(x, w_0)) = P_i^{(1)}(c'_{i_0}, \dots, c'_{i-1}, \{|A_{\alpha\beta}|\}) + P_i^{(3)}(c'_{i_0}, \dots, c'_{i-1}, \{|B_{\alpha\beta}|\}) \quad (4.16)$$

para cada  $i \geq i_0$ .

**Afirmção 4.2.20.**  $\text{Coeff}_{x^{a+i+1}}(\varphi(x, \sum_{j=i_0}^{\infty} c'_j x^j)) = \text{Coeff}_{x^{a+i+1}}(\varphi(x, \sum_{j>i_0}^{i-1} c'_j x^j))$ .

*Demonstração.* Seja  $L_{i_0} = L(f_{i_0}, i_0)$ , o lado principal de  $N(f_{i_0})$ , o qual contém os pontos  $(a, 1)$  e  $(a + i_0, 0)$ . Observe que como  $N'_j = N_j \setminus \{(a, 1), (a + i_0, 0)\}$ , segue que os pontos de  $N'_j$  correspondem aos pontos localizados acima da reta que contém  $L_{i_0}$ , isto é,

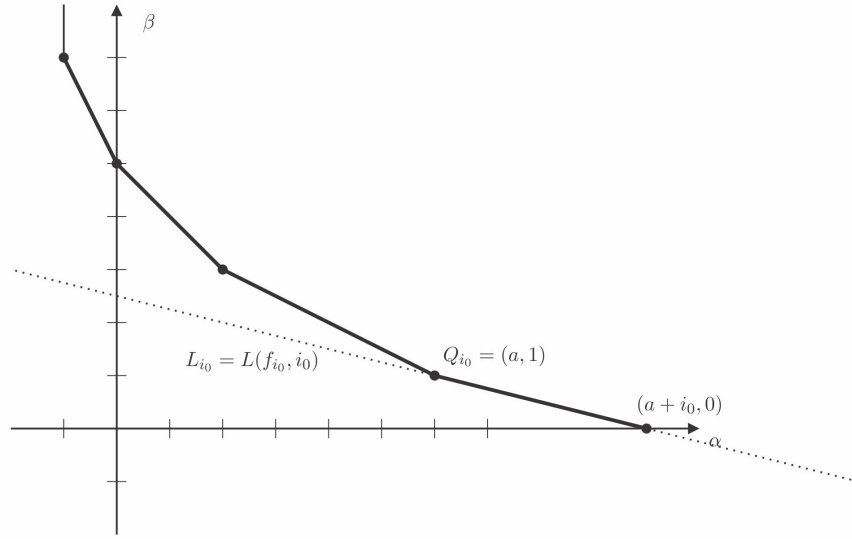
$$\beta i_0 > -\alpha + (a + i_0). \quad (4.17)$$

Além disso, temos que  $\beta > 1$ , pela definição de  $N'_1$  e  $N'_2$ . Defina as variáveis

$$w_i = \sum_{j=i_0}^i c'_j x^j \quad \text{e} \quad w_{i-1} = \sum_{j>i_0}^{i-1} c'_j x^j.$$

Para mostrar o resultado, basta mostrar que

$$\text{Coeff}_{x^{a+i+1}}(\varphi(x, w_i)) = \text{Coeff}_{x^{a+i+1}}(\varphi(x, w_{i-1})), \quad (4.18)$$



**Figura 4.2:** Polígono de Newton de  $f_{i_0}$ .

ou seja, a introdução de termos com ordens maiores ou iguais a  $i$  em  $w_{i-1}$ , não afeta no coeficiente de  $x^{a+i+1}$ . Como  $i > i_0$ , digamos  $i = i_0 + l$ , para  $l \in \mathbb{N}$  e considere

$$\varphi(x, w_i) = x \sum_{(\alpha, \beta) \in N'_1} |A_{\alpha\beta}| x^\alpha w_i^\beta + \sum_{(\alpha, \beta) \in N'_1} |B_{\alpha\beta}| x^{\alpha+1} w_i^\beta.$$

Observe que os termos de  $\varphi(x, w_i)$  são da forma

$$|C_{\alpha\beta}| x^{\alpha+1} ((c'_{i_0} x^{i_0} + \dots + c'_{i-1} x^{i-1}) + (c'_i x^i))^\beta = |C_{\alpha\beta}| x^{\alpha+1} (w_{i-1} + (c'_i x^i))^\beta,$$

onde  $C_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta}$  ou  $C_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta}$ . Desenvolvendo a potência  $\beta$ , obtemos termos que podem ser classificados em três grupos distintos:

i) Termos da forma

$$|C_{\alpha\beta}| x^{\alpha+1} w_{i-1}^\beta,$$

cujos coeficientes e bi-índices produzidos coincidem com os coeficientes de  $\varphi(x, w_{i-1})$ .

ii) Termos da forma

$$|C_{\alpha\beta}| x^{\alpha+1} (c'_i x^i)^\beta,$$

cujos expoentes da variável  $x$  são dados por:

$$\gamma = \alpha + 1 + \beta i = \alpha + 1 + \beta i_0 + \beta l.$$

Uma vez que  $\beta > 1$  e da equação (4.17), segue que

$$\gamma > a + 1 + i_0 + l > a + i + 1,$$

## 4.2. A CONVERGÊNCIA DA SOLUÇÃO

---

Assim, termos desta forma somente produzem ordens maiores que  $a + i + 1$ .

iii) Termos da forma

$$|C_{\alpha\beta}|x^{\alpha+1}w_{i-1}^k(c'_i x^i)^{\beta-k},$$

para  $0 < k < \beta$ . Observe que os expoentes satisfazem

$$\begin{aligned}\gamma &> \alpha + 1 + (\beta - k)i + ki_0 \\ &= \alpha + 1 + (\beta - k)(i_0 + l) + ki_0 \\ &= \alpha + 1 + (\beta - k)i_0 + (\beta - k)l + ki_0.\end{aligned}$$

Como  $(\beta - k) \geq 1$ , temos que

$$\gamma \geq \alpha + 1 + (\beta - k)i_0 + l + ki_0 = \alpha + 1 + \beta i_0 + l$$

e, de (4.17), temos

$$\gamma > a + i_0 + l + 1 = a + i + 1.$$

Logo, os termos produzidos possuem ordem superior à  $a + i + 1$ .

Mostramos então que a introdução de um termo de ordem  $i$  na variável  $w_{i-1}$  somente afeta os coeficientes de  $\varphi$  de ordem superior a  $a + i + 1$ . Assim, tal introdução não interfere nos coeficientes de  $x^{a+i+1}$  em  $\varphi$ , isto é,

$$\text{Coeff}_{x^{a+i+1}}(\varphi(x, \sum_{j=i_0}^i c'_j x^j)) = \text{Coeff}_{x^{a+i+1}}(\varphi(x, \sum_{j>i_0}^{i-1} c'_j x^j)).$$

O mesmo acontece quando introduzimos termos de ordem maiores que  $i$ , e assim,

$$\text{Coeff}_{x^{a+i+1}}(\varphi(x, \sum_{j=i_0}^{\infty} c'_j x^j)) = \text{Coeff}_{x^{a+i+1}}(\varphi(x, \sum_{j=i_0}^{i-1} c'_j x^j)),$$

para  $i \geq i_0$ , o que mostra nossa afirmação.  $\square$

Na seção anterior, mostramos que o algoritmo de Newton-Puiseux permite exibir uma solução formal  $z$  da equação ( $f_\omega = 0$ ). No entanto, nada sabemos sobre a sua convergência. O resultado abaixo é o principal deste capítulo. Ele prova que a solução  $z$  obtida pelo algoritmo é de fato convergente.

**Teorema 4.2.21.** *Seja  $f_\omega$  o polinômio diferencial associado a  $\omega$ . Assuma que  $\omega$  é convergente e que nem  $(x = 0)$  e nem  $(y = 0)$  são soluções de  $(f_\omega = 0)$ . Então, a solução  $z$  de  $(f_\omega = 0)$  no Teorema 4.1.14 é convergente.*

*Demonstração.* Pela notação do Teorema 4.1.14, segue que existe um inteiro  $q \in \mathbb{N}$ , tal que

## 4.2. A CONVERGÊNCIA DA SOLUÇÃO

---

$z \in \mathbb{C}[[x^{1/q}]]$  e  $f_i \in C_q$  para cada  $i \geq 0$ , isto é,

$$z = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^{i/q}.$$

Pelas propriedades anteriores, podemos assumir, sem perda de generalidade,  $q = 1$  e

$$z = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i.$$

Considere  $Q_{i_0} = (a, b)$  o ponto pivô de  $f$  com respeito a  $z$ . Se  $b \geq 2$ , temos pela demonstração do Teorema 4.1.14 que  $z_{i_0}$  é uma solução de uma curva convergente  $g_{i_0}$ . Do Teorema 1.5.7, segue que  $z_{i_0}$  é convergente, e portanto,  $z$  é convergente. Se  $b = 1$  com índice estacionário igual a  $i_0$ , considere  $Q_{i_0} = (a, 1)$  e  $A^{(0)}$  e  $B^{(0)}$  os respectivos coeficientes de  $x^a y$  e  $x^{a+1} y'$ , na  $i_0$ -ésima etapa.

Sendo

$$N_1 = N(f_{i_0}) \cap \mathbb{N}^2 \quad \text{e} \quad N_2 = N(f_{i_0}) \cap \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 \mid \alpha \geq -1, \beta \geq 1\},$$

escreva

$$f_{i_0}(x, y) = \sum_{(\alpha, \beta) \in N_1} A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta + \sum_{(\alpha, \beta) \in N_2} B_{\alpha\beta} x^{\alpha+1} y^{\beta-1} y'.$$

Pela definição dos polinômios  $H_{i+1}^{(j)}$ , é fácil ver que

$$f_i = H_i^{(1)}(c_{i_0}, \dots, c_{i-1}, \{A_{\alpha\beta}\}_{(\alpha, \beta) \in N_1}) + H_i^{(2)}(c_{i_0}, \dots, c_{i-1}, \{B_{\alpha\beta}\}_{(\alpha, \beta) \in N_2}),$$

e

$$\text{Coef } f_{x^{a+i}}(f_i) = P_i^{(1)}(c_{i_0}, \dots, c_{i-1}, \{A_{\alpha\beta}\}) + P_i^{(2)}(c_{i_0}, \dots, c_{i-1}, \{B_{\alpha\beta}\}), \quad (4.19)$$

sempre que  $i \geq i_0$ . Como o lado principal de  $N(f_i)$  é dado por  $L(f_i, i)$ , temos que

$$A^{(0)} + iB^{(0)} \neq 0 \quad \text{e} \quad B^{(0)} \neq 0,$$

com  $i \geq i_0$ . Pela Observação 4.2.14, existe um natural  $k_1$  tal que

$$\left| \frac{i}{A^{(0)} + iB^{(0)}} \right| < k_1,$$

para todo  $i$ .

Defina os coeficientes  $c'_{i_0}, \dots, c'_i$  da seguinte forma :

$$c'_{i_0} = |c_{i_0}| \quad \text{e} \quad c'_i = k_1 \{P_i^{(1)}(c'_{i_0}, \dots, c'_{i-1}, \{A_{\alpha\beta}\}) + P_i^{(2)}(c'_{i_0}, \dots, c'_{i-1}, \{B_{\alpha\beta}\})\},$$

$i > i_0$ .

**Afirmção 4.2.22.** Para cada  $i \geq i_0$ , temos

$$|c_i| \leq c'_i.$$

## 4.2. A CONVERGÊNCIA DA SOLUÇÃO

*Demonstração.* Procedemos por indução. Para  $i = i_0$ , a afirmação é imediata. Suponha  $i > i_0$  e que

$$|c_j| \leq c'_j,$$

para  $j = i_0, \dots, i-1$ . Observe que pela equação (4.6), temos

$$c_i = \frac{\text{Coeff}_{x^{a+i}}(f_i)}{A^{(0)} + iB^{(0)}}.$$

Então, de (4.19)

$$\begin{aligned} |c_i| &= \frac{|\text{Coeff}_{x^{a+i}}(f_i)|}{|A^{(0)} + iB^{(0)}|} = \frac{|P_i^{(1)}(c_{i_0}, \dots, c_{i-1}, \{A_{\alpha\beta}\}) + P_i^{(2)}(c_{i_0}, \dots, c_{i-1}, \{B_{\alpha\beta}\})|}{|A^{(0)} + iB^{(0)}|} \\ &\leq \frac{|P_i^{(1)}(c_{i_0}, \dots, c_{i-1}, \{A_{\alpha\beta}\})| + |P_i^{(2)}(c_{i_0}, \dots, c_{i-1}, \{B_{\alpha\beta}\})|}{|A^{(0)} + iB^{(0)}|}, \end{aligned}$$

e, como  $c_j \leq |c_j|$  para cada  $j$ , segue que

$$|c_i| \leq \frac{|P_i^{(1)}(|c_{i_0}|, \dots, |c_{i-1}|, \{|A_{\alpha\beta}\})| + |P_i^{(2)}(|c_{i_0}|, \dots, |c_{i-1}|, \{|B_{\alpha\beta}\})|}{|A^{(0)} + iB^{(0)}|}.$$

Pela Afirmação 4.2.18, temos

$$\begin{aligned} |c_i| &\leq \frac{P_i^{(1)}(|c_{i_0}|, \dots, |c_{i-1}|, \{|A_{\alpha\beta}\}) + iP_i^{(3)}(|c_{i_0}|, \dots, |c_{i-1}|, \{|B_{\alpha\beta}\})}{|A^{(0)} + iB^{(0)}|} \\ &\leq \frac{iP_i^{(1)}(|c_{i_0}|, \dots, |c_{i-1}|, \{|A_{\alpha\beta}\}) + iP_i^{(3)}(|c_{i_0}|, \dots, |c_{i-1}|, \{|B_{\alpha\beta}\})}{|A^{(0)} + iB^{(0)}|} \\ &\leq k_1\{P_i^{(1)}(|c_{i_0}|, \dots, |c_{i-1}|, \{|A_{\alpha\beta}\}) + P_i^{(3)}(|c_{i_0}|, \dots, |c_{i-1}|, \{|B_{\alpha\beta}\})\}. \end{aligned}$$

Uma vez que  $|c_j| < c'_j$  para  $j = i_0, \dots, i-1$ , temos

$$|c_i| \leq k_1\{P_i^{(1)}(c'_{i_0}, \dots, c'_{i-1}, \{|A_{\alpha\beta}\}) + P_i^{(3)}(c'_{i_0}, \dots, c'_{i-1}, \{|B_{\alpha\beta}\})\} = c'_i,$$

o que demonstra o resultado. □

Defina a seguinte função formal

$$\psi(x, w) = -x^{a+1}w + |c_{i_0}|x^{a+i_0+1} + k_1\varphi(x, w),$$

onde  $\varphi$  é a função formal definida em (4.13). Seja  $z_1 = \sum_{j=i_0}^{\infty} c'_j x^j$  e observe que

$$\begin{aligned} \psi(x, z_1) &= -x^{a+1}z_1 + |c_{i_0}|x^{a+i_0+1} + k_1\varphi(x, z_1) \\ &= -c'_{i_0}x^{a+1+i_0} - x^{a+1}\left(\sum_{j=i_0+1}^{\infty} c'_j x^j\right) + |c_{i_0}|x^{a+i_0+1} + k_1\varphi\left(x, \sum_{j=i_0}^{\infty} c'_j x^j\right). \end{aligned}$$

## 4.2. A CONVERGÊNCIA DA SOLUÇÃO

---

Como  $c'_{i_0} = |c_{i_0}|$ , temos que

$$\psi(x, z_1) = -x^{a+1} \left( \sum_{j=i_0+1}^{\infty} c'_j x^j \right) + k_1 \varphi(x, \sum_{j=i_0}^{\infty} c'_j x^j).$$

Para  $i > i_0$ , temos

$$\text{Coef}f_{x^{a+i+1}}(\psi(x, z_1)) = \text{Coef}f_{x^{a+i+1}} \left( -x^{a+1} \left( \sum_{j=i_0+1}^{\infty} c'_j x^j \right) \right) + k_1 \text{Coef}f_{x^{a+i+1}} \left( \varphi(x, \sum_{j=i_0}^{\infty} c'_j x^j) \right),$$

e da Afirmação 4.2.20, segue que

$$\text{Coef}f_{x^{a+i+1}}(\psi(x, z_1)) = -c'_i + k_1 \text{Coef}f_{x^{a+i+1}} \left( \varphi(x, \sum_{i=i_0}^{i-1} c'_i x^i) \right).$$

Por (4.16), temos

$$\begin{aligned} \text{Coef}f_{x^{a+i+1}}(\varphi(x, \sum_{i=i_0}^{i-1} c'_i x^i)) &= P_i^{(1)}(c'_{i_0}, \dots, c'_{i-1}, \{|A_{\alpha\beta}|\}) + P_i^{(3)}(c'_{i_0}, \dots, c'_{i-1}, \{|B_{\alpha\beta}|\}) \\ &= \frac{c'_i}{k_1}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\text{Coef}f_{x^{a+i+1}}(\psi(x, z_1)) = c'_i + k_1 \frac{c'_i}{k_1} = 0. \quad (4.20)$$

Observe que os expoentes de  $\varphi$  são todos maiores que  $a + i_0 + 1$ , uma vez que estamos considerando pontos acima de  $L_{i_0}$ , veja a Figura (4.2). Sendo assim, é imediato que os termos de  $\psi$  possuem ordem mínima igual a  $a + i_0 + 1$ . Em (4.20), mostramos que todos os coeficientes de  $\psi(x, z_1)$  são nulos, o que significa que  $z_1$  é uma solução de  $\psi$ . Uma vez que  $\psi$  é convergente, segue do Teorema 1.5.7 que  $z_1$  é convergente.

Pela Afirmação 4.2.22, temos que a série  $\sum_{i=i_0}^{\infty} c_i x^i$  possui os coeficientes majorados pelos coeficientes de uma série convergente, e logo é convergente. Portanto, a série  $z$  é convergente.  $\square$

## Capítulo 5

# Soluções de uma forma Pfaffiana $s$ -Gevrey

No decorrer deste trabalho, estamos trabalhando com uma solução do polinômio diferencial  $f_\omega$ , conseqüentemente, uma solução de uma forma Pfaffiana  $\omega$ . No Capítulo 3, apresentamos o algoritmo de Newton-Puiseux, que permite exibir uma solução de  $(f_\omega = 0)$ . No Capítulo 4, mostramos que a solução obtida é uma solução convergente de  $f_\omega$ .

Neste capítulo, trabalhamos com uma classe de séries chamadas de  $s$ -Gevrey, que possuem uma condição mais fraca de convergência. Mostramos que uma forma Pfaffiana com índice  $s$ -Gevrey possui uma solução formal com índice Gevrey.

### 5.1 Séries $s$ -Gevrey

Primeiramente, vamos definir a classe de funções  $s$ -Gevrey. Seja

$$A(x, y) = \sum_{ij} A_{ij} x^i y^j \in \mathbb{C}[[x, y]]$$

uma série de potências formal.

**Definição 5.1.1.** Dizemos que  $A(x, y)$  possui índice  $s$ -Gevrey, com  $s \geq 1$ , se

$$\beta_{s-1}(A) = \sum_{ij} \frac{A_{ij}}{(i+j)!^{s-1}} x^i y^j \in \mathbb{C}\{x, y\}. \quad (5.1)$$

Em outros termos, a série  $A(x, y)$  é  $s$ -Gevrey, se a série formal associada  $\beta_{s-1}(A)$  é convergente.

**Observação 5.1.2.** Observe que se uma série de potências formal  $A(x, y)$  possui índice 1-Gevrey, temos

$$\beta_0(A) = \sum_{ij} \frac{A_{ij}}{(i+j)!^0} x^i y^j = \sum_{ij} A_{ij} x^i y^j \in \mathbb{C}\{x, y\}.$$

Assim, séries de índice 1-Gevrey são as séries convergentes.

**Observação 5.1.3.** Suponha que uma série de potências formal  $A(x, y)$  possua índice  $s$ -Gevrey. Então, a série  $\beta_{s-1} \in \mathbb{C}\{x, y\}$  e, note que para cada  $r \geq s$ , temos

$$\frac{|A_{ij}|}{(i+j)!^{r-1}} \leq \frac{|A_{ij}|}{(i+j)!^{s-1}}.$$

Isto significa que os coeficientes da série  $\beta_{r-1}(A)$  são majorados em módulo pelos coeficientes da série convergente  $\beta_{s-1}(A)$ . Logo,

$$\beta_{r-1}(A) = \sum_{ij} \frac{A_{ij}}{(i+j)!^{r-1}} x^i y^j \in \mathbb{C}\{x, y\},$$

e  $A(x, y)$  possui índice  $r$ -Gevrey.

**Definição 5.1.4.** Seja  $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$  uma forma Pfaffiana com  $A, B \in \mathbb{C}[[x, y]]$ . Dizemos que  $\omega$  possui índice  $s$ -Gevrey se as séries  $A$  e  $B$  possuem índice  $s$ -Gevrey.

Neste capítulo, vamos mostrar que uma forma Pfaffiana com índice  $s$ -Gevrey, possui uma solução formal com índice  $s$ -Gevrey.

**Definição 5.1.5.** Uma parametrização  $(x(t), y(t)) \in \mathbb{C}[[t]]^2$  possui índice  $s$ -Gevrey se é da forma  $(0, y(t))$  ou  $(t^q, y(t))$ , com  $y(t)$  de índice  $s$ -Gevrey.

**Observação 5.1.6.** Seja

$$L(x, y) = \sum_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$$

uma série de potências convergente. Existe um polidisco  $\Delta(0, (r_1, r_2))$  no qual a série  $L(x, y)$  converge sempre que  $|x| < r_1$ , e  $|y| < r_2$ . Tome  $k_1, k_2 > 0$ . Então a série

$$L_{k_1 k_2}(x, y) = \sum_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} (k_1 x)^\alpha (k_2 y)^\beta,$$

converge no interior do polidisco  $\Delta(0, (r_1/k_1, r_2/k_2))$ .

**Lema 5.1.7.** Seja  $h(x, y) = \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$  uma série de potências formal com índice  $s$ -Gevrey,  $s \geq 1$ . Então:

- i)  $\beta_{s-1}(h) \in \mathbb{C}\{x, y\} \iff \sum_{\alpha\beta} \frac{A_{\alpha\beta}}{(\alpha!\beta!)^{s-1}} x^\alpha y^\beta \in \mathbb{C}\{x, y\}$ .
- ii)  $\beta_{s-1}(h) \in \mathbb{C}\{x, y\} \Rightarrow \beta_{s-1}(h(t^q, y)) \in \mathbb{C}\{t, y\}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ .
- iii)  $\beta_{s-1}(h) \in \mathbb{C}\{x, y\} \Rightarrow \beta_{s-1}(h(x, cx^j + y)) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ ,  $j \in \mathbb{N} - \{0\}$ .

*Demonstração.* i) Primeiramente, suponha que  $\beta_{s-1}(h)$  convirja no interior do polidisco  $\Delta(0, (r_1, r_2))$ . Observe que sendo  $n \in \mathbb{N}$  e  $k < n$ , temos

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \leq \frac{n^k}{k!}.$$

Assim,

$$\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k^k} \frac{k^k}{k!} \leq \frac{n^k}{k^k} \sum_m \frac{k^m}{m!} = \left(\frac{ne}{k}\right)^k$$



Sem perda de generalidade, tome  $\beta > \alpha$  e fazendo  $n = \alpha + \beta$  e  $k = \beta$ , temos

$$\frac{(\alpha + \beta)!}{\alpha! \beta!} \leq \left( \frac{(\alpha + \beta)e}{\beta} \right)^\beta = \left( \frac{\alpha}{\beta} + 1 \right)^\beta e^\beta. \quad (5.2)$$

Como  $\frac{\beta}{\alpha} > 1$ , segue que

$$\left( \frac{\alpha}{\beta} + 1 \right)^\beta = \left[ \left( 1 + \frac{1}{\beta/\alpha} \right)^{\beta/\alpha} \right]^\alpha \leq e^\alpha. \quad (5.3)$$

De (5.2) e (5.3), temos

$$\frac{(\alpha + \beta)!}{\alpha! \beta!} \leq e^\alpha e^\beta,$$

e conseqüentemente,

$$\frac{|A_{\alpha\beta}|}{\alpha! \beta!} \leq \frac{|A_{\alpha\beta}|}{(\alpha + \beta)!} e^\alpha e^\beta. \quad (5.4)$$

Tomando  $k_1, k_2$  da Observação 5.1.6 iguais a  $e^{s-1}$ , temos que a série

$$\beta_{s-1}(h)_{k_1 k_2}(x, y) = \sum_{\alpha\beta} \frac{A_{\alpha\beta}}{(\alpha + \beta)!} (e^{s-1}x)^\alpha (e^{s-1}y)^\beta,$$

converge no interior do polidisco  $\Delta(0, (r_1/k_1, r_2/k_2))$ , uma vez que  $\beta_{s-1}$  é convergente. Por (5.4), temos que

$$\frac{|A_{\alpha\beta}|}{(\alpha! \beta!)^{s-1}} \leq \frac{|A_{\alpha\beta}| (e^\alpha e^\beta)^{s-1}}{(\alpha + \beta)!^{s-1}},$$

e possuindo os coeficientes majorados em módulo pelos coeficientes de uma série convergente, segue que

$$\sum_{\alpha\beta} \frac{A_{\alpha\beta}}{(\alpha! \beta!)^{s-1}} x^\alpha y^\beta \in \mathbb{C}\{x, y\}.$$

Por outro lado, suponha que a série acima seja convergente. Note que

$$(\alpha + \beta)! = \alpha! (\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + \beta) \geq \alpha! \beta!,$$

então

$$\frac{|A_{\alpha\beta}|}{(\alpha + \beta)!} \leq \frac{|A_{\alpha\beta}|}{\alpha! \beta!}.$$

Como  $s \geq 1$ , temos que

$$\frac{|A_{\alpha\beta}|}{(\alpha + \beta)!^{s-1}} \leq \frac{|A_{\alpha\beta}|}{(\alpha! \beta!)^{s-1}}.$$

Desse modo, os coeficientes da série  $\beta_{s-1}$  são majorados em módulo pelos coeficientes de uma série convergente. Logo,

$$\beta_{s-1}(h) = \sum_{\alpha\beta} \frac{A_{\alpha\beta}}{(\alpha + \beta)!^{s-1}} x^\alpha y^\beta$$

é convergente, isto é,  $\beta_{s-1}(h) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ .

ii) Suponha que  $\beta_{s-1}(h) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ . Defina

$$g(t, y) = h(t^q, y) = \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} t^{q\alpha} y^\beta,$$

e note que

$$\beta_{s-1}(g(t, y)) = \sum_{\alpha\beta} \frac{A_{\alpha\beta}}{(q\alpha + \beta)!^{s-1}} t^{q\alpha} y^\beta.$$

Uma vez que

$$\frac{|A_{\alpha\beta}|}{(q\alpha + \beta)!^{s-1}} \leq \frac{|A_{\alpha\beta}|}{(\alpha + \beta)!^{s-1}},$$

segue que

$$\beta_{s-1}(g(t, y)) = \beta_{s-1}(h(t^q, y)) \in \mathbb{C}\{t, y\}.$$

iii) Escreva

$$h(x, cx^j + y) = \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} x^\alpha (cx^j + y)^\beta$$

e suponha que  $\beta_{s-1}(h) \in \mathbb{C}\{x, y\}$ . Seja  $\Delta(0, (r_1, r_2))$  o polidisco tal  $\beta_{s-1}(h)$  convirja sempre que  $(x, y)$  é interior a  $\Delta(0, (r_1, r_2))$ . Observe que a convergência para valores de  $|x|$  e  $|y|$  no interior de  $\Delta(0, (r_1, r_2))$  é absoluta. Sendo assim, fixe  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$  positivos para os quais a série

$$\sum_{\alpha, \beta} \frac{A_{\alpha\beta}}{(\alpha + \beta)!^{s-1}} x_0^\alpha (cx_0^j + y_0)^\beta$$

converge absolutamente. Considere o termo de  $h(x, cx^j + y)$  dado por

$$A_{\alpha\beta} x^\alpha (cx^j + y)^\beta = \sum_{k=0}^{\beta} A_{\alpha\beta} c^k \binom{\beta}{k} x^{\alpha+kj} y^{\beta-k}.$$

Então,

$$\beta_{s-1}(h(x_0, cx_0^j + y_0)) = \sum_{\alpha\beta} \left( \sum_{k=0}^{\beta} \binom{\beta}{k} \frac{A_{\alpha\beta}}{(\alpha + kj + \beta - k)!^{s-1}} c^k x_0^{\alpha+kj} y_0^{\beta-k} \right).$$

Note que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{\beta} \binom{\beta}{k} \frac{A_{\alpha\beta} c^k}{(\alpha + kj + \beta - k)!^{s-1}} x_0^{\alpha+kj} y_0^{\beta-k} \right| &\leq \sum_{k=0}^{\beta} \left| \binom{\beta}{k} \frac{A_{\alpha\beta} c^k}{(\alpha + kj + \beta - k)!^{s-1}} x_0^{\alpha+kj} y_0^{\beta-k} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\beta} \left| \binom{\beta}{k} \frac{A_{\alpha\beta}}{(\alpha + \beta)!^{s-1}} c^k x_0^{\alpha+kj} y_0^{\beta-k} \right|, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{\beta} \binom{\beta}{k} \frac{A_{\alpha\beta} c^k}{(\alpha + kj + \beta - k)!^{s-1}} \right| x_0^{\alpha+kj} y_0^{\beta-k} &\leq \frac{|A_{\alpha\beta}|}{(\alpha + \beta)!^{s-1}} \sum_{k=0}^{\beta} \binom{\beta}{k} c^k x_0^{\alpha+kj} y_0^{\beta-k} \\ &\leq \frac{|A_{\alpha\beta}|}{(\alpha + \beta)!^{s-1}} x_0^{\alpha} (cx_0^j + y_0)^{\beta}. \end{aligned}$$

Pela escolha de  $x_0$ , e  $y_0$ , segue que a série  $\beta_{s-1}(h(x_0, cx_0^j + y_0))$  é majorada em módulo por uma série convergente, logo, é convergente. Portanto,

$$\beta_{s-1}(h(x_0, cx_0^j + y_0)) \in \mathbb{C}\{x, y\}.$$

□

**Observação 5.1.8.** Assuma que a forma Pfaffiana  $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$  seja *s*-Gevrey, para algum  $s \geq 1$ . Na prova do Teorema 4.2.21, exibimos uma série convergente  $z_1(x) = \sum_{i=i_0}^{\infty} c'_i x^i$ , que é solução de uma curva

$$\psi(x, y) = -x^{a+1}z + |c_{i_0}|x^{a+i_0+1} + k_1\varphi(x, z),$$

onde  $\varphi(x, w)$  é definida em (4.13), dada em termos dos coeficientes  $|A_{\alpha\beta}|$  e  $|B_{\alpha\beta}|$ . Uma vez que  $\omega$  possui índice *s*-Gevrey, segue da definição que  $A$  e  $B$  também o possuem. Logo a curva  $\psi$  é também *s*-Gevrey.

A afirmação abaixo é uma ferramenta a ser usada na demonstração da Proposição 5.1.12 adiante, um dos resultados mais importantes do capítulo.

**Afirmção 5.1.9.** Seja  $a \geq 4$ , então

$$\frac{(m+1) \cdots (m+n)}{(m+n-a+1) \cdots (m+n)} = (m+1) \cdots (m+n-a) \geq (n+1)!,$$

para  $m, n \geq a^2$ .

*Demonstração.* Procedemos por indução em  $m, n$ . Inicialmente, faremos a indução em  $n$ . Observe que se  $n = a^2$ ,

$$(m+1) \cdots (m+n-a) \geq (a^2+1) \cdots (2a^2-a).$$

Basta mostrar que

$$(a^2+1)! \leq (a^2+1) \cdots (2a^2-a) \quad a \geq 4.$$

É fácil ver que isto é válido para  $a = 4$ . Suponha, por hipótese de indução, que a equação seja válida para  $a = 4, \dots, p$ , isto é,

$$(p^2+1)! \leq (p^2+1) \cdots (2p^2-p). \quad (5.5)$$

Mostremos que

$$((p+1)^2 + 1)! = (p^2 + 2a + 2)! \leq (p^2 + 2a + 2) \cdots (2p^2 + 3p + 2). \quad (5.6)$$

Para tanto, seja

$$(p^2 + 2p + 2)! = (p^2 + 1)(p^2 + 2) \cdots (p^2 + 2p + 2).$$

Por hipótese de indução, temos

$$(p^2 + 2p + 2)! \leq [(p^2 + 1) \cdots (2p^2 - p)](p^2 + 2) \cdots (p^2 + 2p + 2).$$

Como  $2p^2 - p > p^2 + 2p + 2$ , escrevemos

$$(p^2 + 2p + 2)! \leq (p^2 + 1)(p^2 + 2)^2 \cdots (p^2 + 2p + 2)^2(p^2 + 2p + 3) \cdots (2p^2 - p). \quad (5.7)$$

Note que os termos

$$(p^2 + 1)(p^2 + 2)^2 \cdots (p^2 + 2p + 2) \quad (5.8)$$

e

$$(2p^2 - p + 1) \cdots (2p^2 + 3p + 2) \quad (5.9)$$

possuem exatamente  $4p + 2$  fatores. Note também que os menores fatores de (5.8) e (5.9) são respectivamente,  $p^2 + 1$  e  $2p^2 - p + 1$ , os quais satisfazem

$$2p^2 - p + 1 - (p^2 + 1) = p^2 - p \geq 0,$$

para  $a \geq 0$ . Isto significa que os fatores de (5.8) e (5.9) são todos comparáveis e, conseqüentemente, temos

$$(p^2 + 1)(p^2 + 2)^2 \cdots (p^2 + 2p + 2) \leq (2p^2 - p + 1) \cdots (2p^2 + 3p + 2).$$

Substituindo em (5.7), temos

$$\begin{aligned} (p^2 + 2p + 2)! &\leq [(2p^2 - p + 1) \cdots (2p^2 + 3p + 2)](p^2 + 2p + 2) \cdots (2p^2 - p) \\ &\leq (p^2 + 2p + 2) \cdots (2p^2 - p)(2p^2 - p + 1) \cdots (2p^2 + 3p + 2), \end{aligned}$$

mostrando a equação (5.6).

Para  $m \geq a^2$  qualquer, temos

$$(m+1) \cdots (m+n-a) \geq (a^2+1) \cdots (a^2+n-a) \geq (a^2+1) \cdots (2a^2-a) \geq (n+1)!,$$

o que mostra nossa afirmação.  $\square$

Considere agora, uma curva formal

$$h(x, y) = \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta.$$

Pelo algoritmo de Newton-Puiseux para funções formais descrito no Capítulo 1, a função  $h$  possui uma solução que pode ser escrita na forma

$$y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^{i/q},$$

veja [5]. Observe que, pelas propriedades do  $q$ -polinômio associado, podemos escrever

$$y(x) = \sum_{i=k}^{\infty} c_i x^i,$$

onde  $c_1 = c_2 = \dots = c_{k-1} = 0$  e  $c_k$  o primeiro coeficiente não nulo, para algum  $k$ . Sendo assim, as transformadas sucessivas de  $h$  são dadas por

$$h_i(x, y) = \sum_{(\alpha,\beta)} A_{\alpha\beta} x^\alpha (c_k x^k + \dots + c_{i-1} x^{i-1} + y)^\beta,$$

e a equação (4.12) implica que

$$\text{Coef } f_{x^{a+i}}(h_i) = P_i^{(1)}(c_k, \dots, c_{i-1}, \{A_{\alpha\beta}\}).$$

Observe que podemos exibir o coeficiente de  $x^{a+i}$  em  $h_i$  por meio de uma soma de monômios nas variáveis  $c_k, \dots, c_{i-1}$  cujos coeficientes binomiais são denotados por  $B_{(\alpha,\beta,d_k,\dots,d_{i-1})}$ , onde  $d_k, \dots, d_{i-1}$  são respectivamente os expoentes não negativos de  $c_k, \dots, c_{i-1}$ . Assim,

$$P_i^{(1)}(c_k, \dots, c_{i-1}, \{A_{\alpha\beta}\}) = \sum B_{(\alpha,\beta,d_k,\dots,d_{i-1})} A_{\alpha\beta} x^\alpha c_k^{d_k} \dots c_{i-1}^{d_{i-1}}, \quad (5.10)$$

com  $d_k + \dots + d_{i-1} = \beta$ . Além disso, temos  $B_{(\alpha,\beta,d_k,\dots,d_{i-1})} \geq 0$ , uma vez que é um coeficiente binomial. Se  $B_{(\alpha,\beta,d_k,\dots,d_{i-1})}$  é não nulo, são válidas:

$$\begin{aligned} a + i &= \alpha + k d_k + \dots + (i - 1) d_{i-1} \\ \beta &= \sum_{j=k}^{i-1} d_j. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Suponha que para  $(\alpha, \beta)$  sejam válidas as equações em (5.11), e defina

$$[\alpha - a] = \begin{cases} \alpha - a, & \text{se } \alpha > a; \\ 1 & \text{se } \alpha \leq a. \end{cases}$$

**Observação 5.1.10.** Supondo que

$$\beta = d_k + \dots + d_{i-1},$$

com  $\alpha < a$ . Caso existam dois expoentes  $d_j$  e  $d_l$  não nulos distintos, é fácil ver que  $\beta \geq 2$ . Caso contrário, se  $d_j$  é o único expoente não nulo de (5.11), segue que

$$a + i = \alpha + jd_j.$$

Como  $\alpha \leq a$ , temos

$$i < jd_j,$$

e uma vez que  $i > j$ , segue também que  $\beta = d_j \geq 2$ . Portanto, em todos os casos temos  $\beta = d_j \geq 2$ .

Como trabalhamos com a convergência da solução  $y(x) = \sum_{i=k}^{\infty} c_i x^i$ , estamos observando o comportamento assintótico dos polígonos de Newton das transformadas. Assim, podemos usar algoritmo recursivamente de maneira que tenhamos  $k > (a + 4)^2$ , com o ponto pivô dado por  $Q_{i_0} = (a, b)$ . O Lema a seguir é uma ferramenta técnica que será utilizada posteriormente.

**Lema 5.1.11.** Para  $i \geq i_0$ , suponha que para um bi-índice  $(\alpha, \beta)$  com coeficiente  $B_{(\alpha, \beta, d_k, \dots, d_{i-1})}$  não nulo, e com coordenadas satisfazendo as equações

$$\begin{aligned} a + i &= \alpha + kd_k + \dots + (i - 1)d_{i-1} \\ \beta &= \sum_{j=k}^{i-1} d_{i-1}. \end{aligned}$$

Então,

$$i! \geq [\alpha - a]! \beta! k!^{d_k} \dots (i - 1)!^{d_{i-1}}. \quad (5.12)$$

*Demonstração.* Se  $B_{(\alpha, \beta, d_k, \dots, d_{i-1})}$  é não nulo, considere  $d_{j_1}, \dots, d_{j_r}$  os expoentes não nulos, com  $j_1 < \dots < j_r$ . Então,  $\beta = j_1 + \dots + j_r$ . Se  $\alpha > a$ , escrevemos  $m = [\alpha - a] = \alpha - a$ . Por (5.11),

$$\begin{aligned} i &= m + j_1 d_{j_1} + \dots + j_r d_{j_r} \\ &= m + j_1 + \dots + j_r + (j_1 - 1)d_{j_1} + \dots + (j_r - 1)d_{j_r} \\ &= m + \beta + (j_1 - 1)d_{j_1} + \dots + (j_r - 1)d_{j_r}. \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} i! &= m!(m+1) \dots (m+\beta)(m+\beta+1) \dots (m+\beta+j_1-1)(m+\beta+j_1) \dots (m+\beta+(j_1-1)d_{j_1}) \\ &\quad (m+\beta+(j_1-1)d_{j_1}+1) \dots (m+\beta+(j_1-1)d_{j_1}+j_2-1) \dots (m+\beta+(j_1-1)d_{j_1}+j_2d_{j_2}) \\ &\quad \dots (m+\beta+\dots+(j_{r-1}-1)d_{j_{r-1}}+1) \dots (m+\beta+\dots+(j_r-1)d_{j_r}). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} i! &\geq m!(m+1) \dots (m+\beta)[(m+1) \dots (m+j_1-1)(m+j_1) \dots (m+(j_1-1)d_{j_1})][(m+1) \dots (m+j_2-1) \\ &\quad (m+j_2) \dots (m+(j_2-1)d_{j_2})] \dots [(m+1) \dots (m+j_r-1) \dots (m+(j_r-1)d_{j_r})]. \quad (5.13) \end{aligned}$$

Para cada  $l$ , com  $0 \leq l \leq r$ , observe que

$$\{(m+1) \cdots (m+j_l-1)\}(m+j_l) \cdots (m+(j_l-1)d_{j_l}) \geq \{(m+1) \cdots (m+j_l-1)\}^{d_{j_l}}$$

uma vez que  $(m+j_l) \cdots (m+(j_l-1)d_{j_l})$  contém  $(j_l-1)(d_{j_l}-1)$  fatores todos maiores que os  $(j_l-1)$  fatores de  $(m+1) \cdots (m+j_l-1)$ . Substituindo em (5.13), temos

$$i! \geq m!(m+1) \cdots (m+\beta) \{(m+1) \cdots (m+j_1-1)\}^{d_{j_1}} \cdots \{(m+1) \cdots (m+j_r-1)\}^{d_{j_r}}. \quad (5.14)$$

Como  $m \geq 1$ , segue que

$$(m+1) \cdots (m+j_l-1) \geq j_l!,$$

para cada  $0 \leq l \leq r$ , e pela equação (5.11), temos

$$i! \geq m! \beta! (j_1!)^{d_{j_1}} \cdots (j_r!)^{d_{j_r}}.$$

Logo,

$$i! \geq m! \beta! k!^{d_k} \cdots (i-1)!^{d_{i-1}}.$$

Agora, se  $\alpha \leq a$ , temos de (5.11),

$$\begin{aligned} a+i &= j_1 d_{j_1} + \cdots + j_r d_{j_r} + \alpha \\ &= j_1 + \cdots + j_r + (j_1-1)d_{j_1} + \cdots + (j_r-1)d_{j_r} + \alpha, \end{aligned}$$

isto é,

$$a+i = \beta + (j_1-1)d_{j_1} + \cdots + (j_r-1)d_{j_r} + \alpha.$$

Assim,

$$\begin{aligned} (a+i)! &= \beta! (\beta+1) \cdots (\beta+j_1-1)(\beta+j_1) \cdots (\beta+(j_1-1)d_{j_1}) \cdots (\beta+\cdots+(j_{r-1}-1)d_{j_{r-1}}+1) \\ &\cdots (\beta+\cdots+j_r-1)(\beta+j_1 d_{j_1} \cdots + j_r) \cdots (\beta+\cdots+(j_r-1)(d_{j_r}-1)) (\beta+\cdots+(j_r-1)(d_{j_r}-1)+1) \\ &\cdots (\beta+\cdots+(j_r-1)(d_{j_r}-1)+\alpha) \cdots (\beta+\cdots+(j_r-1)(d_{j_r}-1)+\alpha+j_r-1), \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} (a+i)! &\geq \beta! [(\beta+1) \cdots (\beta+j_1-1)(\beta+j_1) \cdots (\beta+(j_1-1)d_{j_1})] \cdots [(\beta+1) \cdots (\beta+j_r) \\ &\cdots (\beta+(j_r-1)(d_{j_r}-1))] (\beta+\cdots+(j_r-1)(d_{j_r}-1)+1) \cdots (\beta+\cdots+(j_r-1)(d_{j_r}-1)+\alpha) \\ &\cdots (\beta+\cdots+(j_r-1)(d_{j_r}-1)+\alpha+j_r-1). \quad (5.15) \end{aligned}$$

Analogamente ao caso anterior, temos que para cada  $l$ , com  $0 \leq l \leq r$ ,

$$\{(\beta+1) \cdots (\beta+j_l-1)\}(\beta+j_l) \cdots (\beta+(j_l-1)d_{j_l}) \geq \{(\beta+1) \cdots (\beta+j_l-1)\}^{d_{j_l}},$$

uma vez que  $(\beta+j_l) \cdots (\beta+(j_l-1)d_{j_l})$  contém  $(j_l-1)(d_{j_l}-1)$  fatores todos maiores que os

$(j_l - 1)$  fatores de  $(\beta + 1) \cdots (\beta + j_l - 1)$ . Então, substituindo em (5.15), temos

$$(a+i)! \geq \beta! \{(\beta+1) \cdots (\beta+j_1-1)\}^{d_{j_1}} \{(\beta+1) \cdots (\beta+j_2-1)\}^{d_{j_2}} \cdots \{(\beta+1) \cdots (\beta+j_r-1)\}^{d_{j_r-1}} \\ \cdots (\beta + \cdots + (j_r - 1)(d_{j_r} - 1) + \alpha) \cdots (\beta + \cdots + (j_r - 1)(d_{j_r} - 1) + \alpha + j_r - 1).$$

Escreva  $t = a + i - j_r + 1$ , e uma vez que

$$(a+i)! = i!(i+1) \cdots (i+a),$$

segue que

$$i! \geq \beta! \{(\beta+1) \cdots (\beta+j_1-1)\}^{d_{j_1}} \cdots \{(\beta+1) \cdots (\beta+j_r-1)\}^{d_{j_r-1}} \frac{(t+1) \cdots (t+j_r-1)}{(i+1) \cdots (i+a)}. \quad (5.16)$$

Note que

$$t = \alpha + j_1 d_{j_1} + \cdots + (j_r - 1) d_{j_r} + 1 \geq j_1,$$

o que significa que  $t \geq j_1 \geq k > (a+4)^2 > a^2$ . Da mesma forma,  $n = j_r - 1 \geq j_1 - 1 > k - 1 > a^2$ , pois  $a \geq -1$ . Deste modo, considere  $m = t$  e  $n = j_r - 1$  na Afirmação 5.1.9, e obtemos

$$\frac{(t+1) \cdots (t+j_r-1)}{(i+1) \cdots (i+a)} \geq (j_r - 1 + 1)! = j_r!.$$

Pela Observação 5.1.10, temos  $\beta \geq 2$  e como  $j_l + 1 \geq 2$ , para cada  $l$ , temos

$$\{(\beta+1) \cdots (\beta+j_l-1)\} \geq 3 \cdots (j_l+1) \geq j_l!.$$

Assim, a equação (5.16) é dada por

$$i! \geq \beta! (j_1!)^{d_{j_1}} \cdots (j_r!)^{d_{j_r-1}} j_r!.$$

Uma vez que  $m = [\alpha - a] = 1$ , segue que

$$i! \geq m! \beta! j_1!^{d_{j_1}} \cdots j_r!^{d_{j_r}}.$$

Portanto,

$$i! \geq m! \beta! k!^{d_k} \cdots (i-1)!^{d_{i-1}}.$$

□

A proposição seguinte garante que uma solução não fracionária de uma curva *s*-Gevrey, também é *s*-Gevrey.

**Proposição 5.1.12.** *Seja  $h(x, y) = \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$  uma série de potências formal com índice *s*-Gevrey,  $s \geq 1$ , e seja  $y = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^{\frac{i}{s}}$  uma solução de  $h$ . Então*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{i!^{s-1}} t^i \in \mathbb{C}\{t\}.$$



*Demonstração.* Seja

$$h(x, y) = \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta$$

uma série de potências formal com índice *s*-*Gevrey*, cuja solução  $y = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^{\frac{i}{q}}$ . Observe que

$$\bar{y}(t) = y(t^q) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i t^i$$

é uma solução da curva  $h(t^q, y)$ . Uma vez que  $h$  é *s*-*Gevrey*, pelo item *ii*) do Lema 5.1.7, temos que  $h(t^q, y)$  também possui índice *s*-*Gevrey*. Queremos mostrar que a solução não fracionária  $\bar{y}(t)$  possui índice *s*-*Gevrey*. Para tanto, podemos assumir que

$$y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^i$$

é uma solução não fracionária de  $h \in \mathbb{C}[[x, y]]$  tal que  $c_1 = \dots = c_{k-1} = 0$  e  $c_k \neq 0$ . Pelo item *iii*) do Lema 5.1.7, segue que o índice *s*-*Gevrey* é preservado pelas transformadas de  $h$ . Assim, consideremos as transformadas sucessivas em  $h$  e seus respectivos polígonos de Newton.

Seja  $Q = (a, b)$  o ponto pivô de  $h$  com respeito a  $y$ . Observe que se  $b \geq 2$ , segue que  $y(x)$  é uma solução da curva formal

$$h_0 = \frac{\partial^{b-1} h}{\partial y^{b-1}},$$

a qual possui índice *s*-*Gevrey*, uma vez que  $h$  o possui. Além disso,  $h_0$  possui ordenada do ponto pivô  $b = 1$ . Basta então provar o resultado no caso em que  $b = 1$ .

Conforme afirmamos, podemos supor que  $k > (a+4)^2$ , e multiplicando  $h$  por  $1/A^{(0)}$ , obtemos

$$h(x, y) = \sum_{\alpha\beta} \frac{A_{\alpha\beta}}{A^{(0)}} x^\alpha y^\beta.$$

Seja  $N_1 = N(h) \cap \mathbb{N}^2$  e observe que

$$c_i = -\frac{1}{A^{(0)}} P_i^{(1)}(c_k, \dots, c_{i-1}, \{A_{\alpha\beta}\}/A^{(0)}),$$

onde  $(\alpha, \beta) \in N_1$ , isto é,

$$c_i = -P_i^{(1)}(c_k, \dots, c_{i-1}, \{A_{\alpha\beta}\}).$$

Evidentemente, pela equação (5.10), temos

$$c_i = -\sum B_{(\alpha, \beta, d_k, \dots, d_{i-1})} A_{\alpha\beta} x^\alpha c_k^{d_k} \cdots c_{i-1}^{d_{i-1}} \quad (5.17)$$

e sempre que  $B_{(\alpha, \beta, d_k, \dots, d_{i-1})}$  é não nulo, temos

$$\begin{aligned} a + i &= \alpha + kd_k + \cdots + (i-1)d_{i-1} \\ \beta &= \sum_{j=k}^{i-1} d_j. \end{aligned}$$

Defina  $C_{\alpha\beta} = \frac{|A_{\alpha\beta}|}{[\alpha - a]!^{s-1}\beta!^{s-1}}$ , bem como os coeficientes  $c'_i$  dados por  $c'_i = 0$ , se  $i < k$ ,

$$c'_k = \frac{|c_k|}{k!^{s-1}} \quad \text{e} \quad c'_i = P_i^{(1)}(c'_k, \dots, c'_{i-1}, \{C_{\alpha\beta}\}),$$

se  $i > k$ . Utilizando o raciocínio análogo ao anterior, podemos escrever

$$c'_i = - \sum B_{(\alpha,\beta,d_k,\dots,d_{i-1})} C_{\alpha\beta} x^\alpha c'_k{}^{d_k} \dots c'_{i-1}{}^{d_{i-1}}. \quad (5.18)$$

**Afirmção 5.1.13.** Para cada  $i \geq k$  os coeficientes  $c'_i$  definidos acima satisfazem

$$\frac{|c_i|}{(i!)^{s-1}} \leq c'_i. \quad (5.19)$$

*Demonstração.* De fato, denote novamente  $m = [\alpha - a]$  e procedemos por indução. Para  $i = k$ , o resultado é imediato da definição. Assuma, por hipótese de indução, que

$$|c_j| \leq c'_j(j!)^{s-1},$$

para todo  $j = k, \dots, i-1$ . Mostremos agora para  $j = i$ .

Observe que, por definição temos

$$\sum B_{(\alpha,\beta,d_k,\dots,d_{i-1})} C_{\alpha\beta} = \sum B_{(\alpha,\beta,d_k,\dots,d_{i-1})} \frac{|A_{\alpha\beta}|}{m!^{s-1}\beta!^{s-1}}.$$

Então, pela equação (5.18), segue que (5.19) é válida se, sempre que  $B_{(\alpha,\beta,d_k,\dots,d_{i-1})}$  for não nulo, tivermos

$$\frac{|c'_k{}^{d_k} \dots c'_{i-1}{}^{d_{i-1}}|}{i!^{s-1}} \leq \frac{c'_k{}^{d_k} \dots c'_{i-1}{}^{d_{i-1}}}{m!^{s-1}\beta!^{s-1}}.$$

Para mostrar isto, note que

$$\frac{|c'_k{}^{d_k} \dots c'_{i-1}{}^{d_{i-1}}|}{i!^{s-1}} = \frac{|c_k|^{d_k} \dots |c_{i-1}|^{d_{i-1}}}{i!^{s-1}} \leq \frac{(c'_k(k!)^{s-1})^{d_k} \dots (c'_{i-1}(i-1)!^{s-1})^{d_{i-1}}}{i!^{s-1}},$$

isto é,

$$\frac{|c'_k{}^{d_k} \dots c'_{i-1}{}^{d_{i-1}}|}{i!^{s-1}} \leq \frac{(c'_k{}^{d_k} \dots c'_{i-1}{}^{d_{i-1}})(k!^{d_k} \dots (i-1)!^{d_{i-1}})^{s-1}}{i!^{s-1}}.$$

Pelo Lema 5.1.11, temos

$$\left( \frac{(k!)^{d_k} \dots ((i-1)!)^{d_{i-1}}}{i!} \right)^{s-1} \leq \left( \frac{1}{m!\beta!} \right)^{s-1}$$

e conseqüentemente,

$$\frac{(c'_k{}^{d_k} \dots c'_{i-1}{}^{d_{i-1}})(k!^{d_k} \dots (i-1)!^{d_{i-1}})^{s-1}}{i!^{s-1}} \leq \frac{c'_k{}^{d_k} \dots c'_{i-1}{}^{d_{i-1}}}{m!^{s-1}\beta!^{s-1}}.$$

Assim,

$$\frac{|c_k^{d_k} \cdots c_{i-1}^{d_{i-1}}|}{i!^{s-1}} \leq \frac{c'_k{}^{d_k} \cdots c'_{i-1}{}^{d_{i-1}}}{m!^{s-1} \beta!^{s-1}},$$

o que conclui nossa afirmação. Logo,

$$\frac{|c_i|}{(i!)^{s-1}} \leq c'_i.$$

□

Seja  $y_1 = \sum_{i=k}^{\infty} c'_i x^i$  e

$$\varphi_1(x, y) = -x^a y + \frac{|c_k|}{k!^{s-1}} x^{a+k} + \sum_{(\alpha, \beta) \in N'_1} C_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta,$$

$N'_1 = N_1 \setminus \{(a, 1), (a+k, 0)\}$ . Observe que as definições de  $y_1$  e  $\varphi_1$  são equivalentes a  $z_1$  e  $\varphi$  definidas na demonstração do Teorema 4.2.21, com coeficientes  $c'_i$  e alterando  $A_{\alpha\beta}$  por  $C_{\alpha\beta}$ . Assim, todas as relações são válidas. Observe que o item *i*) do Lema 5.1.7 garante que  $\varphi_1$  é uma curva convergente e procedendo analogamente ao capítulo anterior, podemos verificar que  $y_1$  é solução de  $\varphi_1$ , isto é,  $y_1$  é convergente.

Sendo  $y_1 = \sum_{i=k}^{\infty} c'_i x^i$  uma série convergente em  $x$ , e pela afirmação anterior, segue que

$$y(x) = \sum_{i=k}^{\infty} \frac{c_i}{i!^{s-1}} x^i$$

é uma série convergente. Isto é o mesmo que dizer que

$$\sum_{i=k}^{\infty} \frac{c_i}{i!^{s-1}} t^i \in \mathbb{C}\{t\}.$$

□

Por fim, enunciamos o principal resultado deste trabalho, o que garante a existência de uma solução *s*-Gevrey, para cada forma Pfaffiana  $\omega$  com índice *s*-Gevrey

**Teorema 5.1.14.** *Assuma que uma forma Pfaffiana  $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$  possua índice *s*-Gevrey, com  $s \geq 1$ . Então, existe ao menos uma solução de  $(\omega = 0)$  com índice *s*-Gevrey.*

*Demonstração.* Seja

$$z = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^{\frac{i}{q}}$$

a solução formal de  $(f_\omega = 0)$  construída no Teorema 4.1.14. Assuma que

$$\text{mdc}(\{q\} \cup \{i \mid c_i \neq 0\}) = 1$$

e seja  $(t^q, z(t^q))$  a solução de  $(\omega = 0)$  associada. Sabemos que  $(t^q, z(t^q))$  possui índice *s*-Gevrey se  $y(x) = z(t^q) \in \mathbb{C}[[x]]$  possui índice *s*-Gevrey. Na prova do Teorema 4.2.21 encontramos uma

série  $z_1 \in \mathbb{C}[[x]]$ , a qual é uma solução de uma curva  $\psi(x, y)$  e majora os coeficientes de  $y(x)$ . Uma vez que a forma  $\omega$  é *s-Gevrey*, segue pela definição que  $A(x, y)$  e  $B(x, y)$  também o são. Logo, como a curva  $\psi(x, y)$  é definida pelos coeficientes de  $A$  e  $B$ , segue que  $\psi(x, y)$  índice *s-Gevrey*. Na proposição anterior, mostramos que uma solução não fracionária de uma curva de índice *s-Gevrey* também possui índice *s-Gevrey*. Consequentemente, segue que  $z_1(x)$  possui índice *s-Gevrey*. Como  $y(x)$  é majorada pela série  $z_1(x)$ , temos que  $y(x)$  é *s-Gevrey*.

Portanto, existe uma solução  $(t^q, z(t^q))$  de  $(\omega = 0)$  com índice *s-Gevrey*. □

# Referências Bibliográficas

- 1 BRIOT C. A; BOUQUET, J. C. Propriétés des fonctions définies par des équations différentielles. *Journal de l'Ecole Polytechnique*, n. 36, p. 133–198, 1856.
- 2 CAMACHO, C.; SAD, P. Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields. *Ann. of Math. (2)*, v. 115, n. 3, p. 579–595, 1982. ISSN 0003-486X. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307/2007013>>.
- 3 CANO, J. An extension of the newton-puiseux polygon construction to give solutions of pfaffian forms. *Annales de l'institut Fourier*, v. 43, n. 1, p. 125–142, 1993. Disponível em: <[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1993\\_\\_43\\_1\\_125\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1993__43_1_125_0)>.
- 4 CANO, J. On the series defined by differential equations, with an extension of the puiseux polygon construction to these equations. *Analysis*, Oldenbourg Wissenschaftsverlag, v. 13, n. 1-2, p. 103–120, 1993.
- 5 CASAS-ALVERO, E. *Singularities of plane curves*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. v. 276. xvi+345 p. (London Mathematical Society Lecture Note Series, v. 276). ISBN 0-521-78959-1. Disponível em: <<https://doi.org/10.1017/CBO9780511569326>>.
- 6 FINE, H. B. On the Functions Defined by Differential Equations, with an Extension of the Puiseux Polygon Construction to these Equations. *Amer. J. Math.*, v. 11, n. 4, p. 317–328, 1889. ISSN 0002-9327. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307/2369347>>.
- 7 FINE, H. B. Singular Solutions of Ordinary Differential Equations. *Amer. J. Math.*, v. 12, n. 3, p. 295–322, 1890. ISSN 0002-9327. Disponível em: <<https://doi.org/10.2307/2369621>>.
- 8 GÉRARD, R. Sur le théorème de Maillet. *Funkcial. Ekvac.*, v. 34, n. 1, p. 117–125, 1991. ISSN 0532-8721. Disponível em: <<http://www.math.kobe-u.ac.jp/~fe/xml/mr1116884.xml>>.
- 9 INCE, E. L. *Ordinary Differential Equations*. [S.l.]: Dover Publications, New York, 1944. viii+558 p.
- 10 MALGRANGE, B. Sur le théorème de Maillet. *Asymptotic Anal.*, v. 2, n. 1, p. 1–4, 1989. ISSN 0921-7134.
- 11 MOL, R. S. *Curvas analíticas planas y el método de Newton-Puiseux*. [S.l.]: XVIII Colóquio de la Sociedad Matemática Peruana, Lima., 2010.
- 12 WALKER, R. J. *Algebraic curves*. [S.l.]: Dover Publications, Inc., New York, 1962. x+201 p.