

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**  
**Escola de Engenharia**  
**Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica**

DANILO DE QUADROS MAIA FILHO

**ABORDAGEM MULTI-OBJETIVO E LINEAR PARA O PROBLEMA DE  
OTIMIZAÇÃO DA CONFIABILIDADE E ALOCAÇÃO DE REDUNDÂNCIA EM  
SISTEMAS SÉRIE-PARALELO**

Belo Horizonte  
2022



Danilo de Quadros Maia Filho

**ABORDAGEM MULTI-OBJETIVO E LINEAR PARA O PROBLEMA DE  
OTIMIZAÇÃO DA CONFIABILIDADE E ALOCAÇÃO DE  
REDUNDÂNCIA EM SISTEMAS SÉRIE-PARALELO.**

**Versão final**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Michel Bessani

Belo Horizonte

2022

M217a

Maia Filho, Danilo de Quadros.

Abordagem multi-objetivo e linear para o problema de otimização da confiabilidade e alocação de redundância em sistemas série-paralelo [recurso eletrônico] / Danilo de Quadros Maia Filho. - 2022.

1 recurso online (60 f. : il., color.) : pdf.

Orientador Michel Bessani.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Bibliografia: f. 57-60.

Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia elétrica - Teses. 2. Confiabilidade (Engenharia) - Teses. 3. Redundância (Engenharia) - Teses. 4. Otimização multiobjectivo - Teses. I. Bessani, Michel. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 621.3(043)

**"Abordagem Multi-objetivo e Linear Para O Problema de Otimização da Confiabilidade e Alocação de Redundância Em Sistemas Série-paralelo"**

**Danilo de Quadros Maia Filho**

Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Aprovada em 17 de janeiro de 2022.

Por:



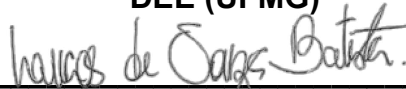
---

**Prof. Dr. Michel Bessani  
(UFMG) - Orientador**



---

**Prof. Dr. Eduardo Gontijo Carrano  
DEE (UFMG)**



---

**Prof. Dr. Lucas de Souza Batista  
DEE (UFMG)**

*Dedico este trabalho a Deus e à minha família.*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador Michel Bessani por toda a didática e pelo seu dom para o ensino, que contribuíram de maneira decisiva para tornar este trabalho de pesquisa possível. Ele me incentivou a exercitar a paciência, e a evoluir gradualmente com a dissertação através de uma dedicação constante, superando tempos difíceis.

Agradeço ao programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da UFMG por todo o suporte durante a realização do mestrado, aos professores com os quais tive aula, e à secretaria do programa por toda a agilidade no atendimento das demandas.

Agradeço à minha família por todo o incentivo, e por darem um significado especial a todas as minhas pequenas e grandes conquistas.

*"Prefiro os que me criticam, porque me corrigem, aos que me elogiam, porque me corrompem."*

**Santo Agostinho, Confissões**



## RESUMO

Atualmente, o mundo vive cenários em que a presença da tecnologia cresce e sua complexidade aumenta em diversas áreas: indústria, vida doméstica, educação, governo, entre outras. A evolução tecnológica deveria trazer consigo um aumento da qualidade, de tal forma que garanta o correto funcionamento dos processos e ofereça produtos mais confiáveis. Nesse contexto, o estudo da confiabilidade dos sistemas é fundamental a fim compreender como essa confiabilidade pode ser otimizada. Diversos componentes podem estar envolvidos como, por exemplo, microchips, hardwares, softwares, redes e infraestruturas. Entender o modelo matemático que define a confiabilidade de um determinado sistema pode ser uma tarefa desafiadora, principalmente devido à dependência de parâmetros físicos, fatores como o tempo, materiais utilizados, quantidades e pesos.

Este trabalho de dissertação realiza uma pesquisa científica de trabalhos anteriores sobre diversas configurações de sistemas e variações do problema de alocação de confiabilidade e redundância. Um determinado estudo de caso é escolhido para análise, com o objetivo de propor um novo método para sua resolução. O problema é originalmente formulado com um modelo contínuo e não linear e, em seguida, é transformado em um modelo linear e inteiro. Na abordagem proposta, um conjunto finito de opções de componentes é sugerido, buscando retratar situações mercadológicas reais em que os catálogos dos fabricantes são pré-definidos, cada um com um valor específico de confiabilidade. Além disso, o problema originalmente mono-objetivo é reformulado como multi-objetivo, e resolvido utilizando programação linear, com uso da ferramenta CPLEX da IBM, em conjunto com o método  $\epsilon$ -restrito. Solucionado o problema, comparações foram feitas com trabalhos anteriores que exploraram o mesmo problema aplicando meta-heurísticas.

**Palavras-chave:** Confiabilidade, Alocação de Redundância, Otimização Multi-objetivo.

## ABSTRACT

Currently, the world is experiencing scenarios in which the presence of technology grows and its complexity increases in several areas: industry, domestic life, education, government, and others. Technological evolution should bring an increase in quality, in such a way that it guarantees the correct functioning of the processes and offers more reliable products. In this context, the study of systems reliability is essential in order to understand how this reliability can be optimized. Several components may be involved, such as microchips, hardware, software, networks and infrastructure. Understanding the mathematical model that defines the reliability of a given system can be a challenging task, mainly due to the dependence of physical parameters, factors such as time, materials used, quantities and weights.

This dissertation work carries out a scientific survey of previous works on various system configurations and variations of the reliability and redundancy allocation problem. A particular case study is chosen for analysis, with the aim of proposing a new method for its resolution. The problem is originally formulated with a continuous, non-linear model, and then it is transformed into a linear and integer model. In the proposed approach, a finite set of component options is suggested, seeking to portray real market situations in which manufacturers' catalogs are pre-defined, each with a specific reliability value. Furthermore, the originally mono-objective problem is reformulated as multi-objective, and solved using linear programming, IBM's CPLEX tool, together with the  $\epsilon$ -restricted method. Once the problem was solved, comparisons were made with previous works that explored the same problem by applying meta-heuristics.

**Keywords:** Reliability, Redundancy Allocation, Multi-objective Optimization.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Sistema em Série . . . . .	22
Figura 2.2 – Sistema em Paralelo . . . . .	23
Figura 2.3 – Sistema em Série-Paralelo . . . . .	23
Figura 2.4 – Sistema Complexo em Ponte . . . . .	23
Figura 2.5 – Variação da confiabilidade do subsistema em resposta à confiabilidade do switch para cada abordagem . . . . .	32
Figura 2.6 – Rede de computadores cuja confiabilidade foi otimizada . . . . .	33
Figura 2.7 – Resultados da otimização sobre a rede da Figura 2.6 . . . . .	34
Figura 2.8 – Comparação entre os tempos de convergências da solução . . . . .	34
Figura 2.9 – Comparação entre as curvas de falha para 3 tipos de componentes . . . . .	35
Figura 3.1 – Sistema de uma planta farmacêutica . . . . .	41
Figura 3.2 – Visão geral para a metodologia adotada . . . . .	43
Figura 4.1 – Fronteira de Pareto encontrada . . . . .	49
Figura 4.2 – Fronteira de Pareto encontrada para o segundo cenário . . . . .	53

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Parâmetros físicos do estudo de caso . . . . .	42
Tabela 3.2 – Lista de opções de componentes gerados aleatoriamente . . . . .	46
Tabela 4.1 – Soluções extraídas da Fronteira de Pareto . . . . .	50
Tabela 4.2 – Comparação entre soluções deste trabalho com o método GA (MELLAL; ZIO, 2017) . . . . .	52
Tabela 4.3 – Comparação entre soluções deste trabalho com o método PSO (GARG; SHARMA, 2013) e PSFS (MELLAL; ZIO, 2016) . . . . .	54

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>16</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivo</b> . . . . .	<b>18</b>
1.1.1	Objetivos específicos . . . . .	18
1.1.2	Contribuições . . . . .	18
<b>1.2</b>	<b>Organização do texto</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> . . . . .	<b>20</b>
<b>2.1</b>	<b>Principais categorias do problema</b> . . . . .	<b>21</b>
<b>2.2</b>	<b>Representação em Diagrama de Blocos</b> . . . . .	<b>22</b>
<b>2.3</b>	<b>Componentes em estado ativo ou standby</b> . . . . .	<b>25</b>
<b>2.4</b>	<b>Problemas Mono e Multi-objetivo</b> . . . . .	<b>25</b>
<b>2.5</b>	<b>Revisão Bibliográfica</b> . . . . .	<b>28</b>
2.5.1	Principais pesquisas . . . . .	29
2.5.2	Linearização utilizando Max Min . . . . .	35
2.5.3	Linearização utilizando Min Max . . . . .	38
2.5.4	Linearização via decomposição do problema . . . . .	39
<b>3</b>	<b>MATERIAIS E MÉTODOS</b> . . . . .	<b>41</b>
<b>3.1</b>	<b>Estudo de Caso</b> . . . . .	<b>41</b>
<b>3.2</b>	<b>Metodologia</b> . . . . .	<b>43</b>
3.2.1	Modelo Proposto . . . . .	43
3.2.2	Aplicação do otimizador CPLEX . . . . .	47
3.2.3	Método $\epsilon$ - Restrito . . . . .	48
<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b> . . . . .	<b>49</b>
<b>4.1</b>	<b>Comparação com trabalhos anteriores</b> . . . . .	<b>51</b>
4.1.1	Comparação com Algoritmo Genético . . . . .	52

4.1.2	Comparação com métodos PSO e PSFS . . . . .	54
4.1.3	Resumo comparativo . . . . .	55
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO . . . . .</b>	<b>56</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>57</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Vivemos em um cenário onde a tecnologia está cada vez mais presente em nosso cotidiano e evolui exponencialmente em complexidade, e cresce também o volume de informação produzida por esta tecnologia, criando cenários ainda mais complexos. Nesse contexto, o estudo da confiabilidade dos sistemas que empregam essas tecnologias é fundamental a fim compreender como essa confiabilidade pode ser afetada, e como otimizá-la. Diversos componentes podem estar envolvidos nesse estudo como, por exemplo, microchips, hardwares, softwares, redes e infraestruturas. Nas indústrias automobilística, aeronáutica, hospitais, indústria bélica, ou mesmo em equipamentos domésticos como ar-condicionados, televisores, alarmes de segurança, alarmes de incêndio, elevadores, todos estes produtos e setores exigem uma confiabilidade mínima para que a probabilidade de falha não seja tal que inviabilize um empreendimento por motivos financeiros, incidentes de segurança ou impactos sócio-ambientais, por exemplo. Essa análise vale tanto ao longo do ciclo de vida dos produtos e seu uso, quanto ao longo de sua produção. Entender matematicamente o modelo que define a confiabilidade de um determinado sistema pode ser uma tarefa árdua aos engenheiros, principalmente devido à dependência de condições e parâmetros físicos, fatores como o tempo, materiais utilizados, quantidades, pesos, entre outros.

A confiabilidade reflete o nível da qualidade de um produto e serviço. Quanto maior for a confiabilidade, menor será a chance de falhas. Prejuízos financeiros causados por falhas em sistemas são comuns em diversas indústrias. Também no mundo digital, os softwares, bancos de dados e redes de internet, por exemplo, sofrem com problemas de disponibilidade de subsistemas e equipamentos, o que interfere no oferecimento final de serviços e produtos. Em alguns casos, uma única falha pode acarretar elevados prejuízos. Neste sentido, a otimização da confiabilidade de sistemas é uma área do conhecimento que estuda o funcionamento dos sistemas, seu modelo e suas particularidades, buscando configurações que maximizem o valor total da confiabilidade.

Formalmente podemos definir a confiabilidade como “*A probabilidade de um item realizar uma função exigida sem falha nas condições estabelecidas por um determinado período de tempo*” (O’CONNOR; KLEYNER, 2012). O item mencionado deve executar uma função para a qual foi projetado, dentro das condições próprias para funcionar bem. Por exemplo, um motor de carro irá performar bem se operar em condições adequadas (com o combustível adequado, óleo, água, temperatura), para as quais foi projetado. Da mesma forma, é interessante notar que a confiabilidade de um item, seja um componente ou um sistema, pode variar no tempo. Nestes casos, à medida que o item funciona, os componentes se desgastam, e podem apresentar uma maior chance de falha, ou seja, uma

menor confiabilidade.

Maximizar a confiabilidade de componentes e sistemas é imprescindível quando se lida com falhas que podem prejudicar uma operação. Autores de diferentes trabalhos mostram a importância da otimização da confiabilidade de sistemas aplicada a diversas áreas. Por exemplo na área de energia nuclear, [Busacca et al. \(2001\)](#) maximizam a disponibilidade média do sistema, minimiza o custo total e minimiza o tempo de exposição dos trabalhadores à radiação numa planta de produção de energia. Os autores buscam uma alta confiabilidade do sistema atrelada a níveis aceitáveis de segurança aos seus recursos humanos. No ramo de energia elétrica, [\(BOUREZG; MEGLOULI, 2015\)](#) analisa a confiabilidade de sistemas de distribuição e busca comparar variedades de configurações para as subestações, obtendo índices de confiabilidade e custo diferentes. Já [\(QIU et al., 2017\)](#) aplica uma análise em diagrama de blocos e diagramas UML em um sistema de produção de óleo e gás suboceânico. [\(GE et al., 2018\)](#) apresenta o impacto financeiro da confiabilidade do sistema em contratos feitos com fabricantes através da análise do SLA (Service Level Agreement - Acordo de Nível de Serviço) e do custo do ciclo de vida dos equipamentos, atribuindo penalizações ou bonificações ao contrato conforme os limites estabelecidos sejam ultrapassados. Esses e outros trabalhos que serão citados mais à frente exploram problemas reais de engenharia, aplicando conhecimentos teóricos em situações práticas para encontrar soluções e para resolver problemas que surgem todos os dias, com variações dos parâmetros, características físicas, tempo, espaço, preferências, recursos, pessoas, entre outras características, e que tornam cada problema singular.

No contexto corporativo, no longo prazo a confiabilidade pode influenciar o sucesso de um investimento e determinar as preferências dos clientes. Os impactos das falhas em produtos já vendidos podem provocar alto custo em garantias. Já as indústrias, podem sofrer perdas gigantescas quando uma falha interrompe uma linha de produção. Entre as possíveis metas de um problema de otimização da confiabilidade, está a maximização da confiabilidade total do sistema. Isto pode ser feito, entre outras maneiras, através da alocação de componentes confiáveis nos seus subsistemas, respeitando as restrições impostas pelo problema como, por exemplo, o custo total máximo permitido para o sistema.

Diante de todo esse contexto, o problema de alocação de redundância aparece em problemas do dia a dia como uma subárea de destaque. O aumento no número de componentes redundantes em um subsistema provoca o aumento na confiabilidade total. Com isso em mente, é possível em alguns casos considerar a utilização de componentes mais baratos, com menor confiabilidade, mas com configuração redundante. Lidar com essa abordagem pode tornar o problema matematicamente mais complexo, e também trazer outros pontos a serem considerados como, por exemplo, a gestão da ativação dos componentes em redundância bem como seu sequenciamento. Fazendo uso de diagramas



de blocos, como será visto mais à frente, é possível extrair o modelo matemático, analisar como a confiabilidade do sistema pode ser afetada e aplicar um algoritmo adequado para resolvê-lo.

## 1.1 OBJETIVO

Este trabalho de dissertação tem por objetivo propor um método que resolva um determinado estudo de caso: um sistema composto por dez subsistemas em configuração série-paralelo que utiliza redundâncias ativas. A partir do modelo matemático original que é contínuo, mono-objetivo e não linear, será sugerida uma abordagem linear, multi-objetivo e inteira, simplificando o modelo. A abordagem adotada também busca refletir a limitação do número de fornecedores e componentes de prateleira disponíveis no mercado. A confiabilidade é maximizada e o custo é minimizado, restringidos pelo volume e peso máximos permitidos para o sistema. Por fim, um conjunto de soluções não dominadas são apresentadas como a fronteira de Pareto do sistema para dois cenários distintos. Os resultados são avaliados e comparados com os resultados apresentados por outros trabalhos que analisaram o mesmo estudo de caso.

### 1.1.1 Objetivos específicos

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho, procurou-se atender aos seguintes objetivos específicos:

- Realizar uma pesquisa científica sobre trabalhos relacionados ao problema de otimização da confiabilidade. Neste sentido, um conjunto de literaturas foi estudado, trazendo cada qual uma contribuição e uma especificidade. Diversos autores solucionaram variados problemas de otimização da confiabilidade, aplicando e comparando métodos e técnicas;
- Após a escolha de um determinado estudo de caso a partir de trabalhos anteriores, propor um método alternativo para solucioná-lo;
- Comparar os resultados obtidos pelo o método proposto com os resultados obtidos por trabalhos anteriores, que tentaram solucionar o mesmo estudo de caso. Avaliar diferenças entre os métodos e também entre os valores de confiabilidade e custo encontrados em cada caso.

### 1.1.2 Contribuições

A principal contribuição deste trabalho está em relacionar a proposta de um novo modelo linear, inteiro e multiobjetivo com a classe do problema de otimização da confiabilidade discutido.

Além disso, foram levantados cenários mais próximos de situações reais de projeto, em que exista uma quantidade finita de opções de componentes disponíveis no mercado para compor o sistema. Dessa maneira, é possível aplicar técnicas de programação linear dentro dos cenários propostos e alcançar soluções exatas.

## **1.2 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO**

No próximo capítulo, Capítulo 2, é feita uma revisão bibliográfica, onde o problema de otimização da confiabilidade é destrinchado em algumas categorias, abordagens possíveis e variações mais comuns do problema. Em seguida no Capítulo 3, um estudo de caso adotado é apresentado bem como seu modelo matemático original, no capítulo de materiais de métodos. No mesmo capítulo, uma nova proposta para o modelo matemático é desenvolvida, e uma proposta de resolução do problema é apresentada, diante de algumas premissas estabelecidas. São apresentados também os recursos utilizados, técnicas e metodologias aplicadas. Então no Capítulo 4, os resultados são apresentados e comparados com soluções obtidas em outros trabalhos com o mesmo estudo de caso. Por fim, as conclusões e propostas de trabalhos futuros são apresentadas no Capítulo 5.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo apresenta uma revisão de diversas pesquisas e implementações realizadas na área de otimização da confiabilidade. O texto se orienta de acordo com as variações de categorias do problema, ou seja, variações das características dos problemas explorados por cada autor. Dependendo do sistema, modelo ou problema de engenharia que se deseja resolver, uma abordagem específica pode ser necessária, obedecendo a critérios específicos. Como ponto de partida, as seções 2.1 a 2.4 apresentam aspectos fundamentais que ajudarão a compreender alguns exemplos de problemas de otimização da confiabilidade:

- Uma visão geral das categorias de problemas de otimização da confiabilidade mais comuns na literatura;
- Estruturas lógicas mais comuns dos sistemas, em diagramas de blocos;
- Problemas formulados como mono ou multiobjetivo;
- Componentes e sistemas multi-estados.

Em seguida, na revisão bibliográfica apresentada na seção 2.5, variações do problema e diversos estudos são apresentados, abordando principalmente:

- Modelagem dentro do escopo do problema de otimização da confiabilidade;
- Aplicação de *solvers* e meta-heurísticas;
- Abordagens de linearizações do modelo.

Historicamente, os estudos no ramo de otimização da confiabilidade passaram por três momentos bem definidos com relação à complexidade dos problemas e dos métodos aplicados (COIT; ZIO, 2019): era da programação matemática; era do pragmatismo; era da melhoria ativa da confiabilidade. A era da programação matemática aplica a programação linear e programação dinâmica a problemas mais simplificados e genéricos, que na maioria das vezes obtém a solução exata do problema. A era do pragmatismo trouxe novos métodos de otimização para resolver problemas reais mais complexos, onde abordagens com métodos matemáticos menos rigorosos surgem com um bom custo-benefício. Já na terceira era, a tecnologia é implementada dentro dos processos para monitorar o comportamento dos componentes ao longo do tempo, e dessa forma oferecer soluções ainda mais inteligentes.

Vale ressaltar que alguns pontos de incerteza giram em torno de problemas práticos de otimização da confiabilidade (COIT; ZIO, 2019): falta de informação e conhecimento, aproximações matemáticas de modelo para tornar a implementação matemática viável, abundância de informação e dados, dados conflitantes, erros de medição e subjetividade nas interpretações.

## 2.1 PRINCIPAIS CATEGORIAS DO PROBLEMA

Segundo Kuo e Prasad (2000), para se estudar, analisar e melhorar a confiabilidade de um sistema é possível adotar uma das seguintes alternativas: aprimorar a confiabilidade dos componentes; acrescentar redundâncias ao sistema; combinar os dois anteriores; ou trocar componentes de posição quando for possível. Quando aprofundamos no estudo da confiabilidade de sistemas, percebemos que algumas categorias de problemas são mais comuns, tendo sempre como objetivo final a otimização da confiabilidade total do sistema. Como dito, a confiabilidade de um sistema pode ser melhorada através de, por exemplo, um maior investimento na confiabilidade de cada um de seus componentes individualmente, ou incluindo-se redundâncias no projeto dos subsistemas. Em geral, já existe um investimento por parte dos fabricantes para se melhorar a confiabilidade dos componentes respeitando determinadas faixas de custos por componente, ficando a cargo do projetista do sistema fazer uso de redundâncias, de acordo com o orçamento disponível. As principais categorias de problemas são (COIT; ZIO, 2019; ARDAKAN et al., 2017):

- Alocação de confiabilidade;
- Alocação de redundância;
- Alocação de redundância e confiabilidade;
- Atribuição de componentes;
- Sequenciamento.

No problema de alocação da confiabilidade tem-se um conjunto de opções de componentes para escolha, e o engenheiro deve selecionar para o projeto os componentes que maximizem a confiabilidade total do sistema (AHMADIZAR; SOLTANPANAH, 2011; YI et al., 2016). O problema torna-se mais complexo quando restrições de peso, volume e custo são incluídas. Encontrar a combinação ideal de componentes é o desafio neste caso. Já no problema de alocação de redundância (RAMIREZ-MARQUEZ et al., 2004; COIT, 2003), deve-se encontrar o número de redundâncias que cada subsistema deve ter a fim de maximizar a confiabilidade total dos sistema. O desafio também surge quando restrições de volume, peso e custo são impostas. O problema de alocação de redundância e

confiabilidade (HSIEH, 2003; LEVITIN et al., 1998; LIU, 2006) é uma mistura dos dois anteriores: escolha de componentes e definição da quantidade de redundâncias para os subsistemas. Nos problemas que envolvem atribuição de componentes, temos uma estrutura lógica de sistema definida, e deseja-se alocar os componentes disponíveis de maneira a maximizar a confiabilidade. Por fim, no problema de sequenciamento o desafio encontra-se em definir a melhor ordem de ativação dos componentes do estado standby para o ativo conforme necessário.

## 2.2 REPRESENTAÇÃO EM DIAGRAMA DE BLOCOS

Para se fazer análises de um sistema, seja ele em qualquer uma das classes de problemas descritas anteriormente, uma visão gráfica e clara do sistema pode apoiar o engenheiro para analisar o problema. O diagrama de blocos é uma ferramenta que facilita a representação de cenários reais, e fazer uso da visualização dos sistemas em diagrama de blocos é uma prática comum. Com relação a estruturas possíveis para os sistemas representados por diagrama de blocos, Kuo e Prasad (2000) e Mellal e Zio (2016) evidenciam as mais comuns:

- Série (Figura 2.1);
- Paralelo (Figura 2.2);
- Série-paralelo (Figura 2.3) ;
- Sistemas mais genéricos e complexos, incluindo conexões em ponte (Figura 2.4);
- Sistemas k-out-of-n, em que um determinado número k num total de n componentes em paralelo, devem funcionar para que o sistema como um todo funcione.

**Figura 2.1 – Sistema em Série**



Para sistemas em série, a confiabilidade total do sistema é o produto da confiabilidade de cada um dos subsistemas. Caso um subsistema falhe, todo o sistema também irá falhar, sendo necessário, portanto, que todos os subsistemas estejam funcionando para

Figura 2.2 – Sistema em Paralelo

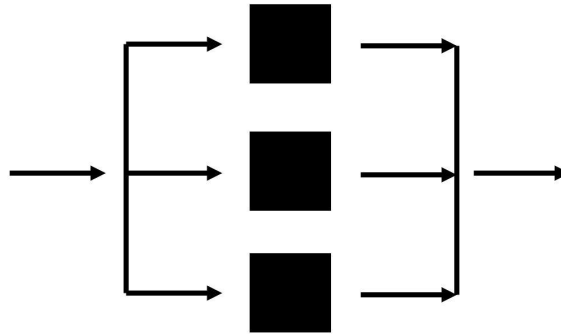


Figura 2.3 – Sistema em Série-Paralelo

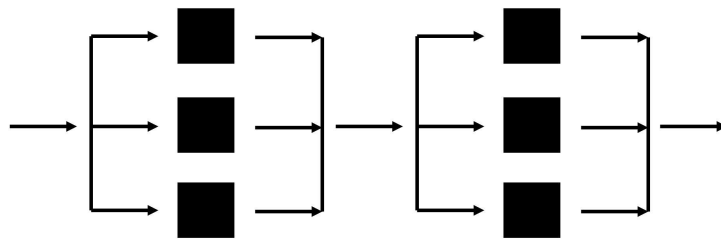
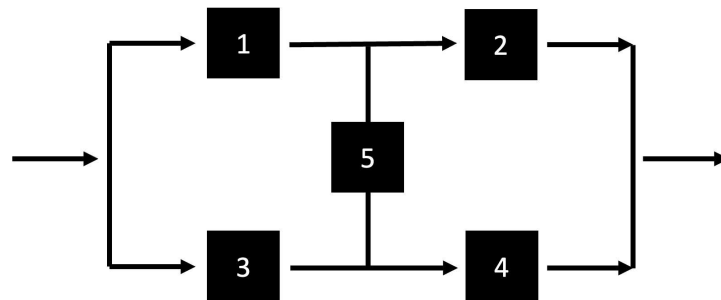


Figura 2.4 – Sistema Complexo em Ponte



que o sistema funcione. A confiabilidade para sistemas em série é definida pela Eq. (1). Para sistemas em paralelo, é necessário que pelo menos um subsistema funcione para que o sistema funcione. A confiabilidade neste caso é dada pela Eq. (2) (ZIO, 2007). A partir das duas equações anteriores, pode-se chegar à equação que modela sistemas série-paralelo, que são uma combinação de conjuntos de subsistemas em série onde cada subsistema possui redundâncias. A Eq. (3) define matematicamente a confiabilidade nestes sistemas. Considerar que:  $R_i(t)$  representa a confiabilidade do  $i$ -ésimo subsistema,  $N$  representa o total de subsistemas, e  $M_i$  representa o total de subsistemas redundantes que compõem o  $i$ -ésimo subsistema, e  $t$  representa o tempo:

$$R(t) = \prod_{i=1}^N R_i(t), \quad (1)$$

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^N (1 - R_i(t)) \quad (2)$$

$$R(t) = \prod_{i=1}^N (1 - \prod_{j=1}^{M_i} (1 - R_{ij}(t))) \quad (3)$$

Outros dois sistemas comuns porém mais complexos são os sistemas k-out-of-n e os sistemas em ponte. Em sistemas k-out-of-n, o sistema com n subsistemas em paralelo irá funcionar caso pelo menos k subsistemas dentre eles funcionem. Esta condição interfere diretamente no cálculo da função de confiabilidade total do sistema, gerando equações a depender das características do problema. Um bom exemplo ocorre no trabalho feito por [Ling et al. \(2019\)](#), que seleciona um conjunto aleatório de componentes manufaturados, e resolve o problema de alocação de componentes do sistema k-out-of-n. Já para sistemas em ponte como na Figura 2.4, [Mellal e Zio \(2016\)](#) apresentam um problema e uma equação que exemplifica seu modelo matemático (4). Neste caso, deve existir ao menos um caminho livre de subsistemas funcionando corretamente que permita que todo o sistema funcione adequadamente; no caso ilustrado pela figura, o sistema irá funcionar caso pelo menos os seguintes subsistemas funcionem: 1 e 2; ou 1, 5 e 4; ou 3, 5 e 2; ou 3 e 4.  $R_i$  representa a confiabilidade do subsistema  $i$ , e  $Q_i$  representa sua probabilidade de falha:

$$\max R_S(r, n) = R_5(1 - Q_1Q_3)(1 - Q_2Q_4) + Q_5[1 - (1 - R_1R_2)(1 - R_3R_4)] \quad (4)$$

Todas as equações para a confiabilidade de sistemas apresentadas até aqui são não-lineares, compostas muitas vezes por produtos entre as confiabilidades dos subsistemas; as equações também são contínuas com relação à variável *tempo*, e contínuas com relação à variável *confiabilidade*. É possível, entretanto, de acordo com as especificidades de cada caso, que o problema se torne discreto, inteiro ou combinatório. Com o intuito de analisar a confiabilidade de sistemas sem a interferência da variável *tempo*, é comum considerar os valores da confiabilidade dos componentes constantes, e o esforço continua voltado para se determinar a melhor alocação de componentes e de redundâncias para o sistema.

Com relação aos componentes presentes em um sistema, é natural que sofram desgaste com o passar do tempo e uso, oferecendo a cada instante seguinte uma maior probabilidade de falha. Por esse motivo, o valor da sua confiabilidade decai ao longo do seu ciclo de vida. De acordo com a informação do fabricante, o decaimento da confiabilidade

de um componente segue um determinado comportamento, a exemplo do decaimento exponencial dado pela Eq. (5).

$$R_i(t) = e^{-\lambda_i t} \quad (5)$$

### 2.3 COMPONENTES EM ESTADO ATIVO OU STANDBY

Quando se trata dos componentes em subsistemas, as redundâncias utilizadas podem ser categorizadas como (O'CONNOR; KLEYNER, 2012; ZIO, 2007):

- Redundância Ativa: neste caso, os componentes que cumprem a função de redundância ficam constantemente disponíveis para funcionarem ativamente, ou seja, ficam disponíveis da mesma maneira que o componente principal. Dessa forma, caso o componente principal falhe ou opere incorretamente, um dos componentes em redundância pode assumir imediatamente seu papel. Uma característica deste tipo de redundância é que todas as redundâncias ativas sofrem desgaste com o tempo, ainda que não estejam operando diretamente como componente principal e, portanto, estão sujeitas à mesma probabilidade de falhas que o componente primário.
- Redundância *m – out – of – n*: neste caso, m de n componentes devem estar ativos para que o sistema funcione adequadamente.
- Redundância *StandBy*: também conhecida como *cold standby*, neste caso os componentes estarão em modo de espera, desativados, e serão ativados apenas caso o componente primário falhe. Para que isto ocorra, um equipamento *switch* adicional será necessário para identificar a falha e imediatamente iniciar o processo de ativação da redundância, processo que pode ser rápido ou demorar alguns instantes. Enquanto os equipamentos em redundância estiverem inativos, não terão probabilidade de falha associada. Vale ressaltar que em alguns sistemas, a confiabilidade do *switch* pode também ser considerada, interferindo na confiabilidade total do sistema.

As equações que definem os tipos acima podem ser encontradas com mais detalhes no trabalho desenvolvido por Zio (2007).

### 2.4 PROBLEMAS MONO E MULTI-OBJETIVO

Em um problema de otimização, pode-se considerar apenas uma única função objetivo, sendo o caso do problema mono-objetivo (HAMADANI; KHORSHIDI, 2013). É o que ocorre em diversas situações quando se deseja apenas maximizar a confiabilidade do



sistema. Nestas circunstâncias, algumas restrições ao problema podem surgir, complementando o seu modelo matemático. No problema da confiabilidade, são comuns as restrições de volume total do sistema, peso total do sistema e orçamento do projeto, ou seja, o custo total do sistema. Mas os problemas não se limitam a estas condições.

Além da situação descrita acima, também é possível que um problema seja multi-objetivo, ou seja, tenha duas ou mais funções que se deseja maximizar ou minimizar. Estas funções são concorrentes, de maneira que a melhora de uma significa a piora de outra. Dentro do contexto da confiabilidade e em situações reais, minimizar o custo tende a ser uma necessidade comum e conjunta a maximizar a confiabilidade, dando ao problema o caráter multi-objetivo (BUSACCA et al., 2001; CAO et al., 2013). No trabalho desenvolvido por Cao et al. (2013), a confiabilidade é maximizada, o custo minimizado e o peso também é minimizado. Wang et al. (2009), por sua vez, incluíram o custo como função-objetivo do problema de alocação de redundância em um sistema série-paralelo, e determina a Eq. (6) abaixo, onde:  $c_i$  representa o custo de cada componente disponível para o subsistema  $i$ ,  $\alpha_i$  representa o número de componentes escolhidos para o subsistema  $i$ ,  $\Theta_i$  representa parâmetros associados aos custo do componente no subsistema  $i$ , e  $s$  representa o total de subsistemas em série.

$$C = \sum_{i=1}^s c_i [\alpha_i + e^{\Theta_i \alpha_i}] \quad (6)$$

Em problemas mono-objetivo, a solução ótima corresponde ao ponto que maximiza ou minimiza a função-objetivo. Para se encontrar a solução ótima em problemas mono-objetivo, aplica-se um algoritmo que otimize a função principal, que pode ser a confiabilidade total do sistema por exemplo, considerando as demais restrições do problema. A combinação das restrições de um problema determina sua região factível, e portanto as soluções encontradas devem respeitar todas as restrições. A depender do problema pode-se adotar diferentes técnicas para resolução: programação linear, não-linear, algoritmos exatos, métodos determinísticos, heurísticas ou meta-heurísticas. Já em problemas multi-objetivo, a noção de solução ótima é substituída pelo conceito de solução Pareto ótima (ELEGBEDE; ADJALLAH, 2003). Nestes casos, uma técnica será utilizada com o intuito de otimizar mais de uma função-objetivo simultaneamente, e traçar a Fronteira de Pareto composta pelo conjunto de soluções não dominadas. Uma solução é dita não dominada caso não se consiga encontrar uma outra solução cujo valor de todas as funções-objetivo seja melhor sem pelo menos uma piorar (COELLO, 1999). Abaixo segue um conjunto de abordagens que podem ser adotadas para solucionar problemas multi-objetivos:

- Soma ponderada: nesta abordagem as funções objetivo são somadas de forma ponde-

rada, ou seja, cada uma é multiplicada por um peso. É interessante garantir que as funções somadas esteja na mesma escala e na mesma unidade de medida. A Eq. (7) e Eq. (8) definem esta abordagem.

$$\min F(x) = \min \sum_{i=1}^k f_i(x)w_i \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^k w_i = 1 \quad (8)$$

- *Goal Programming*: cada função objetivo tem um valor alvo. O objetivo geral aqui é minimizar a diferença entre o valor da meta e o valor calculado para as funções, conforme Eq. (9).

$$\min \sum_{i=1}^k |f_i(x) - T_i| \quad (9)$$

- $\epsilon$ -restrito: neste método, uma das funções-objetivo é adotada como a função-objetivo principal a ser minimizada num novo problema mono-objetivo, e as demais  $k - 1$  funções são convertidas em restrições do problema, sendo menores que determinado valor  $\epsilon_n$  constante, onde  $k$  representa determinada função objetivo que se tornou uma restrição. Os valores de cada  $\epsilon_k$  vão sendo iterativamente incrementados, gerando novos problemas e, para cada novo problema, encontra-se uma solução ótima. Dessa maneira, um conjunto de soluções não dominadas são encontrados, definindo-se uma Fronteira de Pareto.
- Ordenamento Lexicográfico: as funções-objetivo são ordenadas por prioridade, e um primeiro problema mono-objetivo é resolvido tendo a função mais prioritária como função-objetivo. Em seguida, com o valor obtido e utilizado agora como restrição para essa mesma primeira função, um segundo problema mono-objetivo é solucionado tendo agora como função-objetivo a segunda função prioritária do ranking de prioridade. Esse processo é seguido até encontrar o valor para todas as funções, e uma solução final. Este método pode ser interessante para alguns casos específicos, favorecendo as primeiras funções otimizadas, e desfavorecendo as últimas do ranking de prioridades.
- Min-Max ou Max-Min: o problema de otimização pode ser aproximado pelo problema equivalente de minimização ou maximização dos limites superior ou inferior de um problema, respectivamente. Por exemplo, quando se deseja maximizar a confiabilidade de um sistema, pode-se optar por maximizar a confiabilidade do subsistema com menor valor de confiabilidade.

Outras alternativas que solucionam problemas multi-objetivos e oferecem a otimização de múltiplas funções e restrições, são através da aplicação de meta-heurísticas

inspiradas no conceito de computação evolucionária como, por exemplo, MOGA (Multi-Objective Genetic Algorithms), VEGA (Vector Evaluated Genetic Algorithm), NSGA (Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm), ACOA (Ant Colony Optimization Algorithm), entre outras. Esses algoritmos se baseiam em populações de soluções que, através de operações de cruzamento, mutação e seleção, geram soluções cada vez melhores, direcionadas por uma função que avalia a qualidade dos indivíduos da população com a evolução das gerações.

## 2.5 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

No problema da otimização da confiabilidade lidamos preponderantemente com problemas não lineares. Em alguns casos, como por exemplo no problema de alocação de confiabilidade, o problema pode ser NP-Difícil, como provado por [Chern \(1992\)](#), o que significa que uma solução ótima (no caso do problema mono-objetivo) não é encontrada em tempo polinomial. Para solucionar esses problemas e a depender da complexidade de cada caso, diversas heurísticas ou meta-heurísticas podem ser selecionadas como método para se chegar na melhor solução. A respeito das pesquisas e estudos feitos sobre estes métodos para resolução do problema de otimização da confiabilidade, [Kuo e Prasad \(2000\)](#) já haviam percebido algo que continua válido:

*"O maior foco de recentes trabalhos tem sido o desenvolvimento de métodos heurísticos e algoritmos meta-heurísticos para problemas de redundância e alocação de redundância. Poucos trabalhos são direcionados a soluções exatas para tais problemas."*

Além da fundamentação teórica que embasa as variações possíveis para o problema da otimização da confiabilidade, os métodos desenvolvidos e aplicados para solucionar cada tipo conduzem a abordagens variadas. O método aplicado para obtenção de uma solução depende do modelo matemático, de características próprias de uma instância do problema, e do tempo e recursos computacionais disponíveis. [Kuo e Prasad \(2000\)](#), [Ha e Kuo \(2006\)](#), [Coit e Zio \(2019\)](#) destacam algumas das principais estratégias presentes na literatura:

- Heurísticas para alocação de redundância;
- Algoritmos meta-heurísticos para alocação de redundância;
- Algoritmos exatos para alocação de redundância;
- Heurísticas para alocação de redundância e confiabilidade;

- Otimização multi-objetivo da confiabilidade.

Com o intuito de explorar melhor os trabalhos realizados por outros autores, nos parágrafos da próxima subseção serão apresentados, cronologicamente, alguns dos problemas de otimização existentes que foram estudados e solucionados. Para os trabalhos citados foram destacados suas premissas, contextos, variações do problema, modelos matemáticos e os algoritmos utilizados para resolver cada caso. Em geral, os trabalhos possuem o objetivo final de maximizar a confiabilidade total do sistema ou pelo menos mantê-la a níveis aceitáveis. Adicionalmente, em outros trabalhos, a maximização da confiabilidade foi utilizada como meio para se alcançar a otimização de outra característica do sistema, que porventura seja difícil de modelar no problema (Surrogate models) (OLIVEIRA, 2020).

### 2.5.1 Principais pesquisas

A otimização da alocação de redundâncias para sistemas multi-estados paralelos em série foi explorada por Levitin et al. (1998). Neste problema, a função objetivo do custo foi minimizada, dada a restrição da função da disponibilidade do sistema. Os componentes foram escolhidos dentre opções de mercado, e são multi-estado, ampliando o conceito de componentes que possuem apenas o estado binário: o componente pode funcionar parcialmente estando num estágio entre funcionando perfeitamente ou em falha completa. Além disso, Levitin et al. (1998) implementam a função custo - Eq. (10) - variando por fornecedor proporcionalmente à quantidade de componentes escolhidos, considerando descontos melhores no preço quantos mais componentes são adquiridos.

$$C = \sum_{i=1}^N n_i C(f_i, n_i) \quad (10)$$

Elegbede e Adjallah (2003) contribuíram implementando um Algoritmo Genético para otimizar a disponibilidade e o custo de um sistema série-paralelo reparável. O problema multi-objetivo combinatorial, com variáveis contínuas e variáveis discretas, é transformado em um problema mono-objetivo através de técnicas de ponderação e relaxando as restrições com aplicação de penalidades externas.

No trabalho feito por Kulturel-Konak et al. (2003), uma meta-heurística de busca Tabu para o Problema de Alocação de Redundância é desenvolvida, aplicada a três estudos de caso, e comparada com as soluções geradas por algoritmos genéticos, e por métodos que resolvem problemas de programação inteira. Para os casos apresentados a busca Tabu foi mais eficiente. O autor justifica, com relação à aplicação de programação dinâmica ou Programação Inteira, que:

*"Muitas vezes para aplicar estes métodos (que resolvem problemas de programação inteira, ou programação dinâmica) é necessário restringir artificialmente o espaço de busca para as soluções onde apenas um tipo de componente pode ser selecionado para cada subsistema e, então, o mesmo tipo pode ser usado para prover a redundância. Uma vez que essa restrição foi imposta, transformações podem ser aplicadas à função-objetivo e, então, a programação matemática é utilizada para obter a solução ótima."*

Já com relação aos métodos genéticos, [Kulturel-Konak et al. \(2003\)](#) ainda argumentam:

*"Algoritmos Genéticos (AG) são capazes de superar algumas das deficiências das abordagens via programação matemática e, para vários problemas, o uso de Algoritmos Genéticos têm oferecido resultados excelentes. Contudo, um algoritmo genético é uma busca baseada em população, exigindo a avaliação de múltiplas soluções potenciais (i.e., uma população) ao longo de muitas gerações. Então para alguns problemas complexos, isto resulta em um esforço computacional significativo, e uma outra abordagem mais eficiente para o problema é desejável caso consiga também produzir resultados comparáveis ou até melhores."*

Uma contribuição feita por [Billionnet \(2008\)](#) foi propor um novo modelo linear inteiro para o sistema série-paralelo. Inicialmente, o autor reescreve a função-objetivo da confiabilidade do sistema a partir de um valor limite inferior somado a um valor residual. Após uma série de manipulações matemáticas, os parâmetros da função são maximizados a fim de maximizar também o limite superior da função e, dessa forma, encontrar uma solução próxima da solução ótima. As restrições do problema são o peso e o custo total do sistema. Além disso, o autor permite que haja mais de um tipo de componente para um mesmo subsistema, ou seja, dentro de um subsistema pode haver componentes com valores de confiabilidade diversos, e não apenas de um único fornecedor.

No trabalho implementado por [Sahoo et al. \(2012\)](#), um sistema série-paralelo é solucionado através da aplicação de algoritmo genético no problema multi-objetivo. No entanto, o foco aqui foi lidar com os valores dos intervalos máximos e mínimos para as funções-objetivo. Quatro abordagens multi-objetivos foram utilizadas como inspiração: problema Tchebycheff; problema Tchebycheff ponderado; problema lexicográfico; problema lexicográfico com Tchebycheff ponderado.

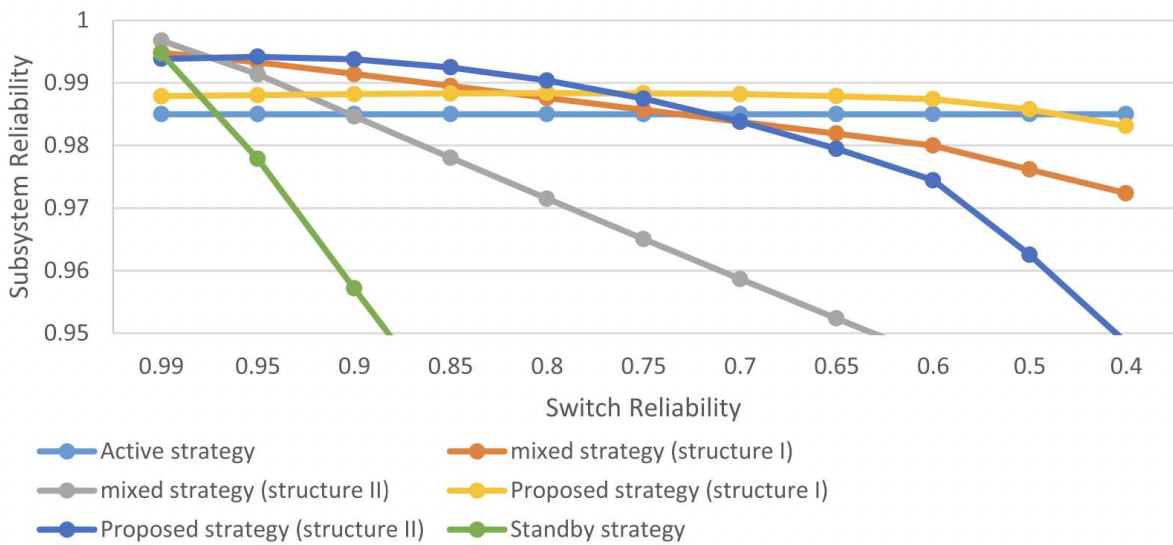
Utilizando uma abordagem orientada pela confiabilidade, o trabalho de [Dong et al. \(2015\)](#) resolve o problema de otimização multi-objetivo envolvendo a gestão de qualidade da água em um lago da China, utilizado como estudo de caso. O estudo apresenta estratégias para a redução da carga de nutrientes, e que minimizem o custo. Para estimar a Fronteira de Pareto, o trabalho aplica uma versão melhorada do algoritmo NSGA-II, chamado de Algoritmo Genético com Classificação Não Dominada e Elitismo Controlado (em inglês CE-NSGA-II, controlled elitist non-dominated sorting genetic algorithm).

O trabalho feito por [Mellal e Zio \(2017\)](#) soluciona o problema de alocação de redundância e confiabilidade em uma planta farmacêutica, implementando três técnicas: Algoritmo Genético, Algoritmo de otimização Cuckoo com funções penalizadas (em inglês PFCOA), e busca fractal estocástica guiada por penalidades (em inglês PSFS). O estudo de caso utilizado pelo autor, e originalmente apresentado por [Garg e Sharma \(2013\)](#), foi também utilizado como estudo de caso na presente dissertação. O método de busca fractal supera os outros dois com valores de confiabilidade melhores e performance com relação a tempo de execução, mostrando que os fatores de penalização dinâmica favoreceram a solução para este estudo de caso.

Quando se trata do estado dos componentes, outra abordagem também é possível: implementar uma combinação de componentes ativos e standby chamada de *k-mixed strategy*. [Ardakan e Hamadani \(2014\)](#), [Peiravi et al. \(2019\)](#) fazem uma releitura de trabalhos nesse sentido, e oferecem uma solução combinada em que um número mínimo de componentes deve sempre estar ativo, e os demais em standby. Caso o componente principal em uso falhe, outro componente redundante ativo toma o seu lugar. Então, um componente em standby é ativado, mantendo o número pré-definido de componentes ativos em redundância. Essa abordagem minimiza a dependência da confiabilidade do sistema à confiabilidade do *switch*, equipamento que realiza a ativação de componentes em standby quando o principal falha. Um resultado importante apresentado pelo autor está ilustrado na Figura 2.5, onde é apresentada, graficamente, a variação da confiabilidade de um subsistema com quatro componentes sob diferentes estratégias, em resposta à confiabilidade do switch. Observa-se que a estratégia standby sofre duramente com a queda da confiabilidade do switch. Já a estratégia ativa não sofre interferências, porém tem um limite máximo de confiabilidade menor. Por fim, as estratégias combinadas oferecem uma dependência menor da confiabilidade do sistema com relação à confiabilidade do switch, com valores satisfatórios ainda que a confiabilidade do switch diminua consideravelmente.

Os problemas de otimização da confiabilidade são originalmente não lineares em função do valor da confiabilidade total do sistema. Alguns autores desenvolvem estratégias para estudos de casos específicos linearizando o problema. [Caserta e Voß \(2015\)](#), por exemplo, apresentam uma proposta de modelagem matemática em que o problema

**Figura 2.5 – Variação da confiabilidade do subsistema em resposta à confiabilidade do switch para cada abordagem**



Fonte: (PEIRAVI et al., 2019)

da confiabilidade é equivalente ao problema da mochila, com opções de configuração dos subsistemas que podem ser ou não adotadas. Nas próximas sessões, serão apresentados os trabalhos realizados por outros autores acerca da linearização do problema da confiabilidade.

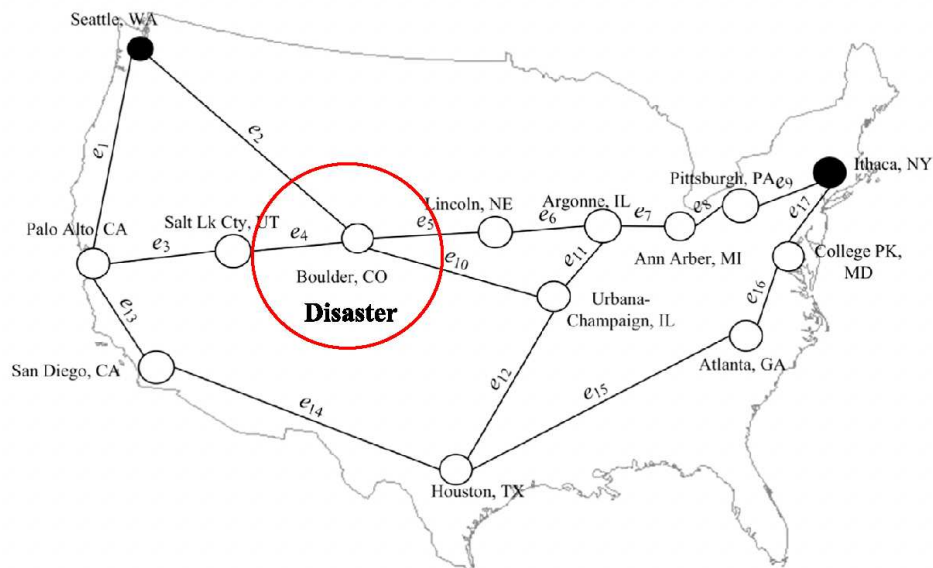
Levitin et al. (2016) apresentam a aplicação de um algoritmo genético ao problema da alocação de redundância em um sistema série-paralelo. Neste caso, foram utilizadas redundâncias do tipo *warm*, ou seja, podendo assumir estados intermediários entre os estados *cold standby* e *ativo*. Nesse trabalho foi permitida a alocação de componentes de fornecedores diversos, com valores de confiabilidade variados, em um mesmo subsistema.

No contexto de abordagens evolucionárias, Mellal e Zio (2016) se destacam pela aplicação de um algoritmo de busca fractal estocástica guiada por penalidade aplicado a diversas variações do problema de otimização da confiabilidade.

A estabilidade de redes de computadores é fundamental para a sociedade atual, e uma forma de garantir essa estabilidade é maximizando a confiabilidade dos seus componentes. Uma rede de computadores pode ser multi-estado, de maneira que uma determinada borda da rede pode transmitir dados parcialmente até um determinado valor máximo, ou não transmitir nenhum. O sucesso de uma rede multi-estado é medido pela sua capacidade em transmitir um valor mínimo de dados. Também é possível que a rede seja bi-estado, ou seja, cada borda da rede pode assumir apenas o estado de funcionar ou falhar totalmente. Nesse contexto, o trabalho desenvolvido por Yeh e Fiondella (2017)

realiza a maximização da confiabilidade de uma rede de computadores através da alocação de redundâncias para suas linhas físicas, aumentando sua capacidade de transmissão. Cada linha física adicionada a uma determinada borda da rede é bi-estado, sendo que a borda poderá, por sua vez, assumir multi-estados seguindo uma distribuição binomial, conforme o estado das linhas que a compõem: funcionando perfeitamente ou em falha total. Para resolver este problema, foi aplicada uma abordagem via Simulated Annealing (SA) que encontra uma solução ótima aproximada, evitando convergir precipitadamente para ótimos locais. Para complementar o SA, são aplicadas buscas locais 1-opt e 2-opt, obtendo-se soluções através da variação de um ou dois componentes da solução. [Yeh e Fiondella \(2017\)](#) mostram, na Figura 2.6, uma das redes utilizada como estudo de caso, trazendo como resultado os valores apresentados na Figura 2.7, comparando a abordagem proposta via SA com outros algoritmos. Na Figura 2.8, é feita uma comparações acerca dos tempos de convergência para cada algoritmo.

**Figura 2.6 – Rede de computadores cuja confiabilidade foi otimizada**



**Fonte: (YEH; FIONDELLA, 2017)**

Embora em diversos trabalhos a confiabilidade dos componentes seja considerada constante, o seu desgaste pode variar com o tempo. O trabalho apresentado por [Ardakan et al. \(2017\)](#) explora esses desgastes, utilizando diferentes taxas de falha: exponencial; gamma; e Weibull. A Figura 2.9 compara o decaimento de três componentes diferentes num dado exemplo proposto no trabalho. Uma contribuição importante aqui foi utilizar como função-objetivo a função de *Mission Design Life* (MDL), que é a integral da confiabilidade

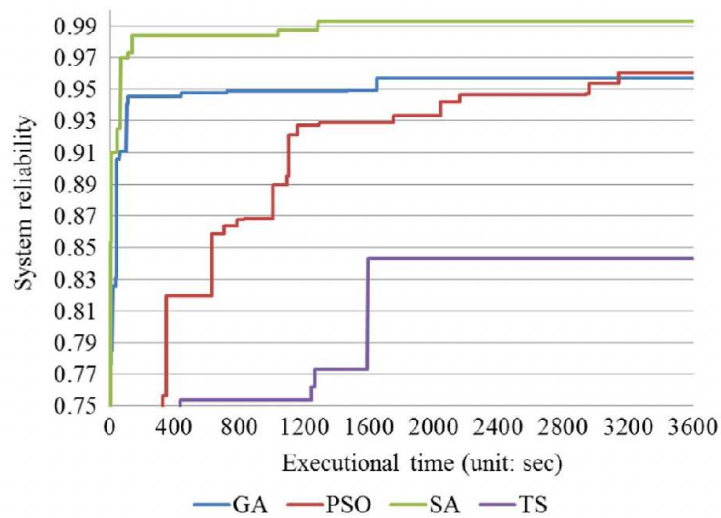


Figura 2.7 – Resultados da otimização sobre a rede da Figura 2.6

Soft computing algorithm	Average maximal reliability	Average iteration number	Best redundancy allocation	Corresponding cost	Largest maximal reliability
GA	0.95597	1186	(3, 3, 1, 1, 3, 3, 4, 4, 4, 1, 3, 1, 2, 2, 3, 2, 3)	1,199,430	0.95705
PSO	0.95619	2766	(1, 5, 2, 1, 3, 3, 4, 5, 5, 2, 3, 1, 1, 1, 2, 2, 2)	1,196,580	0.96059
SA	<b>0.99215</b>	2771	(2, 3, 2, 3, 3, 3, 2, 3, 2, 2, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 3)	1,195,020	<b>0.99320</b>
TS	0.81097	3418	(3, 3, 3, 2, 3, 2, 2, 2, 2, 3, 2, 3, 2, 0, 3, 0)	1,194,300	0.84348

Fonte: (YEH; FIONDELLA, 2017)

Figura 2.8 – Comparação entre os tempos de convergências da solução



Fonte: (YEH; FIONDELLA, 2017)

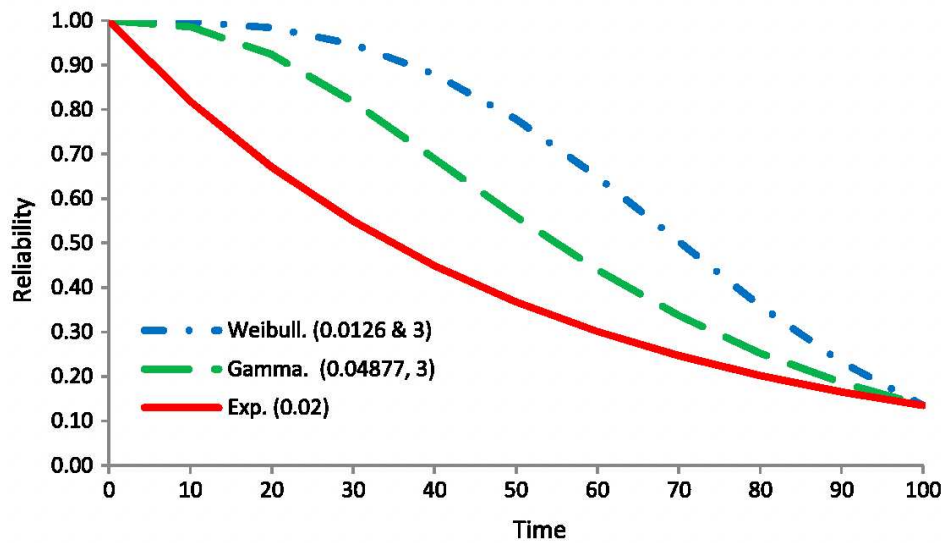
do sistema entre o tempo inicial de operação até o fim do tempo de missão do sistema (*mission time*), conforme mostrado na Eq. (11).

$$\max MDL = \int_0^{Missiontime} R(t)dt \quad (11)$$

Mellal e Zio (2018) maximiza a disponibilidade de um sistema série-paralelo, e o algoritmo *Cuckoo* oferece a melhor performance para o estudo de caso apresentado quando comparado com a resolução via outros algoritmos: algoritmo genético, evolução diferencial, algoritmo de enxame de partículas, algoritmo de polinização de flores.

As paradas em sistemas podem ser causadas por falhas de componentes. Algumas empresas especializadas, ou os próprios fabricantes de peças, equipamentos e componentes, oferecem serviços para garantir a operação de um sistema e níveis aceitáveis de confiabilidade. No trabalho feito por Ge et al. (2018), as paradas causadas por falhas dos componentes são utilizadas para calcular penalizações previstas em contrato com a empresa prestadora do serviço. O autor projeta a confiabilidade para componentes críticos em

Figura 2.9 – Comparação entre as curvas de falha para 3 tipos de componentes



Fonte: (ARDAKAN et al., 2017)

um sistema em série, submetidos a um contrato de serviço que estabelece limites para os tempos de parada por falha que, caso excedidos, geram multas contratuais. O objetivo central do trabalho foi minimizar o Custo do Ciclo de Vida do sistema dentro do período de serviço do contrato.

O trabalho realizado por Du e Li (2020) propõe uma metodologia em que um algoritmo evolucionário foi aprimorado através de busca local resolvendo o problema de alocação de redundâncias não homogêneas em sistemas série-paralelo multi-estados. Neste problema, são aceitos mais de um tipo de componentes em redundância por subsistema, e não apenas de um tipo. Além disso, os componentes podem assumir estados intermediários entre o funcionamento perfeito e a falha total. Uma contribuição deste trabalho foi o uso de um algoritmo memético evolucionário com inspiração quântica, através da aplicação de buscas locais ao longo da evolução da solução. Esta abordagem evita que muito esforço computacional seja consumido pelo algoritmo evolucionário para encontrar soluções ótimas locais, que poderiam ser rapidamente encontradas através de buscas locais.

### 2.5.2 Linearização utilizando Max Min

Ramirez-Marquez et al. (2004) definem as funções-objetivo equivalentes como funções que tenham a mesma solução ótima embora não sejam funções matematicamente iguais. Os autores explicam que resolver uma função equivalente mais simples para alcançar a solução ótima pode ser uma alternativa melhor para evitar caminhos matematicamente mais complicados. Funções equivalentes se baseiam na observação de que:

- Um valor constante idêntico pode ser subtraído do valor da confiabilidade de cada subsistema e, ainda assim, a solução ótima permanecerá a mesma;
- A solução que maximiza o logaritmo da confiabilidade do subsistema também maximiza a confiabilidade do subsistema.

No contexto do problema da alocação de confiabilidade e redundância, obter uma solução que maximize a confiabilidade do subsistema menos confiável, ou seja, maximize a confiabilidade do subsistema com o menor valor de confiabilidade, talvez possa maximizar também a confiabilidade total do sistema. [Ramirez-Marquez et al. \(2004\)](#) apontam nesse sentido, apresentando uma alternativa de aproximação para a função-objetivo original na Eq. (12), com as restrições de custo e peso:

$$\max (\min_i R_i(x_{ij})), \quad R_i(x_{ij}) = 1 - \prod_j (1 - r_{ij})^{x_{ij}} \quad (12)$$

sujeito a:

$$\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \leq C, \quad (13)$$

$$\sum_i \sum_j w_{ij} x_{ij} \leq W, \quad (14)$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}^+, \quad (15)$$

Outra representação comum para o modelo apresentado acima pode ser ilustrado pelas Eq. (16) a (22), abaixo. Um valor de confiabilidade  $z$  é maximizado e utilizado como restrição e limite inferior para todos os subsistemas, inclusive o subsistema com o menor valor de confiabilidade. Nesta representação, o problema continua sendo não linear inteiro:

$$\max z, \quad (16)$$

Restrito por,

$$\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \leq C, \quad (17)$$

$$\sum_i \sum_j w_{ij} x_{ij} \leq W, \quad (18)$$

$$\prod_j (1 - r_{1j})^{x_{1j}} \geq z, \quad (19)$$

$$\prod_j (1 - r_{2j})^{x_{2j}} \geq z, \quad (20)$$

...

$$\prod_j (1 - r_{sj})^{x_{sj}} \geq z, \quad (21)$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}^+, \quad (22)$$

Então, para se alcançar uma aproximação linear para a Eq. (12), a sequência de funções-objetivo equivalentes, de (23) a (27) é proposta por Ramirez-Marquez et al. (2004). Inicialmente, a Eq. (24) foi obtida a partir da Eq. (23) retirando-se a constante de valor 1:

$$\max [\min_i 1 - \prod_j (1 - r_{ij})^{x_{ij}}], \quad (23)$$

$$\max [\min_i - \prod_j (1 - r_{ij})^{x_{ij}}], \quad (24)$$

$$\max [-\max_i \prod_j (1 - r_{ij})^{x_{ij}}], \quad (25)$$

$$\max [-\max_i \sum_j x_{ij} \ln(1 - r_{ij})], \quad (26)$$

$$\max \min_i \sum_j -x_{ij} \ln(1 - r_{ij}), \quad (27)$$

A Eq. (26) e Eq. (27) foram obtidas aplicando-se o logaritmo sobre a função anterior. Dado que os valores de  $r_{ij}$  são previamente conhecidos, os termos do logaritmo podem ser pré-calculados. Portanto, os termos do somatório são lineares, o que facilita a resolução do problema de maximização.

### 2.5.3 Linearização utilizando Min Max

Hsieh (2003) expande o problema geral da alocação de confiabilidade e redundância em sistemas série-paralelo, oferecendo uma escolha múltipla de componentes para os subsistemas. A função-objetivo original é apresentada na Equação (28), baseada nos valores para as probabilidades de falhas dos componentes onde:  $q_{i,j}$  representa a probabilidade de falha do componente  $j$  no subsistema  $i$ ;  $k_i$  representa a quantidade máxima de opções de componentes para determinado subsistema  $i$ ; e  $x_{i,j}$  representa a quantidade utilizada de componentes do tipo  $j$  para determinado subsistema  $i$ .

$$\max \prod_{i=1}^n (1 - q_{i,1}^{x_{i,1}} q_{i,2}^{x_{i,2}} \dots q_{i,k_i}^{x_{i,k_i}}) \quad (28)$$

Uma aproximação matemática é proposta pelo autor, com o objetivo de obter a simplificação e linearização do modelo. Para tanto, o autor introduz o Lema 1 - Equação (29), cuja prova foi apresentada por Horn e Johnson (2012).

**Lema 1.**

$$1 - \sum_{i=1}^n (q_{i,1}^{x_{i,1}} q_{i,2}^{x_{i,2}} \dots q_{i,k_i}^{x_{i,k_i}}) \leq \prod_{i=1}^n (1 - q_{i,1}^{x_{i,1}} q_{i,2}^{x_{i,2}} \dots q_{i,k_i}^{x_{i,k_i}}) \leq \left( 1 - \sum_{i=1}^n \frac{(q_{i,1}^{x_{i,1}} q_{i,2}^{x_{i,2}} \dots q_{i,k_i}^{x_{i,k_i}})}{n} \right)^n \quad (29)$$

A partir da Equação (29), a maximização da função-objetivo em (28) pode ser aproximada por (30):

$$\min \sum_{i=1}^n (q_{i,1}^{x_{i,1}} q_{i,2}^{x_{i,2}} \dots q_{i,k_i}^{x_{i,k_i}}) \quad (30)$$

Além disso, o autor segue adiante considerando que, para todo  $i$ :

$$(q_{i,1}^{x_{i,1}} q_{i,2}^{x_{i,2}} \dots q_{i,k_i}^{x_{i,k_i}}) \leq \max_{1 \leq i \leq n} (q_{i,1}^{x_{i,1}} q_{i,2}^{x_{i,2}} \dots q_{i,k_i}^{x_{i,k_i}}) \quad (31)$$

O que implica na seguinte relação:

$$\min \sum_{i=1}^n (q_{i,1}^{x_{i,1}} q_{i,2}^{x_{i,2}} \dots q_{i,k_i}^{x_{i,k_i}}) \leq n \min \max_{1 \leq i \leq n} (q_{i,1}^{x_{i,1}} q_{i,2}^{x_{i,2}} \dots q_{i,k_i}^{x_{i,k_i}}) \quad (32)$$

Então, o problema originalmente apresentado em (28) pode ser reformulado como:

$$\min \max_{1 \leq i \leq n} (q_{i,1}^{x_{i,1}} q_{i,2}^{x_{i,2}} \dots q_{i,k_i}^{x_{i,k_i}}) \quad (33)$$

Em seguida, o autor apresenta a igualdade da Eq. (34), e propões um problema alternativo e linear na Eq. (35).

$$\max_{1 \leq i \leq n} (q_{i,1}^{x_{i,1}} q_{i,2}^{x_{i,2}} \dots q_{i,k_i}^{x_{i,k_i}}) = e^{-T} \quad (34)$$

$$\max T \quad (35)$$

Em resumo, a ideia inicial apresentada por Hsieh (2003) foi utilizar os valores de probabilidade de falha para os subsistemas, e minimizar as falhas do subsistema com a maior probabilidade de falha. Em seguida, após algumas transformações matemáticas, sugeriu um problema linear equivalente cuja resolução também resolve o problema inicialmente apresentado.

#### 2.5.4 Linearização via decomposição do problema

Para o problema de alocação de redundâncias em sistemas série-paralelo, uma alternativa foi proposta por Cao et al. (2013), que seguiu três etapas, inspiradas por três proposições:

1. A aplicação do logaritmo sobre a função-objetivo original, preserva a ordem do ranqueamento das soluções. A função transformada é, portanto, uma função monotônica, e é o primeiro passo para a adaptação do problema.
2. Qualquer solução não dominada do problema da alocação de confiabilidade e redundância em um sistema série-paralelo pode ser obtida através da combinação das soluções não dominadas do problema resolvido à parte para cada um de seus subsistemas. O problema original, portanto, pode ser decomposto em subproblemas, um por subsistema. Os subproblemas multi-objetivos são resolvidos individualmente pelo método que o autor chama de *Enhanced Adaptive  $\epsilon$ -constraint Method*.
3. Por fim, todas as soluções não dominadas são combinadas, filtradas, e uma fronteira de Pareto final é estimada.

Tendo em mente os itens mencionados acima, Cao et al. (2013) propõe uma primeira etapa de linearização para o problema a partir da função original apresentada na Eq. (36), que representa o valor para a confiabilidade total de um sistema série-paralelo. Então, o autor obtém o problema equivalente  $\max f'_R(x)$  e, em seguida, o problema

equivalente  $\min f_R''(x)$ , como podem ser vistos nas equações abaixo, onde  $x_{ij}$  corresponde à quantidade de componentes do tipo  $j$  no subsistema  $i$ .

$$\max f_R(x) = \prod_{i=1}^s [1 - \prod_{j=1}^m (1 - r_{ij})^{x_{ij}}] \quad (36)$$

$$f_R'(x) = \log[ f_R(x) ] \quad (37)$$

$$\max f_R'(x) = \log[ \prod_{i=1}^s [1 - \prod_{j=1}^m (1 - r_{ij})^{x_{ij}}] ] = \sum_{i=1}^s \log[1 - \prod_{j=1}^m (1 - r_{ij})^{x_{ij}}] \quad (38)$$

A partir da Eq. (38) o problema foi decomposto em subproblemas, representados pelos termos do somatório, um para cada subsistema. Também foi possível retirar a constante de valor 1 do logaritmo, preservando a solução ótima da função (transformação monotônica). E, por fim, foi possível retirar o sinal negativo anterior ao produtório, transformando o problema de maximização em minimização. Dessa maneira, o problema equivalente na Eq. (39) é obtido.

$$\min f_R''(x) = \log[ \prod_{j=1}^m (1 - r_{ij})^{x_{ij}} ] = \sum_{j=1}^m \log(1 - r_{ij}) x_{ij} \quad (39)$$

A equação proposta em (39) é linear para o problema de alocação de redundância e, portanto, mais simples do que o originalmente proposto em (36). A partir de então, para cada subsistema  $i$  o problema foi resolvido, obtendo-se  $i$  conjuntos de soluções não dominadas. Por fim, esses conjuntos foram agrupados, e a fronteira de Pareto final foi obtida.

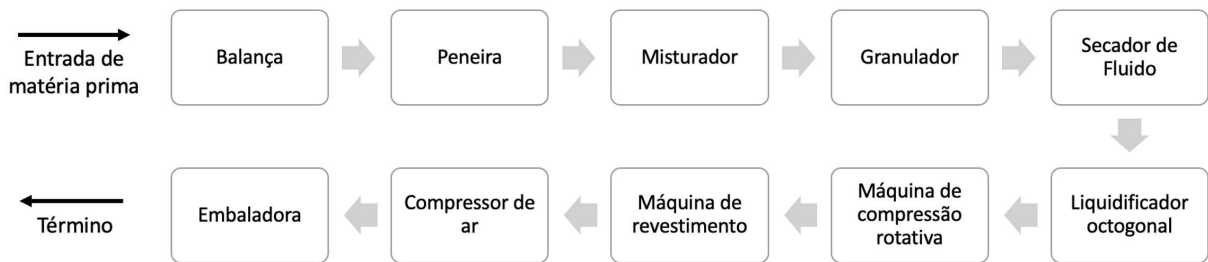
### 3 MATERIAIS E MÉTODOS

#### 3.1 ESTUDO DE CASO

Com o intuito de avaliar um problema de engenharia, este trabalho de dissertação escolheu um estudo de caso envolvendo a minimização do custo total e a maximização da confiabilidade total de um sistema, lidando com o problema multi-objetivo. Com relação às variáveis de decisão, trata-se do problema de alocação de redundância e de confiabilidade.

O estudo de caso adotado foi inspirado nos trabalhos desenvolvidos por Mellal e Zio (2017), Mellal e Zio (2016), Garg e Sharma (2013), acerca de uma planta farmacêutica, composta por um sistema série-paralelo com dez subsistemas. O diagrama de blocos apresentado na Figura 3.1 ilustra o estudo de caso.

Figura 3.1 – Sistema de uma planta farmacêutica



Originalmente descrito por Garg e Sharma (2013), este problema de otimização foi modelado matematicamente pelas equações (40) a (46), como um sistema série-paralelo com redundâncias ativas. A Eq. (40) determina a confiabilidade total do sistema, que deve ser maximizada. As restrições de Volume (41), Custo (42) e Peso (43) têm um valor máximo, ou seja, não podem exceder determinado limite de valores.  $T$ ,  $V$ ,  $C$ ,  $W$  são constantes e considerados como  $V = 270$ ,  $C = 480$ ,  $W = 519$ ,  $T = 1000$ .  $r_i$  e  $n_i$  representam a confiabilidade adotada pelos componentes e o número de componentes em cada subsistema, respectivamente. Os valores de  $v_i$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $w_i$  representam os parâmetros físicos dos subsistemas e são apresentados na Tabela I. Todos os valores mencionados anteriormente foram apresentados por Mellal e Zio (2017).

$$Max R(r, n) = \prod_{i=1}^{10} [1 - (1 - r_i)^{n_i}] \quad (40)$$



Sujeito a,

$$g_1(r, n) = \sum_{i=1}^{10} v_i n_i^2 \leq V, \quad (41)$$

$$g_2(r, n) = \sum_{i=1}^{10} \alpha_i \left( -\frac{T}{\ln r_i} \right)^{\beta_i} \left[ n_i + \exp\left(\frac{n_i}{4}\right) \right] \leq C, \quad (42)$$

$$g_3(r, n) = \sum_{i=1}^{10} w_i n_i \exp\left(\frac{n_i}{4}\right) \leq W, \quad (43)$$

$$r_i \in ]0, 1[, \quad (44)$$

$$n_i \in \mathbb{Z}^+, \quad (45)$$

$$i = 1, 2, 3 \dots 10 \quad (46)$$

**Tabela 3.1 – Parâmetros físicos do estudo de caso**

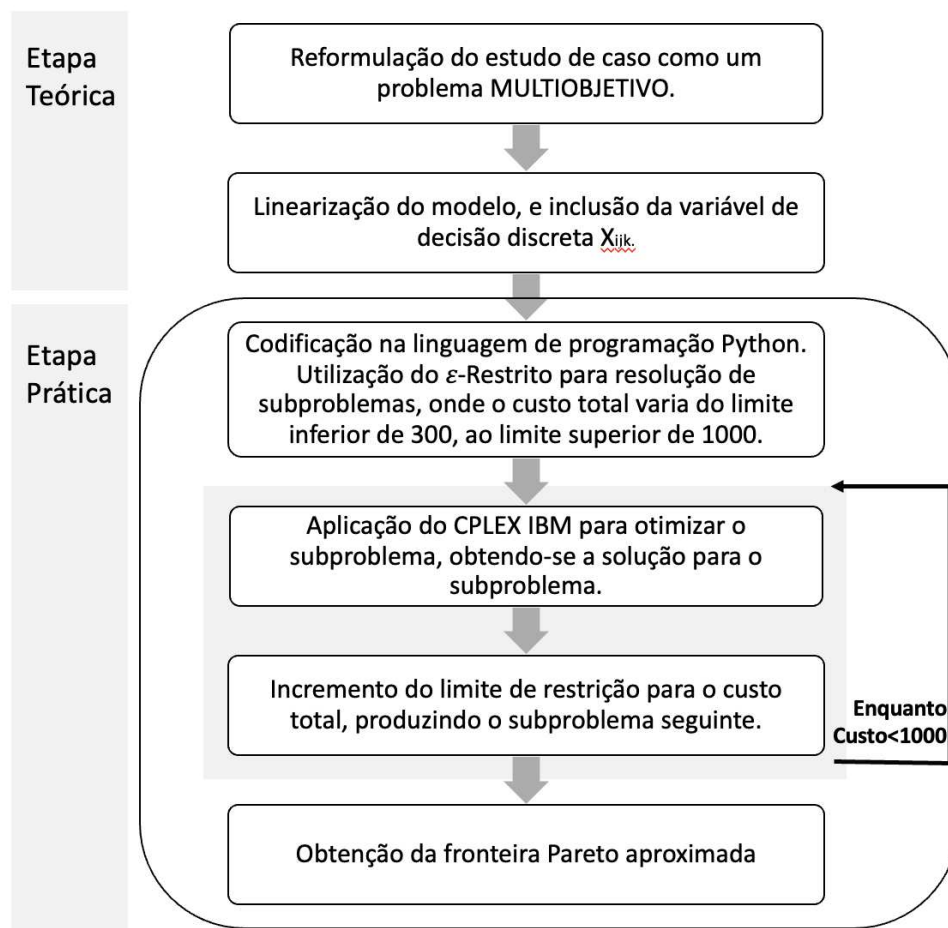
Subsistema i	$10^5 \alpha_i$	$\beta_i$	$v_i$	$w_i$
1	0.611360	1.5	4	9
2	4.032464	1.5	5	7
3	3.578225	1.5	3	5
4	3.654303	1.5	2	9
5	1.163718	1.5	3	9
6	2.966955	1.5	4	10
7	2.045865	1.5	1	6
8	2.649522	1.5	1	5
9	1.982908	1.5	4	8
10	3.516724	1.5	4	6

O modelo apresentado acima é não linear e NP-Difícil (CHERN, 1992) e, portanto, aceita um número infinito de possibilidades para os valores de confiabilidade dos componentes. Mas em situações reais, é comum haver uma limitação de fornecedores e dos componentes que podem ser escolhidos, e as empresas lidam com o que o mercado oferece. Além disso, raramente os componentes necessários são produzidos sob demanda e, por isso, o problema pode ser tratado como um problema discreto, adaptando o problema de alocação de redundância e confiabilidade para um problema combinatório. Pensando nos pontos acima mencionados, uma nova proposta de modelagem será proposta a seguir.

### 3.2 METODOLOGIA

Para lidar com o problema originalmente apresentado pelo estudo de caso, o primeiro passo foi a transformação do modelo, que se deu através das seguintes etapas: linearização; reformulação do problema como multiobjetivo; e utilizando-se 300 variáveis de decisão. Em seguida, técnicas específicas foram aplicadas para sua resolução. Nas próximas subseções, estes pontos serão aprofundados. A Figura 3.2 ilustra a visão geral para a metodologia adotada.

Figura 3.2 – Visão geral para a metodologia adotada



#### 3.2.1 Modelo Proposto

Duas motivações principais justificam a proposta de um novo modelo matemático para o estudo de caso apresentado. Primeiramente, em problemas reais de otimização da confiabilidade de sistemas, além de maximizar a confiabilidade total do sistema, é comum também minimizar o seu custo total, ou seja, o custo somado de todos os seus subsistemas. Por esse motivo, a primeira adaptação proposta é tornar o custo uma função objetivo - até

então uma restrição. Dessa maneira, também será possível obter não apenas uma solução única tendo o custo especificado como restrição, e sim várias soluções para análise.

Outra característica real que também pode ser absorvida, e oferece uma possibilidade de adaptação para o estudo de caso proposto é: no mercado de componentes, os fabricantes disponibilizam um cardápio de opções de produtos, cada qual com sua confiabilidade definida; Cabe ao projetista, escolher o componente que melhor lhe atenda. Por isso, fica mais próximo da realidade considerar um modelo matemático com valores discretos para a confiabilidade dos componentes, e não considerar valores contínuos. Dessa forma, as equações que dependem do valor da confiabilidade dos componentes se tornam inteiras, e não mais contínuas, através da inserção da variável discreta  $X_{ijk}$ . Isto aproxima as técnicas de solução do problema da confiabilidade às técnicas de solução do problema da mochila: selecionar itens que maximizem a confiabilidade total e minimizem o custo ao mesmo tempo, dadas as restrições de peso total e volume total do sistema.

Dadas as considerações do parágrafo anterior, e também considerando que uma transformação logarítmica mantém a ordem do ranqueamento das soluções de uma função (transformação monotônica) conforme ilustrado na Seção 2.5.4, este trabalho de dissertação propõe os passos feitos nas equações (47) a (49), onde:

1. A eq. (47) introduz uma função de confiabilidade  $R'_i(r, n)$  obtida da transformação logarítmica da função objetivo do problema original (40).
2. A eq. (48) refina a transformação logarítmica, fazendo que o produto de termos dos subsistemas se torne um somatório de termos.
3. A eq. (49) introduz a função de confiabilidade  $R''_i(r, n)$  considerando a limitação adicional de possibilidades pré-definidas de fornecedores (e componentes), com valores de confiabilidade conhecidos. Os termos com o logaritmo tornam-se constantes pré-calculadas. Para cada subsistema  $i$ , os índices  $j$  e  $k$  variam representando o fornecedor e a quantidade de componentes, respectivamente. Para  $j$ , três possibilidades de fornecedores são assumidas, oferecendo três possibilidades de componentes para cada subsistema.  $k$ , por sua vez, pode assumir valores inteiros de um a dez. A variável de decisão  $X_{ijk}$  é uma matriz de dimensão  $10 \times 3 \times 10$  de acordo com os índices  $i, j, k$  respectivamente, contendo portanto um total de 300 posições onde cada posição pode assumir o valor zero ou um. Assumir o valor um para determinada posição  $i, j, k$  significa que para o subsistema  $i$ , uma determinada quantidade  $k$  do fornecedor  $j$  foi escolhida.
4. Uma nova restrição foi incluída, permitindo que apenas um fornecedor específico  $j$  possa ser escolhido por subsistema. Também pode ser escolhida apenas uma

quantidade específica  $k$  de componentes para cada subsistema.

5. As inequações das demais restrições foram adaptadas considerando as informações acima.

Portanto, um novo modelo linear inteiro é proposto nas equações (50) a (58), maximizando a confiabilidade  $R(r, n)$  e minimizando o custo  $C(r, n)$ , que são as funções-objetivo do problema. As restrições de peso total (53) e volume total (52) são consideradas, e também são lineares e discretas. A Eq. (54) define que, para cada subsistema, apenas um tipo de fornecedor e componente pode ser escolhido, ou seja, não é possível escolher, para um mesmo subsistema, vários componentes com valores de confiabilidade diferentes.

Etapas para a transformação:

$$R'(r, n) = \log[R(r, n)] \quad (47)$$

$$\text{Max } R'(r, n) = \log\left[\prod_{i=1}^{10} [1 - (1 - r_i)^{n_i}]\right] = \sum_{i=1}^{10} \log[1 - (1 - r_i)^{n_i}] \quad (48)$$

$$\text{Max } R''(X) = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^{10} \log[1 - (1 - r_{ij})^k] \cdot X_{ijk} \quad (49)$$

Os termos presentes nos somatórios da eq. (49) envolvem o logaritmo de valores entre zero e um, o que resulta em valores negativos. A fim de facilitar a visibilidade gráfica da função objetivo, uma constante de valor um foi adicionada em cada termo do somatório. Como já foi abordado, um valor constante pode ser adicionado ou subtraído da função objetivo, que sua solução ótima ainda permanecerá a mesma. Então, segue abaixo o modelo proposto:

$$\text{Max } R'''(X) = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^{10} [1 + \log[1 - (1 - r_{ij})^k]] \cdot X_{ijk} \quad (50)$$

$$\text{Min } C(X) = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^{10} \alpha_i \left(-\frac{T}{\ln r_{ij}}\right)^{\beta_i} \left[k + \exp\left(\frac{k}{4}\right)\right] \cdot X_{ijk}, \quad (51)$$

Sujeito a,

$$g_1(X) = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^{10} v_i k^2 \cdot X_{ijk} \leq V, \quad (52)$$

$$g_2(X) = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^{10} w_i k \exp\left(\frac{k}{4}\right) \cdot X_{ijk} \leq W, \quad (53)$$

$$g_3(X) = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^{10} X_{ijk} = 1, \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, \quad (54)$$

$$i, j, k \in \mathbb{Z}^+ \quad (55)$$

$$i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad (56)$$

$$j \in \{1, 2, 3\} \quad (57)$$

$$k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad (58)$$

Uma das premissas já descritas para a transformação do estudo de caso como um problema inteiro é que exista no mercado um cardápio de opções de componentes oferecidos por determinados fornecedores. Para ilustrar essa situação, os valores para a confiabilidade dos componentes oferecidos por três fornecedores para cada subsistema foram gerados por sorteio seguindo uma distribuição uniforme, entre os valores 0,80 e 0,95. A Tabela 3.2 apresenta uma lista gerada, e que foi utilizada nesta implementação.

**Tabela 3.2 – Lista de opções de componentes gerados aleatoriamente**

Subsistema i	Fornecedor 1	Fornecedor 2	Fornecedor 3
$r_{1j}$	0,93	0,83	0,91
$r_{2j}$	0,88	0,88	0,85
$r_{3j}$	0,83	0,90	0,90
$r_{4j}$	0,93	0,87	0,85
$r_{5j}$	0,83	0,89	0,89
$r_{6j}$	0,83	0,82	0,87
$r_{7j}$	0,80	0,86	0,89
$r_{8j}$	0,94	0,88	0,87
$r_{9j}$	0,89	0,87	0,83
$r_{10j}$	0,85	0,86	0,90

### 3.2.2 Aplicação do otimizador CPLEX

A Era da Programação Linear desenvolveu muitas pesquisas para lidar com problemas lineares (COIT; ZIO, 2019), e as técnicas têm evoluído para oferecer variadas opções que podem ser adotadas em contextos específicos. Alguns artigos descrevem a evolução dos trabalhos de programação linear e sua história (ORCHARD-HAYS, 1990; TODD, 2002), e os métodos que fornecem boas alternativas de uso, entre os quais: Simplex, Pontos Interiores e Método do Gradiente. O método Simplex é popularmente utilizado por sua facilidade de implementação e praticidade.

Existem várias opções de ferramentas e bibliotecas disponíveis em diversas linguagens de programação que podem ser utilizadas para resolver problemas de otimização. Essas ferramentas implementam algoritmos já estudados pela literatura, e oferecem facilidades para a implementação do modelo matemático de um problema. Entre as opções disponíveis no mercado, segundo Anand et al. (2017), são:

- Otimizadores de código aberto e gratuitos: LINDO, GNU Linear Programming Kit, Genetic Constraint Development Environment (GECODE), LP-Solve, MIDACO.
- Otimizadores comerciais: Front Line, CONOPT, KNITRO, Fort MP - OPTI Risk Systems, XA-Sunset Software Technologies, OML - KETRON Management, MOSEK, CPLEX, GUROBI, XPRESS.

O *solver* IBM ILOG CPLEX OPTIMIZER é uma ferramenta de software utilizada para resolver problemas de otimização linear, e foi escolhido para este trabalho de dissertação. O CPLEX possui uma API específica para a linguagem de programação Python que foi utilizada juntamente com o ambiente de desenvolvimento *Jupyter Notebook*, uma IDE que se baseia em navegadores web como ambiente de programação. Diversas pesquisas e trabalhos foram realizados utilizando o CPLEX, como Galankashi et al. (2020) que resolveram um problema multiobjetivo com quatro funções objetivo, e Atta e Sen (2020) que compararam uma abordagem que utiliza o CPLEX com outra abordagem baseada em evolução diferencial.

Segundo disponível em IBM (2021): "O CPLEX Optimizer fornece resolvidores de programação matemática flexíveis e de alto desempenho para programação linear, programação inteira mista, programação quadrática e problemas de programação quadraticamente restritos. Esses resolvidores incluem um algoritmo paralelo distribuído para programação inteira mista para impulsionar vários computadores para resolver problemas difíceis.". O CPLEX utiliza quatro principais algoritmos: Primal Simplex, Dual Simplex, métodos de Barrier Optimization, e Branch and Cut (para Programação Inteira Mista).

Quando se trata de programação linear, a solução encontrada pelo algoritmo pode ser a solução global dependendo do critério de parada.

### 3.2.3 Método $\epsilon$ - Restrito

Um problema multiobjetivo pode ser tratado por um dos métodos apresentados na Seção 2.4. Esta dissertação escolheu o método épsilon-restrito, como utilizado em diversos trabalhos já citados na revisão bibliográfica relativos ao problema de otimização da confiabilidade, e que também é aplicado em outros problemas de engenharia como feito por Cabo et al. (2018). Neste trabalho de dissertação, a função objetivo para a confiabilidade é maximizada, e a função objetivo para o custo é tratada como uma restrição, limitada a um valor constante máximo. Esse valor constante máximo para a restrição do custo é incrementado  $n$  vezes, onde  $n$  é o total de problemas que devem ser resolvidos. A partir daí, é possível coletar soluções não dominadas, e traçar a Fronteira de Pareto para o problema.

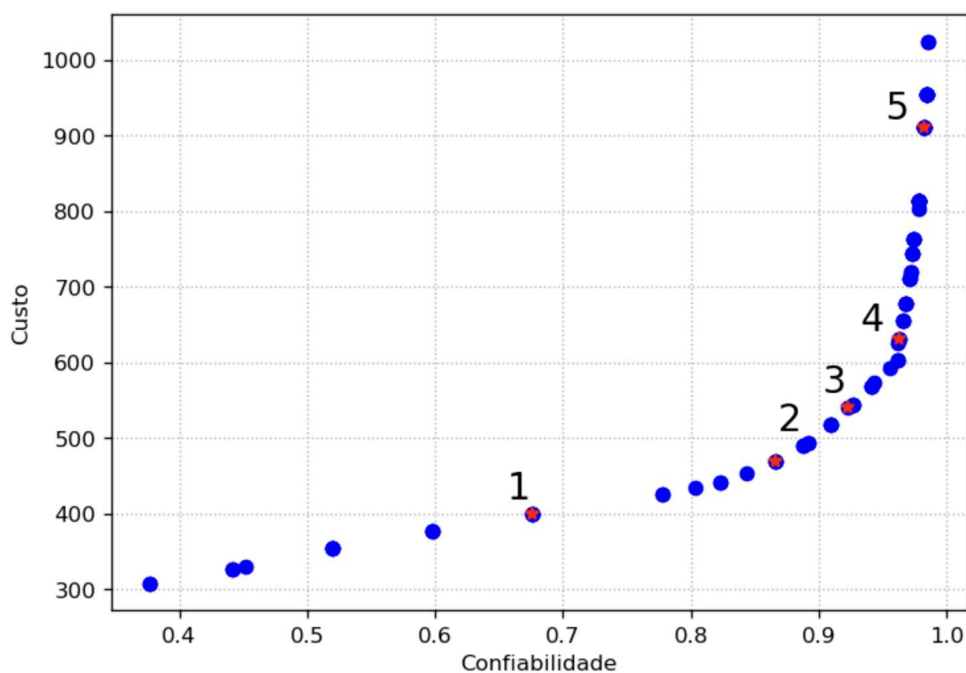
A grande vantagem de se usar o método  $\epsilon$ -Restrito é a sua facilidade de implementação. Sua fraqueza, no entanto, é a exigência de um alto número de execuções caso o valor de seu passo incremental seja muito pequeno. Para aplicar este método, o estudo de caso implementado foi submetido a cem execuções com o custo máximo variando a um passo de valor sete a cada iteração, com valores iniciando em 300 e finalizando em 1000. A escolha do valor de passo 7 se deu por experimentação: após uma série de execuções variando-se o passo, percebeu-se que passos menores não encontrariam novas soluções não dominadas na faixa de custo escolhida.

## 4 RESULTADOS

Conforme descrito no capítulo anterior, ao final das cem iterações executadas com o algoritmo proposto para a aplicação do método  $\epsilon$  - Restrito, um conjunto de soluções não dominadas foi obtido. A cada iteração, o valor de custo máximo é incrementado de acordo com o passo adotado, e uma nova solução é determinada. Ao final das cem execuções programadas, apenas as soluções não dominadas são selecionadas a fim de compor a Fronteira de Pareto do problema apresentada na Figura 4.1, onde a confiabilidade total do sistema ocupa o eixo X, e o custo total do sistema ocupa o eixo Y.

É possível perceber no gráfico que enquanto o valor do custo é inferior a 450, um pequeno aumento de custo já causa um grande aumento de confiabilidade. Por outro lado, para valores de custo acima de 600, mesmo com um grande aumento no valor do custo, apenas um pequeno impacto é causado no valor da confiabilidade. As soluções com valores de custo entre 450 e 600 possuem valores de confiabilidade entre 0,80 e 0,95. Esse intervalo de soluções pode indicar valores de confiabilidade aceitáveis para a planta farmacêutica, dentro de valores de custo próximos aos orçamentos do estudo de caso original proposto por [Garg e Sharma \(2013\)](#) e dos trabalhos realizados por [Mellal e Zio \(2016\)](#), [Mellal e Zio \(2017\)](#), cujas restrições limitavam o custo a 553 e 480 respectivamente.

**Figura 4.1 – Fronteira de Pareto encontrada**





**Tabela 4.1 – Soluções extraídas da Fronteira de Pareto**

	Confiabilidade	Custo	Fornecedor/Número de componentes
1	0,6758	399,45	[2/3][3/1][1/2][3/2][1/2][2/2][1/2][3/2][3/2][1/2]
2	0,8664	468,77	[2/3][3/2][1/3][3/2][1/3][2/3][1/3][3/2][3/3][1/2]
3	0,9229	540,25	[2/3][3/2][1/3][3/3][1/3][2/3][1/3][3/2][3/3][1/3]
4	0,9621	631,49	[1/2][3/3][1/3][3/3][1/3][1/3][1/4][3/3][3/3][1/3]
5	0,9821	911,37	[3/3][3/3][2/3][2/3][2/3][3/3][3/3][2/3][1/3][2/3]

Cinco soluções foram selecionadas da Fronteira de Pareto, e apresentadas na Tabela 4.1. A última coluna apresenta qual o fornecedor foi escolhido pelo algoritmo, e qual a quantidade de componentes, para cada subsistema de 1 a 10. Numa breve análise é possível destacar que:

- Da solução 1 para a 2, um aumento de 17,35% no custo resulta em uma melhoria de 28,20% na confiabilidade.
- Da solução 2 para a 3, um aumento de 15,24% no custo resulta em 6,52% de melhoria na confiabilidade.
- Da solução 3 para a 4, o custo cresceu 16,88% e a confiabilidade aumentou apenas 4,24%.
- Por fim, da solução 4 para a 5, um grande aumento de custo causa uma pequena mudança positiva na confiabilidade: 44,32% e 2,07% respectivamente.

Neste conjunto de 5 soluções analisadas, a solução 3 apresenta um valor de custo não tão acima de 480 (valor máximo no problema original) e um valor de confiabilidade acima de 90%, podendo representar uma troca adequada entre as duas funções-objetivo. A solução 4 é uma alternativa com o custo ainda maior porém com uma confiabilidade também maior, e pode ser uma opção de escolha considerando que uma planta farmacêutica requer níveis altos de confiabilidade. A solução 2, por sua vez, oferece um valor de confiabilidade razoável, e atende aos requisitos do problema originalmente proposto por [Mellal e Zio \(2017\)](#), respeitando o custo máximo de valor 480.

Um outro resultado que merece ser mencionado e do qual fez parte o autor desta dissertação, foi publicado por [Filho e Bessani \(2021\)](#) durante o desenvolvimento desta pesquisa, onde o mesmo estudo de caso apresentado por [Garg e Sharma \(2013\)](#) foi resolvido. [Filho e Bessani \(2021\)](#) utilizaram uma função linear como aproximação da função objetivo da confiabilidade do sistema série-paralelo, ela é apresentada na Eq. (59). A ideia geral dessa aproximação é que ao maximizarmos a soma das confiabilidades dos subsistemas iremos maximizar a confiabilidade total do sistema.

Nesta dissertação, o autor contribui com uma nova função objetivo, alcançada através de uma justificativa matemática mais detalhada que sugere a Eq. (50) como alternativa para a confiabilidade total do sistema.

$$Max R(X) = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^{10} [1 - (1 - r_{ij})^k] \cdot X_{ijk} \quad (59)$$

Após realizar a comparação entre o conjunto de soluções não dominadas obtidas por [Filho e Bessani \(2021\)](#) com as soluções obtidas nesta dissertação, observa-se que os conjuntos são idênticos. Ou seja, para cada subproblema resolvido pelo método  $\epsilon$  - Restrito em cada um dos dois trabalhos, as mesmas soluções foram obtidas, ainda que suas funções objetivo para a confiabilidade sejam matematicamente diferentes - Eq. (50) e Eq. (59). É importante destacar que a função para a confiabilidade que está sendo proposta neste trabalho de dissertação exige a aplicação do logaritmo em cada um dos termos dentro do somatório, o que não foi feito por [Filho e Bessani \(2021\)](#).

#### 4.1 COMPARAÇÃO COM TRABALHOS ANTERIORES

Como já mencionado em capítulos anteriores, os trabalhos desenvolvidos por [Mellal e Zio \(2017\)](#), [Mellal e Zio \(2016\)](#), [Garg e Sharma \(2013\)](#) exploraram o mesmo estudo de caso desta dissertação, porém no modelo mono-objetivo, contínuo e não linear. Além disso, se distinguem em duas variações do problema devido a uma ligeira variação dos limites para as restrições de custo total, peso e volume do sistema. Os algoritmos aplicados foram, respectivamente:

- Algoritmo genético (em inglês Genetic Algorithm, GA), utilizando a restrição de custo limitada a 480, volume limitada a 270 e peso limitado a 519.
- Busca fractal estocástica guiada por penalidade (em inglês PSFS), utilizando a restrição de custo limitada a 553, volume limitada a 289 e peso limitado a 483.

- Otimização por enxame de partículas (Particle Swarm Optimization - PSO), também utilizando a restrição de custo limitada a 553, volume limitada a 289 e peso limitado a 483.

#### 4.1.1 Comparação com Algoritmo Genético

A Tabela 4.2 compara a solução obtida por Mellal e Zio (2017) utilizando um algoritmo genético, com duas soluções obtidas por este trabalho dentro dos mesmos limites para as restrições: solução 2 e solução 6. Nos parágrafos seguintes essa comparação será explorada.

Tabela 4.2 – Comparação entre soluções deste trabalho com o método GA (MELLAL; ZIO, 2017)

	GA	Solução 2	Solução 6
$R_S$	0,9021	0,8664	0,9381
$C_S$	479.17	468.77	465.56
$r_1/n_1$	0,8626/3	0,830000/3	0,910000/2
$r_2/n_2$	0,8599/2	0,850000/2	0,824012/3
$r_3/n_3$	0,8628/2	0,830000/2	0,828547/3
$r_4/n_4$	0,7886/3	0,850000/2	0,788600/3
$r_5/n_5$	0,9039/2	0,830000/3	0,830000/3
$r_6/n_6$	0,7073/4	0,820000/3	0,820000/3
$r_7/n_7$	0,8855/2	0,800000/3	0,800000/3
$r_8/n_8$	0,8017/3	0,870000/2	0,777415/4
$r_9/n_9$	0,8287/3	0,830000/3	0,828700/3
$r_{10}/n_{10}$	0,7893/3	0,850000/2	0,789300/3

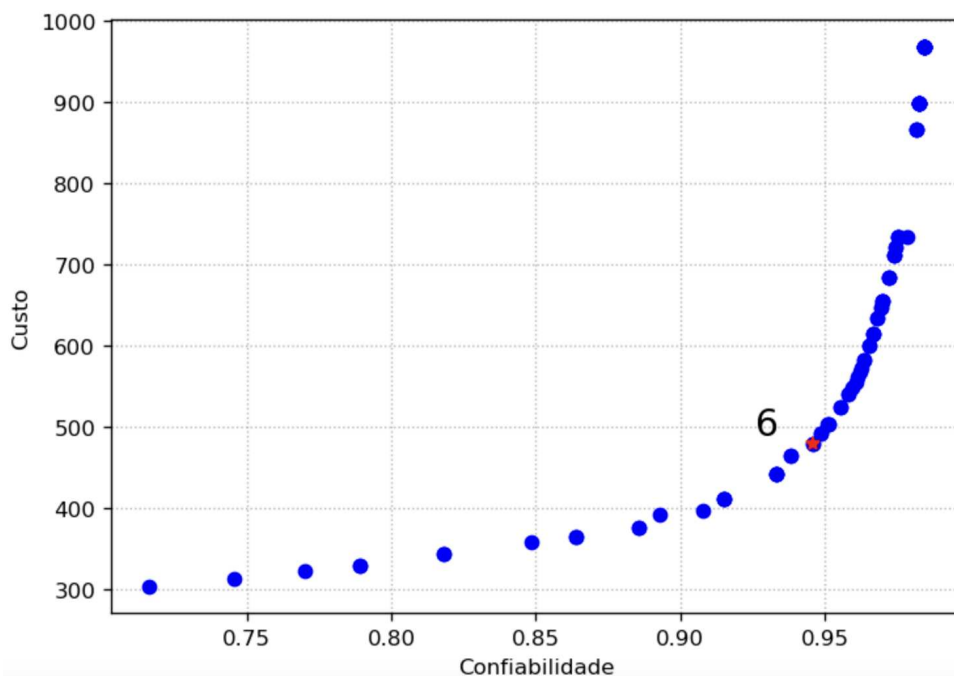
A solução 2 foi destacada da fronteira de Pareto da Figura 4.1, sendo a melhor solução que respeita o custo máximo de 480. Vale ressaltar que a solução 2 ocorre num cenário de apenas três opções de componentes por subsistema. Tal solução tem um valor para o custo de 468,77, e um valor de 0,8664 para a confiabilidade. Comparada com a solução proposta pelo Algoritmo Genético, o custo foi 2,18% menor e a confiabilidade foi 3,96% menor.

Neste trabalho de dissertação, o software Jupyter Notebook foi utilizado juntamente com a linguagem de programação Python em um PC com processador Apple M1 de 8 núcleos. No trabalho feito por Mellal e Zio (2017), foi utilizado um processador Intel Pentium G620 de 2,60GHz. Utilizando um website especializado para comparação entre os processadores (CPUBENCHMARK, 2022), encontrou-se um fator de performance superior em 12,33 vezes para o processador utilizado nesta dissertação. Então, descontado este fator

aos tempos de execução, estima-se que o algoritmo proposto nesta dissertação foi 20 vezes superior ao algoritmo proposto por Mellal e Zio (2017).

Para obter a solução 6, um segundo cenário foi proposto com mais opções de componentes, onde os valores de confiabilidade sugeridos pelas soluções dos três demais algoritmos (GA, PSO, PSFS) foram incluídos como opções de componentes, totalizando 6 opções por subsistema. Ou seja, as soluções dos demais artigos foram incluídas como opções. O intuito aqui foi perceber o comportamento da programação linear proposto por este trabalho diante de novas opções de componentes, de forma a encontrar um arranjo que possa garantir soluções iguais ou melhores. Caso a solução seja melhor, será uma solução combinada das demais. Nesse contexto, a Fronteira de Pareto da Figura 4.2 foi obtida. Então, a solução 6 foi extraída e apresentada na Tabela 4.2 por ser a melhor solução deste segundo cenário que respeita o valor do custo máximo. Ela foi encontrada em 734,4 milissegundos. A solução 6 teve à sua disposição mais opções de componentes e, por esse motivo, alcançou um valor de confiabilidade total para o sistema superior à solução 2 e também superior ao algoritmo genético. Portanto, a solução 6 domina estas duas outras soluções.

**Figura 4.2 – Fronteira de Pareto encontrada para o segundo cenário**



É importante destacar que algoritmos genéticos são meta-heurísticas e, portanto, são métodos não exatos, ou seja, procuram indicar uma solução final (ou conjunto de soluções não dominadas) próxima(s) ao ótimo, mas não encontram necessariamente a

solução ótima. Algoritmos genéticos lidam com avaliações de múltiplas soluções potenciais ao longo das gerações, o que pode exigir ainda mais esforço quando se trata de problemas mais complexos. Por sua vez, a alteração do modelo do problema seguido de uma abordagem via programação linear proposta por este trabalho oferece uma solução ótima para o cenário proposto.

#### 4.1.2 Comparação com métodos PSO e PSFS

Para comparação com os trabalhos de Mellal e Zio (2016), Garg e Sharma (2013), duas outras soluções obtidas por este trabalho foram selecionadas (solução 2' e solução 6') após o ajuste dos valores máximos para as restrições de peso e volume do problema. Também especificamente para esta comparação, percebeu-se que a diminuição do passo do  $\epsilon$ -restrito de 7 para 3 poderia obter soluções ainda mais apuradas.

A Tabela 4.3 compara as soluções obtidas pelas duas meta-heurísticas - PSFS (MELLAL; ZIO, 2016) e PSO (GARG; SHARMA, 2013) - com as soluções 2' e 6'. Como era de se esperar, a solução 6' obteve o melhor resultado: maior confiabilidade e custo menor. A solução 2' também alcançou um valor interessante diante do fato de que teve apenas 3 opções de componentes por subsistema, enquanto que os demais trabalhos solucionaram o modelo contínuo, com ilimitadas possibilidades de valores para os componentes.

**Tabela 4.3 – Comparação entre soluções deste trabalho com o método PSO (GARG; SHARMA, 2013) e PSFS (MELLAL; ZIO, 2016)**

	PSO	PSFS	Solução 2'	Solução 6'
$R_S$	0,956021	0,962291	0,9267	0,9671
$C_S$	552,94	552,99	544,10	530,93
$r_1/n_1$	0,871922/3	0,883809/3	0,830000/3	0,910000/2
$r_2/n_2$	0,827480/3	0,824012/3	0,850000/2	0,824012/3
$r_3/n_3$	0,835569/3	0,828547/3	0,830000/2	0,828547/3
$r_4/n_4$	0,800000/3	0,827784/3	0,850000/2	0,788600/3
$r_5/n_5$	0,865663/3	0,866065/3	0,830000/3	0,830000/3
$r_6/n_6$	0,831345/3	0,835493/3	0,820000/3	0,820000/3
$r_7/n_7$	0,864687/3	0,848381/3	0,800000/3	0,800000/3
$r_8/n_8$	0,800000/3	0,777415/4	0,870000/2	0,777415/4
$r_9/n_9$	0,858897/3	0,849407/3	0,830000/3	0,828700/3
$r_{10}/n_{10}$	0,832932/3	0,829244/3	0,850000/2	0,789300/3

### 4.1.3 Resumo comparativo

Os resultados apresentados por este trabalho de dissertação mostram que, com a adoção da abordagem multi-objetivo, linear e com o uso de variável de decisão discreta, foi possível encontrar soluções não dominadas com relação aos trabalhos anteriores, com um menor esforço computacional. Além disso, o modelo sugerido reflete melhor as condições mercadológicas enfrentadas por este tipo de sistema.

A abordagem multi-objetivo trouxe a vantagem de colocar tanto a maximização da confiabilidade quanto a minimização do custo como prioridades a serem resolvidas. O método  $\epsilon$  – *restrito* permitiu encontrar o conjunto de soluções não dominadas da Fronteira de Pareto, facilitando a análise do problema, e ampliando a gama de soluções. Já os trabalhos anteriores adotaram a abordagem mono-objetivo, sugerindo apenas uma solução final que respeita a restrição do custo, o que impossibilita uma análise do quanto um relaxamento do custo máximo poderia permitir de ganho para a confiabilidade total do sistema.

Linearizar o modelo a partir do estudo de caso original também permitiu a aplicação de programação linear através da ferramenta CPLEX da IBM, que resolveu rapidamente o problema quando comparado ao esforço computacional exigido pelos métodos aplicados nos trabalhos anteriores. Nestes, o problema no formato não-linear exigiu meta-heurísticas que encontraram soluções em um tempo bem superior.

A variável discreta utilizada neste trabalho de dissertação determinou quais fornecedores e componentes seriam escolhidos no cenário de opções limitadas, fazendo com que o problema se tornasse combinatorial. O algoritmo, portanto, encontrou rapidamente opções de arranjo para o sistema, determinando o componente e sua quantidade para cada subsistema. Já nos trabalhos anteriores, as variáveis de decisão foram contínuas, permitindo ilimitados valores para a confiabilidade dos componentes. Isto aumenta o espaço amostral do problema, exigindo mais tempo de busca para o algoritmo.

Por fim, diante das abordagens comentadas acima, este trabalho conseguiu propor um método que encontra um conjunto de soluções não dominadas. Já nos trabalhos anteriores, os métodos utilizados (GA, PSO e PSFS) não garantem que suas soluções sejam ótimas, e podem apresentar soluções apenas aproximadas da solução ótima.

## 5 CONCLUSÃO

Este trabalho de dissertação apresentou uma revisão da literatura com relação ao problema da otimização da confiabilidade, contemplando variações para as abordagens e estratégias utilizadas: modelo matemático, definição das variáveis de decisão, premissas assumidas, linearidade (ou não) das funções, restrições, e algoritmos adequados para resolução.

Em seguida, utilizou-se de o estudo de caso de uma planta farmacêutica, a partir do qual uma primeira abordagem foi proposta (FILHO; BESSANI, 2021), onde um modelo mais simples para o problema de alocação de redundância e confiabilidade foi apresentado. Então, neste trabalho de dissertação o tema foi aprofundado, onde o modelo originalmente contínuo, mono-objetivo e não linear foi transformado em um modelo linear inteiro e multiobjetivo. A partir de três fornecedores hipotéticos, um conjunto limitado e pré-definido de componentes possíveis para cada subsistema foi sugerido. Através da utilização do otimizador CPLEX da IBM, juntamente com o método  $\epsilon$  - Restrito, o problema foi resolvido, e a Fronteira de Pareto foi traçada. De posse do conjunto de soluções não dominadas, cinco soluções foram selecionadas para avaliação. Por fim, foram realizadas comparações com o problema apresentado no estudo de caso original, e com um outro artigo desenvolvido pelo próprio autor deste trabalho de dissertação.

A metodologia adotada mostrou-se eficaz no estudo de caso escolhido. A simplificação do problema, com a justificativa matemática apropriada, traz uma solução mais rapidamente quando o mercado possui um conjunto bem definido de componentes disponíveis, o que pode ser uma premissa comum. Incluir o custo como função objetivo também foi conveniente, considerando que problemas reais, em geral, buscam a minimização do custo.

Como proposta para trabalhos futuros, o sistema poderia ter uma configuração série-paralelo mais complexa, ou seja, com mais subsistemas ou mais opções de fornecedores. A escalabilidade da abordagem apresentada pode ser avaliada exaustivamente, colocando à prova sua capacidade, com a matriz da variável de decisão crescendo bem acima das 300 posições utilizadas neste problema. Neste caso, outras técnicas de otimização poderiam ser avaliadas, incluindo abordagens via meta-heurísticas e também heurísticas matemáticas.

## REFERÊNCIAS

- AHMADIZAR, F.; SOLTANPANA, H. Reliability optimization of a series system with multiple-choice and budget constraints using an efficient ant colony approach. **Expert systems with Applications**, Elsevier, v. 38, n. 4, p. 3640–3646, 2011.
- ANAND, R.; AGGARWAL, D.; KUMAR, V. A comparative analysis of optimization solvers. **Journal of Statistics and Management Systems**, Taylor & Francis, v. 20, n. 4, p. 623–635, 2017.
- ARDAKAN, M. A.; HAMADANI, A. Z. Reliability optimization of series-parallel systems with mixed redundancy strategy in subsystems. **Reliability Engineering & System Safety**, Elsevier, v. 130, p. 132–139, 2014.
- ARDAKAN, M. A.; MIRZAEI, Z.; HAMADANI, A. Z.; ELSAYED, E. A. Reliability optimization by considering time-dependent reliability for components. **Quality and Reliability Engineering International**, Wiley Online Library, v. 33, n. 8, p. 1641–1654, 2017.
- ATTA, S.; SEN, G. Multiple allocation p-hub location problem for content placement in vod services: a differential evolution based approach. **Applied Intelligence**, Springer, v. 50, n. 5, p. 1573–1589, 2020.
- BILLIONNET, A. Redundancy allocation for series-parallel systems using integer linear programming. **IEEE Transactions on Reliability**, IEEE, v. 57, n. 3, p. 507–516, 2008.
- BOUREZG, A.; MEGLOULI, H. Reliability assessment of power distribution systems using disjoint path-set algorithm. **Journal of Industrial Engineering International**, Springer, v. 11, n. 1, p. 45–57, 2015.
- BUSACCA, P. G.; MARSEGUERRA, M.; ZIO, E. Multiobjective optimization by genetic algorithms: application to safety systems. **Reliability Engineering & System Safety**, Elsevier, v. 72, n. 1, p. 59–74, 2001.
- CABO, M.; GONZÁLEZ-VELARDE, J. L.; POSSANI, E.; SOLÍS, Y. Á. R. Bi-objective scheduling on a restricted batching machine. **Computers & Operations Research**, Elsevier, v. 100, p. 201–210, 2018.
- CAO, D.; MURAT, A.; CHINNAM, R. B. Efficient exact optimization of multi-objective redundancy allocation problems in series-parallel systems. **Reliability Engineering & System Safety**, Elsevier, v. 111, p. 154–163, 2013.
- CASERTA, M.; VOSS, S. An exact algorithm for the reliability redundancy allocation problem. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 244, n. 1, p. 110–116, 2015.
- CHERN, M.-S. On the computational complexity of reliability redundancy allocation in a series system. **Operations research letters**, Elsevier, v. 11, n. 5, p. 309–315, 1992.



COELLO, C. A. C. A comprehensive survey of evolutionary-based multiobjective optimization techniques. **Knowledge and Information systems**, Springer, v. 1, n. 3, p. 269–308, 1999.

COIT, D. W. Maximization of system reliability with a choice of redundancy strategies. **IIE transactions**, Taylor & Francis, v. 35, n. 6, p. 535–543, 2003.

COIT, D. W.; ZIO, E. The evolution of system reliability optimization. **Reliability Engineering & System Safety**, Elsevier, v. 192, p. 106259, 2019.

CPUBENCHMARK. **cpubenchmark.net**. 2022. Disponível em: <<https://www.cpubenchmark.net/compare/Intel-Pentium-G620-vs-Apple-M1-8-Core-3200-MHz/1107vs4104>>.

DONG, F.; LIU, Y.; SU, H.; ZOU, R.; GUO, H. Reliability-oriented multi-objective optimal decision-making approach for uncertainty-based watershed load reduction. **Science of the Total Environment**, Elsevier, v. 515, p. 39–48, 2015.

DU, M.; LI, Y.-F. An investigation of new local search strategies in memetic algorithm for redundancy allocation in multi-state series-parallel systems. **Reliability Engineering & System Safety**, Elsevier, v. 195, p. 106703, 2020.

ELEGBEDE, C.; ADJALLAH, K. Availability allocation to repairable systems with genetic algorithms: a multi-objective formulation. **Reliability Engineering & System Safety**, Elsevier, v. 82, n. 3, p. 319–330, 2003.

FILHO, D. de Q. M.; BESSANI, M. Multi-objective linear approach for the reliability-redundancy allocation problem. In: IEEE. **2021 International Conference on Communication, Control and Information Sciences (ICCISc)**. [S.l.], 2021. v. 1, p. 1–5.

GALANKASHI, M. R.; MADADI, N.; HELMI, S. A.; RAHIM, A. R. A.; RAFIEI, F. M. A multiobjective aggregate production planning model for lean manufacturing: Insights from three case studies. **IEEE Transactions on Engineering Management**, IEEE, 2020.

GARG, H.; SHARMA, S. Reliability-redundancy allocation problem of pharmaceutical plant. **Journal of Engineering Science and Technology**, v. 8, n. 2, p. 190–198, 2013.

GE, Q.; PENG, H.; HOUTUM, G.-J. van; ADAN, I. Reliability optimization for series systems under uncertain component failure rates in the design phase. **International Journal of Production Economics**, Elsevier, v. 196, p. 163–175, 2018.

HA, C.; KUO, W. Reliability redundancy allocation: An improved realization for nonconvex nonlinear programming problems. **European Journal of Operational Research**, Elsevier, v. 171, n. 1, p. 24–38, 2006.

HAMADANI, A. Z.; KHORSHIDI, H. A. System reliability optimization using time value of money. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, Springer, v. 66, n. 1, p. 97–106, 2013.

HORN, R. A.; JOHNSON, C. R. **Matrix analysis**. [S.l.]: Cambridge university press, 2012.

HSIEH, Y.-C. A linear approximation for redundant reliability problems with multiple component choices. **Computers & industrial engineering**, Elsevier, v. 44, n. 1, p. 91–103, 2003.

IBM. **CPLEX Optimizer**. 2021. Disponível em: <<https://www.ibm.com/br-pt/analytics/cplex-optimizer>>.

KULTUREL-KONAK, S.; SMITH, A. E.; COIT, D. W. Efficiently solving the redundancy allocation problem using tabu search. **IIE transactions**, Taylor & Francis, v. 35, n. 6, p. 515–526, 2003.

KUO, W.; PRASAD, V. R. An annotated overview of system-reliability optimization. **IEEE Transactions on reliability**, IEEE, v. 49, n. 2, p. 176–187, 2000.

LEVITIN, G.; LISNIANSKI, A.; BEN-HAIM, H.; ELMAKIS, D. Redundancy optimization for series-parallel multi-state systems. **IEEE Transactions on Reliability**, IEEE, v. 47, n. 2, p. 165–172, 1998.

LEVITIN, G.; XING, L.; DAI, Y. Optimization of component allocation/distribution and sequencing in warm standby series-parallel systems. **IEEE Transactions on Reliability**, IEEE, v. 66, n. 4, p. 980–988, 2016.

LING, X.; WEI, Y.; SI, S. Reliability optimization of k-out-of-n system with random selection of allocative components. **Reliability Engineering & System Safety**, Elsevier, v. 186, p. 186–193, 2019.

LIU, G.-S. A combination method for reliability-redundancy optimization. **Engineering Optimization**, Taylor & Francis, v. 38, n. 04, p. 485–499, 2006.

MELLAL, M. A.; ZIO, E. A penalty guided stochastic fractal search approach for system reliability optimization. **Reliability Engineering & System Safety**, Elsevier, v. 152, p. 213–227, 2016.

MELLAL, M. A.; ZIO, E. System reliability-redundancy allocation by evolutionary computation. In: IEEE. **2017 2nd International Conference on System Reliability and Safety (ICSRS)**. [S.l.], 2017. p. 15–19.

MELLAL, M. A.; ZIO, E. Availability optimization of parallel-series system by evolutionary computation. In: IEEE. **2018 3rd International Conference on System Reliability and Safety (ICSRS)**. [S.l.], 2018. p. 198–202.

O'CONNOR, P.; KLEYNER, A. **Practical reliability engineering**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2012.

OLIVEIRA, J. A. d. Avaliação de técnicas de aprendizagem de máquina como surrogate na otimização com muitos objetivos. Pós-Graduação em Ciência da Computação, 2020.

ORCHARD-HAYS, W. History of the development of lp solvers. **Interfaces**, INFORMS, v. 20, n. 4, p. 61–73, 1990.

PEIRAVI, A.; KARBASIAN, M.; ARDAKAN, M. A.; COIT, D. W. Reliability optimization of series-parallel systems with k-mixed redundancy strategy. **Reliability Engineering & System Safety**, Elsevier, v. 183, p. 17–28, 2019.

- QIU, X.; ALI, S.; YUE, T.; ZHANG, L. Reliability-redundancy-location allocation with maximum reliability and minimum cost using search techniques. **Information and Software Technology**, Elsevier, v. 82, p. 36–54, 2017.
- RAMIREZ-MARQUEZ, J. E.; COIT, D. W.; KONAK, A. Redundancy allocation for series-parallel systems using a max-min approach. **Iie Transactions**, Taylor & Francis, v. 36, n. 9, p. 891–898, 2004.
- SAHOO, L.; BHUNIA, A. K.; KAPUR, P. K. Genetic algorithm based multi-objective reliability optimization in interval environment. **Computers & Industrial Engineering**, Elsevier, v. 62, n. 1, p. 152–160, 2012.
- TODD, M. J. The many facets of linear programming. **Mathematical programming**, v. 91, n. 3, p. 417–436, 2002.
- WANG, Z.; CHEN, T.; TANG, K.; YAO, X. A multi-objective approach to redundancy allocation problem in parallel-series systems. In: IEEE. **2009 IEEE Congress on Evolutionary Computation**. [S.l.], 2009. p. 582–589.
- YEH, C.-T.; FIONDELLA, L. Optimal redundancy allocation to maximize multi-state computer network reliability subject to correlated failures. **Reliability Engineering & System Safety**, Elsevier, v. 166, p. 138–150, 2017.
- YI, X.; LAI, Y.; DONG, H.; HOU, P. A reliability optimization allocation method considering differentiation of functions. **International Journal of Computational Methods**, World Scientific, v. 13, n. 04, p. 1641020, 2016.
- ZIO, E. **An introduction to the basics of reliability and risk analysis**. [S.l.]: World scientific, 2007. v. 13.