UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Sobre a estabilidade de ondas estacionárias para a equação de Schrödinger não linear

Dissertação de Mestrado

Thyago Souza Rosa Santos

Belo Horizonte – MG

2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Thyago Souza Rosa Santos

Sobre a estabilidade de ondas estacionárias para a equação de Schrödinger não linear

Dissertação submetida à avaliação pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas - ICEX da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador(a): Luiz Gustavo Farah Dias
Coorientador(a): Alex Javier Hernandez Ardila

Belo Horizonte – MG

2021

Santos, Thyago Souza Rosa.

S237s Sobre a estabilidade de ondas estacionárias para a equação de Schrödinger não linear [manuscrito] / Thyago Souza Rosa Santos. – 2021.
103 f. il.

Orientador: Luiz Gustavo Farah Dias.
Coorientador:Alex Javier Hernandez Ardila.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f. 100-103.

1. Matemática – Teses. 2. Schrodinger, Equação de – Teses. 3. Metodos variacionais – Teses. 4. Sistemas hamiltonianos – Teses. I. Dias, Luiz Gustavo Farah II. Hernandez Ardila, Alex Javier. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. IV.Título.
CDU 51 (043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende Costa
CRB 6ª Região nº 1510

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

Sobre a estabilidade de ondas estacionárias para a equação de Schrödinger não linear

THYAGO SOUZA ROSA SANTOS

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Prof. Luiz Gustavo Farah Dias
UFMG

Prof. Alex Javier Hernandez Ardila
UFMG

Prof. Ademir Pastor
UNICAMP

Prof. Fábio Natali
UEM

Belo Horizonte, 25 de fevereiro de 2021.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, aos meus pais Claudio e Isabel e minha irmã Talita por me darem forças, condições e todo apoio necessário para que pudesse concluir esta etapa.

A minha amiga, companheira e namorada Carol, por todo incentivo, carinho e também por todo apoio desde a época da graduação. Além de toda paciência e compreensão, mesmo em momentos em que estive ausente.

Aos meus orientadores e amigos Luiz Gustavo e Alex Javier, os quais foram os motivadores deste trabalho. Além de todos os ensinamentos, paciência, disponibilidade e com certeza pela excelente orientação matemática, agradeço por depositarem em mim toda confiança desde a nossa primeira conversa.

Aos grandes amigos que fiz no departamento de matemática da UFS, os quais com toda certeza levarei para toda vida: Carol, Narinha, Wilberclay, Natielle, Claudemir, Thiago Dantas, Aelson, Alexandre, Pablo, Ricardo Lopes, Thiago Guimarães, Antônio, Fernando, Ginaldo, André Dosea e Marcos Gabriel.

As amizades que fiz durante meu curto período em Belo Horizonte: Henrique, Pedro Gonçalves, Sergio Andrés, Nicolly, Katy e Lindauriane (*in memoriam*).

A Ricardo, Luciana e Marta por me receberem em seu apartamento no período que estive em Belo Horizonte.

A todos os professores do departamento de matemática da UFS que me deram toda base de conhecimento e conselhos necessários para prosseguir: Wilberclay, Bruno, Maria, Zaqueu, Paulo, Angelo, Gerson, Disson, Adriano e João Paulo .

A todos os professores da UFMG que contribuíram de alguma forma para minha formação acadêmica: Heleno, Elizaveta, Julian e Charles.

Aos professores Ademir Pastor e Fábio Natali pela disponibilidade para participar da banca e por todas preciosas contribuições que, com toda certeza, enriqueceram nosso texto.

As secretárias do Demat-UFMG, Andréa e Kelli, por toda disponibilidade e suporte.

Por último e não menos importante, ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) por todo apoio financeiro desde a época da graduação. Apoio esse que foi essencial para que eu pudesse estar aqui hoje.

Mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty—a beauty cold and austere, like that of sculpture, without appeal to any part of our weaker nature, without the gorgeous trappings of painting or music, yet sublimely pure, and capable of a stern perfection such as only the greatest art can show.

(Bertrand Russel)

Resumo

O presente trabalho tem como característica central o estudo da estabilidade e instabilidade orbital acerca de ondas estacionárias para a equação de Schrödinger não linear. Mais especificamente mostramos a existência de ondas estacionárias através de uma abordagem variacional. Em seguida apresentamos métodos desenvolvidos para o estudo da estabilidade de ondas estacionárias, baseados principalmente em argumentos de compacidade e de propriedades espectrais acerca do operador linearizado. Por fim, apresentamos resultados sobre a instabilidade de *bound states* para sistemas dispersivos abstratos, abrangendo assim uma classe de equações dispersivas de interesse.

Palavras-chave: Equação de Schrödinger não-linear; Teoria de Estabilidade; Métodos Variacionais; Sistemas Hamiltonianos Abstratos.

Abstract

The present work has a main characteristic the study of orbital stabilty and instability about standing waves for the nonlinear Schrödinger equation. More speciafically, we show the existence of standing waves through a variational approach. Then, we presente method developed to study the stability of standing waves, base mainly on compacteness argumentes and spectral properties of the linearized operator. Finally, we present results on the bound states instability for abstract dispersive systems, thus include a class of dispersive equations of insterest.

Keywords: Nonlinear Schrödinger Equation; Stability Theory; Variational Methods; Abstract Hamiltonian Systems. .

Sumário

Introdução

A teoria das equações dispersivas lineares prevê que, em geral, as ondas devem se espalhar e dispersar com o tempo. No entanto, é um fenômeno notável, observado tanto na teoria quanto na prática, que quando efeitos não lineares são levados em consideração, é possível obter soluções que podem ser estáveis o suficiente para persistirem indefinidamente, isto é, permanecem em uma posição constante em um intervalo de tempo arbitrário. A construção de tais soluções pode ser relativamente simples, mas o fato de que estas são estáveis requer uma análise bastante rigorosa do problema, que em parte é devido às simetrias advindas da equação. Tais simetrias, como a invariância por translação ou rotação, acabam por criar dificuldades na análise da estabilidade.

Nesse intuito, nossa história começa por volta de 1844 quando o engenheiro civil e filósofo John Scott Russell (1808-1882) observava uma barcaça sendo puxada por dois cavalos, um em cada margem do canal de Union, um canal de baixa profundidade que se encontra próximo da universidade Heriot-Watt em Edinburgo, na Escócia. Ele observou que quando a embarcação parou, as ondas criadas na superfície da água se propagavam em alta velocidade, de forma constante e sem mudar de forma. A cavalo, Russell acompanhou as ondas com uma velocidade constante de aproximadamente quinze quilômetros por hora, por mais de três quilômetros. Foi dessa maneira que Russel observava pela primeira vez as propriedades de estabilidade do que chamamos hoje de *onda solitária* ou *solíton*.

Após esta descoberta, Russell realizou experimentos em um tanque de ondas de laboratório para estudar este fenômeno com mais cuidado e seu trabalho foi o primeiro estudo detalhado sobre essas ondas. Porém, a explicação analítica do fenômeno só foi feita anos mais tarde, em 1872, pelo físico francês Joseph V. Boussinesq (1842-1929) em seu prestigioso trabalho (BOUSSINESQ, 1872) o qual ele mostra que para uma onda de amplitude finita, o aumento da velocidade da onda é contrabalanceado pelo efeito da dispersão sobre ela, levando a uma onda de perfil constante. Na época, houve um grande debate a respeito da estabilidade das soluções não lineares das equações de propagação. Esse debate foi concluído em 1895 com o trabalho de Diederik Korteweg (1848-1941) e Gustav de Vries (1866-1934) (KORTEWEG; VRIES, 1895) no qual eles derivam uma equação de evolução não linear que modela a propagação de uma onda longa em um canal raso e que esta apresenta soluções que descrevem a propagação de ondas como a que foi observada por Russel. Em homenagem, tal equação hoje é conhecida como equação de *Korteweg-de Vries* ou simplesmente equação KdV.

Bom, os anos se passaram e tanto os físicos quanto os matemáticos perceberam que soluções com estas propriedades aparecem em vários outros modelos físicos como por exemplo cadeias de DNA ou modelos efetivos para interações fortes. Já no âmbito experimental, as ondas solitárias (que no âmbito da mecânica quântica são chamadas de ondas estacionárias) foram observadas em fibras ópticas, condensados de Bose-Einstein, cristais líquidos, materiais magnéticos e diversos outros sistemas físicos. Atualmente, os *solítons* representam soluções de equações diferenciais não-lineares, com a característica de descrever fenômenos que apresentam densidades de energia localizadas e que, após interagirem, mantém suas formas inalteradas, em parte, graças a um número grande de quantidades conservadas associadas a este tipo sistema dinâmico.

Motivados por essa discussão, essa dissertação propõe-se estudar como tal efeito se manifesta na seguinte equação dispersiva não linear

$$iu_t + \Delta u = f(u, \overline{u}, Du, D\overline{u}), \tag{1}$$

onde $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função admitindo valores complexos, t é um número real, x é um vetor em $\mathbb{R}^d$, com $d \geq 1$ e f é uma aplicação não linear, a principio, arbitrária. Essa equação é conhecida na literatura como *equação de Schrödinger não linear* (NLS) e recebe esse nome em homenagem ao físico austríaco Erwim Schrödinger (1887-1961), um dos precursores no estudo da mecânica quântica.

A equação de Schrödinger não linear não tem mais como interpretação física descrever a evolução de uma partícula quântica como acontece no caso linear, porém ela fornece uma descrição canônica para a dinâmica de evolução de uma onda portadora que se propaga em um meio dispersivo fracamente não linear, quando os processos dissipativos são desprezíveis. Em tempos curtos e pequenas distâncias de propagação, a dinâmica é linear, mas as interações não lineares cumulativas resultam em uma modulação significativa da amplitude da onda em grandes escalas, tanto espaciais quanto temporais. A NLS também é muito importante na modelagem da propagação de feixes de *laser* intensos, além de surgir em diversos outros contextos físicos e também biológicos como a ótica não linear, os condensados de Bosen-Einstein, na modelagem da estrutura do DNA, entre outros.

Como foi enfatizado anteriormente, estaremos interessados em soluções particulares da equação (1), isto é, os *solítons*. Matematicamente, as ondas estacionárias são soluções que assumem a forma $u(t,x) = e^{i\omega t}\varphi(x)$ com $\omega \in \mathbb{R}$ e $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função satisfazendo a equação elíptica

$$-\Delta\varphi + \omega\varphi + f(\varphi, D\varphi) = 0, \quad \varphi \in H^1(\mathbb{R}^d). \tag{2}$$

Começaremos considerando o caso em que a não linearidade é da forma $f(u) = -|u|^{p-1}u$, onde $p \in (1, +\infty)$, isto é, nossa não linearidade independe das derivadas espaciais da função. Baseados na obra de (CAZENAVE, 2003), utilizaremos métodos variacionais para garantirmos a existência de soluções para (2), bem como propriedades acerca da regularidade das soluções, decaimento exponencial e algumas identidades funcionais. Posteriormente nos restringiremos as soluções que minimizam energia, denominadas estados fundamentais ou *ground states* , garantindo assim a unicidade de soluções para o problema a menos de simetrias advindas do modelo bem como diversas caracterizações variacionais.

No nosso estudo, as soluções do tipo estado fundamental desempenham um papel central. Estamos particularmente interessados em questões associadas a estabilidade/instabilidade dessa classe de soluções. Para isso, precisamos primeiramente definir um conceito de estabilidade que se comporte bem com as simetrias advindas da equação.

Definição 0.1. *Seja φ uma solução de (2). A onda estacionária $e^{i\omega t}\varphi(x)$ é dita ser orbitalmente estável se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ que cumpre a seguinte condição: se $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ satisfaz*

$$\|u_0 - \varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} < \delta,$$

então a solução máximal $u(t)$ de (1), com $u(0) = u_0$ existe para todo $t \in \mathbb{R}$ e

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \inf_{\theta\in\mathbb{R}} \inf_{y\in\mathbb{R}^d} \|u(t) - e^{i\theta}\varphi(\cdot - y)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon.$$

Caso contrário, diremos que a onda estacionária é orbitalmente instável.

Nesse sentido, o ponto alto dessa etapa será demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 0.1. *Seja φ um ground state para a equação (2). Se $1 < p < 1 + \frac{4}{d}$, então a onda estacionária $e^{i\omega t}\varphi(x)$ é orbitalmente estável.*

Para a prova do teorema acima utilizaremos dois métodos. O primeiro, denominado *método clássico de estabilidade*, é uma poderosa ferramenta para se obter resultados de estabilidade e instabilidade o qual é baseado em uma análise espectral dos operadores associados a equação. O segundo, conhecido como *método de Cazenave-Lions*, aparece pela primeira vez em (CAZENAVE, 1983) e mais tarde desenvolvida por (CAZENAVE; LIONS, 1982) e se baseia principalmente em argumentos variacionais e de compacidade, o qual o passo principal consiste em caracterizar os *ground states* como os minimizadores de energia sobre uma certa esfera de $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$. Mostraremos também que o intervalo fornecido ao expoente $p > 1$ no Teorema 0.1 é ótimo e além disso, a instabilidade no caso $p \geq 1 + \frac{4}{d}$ é, em um certo sentido, mais forte que a instabilidade apresentada na Definição 0.1.

Definição 0.2. *Considere φ uma solução da equação elíptica (2). Diremos que a onda estacionária $e^{i\omega t}\varphi(x)$ é fortemente instável (ou instável por explosão em tempo finito) se para todo $\varepsilon > 0$ existe $u_{\varepsilon,0} \in H^1(\mathbb{R}^d)$ tal que*

$$\|u_{\varepsilon,0} - \varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$$

mas a solução máximal correspondente u_ε de (1) com intervalo de existência $\left(T^\varepsilon_{min}, T^\varepsilon_{max}\right)$ satisfaz $T^\varepsilon_{min} > -\infty$ e $T^\varepsilon_{max} < +\infty$ e além disso

$$\lim_{t\searrow T^\varepsilon_{min}} \|u_\varepsilon(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} = +\infty \quad e \quad \lim_{t\nearrow T^\varepsilon_{max}} \|u_\varepsilon(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} = +\infty.$$

O segundo teorema principal que mostraremos nessa etapa é o seguinte

Teorema 0.2. *Seja $p \geq 1 + \frac{4}{d}$. Então para toda solução φ de (2) a onda estacionária $e^{i\omega t}\varphi(x)$ é fortemente instável.*

Assim como o método clássico de estabilidade, a prova desse resultado se baseia em uma análise espectral dos operadores associados ao problema. Feito isso, estenderemos o Teorema 0.2 para não linearidades mais gerais, assim como feito por (COZ, 2008).

Por fim, baseados nos resultados obtidos em (OHTA, 2011), dissertaremos sobre teoremas de instabilidades obtidos para sistemas hamiltonianos dispersivos abstratos, abrangendo assim uma classe maior de equações de interesse, tanto no ponto de vista matemático, quanto físico. A formulação mais precisa da estrutura do problema será dado ao decorrer do trabalho, mas resumidamente consideremos uma equação de evolução da seguinte forma

$$\frac{du}{dt}(t) = \tilde{J}\mathcal{H}'(u(t)), \tag{3}$$

onde $u : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow X$ é uma curva em um espaço de Hilbert real $X \hookrightarrow H$, com H também sendo um espaço de Hilbert real. $\mathcal{H}$ é um funcional de classe $C^2(X, \mathbb{R})$ e $\tilde{J}$ a extensão natural ao dual topológico de um operador $J \in \mathcal{L}(X)$ o qual este é bijetor e antisimétrico. O objetivo principal deste capítulo é estudar questões acerca da estabilidade do que chamamos de *bound states*, os quais são definidos da seguinte maneira.

Definição 0.3. *Diremos que uma solução $v(t)$ da equação de evolução (3) é um bound state se é da forma $v(t) = \mathcal{T}(\omega t)\phi$ onde $\{\mathcal{T}(s)\}_{s\in\mathbb{R}}$ é o grupo a um parâmetro de operadores unitários sobre X gerado por J, $\omega \in \mathbb{R}$ e $\phi \in X$ satisfaz a equação*

$$\mathcal{H}'(\phi) = \omega Q'(\phi),$$

onde $2Q(v) := \|v\|_H^2$. Além disso, diremos que um bound state $v(t) = \mathcal{T}(\omega t)\phi$ de (3) é orbitalmente estável se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ satisfazendo a propriedade de que se $u_0 \in X$ satisfaz

$$\|u_0 - \phi\|_X < \delta,$$

então a solução $u(t)$ de (3), com $u(0) = u_0$ existe para todo $t \in [0, +\infty)$ e temos também que

$$\inf_{s\in\mathbb{R}} \|u(t) - \mathcal{T}(s)\phi\|_X < \varepsilon,$$

para todo $t \in [0, +\infty)$. Caso contrário $v(t)$ é dito ser orbitalmente instável.

Embora seja de grande interesse trabalharmos em uma estrutura geral, conforme foi apresentado anteriormente, formularemos suposições mais fortes a fim de aplicar os resultados obtidos no estudo das equações de Schrödinger não linear. Com tais suposições bem estabelecidas, apresentaremos dois resultados principais e três corolários sobre a instabilidade de *bound states* para a equação (3). No primeiro teorema apresentaremos uma condição suficiente para que tenhamos a instabilidade dos *bound states* para um caso não degenerado. Por outro lado, no segundo teorema será fornecido uma condição suficiente para que obtenhamos tal instabilidade para um caso crítico (ou degenerado).

Vale ressaltar que infelizmente as suposições impostas para tal estudo, como por exemplo, a bijetividade do operador J, nos impede de aplicar os resultados obtidos por (OHTA, 2011) em outros modelos, tais como as equações de Klein-Gordon não lineares e as equações do tipo KdV. Porém, mesmo com essas restrições, tais resultados abstratos são muito bem aplicados no estudo da instabilidade orbital em diversos modelos como por exemplo a equação de Schrödinger não linear com potencial tipo δ-*function* e sistemas de equações não lineares do tipo Schrödinger.

Preliminares

O objetivo deste capítulo inicial é expor os conceitos e fatos básicos que serão necessários ao desenvolvimento de todo o trabalho. As referências para o material apresentado serão citadas ao longo de cada seção. É importante frisar que não só este capitulo, como o trabalho como um todo, requer um conhecimento prévio de análise real (inclui-se aqui, teoria da medida e integração) e análise funcional, incluindo assim a teoria de espaços métricos, espaços de Banach, espaços de Hilbert e teoria de operadores.

Conceitos Básicos da Análise Harmônica

A análise harmônica é uma das áreas mais fascinantes da matemática, sendo objeto central no desenvolvimento de diversas áreas de pesquisa como por exemplo equações diferenciais parciais, teoria de integração, teoria dos números entre outras. Além de suas diversas aplicações práticas como teoria da informação e vários campos da engenharia.

Já nesta seção, nossa meta é introduzir as ideias e teoremas básicos acerca dessa teoria, que serão fundamentais no decorrer deste trabalho.

A Transformada de Fourier

O conceito da transformada de Fourier, assim nomeada em homenagem ao matemático e físico francês Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), é motivado por duas ideias centrais em análise matemática. A primeira é a ideia de expressar funções periódicas genéricas como uma super-posição de ondas básicas (senos e cossenos) e a segunda é a concepção de um operador que transforma diferenciação em multiplicação por polinômios, uma ferramenta de extrema utilidade na resolução de equações diferenciais.

Tendo isso em mente, para uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ definiremos a *Transformada de Fourier* de f como sendo

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx. \tag{4}$$

Observe que a integral no lado direito de (4) faz sentido, pois desde que $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e $e^{-2\pi i x \cdot \xi}$ é um número complexo unitário, segue pela desigualdade de Hölder que a integral converge, para qualquer que seja $\xi \in \mathbb{R}^d$. Além disso, não é difícil perceber que $\mathcal{F}$ é linear, visto como um operador de $L^1(\mathbb{R}^d)$ em $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ e também

$$\|\widehat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Denotaremos por $C_0(\mathbb{R}^d)$ o espaço de todas as funções contínuas que tendem a zero no infinito, isto é, dado $\varepsilon > 0$ pequeno, existe um conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^d$ tal que $|f(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in K^c$. Nossa primeira proposição lista algumas das propriedades básicas da transformada de Fourier.

Proposição 0.1 (Propriedades da Transformada de Fourier)**.** *Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Então*

1. *A função $\widehat{f} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ é contínua.*
2. $\widehat{\tau_y f}(\xi) = e^{2\pi i y \cdot \xi} \hat{f}(\xi)$*, onde* $\tau_y f(x) = f(x + y)$.
3. $\widehat{\delta_a f}(\xi) = a^{-n} \hat{f}(a^{-1}\xi)$*, onde* $\delta_a f(x) = f(ax)$.
4. $\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$.
5. *Se $x^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ para $|\alpha| \leq k$, então $\widehat{f} \in C^k(\mathbb{R}^d)$ e $\partial^\alpha \widehat{f} = \mathcal{F}[(-2\pi i)^{|\alpha|} x^\alpha f]$.*
6. *Se $f \in C^k(\mathbb{R}^d)$, $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ para $|\alpha| \leq k$ e $\partial^\alpha f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ para $|\alpha| \leq k - 1$, então $\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (-2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{f}(\xi)$.*

Demonstração: Ver (FOLLAND, 1999), página 249, Theorem 8.22. □

Observe que o item (4) nos mostra seu bom comportamento com o operador de convolução, o transformando em uma simples multiplicação de funções. Já os itens (5) e (6) nos fornece seu caráter especial de transformar diferenciação em multiplicação por polinômios.

Nosso próximo resultado nos fornece uma caracterização importante do conjunto imagem da transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Teorema 0.3. *(Riemann-Lebesgue) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ então $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$.*

Demonstração: Ver (STEIN; WEISS, 1971), página 2, Theorem 1.2. □

Vamos agora nos concentrar no problema inverso, ou seja, como obter f a partir da sua transformada de Fourier. Para isso, definimos a transformada de Fourier inversa para uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ por

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx. \tag{5}$$

Antes de passarmos ao teorema de inversão propriamente dito, apresentamos a chamada fórmula de multiplicação para a transformada de Fourier, um resultado simples que segue diretamente do Teorema de Fubini porém é de bastante utilidade em diversas situações.

Teorema 0.4. *(Fórmula de multiplicação) Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, então vale a seguinte igualdade*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \widehat{g}(x) dx.$$

Demonstração: Ver (STEIN; WEISS, 1971), página 8, Theorem 1.15. □

Teorema 0.5. *(Fórmula de inversão) Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Se $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ então temos que*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{2\pi i x\xi} \widehat{f}(\xi) d\xi,$$

para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^d$.

Demonstração: Ver (STEIN; WEISS, 1971), página 11, Corollary 1.21. □

Perceba que, em geral, a fórmula (4) não tem porquê fazer sentido para uma função f em $L^2(\mathbb{R}^d)$, pois não há garantia que a integral convirja. Portanto, existe uma maneira simples e elegante de estendermos a teoria para o contexto $L^2(\mathbb{R}^d)$. O ponto chave para essa extensão é o seguinte resultado.

Teorema 0.6. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. Então*

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Demonstração: Ver (STEIN; WEISS, 1971), página 16, Theorem 2.1. □

Ora, como $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^d)$, existe uma única extensão contínua da transformada de Fourier, a qual continuaremos denotando por $\mathcal{F}$, para o espaço $L^2(\mathbb{R}^d)$. O resultado seguinte, conhecido como Teorema de Plancherel, nos fornece as boas propriedades que o operador $\mathcal{F}$ tem sobre o conjunto $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Teorema 0.7. *(Teorema de Plancherel) O operador $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ é unitário, isto é, linear, isométrico e sobrejetivo. Além disso, sua inversa $\mathcal{F}^{-1}$ pode ser obtido como sendo*

$$(\mathcal{F}^{-1}\varphi)(x) = \mathcal{F}\varphi(-x),$$

para todo função $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Demonstração: Ver (STEIN; WEISS, 1971), página 17, Theorem 2.3. □

Os Espaços de Sobolev

Em meados da década de 1930, o matemático soviético Sergei Lvovich Sobolev (1908-1989) iniciou seus estudos acerca das soluções fracas para equações diferenciais hiperbólicas e da minimização de certas integrais variacionais. Foi nesse período que se originou o que se conhece atualmente como os *Espaços de Sobolev*. Nas ultimas décadas tais espaços criaram um imenso legado na teoria moderna das equações diferenciais, de tal forma que se tornaram ferramentas imprescindíveis para o estudo das mesmas.

Matematicamente, os espaços de Sobolev são uma família de espaços de funções semelhantes a $C^k(\mathbb{R}^d)$, no sentido que consistem de funções com condições sobre suas derivadas.

Porém, em vez de exigirmos que as derivadas vivam em $C^0(\mathbb{R}^d)$, pedimos que elas sejam elementos em $L^p(\mathbb{R}^d)$. Mas para isso, precisamos de alguma maneira atribuir um significado geral a derivada de uma função em $L^p(\mathbb{R}^d)$. Desse modo, vamos considerar inicialmente uma aplicação $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^d)$ com $\alpha \in \mathbb{N}^d$ um multi-índice, então para qualquer função $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ a igualdade

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_{x_j}(x)\phi(x)dx = -\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\phi_{x_j}(x)dx$$

acontece após uma integração por partes na variável x_j. Repetindo esse processo $|\alpha|$ vezes, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^d} \partial^\alpha f(x)\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\partial^\alpha\phi(x)dx. \tag{6}$$

O conceito de derivada fraca é definido de forma análoga a (6), como sugere a seguinte definição.

Definição 0.4. *Dadas $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ e um multi-índice α, dizemos que g é a α-ésima derivada fraca de f, denotada $\partial^\alpha f = g$, se para toda $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$,*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\partial^\alpha\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\phi(x)dx.$$

A exigência de que f, g sejam elementos de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ é natural, já que o suporte de ϕ estará contido em algum subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^d$. Então o fato de $f, g \in L^1(K)$ garante que ambas integrais sempre façam sentido. Perceba também que se temos a existência da derivada fraca, então esta é única em quase toda parte (ver (ADAMS; FOURNIER, 2003), página 22, Remark 1.62).

Com esse conceito, podemos vir a definir o que vem a ser os espaços de Sobolev usuais.

Definição 0.5. *Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $1 \le p \le +\infty$. O espaço de Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$ é definido como sendo o conjunto*

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}^d) : \partial^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^d), |\alpha| \le k \right\},$$

onde $\partial^\alpha f$ denota a α-ésima derivada fraca de f.

Perceba que tal definição para espaço de Sobolev faz sentido, pois dado $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ e $K \subset \mathbb{R}^d$ um subconjunto compacto, temos pela desilgualdade de Hölder que

$$\int_K |f(x)|dx = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\chi_K(x)dx \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\|\chi_K\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} < +\infty,$$

onde χ_K denota a função característica do compacto K e $1/p + 1/p' = 1$. Desse modo temos que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ e assim faz sentido calcularmos sua derivada no sentido fraco.

Temos mais duas observações a fazer acerca da definição dos espaços de Sobolev. A primeira é que claramente temos

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^d) \subset L^p(\mathbb{R}^d), \quad \forall\, 1 \le p \le +\infty.$$

A segunda é que quando uma aplicação é derivável no sentido clássico, (6) nos diz que ela também derivada no sentido fraco, daí por unicidade ambas derivadas devem coincidir (ver (BREZIS, 2011), página 264, Remark 2).

Temos que para todo $1 \leq p \leq +\infty$ e $k \in \mathbb{N}$, os espaços de Sobolev $W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$ tem estrutura de espaço vetorial, e quando munido da norma

$$\|f\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{k,p} := \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},$$

é um espaço de Banach, separável se $1 \leq p < +\infty$ e reflexivo quando $1 < p < +\infty$ (veja (ADAMS; FOURNIER, 2003), páginas 60 e 61, Theorem 3.3 e Theorem 3.6). Porém é o caso particular $p = 2$ que surge de maneira mais natural em muitas das aplicações. Os espaços $W^{k,2}(\mathbb{R}^d)$ acabam por herdar um produto interno natural do espaço $L^2(\mathbb{R}^d)$, que é dado por

$$(f, g)_{W^{k,2}(\mathbb{R}^d)} = (f, g)_{k,2} := \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} (\partial^\alpha f, \partial^\alpha g)_2 \tag{7}$$

e são, desse modo, espaços de Hilbert. Por esta razão distinguimos estes espaços com a notação $H^k(\mathbb{R}^d) := W^{k,2}(\mathbb{R}^d)$, com a norma advinda do produto interno (7)

$$\|f\|_{H^k(\mathbb{R}^d)} := \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right)^{1/2}.$$

Outro fato interessante do caso $p = 2$ é que podemos definir o espaço de Sobolev $H^k(\mathbb{R}^d)$ de maneira independente, por meio da transformada de Fourier, que abrange até mesmo índices mais gerais.

Definição 0.6. *Seja $s \in \mathbb{R}$ com $s \geq 0$. Definimos o espaço de Sobolev (Não Homogêneo) de ordem s, denotado $H^s(\mathbb{R}^d)$, por*

$$H^s(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^d) \mid \mathcal{F}^{-1}[(1 + |\xi|^2)^{s/2} \widehat{f}] \in L^2(\mathbb{R}^d) \right\}.$$

O conjunto $H^s(\mathbb{R}^d)$ como definido em 0.6 é um *espaço de Hilbert* quando munido com o produto interno

$$(f, g)_{H^s(\mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |y|^2)^s \widehat{f}(y)\overline{\widehat{g}(y)} dy, \quad s \geq 0.$$

O próximo Teorema reúne duas propriedades fundamentais dos espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^d)$.

Teorema 0.8. *Sejam $r, s \in \mathbb{R}$, com $r, s \geq 0$. Se $r < s$, então*

$$H^s(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow H^r(\mathbb{R}^d).$$

Além disso, a inclusão é contínua e densa.

Demonstração: Ver (LINARES; PONCE, 2015), página 46, Proposition 3.1. □

O resultado seguinte nos diz que se tomarmos $s \in \mathbb{N}$ na Definição 0.6, ambas definições para espaço de Sobolev, como era de se esperar, coincidem.

Teorema 0.9. *Considere $s \in \mathbb{N}$. Então $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ se, e somente se, $\partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha| \leq s$, onde as derivadas são calculadas no sentido fraco.*

Demonstração: Ver (LINARES; PONCE, 2015), página 47, Theorem 3.1. □

Finalizamos esse capítulo enunciando dois dos famosos *Mergulhos de Sobolev.*

Teorema 0.10. *Seja $s > \frac{d}{2}$. Então $H^s(\mathbb{R}^d)$ pode ser continuamente mergulhado em $C_0(\mathbb{R}^d)$ e para toda $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$ vale a desigualdade*

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)},$$

onde $C = C_s$ é uma constante positiva.

Demonstração: Ver (LINARES; PONCE, 2015), página 47, Theorem 3.2. □

Teorema 0.11. *Considere $0 < s < \frac{d}{2}$, então $H^s(\mathbb{R}^d)$ está mergulhado continuamente em $L^p(\mathbb{R}^d)$, com $p = \frac{2d}{d-2s}$. Além disso, para todo f em $H^s(\mathbb{R}^d)$ temos que existe uma constante $C = C_{d,s,p} > 0$ tal que*

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

Demonstração: Ver (LINARES; PONCE, 2015), página 49, Theorem 3.3. □

Funcionais Diferenciáveis e o Cálculo das Variações

Problemas de máximo e mínimo aparecem em diversas áreas e em diversos contextos, principalmente quando estamos tratando questões relacionadas a otimização. É comum aparecerem na matemática, física e economia termos como: tempo mínimo, custo mínimo, lucro máximo, volume ótimo, caminho mais curto, velocidade ideal, entre outros. Uma ferramenta extremamente útil na resolução de problemas desse tipo é o *Cálculo das Variações*, o qual podemos ver como o cálculo diferencial para funções em espaços abstratos mais gerais, e que tem como objetivo generalizar a teoria de máximos e mínimos usual.

O cálculo variacional aparecia de maneira implícita e num certo sentido informal em diversos problemas oriundos da física, podemos citar como exemplo o principio minimizante do raio de luz, estabelecido por Fermat (1607-1665) e em problemas de balística, como as superfícies de revolução que minimizam resistência, estudadas por Newton (1643-1727). Porém, foi no século XVIII, com as contribuições de Lagrange (1736-1813) e Euler (1707-1783) que este se consolidou como disciplina matemática e tornou-se uma ferramenta efetiva.

Esse capítulo tem como objetivo apresentar as definições e enunciar resultados elementares desta vasta teoria, os quais estão estreitamente ligados ao nosso trabalho.

Funcionais Diferenciáveis

Nesse contexto, diremos que um *Funcional* é uma regra de correspondência que associa cada elemento em um espaço vetorial, um valor em um corpo. No decorrer do trabalho, trataremos especificamente de espaços de Banach infinito dimensionais (espaços de funções) e tomaremos a reta real $\mathbb{R}$ como corpo base. Comecemos com o conceito de derivada de Fréchet de um funcional real.

Definição 0.7. *Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço vetorial normado e $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que I é Fréchet diferenciável (ou diferenciável no sentido de Fréchet) em um vetor $u \in X$, se existir um único funcional linear contínuo $T_u \in X^*$ tal que*

$$\lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{|I(u+h) - I(u) - \langle T_u, h\rangle|}{\|h\|_X} = 0.$$

Neste caso,

$$\langle I'(u), h\rangle := \langle T_u, h\rangle, \quad \forall h \in X.$$

Diremos que o funcional $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é *continuamente diferenciável* se $I' : X \longrightarrow X^*$ existir, e for contínua. Denotaremos o conjunto de todos funcionais continuamente diferenciáveis definidos sobre o conjunto X e assumindo valores reais por $C^1(X, \mathbb{R})$.

A proposição a seguir é uma coleção de propriedades acerca da derivada de Fréchet, a qual usaremos repetidamente no decorrer do trabalho.

Proposição 0.2. *Sejam I e J funcionais diferenciáveis em $u \in X$. Então as seguintes propriedades são válidas*

1. *Se α e β são número reais, então $\alpha I + \beta J$ são diferenciáveis em $u \in X$ e*

$$(\alpha I + \beta J)'(u) = \alpha I'(u) + \beta J'(u).$$

2. *O produto IJ é diferenciável em $u \in X$ e*

$$(IJ)'(u) = J(u)I'(u) + I(u)J'(u).$$

3. *Se $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow X$ é diferenciável em t_0 com $\gamma(t_0) = u$ então a composição $I(\gamma(t))$ é diferenciável e*

$$(I(\gamma))'(t_0) = I'(u)\gamma'(t_0).$$

Demonstação: Ver (BADIALE; SERRA, 2011), página 13, Proposition 1.3.6. □

Existe outra maneira interessante de definirmos o conceito de diferenciabilidade para um funcional.

Definição 0.8. *Considere $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional, onde $(X, \|\cdot\|_X)$ é um espaço de Banach. Diremos que I é Gâteux diferenciável em $u \in X$ se existir um funcional linear contínuo $T_u \in X^*$ de modo que*

$$\langle T_u, h\rangle = \lim_{t\to 0} \frac{I(u+th) - I(u)}{t}, \quad \forall h \in X.$$

Perceba que se I é Fréchet diferenciável em $u \in X$, então I também é Gâteux diferenciável nesse ponto. O seguinte resultado nos fornece informação sobre a condição recíproca.

Teorema 0.12. *Seja $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional contínuo. Se I é Gâteux diferenciável em todo $u \in X$ então I é Fréchet diferenciável em X. Além disso, $I \in C^1(X, \mathbb{R})$.*

Demonstração: Ver (BADIALE; SERRA, 2011), página 14, Proposition 1.3.8. □

Se supormos que X seja um espaço de Hilbert, com produto interno $(\cdot,\cdot)_X$, decorre do Teorema da Representação de Riesz que existe um único elemento em X, denotado por $\nabla I(u)$, que satisfaz

$$\langle I'(u), h\rangle = (\nabla I(u), h)_X$$

para qualquer que seja $h \in X$. O elemento $\nabla I(u) \in X$, é chamado de *gradiente do funcional I em u*. Um operador $F : X \longrightarrow X$ é chamado *potencial* se existir um funcional $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$F(u) = \nabla\varphi(u), \quad \forall u \in X.$$

Abaixo acrescentamos a definição de ponto crítico para um funcional diferenciável.

Definição 0.9. *Seja $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 num espaço normado $(X, \|\cdot\|_X)$. Diremos que $u \in X$ é um ponto crítico de I se*

$$I'(u) = 0$$

onde $I' : X \longrightarrow X^*$ denota a derivada de Fréchet de I.

Baseados na Definição 0.9 vamos dizer que um número $c \in \mathbb{R}$ é um *valor crítico do funcional I* (ou *nível crítico*) quando existe um ponto crítico $u_c \in X$ de I tal que $I(u_c) = c$. Tal conceito será fundamental no decorrer dessa dissertação.

Um exemplo muito interessante é o seguinte. Consideremos X um espaço de Banach e seja

$$B : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

uma forma bilinear contínua. Denotemos por $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$ a forma quadrática associada a B, isto é

$$I(u) = B(u,u), \;\; u \in X.$$

Por linearidade temos que

$$I(u+h) - I(u) = B(u+h, u+h) - B(u,u) = B(u,h) + B(h,u) + B(h,h).$$

Por continuidade, $B(h,h) = o(\|h\|)$. Com isso, temos que I é diferenciável sobre X e além disso

$$\langle I'(u), h\rangle = B(u,h) + B(h,u),$$

claramente, se B é simétrica temos

$$\langle I'(u), h\rangle = 2B(u,h)$$

Duas aplicações concretas desse exemplo que serão de grande valia no decorrer do trabalho são dados por

$$M_1(u) := \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^2\, dx, \quad u \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

e

$$M_2(u) := \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(x)|^2\, dx, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

Note que tanto M_1 quanto M_2 são formas quadráticas associadas a formas bilineares contínuas. Então pelo que foi visto

$$\langle M_1'(u), h\rangle = 2\int_{\mathbb{R}^d} u(x)h(x)\, dx \;\text{ com } u, h \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

e

$$\langle M_2'(u), h\rangle = 2\int_{\mathbb{R}^d} \nabla u(x)\nabla h(x)\, dx \;\text{ com } u, h \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

Outro exemplo concreto que será de extrema importância é dado por

$$J_p(u) := \int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^p\, dx, \quad u \in L^p(\mathbb{R}^d)$$

com $2 < p < \infty$. Considere $x \in \mathbb{R}^d$ e $0 < |t| < 1$. Pelo Teorema do valor médio, existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{||u(x) + th(x) - |u(x)|^p|}{|t|} &= p|u(x) + \theta t h(x)|^{p-1}|h(x)| \\ &\leq p\,(|u(x) + |h(x)|)^{p-1}\,|h(x)|.\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder nos diz que $p\,(|u(x) + |h(x)|)^{p-1}\,|h(x)| \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Assim, pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue (ver (FOLLAND, 1999), página 56, Proposition 2.27)

$$\langle J_p'(u), h\rangle = \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{||(u+th)(x)|^p - |u(x)|^p|}{|t|} = p\int_{\mathbb{R}^d} |u(x)|^{p-2}u(x)h(x)\, dx. \tag{8}$$

Métodos Variacionais

Nesta seção apresentaremos alguns teoremas clássicos que serão aplicados no trabalho e que desempenham um papel fundamental na teoria das equações diferenciais parciais.

O Teorema do passo da montanha

Dedicaremos esse espaço a enunciar um teorema devido inicialmente a Ambrosetti (1944-2020) e Rabinowitz (1939-), conhecido como *Teorema do passo da montanha*. Apesar de não o utlizarmos diretamente em nosso trabalho, suas ideias geométricas serão imprescindíveis no desenvolvimento de resultados fundamentais dessa dissertação.

Ainda que curioso, o nome resume bem a geometria acerca do resultado. Pois bem, imaginemos que alguém se encontra em um ponto A com altura h_0, rodeado por uma cadeia de montanhas de alturas superiores ou iguais a h_0, e deseja atingir o ponto B situado fora da cordilheira, a uma altura $h_1 < h_0$, então parece existir um "caminho ótimo" passando pela cadeia de montanhas e conduzindo A até B. Uma maneira de determiná-lo é considerar, entre todos os caminhos unindo os pontos A e B, aquele que sobe à uma altura mínima, ou seja, avaliamos a máxima altura de cada caminho unindo os pontos A e B e em seguida, avaliamos o menor desses valores máximos, e este será o caminho ótimo. Enunciaremos o Teorema do passo da montanha da seguinte maneira.

Teorema 0.13. *(Teorema do Passo da Montanha) Sejam $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ um espaço de Hilbert, $I \in C^2(H, \mathbb{R})$ um funcional, $r > 0$ e também $\eta \in H$ e de forma que $\|\eta\|_H > r$. Se*

$$b := \inf_{\|u\|_H = r} I(u) > I(0) \geq I(\eta)$$

Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $u_\varepsilon \in H$ tal que

1. $c - 2\varepsilon \leq I(u_\varepsilon) \leq c + 2\varepsilon$,
2. $\|I'(u_\varepsilon)\|_H < 2\varepsilon$,

onde

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \left\{ \sup_{t \in [0,1]} \{I(\gamma(t))\} \right\} \tag{9}$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = \eta\}.$$

Demonstração: Ver (WILLEM, 1996), página 12, Theorem 1.15. □

Como consequência do Teorema 0.13 e possível provar que o número c definido em (9) é de fato um valor crítico para I, mas para isso precisamos definir o que vem a ser um funcional diferenciável satisfazer a condição de Palais-Smale.

Definição 0.10. *Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um Espaço de Banach, e $I : X \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional Fréchet diferenciável. Dizemos que I satisfaz a condição de Palais-Smale (PS) se qualquer sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que*

$$|I(u_n)| \leq C,\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \lim_{n\to+\infty} I'(u_n) = 0. \tag{10}$$

onde $C > 0$ é uma constante que independe de n, possui uma subsequência que converge fortemente em X.

As sequências em X que satisfazem a condição (10) são ditas ser *sequências de Palais-Smale* e essas desempenharão um papel importante no decorrer desse trabalho.

Teorema 0.14. *(Ambrosetti-Rabinowitz) Sobre as hipóteses do Teorema 0.13, temos que se o funcional I satisfaz a condição de Palais-Smale, então c é um valor critíco de I.*

Demonstração: Ver (WILLEM, 1996), página 13, Theorem 1.15. □

1

A Equação de Schrödinger Não Linear

Nesse capítulo trataremos da equação não linear de Schrödinger

$$iu_t + \Delta u = f(u, \overline{u}, Du, D\overline{u}) \tag{1.1}$$

onde $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função admitindo valores complexos, t é um número real, x é um vetor em $\mathbb{R}^d$, onde $d \geq 1$ e f é uma função não linear, *a priori*, arbitrária. Na maior parte deste capítulo nos restringimos a estudar a equação de Schrödinger com uma não linearidade do tipo polinomial, isto é, $f(u) = -|u|^{p-1}u$ onde $p \in \mathbb{R}$ é tal que $p > 1$. Desse modo, nossa não linearidade não depende das derivadas espaciais da função a se determinar.

Será possível perceber que no decorrer desse texto alguns resultados apresentados podem ser generalizados a não linearidades de outros tipos. Para mais informações recomendamos ver (CAZENAVE, 2003), capitulo 4, página 83 para mais exemplos.

1.1 O Problema de Cauchy

Esta seção será dedicada a fornecer resultados acerca do problema de Cauchy, também chamado de problema de valor inicial (PVI), associado a equação (1.1),

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u + |u|^{p-1}u = 0, & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{1.2}$$

Para podermos trabalhar de maneira concisa, é conveniente definirmos o que significará para nós o problema (1.2) ser bem colocado, ou semelhantemente, bem posto.

Definição 1.1. *Dizemos que o problema de Cauchy* (1.2) *é localmente bem posto, se para qualquer que seja $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$, existe $T > 0$ e uma única função u tal que*

1. *u é solução de* (1.2)*;*

2. $u \in C([-T,T];H^1(\mathbb{R}^d))$;

3. *Se* $(u_0^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{R}^d)$ *é uma sequência de funções tal que*

$$u_0^n \longrightarrow u_0, \text{ em } H^1(\mathbb{R}^d),$$

então

$$u^n \longrightarrow u \text{ em } C([-T,T];H^1(\mathbb{R}^d)),$$

onde u^n *é a solução de* (1.2)*, com* $u^n(0) = u_0^n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Se as três propriedades acima são satisfeitas para todo $T > 0$*, vamos dizer que o problema de Cauchy* (1.2) *é globalmente bem posto.*

Muitas das propriedades físicas advindas do modelo são de extrema importância para um estudo matemático rigoroso, por isso é importante observar as quantidades que são preservadas ao longo do fluxo da equação. A primeira delas, que chamaremos de *massa* (ou *carga*) é dada por

$$M(u(t)) := \frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.3}$$

A segunda quantidade conservada é a *Energia* do sistema

$$E(u(t)) := \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \frac{1}{p+1}\|u(t)\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.4}$$

Finalmente, temos a terceira quantidade conservada, o *Momento*

$$Q(u(t)) = \mathfrak{Im}\int_{\mathbb{R}^d} u(t)\nabla\overline{u}(t)dx. \tag{1.5}$$

Para nos beneficiarmos dessas quantidades conservadas, é natural procurarmos soluções de (1.2) em espaços funcionais onde essas quantidades estão bem definidas. Por tanto escolhemos como conjunto natural para analisar nossas soluções o espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^d)$ e restringiremos p ao intervalo crítico, para obtermos o mergulho contínuo de $H^1(\mathbb{R}^d)$ em $L^{p+1}(\mathbb{R}^d)$, isto é

$$\begin{cases} 1 < p < 1 + \frac{4}{d-2} & \text{se} \quad d \geq 3, \\ 1 < p < +\infty & \text{se} \quad d = 1, 2. \end{cases}$$

Com tais condições, obtemos os seguintes resultados, que dizem respeito a boa colocação do problema de Cauchy (1.2).

Teorema 1.1. *Seja* $1 < p < 1 + \frac{4}{d-2}$ *se* $d \geq 3$ *e* $1 < p < +\infty$ *se* $d = 1, 2$*. Para toda aplicação* $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$*, existe uma única solução máximal* u *de* (1.2)*, com* $T_{min} \in [-\infty, 0)$ *e* $T_{max} \in (0, +\infty]$ *tal que* $u(0) = u_0$ *e*

$$u \in C((T_{min}, T_{max}); H^1(\mathbb{R}^d)) \cap C^1((T_{min}, T_{max}); H^{-1}(\mathbb{R}^d)).$$

Além disso, obtemos as conservações de massa, energia e momento. Isto é

$$M(u(t)) = M(u_0), \quad E(u(t)) = E(u_0) \;\text{ e }\; Q(u(t)) = Q(u_0).$$

Demonstração: Ver (LINARES; PONCE, 2015), página 103, Theorem 5.4 . □

Desse modo, para podermos fazer uso do Teorema 1.1, daqui em diante ficará subentendido que $1 < p < 1 + \frac{4}{d-2}$ se $d \geq 3$ ou então $1 < p < +\infty$ caso $d = 1, 2$.

O resultado seguinte nos fornece algumas alternativas para que a solução obtida em 1.1 admita explosão (*Blow-up*) em tempo finito .

Corolário 1.1. *(Alternativas de explosão) Sejam* $1 < p < 1 + \frac{4}{d-2}$ *se* $d \geq 3$ *e* $1 < p < +\infty$ *se* $d = 1, 2$*,* $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ *e* $u \in C((T_{min}, T_{max}); H^1(\mathbb{R}^d)) \cap C^1((T_{min}, T_{max}); H^{-1}(\mathbb{R}^d))$ *a única solução de* (1.2) *obtida no Teorema 1.1 com* $u(0) = u_0$*. Então obtemos as seguintes alternativas de Explosão (blow-up):*

- *Se* $T_{max} < +\infty$ *então* $\lim_{t \nearrow T_{max}} \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = +\infty$.
- *Se* $T_{min} > -\infty$ *então* $\lim_{t \searrow T_{min}} \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = +\infty$.

Demonstração: Ver (CAZENAVE, 2003), página 185, Theorem 6.5.4 e também página 188, Remark 6.5.9 para mais detalhes. □

Observando com atenção o Teorema 1.1 é natural se perguntar se é possível existir circunstâncias as quais podemos obter uma solução de caráter global para (1.2). A proposição seguinte nos fornece uma resposta para essa questão.

Proposição 1.1. *Se* $1 < p < 1 + \frac{4}{d}$*, então* (1.2) *é globalmente bem colocada, isto é, para toda solução u obtida no Teorema 1.1 temos*

$$T_{min} = -\infty \quad e \quad T_{max} = +\infty.$$

Demonstração: Para realizar a demonstração desse fato, relembremos a famosa desigualdade de *Gagliardo-Nirenberg*, isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que, para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ tem-se

$$\|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} \leq C \|\nabla v\|^{\frac{d(p-1)}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|v\|^{p+1-\frac{d(p-1)}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.6}$$

Sabendo disso, consideremos $1 < p < 1 + \frac{4}{d}$ e u a solução de (1.2) obtida no Teorema 1.1. Realizaremos a prova da Proposição 1.1 por um argumento de contradição. Com isso, suponha sem perda de generalidade que $T_{max} < +\infty$. Dessa forma obtemos que

$$\lim_{t \nearrow T_{max}} \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = +\infty.$$

Por (1.6), temos que

$$
\begin{aligned}
E(u(t)) &= \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \frac{1}{p+1}\|u(t)\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} \\
&\geq \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\left(\frac{1}{2} - C\|\nabla u(t)\|^{\frac{d(p-1)}{2}-2}_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|u(t)\|^{p+1-\frac{d(p-1)}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right).
\end{aligned}
$$

Tendo em vista a propriedade de conservação de energia, obtemos

$$
\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\left(1 - \|\nabla u(t)\|^{\frac{d(p-1)}{2}-2}_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right) < C, \tag{1.7}
$$

para todo $t \in (T_{min}, T_{max})$. Porém, como por hipótese $p < 1 + \frac{4}{d}$, obtemos que $\frac{d(p-1)}{2} - 2 < 0$. Porém $\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \longrightarrow +\infty$ quando t se aproxima de T_{max}, o que contradiz (1.7). Argumentando de maneira similar para $T_{min} > -\infty$, o resultado segue. □

A proposição seguinte nos dá uma condição suficiente para a explosão em tempo finito.

Proposição 1.2. *Assuma que $1 + \frac{4}{d} \leq p < 1 + \frac{4}{d-2}$ e seja $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$, tal que*

$$
|x|u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d) \quad e \quad E(u_0) < 0.
$$

Então a solução u obtida no Teorema 1.1 correspondente ao dado inicial u_0 admite explosão em tempo finito, para tempos positivo e negativo, isto é

$$
T_{min} > -\infty \quad e \quad T_{max} < +\infty.
$$

Para demonstrar a Proposição 1.2, necessitaremos do seguinte resultado, conhecido na literatura como *Identidade Virial*.

Teorema 1.2. *(Identidade Virial): Seja $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$, tal que $|x|u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ e sejam u a solução de (1.2) correspondente a u_0. Então $|x|u(t) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ para todo $t \in (T_{min}, T_{max})$ e a função $\psi : t \mapsto \|xu(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ é de classe C^2 e satisfaz,*

$$
\begin{aligned}
\psi'(t) &= 4\mathfrak{Im}\int_{\mathbb{R}^d} \overline{u}(t)x \cdot \nabla u(t)dx, \\
\psi''(t) &= 8P(u(t))
\end{aligned}
$$

onde a aplicação P é dada por,

$$
P(v) := \|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \frac{d(p-1)}{2(p+1)}\|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}, \quad onde\ v \in H^1(\mathbb{R}^d).
$$

O termo *virial* advém da sua analogia com o *Teorema Virial* da mecânica clássica. Omitiremos a demonstração desse resultado. Porém uma demonstração rigorosa pode ser vista em (GLASSEY, 1977), página 1794, Lemma 1.

Demonstração da Proposição 1.2: Primeiramente, observe que

$$P(u(t)) = 2E(u(t)) + \frac{4 - d(p-1)}{2(p+1)} \|u(t)\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}^{p+1}.$$

Desde que $p \geq 1 + \frac{4}{d}$, temos que

$$\begin{aligned} P(u(t)) &= 2E(u(t)) + \frac{4 - d(p-1)}{2(p+1)} \|u(t)\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}^{p+1} \\ &\leq 2E(u(t)) \\ &= 2E(u_0) \\ &< 0, \end{aligned}$$

para todo $t \in (T_{min}, T_{max})$. Desse modo, segue pelo Teorema 1.2 (Identidade Virial) que

$$\frac{d^2}{dt^2} \|xu(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq 16E(u_0) \quad \forall t \in (T_{min}, T_{max}),$$

e integrando duas vezes em relação ao tempo obtemos

$$\|xu(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq 8E(u_0)t^2 + \left(4\mathfrak{Im} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{u}_0 x \cdot \nabla u_0) dx\right) t + \|xu_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2. \tag{1.8}$$

Note que o lado direito de (1.8) se trata de um polinômio de segundo grau em t, cujo coeficiente líder é $8E(u_0) < 0$. Isso nos diz que se pudéssemos considerar $|t|$ suficientemente grande, o lado direito de (1.8) se tornaria negativo, contradizendo $\|xu(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \geq 0$. Isso implica que

$$T_{min} > -\infty \quad \text{e} \quad T_{max} < +\infty,$$

conforme queriamos demonstrar. □

1.2 A Equação de Schrödinger Estacionária

Nossa meta daqui em diante é estudar soluções da equação (1.2) da forma

$$u(x,t) = e^{i\omega t}\varphi(x) \tag{1.9}$$

com $\omega \in \mathbb{R}$ e $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, a priori, uma função real. Perceba que substituindo (1.9) em (1.2), obtemos

$$\begin{aligned} iu(x,t)_t + \Delta u(x,t) + |u(x,t)|^{p-1}u(x,t) &= i\left(e^{i\omega t}\varphi(x)\right)_t + \Delta\left(e^{i\omega t}\varphi(x)\right) + |(e^{i\omega t}\varphi(x)|^{p-1}\left(e^{i\omega t}\varphi(x)\right) \\ &= i\left(i\omega e^{i\omega t}\varphi(x)\right) + e^{i\omega t}\Delta\varphi(x) + |\varphi(x)|^{p-1}\left(e^{i\omega t}\varphi(x)\right) \\ &= -e^{i\omega t}\left(-\Delta\varphi(x) + \omega\varphi(x) - |\varphi(x)|^{p-1}\varphi(x)\right) \end{aligned}$$

Ora, perceba que para (1.9) seja de fato uma solução de (1.2), a função real φ deve satisfazer uma determina relação, o que motiva a seguinte definição.

Definição 1.2. *Uma onda estacionaria (ou soliton) para a equação (1.2) é uma solução da forma $e^{i\omega t}\varphi(x)$ com $\omega \in \mathbb{R}$ e φ satisfazendo a seguinte equação elíptica*

$$\begin{cases} -\Delta\varphi + \omega\varphi - |\varphi|^{p-1}\varphi = 0, \\ \varphi \in H^1(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}. \end{cases} \tag{1.10}$$

A equação (1.10) é conhecida como *Equação de Schrödinger Estacionária Não-Linear*. Soluções de (1.2) com tais características fazem parte de uma classe mais geral de soluções que surgem em diversos problemas envolvendo equações dispersivas não lineares. Podemos citar como exemplo as equações de *Korteweg-de Vries (KdV), Klein-Gordon* e *Kadomtsev-Petviashvili*.

Existem na literatura várias técnicas desenvolvidas para o estudo da existência de soluções para problemas do tipo (1.10). Nessa seção nos concentraremos apenas em encontrar soluções por meio de métodos variacionais. Para isso, definimos um funcional $S : H^1(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\begin{aligned} S(v) : &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v(x)|^2\, dx + \frac{\omega}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |v(x)|^2\, dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^d} |v(x)|^{p+1} dx, \\ &= \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \frac{\omega}{2}\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \frac{1}{p+1}\|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}, \quad v \in H^1(\mathbb{R}^d). \end{aligned} \tag{1.11}$$

O funcional S definido acima é usualmente chamado de *Funcional de Ação*. O funcional de ação assim definido é tal que $S \in C^2(H^1(\mathbb{R}^d), \mathbb{R})$ e para $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ temos pelos resultados da seção 1.2 que a *derivada no sentido de Fréchet* de S em v é dada por

$$\begin{aligned} \langle S'(v), h\rangle &= \frac{1}{2}2\int_{\mathbb{R}^d} \nabla v(x)\nabla h(x)dx + \frac{\omega}{2}2\int_{\mathbb{R}^d} v(x)h(x)dx - \frac{1}{p+1}(p+1)\int_{\mathbb{R}^d} |v(x)|^{p-1}v(x)h(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \nabla v(x)\nabla h(x)\, dx + \omega\int_{\mathbb{R}^d} v(x)h(x)\, dx - \int_{\mathbb{R}^d} |v(x)|^{p-1}v(x)h(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} -\Delta v(x)h(x)\, dx + \omega\int_{\mathbb{R}^d} v(x)h(x)\, dx - \int_{\mathbb{R}^d} |v(x)|^{p-1}v(x)h(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(-\Delta v + \omega v - |v|^{p-1}v\right)(x)h(x)dx. \end{aligned}$$

com $h \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Assim, pela unicidade

$$S'(v) = -\Delta v + \omega v - |v|^{p-1}v. \tag{1.12}$$

Ora, perceba que (1.12) nos permite dizer que encontrar soluções de (1.10) é equivalente a encontrar pontos críticos não triviais para o funcional S.

Baseado nisso, está seção será dividida da seguinte maneira: Primeiro, mostraremos que se a equação (1.10) admite soluções, essas são suficientemente regulares, possuem decaimento exponencial e satisfazem algumas identidades funcionais. Em seguida, provaremos a existência de um ponto crítico não trivial de S. Para finalizar, obteremos diversas caracterizações variacionais para algumas soluções especiais de (1.10).

1.2.1 Resultados Preliminares

Antes de estudar a existência de soluções para (1.10), é conveniente provar que se tais soluções existem, elas gozam de certas propriedades especiais.

Proposição 1.3. *Seja $\omega > 0$. Se $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d)$ satisfaz (1.10), então*

(I) $\varphi \in W^{3,r}(\mathbb{R}^d)$ para todo $r \in [2, +\infty)$, em particular $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^d)$ (Regularidade);

(II) Existe $\varepsilon > 0$ tal que $e^{\varepsilon|x|}(|\varphi| + |\nabla\varphi|) \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ (Decaimento exponencial).

Demonstra ção: O ítem *(I)* segue de um argumento de *Bootstrap*, usualmente utilizado na Teoria de regularidade elíptica (veja (EVANS, 2010), página 487 para mais detalhes). Desse modo, apenas indicaremos como iniciar tal argumento, e indicamos o leitor ver (CAZENAVE, 2003), página 256, Theorem 8.1.1 para detalhes mais formais. Assim, suponhamos que $\varphi \in L^q(\mathbb{R}^d)$ para algum $q > p$. Como $|\varphi|^q = (|\varphi|^p)^{\frac{q}{p}} = (|\varphi|^{p-1}|\varphi|)^{\frac{q}{p}}$ temos que $|\varphi|^{p-1}\varphi \in L^{\frac{q}{p}}(\mathbb{R}^d)$ e como φ satisfaz

$$-\Delta\varphi = |\varphi|^{p-1}\varphi - \omega\varphi, \tag{1.13}$$

temos

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_{x_i}|^{\frac{q}{p}} dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\Delta\varphi|^{\frac{q}{p}} dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left||\varphi|^{p-1}\varphi - \omega\varphi\right|^{\frac{q}{p}} dx = \||\varphi|^{p-1}\varphi - \omega\varphi\|^{\frac{q}{p}}_{L^{\frac{q}{q}}(\mathbb{R}^d)} < +\infty,$$

para qualquer que seja $i = 1, ..., d$, assim $\varphi \in W^{2,\frac{p}{q}}(\mathbb{R}^d)$. Escolhendo $q \in (p, +\infty)$ se $d = 1, 2$ e $q = \frac{2d}{d-2}$ se $d \geq 3$ e repetindo o argumento anterior de maneira recursiva, obteremos (em um número finito de passos) que $\varphi \in W^{2,r}(\mathbb{R}^d)$ para qualquer $r \in [2, +\infty)$. Isso implica que $|\varphi|^{p-1}\varphi \in W^{1,r}(\mathbb{R}^d)$, para todo $r \in [2, +\infty)$. Seguindo assim de (1.13) que $\varphi \in W^{3,r}(\mathbb{R}^d)$ sempre que $r \in [2, +\infty)$, o que prova *(I)*.

Para *(II)*, assumiremos que φ é uma solução radial (i.e, $\varphi(x) = \phi(|x|)$, para alguma função real $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$). Para o caso não radial, pedimos novamente que o leitor consulte (CAZENAVE, 2003), página 256, Theorem 8.1.1. Desse modo, se φ é uma função radial, temos que

$$\Delta\varphi = \varphi'' - \frac{d-1}{r}\varphi'.$$

Substituindo em (1.10) obtemos

$$-\varphi'' + \left(\frac{d-1}{r}\right)\varphi' + \omega\varphi - |\varphi|^{p-1}\varphi = 0.$$

Com isso, o decaimento exponencial para φ segue diretamente da teoria clássica para equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. □

Lema 1.1. *Se $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d)$ é uma solução para a equação (1.10), então valem as seguintes identidades*

$$\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \omega\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \|\varphi\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} = 0, \tag{1.14}$$

$$\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \frac{d(p-1)}{2(p+1)}\|\varphi\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} = 0. \tag{1.15}$$

Demonstração: Seja $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d)$ solução de (1.10). Multiplicando (1.10) por $\overline{\varphi}$ e integrando sobre $\mathbb{R}^d$ obtemos

$$-\int_{\mathbb{R}^d} \Delta\varphi\overline{\varphi}dx + \omega \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi|^{p+1} dx = 0.$$

Por meio de uma integração por partes no primeiro termo, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla\varphi|^2 dx + \omega \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi|^{p+1} dx = 0,$$

o que mostra (1.14). Para mostrar (1.15), relembremos o funcional de classe C^2 definido no início dessa seção

$$S(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \frac{\omega}{2}\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \frac{1}{p+1}\|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}, \quad v \in H^1(\mathbb{R}^d). \tag{1.16}$$

Para $\lambda > 0$, seja $\varphi_\lambda(\cdot) := \lambda^{d/2}\varphi(\lambda\cdot)$. Com isso, temos

$$\|\nabla\varphi_\lambda\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^d |\nabla\varphi(\lambda x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^2 |\nabla\varphi(y)|^2 dy = \lambda^2 \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

De maneira similar, obtemos $\|\varphi_\lambda\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ e $\|\varphi_\lambda\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} = \lambda^{\frac{d(p-1)}{2}}\|\varphi\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}$. Desse modo, substituindo em (1.16), obtemos

$$S(\varphi_\lambda) := \frac{\lambda^2}{2}\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \frac{\omega}{2}\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \frac{\lambda^{\frac{d(p-1)}{2}}}{p+1}\|\varphi\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}, \tag{1.17}$$

e assim

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}S(\varphi_\lambda)\Big|_{\lambda=1} = \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \frac{d(p-1)}{2(p+1)}\|\varphi\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.18}$$

Por outro lado

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}S(\varphi_\lambda)\Big|_{\lambda=1} = \left\langle S'(\varphi), \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\lambda}\Big|_{\lambda=1}\right\rangle, \tag{1.19}$$

e usando o fato de que φ é solução de (1.10), temos que $S'(\varphi) = 0$, assim por (1.18) e (1.19) obtemos que

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}S(\varphi_\lambda)\Big|_{\lambda=1} = \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \frac{d(p-1)}{2(p+1)}\|\varphi\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

o que mostra (1.15). □

O conjunto definido como sendo

$$\left\{v \in H^1(\mathbb{R}^d) : v \neq 0, \|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \omega\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} = 0\right\} \tag{1.20}$$

é usualmente conhecido na literatura como *variedade de Nehari*, consulte (BADIALE; SERRA, 2011), página 59, seção 2.3.2 para mais detalhes e aplicações.

Do Lema 1.1, obtemos fácilmente uma condição necessária para a existência de soluções para (1.10).

Corolário 1.2. *Seja $\omega \leq 0$. Então a equação (1.10) não admite solução.*

Demonstração: Para provar tal resultado, usaremos um argumento de contradição, ou seja, suponha $\omega \leq 0$ e $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$ solução de (1.10). Subtraindo a identidade (1.15) de (1.14), obtemos que φ satisfaz

$$\frac{(d-2)p-(d+2)}{2(p+1)}\|\varphi\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}^{p+1} = -\omega\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2. \tag{1.21}$$

Como $p < 1 + \frac{4}{d-2}$ caso $d \geq 3$ e $p < +\infty$ se $d = 1, 2$, segue que o lado esquerdo de (1.21) é negativo para qualquer que seja $d \geq 3$. Como assumimos que $\omega \leq 0$, o lado direito de (1.21) é sempre não negativo, resultando assim em uma contradição. □

1.2.2 Existência de Soluções

Teremos como objetivo central nessa seção, mostrar o próximo resultado, que diz respeito a existência de pontos críticos não triviais para S.

Teorema 1.3. *A equação (1.10) admite solução, isto é, o funcional $S : H^1(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido em (1.11) admite um ponto crítico não trivial φ_ω.*

Como o funcional S é claramente ilimitado, tanto inferiormente quanto superiormente não é possível encontrar um ponto crítico simplesmente por uma técnica de minimização ou maximização global. Por isso, apresentaremos uma aproximação diferente, baseada no Teorema 0.13 (Teorema do Passo da Montanha) enunciado no inicio desse trabalho, e inspirado pelo trabalho de (JEANJEAN, 1999). Primeiramente provaremos que o funcional S possui a geometria do passo da montanha, assim existe uma sequência de Palais-Smale para este nível, que converge fracamente, em $H^1(\mathbb{R}^d)$, para um ponto crítico de S. Assim, provando que essa sequência "não se anula" em um certo sentido e tirando vantagem das simetrias advindas da equação (1.10) garantimos a existência de um ponto crítico não trivial para S.

Para prosseguir, motivados pelo Teorema 0.13 (Teorema do Passo da Montanha) definiremos o nível crítico (ou valor crítico) para S como sendo

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{s\in[0,1]} S(\gamma(s)) \tag{1.22}$$

onde o conjunto dos caminhos admissíveis Γ é definido como

$$\Gamma := \left\{\gamma \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^d)) : \gamma(0) = 0 \quad \text{e} \quad S(\gamma(1)) < 0\right\}. \tag{1.23}$$

Lema 1.2. *O funcional S possui a geometria do passo da montanha, isto é, $c > 0$ e $\Gamma \neq \emptyset$.*

Demonstração: Seja $v \in H^1(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$. Então, para todo $s > 0$

$$\begin{aligned}
S(sv) &= \frac{1}{2}\|\nabla(sv)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \frac{\omega}{2}\|sv\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \frac{1}{p+1}\|sv\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} \\
&= \frac{s^2}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \frac{s^2\omega}{2}\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \frac{s^{p+1}}{p+1}\|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} \\
&= \frac{s^2}{2}\left(\|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \omega\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right) - \frac{s^{p+1}}{p+1}\|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Desse modo, para s suficientemente grande temos que $S(sv) < 0$. Assim, seja $C > 0$ de forma que $S(Cv) < 0$. Com isso defina

$$\begin{aligned}
\gamma : \quad [0,1] &\longrightarrow H^1(\mathbb{R}^d) \\
s &\longmapsto \gamma(s) := Csv.
\end{aligned}$$

Temos γ assim definida é tal que

- $\gamma \in C([0,1]; H^1(\mathbb{R}^d))$;
- $\gamma(0) = 0$;
- $S(\gamma(1)) = S(Cv) < 0$,

assim $\gamma \in \Gamma$, implicando em $\Gamma \neq \emptyset$. Agora, podemos ver que

$$\begin{aligned}
S(v) &= \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \frac{\omega}{2}\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \frac{1}{p+1}\|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} \\
&\geq \frac{\min\{1,\omega\}}{2}\left(\|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right) - \frac{1}{p+1}\|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} \\
&\geq \frac{\min\{1,\omega\}}{2}\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \frac{1}{p+1}\|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)},
\end{aligned}$$

e pelo mergulho contínuo de $H^1(\mathbb{R}^d)$ em $L^{p+1}(\mathbb{R}^d)$, obtemos

$$S(v) \geq \frac{\min\{1,\omega\}}{2}\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \frac{C}{p+1}\|v\|^{p+1}_{H^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Considere agora $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, de modo que

$$\delta := \frac{\min(1,\omega)\varepsilon^2}{2} - \frac{C\varepsilon^{p+1}}{p+1} > 0.$$

Então, para qualquer $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ com $\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$, teremos $S(v) > 0$. Isso nos diz que para qualquer que seja $\gamma \in \Gamma$ teremos $\|\gamma(1)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} > \varepsilon$ (tendo em vista que $S(\gamma(1)) < 0$) e pela continuidade de γ, existe $s_\gamma \in [0,1]$ tal que

$$\|\gamma(s_\gamma)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} = \varepsilon.$$

Deste modo

$$\max_{s\in[0,1]} S(\gamma(s)) \geq S(\gamma(s_\gamma)) \geq \delta > 0$$

assim

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{s\in[0,1]} S(\gamma(s)) \geq \delta > 0.$$

□

Corolário 1.3. *Existe uma sequência de Palais-Smale $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{R}^d)$ para o funcional S no nível crítico c, isto é*

$$S(u_n) \longrightarrow c \quad e \quad S'(u_n) \longrightarrow 0,$$

quando $n \rightarrow +\infty$.

Demonstração: De fato, considere $I = S$ e tome $\varepsilon = \frac{1}{2n}$ no Teorema 0.13 (Teorema do passo da montanha). Assim temos que existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$c - \frac{1}{n} \leq S(u_n) \leq c + \frac{1}{n}$$

e

$$\|S'(u_n)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} < \frac{1}{n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Fazendo $n \rightarrow +\infty$, obtemos

$$S(u_n) \longrightarrow c \quad \text{e} \quad S'(u_n) \longrightarrow 0.$$

Logo $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sequência de Palais-Smale procurada. □

Para encontrar um ponto crítico para S, teremos duas etapas: primeiro, provaremos que a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada pelo Corolário 1.3 *não se anula* seguindo a terminologia da teoria de concentração de compacidade de Lions, que será comentada posteriormente. Em seguida, provaremos que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fracamente, em $H^1(\mathbb{R}^d)$, para um ponto crítico não trivial de S. Para provar a primeira etapa, precisaremos do seguinte resultado auxiliar, o qual se trata de uma espécie de teorema do tipo *mergulho de Sobolev*.

Lema 1.3. *Seja $R > 0$. Então existem $\alpha > 0$ e $C > 0$ tal que para qualquer $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$, temos*

$$\|v\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}^{p+1} \leq C \left(\sup_{y\in\mathbb{R}^d} \int_{B_R(y)} |v|^2 dx \right)^{\alpha} \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2 \tag{1.24}$$

Demonstração: Comecemos considerando uma decomposição do $\mathbb{R}^d$ em cubos abertos. Assim, seja $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de cubos disjuntos de $\mathbb{R}^d$, de mesmo volume e satisfazendo

$$\overline{\cup_{k\in\mathbb{N}} Q_k} = \mathbb{R}^d.$$

Além disso, pediremos que para cada $k \in \mathbb{N}$, exista $y_k \in \mathbb{R}^d$ tal que $Q_k \subset B_R(y_k)$. Pela desigualdade de Hölder e o mergulho contínuo de $H^1(Q_k)$ em $L^{p+1}(Q_k)$ (ver (EVANS, 2010), página 286, Theorem 1) existe $C > 0$ que independente da escolha de k (de fato, pois tal constante depende somente do volume de Q_k, que são iguais para todo $k \in \mathbb{N}$) tal que para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ tem-se

$$\|v\|_{L^{p+1}(Q_k)}^{p+1} = \int_{Q_k} |v|^{p+1} dx \leq C \left(\int_{Q_k} |v|^2 dx \right)^{\alpha} \int_{Q_k} (|\nabla v|^2 + |v|^2) dx.$$

onde $\alpha = \frac{d}{p+1} - \frac{d-2}{2}$, caso $d \geq 3$ e $\alpha = 1$ caso $d = 1, 2$. Realizando a soma sobre $k \in \mathbb{N}$ temos

$$\|v\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}^{p+1} \leq C \left(\sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{Q_k} |v|^2 dx \right)^{\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} (|\nabla v|^2 + |v|^2) dx = C \left(\sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{Q_k} |v|^2 dx \right)^{\alpha} \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Sabendo que $Q_k \subset B_R(y_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, o resultado segue. □

Proposição 1.4. *A sequência de Palais-Smale obtida no Corolário 1.3 não se anula no seguinte sentido: Existem $\varepsilon > 0$, $R > 0$ e uma sequência $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^d$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos*

$$\int_{B_R(y_n)} |u_n|^2 dx > \varepsilon. \tag{1.25}$$

Demonstração: Usaremos um argumento de contradição. Suponha que para todo $R > 0$ temos

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \int_{B_R(y)} |u_n|^2 dx = 0. \tag{1.26}$$

Seja $\varepsilon > 0$, por (1.26) temos para n suficientemente grande

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^d} \int_{B_R(y)} |u_n|^2 dx < \varepsilon.$$

Assim, pelo Lema 1.3, para n suficientemente grande obtemos

$$\begin{aligned} S(u_n) &= \frac{1}{2} \|\nabla u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \frac{\omega}{2} \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 - \frac{1}{p+1} \|u_n\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}^{p+1} \\ &\geq \frac{\min\{1, \omega\}}{2} \left(\|\nabla u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \right) - \varepsilon \|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^{p+1} \\ &\geq \left(\frac{\min\{1, \omega\}}{2} - \varepsilon \right) \|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

Consequentemente, tomando $\varepsilon < \frac{\min\{1,\omega\}}{2}$ e como $S(u_n)$ é limitado pelo Corolário 1.3 obtemos que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $H^1(\mathbb{R}^d)$ assim

$$\langle S'(u_n), u_n \rangle \leq \|S'(u_n)\|_{(H^1(\mathbb{R}^d))^*} \|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C \|S'(u_n)\|_{(H^1(\mathbb{R}^d))^*},$$

como $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Palais-Smale e $S'(u_n) \longrightarrow 0$ pelo Corolário 1.3, obtemos

$$\lim_{n \to +\infty} \langle S'(u_n), u_n \rangle = 0. \tag{1.27}$$

Usando o Lema 1.3 e a relação (1.26) temos

$$\lim_{n \to +\infty} \|u_n\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}^{p+1} = 0,$$

e desse modo

$$S(u_n) - \frac{1}{2}\langle S'(u_n), u_n\rangle = -\frac{p-1}{2(p+1)}\|u_n\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Porém, por (1.27) e sabendo que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Palais-Smale obtemos

$$\lim_{n\to+\infty}\left(S(u_n) - \frac{1}{2}\langle S'(u_n), u_n\rangle\right) = c.$$

Pela unicidade do limite concluímos que $c = 0$, o que é um absurdo pelo Lema 1.2. □

Com essas ferramentas estamos prontos para realizar a demonstração do resultado principal dessa seção.

Demonstração do Teorema 1.3: Defina

$$v_n := u_n(\cdot + y_n),$$

onde a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dada pelo Corolário 1.3 e a sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é fornecida pela Proposição 1.4. Como S é invariante por translações no espaço temos

$$\lim_{n\to+\infty} S(v_n) = c \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} S'(v_n) = 0, \tag{1.28}$$

ou seja, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Palais-Smale pra o funcional S no nível crítico c. Desde que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^d)$, temos que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também o é. Como $H^1(\mathbb{R}^d)$ é um espaço de Hilbert, existe $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ de modo que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (passando pra uma subsequência caso necessário) fracamente em $H^1(\mathbb{R}^d)$. Primeiramente perceba que $v \neq 0$, pois caso contrario teríamos

$$c = \lim_{n\to+\infty} S(v_n) = 0$$

o que é um absurdo. De (1.28) temos que

$$S'(v) = \lim_{n\to+\infty} S'(v_n) = 0.$$

Em outras palavras v é um ponto crítico para S. Para mostrar que $v \neq 0$ observemos que o mergulho $H^1(B_R(0))$ em $L^2(B_R(0))$ é compacto (ver (EVANS, 2010), página 286, Theorem 1), logo (1.25) nos fornece a não trivialidade de v e tomando $\varphi_\omega := v$ o resultado segue. □

Corolário 1.4. *O ponto crítico φ_ω está sob o nível crítico c, isto é, $S(\varphi_\omega) \leq c$.*

Demonstração: Sabendo que $S'(\varphi_\omega) = 0$ temos

$$\begin{aligned}
S(\varphi_\omega) &= S(\varphi_\omega) - \frac{1}{p+1}\langle S'(\varphi_\omega), \varphi_\omega\rangle \\
&= \frac{p-1}{2(p+1)}\left(\|\nabla\varphi_\omega\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \omega\|\varphi_\omega\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right) \\
&\leq \frac{p-1}{2(p+1)}\liminf_{n\to+\infty}\left(\|\nabla v_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \omega\|v_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right) \\
&\leq \liminf_{n\to+\infty}\left(S(v_n) - \frac{1}{p+1}\langle S'(v_n), v_n\rangle\right),
\end{aligned}$$

pois $v_n \rightharpoonup \varphi_\omega$ em $H^1(\mathbb{R}^d)$ e $\langle S'(v_n), v_n\rangle \longrightarrow 0$ quando $n \to +\infty$, pois $\langle S'(u_n), u_n\rangle \longrightarrow 0$ quando $n \to +\infty$ por (1.27). Desse modo, segue por (1.28) que

$$S(\varphi_\omega) \leq \liminf_{n\to+\infty} \left(S(v_n) - \frac{1}{p+1} \langle S'(v_n), v_n\rangle \right) = c.$$

□

1.2.3 Caracterizações Variacionais

Alguns tipos de soluções da equação estacionária (1.10) possuem um interesse particular, como por exemplo as soluções do tipo *ground state*, a qual será definida no que segue.

Definição 1.3. *Uma solução φ da equação (1.10) é dita ser um ground state ou estado fundamental, quando $S(\varphi) \leq S(v)$ para toda solução v de (1.10). Definimos também o nível de menor energia como sendo*

$$\mathfrak{m} := \inf\{S(v) : v \text{ é solução da equação (1.10)}\}. \tag{1.29}$$

É importante também definirmos o conjunto de todos estados fundamentais como sendo

$$\mathcal{G} := \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}^d) : v \text{ é solução da equação (1.10) e } S(v) = \mathfrak{m} \right\}. \tag{1.30}$$

Ground states desempenham um papel muito importante na teoria acerca da equação não linear de Schrödinger. Em particular, no caso crítico $p = 1 + \frac{4}{d}$, elas aparecem como um caminho essencial para derivação de resultados acerca de existência global e na descrição de fenômenos de explosão. Para mais informações recomendamos ver o trabalho de (WEINSTEIN, 1982/83).

A seguir provaremos que a solução φ_ω de (1.10) obtida do Teorema 1.3 é um *ground state* e ainda possui, em um certo sentido, um caráter minimizante para o funcional S, do qual será extremamente importante quando estivermos tratando de problemas de estabilidade. Mas antes disso precisamos do seguinte lema auxiliar.

Lema 1.4. *A seguinte desigualdade é sempre verdadeira:*

$$c \leq \zeta,$$

onde c é o nível crítico definido em (1.22) e ζ é dado por

$$\zeta := \inf\{S(v) : v \in H^1(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\} \text{ e } I(v) = 0\}.$$

onde o funcional $I : H^1(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$ é dado por

$$I(v) := \|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \omega\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}.$$

Demonstração: Seja $v \in H^1(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$ tal que $I(v) = 0$. A ideia é construir um caminho $\gamma \in \Gamma$, cujo o funcional S atinge seu máximo sobre γ em v. Ora, na demonstração do Lema 1.2 foi visto que existe $C > 0$ e um caminho γ em $H^1(\mathbb{R}^d)$ definido como $\gamma(s) = Csv$. Perceba que

$$\begin{aligned} S(sv) &= \frac{1}{2}\|\nabla(sv)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \frac{\omega}{2}\|sv\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \frac{1}{p+1}\|sv\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} \\ &= \frac{s^2}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \frac{s^2\omega}{2}\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \frac{s^{p+1}}{p+1}\|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}, \end{aligned}$$

logo

$$\frac{\partial}{\partial s}S(sv) = s\|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \omega s\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - s^p\|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}$$

Portanto, tomando $s = 1$ obtemos

$$\frac{\partial}{\partial s}S(sv)\Big|_{s=1} = \|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \omega\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} = I(v) = 0$$

e consequentemente

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s}S(sv) > 0 \quad &\text{se} \quad s \in (0,1), \\ \frac{\partial}{\partial s}S(sv) < 0 \quad &\text{se} \quad s \in (1,+\infty). \end{aligned}$$

Mostrando assim que S atinge seu máximo sobre γ em v, implicando em

$$c \leq S(v)$$

para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$ com $I(v) = 0$. Daí, pela definição de valor mínimo

$$c \leq \zeta.$$

$\square$

Teorema 1.4. *A solução φ_ω de (1.10) é do tipo ground state e ainda satisfaz*

$$S(\varphi_\omega) = \mathfrak{m} = c,$$

onde $c > 0$ é dado em (1.22) e $\mathfrak{m}$ é o nível de menor energia definido em (1.29). Além disso, φ_ω é um minimizante do funcional S sobre a variedade de Nehari (1.20), isto é

$$\zeta = S(\varphi_\omega),$$

onde ζ é fornecido no Lema 1.4.

Demonstração: Primeiramente, relembremos que o Corolário 1.4 nos garante

$$S(\varphi_\omega) \leq c,$$

e pelao Lema 1.4

$$c \leq \zeta.$$

Agora, por (1.14) temos que qualquer solução da equação (1.10) satisfaz $I(v) = 0$, ou seja

$$\zeta \leq \mathfrak{m},$$

e como φ_ω é solução de (1.10), segue da definição de nível de menor energia que

$$\mathfrak{m} \leq S(\varphi_\omega).$$

Reunindo todas desigualdades obtidas, inferimos que

$$S(\varphi_\omega) \leq c \leq \zeta \leq \mathfrak{m} \leq S(\varphi_\omega),$$

em outras palavras

$$S(\varphi_\omega) = c = \zeta = \mathfrak{m},$$

o que finaliza a demonstração. □

Observação 1: Para não linearidades mais gerais, a igualdade entre o nível crítico e o nível de menor energia sempre ocorre. veja por exemplo (JEANJEAN; TANAKA, 2003a), página 462, Theorem 1.1.

Observação 2: É possível descrever precisamente o conjunto $\mathcal{G}$ das soluções *ground states*, como sugere o seguinte resultado.

Teorema 1.5. *Existe uma função real, positiva, radial e decrescente $\Psi \in H^1(\mathbb{R}^d)$ tal que*

$$\mathcal{G} = \{e^{i\theta}\Psi(\cdot - y) : \theta \in \mathbb{R} \text{ } e \text{ } y \in \mathbb{R}^d\}.$$

Garantindo assim que soluções ground states são únicas a menos de translações e mudanças de fase.

Indicaremos algumas referências para a prova do Teorema acima. Primeiro, uma prova simples e geral de que qualquer *ground state* de valor complexo φ tem a forma $e^{\theta\phi}$ com $\theta \in \mathbb{R}$ e ϕ um *ground state* real e positivo, foi recentemente apresentado em (CINGOLANI; JEANJEAN; SECCHI, 2009). O fato de que todos os *ground states* reais positivos de (1.10) são radiais a menos de translações foi provado pela primeira vez no trabalho (GIDAS; NI; NIRENBERG, 1979), usando o método dos planos móveis. Alternativamente, o mesmo resultado pode ser deduzido pelo método de Lopes fornecido em (LOPES, 1996), que se baseia em simetrizações em relação a hiperplanos adequadamente escolhidos, combinados com um teorema de continuação única. Recentemente, (MARICS, 2009) desenvolveu um novo método que fornece uma prova mais simples de simetria radial de *ground states* reais, sem sequer assumir, a priori, que eles são positivos. A unicidade decorre de um resultado de (KWONG, 1989).

2

Dinâmica de Ondas Estacionárias

Em 1844, o engenheiro civil John Scott Russell observava uma barcaça sendo puxada por dois cavalos, um em cada margem do canal de Eddinburgh-Gaslow, na Escócia. De repente, a embarcação parou. A massa d'agua que esta arrastava, no entanto, continuou e foi perseguida por Russel, a galope, com uma velocidade constante de aproximadamente quinze quilômetros por hora, por mais de três quilômetros. Foi dessa maneira que Russel observava pela primeira vez as propriedades de estabilidade de ondas viajantes.

As seções seguintes tem como objetivo formalizar tal conceito para o nosso caso e expor resultados, métodos e critérios acerca da estabilidade e instabilidade desses fenômenos de caráter oscilatório.

2.1 Sobre a Estabilidade

Do ponto de vista matemático, quando pensamos no conceito de estabilidade, é natural pensarmos na estabilidade no sentido de *Lyapunov*, o qual tem por significado a dependência contínua e uniforme dos dados inicias, isto é , para qualquer $\varepsilon > 0$ deve existir $\delta > 0$ tal que para todo $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ satisfazendo

$$\|u_0 - \varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} < \delta$$

tem-se que

$$\|u(t) - e^{i\omega t}\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon,$$

onde u é a solução máximal de (1.2) com $u(0) = u_0$ e t um valor qualquer no intervalo de solução (T_{min}, T_{max}). Com essa definição, todas as ondas estacionarias são instáveis, e o principal motivo para isso é que a equação (1.2) admite simetrias, como translações e invariância por mudanças de fase. Assim, se $u = u(x,t)$ é solução de (1.2), então para todo $\theta \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^d$ temos que

$$e^{i\theta}u(\cdot, \cdot - y)$$

é também uma solução de (1.2). Em um certo sentido, a equação não é capaz de descrever precisamente o comportamento de suas soluções no sentido de translações e mudanças de fase. Por isso precisamos definir um conceito de estabilidade mais preciso, tendo em mente a estabilidade no sentido de Lyapunov, porém levando em consideração as simetrias da equação.

É importante observarmos que em uma definição consistente de estabilidade para ondas estacionarias, temos que:

(i) *Translações espaciais são necessárias*: De fato, para uma solução φ de (1.10), $\varepsilon > 0$ e $y \in S^1(\mathbb{R}^d)$ seja $\varphi_\varepsilon := e^{i\varepsilon x\cdot y}\varphi(x)$. Então, temos que

$$u_\epsilon(t,x) := e^{i\varepsilon(x\cdot y-\varepsilon t)}e^{i\omega t}\varphi(x-2\varepsilon ty),$$

é solução para a equação (1.2) com dado inicial φ_ε. Perceba que $\varphi_\varepsilon \longrightarrow \varphi$ em $H^1(\mathbb{R}^d)$ se $\varepsilon \longrightarrow 0$. Porém para qualquer $\varepsilon > 0$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\inf_{\theta\in\mathbb{R}}\|u_\varepsilon(t)-e^{i\theta}\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} = 2\|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}.$$

(ii) *Mudanças de fase também são necessárias:* De fato, para uma solução φ de (1.10) e $\varepsilon > 0$ seja $\varphi_\varepsilon := (1+\varepsilon)^{\frac{1}{p+1}}\varphi\left((1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}x\right)$. Observe que φ_ε é solução de (1.10) onde o valor ω é representado por $\omega(1+\varepsilon)$ e é simples verificar (por unicidade) que a solução para (1.2) com dado inicial φ_ε é dada por

$$u_\varepsilon(t,x) := e^{i\omega(1+\varepsilon)t}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{p+1}}\varphi\left((1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}x\right).$$

Note que $\varphi_\varepsilon \longrightarrow \varphi$ em $H^1(\mathbb{R}^d)$ se $\varepsilon \longrightarrow 0$. Porém

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\inf_{y\in\mathbb{R}^d}\|u_\varepsilon(t)-\varphi(\cdot-y)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \geq \|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}, \quad \forall\varepsilon > 0.$$

Tendo isso em mente, podemos vir a definir de maneira consistente o conceito de *estabilidade orbital*.

Definição 2.1. *Seja φ uma solução de (1.10). A onda estacionaria $e^{i\omega t}\varphi(x)$ é dita orbitalmente estável se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ que cumpre a seguinte condição: se $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ satisfaz*

$$\|u_0-\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} < \delta,$$

então a solução máximal $u(t)$ de (1.2) com $u(0) = u_0$, existe para todo $t \in \mathbb{R}$ e

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}\inf_{\theta\in\mathbb{R}}\inf_{y\in\mathbb{R}^d}\|u(t)-e^{i\theta}\varphi(\cdot-y)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon.$$

Caso contrário, diremos que a onda estacionaria é orbitalmente instável.

Perceba que com essa definição, problemas como *(i)* e *(ii)* não podem ocorrer. Além disso, se considerarmos soluções de (1.2) em subespaços de $H^1(\mathbb{R}^d)$ constituídos de funções radiais, não podem ocorrer translações espaciais, e portanto podemos omitir tal exigência na Definição 2.1.

Essa seção tem como principal objetivo a demonstração do seguinte resultado.

Teorema 2.1. *Seja φ um ground state para a equação* (1.10). *Se $1 < p < 1 + \frac{4}{d}$, então a onda estacionaria $e^{i\omega t}\varphi(x)$ é orbitalmente estável.*

Basearemos nosso estudo da estabilidade de *ground states* no trabalho de (COZ, 2009). É importante frisarmos que o intervalo dado para $p > 1$ é ótimo, pois veremos na seção seguinte que se $p \geq 1 + \frac{4}{d}$ então a onda estacionaria deve ser instável. Além disso, observe que o Teorema 2.1 diz respeito somente a ondas estacionarias correspondentes a *ground states*, exceto quando $d = 1$, onde todas soluções de (1.10) são *ground states* (veja (CAZENAVE, 2003), página 269, Remark 8.1.16). Descrever o comportamento de outros tipos de ondas estacionarias sobre pertubações ainda é um problema em aberto, consulte (GRILLAKIS, 1988), (TODOROVA, 2004) e suas referências para possíveis detalhes.

2.1.1 O Método de Estabilidade Clássico

O método de estabilidade clássico ou então método de Grillakis-Shatah-Strauss, como foi dito anteriormente, é uma poderosa ferramenta para obtenção de resultados acerca de estabilidade e instabilidade. Os resultados obtidos nos renomados artigos de (GRILLAKIS; SHATAH; STRAUSS, 1987) e (GRILLAKIS; SHATAH; STRAUSS, 1990) dizem a grosso modo o seguinte: Se considerarmos uma família $(\varphi_\omega)_{\omega\in\mathbb{R}}$ de soluções da equação estacionária (1.10), a onda estacionaria $e^{i\omega t}\varphi_\omega(x)$ é estável se

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\|\varphi_\omega\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} > 0 \tag{2.1}$$

e instável se

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\|\varphi_\omega\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} < 0 \tag{2.2}$$

desde que algumas condições sobre o espectro do operador linearizado $S''(\varphi_\omega)$ sejam satisfeitas. Condições do tipo (2.1) e (2.2), podem ser facilmente verificadas quando a equação estacionária associada ao problema admite um tipo de invariância por *scalling*, o que é o nosso caso. Porém, em tais situações, a principal dificuldade está em lidar com as condições espectrais.

Embora esse capítulo esteja restrita ao estudo da equação não linear de Schrödinger, onde a não linearidade é do tipo polinomial, nosso objetivo é fornecer métodos que podem ser aplicados em situações bastante gerais. Por isso apresentaremos a prova do Teorema 2.1 utilizando um critério de estabilidade bastante sofisticado. Mas antes de apresentá-lo, precisaremos estabelecer alguns conceitos e resultados que nos auxiliaram adiante.

Desse modo, para uma solução φ da equação (1.10), definiremos a *vizinhança tubular* com tamanho $\varepsilon > 0$ *em* $H^1(\mathbb{R}^d)$ como sendo conjunto

$$U_\varepsilon(\varphi) := \{v \in H^1(\mathbb{R}^d) : \inf_{\theta\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}^d} \|e^{i\theta}v(\cdot - y) - \varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon\}.$$

Lema 2.1. *Seja φ solução de (1.10). Então, para todo $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que se para $\theta \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^d$ temos*

$$\|e^{i\theta}\varphi(\cdot - y) - \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon,$$

então $\|(\theta, y)\| < \delta$. Aqui, $\|\cdot\|$ denota a norma no espaço $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^d$.

Demonstração: Considere $\delta > 0$ e assuma que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe (θ_n, y_n) de tal forma que

$$\|e^{i\theta_n}\varphi(\cdot - y_n) - \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \frac{1}{n}$$

porém

$$\|(\theta_n, y_n)\| > \delta.$$

Assim temos que, passando a uma subsequência se necessário, $e^{i\theta_n}\varphi(\cdot - y_n) \longrightarrow \varphi$ quando $n \to +\infty$. Suponha que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência ilimitada. Assim, $|y_n| \to +\infty$ (passando a uma subsequência caso seja necessário), mas pelo decaimento exponencial de φ, temos que para qualquer que seja $x \in \mathbb{R}^d$

$$e^{i\theta_n}\varphi(x + y_n) \to 0,$$

contradizendo o fato que φ não é identicamente nula. Desta forma, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deve ser limitada e portanto admite uma subsequência que converge para algum $y \in \mathbb{R}^d$. Desde que θ_n pode ser escolhido no intervalo $[0, 2\pi)$, nós temos também que $\theta_n \to \theta$, onde $\theta \in [0, 2\pi)$. Por hipótese, temos

$$\|(\theta, y)\| \geq \delta > 0, \tag{2.3}$$

e para todo $x \in \mathbb{R}^d$

$$e^{i\theta}\varphi(x + y) = \varphi(x). \tag{2.4}$$

Agora seja x_0 tal que $\varphi(x_0) \neq 0$. Se $y \neq 0$, então

$$\lim_{n\to+\infty} e^{in\theta}\varphi(x_0 + ny) = \varphi(x_0) \neq 0,$$

o que contradiz o decaimento de φ. Desse modo, obrigatoriamente $y = 0$ o que implica imediatamente que $\theta = 0$, o qual é uma contradição com (2.3). □

Lema 2.2. *Seja φ uma solução da equação (1.10). Então existe $\varepsilon > 0$ e duas funções $\sigma : U_\varepsilon(\varphi) \longrightarrow \mathbb{R}$ e $Y : U_\varepsilon(\varphi) \longrightarrow \mathbb{R}^d$ de tal forma que, para todo $v \in U_\varepsilon(\varphi)$ tem-se*

$$\|e^{i\sigma(v)}v(\cdot - Y(v)) - \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \inf_{\theta\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}^d} \|e^{i\theta}v(\cdot - y) - \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Além disso, a função $\xi := e^{i\sigma(v)}v(\cdot - Y(v))$ satisfaz

$$(\xi, i\varphi)_2 = \left(\xi, \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)_2 = 0, \tag{2.5}$$

para todo $j = 1, ..., d$.

Demonstração: Por simplicidade, mas sem perda de generalidade, vamos assumir que φ é uma função real e radial. Considere $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times H^1(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\Phi(\theta, y, v) := \frac{1}{2}\|e^{i\theta} v(\cdot - y) - \varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{2}\|v - e^{-i\theta}\varphi(\cdot + y)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

Perceba que

$$D_{\theta,y}\Phi(\theta, y, v) = \begin{pmatrix} \left(e^{i\theta}v(\cdot - y), i\varphi\right)_2 \\ -\left(e^{i\theta}v(\cdot - y), \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)_2 \\ \vdots \\ -\left(e^{i\theta}v(\cdot - y), \frac{\partial\varphi}{\partial x_d}\right)_2 \end{pmatrix}.$$

Denotando $F(\theta, y, v) := D_{\theta,y}\Phi(\theta, y, v)$, temos que $F(0, 0, \varphi) = 0$ e

$$D_{\theta,y}F(0, 0, \varphi) = \begin{pmatrix} \|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} & & & \mathbf{0} \\ & \|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \|\frac{\partial\varphi}{\partial x_d}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \end{pmatrix}$$

onde **0** significa que todos os valores fora da diagonal principal da matriz são identicamente nulos. Como φ é uma solução de (1.10) tem-se φ não nula e desse modo

$$\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} > 0 \quad \text{e} \quad \|\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} > 0, \quad \text{para todo } j = 1, ..., d.$$

Consequentemente, a matriz de $D_{\theta,y}\Phi(0, 0, \varphi)$ é positiva definida e pelo Teorema da função implícita (veja (CHANG, 2005), página 12, Theorem 1.2.1) existem $\varepsilon, \delta > 0$ e funções $\sigma, Y : V_\varepsilon \longrightarrow \Omega_\delta$ onde

$$V_\varepsilon := \{v \in H^1(\mathbb{R}^d) : \|v - \varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon\} \text{ e}$$
$$\Omega_\delta := \{(\theta, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d : \|(\theta, y)\| < \delta\},$$

de tal forma que, para qualquer que seja $v \in V_\varepsilon$ temos

$$F(\sigma(v), Y(v), v) = 0 \tag{2.6}$$

e

$$\|e^{i\sigma(v)}v(\cdot - Y(v)) - \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \inf_{(\theta,y)\in\Omega_\delta} \|e^{i\theta}v(\cdot - y) - \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.7}$$

Nossa meta agora é estender (2.7) a todo par $(\theta, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Por contradição, assuma que exista $(\alpha, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, tal que $\|(\alpha, z)\| > \delta$ e

$$\|e^{i\alpha}v(\cdot - z) - \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|e^{i\sigma(v)}v(\cdot - Y(v)) - \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Para todo $v \in V_\varepsilon$, temos

$$\|e^{i\alpha}\varphi(\cdot - z) - \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \|e^{i\alpha}(\varphi(\cdot - z) - v(\cdot - z))\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|e^{i\alpha}v(\cdot - z) - \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < 2\varepsilon.$$

Se $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno, temos pelo Lema 2.1 que $\|(\alpha, z)\| < \delta$, o que seria uma contradição. Deste modo, temos

$$\|e^{i\sigma(v)}v(\cdot - Y(v)) - \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \inf_{(\theta,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d} \|e^{i\theta}v(\cdot - y) - \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad \forall\ v \in V_\varepsilon.$$

Vamos agora estender as aplicações σ, Y a vizinhança tubular $U_\varepsilon(\varphi)$. Assim, seja $v \in U_\varepsilon(\varphi)$, então existe $(\theta^*, y^*) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$ tais que

$$\|e^{i\theta^*}v(\cdot - y^*) - \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon.$$

Com isso, defina

$$\sigma(v) := \sigma(e^{i\theta^*}v(\cdot - y^*)) + \theta^* \text{ e } Y(v) := Y(e^{i\theta^*}v(\cdot - y^*)) + y^*.$$

Note que nossa definição não depende da escolha de θ^* e y^*, e desse modo estendemos σ, Y para $U_\varepsilon(\varphi)$. Além disso, se definirmos $\xi := e^{i\sigma(v)}v(\cdot - Y(v))$, segue de (2.6) que

$$(\xi, i\varphi)_2 = \left(\xi, \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)_2 = 0,$$

para todo $j = 1, ..., d$. □

Para o próximo resultado, relembremos os funcionais de massa e energia definidos em (1.3) e (1.4) respectivamente. Dado $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ temos o funcional *massa* dado por

$$M(v) := \frac{1}{2}\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

e o funcional *energia*

$$E(v) := \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \frac{1}{p+1}\|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}.$$

Lema 2.3. *Seja φ uma solução de (1.10). Suponha agora que existe $\delta > 0$ de forma que para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ satisfazendo as condições de ortogonalidade*

$$(v, i\varphi)_2 = \left(v, \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)_2 = 0, \quad \forall\ j = 1, ..., d \tag{2.8}$$

temos

$$\langle S''(\varphi)v, v\rangle \geq \delta\|v\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)},$$

com

$$\langle S''(\varphi)v, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v|^2\,dx + \omega\int_{\mathbb{R}^d} |v|^2\,dx - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^{p-1}|v|^2\,dx - 2p\int_{\mathbb{R}^d} \varphi^{p-1}\mathfrak{Re}(\varphi\overline{v})\varphi\overline{v}\,dx, \tag{2.9}$$

onde S é o funcional definido em (1.11). Então existem constantes $\varepsilon > 0$ e $C > 0$ tais que para todo $v \in U_\varepsilon(\varphi)$ satisfazendo $M(v) = M(\varphi)$, temos que

$$E(v) - E(\varphi) \geq C \inf_{\theta\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}^d} \|e^{i\theta}v(\cdot - y) - \varphi\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Demonstração: Por motivos de simplicidade, assumiremos φ uma função radial. Assim, considere $\varepsilon > 0$ e $v \in U_\varepsilon(\varphi)$. Considerando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, as funções σ, Y como no Lema 2.2 e

$$\omega := e^{i\sigma(v)} v(\cdot - Y(v)). \tag{2.10}$$

Pelo Lema 2.2, ω satisfaz

$$(\omega, i\varphi)_2 = \left(\omega, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)_2 = 0, \quad \forall\ j = 1, ..., d. \tag{2.11}$$

Agora seja $\lambda \in \mathbb{R}$ e $z \in H^1(\mathbb{R}^d)$ tais que

$$(z, \varphi)_2 = 0 \tag{2.12}$$

e

$$\omega - \varphi = \lambda\varphi + z. \tag{2.13}$$

Como φ é radial por translações, temos

$$\left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)_2 = 0, \quad \forall\ j = 1, ..., d. \tag{2.14}$$

Por (2.11), (2.12), (2.13) e (2.14) obtemos que

$$\left(z, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)_2 = \left(\omega - \varphi - \lambda\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)_2 = \left(\omega, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)_2 - \left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)_2 - \lambda\left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)_2 = 0, \tag{2.15}$$

para todo $j = 1, ..., d$. Além disso, como

$$(\varphi, i\varphi)_2 = \mathfrak{Re}(-i\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}) = 0$$

temos que

$$(z, i\varphi)_2 = (\omega - \varphi - \lambda\varphi, i\varphi)_2 = (\omega, i\varphi)_2 - (\varphi, i\varphi)_2 - \lambda\,(\varphi, i\varphi)_2 = 0. \tag{2.16}$$

Por (2.12), (2.15) e (2.16) percebemos que z satisfaz as condições de ortogonalidade dadas em (2.8) e dessa forma

$$\langle S''(\varphi)z, z\rangle \geq \delta\|z\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.17}$$

Pela expansão de Taylor, obtemos

$$M(\varphi) = M(\omega) = M(\varphi) + \langle M'(\varphi), \omega - \varphi\rangle + O\left(\|\omega - \varphi\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}\right). \tag{2.18}$$

Porém $M'(\varphi) = \varphi$ e desse modo

$$\langle M'(\varphi), \omega - \varphi\rangle = (\varphi, \omega - \varphi)_2 = (\varphi, \lambda\varphi + z)_2 = \lambda\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

onde a última igualdade provém de (2.12). Consequentemente, substituindo em (2.18)

$$\lambda = O\left(\|\omega - \varphi\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}\right). \tag{2.19}$$

A partir da expansão de Taylor, obtemos também

$$S(v) - S(\varphi) = S(\omega) - S(\varphi) = \langle S'(\varphi), \omega - \varphi \rangle + \frac{1}{2} \langle S''(\varphi)(\omega - \varphi), \omega - \varphi \rangle + o\left(\|\omega - \varphi\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} \right). \tag{2.20}$$

Como φ é solução de (1.10), temos que $S'(\varphi) = 0$ e dessa forma

$$\langle S'(\varphi), \omega - \varphi \rangle = 0. \tag{2.21}$$

Além disso, de (2.13) temos que

$$\langle S''(\varphi)(\omega - \varphi), \omega - \varphi \rangle = \lambda^2 \langle S''(\varphi)\varphi, \varphi \rangle + 2\lambda \mathfrak{Re} \langle S''(\varphi)\varphi, z \rangle + \langle S''(\varphi)z, z \rangle \tag{2.22}$$

e de (2.19) obtemos

$$\lambda^2 \langle S''(\varphi)\varphi, \varphi \rangle = \langle S''(\varphi)(\omega - \varphi), \omega - \varphi \rangle - 2\lambda \mathfrak{Re} \langle S''(\varphi)\varphi, z \rangle - \langle S''(\varphi)z, z \rangle = o\left(\|\omega - \varphi\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} \right). \tag{2.23}$$

Agora, desde que

$$\|z\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq 2\|\omega - \varphi\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} + 2\lambda^2 \|\varphi\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}$$

(2.19) nos diz

$$\|z\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} = O\left(\|\omega - \varphi\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} \right) \tag{2.24}$$

e com isso

$$2\lambda \mathfrak{Re} \langle S''(\varphi)\varphi, z \rangle = o\left(\|\omega - \varphi\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} \right). \tag{2.25}$$

Daí, aplicando (2.23) e (2.25) em (2.22) temos

$$\langle S''(\varphi)(\omega - \varphi), \omega - \varphi \rangle = \langle S''(\varphi)z, z \rangle + o\left(\|\omega - \varphi\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} \right).$$

Juntamente com (2.20) e (2.21) nos fornece

$$S(v) - S(\varphi) \geq \frac{1}{2} \langle S''(\varphi)z, z \rangle + o\left(\|\omega - \varphi\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} \right). \tag{2.26}$$

Mas como $M(v) = M(\varphi)$, obtemos

$$E(v) - E(\varphi) = S(v) - S(\varphi)$$

e com (2.17), (2.24) e (2.26) segue

$$E(v) - E(\varphi) \geq \frac{\delta}{2} \|\omega - \varphi\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} + o\left(\|\omega - \varphi\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} \right).$$

Assim, tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno

$$E(v) - E(\varphi) \geq \frac{\delta}{4} \|\omega - \varphi\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Tome $C = \frac{\delta}{4}$ e lembrando que $\omega := e^{i\sigma(v)}v(\cdot - Y(v))$, segue que

$$E(v) - E(\varphi) \geq C \cdot \inf_{\theta\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}^d} \|e^{i\theta}v(\cdot - y) - \varphi\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)},$$

conforme queríamos demonstrar. □

Munidos dessas ferramentas, podemos enunciar e em seguida demonstrar nosso critério de estabilidade.

Teorema 2.2. *(Critério de estabilidade) Considere φ uma solução da equação estacionária (1.10). Suponha agora que exista $\delta > 0$ de forma que para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ satisfazendo*

$$(v,\varphi)_2 = (v, i\varphi)_2 = \left(v, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)_2 = 0, \quad \textit{para todo } j \in \{1, ..., d\}, \tag{2.27}$$

temos

$$\langle S''(\varphi)v, v\rangle \geq \delta \|v\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.28}$$

Então a onda estacionaria $e^{i\omega t}\varphi(x)$ é orbitalmente estável em $H^1(\mathbb{R}^d)$.

Demonstração: A prova desse critério será baseada em um argumento de contradição. Desse modo, assuma que existem $u_{n,0}$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$\|u_{n,0} - \varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \to +\infty, \tag{2.29}$$

porém, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{t\in(T^n_{min}, T^n_{max})} \inf_{\theta\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}^d} \|e^{i\theta}u_n(t, \cdot - y) - \varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} > \varepsilon,$$

onde u_n é a solução máximal de (1.2) com intervalo de solução (T^n_{min}, T^n_{max}) e dado inicial $u_n(0) = u_{n,0}$. Por continuidade, podemos considerar t_n tal que

$$\inf_{\theta\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}^d} \|e^{i\theta}u_n(t_n, \cdot - y) - \varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} = \varepsilon.$$

Tendo em vista (2.29) e as leis de conservação de massa e energia, temos que

$$E(u_n(t_n)) = E(u_{n,0}) \longrightarrow E(\varphi)$$
$$M(u_n(t_n)) = M(u_{n,0}) \longrightarrow M(\varphi)$$

Considere agora

$$v_n := \frac{u_n(t_n)}{\|u_n(t_n)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Diretamente verifica-se que,

$$M(v_n) = M(\varphi), \quad E(v_n) \to E(\varphi),$$

e além disso

$$\|v_n - u_n(t_n)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Escolhendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e utilizando as hipóteses, pelo Lema 2.3 obtemos

$$\inf_{\theta\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}^d} \|e^{i\theta} v_n(\cdot - y) - \varphi\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C(E(v_n) - E(\varphi))$$

que converge para zero, desde que $E(v_n) \longrightarrow E(\varphi)$, quando $n \longrightarrow +\infty$. Por outro lado, nós temos

$$\varepsilon = \inf_{\theta\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}^d} \|e^{i\theta} u_n(t_n, \cdot - y) - \varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \inf_{\theta\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}^d} \|e^{i\theta} v_n(\cdot - y) - \varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} + \|u_n(t_n) - v_n\|_{H^1(\mathbb{R}^d)},$$

o que é uma contradição, pois o lado direito da inequação acima tende a zero, quando $n \longrightarrow +\infty$. Desse modo, o resultado segue. □

Vamos explicar, de maneira heurística, o porque das hipóteses do Teorema 2.2 implicarem em estabilidade. A ideia surge da teoria de estabilidade no sentido de Lyapunov para uma solução de equilíbrio em sistemas dinâmicos finito dimensionais. Para nós, um bom candidato a funcional de Lyapunov é o funcional S. Vamos supor por um momento que a condição de coercividade (2.28) é satisfeita para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ (o qual não é o necessariamente verdade). Seja u solução de (1.2), com dado inicial u_0 próximo a φ em $H^1(\mathbb{R}^d)$. Pela expansão de Taylor, obtemos

$$S(u(t)) - S(\varphi) = \langle S'(\varphi), u(t) - \varphi\rangle + \frac{1}{2}\langle S''(\varphi)(u(t) - \varphi), u(t) - \varphi\rangle + o\left(\|u(t) - \varphi\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}\right).$$

Como φ é solução de (1.10), $S'(\varphi) = 0$. Levando em conta que u_0 está suficientemente próximo de φ e juntamente com (2.28), podemos inferir que para alguma constante C positiva e independente de t vale

$$S(u(t)) - S(\varphi) \geq C\|u(t) - \varphi\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} \tag{2.30}$$

Sabendo que o funcional S pode ser visto como uma quantidade conservada, (2.30) nos fornece uma limitação para $\|u(t)-\varphi\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}$ e com isso segue a estabilidade. Como já vimos anteriormente, nossa noção de estabilidade deve levar em consideração as simetrias da equação. De fato, veremos a seguir que a invariância por translações e mudanças de fase geram um núcleo para $S''(\varphi)$ da forma

$$\ker\{S''(\varphi)\} = \text{spam}\left\{i\varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} : j = 1, ..., d\right\}.$$

Para evitar esse núcleo, exigimos a condição de coercividade (2.28) apenas para as funções em $H^1(\mathbb{R}^d)$ que satisfaçam

$$(v, i\varphi)_2 = \left(v, \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)_2 = 0, \quad \text{para todo } j \in \{1, ..., d\}$$

permitindo translações espaciais e mudanças de fase em (2.30). A condição de ortogonalidade $(v, \varphi)_2 = 0$ esta relacionada a conservação de massa. De fato, como a massa é conservada, a evolução do sistema ocorre, em um certo sentido, no espaço tangente a esfera de $L^2(\mathbb{R}^d)$ em φ e portanto é suficiente pedir que S satisfaça a condição de coercividade (2.28) neste espaço, para assim obter a estabilidade desejada.

Tendo em mãos o critério dado pelo Teorema 2.2, o Teorema 2.1 segue imediatamente da seguinte proposição.

Proposição 2.1. *Seja* $1 < p < 1 + \frac{4}{d}$ *e* φ *um ground state para* (1.10). *Então, existe um* $\delta > 0$ *tal que para todo* $w \in H^1(\mathbb{R}^d)$ *satisfazendo*

$$(w, \varphi)_2 = (w, i\varphi)_2 = \left(w, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)_2 = 0, \quad \textit{para todo } j \in \{1, \ldots, d\}, \tag{2.31}$$

nós temos

$$\langle S''(\varphi)w, w\rangle \geq \delta \|w\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Antes de fornecer uma prova para a Proposição 2.1, necessitamos de algumas tecnicalidades. Primeiro, pelo Teorema 1.5 podemos assumir sem perda de generalidade que o *ground state* φ é uma função real, positiva e radial. Também será conveniente decompormos w em suas partes real e imaginária. Denotando $w = u + iv$, com funções reais $u, v \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Com isso, o operador $S''(\varphi)$ pode ser decomposto em uma parte real e uma parte imaginária L_1 e L_2 respectivamente, isto é por (2.9) temos

$$\begin{aligned}
\langle S''(\varphi)w, w\rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 dx + \omega \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2 dx - p \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^{p-1}|u|^2 dx \\
&\quad + \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v|^2 dx + \omega \int_{\mathbb{R}^d} |v|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^{p-1}|v|^2 dx\right) \\
&= \langle L_1 u, u\rangle + \langle L_2 v, v\rangle.
\end{aligned}$$

Aqui, L_1, L_2 são operadores limitados definidos sobre $H^1(\mathbb{R}^d)$ restrito a funções reais, com valores em $H^{-1}(\mathbb{R}^d)$, dados por

$$\begin{aligned}
\langle L_1 u, h\rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} \nabla u \nabla h \, dx + \omega \int_{\mathbb{R}^d} uh \, dx - p \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^{p-1} uh \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left(-\Delta u + \omega u - p\varphi^{p-1}u\right) h \, dx \\
\langle L_2 v, h\rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} \nabla v \nabla h \, dx + \omega \int_{\mathbb{R}^d} vh \, dx - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^{p-1} vh \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left(-\Delta v + \omega v - \varphi^{p-1}v\right) h \, dx
\end{aligned}$$

isto é

$$\begin{aligned}
L_1 u &= -\Delta u + \omega u - p\varphi^{p-1}u, \\
L_2 v &= -\Delta v + \omega v - \varphi^{p-1}v.
\end{aligned}$$

Portanto, até o fim dessa subseção as funções consideradas assumirão sempre valores reais. Em particular, $H^1(\mathbb{R}^d)$ e $L^2(\mathbb{R}^d)$ estarão restritos as funções reais.

Para provar a Proposição 2.1, usaremos os seguintes lemas auxiliares.

Lema 2.4. *Seja* $1 < p < 1 + \frac{4}{d}$ *e* φ *um ground state para* (1.10). *Então, existe um* $\delta_1 > 0$ *tal que para todo* $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ *satisfazendo*

$$(u, \varphi)_2 = \left(u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)_2 = 0, \quad \textit{para todo } j \in \{1, \ldots, d\}, \tag{2.32}$$

nós temos

$$\langle L_1 u, u\rangle \geq \delta_1 \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Lema 2.5. *Seja $1 < p < 1 + \frac{4}{d}$ e φ um ground state para (1.10). Então, existe um $\delta_2 > 0$ tal que para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ satisfazendo*

$$(v, \varphi)_2 = 0, \tag{2.33}$$

nós temos

$$\langle L_2 v, v\rangle \geq \delta_2 \|v\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Observe que se considerarmos as formas quadráticas

$$F_1(u) = \langle L_1 u, u\rangle \text{ e } F_2(u) = \langle L_2 u, u\rangle$$

com $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ segue então pelo Teorema da representação de formas quadráticas temos que existem únicas extensões

$$\overline{L}_1, \overline{L}_2 : H^2(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$$

ilimitadas e autoadjuntas associadas as formas quadráticas F_1 e F_2 respectivamente. Pois bem, as demonstrações dos Lemas 2.4 e 2.5 serão baseadas na análise espectral dos operadores $\overline{L}_1$ e $\overline{L}_2$. O lema seguinte nos fornece uma estrutura geral de tais espectros.

Lema 2.6. *Os espectros de $\overline{L}_1$ e $\overline{L}_2$ consistem do espectro essencial em $[\omega, +\infty)$ e de um número finito de autovalores com multiplicidade finita em $(-\infty, w']$ para todo $\omega' < \omega$.*

Demonstração: Primeiramente lembremos que como $\overline{L}_1$ e $\overline{L}_2$ são operadores autoadjuntos, seus espectros estão contidos em $\mathbb{R}$. Temos que os espectros de $\overline{L}_1$ e $\overline{L}_2$ são limitados inferiormente. De fato, para qualquer que seja $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ temos

$$\begin{aligned}\langle L_2 u, u\rangle &= \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \omega\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^{p-1}u^2 dx \\ &\geq \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \omega\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - p\int_{\mathbb{R}^d} \varphi^{p-1}u^2\, dx = \langle L_1 u, u\rangle.\end{aligned}$$

Como $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, existe uma constante $C > 0$, que independe de u, tal que

$$p\int_{\mathbb{R}^d} \varphi^{p-1}u^2\, dx \leq C\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

e deste modo

$$\langle L_2 u, u\rangle \geq \langle L_1 u, u\rangle \geq (\omega - C)\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

Agora, como φ possui decaimento exponencial (veja a Proposição 1.3) temos que $\overline{L}_1$ e $\overline{L}_2$ são versões compactamente perturbadas do operador

$$-\Delta + \omega : H^2(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d),$$

veja (STUART, 1998), página 42, Lemma 3.12. Temos então, pelo Teorema de Weyl (ver (KATO, 1995), página 526, Theorem 2.1) temos que o espectro essencial de $-\Delta + \omega$ é dado por

$$\sigma_{ess}(-\Delta + \omega) = [\omega, +\infty),$$

desse modo,

$$\sigma_{ess}(\overline{L}_1) = \sigma_{ess}(\overline{L}_2) = [\omega, +\infty).$$

Sabendo que $\sigma\left(\overline{L}_i\right) \setminus \sigma_{ess}\left(\overline{L}_i\right)$ consiste de autovalores isolados com multiplicidade finita e como vimos que o espectro de $\overline{L}_i$ é limitado inferiormente, para todo $i \in \{1, 2\}$, o lema segue. □

A partir de agora, trataremos dos operadores L_1 e L_2 separadamente. Começaremos com L_2.

Lema 2.7. *Existe* $\overline{\delta}_2 > 0$ *tal que para todo* $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ *com* $(v, \varphi)_2 = 0$*, temos*

$$\langle L_2 v, v\rangle \geq \overline{\delta}_2 \|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Demonstração: Primeiro lembremos que para φ solução de (1.10) temos que $L_2\varphi = S'(\varphi) = 0$. Isso significa que 0 é um autovalor de L_2 com uma autofunção φ . Mas como $\varphi > 0$ e isso implica que 0 é o primeiro autovalor simples de $\overline{L}_2$ (veja (BEREZIN; SHUBIN, 1991), página 179, Theorem 3.4). Seja $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ com $(v, \varphi)_2 = 0$. Então, pela caracterização *Min-Max* dos autovalores de $\overline{L}_2$ (ver (BEREZIN; SHUBIN, 1991), página 178, Proposition 3.2) existe $\overline{\delta}_2 > 0$ (segundo autovalor de $\overline{L}_2$) que independe de v, tal que

$$\langle L_2 v, v\rangle \geq \overline{\delta}_2 \|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

□

Demonstração do Lema 2.5 : Suponha por contradição que exista uma sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$\|\nabla v_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \omega\|v_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1, \quad (v_n, \varphi)_2 = 0$$

e além disso

$$\langle L_2 v_n, v_n\rangle \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Sabendo que

$$\|v_n\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \max\{\omega, \omega^{-1}\}\left(\|\nabla v_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \omega\|v_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right),$$

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $H^1(\mathbb{R}^d)$, por reflexividade, deve existir $v_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$v_n \rightharpoonup v_0 \text{ em } H^1(\mathbb{R}^d),$$

Em particular, temos $(v_0, \varphi)_2 = 0$ e pelo Lema 2.7

$$\langle L_2 v_0, v_0\rangle \geq 0. \tag{2.34}$$

Daí, segue pelo mergulho contínuo de $H^1(\mathbb{R}^d)$ em $L^{2q}(\mathbb{R}^d)$, que $v_n^2 \rightharpoonup v_0^2$ fracamente em $L^q(\mathbb{R}^d)$ para algum $q \in (1, 2^*/2)$. Desde que φ possui decaimento exponencial, temos que $\varphi^{p-1} \in L^{q'}(\mathbb{R}^d)$, onde $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Desse modo

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi^{p-1} v_n^2 dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^{p-1} v_0^2\, dx, \tag{2.35}$$

e segue de (2.35)

$$\langle L_2 v_0, v_0\rangle \leq \liminf_{n\to+\infty}\langle L_2 v_n, v_n\rangle = 0. \tag{2.36}$$

Desse modo, por (2.34) e (2.36), temos

$$\langle L_2 v_0, v_0\rangle = 0,$$

e como $(\varphi, v_0)_2 = 0$, segue pelo Lema 2.7 que $v_0 = 0$. Por outro lado, sabemos que

$$\liminf_{n\to+\infty}\langle L_2 v_n, v_0,\rangle = 1 - \int_{\mathbb{R}^d}\varphi^{p-1}v_0^2 dx = 0,$$

ou seja

$$\int_{\mathbb{R}^d}\varphi^{p-1}v_0^2 dx = 1.$$

O que contradiz o fato de $v_0 = 0$. □

Agora podemos focar toda nossa atenção em estudar o operador L_1. A prova do Lema 2.4 é um pouco mais delicada, principalmente pelo fato do espectro de $\overline{L}_1$ conter autovalores não positivos e além disso φ não é mais uma autofunção. Primeiramente vamos tratar os autovalores negativos de $\overline{L}_1$.

Lema 2.8. *O operador $\overline{L}_1$ possui apenas um autovalor negativo $-\lambda_1$ correspondente a autofunção $e_1 \in H^2(\mathbb{R}^d)$ com $\|e_1\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1$.*

Demonstração: Denotemos $\overline{S} : H^1(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$ a restrição do operador S a funções reais. Podemos perceber que φ é também um ponto crítico, no sentido do passo da montanha, para $\overline{S}$. Temos que o índice de Morse de $\overline{S}$, isto é, o número de seus autovalores negativos em φ é no máximo 1 (veja, por exemplo (FUKUIZUMI; JEANJEAN, 2008), página 17, Lemma 29). Observando que $L_1 = \overline{S}''$, segue que $\overline{L}_1$ possui não mais que um autovalor negativo. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\langle L_1\varphi, \varphi\rangle &= \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \omega\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - p\|\varphi\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}\\
&= -(p-1)\|\varphi\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}\\
&< 0
\end{aligned}$$

onde a segunda igualdade surge diretamente da identidade de Nehari (1.14). Deste modo, concluímos que $\overline{L}_1$ admite exatamente um autovalor negativo, o qual denotaremos por $-\lambda_1$. Com isso, podemos escolher uma autofunção $e_1 \in H^2(\mathbb{R}^d)$ unitária. □

A seguir apresentaremos uma série de resultados que culminaram na prova do Lema 2.4. O primeiro foi originalmente obtido por (WEINSTEIN, 1985) o qual ele considera os casos $d = 1$ e $d = 3$ e mais tarde foi generalizado por (CHANG et al., 2007/08).

Lema 2.9. *O segundo autovalor de $\overline{L}_1$ é 0 e*

$$\ker \overline{L}_1 = spam \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} : j = 1, ..., d \right\}.$$

Está fora do objetivo desse trabalho oferecer uma demonstração completa do Lema 2.9, para mais detalhes recomendamos ver (AMBROSETTI; MALCHIODI, 2006). Portanto mostraremos somente a inclusão

$$\text{spam} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} : j = 1, ..., d \right\} \subset \ker \overline{L}_1. \tag{2.37}$$

Para isso, relembre que φ satisfaz

$$-\Delta\varphi + \omega\varphi - \varphi^p = 0.$$

Derivando com respeito a j-ésima variável temos

$$-\Delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) + \omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} - p\varphi^{p-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = 0.$$

Sabendo que $\varphi \in W^{3,1}(\mathbb{R}^d)$ (pela Proposição 1.3) temos que $\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \in H^2(\mathbb{R}^d)$, para todo $j = 1...., d$. Com isso, 0 é um autovalor de $\overline{L}_1$ e portanto vale a inclusão (2.37).

Lema 2.10. *Podemos decompor o espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R}^d)$ como sendo*

$$H^1(\mathbb{R}^d) = E_1 \oplus E_+ \oplus \ker \overline{L}_1,$$

onde $E_1 = spam\{e_1\}$ e E_+ é a imagem da projeção correspondente a parte positiva do espectro de $\overline{L}_1$.

Demonstração: Perceba que a demonstração do Lema 2.10 segue diretamente dos Lemas 2.6, 2.8 e 2.9 juntamente com o Teorema da Decomposição Espectral (veja (KATO, 1995), página 178, Theorem 6.17). □

Observe que na soma direta $E_1 \oplus E_+ \oplus \ker \overline{L}_1$, os espaços são mutualmente ortogonais com respeito ao produto interno de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Lema 2.11. *Para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$ satisfazendo*

$$(u, \varphi)_2 = \left(u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right)_2 = 0, \quad \textit{para todo } j \in \{1, ..., d\}, \tag{2.38}$$

nós temos

$$\langle L_1 u, u \rangle \geq 0. \tag{2.39}$$

Demonstração: Considere $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ satisfazendo (2.38). Primeiro vamos olhar para uma função ψ satisfazendo

$$L_1\psi = -\omega\phi.$$

Para fazer isso, nós usaremos funções *scaled* $\varphi_\lambda(\cdot) := \lambda^{\frac{1}{p-1}}\varphi(\lambda^{\frac{1}{2}}\cdot)$. Essas funções satisfazem

$$-\Delta\varphi_\lambda + \omega\lambda\varphi_\lambda - \varphi_\lambda^p = 0 \tag{2.40}$$

Diferenciando a equação (2.40) com respeito a λ e tomando $\lambda = 1$ temos

$$-\Delta\psi + \omega\psi - p\varphi^{p-1}\psi = -\omega\varphi,$$

onde $\psi := \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\lambda}\big|_{\lambda=1} = \frac{1}{p-1}\varphi + \frac{1}{2}x\cdot\nabla\varphi$. Perceba que $\psi \in H^1(\mathbb{R}^d)$, pois pela Proposição 1.3, $x\cdot\nabla\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Além disso, como φ é radial, temos que φ é par para cada x_j. Desse modo, ψ também é par em cada x_j, enquanto $\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$ é impar em x_j. Isso implica que

$$\left(\psi, \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)_2 = 0 \quad \text{para todo} \quad j = 1, \dots, d.$$

Utilizando a decomposição de $H^1(\mathbb{R}^d)$ dada pelo Lema 2.10, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\xi, \nu \in E_+$ tais que

$$\begin{aligned} u &= \alpha e_1 + \xi, \\ \psi &= \beta e_1 + \nu. \end{aligned}$$

Se $\alpha = 0$, então $\xi \neq 0$ desde que $u \neq 0$ e teremos

$$\langle L_1 u, u\rangle = \langle L_1\xi, \xi\rangle > 0$$

Ou seja, u satisfaz (2.39). Agora vamos ao caso $\alpha \neq 0$. Podemos inferir que

$$\begin{aligned} \langle L_1\psi, \psi\rangle &= -\omega\left(\varphi, \frac{1}{p-1}\varphi + \frac{1}{2}x\cdot\nabla\varphi\right)_2 \\ &= -\omega\left(\frac{1}{p-1}\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi x\cdot\nabla\varphi dx\right). \end{aligned}$$

Integrando por partes, é simples perceber que

$$\int_{\mathbb{R}^d}\varphi x\cdot\nabla\varphi dx = -d\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \int_{\mathbb{R}^d}\varphi x\cdot\nabla\varphi dx$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^d}\varphi x\cdot\nabla\varphi dx = -\frac{d}{2}\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

daí

$$\langle L_1\psi, \psi\rangle = -\omega\left(\frac{1}{p-1} - \frac{d}{4}\right)\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Como $\omega > 0$ e $p < 1 + \frac{4}{d}$, segue que

$$\langle L_1\psi, \psi\rangle < 0,$$

e assim $\beta \neq 0$. Temos que sobre E_+, o operador L_1 define uma forma quadrática positiva. Assim, temos pela desigualdade de Cauchy-Schwartz para $\xi, \nu \in E_+$

$$|\langle L_1\xi, \nu\rangle|^2 \leq \langle L_1\xi, \xi\rangle\langle L_1\nu, \nu\rangle.$$

Daí,

$$\langle L_1 u, u\rangle = -\alpha^2\lambda_1 + \langle L_1\xi, \xi\rangle \geq -\alpha^2\lambda_1 + \frac{\langle L_1\xi, \nu\rangle^2}{\langle L_1\nu, \nu\rangle}. \tag{2.41}$$

Porém

$$0 = -\omega(\varphi, u)_2 = \langle L_1\psi, u\rangle = -\alpha\beta\lambda_1 + \langle L_1\xi, \nu\rangle,$$

e além disso

$$\langle L_1\xi, \nu\rangle = \alpha\beta\lambda_1$$

o que nos fornece

$$\begin{aligned}
-\alpha^2\lambda_1 + \frac{\langle L_1\xi, \nu\rangle^2}{\langle L_1\nu, \nu\rangle} &= -\alpha^2\lambda_1 + \frac{\alpha^2\beta^2\lambda_1^2}{\langle L_1\nu, \nu\rangle} \\
&= -\alpha^2\lambda_1 + \frac{\alpha^2\beta^2\lambda_1^2}{\beta^2\lambda_1 + \langle L_1\nu, \nu\rangle} \\
&= \frac{-\alpha^2\lambda_1\langle L_1\psi, \psi\rangle}{\langle L_1\nu, \nu\rangle} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Assim, por (2.41) segue

$$\langle L_1 u, u\rangle \geq -\alpha^2\lambda_1 + \frac{\langle L_1\xi, \nu\rangle^2}{\langle L_1\nu, \nu\rangle} \geq 0.$$

□

Demonstração do Lema 2.4 : Assim como feito no Lema 2.5, suponhamos por absurdo que exista uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$\|\nabla u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \omega\|u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1, \quad (u_n, \varphi)_2 = \left(u_n, \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)_2 = 0, \;\; j = 1, .., d$$

e além disso

$$\langle L_1 u_n, u_n\rangle \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Sabendo que

$$\|u_n\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \max\{\omega, \omega^{-1}\}\left(\|\nabla u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \omega\|u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right),$$

temos $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em $H^1(\mathbb{R}^d)$ e por reflexividade deve existir $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$u_n \rightharpoonup u_0 \text{ em } H^1(\mathbb{R}^d),$$

Em particular, temos $(u_0, \varphi)_2 = \left(u_0, \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)_2 = 0$ com $j = 1, ..., d$. Pelo Lema 2.11

$$\langle L_1 u_0, u_0\rangle \geq 0. \tag{2.42}$$

Daí, segue pelo mergulho contínuo de $H^1(\mathbb{R}^d)$ em $L^{2q}(\mathbb{R}^d)$, que $u_n^2 \rightharpoonup u_0^2$ fracamente em $L^q(\mathbb{R}^d)$ para algum $q \in (1, 2^*/2)$. Como φ possui um certo decaimento exponencial, temos que $\varphi^{p-1} \in L^{q'}(\mathbb{R}^d)$, onde $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Desse modo

$$p \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^{p-1} u_n^2 dx \to p \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^{p-1} u_0^2, \tag{2.43}$$

e segue de (2.43)

$$\langle L_1 u_0, u_0 \rangle \leq \liminf_{n \to +\infty} \langle L_1 u_n, u_n \rangle = 0. \tag{2.44}$$

Desse modo, por (2.42) e (2.44), temos

$$\langle L_1 u_0, u_0 \rangle = 0,$$

e como $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, existe uma constante $M > 0$, que independe de u_0, tal que

$$p \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^{p-1} u_0^2 \, dx \leq C \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

e deste modo

$$0 = \langle L_1 u_0, u_0 \rangle \geq (\omega - C) \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Assim $u_0 = 0$. Por outro lado, sabemos que

$$\liminf_{n \to +\infty} \langle L_1 u_n, u_0, \rangle = 1 - p \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^{p-1} u_0^2 \, dx = 0,$$

ou seja

$$p \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^{p-1} u_0^2 \, dx = 1.$$

Contradizendo $u_0 = 0$. □

Como foi comentado anteriormente, o Teorema 2.1 segue dos Lemas 2.4 e 2.5, da Proposição 2.1 e pelo critério de estabilidade obtido no Teorema 2.2.

2.1.2 O Método de Cazenave-Lions

A prova do Teorema 2.1 pelo Método de Cazenave-Lions possui como seu alicerce o seguinte resultado de compacidade .

Proposição 2.2. *Seja* $1 < p < 1 + \frac{4}{d}$. *Para cada* $\tau > 0$, *defina*

$$\Sigma_\tau := \{v \in H^1(\mathbb{R}^d) : \|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \tau\}.$$

Considere o seguinte problema de minimização

$$-\nu_\tau := \inf\{E(v) : v \in \Sigma_\tau\},$$

onde E é o funcional de energia definido em (1.4), i.e

$$E(v) := \frac{1}{2}\|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 - \frac{1}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}^{p+1}.$$

Então, $\nu_\tau < +\infty$. Além disso, se $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{R}^d)$ é tal que

$$\|v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \longrightarrow \tau \quad e \quad E(v_n) \longrightarrow -\nu_\tau$$

quando $n \longrightarrow +\infty$, então existem uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ e uma função $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ tais que,

$$v_n(\cdot - y_n) \to v,$$

fortemente em $H^1(\mathbb{R}^d)$, passando a uma subsequência caso seja necessário. Em particular, $v \in \Sigma_\tau$ e $E(v) = -\nu_\tau$.

A prova deste resultado é baseada no *Princípio da concentração de compacidade* de Lions. Assim, para $v \in L^2(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$ definimos a *aplicação de concentração* $\rho(v, \cdot)$ como sendo

$$\rho(v,s) := \sup_{y\in\mathbb{R}^d} \int_{B_s(y)} |v(x)|^2 \, dx, \quad \text{para } s > 0. \tag{2.45}$$

Perceba que $\rho(v,s)$ assim definida é não decrescente como função de s, $\rho(v,0) = 0$ e $0 < \rho(v,s) \le \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2$ para todo $s > 0$. Além disso

$$\lim_{s\to+\infty} \rho(v,s) = \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Teorema 2.3. *(Principio de concentração de compacidade): Considere uma sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{R}^d)$ satisfazendo*

$$\|v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = a > 0, \tag{2.46}$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\nabla v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < +\infty, \tag{2.47}$$

e $\mu \in \mathbb{R}$ dado por

$$\mu = \lim_{s\to+\infty} \liminf_{n\to+\infty} \rho(v_n, s). \tag{2.48}$$

Então há de existir uma subsequência $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazendo as seguintes propriedades

(i) Se $\mu = a$, então existe uma sequência $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ e $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ tal que $v_{n_k}(\cdot - y_k)$ converge para $v(\cdot)$ em $L^q(\mathbb{R}^d)$ para todo $2 \le q < 2^*$ ($2 \le q \le +\infty$, caso $d = 1$).

(ii) Se $\mu = 0$, então $\|v_{n_k}\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \to 0$ para todo $2 \le q < 2^*$ ($2 \le q \le +\infty$, caso $d = 1$).

(iii) Existem sequências $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $H^1(\mathbb{R}^d)$ tais que

$$\mathit{supp}\, u_k \cap \mathit{supp}\, w_k = \emptyset, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{2.49}$$

$$|u_k| + |w_k| \le |v_{n_k}|, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{2.50}$$

$$\|u_k\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} + \|w_k\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \le \|v_{n_k}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{2.51}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \|u_k\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \mu \ e \ \lim_{k\to+\infty} \|w_k\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = a - \mu, \tag{2.52}$$

$$\liminf_{k\to+\infty} \left(\|\nabla v_{n_k}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \|\nabla u_k\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \|\nabla w_k\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right) \ge 0, \tag{2.53}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\|v_{n_k}\|^q_{L^q(\mathbb{R}^d)} - \|u_k\|^q_{L^q(\mathbb{R}^d)} - \|w_k\|^q_{L^q(\mathbb{R}^d)} \right) = 0. \tag{2.54}$$

Para todo $2 \le q < 2^*$ ($2 \le q \le +\infty$, caso $d = 1$).

A demonstração desse resultado é bastante delicada e pode ser vista com detalhes em (CAZENAVE, 2003). Munidos dessa importante ferramenta, estamos prontos para demonstrar a Proposição 2.2.

Demonstração da Proposição 2.2 : Vamos começar mostrando que $0 < \nu_\tau < +\infty$. De fato, como claramente $\Sigma_\tau \neq \emptyset$, consideremos $v \in \Sigma_\tau$ e $\lambda > 0$. Note que considerando as funções *scaled* $v_\lambda(\cdot) := \lambda^{\frac{d}{2}} v(\lambda\cdot)$, temos

$$\|v_\lambda\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \tau.$$

Assim $v_\lambda \in \Sigma_\tau$ e além disso

$$E(v_\lambda) = \frac{\lambda^2}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \frac{\lambda^{\frac{d(p-1)}{2}}}{p+1}\|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}$$

Desde que $\frac{d(p-1)}{2} < 2$, temos que $E(v_\lambda) < 0$ para λ suficientemente pequeno, logo $-\nu_\tau < 0$, ou seja, $\nu_\tau > 0$. Para a outra desigualdade, mostraremos que existe $\delta > 0$ e $K < +\infty$ satisfazendo

$$E(v) \ge \delta\|v\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} - K, \quad \text{para todo } v \in \Sigma_\tau. \tag{2.55}$$

Porém (2.55) segue diretamente da desigualdade de *Gagliardo-Nirenberg* (1.6),

$$\|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} \le C\|\nabla v\|^{\frac{d(p-1)}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|v\|^{p+1-\frac{d(p-1)}{2}}_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

e do fato que $\frac{d(p-1)}{2} < 2$. Deste modo, $\nu_\tau \ge -K > -\infty$. Agora considere uma sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{R}^d)$ de forma que

$$\|v_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \longrightarrow \tau \quad \text{e} \quad E(v_n) \longrightarrow -\nu_\tau.$$

Temos que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^d)$ e limitada inferiormente em $L^{p+1}(\mathbb{R}^d)$. De fato, como $v_n \in \Sigma_\tau$, segue que a sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(\mathbb{R}^d)$, então por (2.55) temos a limitação de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $H^1(\mathbb{R}^d)$. Além disso, como $\nu_\tau > 0$, temos que para n suficientemente grande

$$E(v_n) \leq \frac{-\nu_\tau}{2}.$$

Dai segue que,

$$\|v_n\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} \geq \left(\frac{p+1}{2}\right)\nu_\tau, \tag{2.56}$$

conforme afirmamos anteriormente. Agora considere $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{R}^d)$ satisfazendo

$$\|\xi_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \longrightarrow \mu \quad \text{e} \quad E(\xi_n) \longrightarrow -\nu_\tau$$

onde μ é definido como em (2.48). Perceba que podemos escrever

$$v_n = \frac{\sqrt{\tau}}{\|\xi_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}\xi_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Note também que por um argumento de *scaling*, podemos assumir sem perda de generalidade que $\tau = 1$, pois caso contrario basta tomarmos funções da forma $(v_n)_\lambda(\cdot) = \lambda^{\frac{d}{2}} v_n(\lambda\cdot)$ e considerarmos $\lambda = \tau^{\frac{1}{d}}$ e seguirmos de maneira análoga. Desse modo podemos aplicar o Teorema 2.3 (princípio de concentração de compacidade) a sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde $a = 1$. Afirmamos que

$$\mu = 1. \tag{2.57}$$

De fato, primeiramente note que por $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ser limitada inferiormente em $L^{p+1}(\mathbb{R}^d)$, pelo item *(ii)* do Teorema 2.3 temos que $\mu > 0$. Suponhamos por contradição

$$0 < \mu < 1. \tag{2.58}$$

Usaremos agora as sequências $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fornecidas pelo item (iii) do Teorema 2.3 (princípio de concentração de compacidade). Note que

$$\begin{aligned}
E(v_n) - E(u_n) - E(w_n) &= \left(\frac{1}{2}\|\nabla v_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \frac{1}{p+1}\|v_n\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}\right) - \left(\frac{1}{2}\|\nabla u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right.\\
&\quad \left. - \frac{1}{p+1}\|u_n\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}\right) - \left(\frac{1}{2}\|\nabla w_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \frac{1}{p+1}\|w_n\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\|\nabla v_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \|\nabla u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \|\nabla w_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right)\\
&\quad - \frac{1}{p+1}\left(\|v_n\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} - \|u_n\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} - \|w_n\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}\right).
\end{aligned}$$

Segue então de (2.53) e (2.54) que

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to+\infty}\left(E(v_n) - E(u_n) - E(w_n)\right) &\geq \frac{1}{2}\liminf_{n\to+\infty}\left(\|\nabla v_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \|\nabla u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \|\nabla w_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right)\\
&\quad - \frac{1}{p+1}\liminf_{n\to+\infty}\left(\|v_n\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} - \|u_n\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} - \|w_n\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}\right)\\
&\geq 0
\end{aligned}$$

daí

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to+\infty} E(v_n) &\geq -\liminf_{n\to+\infty}(-(E(u_n)+E(w_n)))\\ &\geq \limsup_{n\to+\infty}(E(u_n)+E(w_n)),\end{aligned}$$

por simplicidade, consideramos a subsequência $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ fornecida pelo Teorema 2.3 como sendo a própria sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como $\liminf_{n\to+\infty} E(v_n) = \lim_{n\to+\infty} E(v_n) = -\nu_1$, segue que

$$\limsup_{n\to+\infty}(E(u_n)+E(w_n)) \leq -\nu_1. \tag{2.59}$$

Agora observe que, dados $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ e $\alpha > 0$, temos

$$E(v) = \frac{1}{\alpha^2}E(\alpha v) + \frac{\alpha^{p-1}-1}{p+1}\|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}.$$

Aplicando a igualdade acima com $\alpha_n = (\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)})^{-1}$ e como $\alpha_n u_n \in \Sigma_1$, obtemos que

$$E(u_n) \geq \frac{-\nu_1}{\alpha_n^2} + \frac{\alpha_n^{p-1}-1}{p+1}\|u_n\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}.$$

Analogamente,

$$E(w_n) \geq \frac{-\nu_1}{\beta_n^2} + \frac{\beta_n^{p-1}-1}{p+1}\|w_n\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)},$$

com $\beta_n = (\|w_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)})^{-1}$ e então

$$E(u_n)+E(w_n) \geq -\nu_1(\alpha_n^{-2}+\beta_n^{-2}) + \frac{\alpha_n^{p-1}-1}{p+1}\|u_n\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} + \frac{\beta_n^{p-1}-1}{p+1}\|w_n\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}.$$

Finalmente, perceba que por (2.52), $\alpha_n^{-2} = \|u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \longrightarrow \mu$ e $\beta_n^{-2} = \|w_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \longrightarrow (1-\mu)$. Em particular, por (2.58)

$$\theta := \min\{\mu^{-\frac{p-1}{2}}, (1-\mu)^{-\frac{p-1}{2}}\} > 1.$$

Deste modo, usando (2.54), por (2.56) podemos deduzir que

$$
\begin{aligned}
\liminf_{n\to+\infty}(E(u_n)+E(w_n)) &\geq \liminf_{n\to+\infty}\Big(-\nu_1(\alpha_n^{-2}+\beta_n^{-2})+\frac{\alpha_n^{p-1}-1}{p+1}\|u_n\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}^{p+1} \\
&\quad +\frac{\beta_n^{p-1}-1}{p+1}\|w_n\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}^{p+1}\Big) \\
&\geq -\nu_1(\mu+(1-\mu))+\frac{\mu^{-\frac{p-1}{2}}-1}{p+1}\liminf_{n\to+\infty}\|u_n\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}^{p+1} \\
&\quad +\frac{(1-\mu)^{-\frac{p-1}{2}}-1}{p+1}\liminf_{n\to+\infty}\|w_n\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}^{p+1} \\
&\geq -\nu_1+\frac{\theta-1}{p+1}\liminf_{n\to+\infty}(\|u_n\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}^{p+1}+\|w_n\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}^{p+1}) \\
&\geq -\nu_1+\frac{\theta-1}{p+1}\liminf_{n\to+\infty}\|v_n\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}^{p+1} \\
&\geq -\nu_1+\frac{\theta-1}{p+1}\left(\frac{p+1}{2}\right)\nu_1 \\
&\geq -\nu_1+\left(\frac{\theta-1}{2}\right)\nu_1 \\
&> -\nu_1
\end{aligned}
$$

contradizendo assim (2.59). Portanto, segue que $\mu=1$ e então podemos aplicar o item *(i)* do Teorema 2.3, que nos garante a existência de uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}^d$ e uma função $v\in H^1(\mathbb{R}^d)$ tal que $v_n(\cdot-y_n)\to v$ em $L^2(\mathbb{R}^d)$ (e em particular, $v\in\Sigma_1$) e também em $L^{p+1}(\mathbb{R}^d)$. Juntamente com a semicontinuidade inferior fraca da norma $H^1(\mathbb{R}^d)$ temos

$$E(v)\leq\lim_{n\to+\infty}E(v_n)=-\nu_1.$$

Como $-\nu_1:=\inf\{E(v):v\in\Sigma_1\}$, temos $E(v)=-\nu_1$. Em particular, $E(v_n)\longrightarrow E(v)$, quando $n\to+\infty$ e com isso segue que $\|\nabla v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\longrightarrow\|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$, garantindo assim que

$$v_n(\cdot-y_n)\longrightarrow v,$$

fortemente em $H^1(\mathbb{R}^d)$, quando $n\to+\infty$ conforme queríamos demonstrar. □

É importante observarmos que caso $p>1+\frac{4}{d}$ temos $\nu_\tau=+\infty$. De fato, seja $v\in\Sigma_\tau$. Usando as funções *scaled* $v_\lambda(\cdot):=\lambda^{\frac{d}{2}}v(\lambda\cdot)$, obtemos

$$\|v_\lambda\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2=\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2=\tau,$$

Porém,

$$E(v_\lambda)=\frac{\lambda^2}{2}\|\nabla\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2-\frac{\lambda^{\frac{d(p-1)}{2}}}{p+1}\|\varphi\|_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}^{p+1}\longrightarrow-\infty,$$

quando $\lambda\to+\infty$, pois $\frac{d(p-1)}{2}>2$. Deste modo, não podemos usar a Proposição anterior neste caso, o que nos leva a questionar a estabilidade orbital do problema quando $p>1+\frac{4}{d}$.

O próximo resultado nos fornece uma caracterização para os *ground states* de (1.10), os identificando como minimizadores de energia sobre uma esfera de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Proposição 2.3. *Considere* $1 < p < 1 + \frac{4}{d}$. *Então*

(i) Existe $\tau_{\mathcal{G}} > 0$ *tal que* $\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \tau_{\mathcal{G}}$ *para todo* $\varphi \in \mathcal{G}$, *onde* $\mathcal{G}$ *é definido em* (1.30)*;*

(ii) $\varphi \in \mathcal{G}$ *se, e somente se* $\varphi \in \Sigma_{\tau_{\mathcal{G}}}$ *e* $E(\varphi) = -\nu_{\tau_{\mathcal{G}}}$.

Demonstração: Note que o item *(i)* segue de maneira imediata da Proposição 2.2. Agora vamos a prova do item *(ii)*. Desse modo, considere

$$\kappa := \inf\{S(v) : v \in \tau_{\mathcal{G}}\}. \tag{2.60}$$

Perceba que se $v \in \mathcal{G}$, temos que $S(v) = \mathfrak{m}$ e pelo item *(i)* , $v \in \Sigma_{\tau_{\mathcal{G}}}$. Pela definição de κ temos que

$$\kappa \leq \mathfrak{m},$$

onde $\mathfrak{m}$ é definido em (1.29). Agora considere $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$\begin{cases} v \in \Sigma_{\tau_{\mathcal{G}}} \\ E(v) = -\nu_{\tau_{\mathcal{G}}}. \end{cases} \tag{2.61}$$

Vamos mostrar que v é solução da equação (1.10). De fato, primeiramente note que

$$S(v) = E(v) + \omega M(v) = E(v) + \frac{\omega}{2}\tau_{\mathcal{G}},$$

assim, temos que (2.61) é equivalente a condição

$$\begin{cases} v \in \Sigma_{\tau_{\mathcal{G}}} \\ S(v) = \min\{S(u) : u \in \Sigma_{\tau_{\mathcal{G}}}\}. \end{cases} \tag{2.62}$$

Desse modo, considerando as funções *scaled* $v_\lambda(\cdot) := \lambda^{\frac{d}{2}} v(\lambda \cdot)$ com $\lambda > 0$, obtemos

$$\|v_\lambda\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \tau_{\mathcal{G}},$$

logo $v_\lambda \in \Sigma_{\tau_{\mathcal{G}}}$, para $\lambda > 0$. Segue de (2.62) que

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} S(v_\lambda)\Big|_{\lambda=1} = \|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \frac{d(p-1)}{2(p+1)}\|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} = 0,$$

ou seja,

$$T(v) := \|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \frac{d(p-1)}{2(p+1)}\|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.63}$$

Agora, como v satisfaz (2.62), existe um multiplicador de Lagrange λ tal que $S'(v) = \lambda v$. Assim, existe um escalar δ de tal forma que

$$-\Delta v + \delta \omega v - |v|^{p-1} v = 0. \tag{2.64}$$

Tomando o produto interno de $L^2(\mathbb{R}^d)$ com v na equação (2.64) e aplicando (2.63) obtemos que

$$\delta\omega\tau_{\mathcal{G}} = \frac{4-(d-2)(p-1)}{d(p-1)}T(v),$$

do qual segue que $\delta > 0$. Agora considere $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$v(\cdot) = \delta^{\frac{1}{p-1}}u(\delta^{\frac{1}{2}}\cdot).$$

Deduzimos da relação (2.64) que u é solução de (1.10), implicando que

$$S(u) \geq \mathfrak{m}. \tag{2.65}$$

Uma conta simples também nos mostra que

$$S(v) = \delta^{\frac{4-(d-2)(p-1)}{2(p-1)}}\mathfrak{m} + \frac{\omega}{2}\tau_{\mathcal{G}}(1-\delta).$$

Por outro lado, segue do Teorema 1.4 que $\mathfrak{m} > 0$, e pelo item *(i)* e por (1.14)

$$\frac{\omega}{2}\tau_{\mathcal{G}} = \frac{4-(d-2)(p-1)}{2(p-1)}\mathfrak{m},$$

e então

$$1 \geq \delta^{\frac{4-(d-2)(p-1)}{2(p-1)}} + \frac{4-(d-2)(p-1)}{2(p-1)}(1-\delta). \tag{2.66}$$

Temos que (2.66) nos diz que $f(\delta) \leq 0$, onde

$$f(s) := s^{\frac{4-(d-2)(p-1)}{2(p-1)}} + \frac{4-(d-2)(p-1)}{2(p-1)}s + \frac{4-d(p-1)}{2(p-1)}.$$

Percebe que f assim definida é tal que $f(s) > 0$ sempre $s \neq 1$. Desta forma concluímos que $\delta = 1$, o que nos diz por (2.64) que v é uma solução da equação (1.10). Note que em particular, obtemos que

$$\kappa \geq \mathfrak{m}$$

e portanto temos $\kappa = \mathfrak{m}$. Para concluir, consideremos $\varphi \in \mathcal{G}$. Então $\varphi \in \Sigma_{\tau_{\mathcal{G}}}$ e $S(\varphi) = \kappa$, o que implica φ satisfazendo (2.62), ou equivalentemente

$$\begin{cases} \varphi \in \Sigma_{\tau_{\mathcal{G}}} \\ E(\varphi) = -\nu_{\tau_{\mathcal{G}}}. \end{cases} \tag{2.67}$$

Reciprocamente, seja φ satisfazendo (2.61). Pelo que vimos anteriormente, φ é uma solução da equação (1.10) tal que

$$S(\varphi) = \kappa = \mathfrak{m},$$

mostrando assim que $\varphi \in \mathcal{G}$. □

Como esses resultados, estamos preparados para demonstrar o Teorema 2.1.

Demonstração do Teorema 2.1 (Método de Cazenave-Lions): Esse resultado será demonstrado por um argumento de contradição. Assim, assuma que existe $\varepsilon > 0$ e duas sequências $(u_{n,0})_{n\in\mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{R}^d)$ e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tais que

$$\|u_{n,0} - \varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad n \to +\infty \tag{2.68}$$

porém,

$$\inf_{\theta\in\mathbb{R}} \inf_{y\in\mathbb{R}^d} \|u_n(t_n) - e^{i\theta}\varphi(\cdot - y)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} > \varepsilon, \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.69}$$

Onde u_n é a solução maximal de (1.2) com dado inicial $u_{n,0}$. Considere $v_n(x) := u_n(t_n, x)$. Temos pelas leis de conservação de massa e energia que

$$\begin{aligned} &\|v_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|u_n(t_n)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|u_{n,0}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \\ &E(v_n) = E(u_n(t_n)) = E(u_{n,0}). \end{aligned}$$

Tomando o limite sobre $n \in \mathbb{N}$, segue por (2.68) que

$$\|v_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \longrightarrow \|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \tau_{\mathcal{G}} \quad \text{e} \quad E(v_n) \longrightarrow E(\varphi) = -\nu_{\tau_{\mathcal{G}}}. \tag{2.70}$$

Desse modo, por (2.70) e pela Proposição 2.2 deve existir uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ e uma função $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$\|v_n(\cdot - y_n) - v\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad n \to +\infty, \tag{2.71}$$

e além disso $v \in \Sigma_{\tau_{\mathcal{G}}}$ e $E(v) = -\nu_{\tau_{\mathcal{G}}}$, o que nos diz pela Proposição 2.3 que $v \in \mathcal{G}$, em outras palavras, v é um *ground state* para (1.10). Segue então pela unicidade que existem $\theta \in R$ e $y \in \mathbb{R}^d$ tais que $v = e^{i\theta}\varphi(\cdot - y)$. Lembrando que $v_n = u_n(t_n)$ e substituindo o que foi obtido em (2.71) segue que

$$\|u_n(t_n) - e^{i\theta}\varphi(\cdot - (y - y_n))\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad n \to +\infty,$$

o que contradiz (2.69). □

É muito importante observarmos que o coração da prova do Teorema 2.1 pelo método de Cazenave-Lions, além das Proposições 2.2 e 2.3, é o fato de que o conjunto de *ground states* $\mathcal{G}$ pode ser explicitamente descrito, como é mencionado no Teorema 1.5. Esse resultado de unicidade está longe de ser trivial, mesmo com nossa não linearidade sendo simplesmente do tipo polinomial. Para não linearidades mais gerais, usualmente não temos resultados no que diz respeito a unicidade e para contornar isso, obtém-se resultados correspondentes a uma noção mais fraca de estabilidade, a estabilidade do conjunto de *ground states* $\mathcal{G}$. De maneira mais formal, o conjunto de *ground states* $\mathcal{G}$ é dito estável se para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ que cumpre a seguinte condição: Se $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ satisfaz

$$\|u_0 - \varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} < \delta, \quad \text{para algum } \varphi \in \mathcal{G},$$

então

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \inf_{\psi\in\mathcal{G}} \|u(t) - \psi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon,$$

onde u é a solução máximal de (1.2), com dado inicial $u(0) = u_0$.

2.2 Sobre a Instabilidade

Nessa seção, iremos provar que se $1 + \frac{4}{d} \leq p < 1 + \frac{4}{d-2}$ então as ondas estacionarias são fortemente instáveis. Mais precisamente, para qualquer *ground state* $\varphi \in \mathcal{G}$, iremos encontrar um dado inicial bem próximo de φ e queremos que a solução de (1.2) associada a tal dado, tenha explosão em um tempo finito. Assim como na Proposição 1.2, nossa ferramenta principal será o Teorema 1.2 (Identidade virial). Além disso, como a energia de um *ground state* é não negativa, não é possível aplicar a Proposição 1.2 diretamente e para superar essa dificuldade, seguiremos a abordagem usada por (COZ, 2008) que é basicamente uma melhoria do método introduzido por (BERESTYCKI; CAZENAVE, 1981). O "coração" desse método está em fornecer uma nova caracterização variacional para os *ground states* minimizadores de S sobre algumas restrições relacionadas a identidade 1.15.

2.2.1 Instabilidade Forte (por *blow-up* em tempo finito)

Antes de estabelecer nossos resultados, daremos uma definição precisa para instabilidade forte.

Definição 2.2. *Considere φ uma solução da equação estacionária (1.10). Diremos que a onda estacionaria $e^{i\omega t}\varphi(x)$ é fortemente instável se para todo $\varepsilon > 0$ existe $u_{\varepsilon,0} \in H^1(\mathbb{R}^d)$ tal que*

$$\|u_{\varepsilon,0} - \varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$$

mas a solução maximal correspondente u_ε de (1.2) com intervalo de existência $(T^\varepsilon_{min}, T^\varepsilon_{max})$ satisfaz $T^\varepsilon_{min} > -\infty$ e $T^\varepsilon_{max} < +\infty$ e além disso

$$\lim_{t \searrow T^\varepsilon_{min}} \|u_\varepsilon(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} = +\infty \quad e \quad \lim_{t \nearrow T^\varepsilon_{max}} \|u_\varepsilon(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} = +\infty.$$

Primeiramente vamos começar com o caso particular $p = 1 + \frac{4}{d}$, o qual foi provado pela primeira vez por (WEINSTEIN, 1982/83).

Teorema 2.4. *Seja $p = 1 + \frac{4}{d}$. Então para toda solução φ de (1.10) a onda estacionaria $e^{i\omega t}\varphi(x)$ é fortemente instável.*

Demonstração: Relembremos o funcional $P : H^1(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$ definido no Teorema 1.2 (Identidade virial)

$$P(v) = \|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \frac{d(p-1)}{2(p+1)}\|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}.$$

Como $p = 1 + \frac{4}{d}$, segue que $E(v) = P(v)$ para qualquer que seja $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Dai, segue da identidade (1.15)

$$E(\varphi) = P(\varphi) = 0.$$

Agora, considere $u_{\varepsilon,0} := (1+\varepsilon)\varphi$. Então temos que $E(u_{\varepsilon,0}) < 0$, e tendo em vista o decaimento exponencial de φ fornecido pela Proposição 1.3, temos que $|x|u_{\varepsilon,0} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Assim, o resultado segue diretamente da Proposição 1.2 e do Corolário 1.1. □

É importante observar que o Teorema 2.4 garante a instabilidade forte para qualquer solução de (1.10). Já nosso resultado mais geral focará somente em soluções do tipo *ground state*. O problema de determinar a instabilidade forte para qualquer tipo de solução de (1.10) quando $p > 1 + \frac{4}{d}$ ainda está em aberto, consulte o trabalho de (TODOROVA, 2004) para possíveis mais detalhes.

Antes de mostrar o resultado principal, necessitamos de alguns lemas auxiliares que terão papel fundamental na demonstração do mesmo. No primeiro deles, investigaremos o comportamento de diferentes funcionais sobre o *scaling* $v_\lambda(\cdot) = \lambda^{\frac{d}{2}} v(\lambda \cdot)$.

Lema 2.12. *Seja $v \in H^1(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$ tal que $P(v) \leq 0$. Então existe $\lambda_0 \in (0,1]$ tal que*

(i) $P(v_{\lambda_0}) = 0$ *;*

(ii) $\lambda_0 = 1$ *se, e somente se* $P(v) = 0$*;*

(iii) $\frac{\partial}{\partial \lambda} S(v_\lambda) = \frac{1}{\lambda} P(v_\lambda)$*;*

(iv) $\frac{\partial}{\partial \lambda} S(v_\lambda) > 0$ *para* $\lambda \in (0, \lambda_0)$ *e* $\frac{\partial}{\partial \lambda} S(v_\lambda) < 0$ *para* $\lambda \in (\lambda_0, +\infty)$,

(v) A aplicação

$$\begin{array}{rccl} \Psi: & (\lambda_0, +\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \lambda & \longmapsto & \Psi(\lambda) := S(v_\lambda), \end{array}$$

assim definida é côncava.

Demonstração: Como $p > 1 + \frac{4}{d}$, temos que $\frac{d(p-1)}{2} > 2$, assim

$$P(v_\lambda) = \lambda^2 \|\nabla v\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} - \lambda^{\frac{d(p-1)}{2}} \frac{d(p-1)}{2(p+1)} \|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} > 0$$

para λ suficientemente pequeno. Assim, pela continuidade de P, deve existir $\lambda_0 \in (0,1]$ de tal modo que $P(v_{\lambda_0}) = 0$, o que mostra (i). Caso $\lambda_0 = 1$, segue pelo item (i) que $P(v_1) = P(v) = 0$. Reciprocamente, suponhamos que $P(v) = 0$, então

$$\begin{aligned} P(v_\lambda) &= \lambda^2 \|\nabla v\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} - \lambda^{\frac{d(p-1)}{2}} \frac{d(p-1)}{2(p+1)} \|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} \\ &= \lambda^2 P(v) + \left(\lambda^2 - \lambda^{\frac{d(p-1)}{2}}\right) \frac{d(p-1)}{2(p+1)} \|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} \\ &= \left(\lambda^2 - \lambda^{\frac{d(p-1)}{2}}\right) \frac{d(p-1)}{2(p+1)} \|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Como $\frac{d(p-1)}{2} > 2$, segue que $P(v_\lambda) > 0$ para todo $\lambda \in (0,1)$, com isso temos (ii) . Temos também que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\lambda}S(v_\lambda) &= \lambda\|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \lambda^{\frac{d(p-1)}{2}-1}\frac{d(p-1)}{2(p+1)}\|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} \\
&= \lambda^{-1}\left(\lambda^2\|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \lambda^{\frac{d(p-1)}{2}}\frac{d(p-1)}{2(p+1)}\|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}\right) \\
&= \lambda^{-1}\left(\left(\lambda^2 - \lambda^{\frac{d(p-1)}{2}}\right)\frac{d(p-1)}{2(p+1)}\|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}\right) \\
&= \lambda^{-1}P(v_\lambda).
\end{aligned}$$

logo (iii) também segue. Para obtermos (iv), note que

$$\begin{aligned}
P(v_\lambda) &= \lambda^2\|\nabla v\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} - \lambda^{\frac{d(p-1)}{2}}\frac{d(p-1)}{2(p+1)}\|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} \\
&= \lambda^2\|\nabla v\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} - \lambda^{\frac{d(p-1)}{2}}\frac{d(p-1)}{2(p+1)}\|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} + \lambda^2\lambda_0^{\frac{d(p-1)}{2}-2}\frac{d(p-1)}{2(p+1)}\|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} \\
&\quad - \lambda^2\lambda_0^{\frac{d(p-1)}{2}-2}\frac{d(p-1)}{2(p+1)}\|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} \\
&= \lambda^2\lambda_0^2\lambda_0^{-2}\|\nabla v\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} - \lambda^2\lambda_0^{\frac{d(p-1)}{2}-2}\frac{d(p-1)}{2(p+1)}\|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} \\
&\quad + \left(\lambda^2\lambda_0^{\frac{d(p-1)}{2}-2} - \lambda^{\frac{d(p-1)}{2}}\right)\frac{d(p-1)}{2(p+1)}\|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} \\
&= \lambda^2\lambda_0^{-2}\left(\|\nabla v\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} - \lambda^2\lambda_0^{\frac{d(p-1)}{2}}\frac{d(p-1)}{2(p+1)}\|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}\right) \\
&\quad + \left(\lambda^2\lambda_0^{\frac{d(p-1)}{2}-2} - \lambda^{\frac{d(p-1)}{2}}\right)\frac{d(p-1)}{2(p+1)}\|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} \\
&= \lambda^2\lambda_0^{-2}P(v_{\lambda_0}) + \left(\lambda^2\lambda_0^{\frac{d(p-1)}{2}-2} - \lambda^{\frac{d(p-1)}{2}}\right)\frac{d(p-1)}{2(p+1)}\|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} \\
&= \lambda^2\left(\lambda_0^{\frac{d(p-1)}{2}-2} - \lambda^{\frac{d(p-1)}{2}-2}\right)\frac{d(p-1)}{2(p+1)}\|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Deste modo, como $\frac{d(p-1)}{2} - 2 > 0$, temos $P(v_\lambda) > 0$ sempre que $\lambda < \lambda_0$ e $P(v_\lambda) < 0$ sempre que $\lambda > \lambda_0$. Combinando esse fato com (iii) temos

$$\begin{cases}
\frac{\partial}{\partial\lambda}S(v_\lambda) = \lambda^{-1}P(v_\lambda) > 0, & \text{se } \lambda \in (0,\lambda_0)\,, \\
\frac{\partial}{\partial\lambda}S(v_\lambda) = \lambda^{-1}P(v_\lambda) < 0, & \text{se } \lambda \in (\lambda_0,+\infty).
\end{cases}$$

Assim, (iv) segue. Finalmente

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}S(v_\lambda) &= \|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \lambda^{\frac{d(p-1)}{2}-2}\left(\frac{d(p-1)}{2} - 1\right)\frac{d(p-1)}{2(p+1)}\|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)} \\
&= \lambda^{-2}P(v_\lambda) - \lambda^{\frac{d(p-1)}{2}-2}\left(\frac{d(p-1)}{2} - 2\right)\frac{d(p-1)}{2(p+1)}\|v\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)},
\end{aligned}$$

o que implica em

$$\Psi''(\lambda) = \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}S(v_\lambda) < 0$$

para $\lambda \in (\lambda_0, +\infty)$ e sabendo que $\frac{d(p-1)}{2} - 2 > 0$ temos que $\Psi(\lambda)$ é côncava. Dai segue (v). $\square$

Para provar o Teorema de instabilidade para *ground states*, seguiremos três passos. Primeiro, obteremos uma nova caracterização variacional para os *ground states* de (1.10). Em seguida, utilizaremos tal caracterização para definir um conjunto $\mathcal{I} \subset H^1(\mathbb{R}^d)$, o qual será invariante sob o fluxo de (1.2), de modo que para qualquer dado inicial pertencente a $\mathcal{I}$, teremos explosão para a solução maximal de (1.2) associada a esse dado. Por fim, vamos provar que os *ground states* de (1.10) podem ser aproximados por sequências contidas em $\mathcal{I}$.

Para isso, vamos considerar o seguinte problema de minimização:

$$d_{\mathcal{M}} := \inf_{v \in \mathcal{M}} S(v)$$

onde

$$\mathcal{M} := \{v \in H^1(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\} : P(v) = 0 \text{ e } I(v) \leq 0\}.$$

Lembremos que o funcional $I : H^1(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$, definido no Lema 1.4, é dado por

$$I(v) = \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \omega\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \|\varphi\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}.$$

Lema 2.13. *A seguinte igualdade sempre vale:*

$$\mathfrak{m} = d_{\mathcal{M}}$$

onde $\mathfrak{m}$ *é o nível de menor energia, definido em* (1.29).

Demonstração: Seja $\varphi \in \mathcal{G}$ um *ground state*. Pelo Lema 1.1, temos que $I(\varphi) = P(\varphi) = 0$, garantindo assim que $\varphi \in \mathcal{M}$. Deste modo $S(\varphi) \geq d_{\mathcal{M}}$ e pelo conceito de ínfimo, segue que

$$\mathfrak{m} \geq d_{\mathcal{M}}. \tag{2.72}$$

Reciprocamente, seja $v \in \mathcal{M}$. Se $I(v) = 0$, então pelo Teorema 1.4, $S(v) \geq \mathfrak{m}$. Agora suponha $I(v) < 0$, então perceba que

$$I(v_\lambda) = \lambda^2\|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \omega\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \lambda^{\frac{d(p-1)}{2}}\|\varphi\|^{p+1}_{L^{p+1}(\mathbb{R}^d)}$$

o que implica

$$\lim_{\lambda\to 0} I(v_\lambda) = \omega\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} > 0.$$

Por continuidade, existe $\lambda_1 < 1$ de tal forma que $I(v_{\lambda_1}) = 0$. Assim, pelo Teorema 1.4

$$\mathfrak{m} \leq S(v_{\lambda_1}). \tag{2.73}$$

Como $P(v) = 0$, segue do Lema 2.12 que

$$S(v_{\lambda_1}) < S(v). \tag{2.74}$$

Assim, por (2.73) e (2.74) e sabendo que $\mathfrak{m} \leq S(v)$, temos

$$\mathfrak{m} \leq d_{\mathcal{M}}. \tag{2.75}$$

Por (2.72) e (2.75), segue a igualdade

$$\mathfrak{m} = d_{\mathcal{M}}.$$

□

Pois bem, definiremos o conjunto $\mathcal{I}$ como sendo

$$\mathcal{I} := \{v \in H^1(\mathbb{R}^d) : I(v) < 0, P(v) < 0 \text{ e } S(v) < \mathfrak{m}\}.$$

Agora, usando o Lema 2.13 provaremos que $\mathcal{I}$ assim definido, é invariante pelo fluxo de (1.2).

Lema 2.14. *Seja $u_0 \in \mathcal{I}$. Então a solução maximal de* (1.2) *correspondente a u_0 em (T_{min}, T_{max}) satisfaz*

$$u(t) \in \mathcal{I},$$

para todo $t \in (T_{min}, T_{max})$.

Demonstração: Considere $u_0 \in \mathcal{I}$ e u a solução máxima de (1.2) com dado inicial u_0 fornecida pelo Teorema 1.1, com intervalo de solução (T_{min}, T_{max}). Como S é uma quantidade conservada para (1.2),

$$S(u(t)) = S(u_0) < \mathfrak{m}, \quad \forall\, t \in (T_{min}, T_{max}). \tag{2.76}$$

Basearemos o restante da nossa prova em argumentos de contradição. De fato, suponha que exista $t \in (T_{min}, T_{max})$ tal que

$$I(u(t)) \geq 0.$$

Desso modo, pela continuidade de I e de u deve existir t_0 tal que

$$I(u(t_0)) = 0,$$

assim o Teorema 1.4 nos diz que

$$S(u(t_0)) \geq \mathfrak{m},$$

o que contradiz (2.76). Segue assim que

$$I(u(t)) < 0, \quad t \in (T_{min}, T_{max}). \tag{2.77}$$

Finalmente, vamos supor que para alguma $t \in (T_{min}, T_{max})$ tenhamos

$$P(u(t)) \geq 0.$$

Por continuidade, existe t_1 de tal forma que

$$P(u(t_1)) = 0.$$

De (2.77), temos $I(u(t_1)) < 0$ e então pelo Lema 2.13

$$S(u(t_1)) \geq \mathfrak{m},$$

contradizendo (2.76). Desse modo

$$P(u(t)) < 0, \quad \forall t \in (T_{min}, T_{max}).$$

Com isso, temos pela definição do conjunto $\mathcal{I}$ que $u(t) \in \mathcal{I}$ para todo $t \in (T_{min}, T_{max})$. □

Lema 2.15. *Seja $u_0 \in \mathcal{I}$ e $u(t)$ a solução máximal de (1.2) correspondente a u_0 em (T_{min}, T_{max}). Então existe $\delta > 0$, independente de t, tal que*

$$P(u(t)) < -\delta$$

para todo $t \in (T_{min}, T_{max})$.

Demonstração: Considere $t \in (T_{max}, T_{min})$ e defina

$$v := u(t) \quad \text{e} \quad v_\lambda(\cdot) := \lambda^{\frac{d}{2}} v(\lambda \cdot).$$

Pelo Lema 2.12, existe $\lambda_0 < 1$ tal que $P(v_{\lambda_0}) = 0$. Consideremos, sem perda de generalidade, que $I(v_{\lambda_0}) \leq 0$ (pois caso $I(v_{\lambda_0}) > 0$, por continuidade deve existir $\overline{\lambda_0} \in (\lambda_0, 1)$, tal que, $I(v_{\overline{\lambda_0}}) = 0$, e assim podemos trocar , λ_0 por $\overline{\lambda_0}$ e seguir de maneira análoga) assim, pelo Teorema 1.4

$$S(v_{\lambda_0}) \geq \mathfrak{m}. \tag{2.78}$$

Agora, considerando o item (v) do Lema 2.12, temos

$$S(v) - S(v_{\lambda_0}) \geq (1 - \lambda_0) \frac{\partial}{\partial \lambda} S(v_\lambda)\Big|_{\lambda=1}, \tag{2.79}$$

e pelo item (iii) do mesmo Lema

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} S(v_\lambda)\Big|_{\lambda=1} = P(v). \tag{2.80}$$

Além disso, como $P(v) < 0$ e $\lambda_0 \in (0, 1)$ temos que

$$(1 - \lambda_0) P(v) > P(v). \tag{2.81}$$

Assim , por (2.78),(2.79), (2.80), e (2.81) temos que

$$S(v) - \mathfrak{m} > P(v).$$

Defina $\delta := m - S(v)$. Dessa maneira, $\delta > 0$, pois $v \in \mathcal{I}$ (Lema 2.14) e além disso, como S é uma quantidade conservada temos que δ independe de t. Desse modo, segue

$$P(u(t)) < S(v) - \mathfrak{m} = -\delta.$$

para todo $t \in (T_{min}, T_{max})$, conforme queriamos demonstrar. □

A seguir teremos o Lema, que garante que soluções de (1.2) associadas a dados iniciais em $\mathcal{I}$, tem explosão em tempo finito.

Lema 2.16. *Considere $u_0 \in \mathcal{I}$ tal que $|x|u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Então a solução máximal de (1.2) u correspondente, com intervalo de existência (T_{min}, T_{max}) tem explosão em tempo finito, ou seja, $T_{min} > -\infty$ e $T_{max} < +\infty$ com*

$$\lim_{t \searrow T_{min}} \|u(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} = \lim_{t \nearrow T_{max}} \|u(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} = +\infty.$$

Demonstração: Seja $u_0 \in \mathcal{I}$ de modo que $|x|u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ e u a solução máximal de (1.2) com $u(0) = u_0$. Pelo Lema 2.15, existe $\delta > 0$ tal que

$$P(u(t)) < -\delta,$$

para todo $t \in (T_{min}, T_{max})$. Relembrando que pelo Teorema 1.2 (Identidade virial) temos

$$\psi''(t) := \frac{\partial^2}{\partial t^2}\|xu(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 8P(u(t)),$$

que integrando duas vezes em relação ao tempo nos fornece

$$\|xu(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq -4\delta t^2 + C(t+1).$$

Assim como na prova da Proposição 1.2, caso $T_{\min} = -\infty$ ou $T_{max} = +\infty$ teríamos uma contradição para $|t|$ suficientemente grande. Desse modo , $T_{min} > -\infty$ e $T_{max} < +\infty$ e pelo Corolário 1.1 temos

$$\lim_{t \searrow T_{min}} \|u(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{t \nearrow T_{max}} \|u(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} = +\infty.$$

□

Agora estamos preparados para enunciar e demonstrar o principal resultado desta seção.

Teorema 2.5. *Seja $p > 1 + \frac{4}{d}$. Então para qualquer que seja $\varphi \in \mathcal{G}$ a onda estacionaria $e^{i\omega t}\varphi(x)$ é fortemente instável.*

Demonstração: Tendo em mãos o Lema 2.16, tudo que necessitamos fazer é encontrar uma sequência em $\mathcal{I} \subset H^1(\mathbb{R}^d)$ convergindo para o *ground state* φ na norma de $H^1(\mathbb{R}^d)$. Consideremos o *scaling* $\varphi_\lambda(\cdot) = \lambda^{\frac{d}{2}}\varphi(\lambda\cdot)$. Então pelo Lema 2.12

- $I(\varphi_\lambda) < 0$;
- $P(\varphi_\lambda) < 0$;
- $S(\varphi_\lambda) < \mathfrak{m}$.

Ou seja, $\varphi_\lambda \in \mathcal{I}$ para qualquer que seja $\lambda \in (0, 1)$. Além disso, como φ tem decaimento exponencial (Proposição 1.3) então φ_λ também possui tal decaimento, e dessa forma $|x|\varphi_\lambda \in L^2(\mathbb{R}^d)$ para todo $\lambda \in (0, 1)$. Note que,

$$\lim_{\lambda \to 1} \|\varphi_\lambda - \varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} = 0$$

e pelo Lema 2.16, φ_λ é uma solução de (1.2) que tem explosão em tempo finito, para todo $0 < \lambda < 1$. Finalizando assim nossa prova. □

2.2.2 Instabilidade com uma Não Linearidade Geral

Nessa subseção, baseados no trabalho (COZ et al., 2008), estamos interessados em tentar estender os resultados de instabilidade de *ground states* vistos anteriormente para não linearidades mais gerais, impondo condições razoáveis sobre o termo não linear. Para isso vamos introduzir algumas notações. Assim considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u + g(u) = 0, & t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^d \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{2.82}$$

onde $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função para que se estende ao plano complexo $\mathbb{C}$ como sendo

$$\mathfrak{G}(z) = \frac{g(|z|)}{|z|}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Como foi dito anteriormente, para trabalharmos de maneira consistente com o problema (2.82), precisamos assumir algumas condições sobre nossa função g. Para isso, dado $z \in \mathbb{C}$, defina

$$G(z) := \int_0^{|z|} g(s)ds.$$

Assumiremos que

(H1) A função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz

(I) $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

(II) $\lim\limits_{s \to 0} \dfrac{g(s)}{s} = 0$

(III) Se $d = 1$ ou $d = 2$, temos que para qualquer $\alpha > 0$, existe uma constante $C_\alpha > 0$ tal que

$$|g(s)| \leq C_\alpha e^{\alpha s^2}$$

para todo $s > 0$. Caso $d \geq 3$, temos

$$\lim_{s \to +\infty} g(s) s^{\frac{d+2}{d-2}} = 0.$$

(H2) A função dada por

$$h(s) := (sg(s) - 2G(s))s^{-2+\frac{4}{d}},$$

é estritamente crescente sobre o intervalo $(0, +\infty)$. Além disso

$$\lim_{s \to 0} h(s) = 0.$$

(H3) Existe uma constante $C > 0$ e $\alpha \in [0, \frac{4}{d-2}]$ com $d \geq 3$ ($\alpha \in [0, +\infty)$ caso $d = 2$) tais que

$$|g(s) - g(t)| \leq C(1 + |s|^\alpha + |t|^\alpha)|t - s|$$

para todos s, t em $\mathbb{R}$. Caso $d = 1$, assumiremos que para todo $M > 0$, existe $L_M > 0$ tal que

$$|g(s) - g(t)| \leq L_M |t - s|$$

para todos s, t em $\mathbb{R}$ tais que $|s| + |t| \leq M$.

A condição **(H3)** é puramente técnica e é destinada especialmente para garantir a boa colocação local do problema de valor inicial (2.82) em $H^1(\mathbb{R}^d)$, como mostra o seguinte Teorema.

Teorema 2.6. *Suponha valida a condição **(H3)**. Então para todo $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ existe $T_{u_0} > 0$ e uma única solução de (2.82) com $u(0) = u_0$ e*

$$u \in C([0, T_{u_0}); H^1(\mathbb{R}^d)) \cap C^1([0, T_{u_0}); H^{-1}(\mathbb{R}^d)).$$

Além disso, se $T_{u_0} < +\infty$ temos

$$\lim_{t \to T_{u_0}} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = +\infty.$$

Demonstração: Ver (CAZENAVE, 2003), página 92, Theorem 4.3.1. □

Um exemplo clássico de não linearidade que satisfaz tais condições é dada por $g(s) = |s|^{p-1}s$, com p no intervalo crítico, a mesma que foi tratada na seção anterior, veja (BADIALE; SERRA, 2011), página 55, seção 2.3 para mais detalhes.

De maneira similar ao que foi feito no Capítulo 1, definimos como uma *onda estacionaria* para (2.82) uma solução da forma $u(t,x) = e^{\omega t}\varphi(x)$, com $\omega \in \mathbb{R}$ e $\varphi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo a equação elíptica

$$-\Delta\varphi + \omega\varphi - g(\varphi) = 0, \quad \varphi \in H^1(\mathbb{R}^d) \tag{2.83}$$

As suposições **(H1)** e **(H2)** se fazem necessárias para podermos garantir a existência de soluções para a equação (2.83). Para mais detalhes indicamos ver (BERESTYCKI; GALLOUëT; KAVIAN, 1983), páginas 307, Théorème 1.

Definição 2.3. *Diremos que uma solução φ de (2.83) é um ground state se*

$$S(\varphi) = \mathfrak{m} := \inf\{S(v) : v \in H^1(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\} \text{ é solução de } (2.83)\}$$

onde $S : H^1(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$ é definido como

$$S(v) := \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \frac{\omega}{2}\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \int_{\mathbb{R}^d} G(v)\,dx.$$

Perceba que ainda como foi definido anteriormente, as soluções *ground states* são aquelas de "menor energia", isto é, possuem um certo caráter minimizante para o funcional S.

O principal objetivo dessa subseção é provar o seguinte Teorema de instabilidade.

Teorema 2.7. *Assuma que a função $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cumpre as condições **(H1)**, **(H2)** e **(H3)** e seja φ uma solução ground state da equação (2.83). Então para todo $\varepsilon > 0$ existe $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ tal que*

$$\|u_0 - \varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$$

e a solução u de (2.82) com $u(0) = 0$ satisfaz

$$\lim_{t \to T_{u_0}} \|\nabla u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = +\infty, \ \text{com } T_{u_0} < +\infty.$$

As técnicas utilizadas para mostrar a instabilidade usadas na seção anterior e as que serão utilizadas na prova do Teorema 2.7 compartilham de alguns elementos, em particular a introdução de conjuntos invariantes sobre o fluxo da equação. A principal diferença está na caracterização variacional dos *ground states* a qual é utilizada para definir tais conjuntos invariantes sobre o fluxo da equação e no modo que obtemos essa caracterização.

Antes de irmos direto as vias de fato, alguns resultados e propriedades são necessários. Primeiro é importante observar que a solução obtida no Teorema 2.2.2 satisfaz algumas leis de conservação, isto é, para qualquer $t \in [0, T_{u_0})$, temos

$$S(u(t)) = S(u_0), \tag{2.84}$$

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.85}$$

Além disso, a função $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(t) = \|xu(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

é de classe $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e ainda temos a *identidade virial*

$$\psi''(t) = 8P(u(t)), \tag{2.86}$$

onde a aplicação P é dada por

$$P(v) := \|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \frac{d}{2}\int_{\mathbb{R}^d} (g(|v|)|v| - 2G(v))\, dx, \quad \text{com } v \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

Apresentaremos agora um lema técnico, o qual será útil para a prova do resultado seguinte.

Lema 2.17. *Considere a não linearidade $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as condições **(H1)**, **(H2)**. Então*

$$\frac{g(s)}{s} \quad \text{é crescente para } s > 0. \tag{2.87}$$

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{g(s)}{s} = +\infty \tag{2.88}$$

Demonstração: Da definição de $h(s)$ fornecida em **(H2)**, temos

$$\frac{g(s)}{s} = s^{\frac{4}{d}} h(s) + \frac{2G(s)}{s^2}. \tag{2.89}$$

Além disso, para $s > 0$ temos por **(H2)**

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{G(s)}{s^2}\right) = \frac{s(sg(s) - 2G(s))}{s^4} > 0. \tag{2.90}$$

Assim, por (2.89),(2.90) e **(H2)**, o resultado segue. □

O resultado seguinte mostra a existência de soluções *ground states* e que elas correspondem aos minimizantes do funcional S sobre a variedade de Nehari.

Lema 2.18. *Considere a não linearidade $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as condições **(H1)**, **(H2)**. Então a equação (2.83) admite uma solução do tipo ground state. Além disso, estas soluções são tais que*

$$S(\varphi) = d(\omega) := \inf\{S(v) : v \in H^1(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\},\ com\ I(v) = 0\},$$

onde

$$I(v) := \|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \omega \|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \int_{\mathbb{R}^d} g(|v|)|v|dx.$$

Demonstração: Segue do lema anterior a seguinte propriedade

(H4) Existe $s_0 > 0$ tal que

- Se $d \geq 2$ então
$$2^{-1}\omega s_0^2 < G(s_0).$$
- Se $d = 1$, então
$$2^{-1}\omega s_0^2 < G(s),\ 2^{-1}\omega s_0^2 = G(s_0) \quad \text{e} \quad \omega s_0 < g(s_0),$$
com $s \in (0, s_0)$.

Segue por (BERESTYCKI; CAZENAVE, 1981), Théorème 1 e (BERESTYCKI; LIONS, 1983), Theorem 1 que as condições **(H1)** e **(H4)** são suficientes para garantirmos que a equação (2.83) admite uma solução do tipo *ground state*. Agora seja $v \in \mathbb{R}^d$ solução de (2.83), então

$$\begin{aligned} I(v) &= \|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \omega \|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \int_{\mathbb{R}^d} g(|v|)|v|dx \\ &= \langle S'(v), v\rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

desse modo, é suficiente provar que $d(\omega) \geq \mathfrak{m}$. Dos resultados obtidos por (JEANJEAN; TANAKA, 2003a) e (JEANJEAN; TANAKA, 2003b) temos que sobre as condições **(H1)** e **(H4)** o funcional S tem a geometria do Passo da Montanha, ou seja, o conjunto

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^d)) : \gamma(0) = 0 \quad \text{e} \quad S(\gamma(1)) < 0\},$$

é não vazio. Seu o nível crítico

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{s\in[0,1]} S(\gamma(s)) > 0$$

é tal que

$$\mathfrak{m} = c.$$

Agora perceba que por (2.87) nos garante que se $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ satisfaz $I(v) = 0$ então a aplicação

$$t \longmapsto S(tv)$$

atinge seu único máximo sobre o intervalo $[0, +\infty)$ em $t = 1$. Além disso, por (2.88), temos que

$$\lim_{t \to +\infty} S(tv) = -\infty.$$

Segue assim da definição de c, que para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ tal que $I(v) = 0$ tem-se

$$c \leq S(v),$$

dai

$$d(\omega) \geq c.$$

Como $c = \mathfrak{m}$ o resultado segue. □

Assim como feito anteriormente, o seguinte lema nos mostra o comportamento dos funcionais sobre *scaling*.

Lema 2.19. *Considere a não linearidade $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as condições **(H1)**, **(H2)**. Seja $v \in H^1(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$ tal que $P(v) \leq 0$. Então existe $\lambda_0 \in (0, 1]$ tal que*

(i) $P(v_{\lambda_0}) = 0$ *;*

(ii) $\lambda_0 = 1$ *se, e somente se* $P(v) = 0$*;*

(iii) $\frac{\partial}{\partial \lambda} S(v_\lambda) = \frac{1}{\lambda} P(v_\lambda)$*;*

(vi) $\frac{\partial}{\partial \lambda} S(v_\lambda) > 0$ *para* $\lambda \in (0, \lambda_0)$ *e* $\frac{\partial}{\partial \lambda} S(v_\lambda) < 0$ *para* $\lambda \in (\lambda_0, +\infty)$*,*

(v) A aplicação

$$\begin{array}{rccl} \Psi : & (\lambda_0, +\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \lambda & \longmapsto & \Psi(\lambda) := S(v_\lambda), \end{array}$$

assim definida é côncava.

Lembrando que $v_\lambda(\cdot) := \lambda^{\frac{d}{2}} v(\lambda \cdot)$*, com* $\lambda > 0$*.*

Demonstração: Para a demonstração desse resultado, basta percebermos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} S(v_\lambda) &= \lambda \left(\|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \frac{d}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{-(d+2)} \left(\lambda^{\frac{d}{2}} g(\lambda^{\frac{d}{2}} |v|)|v| - 2G(\lambda^{\frac{d}{2}} v) \right) dx \right) \\ &= \lambda^{-1} P(v_\lambda). \end{aligned}$$

e juntamente com a condição (**H2**) a prova segue de maneira análoga a feita para o Lema 2.76. □

Agora estamos preparados para demonstrar o teorema principal dessa etapa do trabalho.

Demonstração do Teorema 2.7: Comecemos considerando o conjunto

$$\mathcal{M} := \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\} : P(v) = 0 \ e \ I(v) \leq 0 \right\}$$

e defina

$$d_{\mathcal{M}} := \inf\{S(v) : v \in \mathcal{M}\}.$$

Procederemos com a demonstração em três etapas.

Etapa 1. Provaremos que $d(\omega) = d_{\mathcal{M}}$. Assim, sabendo que uma solução *ground state* φ satisfaz

$$P(\varphi) = I(\varphi) = 0$$

temos que $\varphi \in \mathcal{M}$ e como $S(\varphi) = d(\omega)$ segue que

$$d_{\mathcal{M}} \leq d(\omega). \tag{2.91}$$

Reciprocamente, seja $v \in \mathcal{M}$. Caso $I(v) = 0$, claramente temos $d(\omega) \leq S(v)$ e o resultado segue. Suponha agora $I(v) < 0$, considerando o *scaling* $v_\lambda(\cdot) := \lambda^{\frac{d}{2}} v(\lambda \cdot)$ com $\lambda > 0$ temos

$$I(v_\lambda) = \lambda^2 \|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \omega \|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \int_{\mathbb{R}^d} \lambda^{-d/2} g(\lambda^{\frac{d}{2}}|v|)|v| dx.$$

Segue de (II) da condição **(H1)**

$$\lim_{\lambda \to 0} I(v_\lambda) = \omega \|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

por continuidade, existe $\lambda_1 < 1$ tal que $I(v_{\lambda_1}) = 0$. Assim $S(v_{\lambda_1}) \geq d(\omega)$. Agora, como $P(v) = 0$ e pelo item (vi) do Lema 2.19 temos

$$S(v) \geq S(v_{\lambda_1}) \geq d(\omega),$$

com $v \in \mathcal{M}$. Portanto

$$d_\omega \leq d_{\mathcal{M}}. \tag{2.92}$$

Assim, por (2.91) e (2.92) segue

$$d_{\mathcal{M}} = d(\omega).$$

Etapa 2. Para $\lambda > 0$, definimos $u_\lambda(\cdot) := \varphi_\lambda(\cdot)$. Para $\lambda > 1$ suficientemente próximo de 1, temos que

$$S(u_\lambda) < S(\varphi), \tag{2.93}$$

$$P(u_\lambda) < 0, \tag{2.94}$$

$$I(u_\lambda) < 0. \tag{2.95}$$

De fato, temos que (2.93) e (2.94) segue de (iii) e (iv) do Lema 2.19. Para (2.95), note que

$$\begin{aligned}
I(u_\lambda) &= 2S(u_\lambda) + \frac{2}{d} P(u_\lambda) - \frac{2}{d} \|\nabla u_\lambda\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&= 2S(\varphi_\lambda) + \frac{2}{d} P(\varphi_\lambda) - \frac{2}{d} \|\nabla \varphi_\lambda\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq 2S(\varphi) + \frac{2}{d} P(\varphi) - I(\varphi) - \frac{2\lambda^2}{d} \|\nabla \varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq \frac{2(1-\lambda^2)}{d} \|\nabla \varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
&< 0.
\end{aligned}$$

Seja agora $u(t)$ a solução de (2.82) com $u(0) = u_\lambda$. Afirmamos que as propriedades (2.93), (2.94), (2.95) são invariantes pelo fluxo da equação (2.82). De fato, pela lei de conservação (2.84) temos que para todo $t \in [0, T_{u_\lambda})$

$$S(u(t)) = S(u_\lambda) \leq S(\varphi) \tag{2.96}$$

Desse modo, podemos inferir que $I(u(t)) \neq 0$, para todo $t \in [0, T_{u_\lambda})$ e por continuidade, $I(u(t)) < 0$ para todo $t \in [0, T_{u_\lambda})$. Segue assim que $P(u(t)) \neq 0$ para todo t, pois caso contrário, teríamos que $u(t_0) \in \mathcal{M}$ para algum $t_0 \in [0, T_{u_\lambda})$ e então

$$S(u(t_0)) \geq S(\varphi),$$

contradizendo (2.96). Logo, por continuidade devemos ter $P(u(t)) \leq 0$ para qualquer que seja $t \in [0, T_{u_\lambda})$. Então

$$S(u(t)) < S(\varphi), \tag{2.97}$$

$$P(u(t)) < 0, \tag{2.98}$$

$$I(u(t)) < 0, \tag{2.99}$$

para todo $t \in [0, T_{u_\lambda})$.

Etapa 3. Fixemos $t \in [0, T_{u_\lambda})$ e defina $v := u(t)$. Para $\beta > 0$ consideremos $v_\beta(\cdot) := \beta^{\frac{d}{2}} v(\beta \cdot)$. Da *Etapa 2* temos que $P(v) < 0$, então pelo Lema 2.19 existe $\beta_0 < 1$ tal que

$$P(v_{\beta_0}) = 0.$$

Se $I\left(v_{\beta_0}\right) \leq 0$, mantemos β_0. Caso contrário, o substituímos por $\overline{\beta}_0 \in (\beta_0, 1)$ de forma que

$$I(v_{\overline{\beta}_0}) = 0.$$

Em ambos os casos segue que

$$S(v_{\beta_0}) \geq d(\omega), \tag{2.100}$$

e $P(v_{\beta_0}) \leq 0$. Agora, do Lema 2.19 item (v), obtemos

$$S(v) - S((v_{\beta_0}) \geq (1 - \beta_0) \frac{\partial}{\partial \beta} S(v_\beta)\Big|_{\beta=1}.$$

Então, do item (iii), (2.19), $M(v) < 0$ e $\beta_0 < 1$ temos

$$S(v) - S(v_{\beta_0}) \geq P(v).$$

Combinando a desigualdade acima com (2.100), obtemos

$$P(v) \leq S(v) - d(\omega). \tag{2.101}$$

Considere então $-\delta := S(v) - d(\omega)$. Temos que $\delta < 0$ independe da escolha de t, desde que o funcional S é uma quantidade conservada. Para concluirmos, observe que da identidade virial (2.86) e de (2.101) temos que

$$\|xu(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq -\delta t^2 + Ct + \|xu_\lambda\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \tag{2.102}$$

e como o lado direito de (2.102) se torna negativo quando t é suficientemente grande, temos que $T_{u_\lambda} < +\infty$ e além disso

$$\lim_{t\to T_{u_\lambda}} \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} = +\infty$$

conforme queriamos demonstrar. □

É importante notarmos que quando a não linearidade é ainda mais geral, pode não ser possível fazer uso de uma identidade virial para obter resultados de instabilidade. Nesses casos, uma boa alternativa para provar a instabilidade seria seguir o método introduzido por (SHATAH; STRAUSS, 1985) e depois desenvolvido em (GRILLAKIS; SHATAH; STRAUSS, 1987) e (GRILLAKIS; SHATAH; STRAUSS, 1990). É importante observarmos também que provar a instabilidade por esses métodos não fornece informações sobre o comportamento a longo prazo (explosão ou existência global) de soluções que começam próximas de uma onda estacionaria.

Além disso, vale ressaltar também que o tipo de método utilizado aqui para provar a instabilidade de ondas estacionarias por explosão em tempo finito não se restringe somente às equações de Schrödinger. É possível usar tais métodos para obter resultados sobre a instabilidade por explosão para as ondas viajantes associadas as equações não-lineares de Klein-Gordon, para mais informações veja (OHTA; TODOROVA, 2005) e (OHTA; TODOROVA, 2007).

3

Formulação Hamiltoniana Abstrata

O principio fundamental da dinâmica, popularmente conhecida como segunda lei de Newton, dá origem a sistemas de equações diferenciais de segunda ordem em $\mathbb{R}^d$ e portanto, a menos de uma mudança de coordenadas, a um sistema de equações de primeira ordem em $\mathbb{R}^{2d}$. Se as forças do sistema são derivadas de uma função potencial, as equações de movimento do sistema mecânico têm muitas propriedades especiais, muitos dos quais decorrem do fato de que as equações de movimento podem ser escritas como um sistema Hamiltoniano. O formalismo hamiltoniano é a estrutura matemática natural na qual se desenvolve a teoria de sistemas mecânicos conservativos.

A teoria clássica nos diz que um *Sistema Hamiltoniano* é um sistema com $2d$ equações diferenciais ordinárias da forma

$$\begin{cases} q'(t) = H_p(t, q, p), \\ p'(t) = -H_q(t, q, p), \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $H : U \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave em um aberto $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. A função $H(t, q, p)$ é chamada *Hamiltoniana* do sistema (3.1). Os vetores $q = (q_1, ..., q_d)$ e $p = (p_1, ..., p_d)$ são tradicionalmente chamados de posição e momento respectivamente.

Um ponto fundamental na teoria dos sistemas Hamiltonianos é notar que as equações (3.1) podem ser escritas na forma

$$\mathbf{z}' = J\nabla H(t, \mathbf{z}), \tag{3.2}$$

com $\mathbf{z} = (q, p)$, $\nabla H = (H_{z_1}, ..., H_{z_{2d}})$ e J é uma matriz quadrada, antissimétrica, de ordem $2d$ sendo definida como

$$J = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & I \\ -I & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

onde I e $\mathbf{0}$ são respectivamente a matriz identidade e a matriz nula, ambas de ordem d.

A teoria de sistemas Hamiltonianos é vastamente estudada em diversos pontos de vista, principalmente do ponto de vista da teoria de sistemas dinâmicos (ver (MEYER; OFFIN, 2017), (MACKAY; MEISS, 2020) e suas referências). O objetivo desse capítulo é tentar se desprender das amarras impostas pela dimensão finita, afim de tentar estender a teoria e assim incluir modelos mais gerais que aqueles dados através das equações diferenciais ordinárias.

3.1 Formulação do Problema Abstrato

As principais ideias apresentadas nesse capítulo foram inicialmente desenvolvidas por em (MAEDA, 2010) e mais tarde generalizadas por (OHTA, 2011).

Assim como em (GRILLAKIS; SHATAH; STRAUSS, 1987), comecemos considerando X e H dois espaços de Hilbert reais de modo que

$$X \hookrightarrow H \text{ e } H^* \hookrightarrow X^*$$

onde os mergulhos são densos e contínuos. Identificaremos H com seu respectivo dual H^* pelo isomorfismo natural $I : H \longrightarrow H^*$ dado por

$$\langle Iu, v \rangle = (u, v)_H, \quad u, v \in H.$$

Definiremos o operador $R : X \longrightarrow X^*$ é de maneira análoga como sendo

$$\langle Ru, v \rangle := (u, v)_X, \ \text{ onde } u, v \in X.$$

Agora consideremos $J \in \mathcal{L}(X)$, bijetivo e antissimétrico no sentido que

$$(Ju, v)_X = -(u, Jv)_X \ \text{ e } \ (Ju, v)_H = -(u, Jv)_H, \tag{3.3}$$

para quaisquer que sejam $u, v \in X$. Podemos naturalmente estender J a um operador $\tilde{J} : X^* \longrightarrow X^*$ definido por

$$\langle \tilde{J} f, u \rangle = -\langle f, Ju \rangle, \ u \in X \text{ e } f \in X^*.$$

Seja $\{\mathcal{T}(s)\}_{s \in \mathbb{R}}$ o grupo a um parâmetro de operadores unitários sobre X gerado por J. Isso é

$$\mathcal{T}(s) := e^{sJ} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(sJ)^n}{n!}.$$

Por (3.3), temos que

$$\|\mathcal{T}(s)u\|_X = \|u\|_X, \quad \|\mathcal{T}(s)u\|_H = \|u\|_H,$$

com $s \in \mathbb{R}$ e $u \in X$. Assumiremos no decorrer desse capítulo que $\mathcal{T}$ é periódico em s, com período igual 2π. A família $\{\mathcal{T}(s)\}_{s \in \mathbb{R}}$ é naturalmente estendida um grupo, a um parâmetro, de operadores unitários $\{\tilde{\mathcal{T}}(s)\}_{s \in \mathbb{R}}$ sobre o dual X^*, onde para cada $s \in \mathbb{R}$

$$\langle \tilde{\mathcal{T}}(s) f, u \rangle := \langle f, \mathcal{T}(-s)u \rangle, \ u \in X, \text{ e } f \in X^*. \tag{3.4}$$

Desse modo, seja $\mathcal{H} \in C^2(X, \mathbb{R})$. Consideremos o *sistema hamiltoniano abstrato*

$$\frac{d}{dt}u(t) = \tilde{J}\mathcal{H}'(u(t)). \tag{3.5}$$

É importante enfatizarmos que as hipóteses sobre o operador J acabam por excluir equações do tipo *KdV* do nosso contexto. Lembrando que a equação de Korteweg-de Vries generalizada (gKdV) é dada por

$$u_t + u_{xxx} + (u^p)_x = 0$$

onde $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $p > 2$. Note que a equação *gKdV* pode ser escrita na forma (3.5), com $X = H^1(\mathbb{R})$, $H = L^2(\mathbb{R})$ e

$$\mathcal{H}(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |u_x|^2\, dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}} |u|^{p+1}\, dx, \;\; u \in H^1(\mathbb{R}),$$

e seu operador J associado é *operador de derivação*, isto é

$$J = \frac{\partial}{\partial x},$$

o qual não é sobrejetivo. Mesmo excluindo tais casos, esse capitulo há de tratar de modelos bastante interessantes a qual será enfatizado posteriormente.

Prosseguindo, diremos que $u(t)$ *é uma solução de* (3.5) *em um intervalo* $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ se

- $u \in C(\mathcal{I}, X) \cap C^1(\mathcal{I}, X^*)$.
- u satisfaz (3.5) em X^* para todo $t \in \mathcal{I}$.

O intervalo $\mathcal{I}$ será chamado de *intervalo de solução* e o funcional $\mathcal{H} : X \longrightarrow \mathbb{R}$ será chamado de *Funcional de Energia* do sistema. Daqui em diante assumiremos que $\mathcal{H}$ é invariante sobre o fluxo $\mathcal{T}$, isso é, $\mathcal{H}(\mathcal{T}(s)u) = \mathcal{H}(u)$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e $u \in X$, então

$$\mathcal{H}'(\mathcal{T}(s)u) = \tilde{\mathcal{T}}(s)\mathcal{H}'(u), \quad s \in \mathbb{R},\; u \in X. \tag{3.6}$$

Definimos agora o *funcional de massa* $Q : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$Q(u) = \frac{1}{2}\|u\|_H^2, \quad u \in X.$$

Temos que $Q'(u) = Iu$, com $u \in X$. Além disso

$$Q(\mathcal{T}(s)u) = \frac{1}{2}\|\mathcal{T}(s)u\|_H^2 = \frac{1}{2}\|u\|_H^2 = Q(u) \;\text{ e }\; Q'(\mathcal{T}(s)u) = \tilde{\mathcal{T}}(s)Q'(u), \tag{3.7}$$

com $s \in \mathbb{R}$ e $u \in X$. Iremos assumir que o problema de Cauchy associado a (3.5) é *localmente bem posto* no seguinte sentido: Para cada $u_0 \in X$ com $\|u_0\|_X < K$, existe $t_0 = t_0(K) > 0$ e uma única solução $u(t)$ de (3.5) com intervalo de $\mathcal{I} = [0, t_0)$ tal que

(i) $u(0) = u_0$,

(ii) $\mathcal{H}(u(t)) = \mathcal{H}(u_0)$,

(iii) $Q(u(t)) = Q(u_0)$,

para todo $t \in \mathcal{I}$. Diremos que uma solução $u(t)$ da equação de evolução (3.5) é um *bound state* se é da forma $u(t) = \mathcal{T}(\omega t)\phi$, onde $\omega \in \mathbb{R}$ e $\phi \in X$ satisfaz

$$\mathcal{H}'(\phi) = \omega Q'(\phi).$$

A seguir daremos uma definição precisa do que vem a ser uma solução do tipo *bound state* ser estável.

Definição 3.1. *Uma solução bound state $\mathcal{T}(\omega t)\phi$ de (3.5) é dita ser orbitalmente estável se para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ com a seguinte propriedade: Se $u_0 \in X$ satisfaz*

$$\|u_0 - \phi\|_X < \delta,$$

então a solução $u(t)$ de (3.5), com $u(0) = u_0$ existe para todo $t \in [0, +\infty)$ e temos também que $u(t) \in \mathcal{N}_\varepsilon(\phi)$ para todo $t \geq 0$ onde

$$\mathcal{N}_\varepsilon(\phi) = \left\{ u \in X : \inf_{s \in \mathbb{R}} \|u - \mathcal{T}(s)\phi\|_X < \varepsilon \right\}.$$

Caso contrário $\mathcal{T}(\omega t)\phi$ é dita ser orbitalmente instável.

Como foi dito anteriormente, apesar de parecerem puramente abstratos, os conceitos aqui apresentados descrevem modelos concretos e de extrema relevância. Por exemplo, considerando $X = H^1(\mathbb{R}^d)$, $H = L^2(\mathbb{R}^d)$ com seus respectivos produtos internos usuais e os funcionais

$$\begin{aligned}
J(u) &:= iu,\\
\mathcal{H}(u) &:= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2\, dx - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^d} |u|^{p+1}\, dx,\\
Q(u) &:= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |u|^2\, dx.
\end{aligned}$$

Temos que o sistema hamiltoniano (3.5) se reduz a equação

$$u_t = i\Delta u + i|u|^{p-1}u, \tag{3.8}$$

ou seja, temos a equação de Schrödinger não linear, a qual foi tratada em seções anteriores. Note que neste caso, $\mathcal{T}(s) = e^{is}$ com $s \in \mathbb{R}$, é o grupo unitário associado e assim dado $\omega \in \mathbb{R}$, um *bound state* para (3.8) é uma solução da forma $u(x,t) = e^{i\omega t}\varphi_\omega$, onde $\varphi_\omega \in H^1(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$ satisfaz a equação elíptica

$$-\Delta\varphi_\omega - |\varphi_\omega|^{p-1}u = \omega\varphi_\omega.$$

Com isso, vamos dizer que um *bound state* $u(x,t) = e^{i\omega t}\varphi_\omega$ de (3.8) é estável se para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de forma que para todo $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ satisfazendo

$$\|u_0 - \varphi_\omega\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} < \delta$$

tem-se que a solução $u(t)$ de (3.8) com dado inicial $u(0) = u_0$ existe globalmente e

$$\inf_{s\in\mathbb{R}} \|u(t) - e^{is}\varphi_\omega\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon, \quad \forall\, t \geq 0,$$

em outras palavras

$$\sup_{t\in(0,+\infty)} \inf_{s\in\mathbb{R}} \|u(t) - e^{is}\varphi_\omega\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon.$$

Esse capítulo tem como objetivo principal dissertar sobre resultados acerca da instabilidade de *bound states* para a equação (3.5). Para isso precisamos fazer algumas considerações fundamentais. Assim, dado $\omega \in \mathbb{R}$ definamos o funcional $S_\omega : X \longrightarrow \mathbb{R}$ como sendo

$$S_\omega(u) := \mathcal{H}(u) - \omega Q(u), \;\; u \in X.$$

Para trabalharmos de maneira consistente, assumiremos as seguintes condições

(A_1) Existe $\omega \in \mathbb{R}$ e $\phi_\omega \in X$ tal que

$$S'_\omega(\phi_\omega) = 0, \quad \phi_\omega \neq 0.$$

Além disso

$$R\phi_\omega \in I(X).$$

(A_2) Existe $\psi \in X$ tal que

- $\|\psi\|_H = 1$;
- $(J\phi_\omega, \psi)_H = (\phi_\omega, \psi)_H = 0$;
- $\langle S''_\omega(\phi_\omega)\psi, \psi\rangle < 0$.

(A_3) Considere $\mathcal{H} \in C^3(X, \mathbb{R})$. Então existem $\psi \in X$ e $\mu \in \mathbb{R}$ tais que

- $\|\psi\|_H = 1$;
- $(\phi_\omega, \psi)_H = (J\phi_\omega, \psi)_H = (J\phi_\omega, \psi)_X = 0$.

Além disso

$$S''_\omega(\phi_\omega)\psi = \mu Q'(\phi_\omega) \;\text{ e }\; \langle S'''_\omega(\phi_\omega)(\psi,\psi),\psi\rangle \neq 3\mu. \tag{3.9}$$

(A_4) Existe uma constante $k_0 > 0$ tal que

$$\langle S''_\omega(\phi_\omega)w, w\rangle > k_0\|w\|_X^2, \tag{3.10}$$

para todo $w \in X$ satisfazendo

$$(\phi_\omega, w)_H = (J\phi_\omega, w)_H = (\psi, w)_H = 0.$$

Perceba que (A_1) nos garante a existência de *bound states* para a equação (3.5). Já a condição (A_2) nos diz garante a existência de pelo menos um autovalor negativo próprio para $S''_\omega(\phi_\omega)$. Observe que por (3.6) e (3.7), obtemos que

$$S'_\omega(\mathcal{T}(s)\phi_\omega) = 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

e também que $S''_\omega(\phi_\omega)(J\phi_\omega) = 0$. Perceba também que (A_3) nos fornece $\langle S''_\omega(\phi_\omega)\psi, \psi\rangle = \mu(\phi_\omega, \psi)_H = 0$. Além disso

$$\langle S''_\omega(\phi_\omega)\psi, w\rangle = 0,$$

para todo $w \in X$ satisfazendo $(w, \phi_\omega)_H = 0$. Já a condição (A_4) nos diz sobre a coercividade de $\langle S''_\omega(\phi_\omega)w, w\rangle$ em certas direções.

Esse capítulo tem como objetivo principal dissertar sobre os seguintes resultados.

Teorema. Assuma que são válidas as condições (A_1), (A_2) e (A_4). Então o *bound state* $\mathcal{T}(\omega t)\phi_\omega$ é orbitalmente instável.

Teorema. Assuma que são válidas as condições (A_1), (A_3) e (A_4). Então o *bound state* $\mathcal{T}(\omega t)\phi_\omega$ é orbitalmente instável.

Enunciaremos agora lemas auxiliares que nos ajudarão na demonstração de tais teoremas.

Lema 3.1. *Existe $\varepsilon > 0$ e uma aplicação $\theta : \mathcal{N}_\varepsilon(\phi_\omega) \longrightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ de classe C^2, de tal forma que para qualquer $u \in \mathcal{N}_\varepsilon(\phi_\omega)$ e $s \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$,*

- $\|\mathcal{T}(\theta(u))u - \phi_\omega\|_X \leq \|\mathcal{T}(s)u - \varphi_\omega\|_X$
- $(\mathcal{T}(\theta(u))u, J\varphi_\omega)_X = 0$
- $\theta(\mathcal{T}(s)u) = \theta(u) - s.$

Além disso

$$\theta'(u) = \frac{R\mathcal{T}(-\theta(u))J\varphi_\omega}{\left(J^2\varphi_\omega, \mathcal{T}(\theta(u))u\right)_X} \in I(X). \tag{3.11}$$

Demonstração: Primeiramente é importante observar que o Lema 2.2 é uma caso particular do Lema 3.1. Assim uma demonstração particular pode ser encontrada neste. Para uma demonstração geral veja (GRILLAKIS; SHATAH; STRAUSS, 1987), página 169, Lemma 3.2. □

Para $u \in \mathcal{N}_\varepsilon(\varphi)$, definamos $M(u) := \mathcal{T}(\theta(u))u$. Consideremos também

$$A(u) := (M(u), J^{-1}\psi)_H, \quad \Lambda(u) := (M(u), \psi)_H. \tag{3.12}$$

Assim, obtemos

$$\langle A'(u), v\rangle = (\mathcal{T}(\theta(u))v, J^{-1}\psi)_H - \Lambda(u)\langle\theta'(u), v\rangle, \quad v \in X.$$

Pelo Lema 3.1, vemos que $A'(u) \in I(X)$ e

$$JI^{-1}A'(u) = \mathcal{T}(-\theta(u))\psi - \Lambda(u)JI^{-1}\theta'(u), \tag{3.13}$$

para $u \in \mathcal{N}_\varepsilon(\phi_\omega)$. Além disso, como A é invariante sobre $\mathcal{T}$, temos

$$0 = \frac{d}{ds}A(\mathcal{T}(s)u)_{|_{s=0}} = \langle A'(u), Ju\rangle = -\langle Q'(u), JI^{-1}A'(u)\rangle. \tag{3.14}$$

Definimos o funcional $P : \mathcal{N}_\varepsilon(\phi_\omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$P(u) := \langle \mathcal{H}'(u), JI^{-1}A'(u)\rangle.$$

Note que por (3.14) temos $P(u) = \langle S'_\omega(u), JI^{-1}A'(u)\rangle$. Além do mais, por (3.4), (3.6), (3.7), (3.11) e (3.13) obtemos

$$P(u) = \langle S'_\omega(M(u)), \psi\rangle - \Lambda(u)\frac{\langle S'_\omega(M(u)), JI^{-1}RJ\phi_\omega\rangle}{(M(u), J^2\phi_\omega)_X}. \tag{3.15}$$

Lema 3.2. *Seja $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$. Seja $u \in C(\mathcal{I}, X) \cap C^1(\mathcal{I}, X^*)$ uma solução de (3.5) e assuma que $u(t) \in \mathcal{N}_\varepsilon(\phi_\omega)$ para todo $t \in \mathcal{I}$. Então $u(t)$ satisfaz a equação*

$$\frac{d}{dt}A(u(t)) = -P(u(t))$$

para todo $t \in \mathcal{I}$.

Demonstração: Por (GRILLAKIS; SHATAH; STRAUSS, 1987), página 178, Lemma 4.6 temos que a aplicação

$$t \longmapsto A(u(t)),$$

é de classe C^1 sobre $\mathcal{I}$ e além disso

$$\frac{d}{dt}A(u(t)) = \langle u_t(t), I^{-1}A'(u(t))\rangle, \quad \forall t \in \mathcal{I}.$$

Como $u(t)$ é solução de (3.5), temos

$$\begin{aligned}\langle u_t(t), I^{-1}A'(u(t))\rangle &= \langle \tilde{J}\mathcal{H}'(u(t)), I^{-1}A'(u(t))\rangle \\ &= -\langle \mathcal{H}'(u(t)), JI^{-1}A'(u(t))\rangle \\ &= -P(u(t)),\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathcal{I}$, conforme queríamos demonstrar. □

3.2 Sobre a Instabilidade de Bound States

Baseados no que vimos anteriormente, esta seção tem como objetivo discutir sobre os resultados acerca da instabilidade de *bound states*, a lembrar.

Teorema 3.1. *Assuma que são válidas as condições $(A_1), (A_2)$ e (A_4). Então o bound state $\mathcal{T}(\omega t)\phi_\omega$ é orbitalmente instável.*

Temos que a condição (A_4) no Teorema 3.1 é ótima no seguinte sentido. Considere a equação de Schrödinger linear sobre o intervalo $(0, \pi)$ com condição de fronteira de Dirichlet

$$\begin{cases} iu_t - u_{xx} = 0, & t \in \mathbb{R}, x \in (0, \pi), \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0, & t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.16}$$

Considere também os espaços de Hibert reais $H = L^2(0, \pi)$ e $X = H^1_0(0, \pi)$, com seus respectivos produtos internos usuais. Defina

$$\mathcal{H}(u) = \frac{1}{2}\|u_x\|^2_H \quad \text{e} \quad J(u) = iu, \quad \text{com } u \in X.$$

Desse modo, se tomarmos $u : \mathbb{R} \longrightarrow X$ como sendo $u(t)x := u(t, x)$ a equação (3.16) pode ser escrita como sendo

$$\frac{du}{dt}(t) = \tilde{J}\mathcal{H}'(u(t)). \tag{3.17}$$

O grupo a um parâmetro $\{\mathcal{T}(s)\}_{s\in\mathbb{R}}$ é dado por

$$\mathcal{T}(s)u = e^{is}u, \quad u \in X.$$

Sabemos que para cada $u_0 \in X$, a solução $u(t)$ de (3.17) com $u(0) = u_0$ é expressada em serie de Fourier como sendo

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathcal{T}(n^2 t)\varphi_n, \quad \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx), \quad a_n = \int_0^\pi u_0(x)\varphi_n(x)dx.$$

Temos que para cada $n \in \mathbb{N}$, o *bound state* $\mathcal{T}(n^2 t)\varphi_n$ é estável no sentido que definimos anteriormente. Perceba, que em particular, se considerarmos $n = 2$ e colocando $\omega = n^2 = 4$, $\phi_\omega = \varphi_2$ e $\psi = \varphi_1$. Então, temos que as condições (A_1) e (A_2) são satisfeitas. De fato, perceba que

$$S_\omega(u) = \frac{1}{2}\|u_x\|^2_{L^2(0,\pi)} - \frac{\omega}{2}\|u\|^2_{L^2(0,\pi)} = \frac{1}{2}\int_0^\pi |u_x|^2\, dx - 2\int_0^\pi |u|^2\, dx$$

com $u \in H^1_0(0, \pi)$. Daí

$$\begin{aligned} \langle S'_\omega(u), v\rangle &= \int_0^\pi u_x v_x\, dx - 4\int_0^\pi uv\, dx \\ &= \int_0^\pi -u_{xx} v\, dx - 4\int_0^\pi uv\, dx \\ &= \int_0^\pi (-u_{xx} - 4u)v\, dx. \end{aligned}$$

logo

$$S'_\omega(u) = -u_{xx} - 4u.$$

Com isso

$$
\begin{aligned}
S'_\omega(\phi_\omega) = S'_\omega(\varphi_2) &= -\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2x)\right)_{xx} - 4\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2x) \\
&= -(-4)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2x) - 4\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2x) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Temos também que

$$
\begin{aligned}
\|\psi\|_H^2 = \|\psi\|^2_{L^2(0,\pi)} &= \int_0^\pi |\psi|^2\, dx \\
&= \int_0^\pi \left|\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(x)\right|^2 dx \\
&= \int_0^\pi \frac{2}{\pi}\sin^2(x)\, dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin^2(x)\, dx \\
&= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} \\
&= 1,
\end{aligned}
$$

além de

$$
(\phi_\omega,\psi)_H = (\phi_\omega,\psi)_{L^2(0,\pi)} = \int_0^\pi \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(2x)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(x)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(2x)\sin(x)\, dx = 0.
$$

e $\langle S''_\omega(\phi_\omega)\psi,\psi\rangle < 0$. Por outro lado, sempre que $w \in X$ satisfaz

$$
(\phi_\omega, w)_H = (J\phi_\omega, w)_H = (\psi, w)_H = (J\psi, w)_H = 0
$$

a desigualdade (3.10) ocorre, porém não temos a condição (A_4). Assim temos que a condição (A_4) no Teorema 3.1 é de fato necessária.

Vamos iniciar os preparativos para a prova do Teorema 3.1. Para isso considere o conjunto

$$
W = \{w \in X : (\phi_\omega, w)_H = (J\phi_\omega, w)_H = (\psi, w) = 0\}. \tag{3.18}
$$

Inicialmente faremos dois lemas auxiliares que nos ajudarão futuramente em tal demonstração.

Lema 3.3. *Suponha que as condições $(A_1), (A_2)$ e (A_4) sejam válidas. Então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que*

$$
\mathcal{H}(u) \geq \mathcal{H}(\phi_\omega) + \Lambda(u)P(u),
$$

para todo $u \in \mathcal{N}_{\varepsilon_0}(\phi_\omega)$ satisfazendo $Q(u) = Q(\phi_\omega)$.

Demonstração: Defina $v := M(u) - \phi_\omega$ e o decompanha como sendo

$$v = a\phi_\omega + bJ\phi_\omega + c\psi + w,$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $w \in W$. Note que $\|v\|_X < \varepsilon_0$ e como

$$Q(\phi_\omega) = Q(u) = Q(M(u)) = Q(\phi_\omega) + (\phi_\omega, v)_H + Q(v),$$

segue que

$$(\phi_\omega, v)_H = a\|\phi_\omega\|_H^2 = -Q(v).$$

Em particular, $a = O(\|v\|_X^2)$. Além disso, por (3.3) e pelo Lema 3.1, temos que $(\phi_\omega, J\phi_\omega)_X = (M(u), J\phi_\omega)_X = 0$ e portanto,

$$0 = (v, J\phi_\omega)_X = b\|J\phi_\omega\|_X^2 + (w, J\phi_\omega)_X,$$

$\|bJ\phi_\omega\|_X \leq \|c\psi\|_X + \|w\|_X$ e

$$2|c|\|\psi\|_X + 2\|w\|_X \geq \|v\|_X - O(\|v\|_X^2). \tag{3.19}$$

Desde que $S'_\omega(\phi_\omega) = 0$ e $Q(u) = Q(\phi_\omega)$, pelo Teorema de Taylor para espaços de Banach (veja (CHANG, 2005), página 10, Theorem 1.1.10) temos que

$$\mathcal{H}(u) - \mathcal{H}(\phi_\omega) = S_\omega(M(u)) - S_\omega(\phi_\omega) = \frac{1}{2}\langle S''_\omega(\phi_\omega)v, v\rangle + o(\|v\|_X^2) \tag{3.20}$$

Como, $a = O(\|v\|_X^2)$ e $S''_\omega(\phi_\omega)(J\phi_\omega) = 0$, temos que

$$\begin{aligned}\langle S''_\omega(\phi_\omega)v, v\rangle &= \langle S''_\omega(\phi_\omega)(c\psi + w), c\psi + w\rangle + o(\|v\|_X^2)\\ &= c^2\langle S''_\omega(\phi_\omega)\psi, \psi\rangle + 2c\langle S''_\omega(\phi_\omega)\psi, w\rangle + \langle S''_\omega(\phi_\omega)w, w\rangle + o(\|v\|_X^2).\end{aligned} \tag{3.21}$$

Por outro lado, temos que

$$c = (v, \psi)_H = \Lambda(u) = O(\|v\|_X),$$

e também

$$\begin{aligned}&S'_\omega(\phi_\omega + v) = S'_\omega(\phi_\omega) + S''_\omega(\phi_\omega)v + o(\|v\|_X) = S''_\omega(\phi_\omega)v + o(\|v\|_X),\\ &(M(u), J^2\phi_\omega)_X = (\phi_\omega + v, J^2\phi_\omega)_X = -\|J\phi_\omega\|_X^2 + O(\|v\|_X).\end{aligned}$$

Portanto, por (2.71), temos

$$\begin{aligned}\Lambda(u)P(u) &= c\langle S''_\omega(\phi_\omega)v, \psi\rangle + o(\|v\|_X^2)\\ &= c^2\langle S''_\omega(\phi_\omega)\psi, \psi\rangle + \frac{1}{2}\langle S''_\omega(\phi_\omega)w, w\rangle + o(\|v\|_X^2)\end{aligned} \tag{3.22}$$

Por (3.20), (3.21) e (3.22), obtemos

$$\mathcal{H}(u) - \mathcal{H}(\phi_\omega) - \Lambda(u)P(u) = -\frac{c^2}{2}\langle S''_\omega(\phi_\omega) + \frac{1}{2}\langle S''_\omega(\phi_\omega)w, w\rangle + o(\|v\|_X^2). \tag{3.23}$$

Desse modo, pelas condições (A_2) e (A_4), existe uma constante positiva $\kappa > 0$ tal que

$$-\frac{c^2}{2}\langle S''_\omega(\phi_\omega)\psi,\psi\rangle + \frac{1}{2}\langle S''_\omega(\phi_\omega)w,w\rangle \geq \kappa(c^2 + \|w\|_X^2).$$

Além disso, como $\|v\|_X = \|M(u) - \phi_\omega\|_X < \varepsilon_0$, segue de (3.19) que o lado direito de (3.23) é não negativo para ε_0 suficientemente pequeno, completando assim o resultado. □

Lema 3.4. *Existe $\lambda_1 > 0$ e uma aplicação suave $\varphi : (-\lambda_1, \lambda_1) \longrightarrow X$ com $\varphi(\lambda) := \varphi_\lambda$ tal que*

$$\varphi(0) = \varphi_0 = \phi_\omega,$$

e além disso

$$\mathcal{H}(\varphi_\lambda) < \mathcal{H}(\phi_\omega), \quad Q(\varphi_\lambda) = Q(\phi_\omega), \quad \lambda P(\varphi_\lambda) < 0$$

sempre que $0 < |\lambda| < \lambda_1$.

Demonstração: Para λ suficientemente próximo de zero, defina

$$\varphi(\lambda) = \varphi_\lambda := \phi_\omega + \lambda\psi + \eta(\lambda)\phi_\omega, \text{ onde } \eta(\lambda) = \left(1 - \frac{Q(\psi)}{Q(\phi_\omega)}\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}} - 1.$$

Então, temos que $Q(\varphi_\lambda) = Q(\phi_\omega)$, $\eta(\lambda) = O(\lambda^2)$ e pelo Teorema de Taylor para espaços de Banach (veja (CHANG, 2005), página 10, Theorem 1.1.10)

$$S_\omega(\varphi_\lambda) = S_\omega(\phi_\omega) + \frac{\lambda^2}{2}\langle S''_\omega(\phi_\omega)\psi,\psi\rangle + o(\lambda^2), \quad S'_\omega(\varphi_\lambda) = \lambda S''_\omega(\phi_\omega)\psi + o(\lambda)$$

dai

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(\varphi_\lambda) - \mathcal{H}(\phi_\omega) &= S_\omega(\varphi_\lambda) + \omega Q(\varphi_\lambda) - (S_\omega(\phi_\omega) - \omega Q(\phi_\omega))\\
&= S_\omega(\varphi_\lambda) + \omega Q(\varphi_\lambda) - (S_\omega(\phi_\omega) - \omega Q(\varphi_\lambda))\\
&= S_\omega(\varphi_\lambda) - S_\omega(\phi_\omega)\\
&= \left(S_\omega(\phi_\omega) + \frac{\lambda^2}{2}\langle S''_\omega(\phi_\omega)\psi,\psi\rangle + o(\lambda^2)\right) - S_\omega(\phi_\omega)\\
&= \frac{\lambda^2}{2}\langle S''_\omega(\phi_\omega)\psi,\psi\rangle + o(\lambda^2)\\
&< 0,
\end{aligned}$$

para $|\lambda|$ suficientemente pequeno. Além disso

$$P(\varphi_\lambda) = \lambda\langle S''_\omega(\phi_\omega)\psi,\psi\rangle + o(\lambda)$$

dai

$$\lambda P(\varphi_\lambda) = \lambda^2\langle S''_\omega(\phi_\omega)\psi,\psi\rangle + o(\lambda^2) < 0,$$

com $|\lambda|$ suficientemente próximo de 0, o que completa a prova. □

Agora estamos prontos para demonstrar o Teorema 3.1.

Demonstração do Teorema 3.1: Começamos supondo por contradição que $\mathcal{T}(\omega t)\varphi_\omega$ é estável. Para λ suficientemente próximo de 0, seja φ_λ dado pelo Lema 3.4 e consideremos $u_\lambda(t)$ solução de (3.5) com $u_\lambda(0) = \varphi_\lambda$. Sabemos então que existe $\lambda_0 > 0$ tal que se

$$|\lambda| < \lambda_0,$$

então

$$u_\lambda(t) \in \mathcal{N}_{\varepsilon_0}(\phi_\omega), \quad \forall t \geq 0$$

onde ε_0 é a constante positiva dado pelo Lema 3.3. Além disso, pela definição (3.12), existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$|A(v)| \leq C_1 \text{ e } |\Lambda(v)| \leq C_2$$

para todo $v \in \mathcal{N}_{\varepsilon_0}(\phi_\omega)$. Consideremos agora $\lambda \in (0, \lambda_0)$ e $\delta_\lambda = \mathcal{H}(\phi_\omega) - \mathcal{H}(\varphi_\lambda) > 0$. Como $P(\varphi_\lambda) < 0$ e a aplicação $t \mapsto P(u_\lambda(t))$ é contínua. Temos assim pelo Lema 3.3 e pela propriedade de conservação de $\mathcal{H}$ e Q, vemos que

$$P(u_\lambda(t)) < 0, \quad \forall t \geq 0.$$

e que

$$\delta_\lambda = \mathcal{H}(\varphi_\omega) - \mathcal{H}(u_\lambda(t)) \leq -\Lambda(u_\lambda(t))P(u_\lambda(t)) \leq -C_2 P(u_\lambda(t))$$

para qualquer que seja $t \geq 0$. Além disso, pelo Lema 3.2, temos que

$$\frac{d}{dt}A(u_\lambda(t)) = -P(u_\lambda(t)) \geq \frac{\delta_\lambda}{C_2}$$

para todo $t \geq 0$, implicando assim que

$$A(u_\lambda(t)) \longrightarrow +\infty \text{ , se } t \to +\infty.$$

Ora, mas isso contradiz o fato de que $|A(u_\lambda(t))| \leq C_1$, para qualquer $t \geq 0$. Portanto, devemos ter que $\mathcal{T}(\omega t)\phi_\omega$ é instável, conforme queríamos demonstrar. □

O próximo resultado fundamental sobre a instabilidade de *bound states* é o que segue.

Teorema 3.2. *Assuma que são válidas as condições* $(A_1), (A_3)$ *e* (A_4). *Então o Bound State* $\mathcal{T}(\omega t)\phi_\omega$ *é orbitalmente instável.*

Assim como fizemos anteriormente, vamos exibir alguns resultado preliminares que nos auxiliarão na prova do Teorema 3.2. Primeiramente, considere

$$\nu := 3\mu - \left\langle S'''_\omega(\phi_\omega)(\psi, \psi), \psi \right\rangle . \tag{3.24}$$

Perceba que por (3.9) temos $\nu \neq 0$. Começamos fazendo adaptações dos Lemas 3.3 e 3.4 respectivamente.

Lema 3.5. *Existem constantes positivas ε_0 e k^* tal que*

$$\mathcal{H}(u) \geq \mathcal{H}(\phi_\omega) + \frac{\nu}{|\nu|} k^* P(u)$$

para $u \in \mathcal{N}_{\varepsilon_0}(\phi_\omega)$ satisfaz $Q(u) = Q(\phi_\omega)$.

Demonstração: Defina $v := M(u) - \phi_\omega$ e o decomponha como sendo

$$v = a\phi_\omega + bJ\phi_\omega + c\psi + w,$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $w \in W$, onde W é definido em (3.18). Note que $\|v\|_X < \varepsilon_0$ e como

$$Q(\phi_\omega) = Q(u) = Q(M(u)) = Q(\phi_\omega) + (\phi_\omega, v)_H + Q(v),$$

segue que

$$(\phi_\omega, v)_H = a\|\phi_\omega\|_H^2 = -Q(v).$$

Além disso, por (3.3) e pelo Lema 3.1, temos que

$$(\phi_\omega, J\phi_\omega)_X = (\psi, J\phi_\omega)_X = (M(u), J\phi_\omega)_X = 0.$$

Portanto

$$0 = (v, J\phi_\omega)_X = b\|J\phi_\omega\|_X^2 + (w, J\phi_\omega)_X,$$

e além disso

$$\|bJ\phi_\omega\|_X \leq \|\omega\|_X, \quad |c|\|\psi\|_X + 2\|w\|_X \geq \|v\|_X - O(\|v\|_X^2). \tag{3.25}$$

Seguindo de maneira similar a que fizemos anteriormente, obtemos a expressão (3.20). Pelas considerações feitas anteriormente temos

$$\begin{aligned} \langle S''_\omega(\phi_\omega)v, v\rangle &= c^2\langle S''_\omega(\phi_\omega)\psi, \psi\rangle + 2c\langle S''_\omega(\phi_\omega)\psi, w\rangle + \langle S_\omega(\phi_\omega)w, w\rangle + o\left(\|v\|_X^2\right) \\ &= \langle S''_\omega(\phi_\omega)w, w\rangle + o\left(\|v\|_X^2\right). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Por (3.20), (3.26) e a condição **(A3)**, obtemos

$$\mathcal{H}(u) - \mathcal{H}(\phi_\omega) = \frac{1}{2}\langle S''_\omega(\phi_\omega)w, w\rangle + o(\|v\|_X^2) \geq \frac{k_0}{2}\|w\|_X^2 - o(\|v\|_X^2). \tag{3.27}$$

Por outro lado, temos que

$$c = (v, \psi)_H = \Lambda(u) = O(\|v\|_X),$$

e também

$$\begin{aligned} S'_\omega(\phi_\omega + v) &= S''_\omega(\phi_\omega)v + \frac{1}{2}S'''_\omega(\phi_\omega)(v, v) + o(\|v\|_X^2), \\ (M(u), J^2\phi_\omega)_X &= (\phi_\omega + v, J^2\phi_\omega)_X = -\|J\phi_\omega\|_X^2 + O(\|v\|_X). \end{aligned}$$

Portanto, por (2.71), temos

$$P(u) = \langle S''_\omega(\phi_\omega)v, \psi\rangle + \frac{1}{2}\langle S'''_\omega(\phi_\omega)(v,v), \psi\rangle + \frac{c}{\|J\phi_\omega\|_X^2}\langle S''_\omega(\phi_\omega)v, JI^{-1}RJ\phi_\omega\rangle + o(\|v\|_X^2).$$

Agora, por (3.9) e (3.25), temos que

$$\begin{aligned}\langle S''_\omega(\phi_\omega)\psi, v\rangle = \mu(\phi_\omega, v)_H = -\mu Q(v) &= -\frac{\mu}{2}\|v\|_H^2 \\ &= -\frac{\mu}{2}\left(a^2\|\phi_\omega\|_H^2 + b^2\|J\phi_\omega\|_H^2 + c^2\|\psi\|_H^2 + \|w\|_H^2\right) \\ &= -\frac{c^2\mu}{2} + O\left(\|w\|_X^2\right) + o\left(\|v\|_X^2\right),\end{aligned}$$

e

$$\langle S'''_\omega(\phi_\omega)(v,v), \psi\rangle = c^2\langle S'''_\omega(\phi_\omega)(\psi,\psi), \psi\rangle + 2c\langle S'''_\omega(\phi_\omega)(\psi, bJ\phi_\omega + w), \psi\rangle + O\left(\|w\|_X^2\right) + o\left(\|v\|_X^2\right),$$

e também

$$\begin{aligned}c\langle S''_\omega(\phi_\omega)v, JI^{-1}RJ\phi_\omega\rangle &= c\langle S''_\omega(\phi_\omega)(c\psi + w), JI^{-1}RJ\phi_\omega\rangle + o\left(\|v\|_X^2\right) \\ &= -c^2\mu\|J\phi_\omega\|_X^2 + c\langle S''_\omega(\phi_\omega)w, JI^{-1}RJ\phi_\omega\rangle + o\left(\|v\|_X^2\right).\end{aligned}$$

Desse modo, existe uma constante $k > 0$ tal que

$$\left|P(u) + \frac{\nu}{2}c^2\right| \le k\left(|c|\|w\|_X + \|w\|_X^2\right) + o\left(\|v\|_X^2\right),$$

onde ν é a constante definida em (3.24). Desse modo, existe uma constante $k_1 > 0$ tal que

$$-\frac{\nu}{|\nu|}P(u) \ge \frac{|\nu|}{4}c^2 - k_1\|w\|_X^2 - o\left(\|v\|_X^2\right). \tag{3.28}$$

Por (3.27) e (3.28), obtemos

$$\mathcal{H}(u) - \mathcal{H}(\phi_\omega) - \frac{\nu}{|\nu|}k^*P(u) \ge k_2c^2 + k_3\|w\|_X^2 - o\left(\|v\|_X^2\right) \tag{3.29}$$

com

$$k^* = \frac{k_0}{4k_1}, \quad k_2 = \frac{k^*|\nu|}{4} \quad \text{e} \quad k_3 = \frac{k_0}{4}.$$

Finalmente, como $\|v\|_X = \|M(u) - \phi_\omega\|_X < \varepsilon_0$, segue que o lado direito da expressão (3.29) é não negativa para ε_0 suficientemente pequeno, o que completa a prova. □

Lema 3.6. *Existe $\lambda_1 > 0$ e uma aplicação suave $\varphi : (-\lambda_1, \lambda_1) \longrightarrow X$ com $\varphi(\lambda) := \varphi_\lambda$ tal que*

$$\varphi(0) = \varphi_0 = \phi_\omega,$$

e além disso

$$\mathcal{H}(\varphi_\lambda) < \mathcal{H}(\phi_\omega), \quad Q(\varphi_\lambda) = Q(\phi_\omega),$$

sempre que $0 < \frac{\nu}{|\nu|}\lambda < \lambda_1$.

Demonstração: Para λ suficientemente próximo de zero, defina

$$\varphi(\lambda) = \varphi_\lambda := \phi_\omega + \lambda\psi + \eta(\lambda)\phi_\omega, \text{ onde } \eta(\lambda) = \left(1 - \frac{Q(\psi)}{Q(\phi_\omega)}\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}} - 1.$$

Então, assim como anteriormente temos que $Q(\varphi_\lambda) = Q(\phi_\omega)$ e pelo Teorema de Taylor para espaços de Banach (veja (CHANG, 2005), página 10, Theorem 1.1.10)

$$S_\omega(\varphi_\lambda) = S_\omega(\phi_\omega) + \frac{\lambda^2}{2}\langle S''_\omega(\phi_\omega)\psi, \psi\rangle + \lambda\eta(\lambda)\langle S''_\omega(\phi_\omega)\psi, \phi_\omega\rangle + \frac{\lambda^3}{6}\langle S'''_\omega(\phi_\omega)(\psi,\psi),\psi\rangle + o(\lambda^3)$$

com $\eta(\lambda) = -\frac{1}{2\|\phi_\omega\|_H^2}\lambda^2 + O(\lambda^4)$. Aqui por (3.9) temos que $\langle S''_\omega(\phi_\omega)\psi, \psi\rangle = \mu(\phi_\omega, \psi)_H = 0$ e $\langle S''_\omega(\phi_\omega)\psi, \phi_\omega\rangle = \mu\|\phi_\omega\|_H^2$. Então,

$$S_\omega(\varphi_\lambda) = S_\omega(\phi_w) - \frac{\nu}{6}\lambda^3 + o(\lambda^3),$$

dai

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(\varphi_\lambda) - \mathcal{H}(\phi_\omega) &= S_\omega(\varphi_\lambda) + \omega Q(\varphi_\lambda) - (S_\omega(\phi_\omega) - \omega Q(\phi_\omega)) \\
&= S_\omega(\varphi_\lambda) + \omega Q(\varphi_\lambda) - (S_\omega(\phi_\omega) - \omega Q(\varphi_\lambda)) \\
&= S_\omega(\varphi_\lambda) - S_\omega(\phi_\omega) \\
&= \left(S_\omega(\phi_w) - \frac{\nu}{6}\lambda^3 + o(\lambda^3)\right) - S_\omega(\phi_\omega) \\
&= -\frac{\nu}{6}\lambda^3 + o(\lambda^3) \\
&< 0,
\end{aligned}$$

para $\frac{\nu}{|\nu|}\lambda$ suficientemente pequeno, conforme queríamos demonstrar. □

Perceba que os Lemas 3.5 e 3.6 são adaptações dos Lema 3.3 e 3.4 respectivamente. Desse modo, a demonstração do Teorema 3.2 segue de maneira análoga a feita no Teorema 3.1.

3.2.0.1 Algumas Consequências

A seguir mostraremos alguns resultados que são consequências do Teoremas 3.1 e 3.2. Para isso, vamos impor as seguintes condições.

(B_1). Existe um intervalo aberto $\mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ e uma aplicação $\phi : \mathcal{J} \longrightarrow X$, de classe C^1 com $\phi(\omega) := \phi_\omega$ de tal forma que para cada $\omega \in \mathcal{J}$ temos

1. $S'_\omega(\phi_\omega) = 0$;
2. $\phi_\omega \neq 0$;
3. $R\phi_\omega \in I(X)$;
4. $(J\phi_\omega, \phi'_\omega)_H = (J\phi_\omega, \phi'_\omega)_X = 0$, com $\phi'_\omega = \frac{d}{d\omega}\phi_\omega$.

(B_2). Existe uma constante negativa $\lambda_\omega < 0$ e uma vetor $\xi_\omega \in X$ tal que

1. $S''_\omega(\phi_\omega)\xi_\omega = \lambda_\omega I\xi_\omega$;
2. $\|\xi_\omega\|_H = 1$;
3. $\langle S''_\omega(\phi_\omega)p, p\rangle > 0$ para todo $p \in X \setminus \{0\}$ satisfazendo $(\xi_\omega, p)_H = (J\phi_\omega, p)_H = 0$

(B_3). Existem constantes negativas $\lambda_{0,\omega}, \lambda_{1,\omega} < 0$ e vetores $\xi_{0,\omega}, \xi_{1,\omega} \in X$ tal que

1. $(\xi_{0,\omega}, \xi_{1,\omega})_H = (\xi_{1,\omega}, \phi_\omega)_H = 0$.
2. $S''_\omega(\phi_w)\xi_{j,\omega} = \lambda_{j,\omega} I\xi_{j,\omega}, \quad j = 1, 2$.
3. $\|\xi_{0,\omega}\|_H = \|\xi_{1,\omega}\|_H = 1$.

(B_4). O funcional $u \mapsto \langle S''_\omega(\phi_\omega)u, u\rangle$ é fracamente semi-contínuo inferiormente sobre X. Além disso, existem constantes positivas C_1 e C_2 de tal forma que

$$C_1\|u\|_X^2 \leq \langle S''_\omega(\phi_\omega)u, u\rangle + C_2\|u\|_H^2, \tag{3.30}$$

para todo $u \in X$. Além disso, se uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfazendo $\|u_n\|_X = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $u_n \rightharpoonup 0$ fracamente em X, então

$$\liminf_{n\to+\infty} \langle S''_\omega(\phi_\omega)u_n, u_n\rangle > 0.$$

Vamos definir também $d(\omega) = S_\omega(\phi_\omega)$ onde $\omega \in \mathcal{J}$. Como consequências do Teorema 3.2, temos o seguinte resultado, a qual assumimos que o funcional de energia $\mathcal{H}$ e suficientemente regular.

Corolário 3.1. *Assuma (B_1) e que para cada $\omega \in \mathcal{J}$, (B_2) e (B_4) são satisfeitas. Assuma também que $\mathcal{H} \in C^3(X;\mathbb{R})$ e que a aplicação $\omega \mapsto \phi_\omega$ definido em (B_1) é de classe $C^2(\mathcal{J}, X)$. Se $\omega_0 \in \mathcal{J}$ satisfaz*

$$d''(\omega_0) = 0 \text{ e } d'''(\omega_0) \neq 0,$$

então o bound state $\mathcal{T}(\omega_0 t)\phi_{\omega_0}$ é orbitalmente instável.

Para mostrar esse resultado, comecemos fornecendo uma condição suficiente para (A_4).

Lema 3.7. *Assuma (B_2) e (B_4). Assuma também que existam $\psi \in X$ e constantes $\lambda \leq 0$ e $\mu \in \mathbb{R}$ tais que*

- $\|\psi\|_H = 1$;
- $(\phi_\omega, \psi)_H = (J\phi_\omega, \psi)_H = 0$;
- $S''_\omega(\phi_w)\psi = \lambda I\psi + \mu Q'(\phi_\omega)$.

Então a condição (A_4) é satisfeita.

Demonstração: Primeiramente afirmamos que $\langle S''_\omega(\phi_\omega)w, w\rangle > 0$ para todo $w \in X \setminus \{0\}$ satisfazendo $(\phi_\omega, w)_H = (J\phi_\omega, w)_H = (\psi, w)_H = 0$. Provemos isso por contradição, isto é, suponha que exista $w_0 \in X \setminus \{0\}$ de tal forma que

$$\langle S''_\omega(\phi_\omega)w_0, w_0\rangle \leq 0,$$

Com $(\phi_\omega, w_0)_H = (J\phi_\omega, w_0)_H = (\psi, w_0)_H = 0$. Então, temos que existe um vetor $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tal que $(\alpha\psi + \beta w_0, \xi_\omega)_H = 0$. Defina $p = \alpha\psi + \beta w_0$. Temos que $p \in X \setminus \{0\}$ satisfaz

$$(\xi_\omega, p)_H = (J\phi_\omega, p)_H = 0,$$

então, por (B_2), temos que $\langle S''_\omega(\phi_\omega)p, p\rangle > 0$. Por outro lado, temos que

$$\langle S''_\omega(\phi_\omega)\psi, w_0\rangle = \lambda(\psi, w_0)_H + \mu(\phi_\omega, w_0)_H = 0$$

e também

$$\langle S''_\omega(\phi_\omega)p, p\rangle = \alpha^2\lambda\|\psi\|_H^2 + 2\alpha\beta\langle S''_\omega(\phi_\omega)\psi, w_0\rangle + \beta^2\langle S''_\omega(\phi_\omega)w_0, w_0\rangle \leq 0$$

O que é uma contradição. Feito isso, vamos novamente utilizar um argumento de contradição para provar a condição (A_4). Assim, suponha que a condição (A_4) não aconteça. Então existe uma sequência $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$, com $\|w_n\|_X = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$(J\phi_\omega, w_n)_H = (\psi, w_n)_H = 0,$$

de tal forma que

$$\lim_{n\to+\infty} \langle S''_\omega(\phi_\omega)w_n, w_n\rangle = 0.$$

Temos também que, passando para uma subsequência se necessário, existe $w \in X$ tal que $w_n \rightharpoonup w$ em X. Por (B_4), vemos que $w \neq 0$, $(\phi_\omega, w)_H = (J\phi_\omega, w)_H = (\psi, w)_H = 0$ e além disso

$$\langle S''_\omega(\phi_\omega)w, w\rangle \leq \liminf_{n\to+\infty}\langle S''_\omega(\phi_\omega)w_n, w_n\rangle = 0,$$

contradizendo o fato que comprovamos anteriormente. Com isso o resultado segue. □

Demonstração do Corolário 3.1: Na prova desse resultado, basta verificarmos que ϕ_{ω_0} satisfaz as condições (A_1), (A_3) e (A_4), para assim utilizarmos o Teorema 3.2. Primeiramente, note que (A_1) segue de (B_1). Temos também que se for válida a condição (A_3), temos pelo Lema 3.7 que a condição (A_4) também é válida. Desse modo é suficiente provarmos a condição (A_3), de fato, temos por (B_1) que $\mathcal{H}'(\phi_\omega) = \omega Q'(\phi_\omega)$ para todo $\omega \in \mathcal{J}$. Derivando essa expressão com respeito a ω, obtemos

$$S''_\omega(\phi_\omega) = Q'(\phi_\omega), \tag{3.31}$$

$$S'''_\omega(\phi_\omega)(\phi'_\omega, \phi'_\omega) + S''_\omega(\phi_\omega)\phi''_\omega = 2Q''(\phi_\omega)\phi'_\omega, \tag{3.32}$$

com $\phi'_\omega = \frac{d}{d_\omega}\phi_\omega$ e $\phi''_\omega = \frac{d^2}{d\omega^2}\phi_\omega$. Enquanto, derivando $d(\omega) = \mathcal{H}(\phi_\omega) - \omega Q(\phi_\omega)$ temos

$$\begin{aligned} d'(\omega) &= \langle \mathcal{H}'(\phi_\omega), \phi'_\omega\rangle - \omega\langle Q'(\phi_\omega), \phi'_\omega\rangle - Q(\phi_\omega) = -Q(\phi_\omega), \\ d''(\omega) &= -\langle Q'(\phi_\omega), \phi'_\omega\rangle = -(\phi_\omega, \phi'_\omega)_H = \langle S''_\omega(\phi_\omega)\phi'_\omega, \phi'_\omega\rangle. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Além disso, por (3.31), (3.32) e (3.33) temos que

$$\begin{aligned} d'''(\omega) &= -\langle Q''(\phi_\omega)\phi'_\omega, \phi'_\omega\rangle - \langle Q'(\phi_\omega), \phi''_\omega\rangle \\ &= \langle S'''_\omega(\phi_\omega)(\phi'_\omega, \phi'_\omega), \phi'_\omega\rangle - 3\langle Q''(\phi_\omega)\phi'_\omega, \phi'_\omega\rangle \\ &= \langle S'''_\omega(\phi_\omega)(\phi'_\omega, \phi'_\omega), \phi'_\omega\rangle - 3\|\phi'_\omega\|_H^2. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Considere $\mu = \frac{1}{\|\phi'_{\omega_0}\|_H}$ e defina

$$\psi := \mu\phi'_\omega.$$

Assim temos $\|\psi\|_H = 1$ e $S''_{w_0}(\phi_{\omega_0})\psi = \mu Q'(\phi_{\omega_0})$. Por (B_1), temos que

$$(J\phi_{\omega_0}, \psi)_H = (J\phi_{\omega_0}, \psi)_X = 0.$$

Além disso, desde de que $d''(\omega_0) = 0$ e que $d'''(\omega_0) \neq 0$, por (3.33) e (3.34) temos que $(\phi_{\omega_0}, \psi)_H = 0$ e

$$\langle S'''_{\omega_0}(\phi_{\omega_0})(\psi, \psi), \psi\rangle = \mu^3\langle S'''_{\omega_0}(\phi_{\omega_0})(\phi'_{\omega_0}, \phi'_{\omega_0}), \phi'_{\omega_0}\rangle \neq 3\mu.$$

Com isso, vale (3.9) e assim temos a condição (A_3), conforme queríamos demonstrar. □

Os próximos resultados serão obtidos como consequências do Teorema 3.1.

Corolário 3.2. *Assuma que (B_1) e que para cada $\omega \in \mathcal{J}$, valem as condições (B_2) e (B_4). Se $\omega_0 \in \mathcal{J}$ satisfaz $d''(\omega_0) < 0$, então o bound state $\mathcal{T}(\omega_0 t)\phi_{\omega_0}$ é orbitalmente instável.*

Comecemos fornecendo um Lema que será usado na demonstração de 3.2.

Lema 3.8. *Assuma (B_1) e que para cada $\omega \in \mathcal{J}$, sejam válidas as condições $(B_2), (B_3)$. Se $\omega_0 \in \mathcal{J}$ é tal que $d''(\omega_0) < 0$, então existe $\psi \in X$, satisfazendo $\|\psi\|_H = 1$ e constantes $\lambda < 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ tal que*

$$(\phi_{\omega_0}, \psi)_H = (J\phi_{\omega_0}, \psi)_H = 0 \quad e \quad S''_{\omega_0}(\phi_{\omega_0})\psi = \lambda I\psi + \mu Q'(\phi_{\omega_0}).$$

Demonstração: Defina

$$\lambda = \inf\{\langle S''_{\omega_0}(\phi_{\omega_0})w, w\rangle : w \in X,\ \|w\|_H = 1,\ (\phi_{\omega_0}, w)_H = 0\}. \tag{3.35}$$

Por (GRILLAKIS; SHATAH; STRAUSS, 1987), página 172, Theorem 4.1 e por (3.30), temos que $\lambda \in (-\infty, 0)$. Além disso, por (B_3) e um argumento variacional, temos que existe $\psi \in X$, com $\|\psi\|_H = 1$ e $(\phi_{\omega_0}, \psi)_H = 0$ tal que $\langle S_{\omega_0}(\phi_{\omega_0})\psi, \psi\rangle = \lambda$. Então existe uma multiplicador de Lagrange $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$S''_{\omega_0}(\phi_{\omega_0})\psi = \lambda I\psi + \mu Q'(\phi_{\omega_0}).$$

Finalmente, pela equação acima temos

$$\lambda(\psi, J\phi_{\omega_0})_H = \langle S''_{\omega_0}(\phi_{\omega_0})(J\phi_{\omega_0}), \psi\rangle - \mu(\phi_{\omega_0}, J\phi_{\omega_0})_H = 0.$$

Como temos que $\lambda \neq 0$, obrigatoriamente temos que $(J\phi_{\omega_0}, \psi)_H = 0$, completando a prova. □

Demonstração do Corolário 3.2: De maneira similar ao que fizemos anteriormente, vamos mostrar que ϕ_{ω_0} satisfaz as condições (A_1), (A_2) e (A_4) do Teorema 3.1. De fato, perceba que (A_1) segue de (B_1), e (A_2) segue do Lema 3.8. Finalmente, a condição (A_4) segue diretamente dos Lemas 3.7 e 3.8. □

Corolário 3.3. *Assuma que (B_1) é válida e que para cada $\omega \in \mathcal{J}$, valem as condições (B_3) e (B_4). Se $\omega_0 \in \mathcal{J}$ satisfaz $d''(\omega_0) > 0$, então o bound state $\mathcal{T}(\omega_0 t)\phi_{\omega_0}$ é orbitalmente instável.*

O seguinte lema auxiliar é baseado em (MAEDA, 2010) (página 2103, Theorem 2) e será usado na demonstração do Corolário 3.3.

Lema 3.9. *Assuma que (B_1) é válida e que para cada $\omega \in \mathcal{J}$, valem as condições (B_3) e (B_4). Se $\omega_0 \in \mathcal{J}$ satisfaz $d''(\omega_0) > 0$, então existe uma constante $k_0 > 0$ tal que*

$$\langle S''_{\omega_0}(\phi_{\omega_0})w, w\rangle \geq k_0\|w\|_X^2,$$

para todo $w \in X$ satisfazendo $(\phi_{\omega_0}, w)_H = (\xi_{0,\omega_0}, w)_H = (J\phi_{\omega_0}, w)_H = 0$.

Demonstração: Assim como na prova do Lema 3.7, é suficiente provarmos que $\langle S''_{\omega_0}(\phi_{\omega_0})w, w\rangle > 0$, para todo $w \in X \setminus \{0\}$ satisfazendo a condição $(\phi_{\omega_0}, w)_H = (\xi_{1,\omega_0}, w)_H = (J\phi_{\omega_0}, w)_H = 0$. Defina

$$P_\omega = \{p \in X : (\xi_{0,\omega}, p)_H = (\xi_{1,\omega}, p)_H = (J\phi_\omega, p)_H = 0\}.$$

Seja $w \in X \setminus \{0\}$,tal que

$$(\phi_\omega, w)_H = (\xi_{0,\omega}, w)_H = (J\phi_\omega, w)_H = 0.$$

Vamos decompor w e ϕ'_{ω_0} como sendo

$$\begin{aligned} w &= a_0\xi_{0,\omega_0} + a_1\xi_{1,\omega_0} + a_2 J\phi_{\omega_0} + p, \\ \phi'_{\omega_0} &= b_0\xi_{0,\omega_0} + b_1\xi_{1,\omega_0} + b_2 J\phi_{\omega_0} + q \end{aligned}$$

onde $a_j, b_j \in \mathbb{R}$ para todo $j = 0, 1, 2$ e $p, q \in P_{\omega_0}$. Como temos $(\xi_{1,\omega_0}, w)_H = (J\phi_{\omega_0}, w)_H = 0$, temos que $a_1 = a_2 = 0$. Além disso, por (3.31)

$$\lambda_{1,\omega_0} b_1 = (\lambda_{1,\omega_0}\xi_{1,\omega_0}, \phi'_{\omega_0})_H = \langle S''_{\omega_0}(\phi_{\omega_0})\xi_{1,\omega_0}, \phi'_{\omega_0}\rangle = (\xi_{1,\omega_0}, \phi_{\omega_0})_H = 0,$$

com isso, $b_0 = 0$. Por (3.33), temos

$$-d''(\omega_0) = \langle S''_{\omega_0}(\phi_{\omega_0})\phi'_{\omega_0}, \phi'_{\omega_0}\rangle = b_0^2\lambda_{0,\omega_0} + \langle S''_{\omega_0}(\phi_{\omega_0})q, p\rangle < 0.$$

Em particular, $p \neq 0$. Por outro lado, por (3.31),

$$0 = (\phi_{\omega_0}, w)_H = \langle S''_{\omega_0}(\phi_{\omega_0})\phi'_{\omega_0}, w\rangle = a_0 b_0 \lambda_{0,\omega_0} + \langle S''_{\omega_0}(\phi_{\omega_0})q, p\rangle.$$

Em particular, $p \neq 0$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\begin{aligned}
b_0^2|\lambda_{0,\omega_0}|\langle S''_{\omega_0}(\phi_{\omega_0})w, w\rangle &= b_0^2|\lambda_{0,\omega_0}|\left(a_0^2\lambda_{0,\omega_0} + \langle S''_{\omega_0}(\phi_{\omega_0})p, p\rangle\right)\\
&> -a_0^2 b_0^2 \lambda_{0,\omega_0}^2 + \langle S''_{\omega_0}(\phi_{\omega_0})p, p\rangle\langle S''_{\omega_0}(\phi_{\omega_0})q, q\rangle\\
&\geq -a_0^2 b_0^2 \lambda_{0,\omega_0}^2 + \langle S''_{\omega_0}(\phi_{\omega_0})q, p\rangle^2\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Dessa forma, $\langle S''_{\omega_0}(\phi_{\omega_0})w, w\rangle > 0$, conforme queríamos demonstrar. □

Demonstração do Corolário 3.3: Novamente, basta verificarmos que ϕ_{ω_0} satisfaz as condições (A_1), (A_2) e (A_4), para assim usarmos o Teorema 3.1 . De fato, (A_1) segue diretamente de (B_1). Agora considere $\psi = \xi_{1,\omega}$, então (A_2) segue de (B_3). Finalmente, (A_4) segue do Lema 3.9, o que finaliza a prova. □

Os corolários apresentados são de extrema utilidade para o estudo da instabilidade orbital de *bound states* de modelos muito interessantes. Podemos citar, por exemplo, a equação de Schrödinger não linear onde a função potencial é do tipo *delta function* e sistemas de equações do tipo Schrödinger, veja por exemplo (OHTA, 2011), páginas 17-23.

Referências

ADAMS, R. A.; FOURNIER, J. J. F. *Sobolev spaces*. Second. [S.l.]: Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2003. v. 140. xiv+305 p. (Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), v. 140). ISBN 0-12-044143-8. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.

AMBROSETTI, A.; MALCHIODI, A. *Perturbation methods and semilinear elliptic problems on* $\mathbb{R}^n$. [S.l.]: Birkhäuser Verlag, Basel, 2006. v. 240. xii+183 p. (Progress in Mathematics, v. 240). ISBN 978-3-7643-7321-4; 3-7643-7321-0. Citado na página 53.

BADIALE, M.; SERRA, E. *Semilinear elliptic equations for beginners*. Springer, London, 2011. x+199 p. (Universitext). Existence results via the variational approach. ISBN 978-0-85729-226-1. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-0-85729-227-8>. Citado 4 vezes nas páginas 18, 19, 30 e 73.

BERESTYCKI, H.; CAZENAVE, T. Instabilité des états stationnaires dans les équations de Schrödinger et de Klein-Gordon non linéaires. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, v. 293, n. 9, p. 489–492, 1981. ISSN 0249-6291. Citado 2 vezes nas páginas 65 e 75.

BERESTYCKI, H.; GALLOUëT, T.; KAVIAN, O. Équations de champs scalaires euclidiens non linéaires dans le plan. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, v. 297, n. 5, p. 307–310, 1983. ISSN 0249-6291. Citado na página 73.

BERESTYCKI, H.; LIONS, P.-L. Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state. *Arch. Rational Mech. Anal.*, v. 82, n. 4, p. 313–345, 1983. ISSN 0003-9527. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF00250555>. Citado na página 75.

BEREZIN, F. A.; SHUBIN, M. A. *The Schrödinger equation*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991. v. 66. xviii+555 p. (Mathematics and its Applications (Soviet Series), v. 66). Translated from the 1983 Russian edition by Yu. Rajabov, D. A. Leĭtes and N. A. Sakharova and revised by Shubin, With contributions by G. L. Litvinov and Leĭtes. ISBN 0-7923-1218-X. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-94-011-3154-4>. Citado na página 51.

BOUSSINESQ, J. Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *J. Math. Pures Appl. (2)*, v. 17, p. 55–108, 1872. ISSN 0021-7824. Citado na página 7.

BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. [S.l.]: Springer, New York, 2011. xiv+599 p. (Universitext). ISBN 978-0-387-70913-0. Citado na página 16.

CAZENAVE, T. Stable solutions of the logarithmic Schrödinger equation. *Nonlinear Anal.*, v. 7, n. 10, p. 1127–1140, 1983. ISSN 0362-546X. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/0362-546X(83)90022-6>. Citado na página 9.

CAZENAVE, T. *Semilinear Schrödinger equations*. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. v. 10.

xiv+323 p. (Courant Lecture Notes in Mathematics, v. 10). ISBN 0-8218-3399-5. Disponível em: <https://doi.org/10.1090/cln/010>. Citado 7 vezes nas páginas 8, 23, 25, 29, 41, 58 e 73.

CAZENAVE, T.; LIONS, P.-L. Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations. *Comm. Math. Phys.*, v. 85, n. 4, p. 549–561, 1982. ISSN 0010-3616. Disponível em: <http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103921547>. Citado na página 9.

CHANG, K.-C. *Methods in nonlinear analysis*. [S.l.]: Springer-Verlag, Berlin, 2005. x+439 p. (Springer Monographs in Mathematics). ISBN 978-3-540-24133-1; 3-540-24133-7. Citado 4 vezes nas páginas 43, 89, 90 e 94.

CHANG, S.-M. et al. Spectra of linearized operators for NLS solitary waves. *SIAM J. Math. Anal.*, v. 39, n. 4, p. 1070–1111, 2007/08. ISSN 0036-1410. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/050648389>. Citado na página 52.

CINGOLANI, S.; JEANJEAN, L.; SECCHI, S. Multi-peak solutions for magnetic NLS equations without non-degeneracy conditions. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, v. 15, n. 3, p. 653–675, 2009. ISSN 1292-8119. Disponível em: <https://doi.org/10.1051/cocv:2008055>. Citado na página 38.

COZ, S. L. A note on Berestycki-Cazenave's classical instability result for nonlinear Schrödinger equations. *Adv. Nonlinear Stud.*, v. 8, n. 3, p. 455–463, 2008. ISSN 1536-1365. Disponível em: <https://doi.org/10.1515/ans-2008-0302>. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 65.

COZ, S. L. Standing waves in nonlinear Schrödinger equations. In: *Analytical and numerical aspects of partial differential equations*. [S.l.]: Walter de Gruyter, Berlin, 2009. p. 151–192. Citado na página 41.

COZ, S. L. et al. Instability of bound states of a nonlinear Schrödinger equation with a Dirac potential. *Phys. D*, v. 237, n. 8, p. 1103–1128, 2008. ISSN 0167-2789. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.physd.2007.12.004>. Citado na página 72.

EVANS, L. C. *Partial differential equations*. Second. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. v. 19. xxii+749 p. (Graduate Studies in Mathematics, v. 19). ISBN 978-0-8218-4974-3. Disponível em: <https://doi.org/10.1090/gsm/019>. Citado 3 vezes nas páginas 29, 33 e 35.

FOLLAND, G. B. *Real analysis*. Second. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999. xvi+386 p. (Pure and Applied Mathematics (New York)). Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication. ISBN 0-471-31716-0. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 20.

FUKUIZUMI, R.; JEANJEAN, L. Stability of standing waves for a nonlinear Schrödinger equation with a repulsive Dirac delta potential. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, v. 21, n. 1, p. 121–136, 2008. ISSN 1078-0947. Disponível em: <https://doi.org/10.3934/dcds.2008.21.121>. Citado na página 52.

GIDAS, B.; NI, W. M.; NIRENBERG, L. Symmetry and related properties via the maximum principle. *Comm. Math. Phys.*, v. 68, n. 3, p. 209–243, 1979. ISSN 0010-3616. Disponível em: <http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103905359>. Citado na página 38.

GLASSEY, R. T. On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations. *J. Math. Phys.*, v. 18, n. 9, p. 1794–1797, 1977. ISSN 0022-2488. Disponível em: <https://doi.org/10.1063/1.523491>. Citado na página 26.

GRILLAKIS, M. Linearized instability for nonlinear Schrödinger and Klein-Gordon equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, v. 41, n. 6, p. 747–774, 1988. ISSN 0010-3640. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/cpa.3160410602>. Citado na página 41.

GRILLAKIS, M.; SHATAH, J.; STRAUSS, W. Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I. *J. Funct. Anal.*, v. 74, n. 1, p. 160–197, 1987. ISSN 0022-1236. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/0022-1236(87)90044-9>. Citado 6 vezes nas páginas 41, 79, 81, 85, 86 e 97.

GRILLAKIS, M.; SHATAH, J.; STRAUSS, W. Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. II. *J. Funct. Anal.*, v. 94, n. 2, p. 308–348, 1990. ISSN 0022-1236. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/0022-1236(90)90016-E>. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 79.

JEANJEAN, L. On the existence of bounded Palais-Smale sequences and application to a Landesman-Lazer-type problem set on $\mathbb{R}^N$. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, v. 129, n. 4, p. 787–809, 1999. ISSN 0308-2105. Disponível em: <https://doi.org/10.1017/S0308210500013147>. Citado na página 31.

JEANJEAN, L.; TANAKA, K. A note on a mountain pass characterization of least energy solutions. *Adv. Nonlinear Stud.*, v. 3, n. 4, p. 445–455, 2003. ISSN 1536-1365. Disponível em: <https://doi.org/10.1515/ans-2003-0403>. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 75.

JEANJEAN, L.; TANAKA, K. A remark on least energy solutions in $\mathbb{R}^N$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 131, n. 8, p. 2399–2408, 2003. ISSN 0002-9939. Disponível em: <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-02-06821-1>. Citado na página 75.

KATO, T. *Perturbation theory for linear operators*. [S.l.]: Springer-Verlag, Berlin, 1995. xxii+619 p. (Classics in Mathematics). Reprint of the 1980 edition. ISBN 3-540-58661-X. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 53.

KORTEWEG, D. J.; VRIES, G. de. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *Philos. Mag. (5)*, v. 39, n. 240, p. 422–443, 1895. ISSN 1941-5982. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/14786449508620739>. Citado na página 7.

KWONG, M. K. Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in $\mathbb{R}^n$. *Arch. Rational Mech. Anal.*, v. 105, n. 3, p. 243–266, 1989. ISSN 0003-9527. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF00251502>. Citado na página 38.

LINARES, F.; PONCE, G. *Introduction to nonlinear dispersive equations*. Second. Springer, New York, 2015. xiv+301 p. (Universitext). ISBN 978-1-4939-2180-5; 978-1-4939-2181-2. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-1-4939-2181-2>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 25.

LOPES, O. Radial symmetry of minimizers for some translation and rotation invariant functionals. *J. Differential Equations*, v. 124, n. 2, p. 378–388, 1996. ISSN 0022-0396. Disponível em: <https://doi.org/10.1006/jdeq.1996.0015>. Citado na página 38.

MACKAY, R. S.; MEISS, J. D. *Hamiltonian Dynamical Systems: a reprint selection*. [S.l.]: CRC Press, 2020. Citado na página 81.

MAEDA, M. Instability of bound states of nonlinear Schrödinger equations with Morse index equal to two. *Nonlinear Anal.*, v. 72, n. 3-4, p. 2100–2113, 2010. ISSN 0362-546X. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.na.2009.10.010>. Citado 2 vezes nas páginas 81 e 98.

MARICS, M. On the symmetry of minimizers. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, v. 192, n. 2, p. 311–330, 2009. ISSN 0003-9527. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00205-008-0136-2>. Citado na página 38.

MEYER, K. R.; OFFIN, D. C. *Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the N-body problem*. Third. Springer, Cham, 2017. v. 90. xiii + 384 p. (Applied Mathematical Sciences, v. 90). ISBN 978-3-319-53690-3; 978-3-319-53691-0. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-53691-0>. Citado na página 81.

OHTA, M. Instability of bound states for abstract nonlinear Schrödinger equations. *J. Funct. Anal.*, v. 261, n. 1, p. 90–110, 2011. ISSN 0022-1236. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2011.03.010>. Citado 4 vezes nas páginas 10, 11, 81 e 99.

OHTA, M.; TODOROVA, G. Strong instability of standing waves for nonlinear Klein-Gordon equations. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, v. 12, n. 2, p. 315–322, 2005. ISSN 1078-0947. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/050643015>. Citado na página 79.

OHTA, M.; TODOROVA, G. Strong instability of standing waves for the nonlinear Klein-Gordon equation and the Klein-Gordon-Zakharov system. *SIAM J. Math. Anal.*, v. 38, n. 6, p. 1912–1931, 2007. ISSN 0036-1410. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/050643015>. Citado na página 79.

SHATAH, J.; STRAUSS, W. Instability of nonlinear bound states. *Comm. Math. Phys.*, v. 100, n. 2, p. 173–190, 1985. ISSN 0010-3616. Disponível em: <http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103943442>. Citado na página 79.

STEIN, E. M.; WEISS, G. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*. [S.l.]: Princeton University Press, Princeton, N.J., 1971. x+297 p. Princeton Mathematical Series, No. 32. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.

STUART, C. A. An introduction to elliptic equations on $\mathbb{R}^N$. In: *Nonlinear functional analysis and applications to differential equations (Trieste, 1997)*. [S.l.]: World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1998. p. 237–285. Citado na página 50.

TODOROVA, G. Dynamics of non-linear wave equations. *Math. Methods Appl. Sci.*, v. 27, n. 15, p. 1831–1841, 2004. ISSN 0170-4214. Disponível em: <https://doi.org/10.1002/mma.563>. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 66.

WEINSTEIN, M. I. Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates. *Comm. Math. Phys.*, v. 87, n. 4, p. 567–576, 1982/83. ISSN 0010-3616. Disponível em: <http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103922134>. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 65.

WEINSTEIN, M. I. Modulational stability of ground states of nonlinear Schrödinger equations. *SIAM J. Math. Anal.*, v. 16, n. 3, p. 472–491, 1985. ISSN 0036-1410. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/0516034>. Citado na página 52.

WILLEM, M. *Minimax theorems*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996. v. 24. x+162 p. (Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, v. 24). ISBN 0-8176-3913-6. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4146-1>. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.