

KAROLLINY DANIELLE SANTOS

**PROBLEMAS DE PROJETO DE REDES EM
ÁRVORE E LOCALIZAÇÃO DE FACILIDADES
EM DOIS NÍVEIS COM DEMANDAS
SENSÍVEIS A PREÇO COM EFEITO DE
CONGESTIONAMENTO**

Belo Horizonte
05 de julho de 2018

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

**PROBLEMAS DE PROJETO DE REDES EM
ÁRVORE E LOCALIZAÇÃO DE FACILIDADES
EM DOIS NÍVEIS COM DEMANDAS
SENSÍVEIS A PREÇO COM EFEITO DE
CONGESTIONAMENTO**

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia de Produção.

KAROLLINY DANIELLE SANTOS

Belo Horizonte
05 de julho de 2018



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

FOLHA DE APROVAÇÃO

Problemas de projeto de redes em árvore e localização de facilidades em dois níveis com demandas sensíveis a preço com efeito de congestionamento

KAROLLINY DANIELLE SANTOS

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Dr. RICARDO SARAIVA DE CAMARGO – Orientador
Universidade Federal de Minas Gerais

Dr. SAMUEL VIEIRA CONCEIÇÃO
Universidade Federal de Minas Gerais

Dr. RICARDO POLEY MARTINS FERREIRA
Universidade Federal de Minas Gerais

Dra. ELISANGELA MARTINS DE SÁ
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais

Dr. HENRIQUE PACCA LOUREIRO LUNA
Universidade Federal de Alagoas

Belo Horizonte, 05 de julho de 2018

Resumo

Este trabalho apresenta um modelo de equilíbrio econômico com demandas sensíveis a preço e efeito de congestionamento, para os problemas de projeto de rede em árvore aplicado no sistema de telecomunicação e localização de facilidades em dois níveis aplicado na privatização dos serviços da área da saúde e propõe uma técnica de decomposição para resolvê-los. O problema de equilíbrio econômico é formado pela maximização do benefício social líquido que é medido pela maximização da função utilidade subtraindo os custos convexos de congestionamento, transporte, infra-estrutura e de instalação. Resulta do esforço de modelagem um problema não-linear inteiro misto e de difícil resolução. Para superar tais dificuldades aplica-se a técnica de Aproximação Externa. Experimentos computacionais comprovam a eficiência desta técnica, atingindo em média até sete vezes mais rápida comparada ao *solver CPLEX*. O trabalho analisa a sensibilidade da demanda para a qualidade do serviço em tais sistemas e permite a solução destes problemas para casos de grande escala. Os resultados são apresentados com um conjunto de testes padrão. Essas experiências visam a descrever como a competitividade de um mercado irá afetar os níveis de demanda e de preços no equilíbrio econômico.

Palavra-chaves: Projeto de redes em árvore; Localização de facilidade de dois níveis; Aproximação externa; Equilíbrio econômico;

Abstract

This work presents an economic equilibrium model with price sensitive demand and congestion effect for a tree network design problem at telecommunication systems and the two level facility location problem privatization of the health systems and proposed a technique of decomposition to solve it. The economic equilibrium problem it's formed by maximizing utility function less convex congestion costs and cost of transportation and infrastructure and less installation costs. The modeling effort yields a mixed-integer nonlinear program which is very hard to solve. In order to overcome the solution difficulties, Outer approximation is deployed. Computational experiments prove the efficient of this technique, reaching the average of up to seven times faster compared to the CPLEX solver. The paper analyzes the sensitivity of demand for the quality of service in such systems and allows the solution of these problems for cases of large scale. The experiments result are shown with a set of standard test. These experiments aim to describe how the competitiveness of a market with it's operating under the paradigm of network design will affect demand levels and prices the economic equilibrium.

Keywords: A tree network design; Two level facility location problem; Outer approximation; Economic equilibrium.

Dedico esta tese ao meu orientador Ricardo Camargo e ao professor Gilberto por ter feito esta possível.

“Tenho a impressão de ter sido uma criança brincando à beira-mar, divertindo-me em descobrir uma pedrinha mais lisa ou uma concha mais bonita que as outras, enquanto o imenso oceano de verdade continua misterioso diante de meus olhos.” (Isaac Newton)

Agradecimentos

Não há palavras para descrever o quanto sou agradecida, foram anos de aprendizagem e muitos estudos. Muitas pessoas me ajudaram a cruzar este caminho e a cada uma delas eu dedico a minha eterna gratidão.

Ao professor Ricardo Saraiva de Camargo pelas orientações, ensinamentos, conselhos e pela sua infinita paciência, especialmente, por acreditar em mim e no meu trabalho, por me incentivar em sempre acreditar que iria dar certo.

Ao professor Gilberto de Miranda Júnior por me encorajar a fazer a pós-graduação, pelos seus ensinamentos e orientações.

Aos meus colegas de laboratório pelo companheirismo e compartilhamento de conhecimentos.

Às minhas colegas de apartamento, Jacqueline e Sabrina pelos conselhos e incentivos.

À minha família, principalmente a minha mãe Margareth, meus irmãos Wallison e Michelle, assim como o padastro Roberto por sempre acreditar e me incentivar. Aos meus amigos que direta ou indiretamente tornou esse sonho em realidade. E a **Deus** pela infinita misericórdia e grande amor, por me guiar e me acompanhar, colocando em meu caminho pessoas que me ajudaram a crescer e fazer esta possível.

Aos meus padrinhos Paulo Roberto e Aldaiza que sempre me acompanharam e me incentivaram a nunca desistir e sempre acreditar.

Aos professores, funcionários e colegas do Departamento de Engenharia de Produção - UFMG.

Por fim, à CAPES pelo incentivo financeiro concedido, que foi imprescindível para a dedicação integral ao doutorado.

Sumário

1	Introdução	1
1.0.1	Função de Demanda Inversível	3
1.0.2	Função de Custo de Congestionamento	5
1.0.3	Os problemas	6
1.1	Problema de projeto de redes com demandas sensíveis a preço e efeito de congestionamento	7
1.2	Problema de localização de facilidades em dois níveis com demandas sensíveis a preço e efeito de congestionamento	11
1.3	Considerações finais	13
1.4	Organização da tese	13
2	A tree network design problem with price sensitive demands and congestion effects	14
2.1	Introduction	15
2.2	Notation and definitions	17
2.3	The devised solution framework	19
2.3.1	The outer approximation algorithm	19
2.3.2	Computational analysis	21
2.4	Conclusion	28
3	Problema de localização de facilidades em dois níveis com demandas sensíveis a preço e efeito de congestionamento	29
3.1	Introdução	30
3.2	Definições e formulação	33
3.3	O algoritmo de Aproximação Externa	35
3.4	Experimentos computacionais	38
3.4.1	Experimento preliminar - testando instâncias da biblioteca <i>online</i> GAP	38
3.5	Conclusão	41

4 Conclusão	42
Referências Bibliográficas	44

Lista de Figuras

1.1	Função utilidade	2
1.2	Função utilidade	3
1.3	Problema de projeto de redes.	8
1.4	Representação esquemática de uma solução para o problema de localização de facilidades em dois níveis	12

Lista de Tabelas

2.1	Comparison of CPLEX QMIP solver with the devised OA algorithm for the Nug QAPLIB instances (Nug)	24
2.2	Average equilibrium demands (percentage) and prices for different levels of cross-price effects on the Nug instances.	25
2.3	Comparison of CPLEX QMIP solver with the devised OA algorithm for the Random instances.	26
2.4	Average equilibrium demands (percentage) and prices for different levels of cross-price effects on the Random instances.	27
3.1	Comparação do <i>solver CPLEX QMIP</i> com o algoritmo de AO para as instâncias GAP.	39
3.2	Equilíbrio médio das demandas (porcentagem) e preços para diferentes níveis de efeitos de preço cruzado nas instâncias.	41

Lista de Algoritmos

1	A basic outer approximation scheme	21
2	Um esquema básico de Aproximação Externa	37

Capítulo 1

Introdução

Ao entrar em competição em um mercado, é necessário uma elaboração bem estruturada dos objetivos que se pretende alcançar, assim como ter organização e disciplina. Com o aumento da concorrência em quase todos os segmentos da economia, tanto na indústria, quanto no comércio ou prestação de serviços, surge a necessidade da busca incessante pela fidelização, sendo que a fidelização é o componente de competitividade que visa um relacionamento interpessoal mais estreito e duradouro com os consumidores.

O sucesso das empresas depende essencialmente da qualidade de seus produtos e do atendimento dos serviços prestados ao consumidor, uma vez que este constitui-se em um grande diferencial na competitividade. Neste contexto, o principal desafio de toda empresa é possuir gestão adequada, produtos e serviços de qualidade e uma boa estratégia de atuação, que permita a empresa competir e aproveitar oportunidades que o seu mercado oferece.

Um dos cálculos mais importantes para um bom controle econômico é do ponto de equilíbrio. Segundo [Norén \(2013\)](#), no ponto de equilíbrio, a empresa está produzindo o suficiente para gerar receita que se iguala ao custo, ou seja, a empresa não está apresentando nem lucro nem prejuízo quando está operando em um nível de produção igual ao seu ponto de equilíbrio, visto que está gerando recursos suficientes para remunerar os seus fatores de produção. Com ele é possível entender a quantidade de vendas que precisam ser realizadas para que as receitas igualem os custos e despesas, resultando em lucro zero. Este ponto indica o mínimo de receita gerada pela produção para que a empresa não sofra prejuízo, também é chamado de ponto de ruptura, ponto de nivelamento, ponto crítico ou ponto de quebra.

Para o mercado de um bem, a demanda por determinada mercadoria ou serviço representa a quantidade que os possíveis consumidores estariam dispostos e aptos a adquirir em função do seu preço. A lei da demanda diz que o preço do produto e a

quantidade demandada são inversalmente relacionados, ou seja, quanto mais alto for o preço do produto, menos pessoas estarão dispostos a pagar por ele.

A teoria da demanda descreve o que os consumidores individuais escolhem da quantidade (melhor possível) de cada bem, em função dos rendimentos, preços, preferências, entre outros. Uma expressão para isso é a maximização da utilidade. Neste contexto, utilidade refere-se às preferências relativas dos consumidores individuais. Portanto, a utilidade e a renda são então usadas para modelar os efeitos de mudanças de preço nas quantidades demandadas.

A medida do consumo do benefício pode ser ilustrada na figura (1.1). Se o equilíbrio ocorre, o consumo do benefício cresce. A área sombreada representa o consumo utilidade, que é composto pela área inferior retangular, correspondente ao valor econômico do produto ($p_k \times q_k$) e pela parte superior da área triangular, que corresponde ao excesso do consumo ou a medida de como ganhar mais do que pagar por este. Para cada classe de consumo de um determinado produto, o excesso é dado pela diferença entre o valor deste produto e pelo custo de produção do mesmo. No caso especial onde o dinheiro fornece um benefício adequado da utilidade, a função objetivo pode ser interpretada como maximização do benefício social *pay-off*.

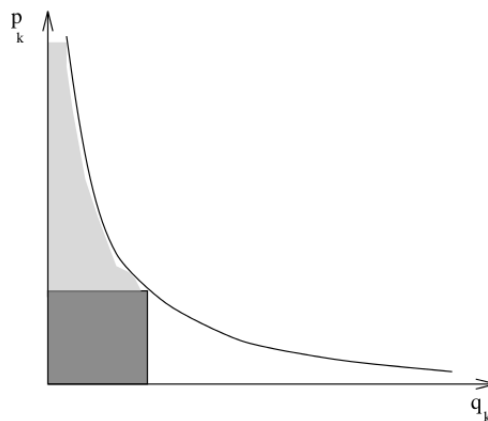


Figura 1.1: Função utilidade

As Figuras (1.1) e (1.2) (retiradas do artigo *Multicommodity Flows with Price Sensitive Demands* - (Ouorou et al., 2001)) ilustram o caso de uma mercadoria (k), como é avaliado o consumo utilidade e como é encontrado o ponto que maximiza o benefício social. A função $\phi(q_k) = p_k$ avalia a disposição dos clientes a pagar por um determinado tipo de serviço através da função utilidade, que é dada pela integral de curva de demanda (com variação até o fluxo realizado).

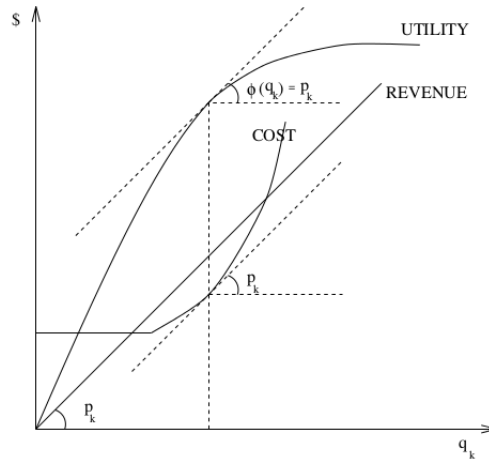


Figura 1.2: Função utilidade

1.0.1 Função de Demanda Inversível

De acordo com Luna (1979), para representar a interdependência econométrica entre os vetores de preço \mathbf{p} e demanda \mathbf{q} , uma função de demanda inversível $\mathbf{p} = \phi(\mathbf{q})$ é supostamente conhecida. A partir disso, introduz-se a possibilidade de considerar uma interdependência linear multivariável entre o vetor de preço e o de consumo de demanda:

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k^0 - \mathbb{P}\mathbf{p}_k \quad (1.1)$$

onde q^0 é um vetor k -componente positivo e \mathbb{P} é uma matriz quadrada, simétrica e definida negativa, garantindo a existência da matriz inversa \mathbb{P}^{-1} . Assim, existe a correspondência entre q_k e p_k e a seguinte função inversa pode ser definida:

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{p}_k^0 - Q\mathbf{q}_k \quad (1.2)$$

onde $Q = \mathbb{P}^{-1}$ e $\mathbf{p}_k^0 = \mathbb{P}^{-1}\mathbf{q}_k^0$ implicam que Q é também uma matriz definida simétrica e definida negativa.

A função $\phi(q_k)$ pode ser escrita como:

$$\int_0^{q_k} \phi(\xi_k) d\xi_k = \sum_{k \in K} \left(p_k^{0\top} q_k - \frac{1}{2} q_k^\top Q q_k \right) \quad (1.3)$$

em que $\mathbf{q}_k^\top = [q_{k1}, \dots, q_{k|L|}]$, e $q_{kl} \in \Re$.

Observe que esses vetores possuem um componente para cada tipo de serviço $l \in L$. Por um lado, os preços são oferecidos por um mercado competitivo. Por outro lado, as funções de demanda são adequadamente dimensionadas para evitar preços e demandas negativas. Isso implica que as funções de demanda são consistentes com a exclusão de cada tipo de serviço e com a disponibilidade de pagamento por todos os preços elencados, inclusive pelo maior preço possível.

Além disso, não há interdependência de demanda entre os preços de diferentes nós de mercado. Isso nos permite expressar uma função utilidade de consumidor separada por cada nó de mercado $k \in K$ ou $\psi(q_k) = \int_0^{q_k} \phi(\xi_k) d\xi_k$ que leva a $\sum_{k \in K} \psi(q_k)$.

$$\sum_{k \in K} \psi(q_k) = \int_0^{q_k} \phi(\xi_k) d\xi_k = \sum_{k \in K} \left(p_k^{0\top} q_k - \frac{1}{2} q_k^\top Q q_k \right) \quad (1.4)$$

Experimento Ilustrativo

Observe o seguinte experimento ilustrativo, onde adota-se uma função de preço-demanda com a seguinte forma:

$$q = q^0 - \mathbb{P}p$$

ou

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1^0 \\ q_2^0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

cujas funções inversas são dadas por:

$$p = p^0 - \mathbb{Q}q$$

isto é:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1^0 \\ p_2^0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.0 & -\Delta \\ -\Delta & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

onde $q_{21} = q_{12} = -\Delta$, com $\Delta \in \{0, 20, 40\}\%$. Logo, $0 \leq \Delta \leq 0.4 \max\{q_{21}, q_{12}\}$. Em que Δ é o fator de influência de um nível de serviço sobre o outro.

Usualmente, na literatura econômica, exige-se que cada produto segue a lei da de-

manda negativamente-inclinada, que significa que os efeitos direto da escolha de preços são negativos ou que os elementos da diagonal \mathbb{Q} são negativos. Outra exigência é que a matriz \mathbb{Q} seja fortemente quasi-diagonalizada, grosseiramente significa que deve existir algumas relações entre preço cruzado e direto. Ademais, não existem razões econômicas para assumir a simetria da matriz \mathbb{Q} . Isso ocorre apenas pelo fato dessa suposição implicar em um programa matemático mais fácil de ser interpretado sob estudos de preços.

O modelo é inserido dentro do quadro geral da análise de equilíbrio neoclássica e também deve ser aplicado sob hipóteses de *ceteris paribus* (essa condição é usada na economia para fazer análise de mercado de influência de um fator sobre outro, sem que os demais sofram alterações).

1.0.2 Função de Custo de Congestionamento

Muitos sistemas complexos competem por recursos escassos de uma rede, seja por uma agressão física como no caso dos sistemas de transportes urbanos congestionados ou abstração, encontrada em certos problemas financeiros e econômicos. Estes exemplos podem ser formulados e estudados como problemas de equilíbrio da rede. Aplicações de problemas de equilíbrio de rede são comuns em muitas áreas, como em engenharia, economia, pesquisa operacional e gestão da ciência (Nagurney, 1999, 2006; Florian and Hearn, 1995).

Esta tese apresenta metodologias para lidar com demandas e tarifas dependentes no setor econômico relacionados com a função utilidade. O problema determina a rede ótima e as decisões de preços a fim de maximizar o lucro total, uma vez que os lucros dependem dos níveis de preço, custos de congestionamento, entre outros.

Pode-se definir a qualidade de serviço como o grau em que as expectativas dos clientes são atendidas, por meio de mecanismos que favoreçam a identificação de suas necessidades e possibilitam a percepção sobre o serviço prestado. Portanto, a qualidade de serviço é avaliada através da medição dos efeitos de congestionamento, enquanto que o benefício social líquido é representado pela função utilidade descontada dos custos convexos de congestionamento, instalação, transmissão e infraestrutura.

A qualidade de serviço é garantida pela função convexa não-linear que é crescente em $[0, +\infty)$, contínua estando apresentada na equação a seguir:

$$\tau\left(\sum_{l \in L} g_l\right) = a\left(\sum_{l \in L} g_l\right)^b \quad (1.5)$$

que mede os efeitos de congestionamento causados pelo fluxo total. Sem perda de

generalidade, adota-se a lei de função convexa com $a > 0$ e $b \geq 1$ sendo parâmetros relacionados às características da tecnologia de transmissão. No entanto, outras funções convexas podem ser usadas, como por exemplo, a função de atraso médio de *Kleinrock* (Kleinrock, 2007).

1.0.3 Os problemas

Problema de planejamento de dois níveis regional e nacional e decomposição de programação matemática aplicada ao modelo de equilíbrio de preço espacial, onde é considerado mercados separados espacialmente foi apresentado por Luna (1978). O modelo apresenta estratégias computacionais com análise quantitativa de um setor de economia global.

Luna (1979) apresentou um modelo de equilíbrio de preço de multimercadoria em telecomunicação e propôs uma técnica de decomposição para resolvê-lo. Neste artigo também são apresentados dois lemas gerais cujo tomados em conjuntos implicam em um único vetor multiplicador ótimo. Ele examina o caso particular do modelo de equilíbrio econômico setorial e apresenta um procedimento de coordenação de quota e alguns resultados sobre as propriedades de unicidade. Já Luna et al. (1997) estudaram o transporte de fluxo multimercadoria sob demandas sensíveis a preço, como a introdução da concorrência afeta o desempenho da rede e o bem-estar dos consumidores quando são adotadas diferentes políticas tarifárias.

Do ponto de vista do setor de telecomunicação, um modelo de equilíbrio econômico para um único nível de serviço é apresentado por Ouorou et al. (2000). Além disso, foi apresentado uma classe de roteamento de mensagens que lida com medidas alternativas para diferentes classes de serviços e também com demanda variável para esses serviços.

Neste trabalho, diferentes problemas envolvendo competição entre distintos níveis de serviços com demandas sensíveis a preço no setor econômico são propostos. Os mesmos analisam a sensibilidade da demanda para a qualidade do serviço nos problemas de projeto de redes em árvore aplicado ao sistema de telecomunicação e também, no problema de localização de facilidade em dois níveis aplicado ao sistema de privatização da área da saúde.

O modelo é formado pela maximização do benefício social que é medido pela maximização da função utilidade menos os custos convexas de congestionamento, custo de transporte e infraestrutura e os custos de instalação. O problema determina as decisões ótimas de preço a fim de maximizar o lucro total, considerando que estes serviços são ofertados para dois níveis e que sofrem efeitos de congestionamento.

A ideia é otimizar o uso da rede avaliada, com atenção voltada ao que os consumidores estão dispostos a pagar pelo produto dada a sua preferência e utilização destes, ou

seja, o modelo maximiza a função utilidade e designa a relação de preços e quantidade demandada em cada nível de serviço.

Além do estudo econômico, este trabalho proporciona uma modelagem e uma estrutura algorítmica seguindo a tendência de trabalhar com variações de preços na área de telecomunicações ofertando os níveis de serviço de velocidade rápida e média e no setor de privatização da área da saúde ofertando os níveis de serviço mais caro e popular. Diante disso, o algoritmo é construído a partir da melhor estratégia e planejamento da escolha de preços para alocar o custo deste sistema ótimo projetado para dois níveis de serviços.

Os problemas propostos são modelados através da programação matemática adaptadas a partir de formulações tradicionais das áreas de projeto de redes em árvore e localização de facilidades em dois níveis, obtendo uma formulação não-linear inteira mista. Para uma eficiente resolução, o algoritmo Aproximação Externa foi proposto. Estudos numéricos indicam que o algoritmo proposto é altamente eficiente para a resolução de problemas de grande escala (Camargo et al. (2011), Camargo et al. (2008), Costa (2005), Ljubić and Moreno (2018), Delfino and de Oliveira (2018), Su et al. (2018), entre outros). Resultados de experimentos computacionais obtidos utilizando instâncias padrão da literatura comprovam a eficiência do algoritmo em questão ao se comparar com o aplicativo comercial *CPLEX*.

1.1 Problema de projeto de redes com demandas sensíveis a preço e efeito de congestionamento

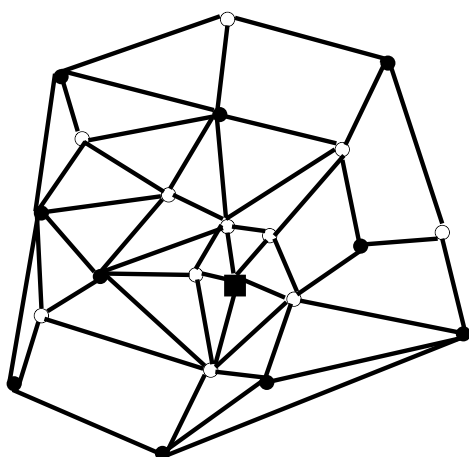
O Capítulo (2) apresenta o artigo intitulado "A tree network design problem with price sensitive demands and congestion effects". Esse manuscrito introduz o problema de projeto de redes em árvore com demanda sensível a preço e efeito de congestionamento. A discussão aborda o uso do modelo para a competição entre diferentes níveis de serviço com demandas sensíveis a preço no setor econômico aplicado ao sistema de telecomunicação. Neste sentido, o equilíbrio é atingido quando o preço da demanda é igual ao preço da oferta mais os custos de transporte, congestionamento e infraestrutura, caso o preço de demanda for inferior ao preço de fornecimento mais o custo de transporte e congestionamento.

As redes são as veias entre todas as atividades de comunicação espalhadas pelo espaço e tempo. Redes de transporte e redes logísticas possibilitam a circulação das pessoas, bens e serviços, ao passo que as redes de comunicação permitem a troca de mensagens e informações. As redes de energia fornecem a alimentação para apoiar atividades econômicas. A variedade de tipos de redes inclui os sistemas de distribuição

de energia, o sistema de fornecimento de água, redes de telecomunicação, os serviços de saúde, malhas ferroviárias e rodoviárias, sistemas de estradas, entre outros.

Os Problemas de projeto de redes de transporte de energia, matéria ou informação estão entre os mais pesquisados na área de otimização combinatória. Pode-se encontrar um *survey* abordando tais problemas em Beckmann et al. (1956); Dafermos and Sparrow (1969); Magnanti and Wong (1984); Costa (2005); Minoux (1989); Miranda et al. (2011), entre outros.

Dado um grafo, o problema de projeto de redes consiste em encontrar um subgrafo que liga um nó fornecedor a um nó de demanda a um custo mínimo. Cada arco da rede é associado a três custos: custo fixo que representa a conexão do arco, um custo operacional unitário de transmissão de uma unidade de fluxo através do arco e custo de congestionamento não linear. Além disso, o problema pode ter terminais heterogeneos, como o nó de *Steiner* ou de transbordo. A Figura (1.3) ilustra a rede do problema em estudo.



O quadrado em negrito e os círculos em negrito e branco são a raiz da árvore, o nó de demanda e de transbordo, respectivamente, e as linhas em negrito são as conexões ativas.

Figura 1.3: Problema de projeto de redes.

A maioria dos textos, no entanto, chamam a atenção para um único tipo de rede e, em seguida, resolve problemas particulares. Por exemplo, [Beckmann et al. \(1956\)](#) concentram-se seu estudo no tráfego de estrada e de transporte ferroviário. Já [Bertsekas et al. \(1992\)](#) discutem os problemas relacionados à redes de dados. Outros textos, como [Bertsekas and Tsitsiklis \(1989\)](#) seguem uma abordagem mais geral em relação a tipos de redes, mas consideram apenas questões de otimização de redes, tais como o caminho mais curto, caminho de fluxo máximo, roteamento de veículos, o fluxo multiproduto, etc. Estas abordagens são complementadas por obras como [Jungnickel \(1994\)](#), que estuda a complexidade dos problemas de redes e fornece alguns algoritmos para sua solução.

Já o conceito de telecomunicação compreende todas as formas de comunicação à distância. Como tal, a telecomunicação é uma técnica que consiste na transmissão de mensagem de um ponto para outro, geralmente de modo bidirecional. A telefonia, o rádio, a televisão e a transmissão de dados através de computadores fazem parte do setor das telecomunicações. Não há dúvidas de que as inovações tecnológicas na área das telecomunicações ainda não se esgotaram, pois é uma constante e não param de apresentar notáveis crescimentos e inovações. O modem possibilitou a transmissão de dados entre computadores e outros dispositivos, constituindo assim o ponto de partida para o desenvolvimento da Internet e outras redes informáticas.

Hoje em dia, as telecomunicações são parte integrante de um ramo industrial que move grande porcentagem da economia em todo o mundo. Para um país com as dimensões do Brasil, as mesmas são de fundamental importância. Considerando-se ainda que, no momento atual, os fluxos de comunicação a longa distância são responsáveis por uma enorme circulação de informações, concluindo-se que nenhum país pode prescindir de um eficiente sistema de serviços de transmissão de dados.

A competição para conquistar clientes se dá através do fornecimento de serviços com rapidez e convergência. A digitalização de serviços significa que diferentes tipos de conectividade serão ofertados na rede, e vendidos em pacotes. Atualmente esses pacotes concentram-se principalmente em serviços de comunicação e mídia, eles poderão ser estendidos a outros ramos industriais, como varejo e energia. Os prestadores de serviços de fibra ótica devem continuar a investir em suas redes para responder a crescente demanda de alta velocidade. Se não, eles são ameaçados por empresas de redes alternativas.

O equilíbrio econômico é apresentado para um problema de projeto de redes de telecomunicação, considerando demandas sensíveis a preços e efeitos de congestionamento em diferentes classes de serviços. Admite-se que essas classes são ofertadas na rede de banda larga, com dois níveis de serviço (velocidade média e rápida) e estes competem por usuários espalhados em uma determinada área geográfica. A qualidade

de serviço (do inglês *quality of service - QoS*) é avaliada através da medição dos efeitos de congestionamento na rede, enquanto que o benefício social líquido, representado pela função utilidade descontada dos custos convexos de congestionamento e custos de transmissão e infra-estrutura, é maximizado.

Tentando capacitar as comunidades locais e aumentar a competitividade do país, em 2015, durante o governo de Barack Obama presidente dos Estados Unidos, pediu à Comissão Federal de Comunicações: "garantir que as comunidades tenham as ferramentas necessárias para satisfazer a demanda de banda larga de seus cidadãos", argumentando que o investimento privado não resultou em uma infraestrutura de banda larga adequada e que as comunidades deveriam desempenhar um papel de liderança expandindo o seu acesso ([Strickling, 2015](#)). Seguindo um processo semelhante, o governo brasileiro lançou um programa nacional para levar banda larga a todas as cidades brasileiras ([Portal Brasil, 2014](#)) oferecendo financiamento para operadoras de banda larga elegíveis e não atendidas em algumas áreas brasileiras. A ideia é que o governo instale a infraestrutura de interconexão dispendiosa, permitindo que diferentes operadoras atendam e comprem nos mercados recém-criados.

O modelo considera o problema de projeto de redes em árvore sob efeitos de congestionamento, com ênfase em uma economia competitiva entre os mercados, isto posto, foi proposto uma técnica de aproximação para resolvê-lo. A principal relevância é fornecer um modelo matemático assumindo que diferentes jogadores oferecem os mesmos serviços (por exemplo: internet, telecomunicação, Tv a cabo), com diferentes níveis de serviço (médio e rápido), dessa forma, há uma disputa de clientes em um mercado com demandas sensíveis a preço, na rede. O trabalho analisa a sensibilidade da demanda pela qualidade do serviço em tais sistemas e permite a solução desses problemas para casos de grande escala.

Este artigo tem duas principais contribuições: *(i)* formulação integrada para projetar sistemas de banda larga planejados centralmente evitando efeitos de congestionamento e com demandas sensíveis a preço para diferentes classes de serviço; *(ii)* modelo computacional capaz de resolver instâncias em grande escalas em tempo computacional bom.

O problema é não-linear inteiro misto e de difícil resolução, para tratar esta dificuldade, aplica-se a técnica de Aproximação Externa. Finalmente, resultados computacionais confirmam a eficiência do algoritmo proposto ao resolver instâncias de grande porte para o problema. Apesar do potencial de aplicação deste problema, ele pode ser estendido a um problema mais complexo que consiste em três ou mais níveis de serviços.

1.2 Problema de localização de facilidades em dois níveis com demandas sensíveis a preço e efeito de congestionamento

O Capítulo (3) apresenta o artigo intitulado "Problema de localização de facilidades em dois níveis com demandas sensíveis a preço e efeito de congestionamento". Este manuscrito apresenta um modelo que lida com situações de preço sensível, o ambiente competitivo da privatização na área da saúde, assim como o efeito que o congestionamento causa nestes serviços. Neste sentido, o equilíbrio é atingido quando o preço da demanda é igual ao preço de oferta mais os custos de transporte, congestionamento e instalação.

Os planos de saúde representam uma forma de proteção para o indivíduo no caso dele necessitar de cuidados médicos, odontológicos, entre outros. Ainda que o acesso a esses serviços estejam garantidos pela Constituição Federal do Brasil, por meio do Sistema Único de Saúde. No entanto, devido à alta demanda, o Estado não consegue dar resposta a todas as pessoas que necessitam de cuidados médicos. Por esse motivo, algumas empresas passaram a atuar nessa área.

A privatização pode ser considerada como a transferência de propriedades e funções do governo de órgãos públicos para privados, que pode consistir de organizações voluntárias, sem ou com fins lucrativos. Historicamente, as experiências negativas, que abriram a porta para a privatização, eram a rigidez das instituições públicas e sua incapacidade de mudar ou adaptar-se a diferentes estímulos do meio ambiente, incluindo as expectativas da população e dos pacientes.

A privatização apresenta vários desafios, destacando-se: a utilização eficaz dos recursos financeiros, a equidade e a existência universal dos cuidados da saúde, a eficiência e a qualidade no atendimento, entre outros. A privatização universal nos cuidados da saúde desafia a princípios mais importantes de cuidados de saúde, ao mesmo tempo que assegura benefícios comprovados.

Um dos maiores obstáculos enfrentado pela China, está sendo em como reformular o seu sistema de prestação de serviço de saúde ineficiente e mal organizado de forma eficiente. Diante dessa situação, os professores da Escola de Saúde Pública de Harvard estão ajudando o governo chinês a testar um modelo alternativo que abrange a prevenção, a atenção primária e a proteção de seguros.

Problemas de privatização do sistema de saúde podem ser representados por um problema de localização de facilidades, que tem por objetivo localizar um objeto que é chamado facilidade, esta deverá interagir com outros objetos que possuirão localizações fixas.

A Figura (1.4) ilustra a configuração de uma solução para o problema de localização de facilidades em dois níveis no qual existem três candidatos a facilidade de primeiro nível, cinco candidatos de segundo nível e nove clientes a serem atendidos. Cada cliente é atendido por um par de facilidades ativas, no qual as setas representam fluxo de custo mínimo desta configuração. Por se tratar de um problema não capacitado, não faz sentido que um cliente seja atendido por mais de uma facilidade de primeiro ou segundo nível.

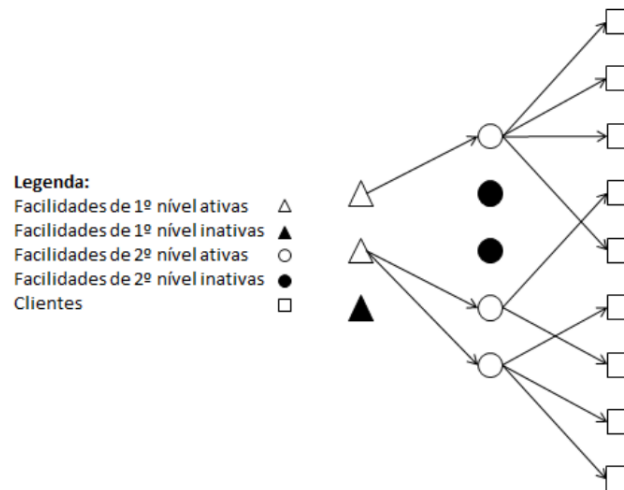


Figura 1.4: Representação esquemática de uma solução para o problema de localização de facilidades em dois níveis

Neste trabalho, considera-se que todos os serviços oferecidos são designados privados, onde cada cliente poderá escolher entre o serviço mais caro (considerado de alto nível) e o popular (médio nível). A qualidade de serviço é avaliada através da medição dos efeitos de congestionamento na rede, enquanto que o benefício social líquido, representado pela função utilidade descontada dos custos convexos de congestionamento e custos de transmissão e infra-estrutura, é maximizado. O problema é modelado através de uma formulação de otimização não-linear inteira mista. Para tanto, aplica-se a técnica de Aproximação Externa, que foi comprovada em experimentos computacionais, ser eficiente para tratar essa dificuldade, mostrando sua eficiência ao resolver instâncias de grande porte.

O artigo tem as seguintes contribuições: (i) uma formulação integrada para projetar sistemas de serviços de saúde centralmente planejados evitando efeitos de congestionamento e com demandas sensíveis a preço para diferentes classes de serviço; (ii) modelo computacional capaz de resolver instâncias de grandes escalas em tempo computacional bom.

1.3 Considerações finais

Nesta tese apresenta-se vários problemas envolvendo demandas sensíveis a preço, aplicados ao projeto de redes em árvore e de localização de facilidades em dois níveis. Estes problemas abordam a competitividade entre diferentes níveis de serviço, assim como qual o melhor preço a ser ofertado para cada serviço e o lucro máximo total. Estes problemas são de considerável importância para a literatura de problemas econômicos por apresentar o efeito cruzado de preço e comparações de melhores escolhas destes.

Para cada problema, uma formulação de programação matemática, bem como, métodos de resolução são propostos, destacando-se o método exato baseado em aproximação, o método de Aproximação Externa. Experimentos computacionais comprovam o seu desempenho quando comparado com o aplicativo comercial *CPLEX*. Apesar do potencial de aplicações dos problemas propostos, algumas extensões destes podem ser exploradas em trabalhos futuros. Ao se considerar o problema de demandas sensíveis a preço, pode-se citar a otimização robusta e a teoria dos jogos.

1.4 Organização da tese

Esta tese é uma coleção de dois artigos apresentados nos Capítulos (2) e (3) abordando demandas sensíveis a preço considerando efeito de congestionamento para os problemas de projeto de redes e localização de facilidades, respectivamente.

O capítulo (2) apresenta o artigo "A tree network design problem with price sensitive demands and congestion effects". Este artigo introduz o problema de projeto de redes em árvore com demanda sensível a preço e efeito de congestionamento, para o sistema de serviço de telecomunicação.

O capítulo (3) é apresentado o artigo "Problema de localização de facilidades em dois níveis com demandas sensíveis a preço considerando efeito de congestionamentos". Este artigo trata do problema de localização de facilidades em dois níveis aplicado no sistema de privatização da área da saúde.

E finalmente no capítulo (4) apresenta a conclusão desta tese e possíveis trabalhos futuros.

Capítulo 2

A tree network design problem with price sensitive demands and congestion effects

Chapter information

This chapter presents the article submitted for publication in Socio-Economic Planning Sciences: Santos, K., de Camargo, R.S., Freitas, J.-F., Pinto, L. R.

Resumo

In many telecommunication applications, it is not unusual for service providers (e.g. Internet, telecommunication, cable companies) to compete for clients that are not only sensitive to price but also to the quality of the provided service level. Usually, the service level is associated with the clients' perception of congestion effects for the contracted service. Hence modeling and solution tools that help managers to plan such networks by balancing utility function and costs and congestion effects have a great economical appeal. Here we address a network design problem with price sensitive demands and congestion effects commonly found in many telecommunication systems. The economic equilibrium is achieved by maximizing the utility function minus convex congestion, infrastructure and transportation costs. It is assumed that different players offer different levels of services (medium and fast) while competing for clients in the market. We propose a decomposition framework to solve such problem and study how demands and market competitiveness are affected by different cross-price levels.

Palavra-chave: Convex network design, Outer approximation technique, Quality of Service (QoS) price equilibrium problems

2.1 Introduction

Even though it is debatable if the Internet is a commodity or utility, it is undeniable how it has virtually affected and transformed our daily lives to the point of most of us to consider its access an universal, unconditional, and unalienable right like access to water or energy. Anyhow it is indisputable the role that Internet plays on the economic growth of local communities, and how it helps to attract and retain business.

The Brazilian government has launched a national program to take broadband to all Brazilian cities ([Portal Brasil, 2014](#)) by offering financing to eligible broadband carriers in unserved and undeserved areas. The idea is to have the government install the costly interconnection infrastructure while allowing different carriers to serve and compete in the newly created markets. Following a similar suit, trying to empower local communities and increase the country competitiveness, in 2015 the Obama's administration has urged the Federal Communications Commission "to ensure that communities have the tools necessary to satisfy their citizens' demand for broadband", arguing that private investment has not resulted in an adequate broadband infrastructure and that communities should play a leading role in expanding its access ([Strickling, 2015](#)).

These centrally planned programs that encourage a competitive environment to establish broadband systems require network solutions with the lowest installation and transmission costs while offering the highest Quality of Service (QoS) possible ([Fratta et al., 1973](#)). To design such systems, optimization tools capable of handling large-scale problems that cope with infrastructure decisions, price sensitive demands and congestion effects are required.

Several works can be found addressing such problems of network design, among them [Beckmann et al. \(1956\)](#); [Dafermos and Sparrow \(1969\)](#); [Magnanti and Wong \(1984\)](#); [Costa \(2005\)](#); [Minoux \(1989\)](#); [Miranda et al. \(2011\)](#). Most texts, however, draw attention to a single type of network and then solve particular problems. For example, ([Beckmann et al. \(1956\)](#), [Bertsekas et al. \(1992\)](#), [Bertsekas and Tsitsiklis \(1989\)](#), [Jungnickel \(1994\)](#)). The concept of an economy network was initially presented by [Cournot and Fisher \(1897\)](#), who considered that a competitive price is determined by the intersection of supply and demand curves, and addressed in the context of two separate markets spatially.

[Samuelson \(1952\)](#) considered the problems of spatial price equilibrium, stating that the solution of the problem of spatial price equilibrium, as posed by [Enke \(1951\)](#), could be obtained by solving an optimization problem, in which the objective function, although artificial, had the interpretation of a social network of profit function. Spatial price equilibrium emerged in agricultural markets, energy markets and financial markets, and these models have provided basis for the modeling of interregional

and international trade (Samuelson (1952), Takayama and Judge (1964, 1971), Luna (1978), Harker (1984) e Nagurney (1999)).

Over the years, researchers have sought the design of such computational tools. Luna et al. (1997) have studied multi-commodity flow transportation under price sensitive demands, and how the introduction of competition affects the network performance and consumers welfare when different tariff policies are adopted. Ouorou et al. (2000) have proposed a methodology to deal with tariff dependent demands in a multi-commodity price equilibrium problem. Different service classes are assumed to require different alternative performance measures while service demands are sensitive to these measures. Ouorou et al. (2001) have also extended Luna et al.'s work by considering capacity expansion decisions and price sensitive demands. All of the aforementioned researches share the same underlying assumption: the network configuration is known beforehand, i.e. they have not dealt with infrastructure topology decisions.

Miranda et al. (2011) have addressed a tree local access network design problem with congestion effects within a context of centralized computer systems. The proposed nonlinear multi-commodity flow formulation minimizes the total cost composed of arc fixed and operational costs while forming an arborescence that connects every user to a source node acting as a switching center or server. Demands have been assumed to be known and deterministic. Miranda et al.'s framework handles neither competition nor different classes of service.

In this work, different problems involving competition between different levels of services with sensitive demands at the economic sector are proposed. The the sensitivity of the demand for quality of service network project to be applied to the telecommunication system. We introduce a formulation to design broadband networks considering price sensitive demands, congestion effects, infrastructure decisions, and different classes of service. It is assumed that different players offer two broadband services (e.g. medium and high speeds) to compete for users scatter over a geographical area, while a central planner figure establishes the underlying topology. The QoS is assessed by measuring congestion effects over the network, whereas the net social benefit, represented by the utility function discounted of the congestion convex costs, and transmission and infrastructure costs, is maximized. Given the non-linear nature of the mixed integer model, an efficient hybrid Outer approximation (Duran and Grossmann, 1986b; Fletcher and Leyffer, 1994) is devised to solve large scale test instances in reasonable computational time.

The paper main contributions are: (i) an integrated formulation to design centrally planned broadband systems avoiding congestion effects, and with price sensitive demands to different service classes; (ii) a computational framework capable of solving large scale test instances in reasonable computational time. This work is organized as

follows: §3.2 introduces notation and definitions. §3.3 presents the devised solution framework. Final remarks and future research are done in §3.5.

2.2 Notation and definitions

Let $G(V, A)$ be a directed graph, in which V and $A \subseteq \{(i, j) \in V \times V : i \neq j\}$ are node and arc sets, respectively. Set A represents node pairs that can be directly connected by a transmission link. Let also s be the source or root node denoting the local hub or switching center that must be connected to market nodes within set $K \subseteq V$ to serve two service types of bandwidth (medium and high speed Internet services) represented by set L .

For each arc $(i, j) \in A$, let b_{ij} be the installation and infrastructure cost, and c_{ijl} be the unitary transmission cost for service type $l \in L$. We assume that $b_{ij} = \zeta \delta_{ij}$, i.e. the installation cost is proportional to the length δ_{ij} of arc (i, j) weighted by a linkage structural cost per unit of distance ζ . Likewise, $c_{ijl} = \theta_l \delta_{ij}$ in which θ_l is transmission specific cost per unit of distance for service type $l \in L$, and the variable $g_{ijl} \geq 0$ representing the flow amount of service type $l \in L$ passing via arc $(i, j) \in A$.

The Quality of service (QoS) is assessed on each arc $(i, j) \in A$ by a nonlinear convex function that is increasing in $[0, +\infty)$, proper, and smooth or $\tau(\sum_{l \in L} g_{ijl}) = a(\sum_{l \in L} g_{ijl})^b$ which measures the congestion effects caused by the total flow passing through arc (i, j) . Without loss of generality, we adopted a power law convex function with $a > 0$ and $b \geq 1$ being parameters related to transmission technology features. Nonetheless other convex functions can be used instead, e.g. the Kleinrock average delay function (Kleinrock, 2007).

To represent the econometric interdependence between price \mathbf{p} and demand \mathbf{q} vectors, an invertible demand function $\mathbf{p} = \phi(\mathbf{q})$ is assumed to be known (Luna, 1979). By defining a linear multi-variable linear interdependence between price and demand vectors or $\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_k^0 - \mathbb{P}\mathbf{p}_k$, in which matrix \mathbb{P} is assumed to be symmetric positive definite, it is possible to find a linear inverse function $\mathbf{p}_k = \mathbf{p}_k^0 - Q\mathbf{q}_k$, where $Q = \mathbb{P}^{-1}$ and $\mathbf{p}_k^0 = \mathbb{P}^{-1}\mathbf{q}_k^0$. In which $\mathbf{q}_k^\top = [q_{k1}, \dots, q_{k|L|}]$, and $q_{kl} \in \mathfrak{R}$. Let also d_{kl} be the maximum market size of node $k \in K$ for service type $l \in L$.

Note that these vectors have one component for each service type $l \in L$. Function $\phi(\mathbf{q})$ assesses the customers' willingness to pay for a given service type through an utility function which is given by the integral of the demand curve up to the realized flow or $\int_0^{\mathbf{q}} \phi(\xi) d\xi$. This integral is presumed to exist and to be strictly concave. Further, the prices are given by a competitive market, while the demand functions are properly scaled to avoid negative prices and demands, i.e. the demand functions are consistent

with leaving some unattended demand for each service type, and with the existence of some willingness to pay even for the maximum possible price.

Moreover, no demand interdependence among prices of different market nodes exists. This allows us to express one separate consumer utility function per each market node $k \in K$ or $\psi(q_k) = \int_0^{q_k} \phi(\xi_k) d\xi_k$ which leads to $\sum_{k \in K} \psi(q_k)$. Where the function $\psi(q_k)$ can now be written as $\left(p_k^{0\top} q_k - \frac{1}{2} q_k^\top Q q_k \right)$,

With the aforementioned, and with the help of variable $x_{ij} \in \{0, 1\}$, indicating if link $(i, j) \in A$ is installed ($x_{ij} = 1$) or not ($x_{ij} = 0$), the network design problem with price sensitive demands and congestion effects can be modeled as:

$$\max \sum_{k \in K} \psi(q_k) - \sum_{(i,j) \in A} \left(b_{ij} x_{ij} + \tau \left(\sum_{l \in L} g_{ijl} \right) + \sum_{l \in L} c_{ijl} g_{ijl} \right) \quad (2.1)$$

$$\text{s.t.:} \quad \sum_{(i \in N) \in A} x_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in V \quad (2.2)$$

$$\sum_{(s,j) \in A} g_{sjl} \geq \sum_{k \in K} q_{kl} \quad \forall l \in L \quad (2.3)$$

$$\sum_{(i,k) \in A} g_{ikl} - \sum_{(k,j) \in A} g_{kjl} \geq q_{kl} \quad \forall k \in K, l \in L \quad (2.4)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} g_{ijl} = \sum_{(j,i) \in A} g_{jil} \quad \forall j \in V \setminus K, l \in L \quad (2.5)$$

$$g_{ijl} \leq \sum_{k \in K} d_{kl} x_{ij} \quad \forall (i, j) \in A, l \in L \quad (2.6)$$

$$g_{ijl} \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A, l \in L \quad (2.7)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A \quad (2.8)$$

The objective function (2.1) maximizes the social net benefit set up as the maximization of the utility function discounted the costs of installing the infrastructure, transmitting the data, and convex congestion effects. Constraints (2.2) limits the number of active arcs incident to a node to one, i.e. they ensure that the structural variables x form a tree network rooted at the source node s . Constraints (2.3)-(2.6) guarantee the flow balance for variables g_{ijl} , while constraints (2.6) only permit flows on variables g_{ijl} if the respective associate arc $(i, j) \in A$ is installed. Together they assemble paths from the source node s to every market node $k \in K$. Finally, constraints (2.7)-(2.8) show the variables' domains.

Formulation (2.1)-(2.8) is a mixed integer non-linear program that can be solved by non-linear programming solvers (e.g. CPLEX QMINLP, Bonmin or Couenne solvers). Nonetheless as there are two sources of non-linearities (one stems from the utility

function, and the other from the congestion effects), and due to the poor coupling of variables \mathbf{x} and \mathbf{g} via big-M like constraints (see constraints (2.6)), these solvers are of limited reach, being useful for small size instances only.

Given the problem's relevance and application, it is of interest to develop tailored solution frameworks that can solve more realistic test cases. This can be achieved by exploiting the features of formulation (2.1)-(2.8) and by using some ingenuity. For fixed, feasible values for the structural variables \mathbf{x} , the resulting subproblem is a non-linear convex multi-commodity network flow problem that can be solved by specialized algorithms, e.g. [Ouorou et al. \(2000\)](#), given that the utility function has been dealt with first. Nonetheless concurrently handling the price equilibrium problem and congestion effects this way is not straightforward. A more manageable and direct approach can be devised by employing the outer-approximation technique ([Duran and Grossmann, 1986b](#)), which allows the solution of larger test cases in reasonable computational time.

2.3 The devised solution framework

2.3.1 The outer approximation algorithm

The outer approximation (OA) technique is a simple, but an effective method that relies on cutting planes to solve mixed integer non-linear programs ([Duran and Grossmann, 1986b](#); [Fletcher and Leyffer, 1994](#)). It linearizes the objective function's and constraints' non-linearities by outer approximations or supporting hyperplanes that are separated around primal solutions obtained within a coordination scheme that iteratively solves a master problem (MP) and a subproblem (SP). The MP has all of the original problem's variables and linear constraints, and the outer approximation hyperplanes generated by the SP. The algorithm finitely iterates in a sequence of relaxed versions of the original problem, i.e. the MP, and non-linear programming subproblems, i.e. the SP, until convergence to an optimal solution. Whereas the MP provides a lower bound for the problem, an upper bound is readily available by partially combining the current solutions of the MP and SP. A somewhat outdated survey, but thoroughly done, can be found in [Grossmann and Kravanja \(1995\)](#).

More formally, let a mixed integer non-linear program be written as $\min\{f(x, y) : g(x, y) \leq 0, x \in \chi, y \in \Upsilon\}$, in which functions $f : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}$ and $g : \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^p$ are continuously differentiable and convex in x , $f(x, y)$ is linear in y , and $\chi = \{x : x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b\} \subseteq \mathbb{R}^n$ is a non-empty, compact, convex set, while $\Upsilon = \{y : y \in \mathbb{R}^q, Hy \leq h\}$. Further, let Slater's constraint qualification holds for the solution of every non-linear programming problem stemmed by fixing $y \in \Upsilon$. Hence it is possible to reduce the problem to a pure non-linear program by choosing a fixed vector $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}}$ such that $\bar{\mathbf{y}} \in \Upsilon$ to

get the SP $\min\{f(x, \bar{y}) : g(x, \bar{y}) \leq 0, x \in \chi\}$. When solved, this SP allows to infer the gradient of functions $f(x, y)$ and $g(x, y)$ for every (\bar{x}, \bar{y}) . If no further feasibility constraints are required, a straightforward manipulation leads to an equivalent mixed integer problem known as the MP or $\min\{\eta : \eta \geq f(\bar{x}, \bar{y}) + \nabla f(\bar{x}, \bar{y})^\top \begin{pmatrix} x-\bar{x} \\ y-\bar{y} \end{pmatrix}, 0 \geq g(\bar{x}, \bar{y}) + \nabla g(\bar{x}, \bar{y})^\top \begin{pmatrix} x-\bar{x} \\ y-\bar{y} \end{pmatrix} \forall (\bar{x}, \bar{y}) \in \chi \times \Upsilon, \eta \geq 0, x \in \chi, y \in \Upsilon\}$.

For the present case, formulation (2.1)-(2.8) has a separable objective function on the linear and non-linear terms. Further, the utility and congestion functions are also separable, thus amenable to being outer approximated individually. For each arc $(i, j) \in A$ and service $l \in L$, $\tau_{ijl}(g_{ijl})$ can be replaced by variable $\eta_{ijl} \geq 0$ in the objective function and constraints (2.9), while for every $k \in K$, $\psi(q_k)$ can be substituted by variable ω_k and constraints (2.10), yielding the following OA MP:

$$\max_{\eta, \omega \geq 0} \sum_{k \in K} \omega_k - \sum_{(i,j) \in A} \left(b_{ij} x_{ij} + \sum_{l \in L} (\eta_{ijl} + c_{ij} g_{ijl}) \right)$$

s.t.: (2.1) – (2.8)

$$\eta_{ijl} \geq \tau_{ijl}(\bar{g}_{ijl}) + \nabla \tau(\bar{g}_{ijl})(g_{ijl} - \bar{g}_{ijl}) \quad \forall (i, j) \in A, k \in K, l \in L : 0 \leq \bar{g}_{ijl} \leq \mathcal{M}_l \quad (2.9)$$

$$\omega_k \geq \psi(\bar{q}_k) + \nabla \psi(\bar{q}_k)^\top (q_k - \bar{q}_k) \quad \forall k \in K : 0 \leq \bar{q}_k \leq \mathbf{d}_k \quad (2.10)$$

Note that no further feasibility constraints are required since constraints (2.3)-(2.6) ensure a path from source node s to each market node $k \in K$, and since the constraint set is linear making thus unnecessary to perform an outer approximation of the feasible region. The original mixed integer non-linear problem has then been transformed into an equivalent mixed integer linear problem of infinite-dimension. Though the number of constraints (2.9) and (2.10) is infinite, only a few are required to attain optimality. Hence constraints (2.9) and (2.10) are relaxed to be generated on demand within an iterative scheme illustrated in Algorithm 1.

Set Ω in line 3 of Algorithm 1 will have all of the points (\bar{q}, \bar{g}) produced by the OAMP. This set is extended at each iteration (line 7). Since this is a maximization problem, the upper bound, represented by ub in line 5, is obtained by solving the OAMP. The ub is monotonic, decreasing, whereas the lower bound, shown as lb in line 6, is not. The lb needs to be updated at each iterations when necessary (see line 6).

The OA method iterates until converging to an optimal solution, if one exists.

Algoritmo 1: A basic outer approximation scheme

```

1  $ub \leftarrow \text{inf}$ 
2  $lb \leftarrow -\text{inf}$ 
3  $\Omega \leftarrow \{\}$ 
4 While ( $ub \neq lb$ ) do
5  $(ub, \bar{\eta}, \bar{\omega}, \bar{q}, \bar{g}) \leftarrow OAMP(\Omega)$ 
6  $lb \leftarrow \max(lb, ub + \sum_{k \in K} (\psi(\bar{q}_k) - \bar{\omega}_k) + \sum_{(i,j) \in A} \sum_{l \in L} (\bar{\eta}_{ijl} - \tau_{ijl}(\bar{g}_{ijl})))$ 
7  $\Omega \leftarrow \Omega \cup \{(\bar{q}, \bar{g})\}$ 

```

2.3.2 Computational analysis

This section presents the carried out experiments for assessing the proposed model and solution technique. All computational tests were performed on a Dell PowerEdge T620 workstation, equipped with two Intel Xeon E52600v2 processors and 96 Gbytes of RAM memory, running Linux Ubuntu server 16.04, while the algorithm was implemented in AMPL set to call the IBM CPLEX 12.7 solver. Only one thread was set to be used by the solver. All coefficients were carefully chosen to comply with the modeling assumptions of Luna (1979), i.e. matrices Q and P were ensured to be symmetric, and positive definite by selecting proper price-demand coupling functions.

For these experiments, we adopted a price matrix having the following shape

$$P = \begin{bmatrix} \tilde{p}_{11} & \tilde{p}_{12} \\ \tilde{p}_{21} & \tilde{p}_{22} \end{bmatrix}$$

whose inverse is given as

$$Q = \begin{bmatrix} \tilde{q}_{11} & \tilde{q}_{12} \\ \tilde{q}_{21} & \tilde{q}_{22} \end{bmatrix}$$

, where $\tilde{p}_{12} = \tilde{p}_{21}$ and $\tilde{q}_{11} = \tilde{q}_{22}$. Initially, $\tilde{p}_{12} = \tilde{p}_{21}$ are set to 0 to find the initial inverse matrix Q, then $\tilde{q}_{11} = \tilde{q}_{22}$ are set to $\Delta \max\{\tilde{q}_{11} = \tilde{q}_{22}\}$ with $\Delta = \{0, 0.20, 0.40\}$. where Δ is the influence factor of one level of service over the other.

Two testbed sets were created. The first one, labeled Nug set, has 5 instances extracted from the Nugent et al. (1968) for the Quadratic Assignment Problem Library (QAPLIB) and available at <http://www.seas.upenn.edu/qaplib/inst.html>. The second one was randomly created by having demand nodes scattered within a square of 200x200 units after which Euclidean distances (δ_{ij}) were calculated between pair of nodes. Whereas the Nug instances have the root node located at the bottom left corner of the grid and all nodes fully interconnect by arcs, the random instances have the root node placed at the center of the square and fewer arcs.

For the random instances, arcs were first inserted by solving a minimum spanning tree problem to ensure a underlying connected graph, and later randomly added up to a given number, uniformly chosen within the range of [90, 100] % of the maximum number of edges ($|V|^2 - |V|$) yielding a node degree average of 14.8.

Fixed installation costs b_{ij} were set to $\zeta\delta_{ij}$ where $\zeta = 5$ and \cdot is a function that rounds to the nearest integer. Unitary transmission costs (c_{ijl}) for Internet service $l \in L$ on arc $(i, j) \in A$ were set to $\theta_l\delta_{ij}$ where θ_1 and θ_2 were set to 2 and 3, respectively. Market integer demands were also uniformly selected within the range [0, 50], while congestion parameter a was varied within $\{0, 5, 9\} \times (x10^{-3})$ as reported in Tables (2.1) and (2.3) with $b = 2$.

The created instances have sizes ranging from 14 to 21 nodes, and from 160 to 350 arcs, and were named after their number of nodes and arcs, and average node degree (\bar{d}) or $|V| - |A| - \bar{d}$. At all, 90 tests were used to compare the proposed Outer-approximation (OA) framework with the QMIP solver of CPLEX, as can be seen in the attained results reported in Tables (2.1)-(2.3). A time limit of 10 hours or 36,000 seconds was imposed to the solvers. The OA algorithm was stopped whenever the absolute optimality gap was smaller than 10^{-5} .

For the 45 tests reported in Table (2.1) that use the Nug instances, the proposed OA algorithm bested the QMIP of CPLEX in all but 4 instances (14-182-13- 9-40, 15-225-14-0-0, 15-225-14-0-5, 15-225-14-9-0), being 6.47 times faster than CPLEX. CPLEX failed to obtain the optimal solution for 12 instances which have the optimality percentage gaps shown in Table (2.1). Please, note that, for some instances, the OA framework outperformed CPLEX up to two scale orders of magnitude. For the 45 tests reported in Table (2.3) that use the random instances, both solvers were able to attain the optimal solution within the given time limit. Once again, the devised OA approach overcame the QMIP of CPLEX in all but 4 instances (14-180-12-0-40, 14-180-12-9-20, 14-180-12-9-40, 17-250-15-5- 40), being 7.4 faster than CPLEX. Though not a general rule, the greater the congestion parameter a , the greater is to be expected the computational time for both analyzed solvers. Once again, the proposed OA procedure has attained for these instances speedups of up to three scale orders of magnitude.

Note that the total number of branch-and-bound nodes used by the QMIP of CPLEX to attain the optimal solution is considerable large, especially for large inter-service couplings or a large number of arcs. Justifying thus the necessity of a computational framework capable of handling larger instances, as the one here devised.

Tables (2.2) and (2.4) report the average percentage of the total capture demand for each Internet service level, as well as, the average attained price per unit served. As the ties between the medium and fast services were increased by augmenting the Δ value, the expected reduction on the average demands as the services get more correlated. As the two services get strongly coupled by increasing Δ , the medium Internet services becomes less attractive, greatly reducing its demand level. Likewise, the greater the coupling between Internet services, the greater the average prices are, since less demand is captured. These findings establish the evidence that formulation properly captures the effects of price sensitivity and competition. Furthermore, the greater the congestion effects (represented by parameters a) are, the smaller the captured demand, but the greater the average prices per unit.

Tabela 2.1: Comparison of CPLEX QMIP solver with the devised OA algorithm for the Nug QAPLIB instances (Nug)

Instance	a	Δ	Objetive	CPLEX			OA		ratio	
				T(s)	#B&B	gap(%)	T(s)	#Int.		CPLEX T(s)/OA T(s)
$ V - A - \tilde{d}$	$\times 10^{-3}$	%	function							
14-182-13	0	0	5,000	40	81,984		12	34	3.33	
		20	4,582	47	101,617		9	30	1.57	
		40	4,167	47	103,317		14	31	3.36	
	5	0	4,907	85	84,203		49	34	1.73	
		20	4,491	77	72,815		59	30	1.31	
		40	4,081	83	82,304		47	30	1.77	
		0	4,866	48	29,716		37	35	1.30	
		9	20	4,451	48	33,316		17	29	2.82
		40	4,046	42	33,820		48	30	0.88	
	15-225-14	0	0	5,788	1,772	3,130,987		2,286	41	0.78
			20	4,933	7,233	13,564,637		365	33	19.82
			40	4,090	1,513	2,840,253		248	31	6.10
5		0	5,650	1,880	2,8942,109		2,402	33	0.78	
		20	4,801	2,254	2,009,868		1,125	33	2.00	
		40	3,976	1683	1,538,134		1,568	34	1.07	
		0	5,594	496	378,500		1,031	35	0.48	
		9	20	4,750	464	389,796		377	35	1.23
		40	3,931	552	438,028		398	34	1.39	
17-289-16		0	0	5,917	7,375	10,067,396		155	31	47.58
			20	5,022	5,050	71,245,49		163	31	30.98
			40	4,135	8,462	12,168,036		137	31	61.77
	5	0	5,761	22,085	12,588,880		1,582	34	13.96	
		20	4,874	21,664	12,648,899		1,599	34	13.55	
		40	4,006	20,547	13,254,091		2,507	35	8.20	
		0	5,698	6,139	3,174,187		1,782	34	3.45	
		9	20	3,021	3,120	23,085,415		2,305	37	1.35
		40	3,929	2,4645	14,349,088		398	34	61.92	
	18-306-17	0	0	6,009	21,173	19,384,781		449	30	47.16
			20	5,092	17,635	2,3610,594		863	34	20.43
			40	4,188	36,000	45,382,974	0.01	603	31	59.70
5		0	5,846	36,002	18,709,888	0.49	4,770	34	7.55	
		20	4,938	36,000	18,577,887	0.58	4,744	35	4.57	
		40	4,053	36,000	19,163,523	0.61	9,247	36	3.89	
		0	5,780	25,626	12,488,244		1,833	36	13.98	
		9	20	4,878	26,174	12,698,239		2,748	34	9.52
		40	4,005	23,242	11,738,576		2,544	36	9.14	
21-420-20		0	0	7,531	23417	165,487		301	31	77.80
			20	6,616	36,000	10,276,931	0.34	411	31	87.59
			40	5,710	36,000	12,874,073	0.54	52	33	692.31
	5	0	7,283	36,000	1,178,650	0.74	11,032	34	3.26	
		20	6,381	36,000	15,023,211	0.76	11,611	34	3.10	
		40	5,514	36,000	14,634,851	0.41	2,856	34	12.61	
		0	7,178	36,000	14,037,391	1.06	13,232	36	2.72	
		9	20	6,288	36,000	13,592,980	0.95	12,348	37	2.92
		40	5,357	36,000	1,527,0342	0.47	3,520	37	10.23	
	geometric mean				3760.68			581.61		6.47

Tabela 2.2: Average equilibrium demands (percentage) and prices for different levels of cross-price effects on the Nug instances.

Instance	a	$\delta = 0\%$				$\delta = 20\%$				$\delta = 40\%$			
		$ V - d_{fast} - d_{medium} \times 10^{-3}$	q_{fast}	q_{medium}	p_{fast}	p_{medium}	q_{fast}	q_{medium}	p_{fast}	p_{medium}	q_{fast}	q_{medium}	p_{fast}
14-160-156	0	97.93	93.80	0.84	0.05	96.73	92.63	0.92	0.05	94.30	89.46	1.01	0.05
	5	96.80	91.13	0.87	0.07	95.12	89.51	0.95	0.07	91.57	84.48	1.06	0.08
	9	96.01	90.40	0.88	0.08	94.24	88.53	0.97	0.08	90.23	82.64	1.09	0.09
15-210-180	0	96.90	88.16	1.28	0.13	94.43	85.56	1.37	0.13	89.48	78.34	1.51	0.15
	5	95.20	84.66	1.33	0.18	92.03	81.14	1.44	0.18	84.31	68.13	1.66	0.25
	9	94.62	80.17	1.38	0.24	90.69	76.30	1.50	0.25	82.72	66.90	1.69	0.25
17-220-190	0	96.86	90.36	1.25	0.1	94.78	87.95	1.34	0.11	90.49	81.56	1.46	0.11
	5	95.33	84.33	1.33	0.18	92.11	80.93	1.43	0.19	85.95	72.18	1.59	0.2
	9	94.06	81.47	1.37	0.22	88.98	78.09	1.5	0.21	81.77	65.34	1.72	0.26
18-230-195	0	96.05	89.92	1.28	0.11	93.82	87.23	1.38	0.11	89.53	80.69	1.51	0.11
	5	94.3	85.66	1.35	0.16	91.16	81.61	1.46	0.17	84.95	71.72	1.64	0.19
	9	92.55	83.88	1.39	0.19	90.16	76.68	1.52	0.24	83.09	67.1	1.7	0.25
21-300-240	0	97.6	88.09	1.41	0.13	95.47	86.56	1.6	0.12	92.17	81.06	1.82	0.12
	5	95.37	77.6	1.52	0.27	93.05	73.89	1.73	0.29	86.3	66.15	2.02	0.31
	9	95.28	73.54	1.55	0.34	90.87	69.9	1.79	0.34	83.97	61.53	2.09	0.35

Tabela 2.3: Comparison of CPLEX QMIP solver with the devised OA algorithm for the Random instances.

Instance	a	Δ	Objetive	CPLEX		OA		ratio	
				T(s)	#B&B	T(s)	#Int.		
14-180-12	0	0	14,379	143	256,617	70	31	2.04	
		20	11,280	112	233,795	91	35	1.23	
		40	8,295	63	131,617	81	35	0.78	
	5	0	14,058	282	332,012	154	35	1.83	
		20	10,994	300	341,618	158	32	1.90	
		40	8,033	303	353,199	156	35	1.94	
	9	0	13,858	256	258,857	172	34	0.67	
		20	10,813	232	242,323	264	35	0.88	
		40	7,902	198	207,579	207	34	0.96	
	15-200-13	0	0	13,845	19	8,687	1	29	19.00
			20	11,217	64	127,474	1	28	64.00
			40	8,591	52	100,498	1	29	52.00
5		0	13,586	241	84,000	196	34	1.23	
		20	10,964	258	87,828	18	33	14.33	
		40	8,349	304	107,711	204	34	1.49	
9		0	13,412	416	100,027	268	34	1.55	
		20	10,797	426	94,703	381	34	1.12	
		40	8,198	406	95,664	108	33	3.76	
17-250-15		0	0	18,355	3	1,326	1	29	3.00
			20	15,117	35	56,736	2	29	17.50
			40	11,879	38	61,022	5	30	7.60
	5	0	17,801	4,943	3,124,509	1902	36	2.60	
		20	14,577	4,624	2,814,722	2339	36	1.98	
		40	11,375	3,629	2,160,407	5531	36	0.66	
	9	0	17,473	5,623	3,506,521	5408	37	151.97	
		20	14,268	5,574	3,199,742	1540	37	3.62	
		40	11,109	3,398	1,902,160	364	36	9.34	
	18-300-15	0	0	8,701	2,545	3,291,708	20	40	127.25
			20	5,295	856	1,225,697	12	32	71.33
			40	2,867	860	1,225,697	13	30	66.15
5		0	8,400	1,681	201,565	49	37	34.31	
		20	5,063	787	879,760	29	36	27.14	
		40	2,764	405	465,899	16	33	25.31	
9		0	8,227	1,728	2,047,332	64	37	27.00	
		20	4,930	836	938,738	33	35	25.33	
		40	2,685	413	476,742	21	32	19.67	
20-350-17		0	0	20,587	128	67,404	19	30	6.74
			20	17,081	112	233,795	15	30	7.47
			40	13,581	6,932	9,106,625	22	30	315.09
	5	0	20,199	6,503	8,587,750	41	30	158.61	
		20	16,703	300	341,618	206	33	1.46	
		40	13,223	5,183	1,201,225	174	33	29.79	
	9	0	19,963	12,357	2,510,861	73	33	169.27	
		20	16,471	232	242,323	189	33	1.23	
		40	13,013	8,134	1,715,949	223	33	36.48	
	geometric mean				491.33		66.37		7.40

Tabela 2.4: Average equilibrium demands (percentage) and prices for different levels of cross-price effects on the Random instances.

Instance	a	$\delta = 0\%$				$\delta = 20\%$				$\delta = 40\%$			
		$ V - d_{fast} - d_{medium} \times 10^{-3}$	q_{fast}	q_{medium}	p_{fast}	p_{medium}	q_{fast}	q_{medium}	p_{fast}	p_{medium}	q_{fast}	q_{medium}	p_{fast}
14-350-271	0	95.3	81.85	1.43	0.22	91.84	77.64	1.58	0.23	82.97	55.47	1.94	0.48
	5	94.32	72.02	1.52	0.38	89.55	67.89	1.7	0.39	79.57	49.76	2.05	0.58
	9	93.3	68.9	1.57	0.45	88.12	64.33	1.75	0.45	79.5	49.72	2.06	0.59
15-342-251	0	99.51	98.13	1.28	0.01	99.17	97.68	1.39	0.01	98.48	96.48	1.51	0.01
	5	97.96	92.66	1.34	0.07	96.66	90.94	1.47	0.07	94.24	86.11	1.62	0.08
	9	97.27	87.87	1.39	0.13	95.23	85.75	1.53	0.13	91.69	80.46	1.69	0.13
17-437-299	0	99.64	98.35	1.33	0.01	99.37	97.98	1.46	0.01	98.81	96.96	1.59	0.01
	5	97.05	88.53	1.43	0.12	95.21	86.18	1.59	0.12	91.91	80.6	1.78	0.12
	9	95.31	83.21	1.5	0.2	92.68	79.82	1.67	0.19	88.14	72.25	1.88	0.19
18-484-394	0	69.6	19.63	2.64	4.09	57.63	9	3.17	7.79	42.14	2.74	3.98	9.35
	5	67.81	17.96	2.73	4.26	55.88	8.65	3.27	8.05	41.11	1.72	4.09	9.35
	9	66.74	17.52	2.77	4.39	54	8.64	3.36	8.05	39.87	1.71	4.16	9.35
20-350-271	0	99.5	98.2	1.17	0.01	91.84	77.64	1.58	0.23	88.37	76.67	1.61	0.31
	5	96.26	91.7	1.27	0.09	89.55	67.89	1.7	0.39	83.24	57.54	1.82	0.56
	9	95.05	90.11	1.3	0.1	88.12	64.33	1.75	0.45	80.16	52.45	1.89	0.61

2.4 Conclusion

In this paper, we present a new model and an algorithm approach to design multi-commodity telecommunication networks that cope with price sensitive demands and congestion effects for fast and medium Internet services. The analyzes are detailed for the competition between different levels of service in a telecommunication multi-commodity enterprise on the economic sector.

Different players can analyze the sensitivity of demand for the supplied service quality in such systems and find the desired equilibrium.

The problem determines optimum network topology and price sensitive demands in order to maximize the social net benefits. Here two service levels were adopted, but the model and solution framework are easily adapted to handle more levels. The devised Outer-approximation algorithm bested the QMIP solver of CPLEX being more than 6 faster than CPLEX on the 90 carried out comparisons on the selected instances. As future research, we plan to use robust optimization to deal with uncertainty regarding input data for the cost and demand parameters.

Capítulo 3

Problema de localização de facilidades em dois níveis com demandas sensíveis a preço e efeito de congestionamento

Resumo

O atendimento nos serviços de saúde é um tema político central em qualquer país. No dia a dia cresce a insatisfação da população com o sistema da área da saúde, diante disso, surge novas oportunidades para empresas privadas vir a competir nessa área, oferecendo serviços melhores e mais eficientes aos seus clientes. Com isso, encaramos diariamente a crescente privatização do sistema público de saúde. Este trabalho apresenta um modelo de equilíbrio econômico com demandas sensíveis a preço e efeito de congestionamento para o problema de localização de facilidades em dois níveis, aplicado ao setor de privatização da área da saúde. O trabalho analisa a sensibilidade da demanda para a qualidade do serviço em tais sistemas e permite a solução destes problemas para casos de grande escala. Os resultados são apresentados com um conjunto de testes padrão, que visam a descrever como a competitividade de um mercado irá afetar os níveis de demanda e de preços no equilíbrio econômico. O algoritmo de Aproximação Externa é aplicado para melhorar a convergência do modelo abordado, essa técnica se mostrou em média três vezes mais rápida comparada ao *solver CPLEX*.

Palavra-chave: Problema de localização de facilidades em dois níveis; Privatização dos serviços de saúde; Aproximação Externa.

3.1 Introdução

A privatização dos serviços de saúde recebeu grande atenção em praticamente todos os países industrializados, nas duas últimas décadas. Além disso, a privatização e o sistema de livre mercado têm sido modelos bem atraentes para países que enfrentam custos de saúde crescente, substituindo a insatisfação dos clientes de unidades de saúde pública, com a eficiência e qualidade no atendimento prestado através do sistema privatizado e, também, reduzindo recursos públicos para apoiar a prestação de serviços de saúde (Manga (1987); Scarpaci (1989); Young (1990); Banoob (1994); McLaughlin (1998)). Embora os defensores da privatização acreditem que a venda ou transferência administrativa de bens e serviços públicos para o setor privado estimulará a concorrência no mercado e melhorará a eficiência e a qualidade da prestação de serviços, os oponentes veem sérias limitações no papel da privatização e nas forças do mercado livre na saúde.

Privatização na área da saúde é um tema de discussão na maioria dos países. Impulsionada pela agenda política, a privatização como um processo geral na sociedade é frequentemente oferecida como uma panacéia para todos os tipos de problemas, onde a atenção à saúde é vista como uma das áreas potenciais de implementação.

Uma das definições utilizadas sobre a privatização de sistemas e políticas de saúde é, a privatização é a transferência de propriedade e funções de governo de órgãos públicos para privados, que podem consistir de organizações voluntárias, sem ou com fins lucrativos.

Hebrang et al. (2003) realizou uma pesquisa e concluiu que as práticas privatizadas tiveram melhor desempenho na melhoria da acessibilidade de seus serviços prestados aos pacientes, elas ofereciam cada vez mais a possibilidade de consultas no primeiro atendimento e de acompanhamento em horários precisos, aconselhamento e visitas agendadas por telefone, fora do horário de trabalho. Eles mostraram que nas práticas privadas há uma maior intenção em honrar os compromissos marcados, a fim de diminuir os tempos de espera dos pacientes.

O problema da integração de competição de mercado e planejamento governamental em um sistema nacional de saúde não está necessariamente ligado a transição do sistema baseado no mercado. Também é aparente em países com economias de mercado desenvolvidas (Ham (1999); Le Grand (1999)), sendo representado geralmente como parte integrante de reformas de saúde que são contempladas em praticamente todos os países, independentemente da força econômica (Battistella (1993)). Descentralização, privatização, democratização e liberalização foram geralmente formuladas como metas de reforma da saúde nos países em transição (Baillie et al. (1998)).

Um dos objetivos fundamentais e que muitas vezes é ignorado, mas é essencial na

avaliação do impacto de qualquer tipo de privatização é - por que é necessário?

De acordo com [Blumenthal and Hsiao \(2005\)](#), um dos maiores obstáculos enfrentado pela China, está sendo em como reformular o seu sistema de prestação de serviço de saúde ineficiente e mal organizado de forma eficiente. À medida que sua economia crescia, seu sistema de saúde quase implodiu, em parte porque a China adotou as estratégias de alguns defensores americanos da privatização radical dos cuidados de saúde. Ao mesmo tempo, com os cofres governamentais inchados pelas receitas fiscais de sua economia em expansão, os chineses têm oportunidades de melhorar os cuidados de saúde que os formuladores de políticas ocidentais só podem invejar. Os líderes da China começaram de forma proposital e séria a enfrentar o enorme desafio da engenharia social de reparar os danos do passado e moldar um novo sistema de saúde que se encaixa em seu sistema social e cultural. Diante dessa situação, os professores da Escola de Saúde Pública de Harvard estão ajudando o governo chinês a testar um modelo alternativo que abrange a prevenção, a atenção primária e a proteção de seguros.

O Brasil é um país de dimensões continentais com amplas desigualdades regionais e sociais. O Sistema Único de Saúde - (SUS) aumentou o acesso ao cuidado com a saúde para uma parcela considerável da população brasileira em uma época em que o sistema vinha sendo progressivamente privatizado. Para que o sistema de saúde brasileiro supere os desafios atuais é necessário uma maior mobilização política para reestruturar o financiamento e redefinir os papéis dos setores público e privado. Porém ainda existe muitos serviços privatizados no sistema de saúde.

Os serviços de saúde, em que os centros médicos de especialidade (primeiro nível), juntamente com os hospitais regionais (segundo nível), providenciam tratamento em escritórios de saúde (atendimento aos clientes) em um estado regional podem ser identificados como sistemas hierárquicos reais que possuem dois níveis de facilidades ([Klose and Drexler, 2005](#)). A diferença básica entre as facilidades de primeiro e segundo nível está na função que cada uma exerce. A de primeiro nível pode ser vista como uma geradora de recursos, enquanto a de segundo nível funciona como um agente intermediário de distribuição física desses recursos.

Os problemas de localização de facilidades tem por objetivo localizar um objeto (ou objetos) que é chamado facilidade. A facilidade deverá interagir com outros objetos que possuirão localizações fixas. O termo facilidades, pode ser substituído por instalações, hospitais, fábricas, depósitos, escolas, entre outros, enquanto “clientes” (pontos de demanda) referem-se a depósitos, unidades de venda, etc. Em geral, diversas facilidades podem ser localizadas e por sua vez, alocadas aos seus clientes ([Bezerra et al., 2008](#)). Resumindo, o problema de localização de facilidades, em geral, envolve um conjunto de clientes espacialmente distribuídos e um conjunto de facilidades para atender a demanda dos clientes.

Aikens (1985); Klose and Drexler (2005); Farahani et al. (2009); Verter (2011); Gendron et al. (2016); Baiou and Barahona (2014) compõem a grande parte de problemas relacionados ao problema de localização de facilidades, e apresentaram alguns modelos e aplicações para o problema. Ao longo dos anos, alguns trabalhos da literatura se destacaram, Kuehn and Hamburger (1963) propuseram a utilização de um método heurístico guloso para o problema de localização de facilidades não capacitadas (*Uncapacitated Facility Location Problem - (UFLP)*). Já Lawler and Wood (1966) fizeram a relaxação linear do UFLP e o resolveram de forma analítica. No trabalho de Krarup and Pruzan (1983) foi apresentada uma revisão sobre os principais trabalhos de UFLP que existiam até então. Erlenkotter (1978) propôs um algoritmo de *Branch-and-Bound* para o UFLP baseado em um procedimento dual com direção de subida, enquanto Goldengorin et al. (2003) apresentam uma versão aprimorada do algoritmo de *Branch-and-Bound*. Um modelo geral para o UFLP, com demandas relacionadas a preços estabelecidos nos vários locais é abordado por Erlenkotter (1977). Neste, decisões de preços e decisões de localização são determinadas simultaneamente.

Planejamento de dois níveis regional e nacional e decomposição de programação matemática aplicada ao modelo de equilíbrio de preço espacial, onde é considerado mercados separados espacialmente é apresentado por Luna (1978), o modelo apresenta estratégias computacionais com análise quantitativa no setor de economia global.

Luna (1979) apresenta dois lemas gerais cujo tomados em conjuntos implicam em um único vetor multiplicador ótimo. Em seguida, examina o caso particular dos modelos de equilíbrio econômico setorial, e por fim apresenta o procedimento de coordenação de quota e alguns resultados sobre as propriedades de unicidade.

Neste trabalho, o equilíbrio econômico é apresentado para o problema de localização de facilidades em dois níveis, considerando demandas sensíveis a preço, efeitos de congestionamento e diferentes classes de serviços. Considera-se que todos os serviços oferecidos são designados privados, onde cada cliente poderá escolher entre o serviço mais caro (considerado de alto nível) e popular (médio nível), dependendo da sua disponibilidade financeira e da utilização do serviço (pacote ofertado). A qualidade de serviço (do inglês *quality of service - QoS*) é avaliada através da medição dos efeitos de congestionamento, enquanto que o benefício social líquido, representado pela função de utilidade descontada dos custos convexos de congestionamento e custos de transmissão e infra-estrutura, é maximizado.

O problema de localização de facilidades em dois níveis com demandas sensíveis a preço é aplicado ao sistema de privatização dos serviços de saúde. O procedimento é o seguinte: O cliente adquire um pacote de serviço, e na necessidade de utilização deste, irá procurar uma clínica hospitalar, a mesma fará triagem e atendimento e o encaminhará para um novo atendimento caso seja necessário. Portanto, o problema

determina:

- Localização das especialidades;
- Localização das clínicas hospitalares regionais;
- Atribuição dos clientes e atendimento.

O artigo tem as seguintes contribuições: (i) formulação integrada para projetar sistemas de serviços de saúde centralmente planejados, evitando efeitos de congestionamento e com demandas sensíveis a preço para diferentes classes de serviço; (ii) modelo matemático capaz de resolver instâncias de grande escala em tempo computacional razoável.

O artigo está organizado da seguinte forma: §3.2 introduz notações e definições. §3.3 apresenta a estrutura do método de solução utilizado, enquanto §3.4 relata os experimentos computacionais realizados. Comentários finais são feitos no §3.5.

3.2 Definições e formulação

Sejam J e K conjuntos de nós candidatos a ser facilidades para o primeiro e segundo nível de decisão, respectivamente, e I o conjunto de clientes. Para cada cliente $i \in I$, o fluxo de demanda d_i , deve ser fornecido pela facilidade selecionada dentro do conjunto J (primeiro nível) através de outra facilidade escolhida entre o conjunto K (segundo nível). O custo unitário de atendimento entre os nós $i \in I$ e $j \in J$, e entre os nós $j \in J$ e $k \in K$ são dados, respectivamente, como c_{ij} e c_{jk} , enquanto que $c_{ijk} = d_i(c_{ij} + c_{jk})$, representa o custo de fornecimento da instalação $k \in K$ servindo o cliente $i \in I$ via facilidade $j \in J$. O custo fixo de instalação e manutenção a_j e f_k incorre sempre na facilidade do primeiro e segundo nível, se $j \in J$ e $k \in K$ são instalados. Ademais, o modelo lida com a hipótese de que o custo de manutenção supera os custos de instalação em poucos anos após a instalação da empresa.

O problema consiste na localização do primeiro e segundo nível de facilidades para servir todos os clientes com um custo mínimo total, sabendo-se que os custos são: de instalação, transporte e efeito de congestionamento. Além disso, permite que facilidades instaladas no segundo nível interajam com qualquer número de facilidades abertas de primeiro nível. Seja $y_j \in \{0, 1\}$ e $z_k \in \{0, 1\}$ indica se o primeiro ou segundo nível de facilidade é instalado (1) ou não (0) no nó $j \in J$ ou $k \in K$, respectivamente. Seja $x_{ijkl} \geq 0$ a porcentagem do fluxo da demanda $i \in I$ servida pela facilidade $k \in K$ via $j \in J$, no nível de serviço $l \in L$ (popular e mais caro).

Seja $g_{jl} \geq 0$ a porcentagem de fluxo da facilidade J para os níveis de serviço l (popular e mais caro), e $g_{kl} \geq 0$ a porcentagem de fluxo da facilidade K para os níveis de serviço l . A Qualidade de Serviço é garantida em cada facilidade pela função convexa não-linear que é crescente em $[0, +\infty)$, contínua e diferenciável $\tau(\sum_{l \in L} g_{jl}) = r(\sum_{l \in L} g_{jl})^v$ e $\tau(\sum_{l \in L} g_{kl}) = r(\sum_{l \in L} g_{kl})^v$ que mede os efeitos de congestionamento causados pelo fluxo total. Sem perda de generalidade, adota-se a lei de função convexa com $r > 0$ and $v \geq 1$ sendo parâmetros relacionados às características da privatização dos serviços da área da saúde. No entanto, outras funções convexas podem ser usadas, em vez disso, por exemplo, a função de atraso médio de *Kleinrock* (Kleinrock, 2007).

A cada cliente i está relacionada uma variável escalar q_i e p_i , que representa, respectivamente, a demanda de cada cliente i e o preço a ser pago pelo cliente i .

Para representar a interdependência econométrica entre os vetores de preço \mathbf{p} e de demanda \mathbf{q} , uma função de demanda inversível $\mathbf{p} = \phi(\mathbf{q})$ é usada (Luna, 1979). A função $\phi(\mathbf{q})$ avalia a disposição dos clientes de pagar por um determinado tipo de serviço através da função utilidade que é dada pela integral da curva de demanda até o fluxo realizado ou $\int_0^{\mathbf{q}} \phi(\xi) d\xi$. Considera-se que esta integral existe e é estritamente côncava. Além disso, os preços são oferecidos por um mercado competitivo, enquanto as funções de demanda são adequadamente dimensionadas para evitar preços e demandas negativas, ou seja, as funções de demanda são consistentes com a exclusão de cada tipo de serviço e com a disponibilidade de pagamento por todos os preços elencados, inclusive pelo maior preço possível.

Pela definição de multivariável linear a interdependência linear entre os vetores de preço e de demanda pode ser representada por: $\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_i^0 - \mathbb{P}\mathbf{p}_i$, em que a matriz \mathbb{P} é supostamente definida simétrica positiva, logo, é possível encontrar uma função inversa linear: $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i^0 - Q\mathbf{q}_i$, onde $Q = \mathbb{P}^{-1}$ e $\mathbf{p}_i^0 = \mathbb{P}^{-1}\mathbf{q}_i^0$. A função $\psi(q_i)$ pode ser escrita como $\left(p_i^{0\top} q_i - \frac{1}{2} q_i^\top Q q_i\right)$, em que $\mathbf{q}_i^\top = [q_{i1}, \dots, q_{i|L|}]$, e $q_{il} \in \mathfrak{R}$. Seja d_{il} o tamanho máximo do mercado do nó $i \in I$ para cada tipo de serviço $l \in L$. Além disso, não há interdependência de demanda entre os preços de diferentes nós de mercado. Isso nos permite expressar uma função utilidade de consumidor, separada por cada cliente $i \in I$ ou $\psi(q_i) = \int_0^{\mathbf{q}_i} \phi(\xi_i) d\xi_i$ que leva a $\sum_{i \in I} \psi(q_i)$. Portanto, o problema de localização de facilidades em dois níveis com demanda sensível a preço e efeito de congestionamento, pode ser modelado como:

$$\max \sum_{i \in I} \left(p_i^{0\top} q_i - \frac{1}{2} q_i^\top Q q_i \right) - \sum_{l \in L} \sum_{j \in J} (a_{jl} y_j + \tau_j(g_{jl})) \quad (3.1)$$

$$- \sum_{k \in K} \sum_{l \in L} (f_{kl} z_k + \tau_k(g_{kl})) - \sum_{l \in L} \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \sum_{j \in J} x_{ijkl} c_{ijk} \quad (3.2)$$

$$\text{s.t.: } \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} x_{ijkl} \geq q_{il} \quad \forall i \in I, l \in L \quad (3.3)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{l \in L} x_{ijkl} \leq d_i z_k \quad \forall i \in I, k \in K \quad (3.4)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{l \in L} x_{ijkl} \leq d_i y_j \quad \forall i \in I, j \in J \quad (3.5)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ijkl} \leq g_{kl} \quad \forall k \in K, l \in L \quad (3.6)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K} x_{ijkl} \leq g_{jl} \quad \forall j \in J, l \in L \quad (3.7)$$

$$g_{jl}, g_{kl} \geq 0 \quad \forall j \in J, l \in L, k \in K \quad (3.8)$$

$$x_{ijkl} \leq 0 \quad \forall i \in I, j \in J, k \in K, l \in L \quad (3.9)$$

A função objetivo (3.1) maximiza o benefício social líquido, maximizando a função utilidade menos o custo total que é composto pela transportaç o, os custos de instala o das facilidades do primeiro e do segundo n vel e o efeito do congestionamento convexo. O conjunto de restri es (3.3) garante que todas as demandas dos clientes estejam satisfeitas. As restri es (3.4) e (3.5) eliminam a possibilidade de haver atribui o de fluxo oriundas de facilidades que n o se encontram instaladas, ou seja, s o restri es que garantem que as demandas dos clientes s o podem ser atendidas por facilidades instaladas de primeiro e segundo n vel, respectivamente. As restri es (3.6) e (3.7) garantem o balanceamento de fluxo das vari veis g_{kl} e g_{jl} . O dom nio das vari veis   apresentado nas restri es (3.8) e (3.9)

A formula o (3.1) - (3.9)   um problema n o linear inteiro misto, que pode ser resolvido eficientemente utilizando *solvers* de programa o n o linear. Aqui utiliza-se a t cnica de Aproxima o Externa.

3.3 O algoritmo de Aproxima o Externa

A t cnica conhecida como Aproxima o Externa (OA) (do ingl s *Outer Approximation*) foi desenvolvida atrav s dos trabalhos de Benders (1962), Geoffrion (1972), Arthur (1970), Duran and Grossmann (1986a), Fletcher and Leyffer (1994) e Yuan et al. (1988).   um m todo simples mas eficiente para resolu o de problemas inteiros n o-lineares, utilizando uma abordagem de planos cortantes. A t cnica de Aproxima o Externa tem sido aplicada em otimiza o de s ntese de processos (Grossmann and Kravanja (1995), Karuppiyah et al. (2008)), e em v rias outras aplica es de projeto em engenharia. Aplica es do m todo podem ser vistas tamb m nos sistemas log sticos como em Huang et al. (2005) e em problemas de otimiza o em geral (Grossmann and Kravanja, 1995). Mais recentemente o m todo tem sido aplicado em trabalhos de

Ljubić and Moreno (2018), Delfino and de Oliveira (2018), Su et al. (2018)

Dado um problema não-linear inteiro misto em sua representação algébrica mais básica, onde f e x representam o conjunto das variáveis contínuas e discretas, respectivamente, $\phi : \mathfrak{R}^{q \times s} \mapsto \mathfrak{R}$ e $\gamma : \mathfrak{R}^{q \times s} \mapsto \mathfrak{R}^m$ são funções contínuas e diferenciáveis.

$$\min \phi(x, f) \tag{3.10}$$

$$\text{s.t.: } \gamma_j(x, f) \leq 0 \quad \forall j = 1, \dots, m \quad f \in F \tag{3.11}$$

Ao escolhermos um vetor fixo $x = x^h, f \in F$, para cada iteração h , temos o seguinte subproblema não-linear:

$$\min \phi(x^h, f) \tag{3.12}$$

$$\text{s.t.: } \gamma_j(x^h, f) \leq 0 \quad \forall j = 1, \dots, m \quad f \in F \tag{3.13}$$

A solução do subproblema (3.12)-(3.13), permite deduzir os gradientes das funções $\phi(x, f)$ e $\gamma_j(x, f), \forall j$ em (x^h, f^h) . Logo, teremos o seguinte problema:

$$\min \xi \tag{3.14}$$

$$\text{s.t.: } \xi \geq \phi(x^h, f^h) + \nabla \phi(x^h, f^h) \begin{pmatrix} x - x^h \\ f - f^h \end{pmatrix} \quad \forall h = 1, \dots, H \quad f \in F \tag{3.15}$$

$$0 \geq \gamma(x^h, f^h) + \nabla \phi(x^h, f^h) \begin{pmatrix} x - x^h \\ f - f^h \end{pmatrix} \quad \forall h = 1, \dots, H \quad f \in F \tag{3.16}$$

$$\xi \geq 0 \tag{3.17}$$

$$x \in X$$

$$f \in F$$

Onde H representa o número máximo de iteração e ξ representa uma variável de estimativa para a função objetivo.

O problema (3.14)-(3.17) é nomeado problema mestre OA (PM-OA). As restrições (3.15)-(3.16) asseguram a aproximação externa da função objetivo e de sua região viável, respectivamente. As restrições (3.16) são necessárias e suficientes para o método OA aproximar externamente a região viável, quando as funções $\gamma(x, f)$ são convexas e as restrições de regularidade são atendidas para cada solução de (3.12)-(3.13).

A função objetivo da formulação (3.1)-(3.7) pode ser separada em dois termos: um

termo linear e outro não-linear. Logo, a função não-linear que representa o custo de congestionamento, é passível para sofrer aproximação externa individualmente. Para cada facilidade $j \in J$ e $k \in K$ no serviço $l \in L$, $\tau_l(g_{jl})$ ou $\tau_l(g_{kl})$ pode ser substituído por uma variável $\eta_{jl} \geq 0$ e $\eta_{kl} \geq 0$, respectivamente na função objetivo, produzem o seguinte OA MP:

$$\begin{aligned} \max_{\eta \geq 0} \quad & \sum_{i \in I} \left(p_i^{0\top} q_i - \frac{1}{2} q_i^\top Q q_i \right) - \sum_{l \in L} \sum_{j \in J} (a_{jl} y_j + \eta_{jl}) \\ & - \sum_{k \in K} \sum_{l \in L} (f_{kl} z_k + \eta_{kl}) - \sum_{l \in L} \sum_{i \in I} \sum_{k \in K} \sum_{j \in J} x_{ijkl} c_{ijk} \end{aligned} \quad (3.18)$$

s.t.: (3.3) – (3.7)

$$\eta_{jl} \geq \tau_l(\bar{g}_{jl}) + \nabla \tau(\bar{g}_{jl})(g_{jl} - \bar{g}_{jl}) \quad \forall j \in J, l \in L \quad (3.19)$$

$$\eta_{kl} \geq \tau_l(\bar{g}_{kl}) + \nabla \tau(\bar{g}_{kl})(g_{kl} - \bar{g}_{kl}) \quad \forall k \in K, l \in L \quad (3.20)$$

O problema original não-linear inteiro misto, foi então transformado em um problema linear inteiro equivalente de dimensão infinita. Embora o número de restrições é infinito, nem todas elas são necessárias para alcançar a otimalidade. Desde que a restrição (3.19) e (3.20) são relaxadas para serem geradas sob demanda dentro de um esquema iterativo ilustrado no Algoritmo 2.

Algoritmo 2: Um esquema básico de Aproximação Externa

```

1  $ub \leftarrow \inf$ 
2  $lb \leftarrow -\inf$ 
3  $\Omega \leftarrow \{\}$ 
4 While ( $ub \neq lb$ ) do
5 ( $ub, \bar{\eta}, \bar{g}$ )  $\leftarrow OAMP(\Omega)$ 
6  $lb \leftarrow$ 
    $\max(lb, ub + \sum_{k \in K} (\psi(q_i)) + \sum_{j \in J} \sum_{l \in L} (\bar{\eta}_{jl} - \tau_{jl}(\bar{g}_{jl})) + \sum_{k \in K} \sum_{l \in L} (\bar{\eta}_{kl} - \tau_{kl}(\bar{g}_{kl})))$ 
7  $\Omega \leftarrow \Omega \cup \{(\bar{g})\}$ 

```

O conjunto Ω na linha 3 do Algoritmo 2 irá ter todos os pontos (\bar{g}) produzidos pelo OAMP. Este conjunto é estendido para cada iteração (linha 7). Uma vez que este é um problema de maximização, o limite superior, representado por ub na linha 5, é obtido através da solução do OAMP. O ub é monotônico, decrescente, enquanto o limite inferior, mostrado como lb na linha 6, não é. O lb precisa ser atualizado em cada iteração quando necessário (veja a linha 6). O método OA itera até convergir para uma solução ótima, se esta existir.

3.4 Experimentos computacionais

Esta seção apresenta os experimentos realizados para avaliar o modelo proposto e a técnica de solução, enfatizando suas principais características.

Todos os coeficientes foram cuidadosamente escolhidos satisfazendo as suposições de modelagem de Luna (1979), isto é, as matrizes Q e \mathbb{P} foram asseguradas para serem simétricas e definidas positivas, através da seleção de funções adequadas de acoplamento de demanda e de preço.

Com o objetivo de avaliar o desempenho do algoritmo proposto, são projetados vários testes e uma análise detalhada destes. Todos os testes computacionais foram realizados em uma estação de trabalho Dell PowerEdge T620, equipada com dois processadores Intel Xeon E5-2600v2 e 96 Gbytes de memória RAM, executado através do servidor Linux Ubuntu 16.04, enquanto o algoritmo foi implementado em *AMPL* configurado para chamar o *solver IBM CPLEX 12.7*.

Para cada conjunto de testes, foi analisado o tempo computacional, o intervalo de otimização, cujo tempo foi limitado em 20 horas, ou seja, 72000 segundos, o preço unitário da demanda e o consumo médio da demanda em cada nível de serviço. Serão comparados dois algoritmos. O algoritmo do *CPLEX* resolvendo o modelo monolítico e o algoritmo Aproximação Externa. O critério de parada usado foi $(ub - lb)/ub \leq 10^{-5}$, onde lb é limite inferior e ub é limite superior. A discussão dos seguintes aspectos sobre o desempenho do algoritmo são apresentadas nas próximas seções.

3.4.1 Experimento preliminar - testando instâncias da biblioteca *online GAP*

Landete and Marín (2009) propuseram a utilização das instâncias GAP de 100x100 para a criação de noventa instâncias de dimensões 50x50x50. Os primeiros cinquenta dados são iguais aos custos de transporte (pertencente ao conjunto $\{1, \dots, 5\}$ unidades ou 10000 unidades) entre as facilidades de segundo nível e os clientes. Já os últimos cinquenta são os custos de transporte entre as facilidades de primeiro e segundo nível. Além disso, os custos de instalação de todas as facilidades nos dois níveis são fixados em 3000 unidades e a demanda dos clientes distribuídas entre unidades de 1 a 100.

O conjunto de instâncias foi construído em um padrão semelhante ao utilizado no trabalho de Gendron et al. (2016), que por sua vez baseou-se no trabalho de Landete and Marín (2009), no qual um conjunto de instâncias do UFLP eram transformadas em instâncias do TLUFLP (*Two Level Uncapacitated Facility Location Problem*). No total existem noventa instâncias de dimensão 100x100 do UFLP, distribuídas em três grupos denominados GapA, GapB e GapC, e que estão disponíveis na seguinte página da in-

ternet: <http://www.math.nsc.ru/AP/benchmarks/UFLP/Engl/uflp_{age}.ng.html>. Neste trabalho, obtou-se por usar a instância Gap C, pois esta representa maior grau de complexidade computacional. Todos os parâmetros utilizados foram retirados da biblioteca *online GAP*, enquanto os valores do congestionamento variam de $\{0, 5, 9\} \times (10^{-3})$.

Tabela 3.1: Comparação do *solver CPLEX QMIP* com o algoritmo de AO para as instâncias GAP.

Instance	r	Δ	custo de					funç.	Cplex		OA	ratio	
			$n_k - n_j - n_i$	$\times 10^{-3}$	%	τ_j	τ_k		transporte	a_j			f_k
5-15-50	0	0	0	0	0.79	0.18	0.27	5,570.34	0.47		0.72	0.65	
		20	0	0	0.76	0.18	0.27	5,549.68	1.10		0.94	1.17	
		40	0	0	0.73	0.18	0.32	5,533.62	1.11		0.97	1.14	
	5	0	922.81	307.66	4.84	0.35	0.45	32,818.40	2.14		1.30	1.65	
		20	899.23	299.80	4.63	0.35	0.45	32,647.02	1.38		1.23	1.12	
		40	882.04	294.07	4.43	0.35	0.45	32,513.81	1.43		1.29	1.11	
		0	1,661.03	553.71	4.90	0.35	0.45	54,616.86	1.08		1.37	0.79	
		20	1,618.41	539.50	4.69	0.35	0.45	54,324.90	1.56		1.32	1.18	
		40	1,587.38	529.16	4.49	0.35	0.45	54,097.97	1.25		1.34	0.93	
	10-25-50	0	0	0	0	0.36	0.32	0.35	5,565.11	2.87		2.96	0.97
			20	0	0	0.35	0.32	0.41	5,544.47	3.93		2.93	1.34
			40	0	0	0.34	0.32	0.37	5,528.43	3.91		3.26	1.20
5		0	477.8	191.15	1.73	0.70	1.17	29,596.96	51.08		5.57	9.17	
		20	465.63	186.28	1.66	0.70	1.17	29,443.38	10.60		20.35	0.52	
		40	456.75	182.73	1.59	0.70	1.17	29,324.00	14.31		11.62	1.23	
		0	860.03	344.03	1.76	0.70	1.17	48,822.44	12.71		14.96	0.85	
		20	838.02	335.22	1.68	0.70	1.17	48,562.51	10.34		7.82	1.32	
		40	821.98	328.80	1.61	0.70	1.17	48,360.47	9.19		8.96	1.03	
15-25-100		0	0	0	0	0	0.25	0.28	11,012.28	23.27		22.09	1.05
			20	0	0	0	0.45	0.43	10,971.44	16.55		29.43	0.56
			40	0	0	0	0.44	0.32	10,939.69	17.35		25.40	0.56
	5	0	1,235.77	741.49	3.27	1.24	1.17	95,797.96	1,160.70		31.76	36.55	
		20	1,204.13	722.50	3.14	1.24	1.17	95,288.09	76.25		37.50	2.03	
		40	1,181.07	708.67	2.99	1.24	1.17	94,891.78	80.52		39.27	2.05	
		0	2,224.34	1,334.62	3.34	1.24	1.17	163,626.50	314.99		74.34	4.24	
		20	2,167.19	1,300.33	3.20	1.24	1.17	162,741.41	61.11		41.60	1.47	
		40	2,125.59	1,275.37	3.06	1.24	1.17	162,053.47	68.13		40.57	1.68	
	20-50-100	0	0	0	0	0.73	0.32	0.35	12,473.53	41.72		80.24	0.52
			20	0	0	0.70	0.32	0.35	12,427.27	58.55		99.63	0.59
			40	0	0	0.67	0.32	0.35	12,391.31	61.28		86.11	0.71
5		0	1,354.24	481.64	4.89	1.52	4.13	119,088.31	15,676.98		118.22	132.61	
		20	1,319.53	479.96	4.62	1.51	4.19	118,452.24	22,297.81		160.13	139.25	
		40	1,089.89	422.66	3.41	1.85	4.52	117,958.11	36,001.47		155.29	231.83	
		0	2,166.75	829.87	4.65	1.75	4.41	204,380.44	23755.48		229.00	103.74	
		20	7,954.91	7380.65	8.96	0.97	0.79	203,272.81	72,001.54	2.03	321.36	224.05	
		40	7,660.36	7599.25	29.42	0.76	0.57	202,411.68	72,001.03	2.02	336.86	213.74	
30-50-150		0	0	0	0	0	0.25	0.38	18,507.61	374.38		1177.76	0.32
			20	0	0	0	0.83	0.76	18,438.97	230.95		421.67	0.55
			40	0	0	0	0.39	0.46	18,385.61	459.77		1204.00	0.38
	5	0	16,225.46	9485.69	62.17	0.37	0.32	241,650.24	72,003.64	2.41	2408.30	29.90	
		20	8,905.08	4146.27	18.05	0.83	0.96	240,348.56	72,006.14	2.40	2894.85	24.87	
		40	7,598.30	6120.00	8.61	1.24	1.26	239,335.73	72,000.61	1.85	2759.30	26.09	
		0	31,273.86	16371.61	31.61	0.25	0.32	420,161.91	72,002.23	4.20	657.49	109.51	
		20	16,075.45	13119.79	40.47	0.55	0.56	417,873.17	72,002.22	4.17	762.98	94.37	
		40	22,261.17	18533.15	46.51	0.65	0.74	416,095.17	72,002.01	4.16	857.38	83.98	
	média geometrica									130.67		35.01	3.73

A Tabela (3.1) mostra os resultados experimentais, para o qual, as instâncias são nomeadas seguindo n_k, n_j e n_i que representam o número de nós, para a facilidade de segundo nível, facilidade de primeiro nível e clientes, respectivamente. O custo

de congestionamento (r), assim como o impacto do custo de congestionamento nas facilidades de primeiro (τ_j) e segundo nível (τ_k), e o custo de transporte na função objetivo, a porcentagem do custo unitário do atendimento para a facilidade de primeiro nível (a_j) e para a de segundo nível (f_k), a comparação em relação ao tempo, *gap* e iterações dos modelos *CPLEX* e OA são apresentados nas colunas seguintes da Tabela (3.1). E por fim, apresenta-se na última coluna da Tabela (3.1) o *ratio*, que é a razão do tempo de solução obtido pelos modelos *CPLEX* e OA, respectivamente.

Os resultados experimentais apresentados na Tabela (3.1) mostram a eficiência da técnica proposta. Percebe-se que para as instâncias de tamanho muito pequeno, o *solver* CPLEX se mostra melhor, mas a medida que as instâncias são maiores e/ou o custo de congestionamento cresce, já não é adequado resolvê-las com a utilização deste, para isto se faz necessário a utilização de uma técnica mais apropriada, ou seja, a técnica de Aproximação Externa. O modelo OA chega a ser 140 vezes mais rápido (20-50-100-5-40). No geral o OA foi mais de três vezes melhor comparado ao *CPLEX*.

O custo de congestionamento funciona como um medidor do próprio congestionamento do serviço (a espera para um cliente ser atendido ou filas no atendimento). O crescimento deste tem um impacto negativo no nível de serviço, pois muitas pessoas não estarão dispostas a pagar por este. Pode-se perceber este cenário através dos resultados descritos na Tabela (3.1). Veja que a função objetivo diminui a medida que os custos de congestionamento aumentam, e já tem um influência contrário nos valores que representam a porcentagem dos custos (custo de transporte, de instalação da primeira e segunda facilidade) na função objetivo, estes tendem a crescer. Além disso, o tempo computacional para encontrar a solução ótima do problema, quando está considerando os efeitos de congestionamento, tende a aumentar, e em instâncias muito grandes, demoram-se dias para chegar a otimalidade.

A Tabela (3.2) mostra o valor unitário dos preços e a porcentagem da demanda utilizada em cada nível de serviço. É fácil perceber os efeitos que o congestionamento causa nas demandas e preços em cada nível de serviço. A demanda diminui a medida que o congestionamento aumenta. Já os preços tendem a aumentar, pois os custos relacionados a oferta dos serviços aumentam.

De forma similar ao efeito dos custos de congestionamento no sistema, tem-se o impacto do fator de influência de um nível de serviço sobre o outro (Δ). O Δ possui os mesmos efeitos do custo de congestionamento, porém com significado diferente. Ele é o fator que representa a influência de um nível de serviço sobre o outro. Portanto, ao utilizar $\Delta = 0$, não existe nenhuma influência entre serviços. $\Delta = 2 \times 10^{-3}$, existirá a influência de 2×10^{-3} de um nível de serviço sobre outro. Acarretando, em aumento nos preços e diminuição nas demandas e da função objetivo.

Tabela 3.2: Equilíbrio médio das demandas (porcentagem) e preços para diferentes níveis de efeitos de preço cruzado nas instâncias.

Instance $n_k - n_j - n_i$	r $\times 10^{-3}$	$\Delta = 0\%$				$\Delta = 20\%$				$\Delta = 40\%$			
		q_{caro}	$q_{popular}$	p_{caro}	$p_{popular}$	q_{caro}	$q_{popular}$	p_{caro}	$p_{popular}$	q_{caro}	$q_{popular}$	p_{caro}	$p_{popular}$
5-15-50	0	2.682	10.72	0.073	0.018	2.571	10.28	0.076	0.019	2.462	9.851	0.079	0.019
	5	2.681	10.72	0.439	0.109	2.569	10.27	0.458	0.114	2.460	9.842	0.479	0.119
	9	2.681	10.72	0.732	0.183	2.569	10.27	0.764	0.191	2.460	9.841	0.798	0.199
10-25-50	0	2.636	10.54	0.075	0.019	2.527	10.11	0.078	0.019	2.420	9.681	0.082	0.021
	5	2.635	10.54	0.402	0.100	2.525	10.10	0.420	0.105	2.418	9.673	0.438	0.109
	9	2.635	10.54	0.664	0.166	2.525	10.10	0.693	0.173	2.418	9.672	0.723	0.181
15-25-100	0	2.676	10.70	0.073	0.018	2.566	10.26	0.077	0.019	2.457	9.830	0.080	0.0201
	5	2.676	10.70	0.646	0.161	2.564	10.25	0.674	0.168	2.455	9.821	0.704	0.176
	9	2.676	10.70	1.104	0.276	2.564	10.25	1.152	0.288	2.455	9.821	1.204	0.301
20-50-100	0	2.475	9.902	0.080	0.020	2.373	9.494	0.083	0.020	2.273	9.092	0.087	0.021
	5	2.475	9.902	0.784	0.196	2.372	9.488	0.818	0.204	2.271	9.084	0.854	0.213
	9	2.475	9.902	1.347	0.336	2.372	9.488	1.406	0.351	2.271	9.084	1.468	0.367
30-50-150	0	2.550	10.20	0.077	0.019	2.445	9.781	0.080	0.020	2.342	9.368	0.084	0.021
	5	2.550	10.20	1.022	0.255	2.443	9.775	1.060	0.266	2.339	9.359	1.114	0.278
	9	2.550	10.20	1.778	0.444	2.443	9.775	1.855	0.463	2.339	9.359	1.938	0.484

3.5 Conclusão

Este artigo apresenta um novo modelo para o problema de localização de facilidades em dois níveis que lida com demandas sensíveis a preço. O modelo foi aplicado no sistema de privatização do serviço da área da saúde, no qual foi analisado a competição entre diferentes serviços, o mais caro e o popular, além de designar qual das facilidades de primeiro e segundo nível que serão instaladas.

O problema determina o valor ótimo para a maximização do benefício social líquido e o lucro total do fornecimento para dois níveis de serviço, e permite a solução destes em casos de grande escala. Foi aplicado a técnica de Aproximação Externa para melhorar a convergência do modelo proposto. Essa técnica se mostrou muito eficientemente, principalmente para instâncias muito grandes, além de obter melhores resultados para a maioria dos experimentos, em média esta técnica mostra ser três vezes mais rápida comparada ao *solver Cplex*.

Capítulo 4

Conclusão

O principal objetivo dessa tese é propor uma formulação matemática para o estudo em mercado econômico, para os problemas de projeto de redes em árvore e localização de facilidades em dois níveis com demandas sensíveis a preço. O problema determina a rede ótima e as decisões de preço a fim de maximizar o benefício social líquido, considerando que são ofertados dois níveis de serviço. Além disso, o problema analisa a sensibilidade da demanda para a qualidade do serviço em tais sistemas e permite a solução destes problemas para casos de grande escala.

No Capítulo (2) os experimentos são detalhados para a competição entre diferentes níveis de serviço em empresas no setor econômico com multimercadoria no sistema de telecomunicação. Diferentes jogadores podem analisar a sensibilidade da demanda pela qualidade do serviço em tais sistemas e encontrar o equilíbrio desejado. O problema de projeto de redes em árvore foi aplicado para dois tipos de instâncias: para as instâncias da biblioteca QAPLIB que são consideradas de alta complexidade e para instâncias geradas aleatoriamente. Através dos experimentos computacionais, pode-se perceber que a complexidade das instâncias QAPLIB é muito maior que a das instâncias aleatória, uma vez que esta obteve maior tempo computacional. Além disso, o artigo apresentado no Capítulo (2) está submetido na revista *Socio-Economic Planning Sciences*.

No Capítulo (3) foi abordado também um modelo que lida com demandas sensíveis a preço, aplicado na privatização da área da saúde. Onde considerou que todos os serviços oferecidos são designados particulares e cada cliente poderá escolher entre o serviço popular ou o serviço mais caro, dependendo da sua disponibilidade financeira e da utilização do serviço (pacote ofertado). O problema determina a maximização do benefício social líquido e o lucro total da oferta, analisa a sensibilidade da demanda pela qualidade do serviço em tais sistemas e permite a solução desses problemas em dois níveis de serviços, (o popular e o mais caro) para casos de grande escala. Foram utilizadas as instâncias da biblioteca online GAP para realizar os experimentos

computacionais do problema em estudo.

Os problemas abordados são não-linear NP-Difícil, portanto, de difícil resolução. Para sanar essa dificuldade, foi aplicado o método de Aproximação Externa. Essa técnica se mostrou muito eficiente, tornando-se em média seis vezes mais rápido e três vezes mais rápido que o *solver CPLEX*, veja nas seções (2.3.2) e (3.4), respectivamente. Dada a complexidade do problema em estudo, pretende-se, como pesquisa futura, aplicar outros métodos, com intuito de acelerar a convergência do modelo, entre eles está o método de Decomposição de Benders ([Benders, 1962](#)).

Nota-se que a versão OA é muito mais rápida e eficiente obtendo a solução ótima em tempo muito mais significativo, mas ainda pode ser melhorada. Para as instâncias acima de 18 nós, no problema de projeto de redes, e, acima de 30 nós para o problema de localização de facilidades, o tempo computacional para encontrar a solução ótima é muito elevado. Para tratar essa debilidade, como investigação futuras, algumas técnicas podem ser desenvolvidas a fim de acelerar a convergência do método. Propõe-se a utilização de otimização robusta, para lidar com a incerteza em relação aos dados de entrada.

Referências Bibliográficas

- Aikens, C. H. (1985). Facility location models for distribution planning. *European journal of operational research*, 22(3):263–279.
- Arthur, M. G. (1970). Elements of large-scale mathematical programming. *Management Science*, 16:N0.
- Baillie, H., Costello, M., and West, D. (1998). Privatization, social structures and delivery of health care in the slovak republic. *The Journal of health administration education*, 16(2):243–254.
- Baïou, M. and Barahona, F. (2014). A polyhedral study of a two level facility location model. *RAIRO-Operations Research*, 48(2):153–165.
- Banoob, S. N. (1994). Private and public financing: health care reform in eastern and central europe.
- Battistella, R. (1993). Health services reforms: political and managerial aims—an international perspective. *The International journal of health planning and management*, 8(4):265–274.
- Beckmann, M., McGuire, C., and Winsten, C. B. (1956). Studies in the economics of transportation. Technical report.
- Benders, J. F. (1962). Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. *Numerisch Mathematik*, 4:238–252.
- Bertsekas, D., Gallager, R., and Humblet, P. (1992). Data networks, vol. 2.
- Bertsekas, D. P. and Tsitsiklis, J. N. (1989). *Parallel and distributed computation: numerical methods*. Prentice-Hall, Inc.
- Bezerra, S. N., de Souza, S. R., and de Almeida Vitor, J. F. (2008). *Algoritmos evolutivos paralelos aplicados ao problema das p-medianas*. PhD thesis, Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional). CEFET/MG. Belo Horizonte/MG.

- Blumenthal, D. and Hsiao, W. (2005). Privatization and its discontents—the evolving chinese health care system.
- Camargo, R. S., Miranda, G., and Ferreira, R. P. (2011). A hybrid outer-approximation/benders decomposition algorithm for the single allocation hub location problem under congestion. *Operations Research Letters*, 39(5):329–337.
- Camargo, R. S., Miranda Jr, G., and Luna, H. P. (2008). Benders decomposition for the uncapacitated multiple allocation hub location problem. *Computers and Operations Research*, 35:1047–1064.
- Costa, A. M. (2005). A survey on benders decomposition applied to fixed-charge network design problems. *Computers & operations research*, 32(6):1429–1450.
- Cournot, A. A. and Fisher, I. (1897). *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*. Macmillan Co.
- Dafermos, S. C. and Sparrow, F. T. (1969). The traffic assignment problem for a general network. *Journal of Research of the National Bureau of Standards, Series B*, 73(2):91–118.
- Delfino, A. and de Oliveira, W. (2018). Outer-approximation algorithms for nonsmooth convex minlp problems. *Optimization*, pages 1–23.
- Duran, M. and Grossmann, I. E. (1986a). An outer-approximation algorithm for a class of mixed integer nonlinear programmes. *Mathematical Programming*, 36:307–339.
- Duran, M. A. and Grossmann, I. E. (1986b). An outer-approximation algorithm for a class of mixed-integer nonlinear programs. *Mathematical Programming*, 36(3):307–339.
- Enke, S. (1951). Equilibrium among spatially separated markets: Solution by electric analogue. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 40–47.
- Erlenkotter, D. (1977). Facility location with price-sensitive demands: private, public, and quasi-public. *Management Science*, 24(4):378–386.
- Erlenkotter, D. (1978). A dual-based procedure for uncapacitated facility location. *Operations Research*, 26(6):992–1009.
- Farahani, R. Z., Abedian, M., and Sharahi, S. (2009). Dynamic facility location problem. In *Facility Location*, pages 347–372. Springer.

- Fletcher, R. and Leyffer, S. (1994). Solving mixed integer nonlinear programs by outer approximation. *Mathematical programming*, 66(1-3):327–349.
- Florian, M. and Hearn, D. (1995). Network equilibrium models and algorithms. *Handbooks in Operations Research and Management Science*, 8:485–550.
- Fratta, M., Gerla, M., and Kleinrock, L. (1973). The flow deviation method: An approach to store-and-forward communication network design. *Networks*, 3:97–133.
- Gendron, B., Khuong, P.-V., and Semet, F. (2016). A lagrangian-based branch-and-bound algorithm for the two-level uncapacitated facility location problem with single-assignment constraints. *Transportation Science*, 50(4):1286–1299.
- Geoffrion, A. (1972). Generalized Benders decomposition. *Journal of optimization Theory and Applications*, 10(4):237–260.
- Goldengorin, B., Ghosh, D., and Sierksma, G. (2003). Branch and peg algorithms for the simple plant location problem. *Computers & Operations Research*, 30(7):967–981.
- Grossmann, I. E. and Kravanja, Z. (1995). Mixed-integer nonlinear programming techniques for process systems engineering. *Computers & chemical engineering*, 19:189–204.
- Ham, C. (1999). The third way in health care reform: does the emperor have any clothes? *Journal of health services research & policy*, 4(3):168–173.
- Harker, P. T. (1984). A variational inequality approach for the determination of oligopolistic market equilibrium. *Mathematical Programming*, 30(1):105–111.
- Hebrang, A., Henigsberg, N., Erdeljic, V., Foro, S., Vidjak, V., Grga, A., and Maček, T. (2003). Privatization in the health care system of croatia: effects on general practice accessibility. *Health Policy and Planning*, 18(4):421–428.
- Huang, S., Batta, R., and Nagi, R. (2005). Distribution network design: Selection and sizing of congested connections. *Naval Research Logistics (NRL)*, 52(8):701–712.
- Jungnickel, U. (1994). Differential-algebraic equations in riemannian spaces and applications to multibody system dynamics. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 74(9):409–415.
- Karuppiah, R., Furman, K. C., and Grossmann, I. E. (2008). Global optimization for scheduling refinery crude oil operations. *Computers & Chemical Engineering*, 32(11):2745–2766.

- Kleinrock, L. (2007). *Communication nets: Stochastic message flow and delay*. Courier Corporation.
- Klose, A. and Drexl, A. (2005). Facility location models for distribution system design. *European journal of operational research*, 162(1):4–29.
- Krarup, J. and Pruzan, P. M. (1983). The simple plant location problem: survey and synthesis. *European journal of operational research*, 12(1):36–81.
- Kuehn, A. A. and Hamburger, M. J. (1963). A heuristic program for locating warehouses. *Management science*, 9(4):643–666.
- Landete, M. and Marín, A. (2009). New facets for the two-stage uncapacitated facility location polytope. *Computational Optimization and Applications*, 44(3):487.
- Lawler, E. L. and Wood, D. E. (1966). Branch-and-bound methods: A survey. *Operations research*, 14(4):699–719.
- Le Grand, J. (1999). Competition, cooperation, or control? tales from the british national health service. *Health affairs*, 18(3):27–39.
- Ljubić, I. and Moreno, E. (2018). Outer approximation and submodular cuts for maximum capture facility location problems with random utilities. *European Journal of Operational Research*, 266(1):46–56.
- Luna, H., Mahey, P., Ouorou, A., and Chifflet, J. (1997). Multicommodity flows with price sensitive demands. In *Proceedings of the 5th International Conference on Telecommunication Systems Modeling and Analysis*, pages 583–593.
- Luna, H. P. (1979). Note on price unicity in economic equilibrium models. *Socio-Economic Planning Sciences*, 13(4):223–225.
- Luna, H. P. L. (1978). Two-level national-regional planning and mathematical programming decomposition applied to spatial price equilibrium models†. *Socio-Economic Planning Sciences*, 12(5):251–266.
- Magnanti, T. L. and Wong, R. T. (1984). Network design and transportation planning: Models and algorithms. *Transportation Science*, 18:1–55.
- Manga, P. (1987). Privatization of health care services in canada: Reform or regress? *Journal of consumer policy*, 10(1):1–24.
- McLaughlin, C. P. (1998). Privatization and health care. *Managed Care and Public Health*. Gaithersburg, MD: Aspen Publishers, Inc, pages 83–101.

- Minoux, M. (1989). Network synthesis and optimum network design problems: Models, solution methods and applications. *Networks*, 19:313–360.
- Miranda, G., Luna, H., Camargo, R., and Pinto, L. (2011). Tree network design avoiding congestion. *Applied Mathematical Modelling*, 35(9):4175–4188.
- Nagurney, A. (1999). *Network economics: A variational inequality approach*, volume 10. Springer.
- Nagurney, A. (2006). *Supply chain network economics: dynamics of prices, flows and profits*. Edward Elgar Publishing.
- Norén, R. (2013). *Equilibrium models in an applied framework: industrial structure and transformation*. Springer Science & Business Media.
- Nugent, C. E., Vollmann, T. E., and Ruml, J. (1968). An experimental comparison of techniques for the assignment of facilities to locations. *Operations research*, 16(1):150–173.
- Ouorou, A., Luna, H. P. L., and Mahey, P. (2001). Multicommodity network expansion under elastic demands. *Optimization and Engineering*, 2(3):277–292.
- Ouorou, A., Mahey, P., and -Ph Vial, J. (2000). A survey of algorithms for convex multicommodity flow problems. *Management Science*, 46(1):126–147.
- Portal Brasil (2014). Governo está trabalhando para levar internet banda larga a todos os municípios, diz presidenta. <http://www.brasil.gov.br/governo/2011/12/governo-esta-trabalhando-para-levar-internet-banda-larga-a-todos-os-municipios-diz-presidenta>. In Portuguese.
- Samuelson, P. A. (1952). Spatial price equilibrium and linear programming. *The American economic review*, pages 283–303.
- Scarpaci, J. (1989). Introduction: The theory and practice of health services privatization. *Health services privatization in industrial societies*. Rutgers University Press, New Brunswick, pages 1–23.
- Strickling, L. E. (2015). Promoting investment in broadband infrastructure. <https://ecfsapi.fcc.gov/file/60001013458.pdf>.
- Su, L., Tang, L., Bernal, D. E., and Grossmann, I. E. (2018). Improved quadratic cuts for convex mixed-integer nonlinear programs. *Computers & Chemical Engineering*, 109:77–95.

-
- Takayama, T. and Judge, G. G. (1964). An intertemporal price equilibrium model. *Journal of Farm Economics*, pages 477–484.
- Takayama, T. and Judge, G. G. (1971). *Spatial and temporal price and allocation models*. North-Holland Amsterdam.
- Verter, V. (2011). Uncapacitated and capacitated facility location problems. In *Foundations of location analysis*, pages 25–37. Springer.
- Young, D. W. (1990). Privatizing health care: Caveat emptor. *The International journal of health planning and management*, 5(4):237–270.
- Yuan, X., Zhang, S., Pibouleau, L., and Domenech, S. (1988). Une méthode d’optimisation non linéaire en variables mixtes pour la conception de procédés. *RAIRO-Operations Research-Recherche Opérationnelle*, 22(4):331–346.