

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-graduação em Matemática



Eduardo Carlos Cabrera Zúñiga

**SEPARATRIZES DE GERMES DE CAMPOS DE VETORES  
ANALÍTICOS REAIS EM DIMENSÃO DOIS**

Belo Horizonte  
2021

EDUARDO CARLOS CABRERA ZÚÑIGA

**SEPARATRIZES DE GERMES DE CAMPOS DE VETORES  
ANALÍTICOS REAIS EM DIMENSÃO DOIS**

**Versão final**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Rogério Santos Mol.

Belo Horizonte  
2021

Zúñiga, Eduardo Carlos Cabrera.

Z95s      Separatrizes de germes de campos de vetores analíticos reais em dimensão dois / Eduardo Carlos Cabrera Zúñiga – 2021. 84 f. il.

Orientador: Rogério Santos Mol.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.

Referências: f. 83-84.

1. Matemática – Teses. 2. Singularidades (Matemática) – Teses. 3. Vetores – Teses. 4. Invariantes – Teses. I. Mol, Rogério Santos. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51 (043)

ATA DA CENTÉSIMA SEPTUAGÉSIMA PRIMEIRA DEFESA DE TESE DE DOUTORADO DO ALUNO EDUARDO CARLOS CABRERA ZUÑIGA, REGULARMENTE MATRICULADO NO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, REALIZADA DIA 12 DE AGOSTO DE 2021.

Aos doze dias do mês de agosto de 2021, às 10h00, em reunião pública virtual na Plataforma Microsoft Teams pelo link [https://teams.microsoft.com/l/meetup-join/19%3ameeting\\_mtu2mtdjngqztm2yi00mjk0l1jn1jutngmznhmzgq3ote4%40thread.v2/0?context=%7b%22tid%22%3a%2264126139-43524cd7b1fb2a971c6f69a6%22%2c%22oid%22%3a%22f776e64f-1db6-4a6d-a5d1-8113ca32f1db%22%7d](https://teams.microsoft.com/l/meetup-join/19%3ameeting_mtu2mtdjngqztm2yi00mjk0l1jn1jutngmznhmzgq3ote4%40thread.v2/0?context=%7b%22tid%22%3a%2264126139-43524cd7b1fb2a971c6f69a6%22%2c%22oid%22%3a%22f776e64f-1db6-4a6d-a5d1-8113ca32f1db%22%7d) (conforme mensagem eletrônica da Pró-Reitoria de Pós-Graduação de 26/03/2020, com orientações para a atividade de defesa de tese durante a vigência da Portaria nº 1819), reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para julgar a defesa de tese do aluno **Eduardo Carlos Cabrera Zuñiga**, intitulada: “*Separatrizes de germes de campos de vetores analíticos reais em dimensão dois*”, requisito final para obtenção do Grau de Doutor em Matemática. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Rogério Santos Mol, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares do trabalho final, passou a palavra ao aluno para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa do aluno. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se reservadamente, sem a presença do aluno, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: o aluno foi considerado aprovado sem ressalvas e por unanimidade. O resultado final foi comunicado publicamente ao aluno pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 12 de agosto de 2021.



**PROF. DR. ROGÉRIO SANTOS MOL**  
Orientador (UFMG)



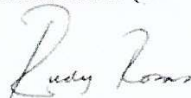
**PROF. DR. ARTURO ULISES FERNANDEZ PEREZ**  
Examinador (UFMG)



**PROF. DR. BRUNO SCÁRDUA**  
Examinador (UFRJ)



**PROF. DR. MÁRCIO GOMES SOARES**  
Examinador (UFMG)



**PROF. DR. RUDY ROSAS**  
Examinador (PUCP - Lima)



Universidade Federal de Minas Gerais  
Departamento de Matemática  
Programa de Pós-Graduação em Matemática



FOLHA DE APROVAÇÃO

*Separatrizes de germes de campos de vetores analíticos  
reais em dimensão dois*

**EDUARDO CARLOS CABRERA ZUÑIGA**

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

*Rogério Santos Mol*

Prof. Rogério Santos Mol  
UFMG

*Arturo*

Prof. Arturo Ulises Fernandez Perez  
UFMG

*Bruno Scárdua*

Prof. Bruno Scárdua  
UFRJ

*Marcio*

Prof. Márcio Gomes Soares  
UFMG

*Rudy Rosas*

Prof. Rudy Rosas  
PUCP - Lima

Belo Horizonte, 12 de agosto de 2021.

*À minha família.*

## Meus agradecimentos

A Deus.

À minha família, especialmente aos meus pais Olinda e Carlos Humberto, minhas tias Nora, Haydeé, Rebeca, meus tios Nito, Pepe, Juan, e minha irmã Norita. A meus irmãos Carlos, Diana, José, Leonardo e a meu tio Rolando Chávez, por sua torcida incondicional.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMG.

Ao meu caro professor, orientador e amigo Rogério Santos Mol.

Aos professores membros da banca examinadora: Márcio Soares, Arturo Fernández, Bruno Scárdua, Rudy Rosas, Gilberto Duarte Cuzzuol.

Aos professores César Camacho, Mário Jorge Dias Carneiro, Sylvie Oliffson, Sonia Pinto de Carvalho, Cesar de Souza Eschenazi, Ana Cristina Vieira, Hamilton Prado e Alberto Sarmiento. Obrigado também às secretárias Eliane Kelli Gaudêncio e Eliane Andréa Barbosa. Todos excelentes pessoas e profissionais.

A Carlos Carballo, Tiago Guizzo, Viktor Bekkert, Elizabeth Laines e meu querido sobrinho Ruben Sahir, Carlos Neyra e família, Loretta Gasco, Maynard Kong, Nemeicio Regalado, Juan Montealegre, Emilio Gonzaga, Jane Lage, Csaba Schneider, Joel Cruz Ramirez, Carlos Guzman, José Vilchez, Mariane Paratela, Jacqueline Castro, Rita Segovia, Hugo Flores, Daniel Chumpitaz, Luis Diaz, Luis Enrique Eyzaguirre, Renato Benazic, Oswaldo Velásquez, Eduardo Cárdenas, Zuleyka Vasquez, Luz Escobedo, Valeria Caballero, Alonso Aguila, Aline Fernanda, Gladston Mota e família, Juscelino Ribas e família, Mirlene, Morgana e família, Narjara e família, Fina Alegre, Anita Alegre e seu filho José, Guillermo Barrientos, Mirtha e Lua, Tania Monzón, Zarella, Hernán, Jesús, Pedro, Alex, Ken, Salvador e muitas pessoas mais.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pelo financiamento parcial do curso.

## Abstract

This thesis is dedicated to the study of conditions to ensure the existence of formal separatrices for a foliation defined by a germ of real analytical vector field with an algebraically isolated singularity at the origin of  $\mathbb{R}^2$ . We also present sufficient conditions to guarantee the existence of separatrices for germs of foliations defined by real analytical 1-forms at  $(\mathbb{R}^3, 0)$ . At  $(\mathbb{R}^2, 0)$  we study the general case and at  $(\mathbb{R}^3, 0)$  we study only the non-dicritical case. In dimension two, a formal separatrix, or simply separatrix, is a germ of invariant irreducible formal curve, whereas in dimension three it is a germ of invariant irreducible formal surface.

At  $(\mathbb{R}^2, 0)$ , a germ of foliation  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  induced by a germ of real analytical vector field with algebraically isolated singularity at the origin does not always admit formal separatrix. After a process of reduction of singularities, each singularity of saddle-node type obtained can be classified as topological saddle, topological node or topological saddle-node. We say that  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  is of topological real generalized curve type if after a process of reduction of singularities it does not admit singularities of topological saddle-node type. Our main result is that *if either the algebraic multiplicity or the Milnor number of a germ of a topological real generalized curve type foliation at  $(\mathbb{R}^2, 0)$  is even, then it has at least one formal separatrix.*

At  $(\mathbb{R}^3, 0)$ , a germ of foliation  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  induced by a germ of integrable real analytical 1-form of codimension one is  $\mathbb{C}$ -non-dicritical if its complexification is a non-dicritical germ of holomorphic 1-form. A real immersion  $i_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}^2, 0) \hookrightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  is transversal to  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ , if the singular set  $\text{Sing}(i_{\mathbb{R}}^* \mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  has an algebraically isolated singularity at the origin and the algebraic multiplicity satisfies  $\nu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}) = \nu_0(i_{\mathbb{R}}^* \mathcal{F}_{\mathbb{R}})$ .

A germ of foliation  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  is of *topological real generalized surface type* if, for all immersion  $i_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}^2, 0) \hookrightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  transversal to it, the foliation  $i_{\mathbb{R}}^* \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  has no real topological saddle-nodes in the process of reduction of singularities. As an application of our main result for  $(\mathbb{R}^2, 0)$ , we show that *a germ of topological real generalized surface foliation in  $(\mathbb{R}^3, 0)$  having even algebraic multiplicity, or such that there is at least one transverse immersion for which the Milnor number  $\mu_0(i_{\mathbb{R}}^* \mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  is even, has at least one formal separatrix.*

### Keywords:

Real analytic vector field, formal and analytic separatrix, reduction of singularities, index of vector fields, polar invariants, center-focus vector field.



## Resumo

Essa tese é dedicada ao estudo de condições para garantir a existência de separatrizes formais em folheações definidas por um germe de campo vetorial analítico real com singularidade algebricamente isolada na origem de  $\mathbb{R}^2$ . Também apresentamos condições suficientes para garantir a existência de separatrizes para germes de folheações definidas por 1-formas analíticas reais em  $(\mathbb{R}^3, 0)$ . Em dimensão dois, uma separatriz formal ou simplesmente separatriz é um germe irreduzível de curva formal invariante, enquanto em dimensão três é um germe irreduzível de superfície formal invariante. Em  $(\mathbb{R}^2, 0)$  estudamos o caso geral e em  $(\mathbb{R}^3, 0)$  estudamos apenas o caso não-dicrítico.

Em  $(\mathbb{R}^2, 0)$ , um germe de folheação  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  induzida por um germe de campo de vetores analítico real com singularidade algebricamente isolada na origem nem sempre admite separatriz formal. Após de um processo de redução de singularidades, cada singularidade do tipo sela-nó real obtida pode ser classificada como sela topológica, nó topológico ou sela-nó topológica. Dizemos que  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  é do tipo curva generalizada real topológica se após um processo de redução de singularidades ela não admite singularidades do tipo sela-nó topológica. Nosso principal resultado diz que *se a multiplicidade algébrica ou o número de Milnor de um germe de folheação do tipo curva generalizada real topológica em  $(\mathbb{R}^2, 0)$  é par, então ele possui pelo menos uma separatriz formal.*

Em  $(\mathbb{R}^3, 0)$ , um germe de folheação  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  induzido por um germe de 1-forma analítica real integrável de codimensão 1 é  $\mathbb{C}$ -não-dicrítica se sua complexificação é não-dicrítica. Uma *imersão real*  $i_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}^2, 0) \hookrightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  é *transversal* a  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ , se o conjunto singular  $\text{Sing}(i_{\mathbb{R}}^* \mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  tem uma singularidade algebricamente isolada na origem e a multiplicidade algébrica satisfaz  $\nu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}) = \nu_0(i_{\mathbb{R}}^* \mathcal{F}_{\mathbb{R}})$ . Um germe de folheação  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  é do tipo *superfície generalizada real topológica* se, para toda imersão  $i_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}^2, 0) \hookrightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  transversal a ela, a folheação  $i_{\mathbb{R}}^* \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  não possui selas-nós topológicas reais no processo de redução de singularidades. Como aplicação de nosso principal resultado em  $(\mathbb{R}^2, 0)$  mostramos que *um germe de folheação do tipo superfície generalizada real topológica em  $(\mathbb{R}^3, 0)$  com multiplicidade algébrica par, ou admitindo pelo menos uma imersão transversal tal que o número de Milnor  $\mu_0(i_{\mathbb{R}}^* \mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  é par, tem pelo menos uma separatriz formal.*

### Palavras-chave:

Campo vetorial analítico real, separatriz analítica e formal, redução de singularidades, índice de campos de vetores, invariantes polares, campos de vetores centro-foco.

## Sumário

Introdução	10
Capítulo 1. Preliminares	21
1.1. Teoria básica	21
Capítulo 2. Blow-ups complexos e reais	30
2.1. Blow-up puntual em $0 \in \mathbb{C}^2$	30
2.2. Blow-up puntual em $0 \in \mathbb{R}^2$	32
2.3. Relação entre um blow-up em $(\mathbb{R}^2, 0)$ e o blow-up em $(\mathbb{C}^2, 0)$	33
2.4. Blow-up puntual de uma folheação analítica complexa em $0 \in \mathbb{C}^2$	33
2.5. Blow-up puntual de uma folheação analítica real em $0 \in \mathbb{R}^2$	35
2.6. Composição de blow-ups complexos e composição de blow-ups reais	36
2.7. Blow-up puntual em $0 \in \mathbb{C}^3$	37
2.8. Blow-up ao longo de uma curva lisa em $\mathbb{C}^3$	41
Capítulo 3. Invariante polar de uma folheação holomorfa em $(\mathbb{C}^2, 0)$	45
3.1. Preliminares em $(\mathbb{C}^2, 0)$	45
3.2. Invariantes polares	48
Capítulo 4. Existência de Separatrizes em $(\mathbb{R}^2, 0)$	56
4.1. Preliminares em $(\mathbb{R}^2, 0)$	56
4.2. Processo de complexificação	58
4.3. Redução de singularidades em $(\mathbb{R}^2, 0)$ e $(\mathbb{C}^2, 0)$	60
4.4. Classificação topológica de uma sela-nó algébrica	61
4.5. A multiplicidade algébrica e a existência de separatrizes	62
4.6. O número de Milnor e a existência de separatrizes reais	66
Capítulo 5. Existência de separatrizes de 1-formas integráveis em $(\mathbb{C}^3, 0)$ e $(\mathbb{R}^3, 0)$	70
5.1. Composição de blow-ups com centros em pontos ou curvas lisas	70
5.2. Redução de singularidades no caso não-dicrítico complexo	72
5.3. Germe de folheação analítica real singular de codimensão 1 em $(\mathbb{R}^3, 0)$	74
5.4. Complexificação de uma folheação analítica real em $(\mathbb{R}^3, 0)$	74
5.5. Blow-ups permissíveis no espaço complexificado	76
5.6. Redução de singularidades de uma folheação analítica real em $(\mathbb{R}^3, 0)$	77
5.7. Relação entre as separatrizes complexas e a redução de singularidades	78
5.8. Imersões transversais complexas e reais	78
5.9. Superfície generalizada real e superfície generalizada real topológica	80
Referências Bibliográficas	83

## Introdução

Seja  $X_{\mathbb{R}}$  um germe de campo vetorial analítico real com singularidade algebricamente isolada na origem de  $(\mathbb{R}^2, 0)$ , definido por

$$(1) \quad X_{\mathbb{R}} = P_{\mathbb{R}}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q_{\mathbb{R}}(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

onde  $P_{\mathbb{R}}, Q_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}\{x, y\}$  não têm fator comum e  $P_{\mathbb{R}}(0, 0) = Q_{\mathbb{R}}(0, 0) = 0$ . Este trabalho propõe dar condições suficientes de natureza algébrica a  $X_{\mathbb{R}}$  para garantir que a folheação induzida pelas trajetórias de  $X_{\mathbb{R}}$ , denotada por  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ , tenha pelo menos uma separatriz formal. O estudo dá sequência ao trabalho de Risler [22]. Parte de nossa pesquisa aparece no artigo [1].

Denotamos por  $\mathbb{R}\{x, y\}$  (respectivamente  $\mathbb{C}\{x, y\}$ ) o anel de séries de potências nas variáveis  $x$  e  $y$  com coeficientes reais (respectivamente complexos) que são convergentes. Denotamos também por  $\mathbb{R}[[x, y]]$  (respectivamente  $\mathbb{C}[[x, y]]$ ) o anel de séries de potências nas variáveis  $x$  e  $y$  com coeficientes reais (respectivamente complexos) que não necessariamente são convergentes. Uma série de potências que pertence a  $\mathbb{R}[[x, y]]$  (respectivamente  $\mathbb{C}[[x, y]]$ ) recebe o nome de série de *potências formal real* (respectivamente *complexa*). O germe de campo analítico complexo com singularidade isolada na origem, definido por

$$(2) \quad X_{\mathbb{C}} = P_{\mathbb{C}}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q_{\mathbb{C}}(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

onde  $P_{\mathbb{C}}, Q_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}\{x, y\}$  não têm fator comum e  $P_{\mathbb{C}}(0, 0) = Q_{\mathbb{C}}(0, 0) = 0$ , é definido pelas mesmas fórmulas que definem o campo  $X_{\mathbb{R}}$ , porém no lugar de considerar suas variáveis em  $\mathbb{R}$ , as consideramos em  $\mathbb{C}$ . Dizemos que um germe de campo analítico real  $X_{\mathbb{R}}$  tem *singularidade algebricamente isolada* se seu complexificado  $X_{\mathbb{C}}$  tem singularidade isolada. Isso equivale ao fato que os coeficientes de  $X_{\mathbb{R}}$  serem ambos não unidades e relativamente primos em  $\mathbb{R}\{x, y\}$ . Seja

$$J : (x, y) \in \mathbb{C}^2 \mapsto (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{C}^2$$

a involução anti-holomorfa canônica, onde  $\bar{x}$  é o conjugado de  $x$ . O *traço real* de um subconjunto de  $\mathbb{C}^2$  é o conjunto formado pelos pontos fixos de  $J$ . Identificando o traço real de  $\mathbb{C}^2$  com  $\mathbb{R}^2$ , como  $P_{\mathbb{C}}$  e  $Q_{\mathbb{C}}$  têm coeficientes reais,  $X_{\mathbb{C}}$  é simétrico com respeito ao traço real de  $\mathbb{C}^2$ , tem-se que o traço real das soluções de  $X_{\mathbb{C}}$  se identifica com as soluções de  $X_{\mathbb{R}}$ .

Para simplificar a apresentação de conceitos, definições e resultados que já existem em um contexto mais geral, tanto no caso real como no complexo, e explicar o uso deles em nosso estudo, consideramos o corpo  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ : dado um campo vetorial analítico definido por

$$(3) \quad X_{\mathbb{K}} = P_{\mathbb{K}}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q_{\mathbb{K}}(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

onde  $P_{\mathbb{K}}, Q_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}\{x, y\}$  não têm fator comum,  $P_{\mathbb{K}}(0, 0) = Q_{\mathbb{K}}(0, 0) = 0$ , e  $(x, y) \in U_{\mathbb{K}}$  uma vizinhança aberta da origem contida em  $\mathbb{K}^2$ . Observamos que, quando  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $P_{\mathbb{K}}$  e  $Q_{\mathbb{K}}$  podem admitir coeficientes complexos. No caso em que  $P_{\mathbb{C}}$  e  $Q_{\mathbb{C}}$  correspondem ao complexificado de um campo de vetores analítico real, como na equação (2), seus coeficientes são reais. As soluções do campo vetorial analítico  $X_{\mathbb{K}}$  decompõem a vizinhança  $U_{\mathbb{K}}$  em um conjunto singular, onde o campo é nulo, e em trajetórias do campo fora da origem, onde o campo não é nulo. Essa decomposição recebe o nome de *folheação analítica (real ou complexa) singular de dimensão um* e é denotada por  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$ . As trajetórias de um campo fora do conjunto singular são denominadas *folhas*. Denotamos por  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  o germe de folheação analítica real induzida por  $X_{\mathbb{R}}$  definido em (1). Denotamos por  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  o germe de folheação analítica complexa induzida por  $X_{\mathbb{C}}$ , o complexificado de  $X_{\mathbb{R}}$ , definido em (2). Dizer que um germe de folheação holomorfa  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$  em  $(\mathbb{K}^2, 0)$  é induzido pelo campo vetorial analítico  $X_{\mathbb{K}}$  definido em (3) é equivalente a dizer que  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$  é induzido pela equação  $\omega_{\mathbb{K}} = 0$ , onde  $\omega_{\mathbb{K}}$  é a 1-forma holomorfa (integrável, pois estamos em dimensão dois)

$$(4) \quad \omega_{\mathbb{K}} = P_{\mathbb{K}}(x, y)dy - Q_{\mathbb{K}}(x, y)dx.$$

A folheação  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  está identificada com o traço real de  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ , cada folha de  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  correspondendo a uma única folha de  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ . Pela simetria do campo  $X_{\mathbb{C}}$  em relação à involução  $J$ , as folhas de  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  fora do traço real aparecem de forma simétrica aos pares.

Se o desenvolvimento de Taylor de uma função analítica (real ou complexa) é

$$f = \sum_{k=m}^{\infty} f_k = f_m + f_{m+1} + \dots,$$

onde  $f_m$  é o primeiro jato não identicamente nulo ( $f_m \neq 0$ ), o número  $m$  é chamado de *multiplicidade algébrica ou ordem* da função  $f$  e denotado por  $\nu_0(f)$ . No caso em que  $f(0) = 0$ , é também chamado de multiplicidade algébrica da curva definida por  $f = 0$ . A *multiplicidade algébrica* do germe de folheação  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$ , induzida por  $X_{\mathbb{K}}$ , é definida como

$$\nu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{K}}) = \min\{\nu_0(P_{\mathbb{K}}), \nu_0(Q_{\mathbb{K}})\}.$$

O *número de Milnor* de  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$  é definido por

$$\mu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{K}}) = \dim \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(P_{\mathbb{C}}, Q_{\mathbb{C}})},$$

onde  $(P_{\mathbb{C}}, Q_{\mathbb{C}})$  é o ideal gerado por  $P_{\mathbb{C}}, Q_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}\{x, y\}$ . Uma *curva formal* (respectivamente *convergente*) é um objeto  $C$  dado pela equação  $f(x, y) = 0$ , onde  $f$  é uma série de potências formal (respectivamente convergente). Uma curva formal ou convergente  $C$  é dita *irredutível* se  $C = C_1 \cup C_2$ , com  $C_1$  e  $C_2$  curvas formais (respectivamente *convergentes*), implica  $C_1 = C$  e  $C_2 = \emptyset$ , ou  $C_1 = \emptyset$  e  $C_2 = C$ . Toda curva formal ou convergente pode ser escrita, de maneira única, como união finita de curvas irredutíveis. Isso é consequência do fato de  $\mathbb{K}[[x, y]]$  e  $\mathbb{K}\{x, y\}$  serem domínios de fatoração única. Uma *separatriz* de  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$  é um germe de curva formal irredutível que passa pela origem e é tangente ao germe de campo vetorial que define a folheação. Uma separatriz definida por uma série de potências convergente recebe o nome de *separatriz convergente ou analítica*, caso contrário é denominada *separatriz puramente formal*. Enfatizamos que toda vez que mencionemos a palavra separatriz ou separatriz formal, significa que estamos admitindo a possibilidade desse germe de curva ser formal ou convergente. Quando a separatriz não for convergente, diremos que ela é *puramente formal*.

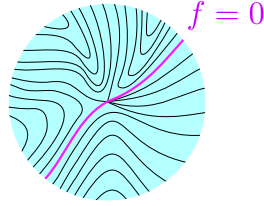


FIGURA 1. Os vetores tangentes à curva definida por  $f = 0$  são tangentes à folheação

Denotamos  $\text{Sep}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{K}})$  o conjunto de separatrizes de  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$ . Dizemos que uma curva formal (respectivamente convergente) definida pela equação  $f(x, y) = 0$ , onde  $f$  é uma série de potências formal (respectivamente convergente), não trivial, não unidade e reduzida, é *invariante* por  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$ , se ela é a união de curvas irredutíveis tangentes à folheação. Isso equivale à existência de uma função formal (respectivamente convergente)  $h$  tal que

$$P_{\mathbb{K}} \frac{\partial f}{\partial x} + Q_{\mathbb{K}} \frac{\partial f}{\partial y} = fh.$$

Em 1982, Camacho e Sad [4] provaram que um germe de campo vetorial analítico complexo definido em  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , com singularidade isolada na origem, possui pelo menos uma separatriz convergente. Porém, nem todo germe de campo analítico real tem soluções não triviais passando pela origem. Por exemplo, as soluções do campo  $X_{\mathbb{R}} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$  são os círculos centrados na origem,  $x^2 + y^2 = c$ , com  $c \geq 0$ , e portanto a folheação induzida por esse campo não tem separatrizes. Enfatizamos que a existência de separatrizes formais não implica na existência de separatrizes convergentes. No exemplo [22, p.219], a folheação analítica real induzida pelo campo

$$X_{\mathbb{R}} = (-y^2 + x^4) \frac{\partial}{\partial x} + (xy + x^3 + x^3y) \frac{\partial}{\partial y}$$

possui separatriz formal mas não tem separatrizes convergentes.

O *blow-up* em  $(0, 0) \in (\mathbb{K}^2, 0)$  é o mapa analítico

$$\pi_{\mathbb{K}} : (\tilde{\mathbb{K}}^2, D_{\mathbb{K}}) \rightarrow (\mathbb{K}^2, 0),$$

onde  $D_{\mathbb{K}} = \{0\} \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$  e

$$\tilde{\mathbb{K}}^2 = \{(x, y), [x : y]) : (x, y) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{0\}\} \cup D_{\mathbb{K}}.$$

$(\tilde{\mathbb{K}}^2, D_{\mathbb{K}})$  se identifica com  $(\mathbb{K}^2, 0)$  no seguinte sentido:  $\{(0, 0)\}$  é substituído por  $D_{\mathbb{K}}$ , um espaço projetivo  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$  mergulhado em  $\tilde{\mathbb{K}}^2$ , que parametriza as direções tangentes em  $0 \in \mathbb{K}^2$ . Duas cartas  $(x, v), (u, y) \in \mathbb{K}^2$  da variedade analítica  $\tilde{\mathbb{K}}^2$  são definidas pelas relações  $y = vx$  com  $x \neq 0$  e  $x = uy$  com  $y \neq 0$ , de forma tal que o mapa do blow-up se expressa como  $(x, v) \mapsto (x, vx)$ ,  $(u, y) \mapsto (uy, y)$ . Além disso, o blow-up restrito a  $\tilde{\mathbb{K}}^2 \setminus D_{\mathbb{K}}$  é um difeomorfismo analítico em sua imagem. Dado um germe de folheação analítica singular  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$  em  $(\mathbb{K}^2, 0)$ , um blow-up em  $(\mathbb{K}^2, 0)$  transforma  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$  em uma outra folheação  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}^1 = \pi_{\mathbb{K}}^* \mathcal{F}_{\mathbb{K}}$  em  $(\tilde{\mathbb{K}}^2, D_{\mathbb{K}})$ , denominada *transformada estrita* de  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$ , que possui um número finito de singularidades isoladas sobre  $D_{\mathbb{K}}$ , e corresponde difeomorficamente a  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$  sobre os pontos onde  $\pi_{\mathbb{K}}$  é um difeomorfismo. Se  $D_{\mathbb{K}}$  é uma curva invariante por  $\pi_{\mathbb{K}}^* \mathcal{F}_{\mathbb{K}}$ , dizemos que tanto  $\pi_{\mathbb{K}}$  como  $D_{\mathbb{K}}$  são *não-dicríticos*, caso contrário são *dicríticos*.

Ao aplicar um blow-up real  $\pi_{\mathbb{R}}$  a  $(\mathbb{R}^2, 0)$ , podemos considerar simultaneamente o blow-up complexo  $\pi_{\mathbb{C}}$  em  $(\mathbb{C}^2, 0)$  usando as mesmas equações que definem o blow-up real. O levantamento da involução canônica  $J$  pelo blow-up complexo  $\pi_{\mathbb{C}}$  define uma única involução contínua  $J^1$

$$J^1 : \tilde{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}^2,$$

tal que  $\pi_{\mathbb{C}} \circ J^1 = J \circ \pi_{\mathbb{C}}$ . Isso se deve ao fato de que a expressão do mapa  $\pi_{\mathbb{C}}$  em coordenadas envolve apenas coeficientes reais. O traço real de  $\tilde{\mathbb{C}}^2$  é o conjunto  $\{p_1 \in \tilde{\mathbb{C}}^2 : p_1 = J^1(p_1)\}$  e se identifica com  $\tilde{\mathbb{R}}^2$ . Assim, dizemos que  $\tilde{\mathbb{R}}^2$  é o traço real de  $\tilde{\mathbb{C}}^2$  e identificamos  $D_{\mathbb{R}}$  com  $D_{\mathbb{C}} \cap \tilde{\mathbb{R}}^2$ , e também  $\pi_{\mathbb{R}} = \pi_{\mathbb{C}}|_{\tilde{\mathbb{R}}^2}$ . Considerando a equação (2) e  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ , a folheação induzida por  $X_{\mathbb{C}}$ , denotamos o levantamento de  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  pelo blow-up  $\pi_{\mathbb{C}}$  por  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}^1$ . A folheação  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}^1$  é simétrica com respeito ao traço real  $\tilde{\mathbb{R}}^2$  devido ao fato que  $\pi_{\mathbb{C}}$ ,  $P_{\mathbb{C}}$  e  $Q_{\mathbb{C}}$  envolvem apenas funções cujas séries de Taylor têm coeficientes reais.

Dizemos que um germe de folheação analítica (real ou complexa) com singularidade isolada na origem de  $(\mathbb{K}^2, 0)$  tem uma *singularidade simples* ou *reduzida* em  $0 \in \mathbb{K}^2$  se os autovalores da parte linear do campo,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ , satisfazem uma das seguintes condições:

- (1)  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$  com  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}^+$  (*singularidade simples não-degenerada*),
- (2)  $\lambda_1 \neq 0$  e  $\lambda_2 = 0$  (*singularidade simples sela-nó*).

No contexto de folheações analíticas reais, nos referiremos a uma singularidade sela-nó como *singularidade sela-nó algébrica*. Uma singularidade simples tem exatamente duas separatrizes transversais [16]. No caso não-degenerado, ambas são convergentes. No caso sela-nó, aquela associada ao autovetor do autovalor não-nulo é convergente e é chamada de *separatriz forte*. A outra separatriz é formal e é chamada de *separatriz fraca*.

Fazendo  $k$  sucessivos blow-ups sobre as singularidades isoladas que vão aparecendo depois de cada blow-up, produzimos a composição

$$\sigma_{\mathbb{K}} = \pi_{\mathbb{K}}^1 \circ \cdots \circ \pi_{\mathbb{K}}^{k-1} \circ \pi_{\mathbb{K}}^k,$$

de blow-ups

$$\pi_{\mathbb{K}}^j : (\tilde{M}_{\mathbb{K}}^j, \mathcal{D}_{\mathbb{K}}^j) \rightarrow (\tilde{M}_{\mathbb{K}}^{j-1}, \mathcal{D}_{\mathbb{K}}^{j-1}),$$

para  $j = 1, \dots, k$ , tal que

- $(\tilde{M}_{\mathbb{K}}^0, \mathcal{D}_{\mathbb{K}}^0) = (\mathbb{K}^2, 0)$ ,  $(\tilde{M}_{\mathbb{K}}^1, \mathcal{D}_{\mathbb{K}}^1) = (\tilde{\mathbb{K}}^2, D_{\mathbb{K}})$ ,
- o blow-up em  $0 \in \mathbb{K}^2$  é  $\pi_{\mathbb{K}}^1 : (\tilde{M}_{\mathbb{K}}^1, \mathcal{D}_{\mathbb{K}}^1) \rightarrow (\tilde{M}_{\mathbb{K}}^0, \mathcal{D}_{\mathbb{K}}^0)$ .
- cada  $\pi_{\mathbb{K}}^j$  é um blow-up em um ponto  $p_{j-1} \in \mathcal{D}_{\mathbb{K}}^{j-1}$ .
- $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}^j = (\pi_{\mathbb{K}}^1 \circ \cdots \circ \pi_{\mathbb{K}}^{k-1} \circ \pi_{\mathbb{K}}^k)^{-1}(0)$  é um divisor com cruzamentos normais, cujas componentes irredutíveis são isomorfas a retas projetivas  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ .

Denotamos  $(\tilde{M}_{\mathbb{K}}^k, \mathcal{D}_{\mathbb{K}}^k)$  por  $(\tilde{M}_{\mathbb{K}}, \mathcal{D}_{\mathbb{K}})$ , e a sequência de blow-ups por

$$\sigma_{\mathbb{K}} : (\tilde{M}_{\mathbb{K}}, \mathcal{D}_{\mathbb{K}}) \rightarrow (\mathbb{K}^2, 0),$$

onde  $\mathcal{D}_{\mathbb{K}} = \sigma_{\mathbb{K}}^{-1}(0)$ . Um ponto que pertence a  $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}$  e está na interseção de duas componentes irredutíveis é chamado de *esquina*. Caso contrário, é chamado de *ponto traço*. Denotamos por  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}^0 = \mathcal{F}_{\mathbb{K}}$ ,  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}^1 = (\pi_{\mathbb{K}}^1)^*(\mathcal{F}_{\mathbb{K}}^0)$ ,  $\dots$ ,  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}^k = \tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{K}}^k = (\pi_{\mathbb{K}}^k)^*(\mathcal{F}_{\mathbb{K}}^{k-1}) = \sigma_{\mathbb{K}}^* \mathcal{F}_{\mathbb{K}}$  as folheações obtidas como transformadas estritas pela sequência de blow-ups. Uma componente irredutível de  $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}$  é classificada como *dicrítica* se é não-invariante por  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{K}}$ , caso contrário, é classificada como *não-dicrítica*. Dizemos que  $B_{\mathbb{K}} \in \text{Sep}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{K}})$  é uma *separatriz dicrítica*, se  $\tilde{B}_{\mathbb{K}} = \sigma_{\mathbb{K}}^* B_{\mathbb{K}}$  toca o divisor  $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}$  em uma componente dicrítica. Caso

contrário, dizemos que  $B_{\mathbb{K}}$  é uma *separatriz isolada*. O conjunto de separatrizes dicríticas é denotado por  $\text{Dic}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{K}})$ .

No caso complexo que estudamos, um blow-up complexo em uma singularidade que está no traço real determina o levantamento da involução anti-holomorfa para a variedade obtida pelo blow-up. Isso porém não acontece caso o blow-up complexo tenha centro em uma singularidade que está fora do traço real. Por esse motivo, se  $p_1$  é uma singularidade fora do traço real de  $\mathbb{C}^2$  temos que considerar a singularidade  $p_2 = J(p_1)$  e fazer dois blow-ups sucessivos  $\pi_{\mathbb{C}}^1$  e  $\pi_{\mathbb{C}}^2$ , o primeiro sobre  $p_1$  e outro sobre a singularidade  $(\pi_{\mathbb{C}}^1)^{-1}(p_2)$ . Informalmente podemos considerar dita composição como se fosse um único blow-up. Ou seja, consideramos os blow-ups

$$\pi_{\mathbb{C}}^1 : (\widetilde{M}_{\mathbb{C}}^1, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^1) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$$

e

$$\pi_{\mathbb{C}}^2 : (\widetilde{M}_{\mathbb{C}}^2, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^2) \rightarrow (\widetilde{M}_{\mathbb{C}}^1, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^1),$$

para fazer a composição

$$\pi_{\mathbb{C}}^{(1,2)} = \pi_{\mathbb{C}}^1 \circ \pi_{\mathbb{C}}^2 : (\widetilde{M}_{\mathbb{C}}^2, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^2) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0).$$

Assim, é possível definir em  $(\widetilde{M}_{\mathbb{C}}^2, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^2)$  uma única involução contínua

$$J^{(1,2)} : (\widetilde{M}_{\mathbb{C}}^2, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^2) \rightarrow (\widetilde{M}_{\mathbb{C}}^2, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^2),$$

tal que

$$\pi_{\mathbb{C}}^{(1,2)} \circ J^{(1,2)} = J \circ \pi_{\mathbb{C}}^{(1,2)}.$$

Desse modo, quando aplicamos uma sequência de blow-ups complexos, sempre consideramos que para cada singularidade fora do traço real é feita essa composição “simultânea” de dois blow-ups no respectivo espaço ambiente. Assim, após aplicar  $k$  blow-ups sucessivos,

$$\sigma_{\mathbb{C}} = \pi_{\mathbb{C}}^1 \circ \cdots \circ \pi_{\mathbb{C}}^{k-1} \circ \pi_{\mathbb{C}}^k$$

obtemos que a sequência de blow-ups

$$\sigma_{\mathbb{C}} : (\widetilde{M}_{\mathbb{C}}, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$$

determina a involução anti-holomorfa  $\widetilde{J} : \widetilde{M}_{\mathbb{C}} \rightarrow \widetilde{M}_{\mathbb{C}}$ , tal que  $\sigma_{\mathbb{C}} \circ \widetilde{J} = J \circ \sigma_{\mathbb{C}}$ . Considerando

$$\widetilde{M}_{\mathbb{R}} = \{\widetilde{p} \in \widetilde{M}_{\mathbb{C}} : \widetilde{p} = \widetilde{J}(\widetilde{p})\},$$

dizemos que  $\widetilde{M}_{\mathbb{R}}$  é o *traço real* de  $\widetilde{M}_{\mathbb{C}}$ , identificamos  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$  com  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}} \cap \widetilde{M}_{\mathbb{R}}$  e  $\sigma_{\mathbb{R}}$  com  $\sigma_{\mathbb{C}}|_{\widetilde{M}_{\mathbb{R}}}$ . Ou seja, a sequência de blow-ups reais é obtida pela restrição da sequência de blow-ups complexos ao traço real. Em  $\widetilde{M}_{\mathbb{C}}$  obtemos a folheação  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}} = \sigma_{\mathbb{C}}^*(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})$ . Considerando  $\widetilde{M}_{\mathbb{R}}$ , o traço real de  $M_{\mathbb{C}}$ , identificamos  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{R}} = \sigma_{\mathbb{R}}^*\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  com  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}} \cap \widetilde{M}_{\mathbb{R}}$ . A folheação  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}$  é simétrica com respeito a  $\widetilde{M}_{\mathbb{R}}$ .

Em [23], Seidenberg provou que qualquer germe de folheação analítica (real ou complexa) com singularidade isolada na origem de  $(\mathbb{K}^2, 0)$  admite um *processo de redução de singularidades*, ou seja, após aplicar uma sequência finita de blow-ups

$$\sigma_{\mathbb{K}} = \pi_{\mathbb{K}}^1 \circ \cdots \circ \pi_{\mathbb{K}}^{n-1} \circ \pi_{\mathbb{K}}^n : (\widetilde{M}, \mathcal{D}_{\mathbb{K}}) \rightarrow (\mathbb{K}^2, 0),$$

podemos obter uma nova folheação  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{K}}$  que tem uma quantidade finita de singularidades, todas elas simples e sobre o divisor  $\mathcal{D}_{\mathbb{K}} = \sigma_{\mathbb{K}}^{-1}(0)$ . O processo de redução de singularidades

real  $\sigma_{\mathbb{R}}$  se identifica com a restrição ao traço real do processo de redução de singularidades complexo  $\sigma_{\mathbb{C}}$ . Uma singularidade simples é dita real se, após aplicar um processo de redução de singularidades  $\sigma_{\mathbb{C}}$ , ela está sobre o traço real de  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}$ .

Em [22], Risler definiu o conceito de campo de vetores do tipo *curva generalizada real*. Um germe de campo vetorial analítico em  $(\mathbb{R}^2, 0)$  com uma singularidade algebricamente isolada está nessa categoria se, após um processo de redução de singularidades, não possui singularidades do tipo sela-nó algébrica. Isso equivale a dizer que seu complexificado, após redução de singularidades, não possui singularidades simples do tipo sela-nó sobre o traço real. Em [22, Prop.3.9], Risler demonstrou o seguinte resultado

**Teorema.** *Se um germe de campo de vetores analítico real em  $(\mathbb{R}^2, 0)$ , do tipo curva generalizada real, tem multiplicidade algébrica par ou número de Milnor par, então ele possui pelo menos uma separatriz convergente.*

Sejam  $X$  e  $X'$  dois campos de vetores analíticos reais que definem as folheações  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{F}'$  nas superfícies  $M$  e  $M'$  respectivamente. Dizemos que  $X$  e  $X'$  são campos *topologicamente equivalentes* se houver um homeomorfismo  $H : M \rightarrow M'$  que preserva a orientação, levando o conjunto singular de  $X$  no conjunto singular de  $X'$  e as folhas de  $\mathcal{F}$  nas folhas de  $\mathcal{F}'$ , respeitando as orientações. Dois germes de campos vetoriais são topologicamente equivalentes, se admitem representantes topologicamente equivalentes. Pelo [16, Teo.9,1], temos que uma singularidade sela-nó algébrica pode ser classificada, segundo equivalência topológica, como uma sela topológica ou um nó topológico ou uma sela-nó topológica. Isso permite definir uma classe maior de campos vetoriais e analisar a existência de separatrizes formais. Dizemos que um germe de campo vetorial analítico com uma única singularidade algebricamente isolada em  $(\mathbb{R}^2, 0)$  é do tipo *curva generalizada real topológica* se nenhuma singularidade sela-nó algébrica, obtida após um processo de redução de singularidades, é uma sela-nó topológica.

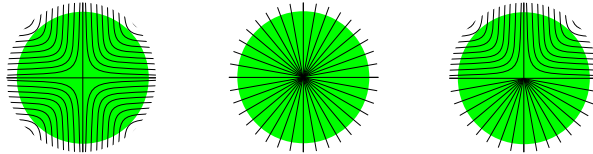


FIGURA 2. Classificação topológica de uma sela-nó algébrica: sela topológica, nó topológico, sela-nó topológica

Para obter informação sobre as separatrizes de  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ , o germe de folheação induzida pela equação (2), usamos a noção de *divisor equilibrado de separatrizes* [12]. Trata-se de uma combinação formal de separatrizes da forma

$$\mathcal{B}_{\mathbb{C}} = \sum_{B_{\mathbb{C}} \in \text{Sep}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})} a_{B_{\mathbb{C}}} \cdot B_{\mathbb{C}}$$

onde os coeficientes  $a_{B_{\mathbb{C}}} \in \{-1, 0, 1\}$  são 1 para cada separatriz isolada, são não-nulos para um número finito de  $B_{\mathbb{C}} \in \text{Dic}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})$  e, para cada componente dicrítica  $D_{\mathbb{C}}$  do divisor  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ , satisfaz

$$\sum_{B_{\mathbb{C}} \in \text{Sep}_0(D_{\mathbb{C}})} a_{B_{\mathbb{C}}} = 2 - \text{Val}(D_{\mathbb{C}}),$$



onde  $\text{Sep}_0(D_{\mathbb{C}})$  é o conjunto de separatrizes cujo transformado estrito por  $\sigma_{\mathbb{C}}$  toca a componente  $D_{\mathbb{C}}$  e  $\text{Val}(D_{\mathbb{C}})$ , denominada *valência* de  $D_{\mathbb{C}}$ , é o número de outras componentes de  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  intersectando  $D_{\mathbb{C}}$ . O *suporte do divisor*  $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$  é o conjunto formado por todas as separatrizes  $B_{\mathbb{C}} \in \mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  tal que  $a_{B_{\mathbb{C}}} \neq 0$ . Como a folheação  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  é complexificada da folheação real  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ , podemos associar um divisor equilibrado de separatrizes simétrico em relação ao traço real de  $\mathbb{C}^2$ . Portanto, para mostrar que o campo real  $X_{\mathbb{R}}$  possui separatrizes, procuraremos dar condições a  $X_{\mathbb{R}}$  para que o suporte do divisor equilibrado de separatrizes de  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  tenha um número ímpar de elementos.

De [2] e [13], uma singularidade sela-nó em  $(\mathbb{K}^2, 0)$  (sela-nó algébrica no caso real) pode ser expressa, em coordenadas formais, pela 1-forma

$$\omega_{\mathbb{K}} = y(1 + \mu x^k)dx \pm x^{k+1}dy,$$

onde  $\mu \in \mathbb{K}$  e  $k \in \mathbb{Z}_+$  são invariantes formais. A separatriz forte corresponde a  $\{x = 0\}$ , a separatriz fraca corresponde a  $\{y = 0\}$  e o inteiro  $i_0^w(\mathcal{F}_{\mathbb{K}}) = k + 1 > 1$  é chamado de *índice fraco* da sela-nó. Quando a separatriz fraca está contida em uma componente do divisor, a singularidade é chamada de *sela-nó tangente*.

O *índice de excesso de tangência* de  $\mathcal{F}$  em  $0 \in \mathbb{C}^2$  é o número inteiro não negativo

$$\tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{K}}) = \sum_{q \in \text{SN}(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{K}})} \rho(D_{\mathbb{K},q})(i_q^w(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{K}}) - 1),$$

onde  $\text{SN}(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{K}})$  é o conjunto de singularidades do tipo sela-nó tangente contidas no divisor excepcional  $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}$ ,  $D_{\mathbb{K},q}$  é a componente que contém a separatriz fraca e  $\rho(D_{\mathbb{K},q})$  é o peso da componente  $D_{\mathbb{K},q}$ . Este último invariante é a multiplicidade algébrica de uma curva  $\gamma_{\mathbb{K}}$  cuja transformada estrita  $\sigma_{\mathbb{K}}^* \gamma_{\mathbb{K}}$  é transversal a  $D_{\mathbb{K},q}$ , fora das esquinas. Sempre  $\tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{K}}) \geq 0$ , e  $\tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{K}}) = 0$  se e somente se  $\text{SN}(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{K}}) = \emptyset$  (não há selas-nós tangentes na redução de singularidades de  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$ ).

Para entender como a multiplicidade de um germe de folheação analítica real com singularidade algebricamente isolada está relacionada com a existência de separatrizes formais, de [13, Prop.3.3], temos a seguinte relação:

$$\nu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}) = \nu_0(\mathcal{B}_{\mathbb{C}}) - 1 + \tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}),$$

onde  $\nu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})$  é a multiplicidade algébrica da folheação  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ ,  $\nu_0(\mathcal{B}_{\mathbb{C}})$  é a multiplicidade algébrica do divisor equilibrado e  $\tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})$  é o *índice de excesso de tangência* de  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  em  $0 \in \mathbb{C}^2$ . De [16, Teo.9.1], temos que uma sela-nó algébrica de um campo de vetores real é uma sela topológica ou nó topológico se, e somente se o índice fraco dela  $i_0^w(\mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  é ímpar. Logo, se  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  é uma folheação curva generalizada topológica real então  $\tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  é par. Com isso, obtemos o seguinte resultado:

**Teorema A.** *Seja  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  um germe de folheação do tipo curva generalizada real topológica. Se  $\nu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  é par, então existe uma separatriz formal real em  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ .*

Seja  $\mathcal{F}$  um germe de folheação holomorfa definida, segundo (4), pela equação  $\omega = 0$ , onde  $\omega = P(x, y)dy - Q(x, y)dx$ . De [8], uma *parametrização de Puiseux* de um germe de curva irreduzível com equação reduzida  $f = 0$ , multiplicidade  $\nu_0(f) = m$  e que satisfaz  $f(0, 0) = 0$  pode ser obtida no formato  $x = t^m$ ,  $y = \phi(t) = \sum_{i \geq n} a_i t^i$ , com  $\text{ord}_t(\phi(t)) \geq m$ ,  $a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . A *curva polar* de  $\mathcal{F}$  com respeito a  $(a : b) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  é a curva dos pontos onde a reta tangente à folheação tem inclinação  $\frac{a}{b}$ , com  $b \neq 0$ . Ela é denotada  $\mathcal{P}_{(a:b)}^{\mathcal{F}}$  e é definida

pela equação  $aP - bQ = 0$ . Dada uma separatriz  $B$  de  $\mathcal{F}$ , o *número de interseção polar de  $\mathcal{F}$  com respeito a  $B$* , denotado por  $p_0(\mathcal{F}, B)$ , é o número inteiro:

$$p_0(\mathcal{F}, B) = (\mathcal{P}_{(a:b)}^{\mathcal{F}}, B)_0 = \text{ord}_{t=0}((aP - bQ) \circ \gamma_B(t)),$$

onde  $(\cdot, \cdot)$  representa o número de interseção de germes de curvas formais complexas em  $(\mathbb{C}^2, 0)$ ,  $\mathcal{P}_{(a:b)}^{\mathcal{F}}$  é uma curva polar genérica e  $\gamma_B(t)$  é uma parametrização de Puiseux de  $B$ .

No Capítulo 3, buscamos entender como o número de Milnor de uma folheação holomorfa está relacionado com os invariantes polares definidos no parágrafo anterior. Baseados em [8] e [13], para um germe de folheação holomorfa  $\mathcal{F}$ , estudamos a relação que existe entre  $p_0(\mathcal{F}, \mathcal{B})$ , o número de interseção polar de uma folheação holomorfa com respeito a um divisor equilibrado de separatrizes, a multiplicidade  $\nu_0(\mathcal{F})$ , o número de Milnor de uma folheação holomorfa  $\mu_0(\mathcal{F})$ , e o processo de redução de singularidades. Seja  $\zeta$  um ramo formal não invariante por  $\mathcal{F}$  que passa pela origem  $q_0 = 0$ . Após um blow-up puntual na origem obtemos o ponto  $q_1 \in \tilde{\zeta} \cap D$ , onde  $D$  é o divisor excepcional do blow-up e  $\tilde{\zeta}$  é a transformada estrita de  $\zeta$ . Aplicando sucessivos blow-ups nos pontos  $q_j$  que estão na interseção dos transformados estritos dos ramos não invariantes com os respectivos divisores que aparecem após cada blow-up, é gerada uma sequência infinita de pontos  $q_0 = 0, q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, \dots$ . Esses pontos formam o conjunto de pontos infinitamente próximos da curva  $\zeta$ , denotado por  $\mathcal{I}(\zeta)$ . Como  $\zeta$  não é invariante por  $\mathcal{F}$ , existe  $n$  tal que em  $q_n$ , as transformadas estritas  $\tilde{\zeta}_{q_n}$  e  $\tilde{\mathcal{F}}_{q_n}$  são regulares e transversais. Denotando por  $\zeta_i$  os ramos formais da curva polar genérica  $\Gamma$ , definimos o *índice do excesso de tangência de  $\mathcal{F}$  ao longo da  $\Gamma$*  como o invariante

$$\tau_0(\mathcal{F}, \Gamma) = \sum_{\zeta_i} \sum_{q \in \mathcal{I}(\zeta_i)} \tau_q(\tilde{\mathcal{F}}) \nu_q(\tilde{\zeta}_i),$$

onde  $\tilde{\mathcal{F}}$  e  $\tilde{\zeta}_i$  são as transformadas estritas de  $\mathcal{F}$  e  $\zeta_i$ . Os pontos para os quais  $q$  é singular para  $\tilde{\mathcal{F}}$ , e portanto,  $\tau_q$  é possivelmente não nula, são finitos. Obtemos, portanto, o seguinte resultado:

**Teorema.** *Sejam  $\mathcal{F}$  um germe de uma folheação holomorfa em  $(\mathbb{C}^2, 0)$  e  $\mathcal{B}$  um divisor equilibrado de separatrizes para  $\mathcal{F}$ . Então, para uma curva polar genérica  $\Gamma$ , o número de interseção polar satisfaz*

$$(5) \quad p_0(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = \mu_0(\mathcal{F}) + \nu_0(\mathcal{F}) - \tau_0(\mathcal{F}, \Gamma),$$

onde  $\tau_0(\mathcal{F}, \Gamma)$  é o índice do excesso de tangência de  $\mathcal{F}$  ao longo de  $\Gamma$ .

Esse resultado generaliza uma conhecida fórmula de Teissier [25] para curvas. Pois, se  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$  é uma equação reduzida de um germe de uma curva analítica complexa  $C$  em  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , então a equação  $\omega = 0$ , onde  $\omega$  é a 1-forma definida por  $\omega = df$ , define uma folheação  $\mathcal{F}$  do tipo curva generalizada. A equação (5) torna-se, para  $(a : b) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  genérico,

$$(af_x + bf_y, C)_0 = \mu_0(f) + \nu_0(f) - 1.$$

No Capítulo 4, definindo o *número de interseção polar de  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$*  e o *excesso de tangência real ao longo da curva  $\Gamma_{\mathbb{R}}$*  do mesmo modo que na versão complexa, porém considerando variáveis reais, obtemos a versão real do teorema anterior. Observe que se  $p_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$  for ímpar, então  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  terá separatriz real, pois isso implica automaticamente que o suporte de  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  possui um número ímpar de elementos. Então, pelo teorema acima, o seguinte resultado segue do fato que a relação nele contida implica que  $p_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$  é ímpar.

**Proposição.** *Sejam  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  uma folheação analítica real com singularidade algebricamente isolada na origem de  $(\mathbb{R}^2, 0)$ ,  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  um divisor equilibrado de separatrizes real e  $\tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}, \Gamma_{\mathbb{R}})$  o excesso de tangência de  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  ao longo de  $\Gamma_{\mathbb{R}}$ , onde  $\Gamma_{\mathbb{R}}$  é uma curva polar real genérica. Se*

$$\mu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}) + \nu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}) \equiv \tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}, \Gamma_{\mathbb{R}}) + 1 \pmod{2},$$

*então  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  tem pelo menos uma separatriz formal.*

Admitindo que a folheação  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  seja do tipo curva generalizada real topológica, em seu processo de redução de singularidades ela não admite pontos singulares do tipo sela-nó topológico. Assim, em cada ponto infinitamente próximo de cada ramo  $\zeta_{\mathbb{R},i}$  o índice de excesso de tangência  $\tau_0$  é par. Então,  $\tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}, \Gamma_{\mathbb{R}})$  é também par. Podemos supor  $\nu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  ímpar, pois, caso seja par, pelo Teorema A,  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  possui separatriz. Assim, usando a proposição anterior, conseguimos o seguinte resultado:

**Teorema B.** *Suponhamos que  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  seja uma folheação do tipo curva generalizada real topológica. Se  $\mu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  é par, então  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  tem pelo menos uma separatriz formal.*

Finalmente, no Capítulo 5, estendemos nossos resultados para germes de folhações analíticas reais de codimensão um em  $(\mathbb{R}^3, 0)$ , onde as folhas são germes de superfícies formais reais. Denotamos por  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  a folheação definida pela 1-forma real integrável

$$\omega_{\mathbb{R}} = P_{\mathbb{R}}(x, y, z)dx + Q_{\mathbb{R}}(x, y, z)dy + R_{\mathbb{R}}(x, y, z)dz,$$

onde  $P_{\mathbb{R}}, Q_{\mathbb{R}}, R_{\mathbb{R}}$  são germes de funções analíticas reais sem fatores comuns. O conjunto singular de  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ , definido por  $\text{Sing}(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}) = \{(x, y, z) : P_{\mathbb{R}} = Q_{\mathbb{R}} = R_{\mathbb{R}} = 0\}$ , é um subconjunto analítico de codimensão  $\geq 2$  formado por  $0 \in \mathbb{R}^3$  e, possivelmente, pela união de curvas analíticas. Em dimensão três, de forma análoga ao caso bidimensional, diremos que uma *superfície formal* (respectivamente *convergente*) definida pela equação  $f(x, y, z) = 0$ , onde  $f$  é uma série de potências formal (respectivamente convergente), é *invariante* por  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  se ela é uma união de superfícies irredutíveis tangentes à folheação. Uma *separatriz formal* ou simplesmente *separatriz* de  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  é um germe de superfície formal, irredutível e invariante que contém a origem de  $\mathbb{R}^3$ . A existência de separatrizes reais não está garantida. Por exemplo, a equação  $x dx + y dy + z dz = 0$  define uma folheação que não tem separatriz, pois suas soluções são superfícies  $x^2 + y^2 + z^2 = c$ , onde  $c \in \mathbb{R}^+$ .

Um blow-up puntual em  $0 \in \mathbb{K}^3$  é o mapa analítico (real ou complexo)

$$\pi_{\mathbb{K}} : (\tilde{\mathbb{K}}^3, D_{\mathbb{K}}) \rightarrow (\mathbb{K}^3, 0),$$

onde  $D_{\mathbb{K}} = \pi^{-1}(0)$ , e

$$\tilde{\mathbb{K}}^3 = D_{\mathbb{K}} \cup \{(x, y, z), [x : y : z] : (x, y, z) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{0\}\},$$

o conjunto  $D_{\mathbb{K}} = \pi^{-1}(0) = \{0\} \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2 \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$  é o *divisor excepcional* do blow-up puntual. Três cartas com coordenadas  $(u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2), (u_3, v_3, w_3) \in \mathbb{K}^3$  da variedade analítica  $\tilde{\mathbb{K}}^3$  são definidas pelas relações  $x = u_1, y = u_1 v_1, z = u_1 w_1$  com  $x \neq 0$ ;  $x = u_2 v_2, y = v_2, z = v_2 w_2$  com  $y \neq 0$ ; e  $x = u_3 w_3, y = v_3 w_3, z = w_3$  com  $z \neq 0$ ; de forma tal que o mapa do blow-up se expressa como  $(u_1, v_1, w_1) \mapsto (u_1, u_1 v_1, u_1 w_1)$ ,  $(u_2, v_2, w_2) \mapsto (u_2 v_2, v_2, v_2 w_2)$ ,  $(u_3, v_3, w_3) \mapsto (u_3 w_3, v_3 w_3, w_3)$ .

Um blow-up *monoidal* é aquele cujo centro é um germe de curva lisa. Escolhendo coordenadas de modo que o eixo  $z$ , definido por  $O_z = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 : x = y = 0\}$ , seja

o centro do blow-up monoidal

$$\pi^{O_z} : (\tilde{\mathbb{K}}^3, D_{\mathbb{K}}) \rightarrow (\mathbb{K}^3, O_z),$$

onde  $D_{\mathbb{K}} = O_z \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ , e

$$\tilde{\mathbb{K}}^3 = D_{\mathbb{K}} \cup \{((x, y, z), [x : y]) : (x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \setminus O_z\}.$$

O *divisor excepcional* do blow-up monoidal é  $D_{\mathbb{K}} = (\pi^{O_z})^{-1}(O_z) = O_z \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ . Cada ponto  $q \in O_z$ , satisfaz  $(\pi^{O_z})^{-1}(q) = \{q\} \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1 \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ . Duas cartas com coordenadas  $(u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2) \in \mathbb{K}^3 \setminus \{O_z\}$  da variedade analítica  $\tilde{\mathbb{K}}^3 \setminus D_{\mathbb{K}}$  são definidas pelas relações  $x = u_1, y = u_1 v_1, z = w_1$  com  $x \neq 0$ ; e  $x = u_2 v_2, y = v_2, z = w_2$  com  $y \neq 0$ ; de forma tal que o mapa do blow-up se expressa como  $(u_1, v_1, w_1) \mapsto (u_1, u_1 v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2) \mapsto (u_2 v_2, v_2, w_2)$ .

Tanto para o blow-up puntual como para o monoidal, a restrição do blow-up ao respectivo  $\tilde{\mathbb{K}}^3 \setminus D_{\mathbb{K}}$  é um difeomorfismo analítico sobre sua imagem. Além disso, a folheação analítica singular  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$  é transformada em uma outra folheação  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}^1$  em  $(\tilde{\mathbb{K}}^3, D_{\mathbb{K}})$ , denominada a *transformada estrita* de  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$ , que corresponde difeomorficamente a  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$  sobre os pontos onde o blow-up é um difeomorfismo. Se  $D_{\mathbb{K}}$  é uma superfície invariante por  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}^1$ , dizemos que tanto o blow-up como  $D_{\mathbb{K}}$  são não-dicríticos, caso contrário, são dicríticos.

Em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  toda folheação holomorfa de codimensão um admite um processo de redução de singularidades, ou seja, após uma sequência finita de blow-ups em centros permissíveis (pontos ou curvas lisas, invariantes pela folheação e em posição geral em relação ao divisor excepcional), toda folheação é transformada em outra cujas singularidades são todas simples ou reduzidas. Em analogia ao caso bidimensional, essas singularidades são de dois tipos: singularidades não-degeneradas ou singularidades do tipo sela-nó. O caso não-dicrítico foi estudado por Cano e Cerveau em [7], e o caso dicrítico por Cano em [6]. Consideramos o caso não-dicrítico real em que sua complexificação também é não-dicrítica. Denominamos esse caso  $\mathbb{C}$ -não-dicrítico. Essa escolha se deve ao fato que a existência de separatrizes para o caso dicrítico não está garantida. Por exemplo, a folheação de Jouanolou [17] não tem separatrizes. No entanto, Cano e Cerveau em [7] provaram que toda folheação não-dicrítica em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  tem separatrizes convergentes. Usamos o conceito de imersões transversais reais: seja  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  um germe de uma folheação analítica real singular de codimensão um em  $(\mathbb{R}^3, 0)$  definida pelo germe de 1-forma integrável analítica real  $\omega_{\mathbb{R}}$ . Uma *imersão real*  $i_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}^2, 0) \hookrightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  é *transversal* a  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  se o conjunto singular  $\text{Sing}(i_{\mathbb{R}}^* \mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  é algebricamente isolado na origem e as multiplicidades algébricas são tais que  $\nu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}) = \nu_0(i_{\mathbb{R}}^* \mathcal{F}_{\mathbb{R}})$ . Obtemos o seguinte resultado:

**Proposição.** *Seja  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  um germe de folheação analítica real singular de codimensão um em  $(\mathbb{R}^3, 0)$  tal que  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  é  $\mathbb{C}$ -não-dicrítica. Se, para alguma imersão transversal real  $i_{\mathbb{R}}$ , a folheação  $i_{\mathbb{R}}^* \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  tiver separatriz, então  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  tem separatriz.*

Em [10], Fernandez e Mozo denominaram folheação do tipo *superfície generalizada* à folheação holomorfa não-dicrítica de codimensão um, definida por um germe de 1-forma holomorfa integrável em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ , em cuja redução de singularidades nenhuma sela-nó aparece. Se  $\mathcal{F}$ , um germe de folheação holomorfa singular de codimensão um em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  definida pela 1-forma holomorfa  $\omega$ , é uma superfície generalizada e  $i_{\mathbb{C}} : (\mathbb{C}^2, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  é uma imersão transversal, então a folheação  $i_{\mathbb{C}}^* \mathcal{F}$  é uma folheação do tipo curva generalizada. Dizemos que uma imersão complexa  $i_{\mathbb{C}} : (\mathbb{C}^2, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  é *transversal* a

$\mathcal{F}$ , se  $\text{Sing}(i_{\mathbb{C}}^*\omega) = i_{\mathbb{C}}^{-1}(\text{Sing}(\omega)) = 0$  e  $\nu_0(\mathcal{F}) = \nu_0(i_{\mathbb{C}}^*\mathcal{F})$ . Em nosso trabalho, definimos germe de folheação do tipo *superfície generalizada real* como um germe de folheação analítica real de codimensão um em cuja redução de singularidades nenhuma sela-nó real aparece e que é  $\mathbb{C}$ -não-dicrítica, ou seja, tanto a folheação real como a sua complexificada são não-dicríticas. Obtemos a seguinte extensão do resultado de Risler para folheações analíticas reais de codimensão um em um espaço de dimensão três:

**Teorema C.** *Seja  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  um germe de folheação do tipo superfície generalizada real em  $(\mathbb{R}^3, 0)$ . Se  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  tem multiplicidade algébrica par ou se existe uma imersão transversal  $i_{\mathbb{R}}$  tal que o número de Milnor  $\mu_0(i_{\mathbb{R}}^*\mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  é par, então  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  tem pelo menos uma separatriz formal.*

Dizemos que  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ , um germe de folheação do tipo superfície generalizada real em  $(\mathbb{R}^3, 0)$ , é do tipo *superfície generalizada real topológica* se para todo germe de imersão  $i_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}^2, 0) \hookrightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  transversal a  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ , a folheação  $i_{\mathbb{R}}^*\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  não possui selas-nós topológicas reais na redução de singularidades. Obtemos, por fim, a seguinte extensão dos Teoremas A e B para dimensão três:

**Teorema D.** *Seja  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  um germe de folheação do tipo superfície generalizada real topológica em  $(\mathbb{R}^3, 0)$ . Se  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  tem multiplicidade algébrica par ou se existe uma imersão transversal  $i_{\mathbb{R}}$  tal que o número de Milnor  $\mu_0(i_{\mathbb{R}}^*\mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  é par, então  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  tem pelo menos uma separatriz formal.*

## CAPÍTULO 1

## Preliminares

## 1.1. Teoria básica

Nessa seção usamos como prefixos os símbolos  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}$ , para substituir o adjetivo *real* ou *complexo*. Por exemplo, uma aplicação  $\mathbb{R}$ -analítica faz referência a uma aplicação analítica real, uma aplicação  $\mathbb{C}$ -analítica faz referência a uma aplicação analítica complexa (holomorfa). Usamos também o prefixo  $\mathbb{K}$  para realizar definições e afirmações válidas tanto no contexto real como no complexo, por exemplo ao apresentar a definição de uma aplicação  $\mathbb{K}$ -analítica estamos apresentando a definição de uma aplicação  $\mathbb{R}$ -analítica (analítica real) e a definição de uma aplicação  $\mathbb{C}$ -analítica (analítica complexa) em um único texto. Denotamos por  $\mathbb{K}\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  o anel de séries de potências nas variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_m$  com coeficientes em  $\mathbb{K}$  que são convergentes. Denotamos também por  $\mathbb{K}[[x_1, x_2, \dots, x_m]]$  o anel de séries de potências nas variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_m$  com coeficientes em  $\mathbb{K}$  que não necessariamente são convergentes. Uma série de potências que pertence a  $\mathbb{K}[[x_1, x_2, \dots, x_m]]$  recebe o nome de *série de potências  $\mathbb{K}$ -formal*.

1.1.1. Função  $\mathbb{K}$ -analítica.

**Definição 1.1.1.** Seja  $U_{\mathbb{K}}$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{K}^m$ . Uma função

$$\begin{aligned} f : U_{\mathbb{K}} \subset \mathbb{K}^m &\rightarrow \mathbb{K} \\ (x_1, x_2, \dots, x_m) &\mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{aligned}$$

é  $\mathbb{K}$ -analítica se, para cada ponto  $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in U_{\mathbb{K}}$  existe uma vizinhança aberta  $V_{\mathbb{K}} \subset U_{\mathbb{K}}$  do ponto  $a$  tal que a função  $f$  tem uma expansão em série de potências:

$$(6) \quad f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{i_1, \dots, i_m=0}^{\infty} c_{i_1, \dots, i_m} (x_1 - a_1)^{i_1} \cdots (x_m - a_m)^{i_m}$$

que converge para todo  $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in V_{\mathbb{K}}$ . Para abreviar, apenas nessa e na próxima seção, em certos momentos usamos as notações  $I = (i_1, \dots, i_m)$ ,  $X = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m$ ,  $X^I = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_m^{i_m}$ ,  $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ . Por exemplo, expressamos (6) como

$$(7) \quad f(X) = \sum_{I=0}^{\infty} c_I (X - A)^I.$$

**Teorema 1.1.2.** *A série de potências de uma função  $\mathbb{K}$ -analítica converge absolutamente e uniformemente em uma vizinhança de cada ponto de seu domínio  $U_{\mathbb{K}}$ .*

**DEMONSTRAÇÃO.** Fixemos um ponto  $A = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in U_{\mathbb{K}}$  qualquer e seja  $f$  uma função  $\mathbb{K}$ -analítica, então existe  $V_{\mathbb{K}}$ , uma vizinhança aberta de  $A$ , tal que  $f$  tem uma expansão em série de potências que converge para todo  $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in V_{\mathbb{K}}$ , segundo a equação (6). Por este motivo,

$$\lim_{i_1, \dots, i_m \rightarrow \infty} c_{i_1, \dots, i_m} (x_1 - a_1)^{i_1} \cdots (x_m - a_m)^{i_m} \rightarrow 0.$$

Em particular, seja  $(b_1, \dots, b_m) \in V_{\mathbb{K}}$ , com  $b_j \neq a_j$  para  $j = 1, \dots, m$ , então para quaisquer  $i_1, \dots, i_m$  existe  $M > 0$  tal que

$$|c_{i_1, \dots, i_m} (b_1 - a_1)^{i_1} \cdots (b_m - a_m)^{i_m}| < M.$$

Seja  $r_j$  tal que  $0 < r_j < |b_j - a_j|$  e, denotando momentaneamente  $c_{i_1, \dots, i_m}$  como  $c_1$ , temos que para qualquer  $x_j \in ]a_j - r_j, a_j + r_j[$  se cumpre  $|x_j - a_j| < r_j$  e, além disso,

$$\begin{aligned} |c_1(x_1 - a_1)^{i_1} \cdots (x_m - a_m)^{i_m}| &= \left| c_1 \left( (b_1 - a_1) \frac{(x_1 - a_1)}{(b_1 - a_1)} \right)^{i_1} \cdots \left( (b_m - a_m) \frac{(x_m - a_m)}{(b_m - a_m)} \right)^{i_m} \right| \\ &< M \left| \left( \frac{r_1}{b_1 - a_1} \right)^{i_1} \cdots \left( \frac{r_m}{b_m - a_m} \right)^{i_m} \right|. \end{aligned}$$

Denotando  $\lambda_j = \left| \frac{r_j}{b_j - a_j} \right|$ , como para cada  $j = 1, \dots, m$ , temos que  $0 < \lambda_j < 1$ , então a série geométrica  $\sum_{i_1, \dots, i_m=0}^{\infty} M |\lambda_1^{i_1} \cdots \lambda_m^{i_m}|$  é convergente. Como

$$\sum_{i_1, \dots, i_m=0}^{\infty} |c_{i_1, \dots, i_m} (x_1 - a_1)^{i_1} \cdots (x_m - a_m)^{i_m}| < \sum_{i_1, \dots, i_m=0}^{\infty} M |\lambda_1^{i_1} \cdots \lambda_m^{i_m}|,$$

então  $\sum_{i_1, \dots, i_m=0}^{\infty} |c_{i_1, \dots, i_m} (x_1 - a_1)^{i_1} \cdots (x_m - a_m)^{i_m}|$  é uniformemente convergente numa vizinhança de  $A = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in U_{\mathbb{K}}$ . Assim, a série

$$\sum_{i_1, \dots, i_m=0}^{\infty} c_{i_1, \dots, i_m} (x_1 - a_1)^{i_1} \cdots (x_m - a_m)^{i_m}$$

converge absolutamente e uniformemente em uma vizinhança de  $A = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in U_{\mathbb{K}}$ . O teorema segue, pois o ponto  $(a_1, a_2, \dots, a_m) \in U_{\mathbb{K}}$  é arbitrário pois a função  $f$  é  $\mathbb{K}$ -analítica.  $\square$

Um  $\mathbb{K}$ -polidisco aberto de  $\mathbb{K}^m$  é o subconjunto

$$\Delta_{\mathbb{K}}(A, R) = \Delta_{\mathbb{K}}(a_1, \dots, a_m, r_1, \dots, r_m) = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m / |x_j - a_j| < r_j; 1 \leq j \leq m\}$$

onde  $A$  é o centro do  $\mathbb{K}$ -polidisco com polirraio  $R = (r_1, r_2, \dots, r_m) \in \mathbb{R}^m, r_j > 0$ .

**Corolário 1.1.3.** *Sejam  $(a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$  e a série de potências real*

$$S_{\mathbb{R}} = \sum_{i_1, \dots, i_m=0}^{\infty} c_{i_1, \dots, i_m} (x_1 - a_1)^{i_1} \cdots (x_m - a_m)^{i_m},$$

onde cada  $c_{i_1, \dots, i_m} \in \mathbb{R}$ . Se  $S_{\mathbb{R}}$  é convergente no  $\mathbb{R}$ -polidisco  $\Delta_{\mathbb{R}}(0, R)$ , então a série de potências complexa

$$S_{\mathbb{C}} = \sum_{i_1, \dots, i_m=0}^{\infty} c_{i_1, \dots, i_m} (x_1 - a_1)^{i_1} \cdots (x_m - a_m)^{i_m}$$

é convergente no  $\mathbb{C}$ -polidisco  $\Delta_{\mathbb{C}}(0, R)$ .

**DEMONSTRAÇÃO.** Por absurdo, suponhamos que existe um ponto  $Q \in \mathbb{C}^m \setminus \mathbb{R}^m$  dentro do  $\mathbb{C}$ -polidisco  $\Delta_{\mathbb{C}}(0, R)$  onde a série

$$\sum_{i_1, \dots, i_m=0}^{\infty} c_{i_1, \dots, i_m} (q_1 - a_1)^{i_1} \cdots (q_m - a_m)^{i_m}$$

não é convergente e tampouco, é absolutamente convergente. Escrevemos  $q_j - a_j = p_j e^{i\theta_j}$ , com  $p_j \in \mathbb{R}$  e  $1 \leq j \leq m$ . Como  $A = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ , então existe um ponto  $P = (p_1, \dots, p_m) \in \mathbb{R}^m$  dentro do  $\mathbb{R}$ -polidisco  $\Delta_{\mathbb{R}}(0, R)$  tal que  $\|q_j - a_j\| = \|p_j - a_j\|$ . Pelo Teorema 1.1.2, a série

$$\sum_{i_1, \dots, i_m=0}^{\infty} c_{i_1, \dots, i_m} (p_1 - a_1)^{i_1} \cdots (p_m - a_m)^{i_m}$$

é absolutamente convergente. Aqui chegamos a uma contradição, pois as séries

$$\sum_{i_1, \dots, i_m=0}^{\infty} c_{i_1, \dots, i_m} \|q_1 - a_1\|^{i_1} \cdots \|q_m - a_m\|^{i_m} \text{ e } \sum_{i_1, \dots, i_m=0}^{\infty} c_{i_1, \dots, i_m} \|p_1 - a_1\|^{i_1} \cdots \|p_m - a_m\|^{i_m}$$

são as mesmas.  $\square$

Se o desenvolvimento de Taylor de uma função  $\mathbb{K}$ -analítica é

$$f = \sum_{k=m}^{\infty} f_k = f_m + f_{m+1} + \dots,$$

onde  $f_m$  é o primeiro jato não identicamente nulo ( $f_m \neq 0$ ), o número  $m$  é chamado de *multiplicidade algébrica ou ordem* da função  $f$  e denotado por  $\nu_0(f)$ . No caso em que  $f(0) = 0$ , é também chamado de multiplicidade algébrica da curva definida por  $f = 0$ .

**1.1.2. Germes de funções  $\mathbb{K}$ -analíticas e  $\mathbb{K}$ -formais.** Para  $A \in \mathbb{K}^m$ , consideramos o conjunto:

$$\{(f, U)_A : U \subset \mathbb{K}^m, \text{ é aberto e conexo, } A \in U, f \text{ é uma função } \mathbb{K}\text{-analítica em } U\}$$

onde definimos a seguinte relação de equivalência:

$$(f, U)_A \sim (g, V)_A \Leftrightarrow \exists \text{ aberto } W \subset U \cap V, \text{ com } A \in W, \text{ tal que } f|_W \equiv g|_W.$$

Os elementos do espaço quociente definido por essa relação de equivalência, são denominados *germes de funções  $\mathbb{K}$ -analíticas* em  $A$ . A classe de equivalência associada ao par  $(f, U)$  é denotada  $f_A$ . Em geral, o ponto  $A$  é a origem  $0 \in \mathbb{K}^m$ . Em nosso caso, denotamos o germe de  $f$  simplesmente por  $f$ . O anel de germes de funções  $\mathbb{K}$ -analíticas em  $(\mathbb{K}^m, 0)$  se identifica com  $\mathbb{K}\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  pois são isomorfos [14]. A apresentação de *germes de funções  $\mathbb{K}$ -formais* é exatamente a mesma, basta trocar as palavras analítica e analíticas por formal e formais respectivamente. O anel de germes de funções  $\mathbb{K}$ -formais em  $(\mathbb{K}^m, 0)$  se identifica com  $\mathbb{K}[[x_1, x_2, \dots, x_m]]$  pois são isomorfos [15]. Por essas identificações, nos referimos também a  $\mathbb{K}\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  como anel de germes de funções  $\mathbb{K}$ -analíticas em  $(\mathbb{K}^m, 0)$ , e a  $\mathbb{K}[[x_1, x_2, \dots, x_m]]$  como anel de germes de funções  $\mathbb{K}$ -formais em  $(\mathbb{K}^m, 0)$ . De [14] e [15], tanto  $\mathbb{K}\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  como  $\mathbb{K}[[x_1, x_2, \dots, x_m]]$  são domínios de fatoração única, isto é, a fatoração de  $f$  como produto de elementos irredutíveis é única salvo ordem dos fatores e salvo multiplicação por alguma unidade. O germe  $f \in \mathbb{K}\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  (respectivamente  $\mathbb{K}[[x_1, x_2, \dots, x_m]]$ ) é reduzido em  $\mathbb{K}\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  (respectivamente  $\mathbb{K}[[x_1, x_2, \dots, x_m]]$ ) se não tem fatores irredutíveis em  $\mathbb{K}\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  (respectivamente  $\mathbb{K}[[x_1, x_2, \dots, x_m]]$ ) com multiplicidade algébrica  $> 1$ . Ou seja,  $f = f_1^{i_1} \cdots f_k^{i_k}$ , onde  $f_1, \dots, f_k$  são elementos irredutíveis, é reduzido se e somente se  $i_1 = \dots = i_k = 1$ .



A complexificação canônica dada por

$$f_{\mathbb{R}}(X) = \sum_{I=0}^{\infty} c_I(X - A)^I \in \mathbb{R}[[X]] \mapsto f_{\mathbb{C}}(X) = \sum_{I=0}^{\infty} c_I(X - A)^I \in \mathbb{C}[[X]],$$

onde  $X$  é vista como uma variável real, à esquerda, e complexa, à direita, define a inclusão  $\mathbb{R}[[X]] \hookrightarrow \mathbb{C}[[X]]$ . Essa complexificação canônica junto com o Corolário 1.1.3 definem a inclusão  $\mathbb{R}\{X\} \hookrightarrow \mathbb{C}\{X\}$ .

**1.1.3. Germe de curvas formais e convergentes.** Um germe de *curva formal* (respectivamente *convergente*) é o conjunto  $C = \{(x, y) \in (\mathbb{K}^2, 0) : f(x, y) = 0\}$ , onde  $f$  é uma série de potências formal (respectivamente convergente), não identicamente nula, que é nula na origem. Um germe de curva formal ou convergente  $C$  é *irredutível* se  $C = C_1 \cup C_2$ , com  $C_1$  e  $C_2$  germes de curvas formais (respectivamente *convergentes*), implica  $C_1 = C$  e  $C_2 = \emptyset$ , ou  $C_1 = \emptyset$  e  $C_2 = C$ . Todo germe de curva formal ou convergente pode ser escrito, de maneira única, como união finita de germes de curvas irredutíveis. De fato, sejam  $f = f_1^{i_1} \cdots f_e^{i_e}$  uma decomposição de  $f$  em fatores irredutíveis,  $C_j$  o germe de curva irredutível associado a  $f_j = 0$ , para  $j = 1, \dots, e$ . Então,  $C = C_1 \cup \cdots \cup C_e$ , cada  $C_j$  é chamada de componente irredutível de  $C$ . Note que isso é verdade porque  $\mathbb{K}[[x, y]]$  e  $\mathbb{K}\{x, y\}$  são domínios de fatoração única, o que assegura que a decomposição de  $C$  em suas componentes é única. O germe de curva  $C$  é reduzido se e somente se cada  $i_j = 1$ .

**1.1.4. Germe de superfícies formais e convergentes.** Um germe *superfície formal* (respectivamente *convergente*) é o conjunto  $S = \{(x, y, z) \in (\mathbb{K}^3, 0) : f(x, y, z) = 0\}$ , onde  $f$  é uma série de potências formal (respectivamente convergente), não identicamente nula, que se anula na origem. Se na seção anterior trocamos  $\mathbb{K}[[x, y]]$  por  $\mathbb{K}[[x, y, z]]$ ,  $\mathbb{K}\{x, y\}$  por  $\mathbb{K}\{x, y, z\}$ , a letra  $C$  por  $S$ , a palavra curva por superfície, teremos afirmações válidas para o contexto de germes de superfícies.

### 1.1.5. Variedade $\mathbb{K}$ -analítica.

**Definição 1.1.4.** Uma variedade  $\mathbb{K}$ -analítica (lisa) de dimensão  $m$  é um espaço topológico  $M_{\mathbb{K}}$ , de Hausdorff, conexo, com base enumerável, munido de uma estrutura  $\mathbb{K}$ -analítica definida da seguinte maneira: existe uma cobertura de  $M_{\mathbb{K}}$  por abertos,  $\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in A_{\mathbb{K}}}$ , e homeomorfismos  $\varphi_{\alpha} : U_{\alpha} \rightarrow V_{\alpha}$ , onde  $V_{\alpha} \subset \mathbb{K}^m$  é aberto, tais que as funções de transição  $\varphi_{\beta} \circ \varphi_{\alpha}^{-1}$  são  $\mathbb{K}$ -analíticas onde definidas. As cartas locais  $\{U_{\alpha}, \varphi_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$  constituem um *atlas* de  $M_{\mathbb{K}}$  e dois atlas,  $\{U_{\alpha}, \varphi_{\alpha}\}_{\alpha \in A_{\mathbb{K}}}$  e  $\{W_{\beta}, \psi_{\beta}\}_{\beta \in B_{\mathbb{K}}}$ , são ditos equivalentes se sua união forma um atlas (isto é, as  $\varphi_{\beta} \circ \psi_{\alpha}^{-1}$  são  $\mathbb{K}$ -analíticas).

**Definição 1.1.5.** Se  $M_{\mathbb{K}}$  é uma variedade  $\mathbb{K}$ -analítica de dimensão  $m$ , um subconjunto conexo  $N_{\mathbb{K}} \subset M_{\mathbb{K}}$  é uma *subvariedade* (lisa) de dimensão  $n$ , onde  $0 \leq n \leq m - 1$  de  $M_{\mathbb{K}}$  se, para cada  $x \in N_{\mathbb{K}}$ , existe uma carta  $\{U_{\alpha}, \varphi_{\alpha}\}$  do atlas de  $M_{\mathbb{K}}$ , com  $x \in U_{\alpha}$ , tal que  $\varphi_{\alpha}$  é um homeomorfismo entre  $U_{\alpha} \cap N_{\mathbb{K}}$  e um aberto de  $\mathbb{K}^n \times \{0\} \subset \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^{m-n} \cong \mathbb{K}^m$ .

**Definição 1.1.6.** Dadas duas variedades  $\mathbb{K}$ -analíticas  $M_{\mathbb{K}}$  e  $N_{\mathbb{K}}$ , uma aplicação  $F : M_{\mathbb{K}} \rightarrow N_{\mathbb{K}}$  é  $\mathbb{K}$ -analítica, se as compostas  $\psi_{\beta} \circ F \circ \varphi_{\alpha}^{-1}$  (onde definidas) forem  $\mathbb{K}$ -analíticas, onde  $\varphi_{\alpha}$  e  $\psi_{\beta}$  são cartas locais de  $M_{\mathbb{K}}$  e de  $N_{\mathbb{K}}$ .

**Definição 1.1.7.** Seja  $M_{\mathbb{K}}$  uma variedade  $\mathbb{K}$ -analítica. Dizemos que  $W_{\mathbb{K}} \subset M_{\mathbb{K}}$  é um *subconjunto analítico* se, para cada  $p \in M_{\mathbb{K}}$ , existem uma vizinhança aberta  $U \subset M_{\mathbb{K}}$  de  $p$  e uma aplicação  $\mathbb{K}$ -analítica  $F : U \rightarrow \mathbb{C}^P$  tais que  $W_{\mathbb{K}} \cap U = F^{-1}(0)$  (a dimensão  $P$  pode depender de  $p$ ).

**1.1.6. Campo de vetores  $\mathbb{K}$ -analítico e 1-forma  $\mathbb{K}$ -analítica.** Se na definição 1.1.6,  $N_{\mathbb{K}} = \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}$ , a aplicação  $F$  é uma função  $\mathbb{K}$ -analítica que denotamos por  $f$  e que é representada em termos de coordenadas da carta  $\varphi_{\alpha}$  como  $f(x_1, \dots, x_m)$  no lugar de  $f \circ \varphi_{\alpha}^{-1}(x_1, \dots, x_m)$ . Sejam  $M_{\mathbb{K}}$  uma variedade  $\mathbb{K}$ -analítica de dimensão  $m$  e  $p \in M_{\mathbb{K}}$ , considerando  $C_p(M_{\mathbb{K}})$  o conjunto de todas as curvas  $\gamma_j$  que são  $\mathbb{K}$ -analíticas e tais que  $\gamma_j(0) = p$ . A relação de equivalência definida por  $\gamma_{j_1} \sim \gamma_{j_2}$ , se para toda carta local  $\{U_{\alpha}, \varphi_{\alpha}\}$ , com  $p \in U_{\alpha}$ , temos que  $\gamma'_{j_1}(0) = \gamma'_{j_2}(0)$ , ou seja,

$$\left. \frac{d(\varphi_{\alpha} \circ \gamma_{j_1})(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(\varphi_{\alpha} \circ \gamma_{j_2})(t)}{dt} \right|_{t=0}.$$

Se  $\{U_{\alpha_1}, \varphi_{\alpha_1}\}$  é outra carta local com  $p \in U_{\alpha_1}$ , então  $\varphi_{\alpha_1} \circ \gamma_j = (\varphi_{\alpha_1} \circ \varphi_{\alpha}^{-1}) \circ (\varphi_{\alpha} \circ \gamma_j)$ , então pela regra da cadeia a relação  $\sim$  é independente da carta escolhida. O quociente de  $C_p(M_{\mathbb{K}})$  por  $\sim$  é chamado o *espaço tangente a  $M_{\mathbb{K}}$  em  $p$* , e é denotado por  $T_p M_{\mathbb{K}}$ . O conjunto  $\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_p \right\}$  é uma base para  $T_p M_{\mathbb{K}}$ . O *fibrado tangente  $TM_{\mathbb{K}}$* , definido por

$$\bigcup_{p \in M_{\mathbb{K}}} \{p\} \times T_p M_{\mathbb{K}},$$

tem estrutura de variedade  $\mathbb{K}$ -analítica de dimensão  $2m$ . Considerando a projeção

$$\Pi : TM_{\mathbb{K}} \rightarrow M_{\mathbb{K}}$$

dada por  $\Pi(p, v) = p$ , e  $U$  um subconjunto aberto de  $M_{\mathbb{K}}$ , um *campo de vetores  $\mathbb{K}$ -analítico* é uma seção sobre  $U$ , ou seja, é uma aplicação  $\mathbb{K}$ -analítica  $s : U \rightarrow TM_{\mathbb{K}}$  tal que  $\Pi \circ s = id_U$ . Localmente, um campo de vetores se expressa em um sistema de coordenadas como

$$P_1(x_1, \dots, x_m) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + P_m(x_1, \dots, x_m) \frac{\partial}{\partial x_m},$$

onde cada  $P_i(x_1, \dots, x_m)$ , com  $i = 1, \dots, m$ , é uma função  $\mathbb{K}$ -analítica. O *espaço cotangente*, denotado por  $T_p^* M_{\mathbb{K}}$ , é o espaço dual de  $T_p M_{\mathbb{K}}$ . O *fibrado cotangente  $T^* M_{\mathbb{K}}$* , é obtido da mesma forma que o fibrado tangente. Cada campo de vetores  $\mathbb{K}$ -analítico, corresponde a uma aplicação linear  $\omega$  denominada *1-forma diferencial  $\mathbb{K}$ -analítica* e cuja expressão em coordenadas locais é

$$\omega = Q_1(x_1, \dots, x_m) dx_1 + \dots + Q_m(x_1, \dots, x_m) dx_m,$$

onde cada  $Q_i(x_1, \dots, x_m)$ , com  $i = 1, \dots, m$  é uma função  $\mathbb{K}$ -analítica,  $\{dx_1, \dots, dx_m\}$  é a base dual de  $\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_p \right\}$ . Denotando por  $\mathfrak{X}_{\mathbb{K}}$  e  $\Omega_{\mathbb{K}}$  o espaço de germes de campos de vetores  $\mathbb{K}$ -analíticos e 1-formas  $\mathbb{K}$ -analíticas em  $(\mathbb{K}^m, 0)$  respectivamente, considerando o dito ao longo do capítulo temos as inclusões  $\mathfrak{X}_{\mathbb{R}} \hookrightarrow \mathfrak{X}_{\mathbb{C}}$  e  $\Omega_{\mathbb{R}} \hookrightarrow \Omega_{\mathbb{C}}$ .

### 1.1.7. Folheações definidas em variedades analíticas.

**Definição 1.1.8.** Sejam  $M_{\mathbb{K}}$  uma variedade  $\mathbb{K}$ -analítica de dimensão  $m \geq 2$  e  $\mathbb{D}_{\mathbb{K}}$  um disco unitário na origem de  $\mathbb{K}^m$ . Uma *folheação  $\mathbb{K}$ -analítica não singular de dimensão  $k$*  em  $M_{\mathbb{K}}$ , onde  $1 \leq k \leq m - 1$ , é um objeto definido mediante:

- (i) uma cobertura por abertos  $\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in A_{\mathbb{K}}}$  de  $M_{\mathbb{K}}$ ;
- (ii) para cada  $\alpha \in A_{\mathbb{K}}$ , uma aplicação  $\mathbb{K}$ -analítica

$$\Phi_{\alpha} : U_{\alpha} \rightarrow \mathbb{D}_{\mathbb{K}}^k \times \mathbb{D}_{\mathbb{K}}^{m-k}$$

cuja inversa também é analítica;

(iii) sempre que  $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ,

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha\beta} : \Phi_\alpha(U_{\alpha\beta}) &\rightarrow \Phi_\beta(U_{\alpha\beta}) \\ (x_\alpha, y_\alpha) &\mapsto \Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1}(x_\alpha, y_\alpha) = (x_\beta, y_\beta) \end{aligned}$$

satisfaz  $\Phi_{\alpha\beta}(x_\alpha, y_\alpha) = (x_\beta(x_\alpha, y_\alpha), y_\beta(y_\alpha))$ , onde  $x_\beta$  e  $y_\beta$  são  $\mathbb{K}$ -analíticas em  $\mathbb{D}_{\mathbb{K}}^k \times \mathbb{D}_{\mathbb{K}}^{m-k} \in \mathbb{D}_{\mathbb{K}}^{m-k}$  e  $\mathbb{D}_{\mathbb{K}}^{m-k}$  respectivamente.

Cada aberto  $U_\alpha$  é denominado *aberto trivializador* da folheação  $\mathbb{K}$ -analítica. Devido a (ii) e (iii), cada  $U_\alpha$  é decomposto em subvariedades de dimensão  $k$ , da forma  $\Phi_\alpha^{-1}(\mathbb{D}_{\mathbb{K}}^k \times b)$  onde  $b \in \mathbb{D}_{\mathbb{K}}^{m-k}$ , chamadas *placas*. Por (iii) as placas se sobrepõem nas interseções dos abertos trivializadores. Uniões maximais de placas que se intersectam são *folhas*, subvariedades  $\mathbb{K}$ -analíticas de dimensão  $k$  imersas em  $M_{\mathbb{K}}$ .

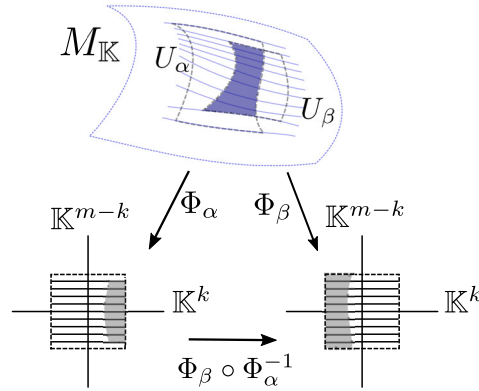


FIGURA 1. Folheação  $\mathbb{K}$ -analítica não singular.

**Definição 1.1.9.** Sejam  $M_{\mathbb{K}}$  uma variedade  $\mathbb{K}$ -analítica de dimensão  $m$  e  $S_{\mathbb{K}}$  um conjunto analítico de  $M_{\mathbb{K}}$  de codimensão maior ou igual a dois. Uma *folheação  $\mathbb{K}$ -analítica singular de dimensão  $k$*  (ou codimensão  $m - k$ ), onde  $1 \leq k \leq m - 1$  em  $M_{\mathbb{K}}$  é uma folheação não singular de dimensão  $k$  em  $M_{\mathbb{K}} \setminus S_{\mathbb{K}}$ . O conjunto  $S_{\mathbb{K}}$  é chamado *conjunto singular da folheação  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$*  e é denotado por  $\text{Sing}(\mathcal{F}_{\mathbb{K}})$ . As folhas de  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$  são as folhas de  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}|_{M_{\mathbb{K}} \setminus \text{Sing}(\mathcal{F}_{\mathbb{K}})}$ .

1.1.7.1. *Folheação definida por um campo vetorial analítico real em  $\mathbb{R}^2$ .* Seja  $U$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$ , um campo vetorial analítico real em  $U$  é uma aplicação analítica real

$$X_{\mathbb{R}} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$$

que associa a cada ponto  $p = (x, y) \in U$  um vetor

$$X_{\mathbb{R}}(p) = X_{\mathbb{R}}(x, y) = (P_{\mathbb{R}}(x, y), Q_{\mathbb{R}}(x, y)) = P_{\mathbb{R}}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q_{\mathbb{R}}(x, y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Em nosso trabalho estamos interessados no caso onde  $P_{\mathbb{R}}, Q_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}\{x, y\}$  não têm fator comum. Um ponto  $p \in U$  é chamado *ponto regular* de  $X_{\mathbb{R}}$  se  $X_{\mathbb{R}}(p) \neq 0$ , caso contrário  $p$  é chamado *ponto singular* de  $X_{\mathbb{R}}$ . Uma trajetória do campo  $X_{\mathbb{R}}$  é uma solução da equação diferencial

$$(8) \quad (\dot{x}, \dot{y}) = X_{\mathbb{R}}(x, y),$$

Se  $I$  é um intervalo aberto e  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow U$  é uma trajetória do campo  $X_{\mathbb{R}}$ , então

$$\gamma'(t) = X_{\mathbb{R}}(\gamma(t)), \quad t \in I.$$

Se  $X_{\mathbb{R}}$  é um campo vetorial sem pontos singulares, pelo Teorema de existência e unicidade de soluções para equações diferenciais ordinárias, para cada ponto  $p \in U$  existe uma vizinhança contida em  $U$  tal que por  $p$  passa uma única trajetória  $\gamma_p(t)$  do campo  $X_{\mathbb{R}}$  nessa vizinhança, definida em um intervalo  $(-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}$  tal que  $\gamma_p(0) = p$ . As trajetórias do campo  $X_{\mathbb{R}}$  definem um fluxo local em cada ponto  $p \in U$ , ou seja para cada  $p$  existe uma vizinhança  $U_p \subset U$  e um intervalo  $(-\epsilon_1, \epsilon_1)$  tal que para qualquer  $q \in U_p$  a trajetória do campo  $X_{\mathbb{R}}$  que passa por  $q$ , denotada por  $\gamma_q(t) = \varphi(t, q)$ , está definida para todo  $t \in (-\epsilon_1, \epsilon_1)$ :

$$\varphi : (-\epsilon_1, \epsilon_1) \times U_p \rightarrow U, \quad \varphi(t, q) = \gamma_q(t).$$

As condições do fluxo local são

- (1)  $\varphi(0, q) = q$  para toda  $q \in U$
- (2)  $\varphi(s, \varphi(t, q)) = \varphi(s + t, q)$ .

Pelo Teorema do fluxo tubular, para cada ponto regular  $p \in U$  existe uma vizinhança  $V_p$  na qual é possível decompor  $V_p$  como união disjunta das trajetórias da restrição do campo  $X_{\mathbb{R}}$  a  $V_p$  e, além disso, existe também uma carta analítica  $\Phi_p : V_p \rightarrow V' \subset \mathbb{R}^2$  tal que o campo  $X_{\mathbb{R}}|_{V_p}$  é levado ao campo horizontal  $Y = (1, 0)$  definido em  $V'$ . Podemos escolher  $V_p$  de forma tal que  $V'$  seja o retângulo  $(-1, 1) \times (-1, 1) = \mathbb{D}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{D}_{\mathbb{R}}^1$ . Assim, podemos escolher uma cobertura por abertos  $\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in A_{\mathbb{R}}}$  de  $U$ , com cartas  $\Phi_{\alpha}$  onde a definição de folheação analítica real não singular seja satisfeita. Desse modo, para cada carta  $\Phi_{\alpha}$  obtemos uma decomposição de  $V'$  em segmentos  $(-1, 1) \times \{y\}$  tal que cada curva  $\Phi_{\alpha}^{-1}((-1, 1) \times \{y\})$  está contida em uma única trajetória de  $X_{\mathbb{R}}$ . Então, essas placas se sobrepõem nas interseções dos abertos trivializadores, dando origem às folhas que nesse caso são trajetórias de  $X_{\mathbb{R}}$  e definem uma *folheação de dimensão 1* também chamada *folheação por curvas* em  $X_{\mathbb{R}}$ . Se na cobertura por abertos temos que  $U_{\alpha\beta} = U_{\alpha} \cap U_{\beta} \neq \emptyset$  a condição (iii) da definição de folheação é satisfeita ao relacionar segmentos de reta horizontais. Portanto, pela Definição 1.1.8 obtemos a folheação analítica real não singular em  $U$ . Se  $X_{\mathbb{R}}$  é um campo vetorial analítico real com singularidade isolada na origem de  $\mathbb{R}^2$ , então definimos uma folheação analítica real não singular em  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  e aplicando a definição de folheação analítica real singular (Definição 1.1.9) obtemos a folheação analítica singular desejada.

1.1.7.2. *Folheação definida por um campo vetorial analítico complexo em  $\mathbb{C}^2$ .* Um campo vetorial analítico complexo (holomorfo) em uma vizinhança da origem  $U \subset \mathbb{C}^2$  é uma aplicação analítica complexa (holomorfa)

$$X : U \rightarrow \mathbb{C}^2$$

que associa a cada ponto  $p = (x, y) \in U \subset \mathbb{C}^2$  um vetor

$$X(p) = X(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Em nosso trabalho estamos interessados no caso em que  $P, Q \in \mathbb{C}\{x, y\}$  não têm fator comum. Um ponto  $p \in U$  é chamado *ponto regular* de  $X$  se  $X(p) \neq 0$ , caso contrário  $p$  é chamado *ponto singular* de  $X$ . Uma solução da equação diferencial

$$(9) \quad (\dot{x}, \dot{y}) = X(x, y),$$

no interior do subconjunto aberto  $I \subset \mathbb{C}$  é definida por uma aplicação

$$\begin{aligned} \gamma : I \subset \mathbb{C} &\rightarrow U \\ t &\mapsto \gamma(t) \end{aligned}$$

tal que para toda  $t \in I$

$$\gamma'(t) = X(\gamma(t)), \quad t \in I.$$

De forma análoga ao caso real, se  $X$  é um campo analítico complexo sem pontos singulares, devido ao Teorema de existência e unicidade de soluções para equações diferenciais ordinárias no plano complexo e ao Teorema do fluxo tubular complexo, usando a Definição 1.1.8, obtemos uma folheação analítica complexa não singular em  $U$ . As soluções são curvas complexas lisas (que têm dimensão real 2). Se  $X$  tem singularidade isolada na origem pela Definição 1.1.9 obtemos uma folheação holomorfa singular em  $U$ .

1.1.7.3. *Folheação analítica complexa singular de codimensão 1 em dimensão 3.* Vejamos primeiro a condição que deve satisfazer uma 1-forma analítica complexa para definir uma folheação em um conjunto aberto  $U \subset M$ , onde  $M$  é uma variedade analítica complexa de dimensão  $\dim_{\mathbb{C}}(M) = 3$ . Uma *distribuição* analítica complexa  $\mathbf{P}$  de planos em  $M$  é uma aplicação analítica complexa que associa a cada ponto  $p \in M$  um plano  $\mathbf{P}_p$  de  $T_p M$  o espaço tangente a  $M$  em um ponto  $p \in M$ . Dizemos que uma distribuição  $\mathbf{P}$  é *integrável* se existe uma folheação  $\mathcal{F}$  de dimensão 2 em  $M$  tal que em cada ponto  $p$ , o plano  $\mathbf{P}_p$  coincide com  $T_p(\mathcal{F})$ , o espaço tangente à folha de  $\mathcal{F}$  em  $p$ . Seja  $\omega$  a 1-forma analítica complexa definida em um aberto  $U \subset M$  tal que seu conjunto singular

$$\text{Sing}(\omega) = \{p \in U : \omega(p) \equiv 0\}$$

tem codimensão  $\geq 2$ . Então,  $\omega$  define uma distribuição  $\mathbf{P}$  de planos em  $U \setminus \text{Sing}(\omega)$  associando a cada  $p \in U \setminus \text{Sing}(\omega)$  o plano

$$\mathbf{P}_p = \ker(\omega_p) = \{v \in T_p U : \omega_p(v) = 0\}$$

**Teorema 1.1.10** (Frobenius para dimensão complexa 3 [3]). *Sejam  $M$  uma variedade analítica complexa com dimensão  $\dim_{\mathbb{C}}(M) = 3$  e  $\mathbf{P}$  uma distribuição de planos induzida pela 1-forma analítica complexa  $\omega$  que está definida no subconjunto aberto e conexo  $U$  de  $M$ . Então  $\mathbf{P}$  é integrável em  $U$  se, e somente se,  $\omega \wedge d\omega = 0$ .*

Dizemos que a 1-forma analítica complexa  $\omega$  é *integrável* em  $U$  se existe uma folheação analítica complexa  $\mathcal{F}$  não singular de codimensão 1 em  $U \setminus \text{Sing}(\omega)$  tal que  $T_p(\mathcal{F})$  coincide com o núcleo de  $\omega(p)$  para todo  $p \in U \setminus \text{Sing}(\omega)$ . Pelo Teorema de Frobenius no aberto  $U$ ,  $\omega \wedge d\omega = 0$  se e somente se  $\omega$  é integrável. Vejamos a seguir como definir uma folheação analítica complexa singular de codimensão 1 em uma variedade analítica complexa de dimensão 3.

**Definição 1.1.11.** Seja  $M$  uma variedade analítica complexa com  $\dim_{\mathbb{C}}(M) = 3$ . Uma *folheação analítica complexa singular de codimensão 1* em  $M$ , denotada por  $\mathcal{F}$ , é definida pelo seguinte conjunto de dados:

- (i) uma cobertura  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  de  $M$  por abertos;
- (ii) para cada  $\alpha \in A$ , uma 1-forma diferencial analítica complexa integrável  $\omega_\alpha$  definida em  $U_\alpha$  cujo conjunto singular  $\text{Sing}(\omega_\alpha)$  tem codimensão  $\geq 2$ ;
- (iii) se  $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , existe uma função analítica complexa  $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow \mathbb{C}^*$  tal que  $\omega_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = g_{\alpha\beta}\omega_\beta|_{U_{\alpha\beta}}$ .

Para cada  $\alpha$  o conjunto singular  $\text{Sing}(\omega_\alpha)$  é um subconjunto analítico de  $U_\alpha$ . De  $\text{Sing}(\omega_\alpha) \cap U_{\alpha\beta} = \text{Sing}(\omega_\beta) \cap U_{\alpha\beta}$ , a união dos conjuntos  $\text{Sing}(\omega_\alpha)$  é um subconjunto analítico denotado por  $\text{Sing}(\mathcal{F})$ . Esse conjunto de dados define uma folheação não singular de codimensão 1 no conjunto aberto  $M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$ . Por esse motivo, o conjunto singular da folheação é  $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \text{Sing}(\omega_\alpha)$ , ver [3] ou [24].

**Observação 1.** Tomando como referência à análise feita na Subseção 1.1.7.3, temos que para fazer o estudo de uma folheação definida por uma

- (i) 1-forma diferencial analítica complexa em uma variedade analítica complexa de dimensão 2 só precisamos trocar a palavra plano por reta e o número 3 por 2.
- (ii) 1-forma diferencial analítica real em uma variedade analítica real de dimensão 3 só precisamos trocar a palavra complexa por real,  $\mathbb{C}$  por  $\mathbb{R}$ , e  $\omega$  por  $\omega_{\mathbb{R}}$ .
- (iii) 1-forma diferencial analítica real em uma variedade analítica real de dimensão 2 só precisamos trocar as palavras complexa por real,  $\mathbb{C}$  por  $\mathbb{R}$ , plano por reta, o número 3 por 2 e  $\omega$  por  $\omega_{\mathbb{R}}$ .

Assim, tanto no caso bidimensional como no tridimensional, “inserimos” a folheação analítica real que estudamos dentro de uma outra folheação analítica complexa para aplicar resultados e técnicas complexas. Fazemos isso complexificando os campos analíticos reais ou as 1-formas analíticas reais que definem as folheações analíticas reais que estudamos, esse processo será explicado no próximo capítulo.

## CAPÍTULO 2

**Blow-ups complexos e reais**

Sejam  $M$  uma variedade complexa de dimensão  $m$  e  $p \in M$ . O *blow-up puntual complexo* em  $p$  é o processo através do qual se cria uma nova variedade complexa  $\widetilde{M}$ , que se identifica com  $M$  no seguinte sentido:  $\{p\} \subset M$  é substituído por  $D$ , um espaço projetivo complexo  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{m-1}$  mergulhado em  $M$ , denominado *divisor excepcional*, que parametriza as retas tangentes a  $M$  em  $p$ . Além disso, existe um difeomorfismo analítico complexo (holomorfo) entre  $M \setminus \{p\}$  e  $\widetilde{M} \setminus D$ . Analogamente, sejam  $M_{\mathbb{R}}$  uma variedade analítica real de dimensão  $m$  e  $p \in M_{\mathbb{R}}$ . O *blow-up real* em  $p$  é o processo através do qual se cria uma nova variedade analítica real  $\widetilde{M}_{\mathbb{R}}$ , que se identifica com  $M_{\mathbb{R}}$  no seguinte sentido:  $\{p\} \subset M_{\mathbb{R}}$  é substituído por  $D_{\mathbb{R}}$ , um espaço projetivo real  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^{m-1}$  mergulhado em  $\widetilde{M}_{\mathbb{R}}$ , denominado *divisor excepcional*. Além disso, existe um difeomorfismo analítico real entre  $M_{\mathbb{R}} \setminus \{p\}$  e  $\widetilde{M}_{\mathbb{R}} \setminus D_{\mathbb{R}}$ . A seguir, estudamos o blow-up complexo em  $0 \in \mathbb{C}^2$  e depois o blow-up real em  $0 \in \mathbb{R}^2$ . Os dois processos podem ser considerados simultaneamente, sendo que o blow-up real se identifica com a restrição do blow-up complexo ao conjunto de pontos  $J$ -invariantes de  $M$ , onde  $J$  é a involução antiholomorfa  $J : (x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$ .

**2.1. Blow-up puntual em  $0 \in \mathbb{C}^2$** 

Seja  $[x : y] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ , e seja  $D = \{0\} \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ . Consideramos a variedade analítica complexa, de dimensão complexa 2, definida por

$$\widetilde{\mathbb{C}^2} = \{((x, y), [x : y]) : (x, y) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}\} \cup D.$$

O blow-up em  $0 \in \mathbb{C}^2$  é definido pela aplicação

$$\pi : (\widetilde{\mathbb{C}^2}, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0),$$

que satisfaz  $\pi((0, 0), [x : y]) = (0, 0)$ ,  $\pi((x, y), [x : y]) = (x, y)$ , onde  $(x, y) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ . A seguir provamos que  $\widetilde{\mathbb{C}^2}$  é uma variedade analítica complexa de dimensão 2. Seja  $(U, \varphi)$  uma carta local de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  tal que  $U = \{[x : y] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 : x \neq 0\}$ , e  $\varphi$  é definida por

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C} &\rightarrow U \\ v &\mapsto \varphi(v) = [1 : v]. \end{aligned}$$

Seja  $(V, \phi)$  outra carta local de  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  tal que  $V = \{[x : y] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 : y \neq 0\}$ , e

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C} &\rightarrow V \\ u &\mapsto \phi(u) = [u : 1]. \end{aligned}$$

Considerando

$$\begin{aligned} \widetilde{U} &= \{((x, y), [x : y]) \in \mathbb{C}^2 \times U : x \neq 0, \frac{y}{x} = \varphi^{-1}([x : y])\} \cup (\{0\} \times U) \\ &= \{((x, xv), [1 : v]) \in \mathbb{C}^2 \times U : v = \varphi^{-1}([1 : v])\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{V} &= \{((x, y), [x : y]) \in \mathbb{C}^2 \times V : y \neq 0, \frac{x}{y} = \phi^{-1}([x : y])\} \cup (\{0\} \times V) \\ &= \{((uy, y), [u : 1]) \in \mathbb{C}^2 \times V : u = \phi^{-1}([u : 1])\},\end{aligned}$$

como  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 = U \cup V$ , temos que

$$\tilde{\mathbb{C}}^2 = \tilde{U} \cup \tilde{V}.$$

As vizinhanças  $\tilde{U}$ ,  $\tilde{V}$  são denominadas vizinhanças coordenadas de  $\tilde{\mathbb{C}}^2$ . Como  $U \cap V \neq \emptyset$ , temos que  $\tilde{U} \cap \tilde{V} \neq \emptyset$ . Em  $\tilde{U} \cap \tilde{V}$  nem  $v$  nem  $u$  são zero e  $uv = 1$ . Considerando

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi} : \mathbb{C}^2 &\rightarrow \tilde{U} \\ (x, v) &\mapsto \tilde{\varphi}(x, v) = \begin{cases} ((0, 0), [1 : v]), & x = 0 \\ ((x, xv), [1 : v]), & x \neq 0 \end{cases},\end{aligned}$$

Se  $x = 0$  temos que  $\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{U} \cap \tilde{V}) = \{(0, v) \in \mathbb{C}^2 : v \neq 0\}$ . Se  $x \neq 0$  temos que

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{U} \cap \tilde{V}) &= \{(x, v) \in \mathbb{C}^2 : \tilde{\varphi}(x, v) \in \tilde{U} \cap \tilde{V}\} \\ &= \{(x, v) \in \mathbb{C}^2 : ((x, xv), [1 : v]) \in \mathbb{C}^2 \times (U \cap V)\} \\ &= \{(x, v) \in \mathbb{C}^2 : x \neq 0, v \neq 0\}.\end{aligned}$$

Então  $\tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{U} \cap \tilde{V}) = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$  é subconjunto aberto de  $\mathbb{C}^2$ . E considerando

$$\begin{aligned}\tilde{\phi} : \mathbb{C}^2 &\rightarrow \tilde{V} \\ (u, y) &\mapsto \tilde{\phi}(u, y) = \begin{cases} ((0, 0), [u : 1]), & y = 0 \\ ((uy, y), [u : 1]), & y \neq 0 \end{cases},\end{aligned}$$

Se  $y = 0$  temos que  $\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{U} \cap \tilde{V}) = \{(u, 0) \in \mathbb{C}^2 : u \neq 0\}$ . Se  $y \neq 0$  temos que

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{U} \cap \tilde{V}) &= \{(u, y) \in \mathbb{C}^2 : \tilde{\phi}(u, y) \in \tilde{U} \cap \tilde{V}\} \\ &= \{(u, y) \in \mathbb{C}^2 : ((uy, y), [u : 1]) \in \mathbb{C}^2 \times (U \cap V)\} \\ &= \{(u, y) \in \mathbb{C}^2 : u \neq 0, y \neq 0\}.\end{aligned}$$

Então  $\tilde{\phi}^{-1}(\tilde{U} \cap \tilde{V}) = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$  é subconjunto aberto de  $\mathbb{C}^2$ .

Se  $(x, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ , temos a mudança de coordenadas

$$(\tilde{\phi}^{-1} \circ \tilde{\varphi})(x, v) = \tilde{\phi}^{-1}((x, xv), [1 : v]) = \tilde{\phi}^{-1}\left((x, xv), \left[\frac{1}{v} : 1\right]\right) = \left(\frac{1}{v}, xv\right) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}.$$

Se  $(u, y) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ , temos a mudança de coordenadas

$$(\tilde{\varphi}^{-1} \circ \tilde{\phi})(u, y) = \tilde{\varphi}^{-1}((uy, y), [u : 1]) = \tilde{\varphi}^{-1}\left((uy, y), \left[1 : \frac{1}{u}\right]\right) = \left(uy, \frac{1}{u}\right) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*.$$

Como  $u \neq 0$  e  $v \neq 0$ , então  $\tilde{\phi}^{-1} \circ \tilde{\varphi}$  e  $\tilde{\varphi}^{-1} \circ \tilde{\phi}$  são analíticas complexas. Obtemos o atlas analítico complexo  $\{(U, \tilde{\varphi}), (V, \tilde{\phi})\}$  de  $\tilde{\mathbb{C}}^2$ . Assim,  $\tilde{\mathbb{C}}^2$  é uma variedade analítica complexa (holomorfa) de dimensão 2, com  $\pi(D) = \{0\}$ . Temos 2 cartas locais dadas por

$$(10) \quad \pi \circ \tilde{\varphi}(x, v) = (x, xv) \quad \text{e} \quad \pi \circ \tilde{\phi}(u, y) = (uy, y).$$

A seguir verificamos que a restrição

$$\pi|_{\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D} : \tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$$



é um difeomorfismo analítico complexo. Começamos provando a injetividade. Sejam  $p_1 = ((x_1, y_1), [x_1 : y_1])$  e  $p_2 = ((x_2, y_2), [x_2 : y_2])$  dois pontos em  $\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D$  tais que

$$\pi((x_1, y_1), [x_1 : y_1]) = \pi((x_2, y_2), [x_2 : y_2]).$$

Pela definição de  $\pi$ , isso implica que  $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ . E portanto,  $p_1 = p_2$ , e temos que  $\pi|_{\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D}$  é injetiva. Além disso, como a aplicação  $\pi : (\tilde{\mathbb{C}}^2, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ , é sobrejetiva, e como  $\pi^{-1}(\{0\}) = D$ , temos que

$$\pi|_{\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D} : \tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$$

é sobrejetiva. Então,  $\pi|_{\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D}$  é bijetiva.

Se  $(x, v) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ , temos que

$$\pi|_{\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D} \circ \tilde{\varphi}(x, v) = \pi|_{\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D}((x, xv), [1 : v]) = (x, xv) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\},$$

então  $\pi|_{\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D} \circ \tilde{\varphi}$  é analítica complexa. Definimos

$$\begin{aligned} \left(\pi|_{\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D} \circ \tilde{\varphi}\right)^{-1} : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \\ (x, y) &\mapsto \left(x, \frac{y}{x}\right), \end{aligned}$$

que é analítica complexa.

Analogamente, se  $(u, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$  temos que

$$\pi|_{\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D} \circ \tilde{\phi}(u, y) = (uy, y) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\},$$

então  $\pi|_{\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D} \circ \tilde{\phi}$  é analítica complexa. E definimos

$$\begin{aligned} \left(\pi|_{\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D} \circ \tilde{\phi}\right)^{-1} : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \\ (x, y) &\mapsto \left(\frac{x}{y}, y\right), \end{aligned}$$

que é analítica complexa. Então,  $\pi|_{\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D}$  é um difeomorfismo analítico complexo.

## 2.2. Blow-up puntual em $0 \in \mathbb{R}^2$

Seja  $[x : y] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ , e seja  $D_{\mathbb{R}} = \{0\} \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ . Consideramos a variedade analítica real, de dimensão real 2, definida por

$$\tilde{\mathbb{R}}^2 = \{((x, y), [x : y]) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\} \cup D_{\mathbb{R}}.$$

O blow-up real é definido pela aplicação

$$\pi_{\mathbb{R}} : (\tilde{\mathbb{R}}^2, D_{\mathbb{R}}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0),$$

que satisfaz  $\pi_{\mathbb{R}}((0, 0), [x : y]) = (0, 0)$ ,  $\pi_{\mathbb{R}}((x, y), [x : y]) = (x, y)$ , onde  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . A prova de que  $\tilde{\mathbb{R}}^2$  é uma variedade real analítica de dimensão 2 é idêntica à prova de que  $\tilde{\mathbb{C}}^2$  é uma variedade complexa analítica. Das equações mencionadas em (10), temos que as relações  $y = vx$ , com  $x \neq 0$ , e  $x = uy$ , com  $y \neq 0$ , definem tanto o blow-up real como o blow-up complexo. Então, ao aplicar um blow-up real  $\pi_{\mathbb{R}}$  a  $(\mathbb{R}^2, 0)$  podemos considerar simultaneamente o blow-up complexo  $\pi_{\mathbb{C}}$  em  $(\mathbb{C}^2, 0)$ .

### 2.3. Relação entre um blow-up em $(\mathbb{R}^2, 0)$ e o blow-up em $(\mathbb{C}^2, 0)$

Da seção 2.2, dado um blow-up real em  $0 \in \mathbb{R}^2$ , definido pela aplicação

$$\pi_{\mathbb{R}} : (\tilde{\mathbb{R}}^2, D_{\mathbb{R}}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0),$$

onde  $D_{\mathbb{R}} = \{0\} \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ . Obtemos a variedade analítica real

$$\tilde{\mathbb{R}}^2 = \{((x, y), [x : y]) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\} \cup D_{\mathbb{R}}.$$

Interpretando as variáveis  $x, y$  como variáveis complexas, pela Seção 2.1, obtemos paralelamente o blow-up complexo, definido pela aplicação

$$\pi_{\mathbb{C}} : (\tilde{\mathbb{C}}^2, D_{\mathbb{C}}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0),$$

onde  $D_{\mathbb{C}} = \{0\} \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ . Obtemos também a variedade analítica complexa,

$$\tilde{\mathbb{C}}^2 = \{((x, y), [x : y]) : (x, y) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}\} \cup D_{\mathbb{C}}.$$

Consideramos o *traço real* de  $\mathbb{C}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : (x, y) = (\bar{x}, \bar{y})\}$ . Seja

$$J : (x, y) \in \mathbb{C}^2 \mapsto (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{C}^2$$

a involução canônica anti-holomorfa. O subconjunto de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  de pontos fixos de  $J$  é o traço real de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  e se identifica com  $(\mathbb{R}^2, 0)$ . O levantamento da involução canônica  $J$  pelo blow-up complexo  $\pi_{\mathbb{C}}$  define uma única involução contínua  $J^1$

$$J^1 : \tilde{\mathbb{C}}^2 \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}^2,$$

tal que

$$\pi_{\mathbb{C}} \circ J^1 = J \circ \pi_{\mathbb{C}}.$$

Isso se deve ao fato de que a expressão do mapa  $\pi_{\mathbb{C}}$  em coordenadas envolve apenas coeficientes reais. O traço real de  $\tilde{\mathbb{C}}^2$  é o conjunto  $\{p_1 \in \tilde{\mathbb{C}}^2 : p_1 = J^1(p_1)\}$  e se identifica com  $\tilde{\mathbb{R}}^2$ . Assim, dizemos que  $\tilde{\mathbb{R}}^2$  é o traço real de  $\tilde{\mathbb{C}}^2$  e identificamos  $D_{\mathbb{R}}$  com  $D_{\mathbb{C}} \cap \tilde{\mathbb{R}}^2$ , e também  $\pi_{\mathbb{R}} = \pi_{\mathbb{C}}|_{\tilde{\mathbb{R}}^2}$ . Não é difícil ver que  $\tilde{\mathbb{R}}^2$  é uma faixa de Möbius.

### 2.4. Blow-up puntual de uma folheação analítica complexa em $0 \in \mathbb{C}^2$

Seja  $\mathcal{F}$  o germe de folheação analítica complexa singular em  $0 \in \mathbb{C}^2$  induzido pelo germe de campo vetorial analítico complexo com singularidade isolada na origem

$$X = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

onde  $P, Q \in \mathbb{C}\{x, y\}$  não têm fator comum. Ou, equivalentemente, pela equação

$$\omega = 0,$$

onde  $\omega$  é o germe de 1-forma analítica complexa

$$\omega = Q(x, y)dx - P(x, y)dy.$$

Escrevemos seu desenvolvimento em série de Taylor:

$$\omega = \sum_{j=k}^{\infty} (Q_j(x, y)dx - P_j(x, y)dy),$$

onde  $P_k(x, y) \neq 0$  ou  $Q_k(x, y) \neq 0$ . Temos dois casos a considerar:

**Caso 1:**  $xQ_k(x, y) - yP_k(x, y) \not\equiv 0$ . A singularidade é denominada *não-dicrítica*. Usando  $y = vx$ , observamos que  $Q_k(1, v) - vP_k(1, v) \not\equiv 0$ , então

$$\begin{aligned}\pi^*\omega &= \sum_{j=k}^{\infty} [Q_j(x, xv)dx - P_j(x, xv)d(xv)] \\ &= x^k \sum_{j=k}^{\infty} x^{j-k} [(Q_j(1, v) - vP_j(1, v)) dx - xP_j(1, v)dv].\end{aligned}$$

E obtemos

$$(11) \quad \frac{\pi^*\omega}{x^k} = (Q_k(1, v) - vP_k(1, v)) dx - xP_k(1, v)dv + x\alpha,$$

onde

$$\alpha = \sum_{j=k+1}^{\infty} x^{j-k-1} [(Q_j(1, v) - vP_j(1, v)) dx - xP_j(1, v)dv] \text{ é holomorfa.}$$

Do mesmo modo, usando  $x = uy$ , observamos que  $Q_k(u, 1) - vP_k(u, 1) \not\equiv 0$  escrevemos

$$(12) \quad \frac{\pi^*\omega}{y^k} = (Q_k(u, 1) - vP_k(u, 1))dy + yQ_k(u, 1)du + y\beta,$$

onde

$$\beta = \sum_{j=k+1}^{\infty} y^{j-k-1} [(Q_j(u, 1) - vP_j(u, 1))dy + yQ_j(u, 1)du].$$

Na interseção dos abertos das cartas, se cumpre

$$\frac{\pi^*\omega}{y^k} = \left(\frac{1}{v}\right)^k \frac{\pi^*\omega}{x^k}.$$

Essa equação diz que as soluções coincidem na interseção das vizinhanças coordenadas que cobrem  $\tilde{\mathbb{C}}^2$ . Na carta  $(x, v)$ , as singularidades de  $\tilde{\mathcal{F}}$  no divisor  $D : \{x = 0\}$  estão dadas por pontos da forma  $(1, v_0)$  que satisfazem a equação

$$Q_k(1, v_0) - v_0P_k(1, v_0) = 0.$$

Então,  $\tilde{\mathcal{F}}$  tem  $k+1$  singularidades, contadas com multiplicidade, sobre o divisor  $D$ . Nesse caso  $D$  é invariante.

**Caso 2:**  $xQ_k(x, y) - yP_k(x, y) \equiv 0$ . A singularidade é denominada *dicrítica*. De (11), temos

$$\frac{\pi^*\omega}{x^k} = -xP_k(1, v)dv + x \left[ \sum_{j=k+1}^{\infty} x^{j-k-1} [(Q_j(1, v) - vP_j(1, v)) dx - xP_j(1, v)dv] \right].$$

E então

$$(13) \quad \frac{\pi^*\omega}{x^{k+1}} = \sum_{j=k+1}^{\infty} x^{j-k-1} (Q_j(1, v) - vP_j(1, v)) dx - \sum_{j=k}^{\infty} x^{j-k} P_j(1, v)dv.$$

De (12), temos também

$$\frac{\pi^*\omega}{y^k} = yQ_k(u, 1)du + y \sum_{j=k+1}^{\infty} y^{j-k-1} [(Q_j(u, 1) - vP_j(u, 1))dy + yQ_j(u, 1)du].$$

Então

$$(14) \quad \frac{\pi^*\omega}{y^{k+1}} = \sum_{j=k+1}^{\infty} y^{j-k-1}(Q_j(u, 1) - vP_j(u, 1))dy + \sum_{j=k}^{\infty} y^{j-k}Q_j(u, 1)du.$$

Na interseção dos abertos das cartas, se cumpre

$$\frac{\pi^*\omega}{y^k} = \left(\frac{1}{v}\right)^{k+1} \frac{\pi^*\omega}{x^k}.$$

Assim, as curvas solução também coincidem na interseção das vizinhanças coordenadas que cobrem  $\tilde{\mathbb{C}}^2$ . Na carta  $(x, v)$ , as singularidades de  $\tilde{\mathcal{F}}$  no divisor  $D : \{x = 0\}$  estão dadas por pontos da forma  $(1, v_0)$  tais que

$$Q_{k+1}(1, v_0) - v_0P_{k+1}(1, v_0) = 0$$

e também

$$P_k(1, v_0) = 0.$$

Nos pontos do divisor  $D : \{x = 0\}$  onde  $Q_{k+1}(1, v) - vP_{k+1}(1, v) \neq 0$  e também  $P_k(1, v) = 0$ , as folhas de  $\mathcal{F}^1$  são tangentes ao divisor. Nos pontos do divisor onde  $P_k(1, v) \neq 0$  as folhas são transversais ao divisor. Como consequência, ao aplicar um blow-up na origem de  $\mathbb{C}^2$  obtemos a folheação  $\tilde{\mathcal{F}}^1$ . Como um blow-up é um difeomorfismo analítico complexo entre  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  e  $\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus D$  e por cada ponto de uma folheação passa uma única folha, temos que cada folha de  $\mathcal{F}$  é levada em uma única folha de  $\tilde{\mathcal{F}}^1$ . Definimos, assim, a folheação transformada estrita de  $\mathcal{F}$  como  $\mathcal{F}^1 = \pi^*(\mathcal{F})$ .

### 2.5. Blow-up puntual de uma folheação analítica real em $0 \in \mathbb{R}^2$

Sejam  $X_{\mathbb{R}}$  um germe de campo vetorial analítico real e  $X_{\mathbb{C}}$  seu complexificado, ou seja, um germe de campo vetorial analítico complexo definido pelas mesmas fórmulas que definem o campo  $X_{\mathbb{R}}$ , porém no lugar de considerar suas variáveis em  $\mathbb{R}$  as consideramos em  $\mathbb{C}$ . Dizemos que  $X_{\mathbb{R}}$  tem *singularidade algebricamente isolada na origem* se seu complexificado  $X_{\mathbb{C}}$  tem singularidade isolada na origem. Seja  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  o germe de folheação analítica real singular em  $0 \in \mathbb{R}^2$  induzido pelo germe de campo vetorial analítico real com singularidade algebricamente isolada na origem

$$X_{\mathbb{R}} = P_{\mathbb{R}}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q_{\mathbb{R}}(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

onde  $P_{\mathbb{R}}, Q_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}\{x, y\}$  não têm fator comum e  $P_{\mathbb{R}}(0, 0) = Q_{\mathbb{R}}(0, 0) = 0$ . Equivalentemente,  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  é definida pela equação

$$\omega_{\mathbb{R}} = 0,$$

onde  $\omega_{\mathbb{R}}$  é o germe da 1-forma analítica real

$$\omega_{\mathbb{R}} = P_{\mathbb{R}}(x, y)dy - Q_{\mathbb{R}}(x, y)dx.$$

Interpretando as variáveis  $x, y$  como variáveis complexas, obtemos  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  o germe de folheação holomorfa singular em  $0 \in \mathbb{C}^2$  induzido pelo germe de campo vetorial holomorfo com singularidade isolada na origem

$$X_{\mathbb{C}} = P_{\mathbb{C}}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q_{\mathbb{C}}(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

onde  $P_{\mathbb{C}}, Q_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}\{x, y\}$  não têm fator comum. Ou, equivalentemente, pela equação

$$\omega_{\mathbb{C}} = 0,$$

onde  $\omega_{\mathbb{C}}$  é o germe da 1-forma holomorfa

$$\omega_{\mathbb{C}} = P_{\mathbb{C}}(x, y)dy - Q_{\mathbb{C}}(x, y)dx.$$

Observe que  $X_{\mathbb{R}}$  tem *singularidade algebricamente isolada* pelo fato que os coeficientes de  $X_{\mathbb{R}}$  serem ambos não-unidades e relativamente primos em  $\mathbb{R}\{x, y\}$ . Pois se  $X_{\mathbb{C}}$  não tivesse singularidade isolada então  $P_{\mathbb{C}}(x, y)$  e  $Q_{\mathbb{C}}(x, y)$  teriam um fator comum da forma  $a(x, y) + ib(x, y)$ , com  $a(x, y), b(x, y) \in \mathbb{R}\{x, y\}$  porém como  $P_{\mathbb{C}}(x, y)$  e  $Q_{\mathbb{C}}(x, y)$  só tem coeficientes reais então  $a(x, y) - ib(x, y)$  tem que ser outro fator comum entre eles, isso implica que  $(a(x, y) + ib(x, y)) \cdot (a(x, y) - ib(x, y))$  seria fator comum entre eles, porém isso contradiz o fato que  $P_{\mathbb{R}}$  e  $Q_{\mathbb{R}}$  não tem fator comum.

Seguindo as ideias e notações, apresentadas na seção 2.3, identificamos  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  com a interseção de  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  com o traço real de  $(\mathbb{C}^2, 0)$ . Ou seja, as folhas de  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  são obtidas pela interseção das folhas de  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  com o traço real. Após o blow-up complexo  $\pi_{\mathbb{C}}$ , identificamos e definimos o blow-up de  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  como

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}}^1 = \mathcal{F}_{\mathbb{C}}^1 \cap \widetilde{\mathbb{R}}^2,$$

onde  $\widetilde{\mathbb{R}}^2$  é o traço real de  $\widetilde{\mathbb{C}}^2$ .

## 2.6. Composição de blow-ups complexos e composição de blow-ups reais

Nessa seção usamos novamente  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}$  para realizar definições e afirmações válidas tanto no contexto real como no complexo. Fazendo  $k$  sucessivos blow-ups sobre as singularidades isoladas que vão aparecendo depois de cada blow-up, produzimos a composição

$$\sigma_{\mathbb{K}} = \pi_{\mathbb{K}}^1 \circ \dots \circ \pi_{\mathbb{K}}^{k-1} \circ \pi_{\mathbb{K}}^k,$$

de blow-ups

$$\pi_{\mathbb{K}}^j : (\widetilde{M}_{\mathbb{K}}^j, \mathcal{D}_{\mathbb{K}}^j) \rightarrow (\widetilde{M}_{\mathbb{K}}^{j-1}, \mathcal{D}_{\mathbb{K}}^{j-1}),$$

para  $j = 1, \dots, k$ , tal que

- $(\widetilde{M}_{\mathbb{K}}^0, \mathcal{D}_{\mathbb{K}}^0) = (\mathbb{K}^2, 0)$ ,  $(\widetilde{M}_{\mathbb{K}}^1, \mathcal{D}_{\mathbb{K}}^1) = (\widetilde{\mathbb{K}}^2, D_{\mathbb{K}})$ ,
- o blow-up em  $0 \in \mathbb{K}^2$  é  $\pi_{\mathbb{K}}^1 : (\widetilde{M}_{\mathbb{K}}^1, \mathcal{D}_{\mathbb{K}}^1) \rightarrow (\widetilde{M}_{\mathbb{K}}^0, \mathcal{D}_{\mathbb{K}}^0)$ .
- cada  $\pi_{\mathbb{K}}^j$  é um blow-up em um ponto  $p_{j-1} \in \mathcal{D}_{\mathbb{K}}^{j-1}$ .
- $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}^j = (\pi_{\mathbb{K}}^1 \circ \dots \circ \pi_{\mathbb{K}}^{k-1} \circ \pi_{\mathbb{K}}^k)^{-1}(0)$  é um divisor com cruzamentos normais, cujas componentes irredutíveis são isomorfas a retas projetivas  $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^1$ .

Denotamos  $(\widetilde{M}_{\mathbb{K}}^k, \mathcal{D}_{\mathbb{K}}^k)$  por  $(\widetilde{M}_{\mathbb{K}}, \mathcal{D}_{\mathbb{K}})$ , e a sequência de blow-ups por

$$\sigma_{\mathbb{K}} : (\widetilde{M}_{\mathbb{K}}, \mathcal{D}_{\mathbb{K}}) \rightarrow (\mathbb{K}^2, 0),$$

onde  $\mathcal{D}_{\mathbb{K}} = \sigma_{\mathbb{K}}^{-1}(0)$ . Um ponto que pertence a  $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}$  e está na interseção de duas componentes irredutíveis é chamado de *esquina*. Caso contrário, é chamado de *ponto traço*. Denotamos por  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}^0 = \mathcal{F}_{\mathbb{K}}$ ,  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}^1 = (\pi_{\mathbb{K}}^1)^*(\mathcal{F}_{\mathbb{K}}^0)$ ,  $\dots$ ,  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}^k = \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{K}} = (\pi_{\mathbb{K}}^k)^*(\mathcal{F}_{\mathbb{K}}^{k-1}) = \sigma_{\mathbb{K}}^* \mathcal{F}_{\mathbb{K}}$  as folheações obtidas como transformadas estritas pela sequência de blow-ups. Uma componente irredutível de  $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}$  é classificada como *dicrítica* se é não-invariante por  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{K}}$ , caso contrario, é classificada como *não-dicrítica*.

### 2.7. Blow-up puntual em $0 \in \mathbb{C}^3$

Sejam  $[x : y : z] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  e  $D = \{0\} \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ . Obtemos a variedade analítica complexa, de dimensão complexa 3, definida por

$$\tilde{\mathbb{C}}^3 = D \cup \{((x, y, z), [x : y : z]) : (x, y, z) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}\}$$

aplicamos um blow-up na origem de  $\mathbb{C}^3$  definido pela aplicação

$$\pi : (\tilde{\mathbb{C}}^3, D) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0),$$

que satisfaz  $\pi((0, 0, 0), [x : y : z]) = (0, 0, 0)$  e  $\pi((x, y, z), [x : y : z]) = (x, y, z)$ , onde  $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$ . O *divisor excepcional* é a subvariedade

$$D = \pi^{-1}(0) = \{0\} \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2.$$

A restrição

$$\pi|_{\tilde{\mathbb{C}}^3 \setminus D} : \tilde{\mathbb{C}}^3 \setminus D \rightarrow \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$$

é um difeomorfismo analítico complexo. Com os abertos

$$\tilde{U} = \{((x, y, z), [x : y : z]) \in \tilde{\mathbb{C}}^3 : x \neq 0\},$$

$$\tilde{V} = \{((x, y, z), [x : y : z]) \in \tilde{\mathbb{C}}^3 : y \neq 0\},$$

$$\tilde{W} = \{((x, y, z), [x : y : z]) \in \tilde{\mathbb{C}}^3 : z \neq 0\}$$

definimos as seguintes cartas para  $\tilde{\mathbb{C}}^3$

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{C}^3 \rightarrow \tilde{U}$$

$$(u, v, w) \mapsto \tilde{\varphi}(u, v, w) = ((u, uv, uw), [1 : v : w]),$$

$$\tilde{\phi} : \mathbb{C}^3 \rightarrow \tilde{V}$$

$$(u, v, w) \mapsto \tilde{\phi}(u, v, w) = ((uv, v, vw), [u : 1 : w]),$$

$$\tilde{\psi} : \mathbb{C}^3 \rightarrow \tilde{W}$$

$$(u, v, w) \mapsto \tilde{\psi}(u, v, w) = ((uw, vw, w), [u : v : 1]),$$

Nessas cartas locais, escrevemos

$$\pi \circ \tilde{\varphi}(u, v, w) = (u, uv, uw)$$

$$\pi \circ \tilde{\phi}(u, v, w) = (uv, v, vw)$$

$$\pi \circ \tilde{\psi}(u, v, w) = (uw, vw, w)$$

**2.7.1. Blow-up puntual em  $0 \in \mathbb{C}^3$  de um germe folheação analítica de codimensão 1.** Seja  $\mathcal{F}$  um germe de folheação de codimensão 1 em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  induzida pela 1-forma analítica complexa integrável

$$\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz,$$

onde  $P, Q, R \in \mathbb{C}\{x, y, z\}$  são homogêneos e não têm fator comum. Escrevemos

$$\omega = \sum_{j=k}^{\infty} P_j(x, y, z)dx + \sum_{j=k}^{\infty} Q_j(x, y, z)dy + \sum_{j=k}^{\infty} R_j(x, y, z)dz,$$

seu desenvolvimento de Taylor. Seja  $\pi^*(\omega)$  a 1-forma obtida pelo pull-back de  $\omega$  pelo blow-up  $\pi : (\tilde{\mathbb{C}}^3, D) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$ . Temos dois casos a analisar.

**Caso 1 (n\u00e3o-dicr\u00edtico):**  $xP_k(x, y, z) + yQ_k(x, y, z) + zR_k(x, y, z) \not\equiv 0$ . Tomamos a escrita de  $\pi$  na primeira carta do blow-up puntual

$$x = u, y = uv, z = uw.$$

Observando que  $xP_k(x, y, z) + yQ_k(x, y, z) + zR_k(x, y, z) \not\equiv 0$ , temos

$$P_j(1, v, w) + vQ_j(1, v, w) + wR_j(1, v, w) \not\equiv 0.$$

Ent\u00e3o, a 1-forma  $\pi^*(\omega)$  nessas coordenadas \u00e9

$$\begin{aligned} \pi^*(\omega) &= \sum_{j=k}^{\infty} \left[ P_j(u, uv, uw)du + Q_j(u, uv, uw)d(uv) + R_j(u, uv, uw)d(uw) \right] \\ &= \sum_{j=k}^{\infty} \left[ P_j(u, uv, uw)du + Q_j(u, uv, uw)(vdu + udv) + R_j(u, uv, uw)(wdu + udw) \right] \\ &= \sum_{j=k}^{\infty} \left[ u^j [P_j(1, v, w) + vQ_j(1, v, w) + wR_j(1, v, w)] du \right. \\ &\quad \left. + u^{j+1} [Q_j(1, v, w)dv + R_j(1, v, w)dw] \right]. \end{aligned}$$

Obtemos

$$(15) \quad \omega_1 = \frac{\pi^*(\omega)}{u^k} = [P_k(1, v, w) + vQ_k(1, v, w) + wR_k(1, v, w)] du + u [Q_k(1, v, w)dv + R_k(1, v, w)dw] + u\alpha,$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{j=k+1}^{\infty} u^{j-k-1} \left[ [P_j(1, v, w) + vQ_j(1, v, w) + wR_j(1, v, w)] du \right. \\ &\quad \left. + u [Q_j(1, v, w)dv + R_j(1, v, w)dw] \right]. \end{aligned}$$

Escrevemos  $\pi$  na segunda carta do blow-up puntual

$$x = uv, y = v, z = vw.$$

Nesse caso,  $xP_k(x, y, z) + yQ_k(x, y, z) + zR_k(x, y, z) \not\equiv 0$  implica em

$$uP_j(u, 1, w) + Q_j(u, 1, w) + wR_j(u, 1, w) \not\equiv 0.$$

Ent\u00e3o, nessa segunda carta,

$$\begin{aligned} \pi^*(\omega) &= \sum_{j=k}^{\infty} \left[ P_j(uv, v, vw)d(uv) + Q_j(uv, v, vw)dv + R_j(uv, v, vw)d(vw) \right] \\ &= \sum_{j=k}^{\infty} \left[ v^j [uP_j(u, 1, w) + Q_j(u, 1, w) + wR_j(u, 1, w)] dv \right. \\ &\quad \left. + v^{j+1} [P_j(u, 1, w)du + R_j(u, 1, w)dw] \right]. \end{aligned}$$

Obtemos então

$$(16) \quad \omega_2 = \frac{\pi^*(\omega)}{v^k} = [uP_k(u, 1, w) + Q_k(u, 1, w) + wR_k(u, 1, w)] dv + v [P_k(u, 1, w)du + R_k(u, 1, w)dw] + v\beta,$$

onde

$$\beta = \sum_{j=k+1}^{\infty} v^{j-k-1} \left[ [uP_j(u, 1, w) + Q_j(u, 1, w) + wR_j(u, 1, w)] dv + v [P_j(u, 1, w)du + R_j(u, 1, w)dw] \right].$$

Finalmente, na terceira carta, temos

$$x = uw, y = vw, z = w.$$

Nesse caso,  $uP_j(u, v, 1) + vQ_j(u, v, 1)du + R_j(u, v, 1) \neq 0$ . Logo,

$$\begin{aligned} \pi^*(\omega) &= \sum_{j=k}^{\infty} \left[ P_j(uw, vw, w)d(uw) + Q_j(uw, vw, w)d(vw) + R_j(uw, vw, w)dw \right] \\ &= \sum_{j=k}^{\infty} \left[ w^j [uP_j(u, v, 1) + vQ_j(u, v, 1) + R_j(u, v, 1)] dw + w^{j+1} [P_j(u, v, 1)du + Q_j(u, v, 1)dv] \right]. \end{aligned}$$

Obtemos então

$$(17) \quad \omega_3 = \frac{\pi^*\omega}{w^k} = [uP_k(u, v, 1) + vQ_k(u, v, 1) + R_k(u, v, 1)] dw + w [P_k(u, v, 1)du + Q_k(u, v, 1)dv] + v\gamma,$$

onde

$$\gamma = \sum_{j=k+1}^{\infty} w^{j-k-1} \left[ [uP_j(u, v, 1) + vQ_j(u, v, 1) + R_j(u, v, 1)] dw + w [P_j(u, v, 1)du + Q_j(u, v, 1)dv] \right]$$

é uma 1-forma holomorfa.

Momentaneamente, para reconhecer as variáveis  $u, v, w$  em cada carta e conhecer as relações entre as cartas usamos subíndices, por exemplo a variável  $u$  na carta 1 é denotada  $u_1$ . Assim, na interseção dos abertos das cartas 1 e 2, denotamos  $v_1$  ao  $v$  da carta 1,  $v_2$  ao  $v$  da carta 2 e temos que  $v_2 = v_1 \cdot u_1$ , e se cumpre

$$\omega_2 = \frac{\pi^*\omega}{(v_2)^k} = \left(\frac{1}{v_1}\right)^k \frac{\pi^*(\omega)}{(u_1)^k} = \left(\frac{1}{v_1}\right)^k \omega_1$$



E fazemos exatamente os mesmos cálculos e comparações com os outros casos. As equações mostram que as curvas solução coincidem na interseção das vizinhanças coordenadas que cobrem  $\tilde{\mathbb{C}}^3$ . Na carta  $(u, v, w)$ , as singularidades de  $\tilde{\mathcal{F}}$  no divisor  $D : \{u = 0\}$  estão dadas por pontos da forma  $(1, v_0, w_0)$  que satisfazem a equação

$$P_k(1, v_0, w_0) + v_0 Q_k(1, v_0, w_0) + w_0 R_k(1, v_0, w_0) = 0.$$

então  $\tilde{\mathcal{F}}$  tem uma curva de singularidades sobre divisor. Nesse caso  $D$  é invariante.

**Caso 2 (dicrítico)**  $xP_k(x, y, z) + yQ_k(x, y, z) + zR_k(x, y, z) \equiv 0$ .

Usando

$$x = u, y = uv, z = uw$$

em (15) temos

$$\frac{\pi^*(\omega)}{u^k} = u [Q_k(1, v, w)dv + R_k(1, v, w)dw] + u\alpha,$$

onde

$$\alpha = \sum_{j=k+1}^{\infty} u^{j-k-1} \left[ [P_j(1, v, w) + vQ_j(1, v, w) + wR_j(1, v, w)] du + u [Q_j(1, v, w)dv + R_j(1, v, w)dw] \right].$$

Então,

$$\omega_4 = \frac{\pi^*\omega}{u^{k+1}} = \sum_{j=k+1}^{\infty} u^{j-k-1} \left[ P_j(1, v, w) + vQ_j(1, v, w) + wR_j(1, v, w) \right] du + \sum_{j=k}^{\infty} u \left[ Q_j(1, v, w)dv + R_j(1, v, w)dw \right].$$

Considerando agora

$$x = uv, y = v, z = vw.$$

De (16) obtemos

$$\frac{\pi^*\omega}{v^k} = v [P_k(u, 1, w)dv + R_k(u, 1, w)dw] + v\beta,$$

onde

$$\beta = \sum_{j=k+1}^{\infty} v^{j-k-1} \left[ [uP_j(u, 1, w) + Q_j(u, 1, w) + wR_j(u, 1, w)] dv + v [P_j(u, 1, w)du + R_j(u, 1, w)dw] \right].$$

Logo,

$$\omega_5 = \frac{\pi^*\omega}{v^{k+1}} = \sum_{j=k+1}^{\infty} v^{j-k-1} \left[ uP_j(u, 1, w) + Q_j(u, 1, w) + wR_j(u, 1, w) \right] dv + \sum_{j=k}^{\infty} v \left[ P_j(u, 1, w)du + R_j(u, 1, w)dw \right]$$

Por fim, considerando

$$x = uw, y = vw, z = w,$$

de (17), temos que

$$\frac{\pi^*\omega}{w^k} = w [P_k(u, v, 1)du + Q_k(u, v, 1)dv] + v\gamma,$$

onde

$$\gamma = \sum_{j=k+1}^{\infty} w^{j-k-1} \left[ [uP_j(u, v, 1) + vQ_j(u, v, 1) + R_j(u, v, 1)] dw + w [P_j(u, v, 1)du + Q_j(u, v, 1)dv] \right]$$

Então,

$$\omega_6 = \frac{\pi^*\omega}{w^{k+1}} = \sum_{j=k+1}^{\infty} w^{j-k-1} \left[ uP_j(u, v, 1) + vQ_j(u, v, 1) + R_j(u, v, 1) \right] dv + \sum_{j=k}^{\infty} w \left[ P_j(u, v, 1)du + Q_j(u, v, 1)dv \right]$$

Na interseção dos abertos das cartas 1 e 2, temos que  $v_2 = v_1 \cdot u_1$ , vale

$$\omega_5 = \frac{\pi^*(\omega)}{(v_2)^{k+1}} = \left(\frac{1}{v_1}\right)^{k+1} \frac{\pi^*\omega}{(u_1)^{k+1}} = \left(\frac{1}{v_1}\right)^{k+1} \omega_4$$

E fazemos exatamente os mesmos cálculos e comparações com os outros casos. Por isso, no caso dicrítico as curvas solução também coincidem na interseção das vizinhanças coordenadas que cobrem  $\tilde{\mathbb{C}}^3$ . Nesse caso, o divisor  $D$  é não-invariante.

### 2.8. Blow-up ao longo de uma curva lisa em $\mathbb{C}^3$

O blow-up cujo centro é um germe de curva lisa é chamado *monoidal*. Vamos considerar o blow-up cujo centro é o eixo  $z$  de  $\mathbb{C}^3$ , ou seja  $O_z = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : x = y = 0\}$ . Seja  $[x : y] \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ , e seja  $D = O_z \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ . Definimos

$$\tilde{\mathbb{C}}^3 = D \cup \{(x, y, z), [x : y] : (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \setminus O_z\}.$$

O blow-up com centro em  $O_z$  é a aplicação

$$\pi : (\tilde{\mathbb{C}}^3, D) \rightarrow (\mathbb{C}^3, O_z),$$

que satisfaz  $\pi((0, 0, z), [x : y]) = (0, 0, z)$  e  $\pi((x, y, z), [x : y]) = (x, y, z)$ , onde  $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \setminus O_z$ . O *divisor excepcional* é

$$D = \pi^{-1}(O_z) = O_z \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1.$$

E para cada ponto  $q \in O_z$

$$\pi^{-1}(q) = \{q\} \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \simeq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1.$$

A restrição

$$\pi|_{\tilde{\mathbb{C}}^3 \setminus D} : \tilde{\mathbb{C}}^3 \setminus D \rightarrow \mathbb{C}^3 \setminus O_z$$

é um difeomorfismo analítico complexo. Com os abertos

$$\tilde{U} = \{((x, y, z), [x : y]) \in \tilde{\mathbb{C}}^3 : x \neq 0\},$$

$$\tilde{V} = \{((x, y, z), [x : y]) \in \tilde{\mathbb{C}}^3 : y \neq 0\}.$$

Temos o seguinte par de cartas para  $\tilde{\mathbb{C}}^3$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : \mathbb{C}^3 &\rightarrow \tilde{U} \\ (u, v, w) &\mapsto \tilde{\varphi}(u, v, w) = ((u, uv, w), [1 : v]), \\ \tilde{\phi} : \mathbb{C}^3 &\rightarrow \tilde{V} \\ (u, v, w) &\mapsto \tilde{\phi}(u, v, w) = ((uv, v, w), [u : 1]), \end{aligned}$$

permitem obter 2 cartas locais, com as que se relacionam os pontos de  $\tilde{\mathbb{C}}^3 \setminus D$  com os pontos de  $\mathbb{C}^3 \setminus O_z$ ,

$$\begin{aligned} \pi \circ \tilde{\varphi}(u, v, w) &= (u, uv, w) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{u = 0\} \\ \pi \circ \tilde{\phi}(u, v, w) &= (uv, v, w) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{v = 0\}. \end{aligned}$$

**2.8.1. Blow-up ao longo de uma curva lisa de uma folheação analítica complexa de codimensão 1.** Consideremos  $\mathcal{F}$  um germe de folheação de codimensão 1 em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ , cujo conjunto singular é  $O_z$  e que é induzida pela 1-forma analítica complexa  $\omega$  definida por

$$\omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz,$$

onde  $P, Q, R \in \mathbb{C}\{x, y, z\}$  não têm fator comum. Então,

$$P(0, 0, z) = Q(0, 0, z) = R(0, 0, z) = 0.$$

Para  $z = z_0 \neq 0$  fixado, temos que cada  $P(x, y, z_0)$ ,  $Q(x, y, z_0)$ ,  $R(x, y, z_0)$  são séries de potências nas variáveis  $x, y$ . Após uma mudança linear de coordenadas, podemos supor que  $P(x, y, z_0)$ ,  $Q(x, y, z_0)$ ,  $R(x, y, z_0)$  têm a mesma multiplicidade algébrica. Então podemos escrever

$$\omega = \sum_{j=k}^{\infty} P_j(x, y, z_0)dx + \sum_{j=k}^{\infty} Q_j(x, y, z_0)dy + \sum_{j=k}^{\infty} R_j(x, y, z_0)dz,$$

seu desenvolvimento de Taylor. Considerando que  $z = z_0$  implica  $dz = 0$ , temos que

$$\omega|_{z=z_0} = P(x, y, z_0)dx + Q(x, y, z_0)dy,$$

**Caso 1 (não-dicrítico):**  $xP_k(x, y, z_0) + yQ_k(x, y, z_0) \neq 0$ .

Na primeira carta do blow-up monoidal

$$x = u, y = uv, z = w = z_0.$$

Observamos que  $xP_k(x, y, z_0) + yQ_k(x, y, z_0) \neq 0$ , implica

$$P_j(1, v, z_0) + vQ_j(1, v, z_0) \neq 0.$$

Então, a 1-forma  $\pi^*(\omega)$  nessas coordenadas é

$$\begin{aligned}\pi^*(\omega) &= \sum_{j=k}^{\infty} \left[ P_j(u, uv, z_0)du + Q_j(u, uv, z_0)d(uv) \right] \\ &= \sum_{j=k}^{\infty} \left[ P_j(u, uv, z_0)du + Q_j(u, uv, z_0)(vdu + udv) \right] \\ &= \sum_{j=k}^{\infty} \left[ u^j [P_j(1, v, z_0) + vQ_j(1, v, z_0)] du + u^{j+1}Q_j(1, v, z_0)dv \right].\end{aligned}$$

Obtemos

$$(18) \quad \omega_1 = \frac{\pi^*(\omega)}{u^k} = [P_k(1, v, z_0) + vQ_k(1, v, z_0)] du + uQ_k(1, v, z_0)dv + u\alpha,$$

onde

$$\alpha = \sum_{j=k+1}^{\infty} u^{j-k-1} \left[ [P_j(1, v, z_0) + vQ_j(1, v, z_0)] du + uQ_j(1, v, z_0)dv \right]$$

Escrevemos  $\pi$  na segunda carta do blow-up monoidal

$$x = uv, y = v, z = w = z_0.$$

Nesse caso,  $xP_k(x, y, z_0) + yQ_k(x, y, z_0) \neq 0$  implica em

$$uP_j(u, 1, z_0) + Q_j(u, 1, z_0) \neq 0.$$

Então, nessa segunda carta,

$$\begin{aligned}\pi^*(\omega) &= \sum_{j=k}^{\infty} \left[ P_j(uv, v, z_0)d(uv) + Q_j(uv, v, z_0)dv \right] \\ &= \sum_{j=k}^{\infty} \left[ v^j [uP_j(u, 1, z_0) + Q_j(u, 1, z_0)] dv + v^{j+1}P_j(u, 1, z_0)du \right].\end{aligned}$$

Assim,

$$(19) \quad \omega_2 = \frac{\pi^*(\omega)}{v^k} = [uP_k(u, 1, z_0) + Q_k(u, 1, z_0)] dv + vP_k(u, 1, z_0)du + v\beta,$$

onde

$$\beta = \sum_{j=k+1}^{\infty} u^{j-k-1} \left[ [uP_j(u, 1, z_0) + Q_j(u, 1, z_0)] dv + vP_j(u, 1, z_0)du \right].$$

Usando momentaneamente subíndices, a variável  $u$  na carta 1 é denotada  $u_1$ , denotamos  $v_1$  ao  $v$  da carta 1, e denotamos também  $v_2$  ao  $v$  da carta 2. Assim, na interseção dos abertos das cartas 1 e 2, e temos que  $v_2 = v_1 \cdot u_1$ , e se cumpre

$$\omega_2 = \frac{\pi^*\omega}{(v_2)^k} = \left(\frac{1}{v_1}\right)^k \frac{\pi^*(\omega)}{(u_1)^k} = \left(\frac{1}{v_1}\right)^k \omega_1$$

As equações mostram que, restritos a  $z = z_0$ , as curvas solução dentro do plano  $z = z_0$  coincidem na interseção das vizinhanças coordenadas que cobrem  $\tilde{\mathbb{C}}^3|_{z=z_0}$ . Na carta

$(u, v, z_0)$ , as singularidades de  $\tilde{\mathcal{F}}|_{z=z_0}$  em  $D|_{z=z_0} : \{u = 0\}$  estão dadas por pontos da forma  $(1, v_0, z_0)$  que satisfazem a equação

$$P_k(1, v_0, z_0) + v_0 Q_k(1, v_0, z_0) = 0.$$

então  $\tilde{\mathcal{F}}|_{z=z_0}$  tem singularidades isoladas sobre divisor. Cada uma das singularidade isoladas de  $\tilde{\mathcal{F}}|_{z=z_0}$  está sobre  $D|_{z=z_0}$ , onde  $D = \pi^{-1}(O_z) = O_z \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ . Como o  $z_0$  é arbitrário, então por cada uma de aquelas singularidades passa uma curva contida no conjunto singular de  $\tilde{\mathcal{F}}$ . Nesse caso  $D$  é invariante.

**Caso 2 (dicrítico)**  $xP_k(x, y, z_0) + yQ_k(x, y, z_0) \equiv 0$ .

Usando

$$x = u, y = uv, z = z_0$$

em (18) temos

$$\frac{\pi^*(\omega)}{u^k} = uQ_k(1, v, z_0)dv + u\alpha,$$

onde

$$\alpha = \sum_{j=k+1}^{\infty} u^{j-k-1} \left[ [P_j(1, v, z_0) + vQ_j(1, v, z_0)] du + uQ_j(1, v, z_0)dv \right].$$

Então,

$$\omega_4 = \frac{\pi^*\omega}{u^{k+1}} = \sum_{j=k+1}^{\infty} u^{j-k-1} \left[ P_j(1, v, z_0) + vQ_j(1, v, z_0) \right] du + \sum_{j=k}^{\infty} uQ_j(1, v, z_0)dv.$$

Considerando a outra carta

$$x = uv, y = v, z = z_0.$$

De (19) obtemos

$$\frac{\pi^*\omega}{v^k} = vP_k(u, 1, z_0)dv + v\beta,$$

com

$$\beta = \sum_{j=k+1}^{\infty} v^{j-k-1} \left[ [uP_j(u, 1, z_0) + Q_j(u, 1, z_0)] dv + vP_j(u, 1, z_0)dv \right].$$

Logo,

$$\omega_5 = \frac{\pi^*\omega}{v^{k+1}} = \sum_{j=k+1}^{\infty} v^{j-k-1} \left[ uP_j(u, 1, z_0) + Q_j(u, 1, z_0) + vR_j(u, 1, z_0) \right] dv + \sum_{j=k}^{\infty} vP_j(u, 1, z_0)dv$$

Na interseção dos abertos das cartas 1 e 2, temos que  $v_2 = v_1 \cdot u_1$ , vale

$$\omega_5 = \frac{\pi^*(\omega)}{(v_2)^{k+1}} = \left( \frac{1}{v_1} \right)^{k+1} \frac{\pi^*\omega}{(u_1)^{k+1}} = \left( \frac{1}{v_1} \right)^{k+1} \omega_4$$

Por isso, no caso dicrítico as curvas solução também coincidem na interseção das vizinhanças coordenadas que cobrem  $\tilde{\mathbb{C}}^3|_{z=z_0}$ . Como  $z_0$  é arbitrário, todo  $D$  é dicrítico. Nesse caso, o divisor  $D$  é não-invariante.

## CAPÍTULO 3

**Invariante polar de uma folheação holomorfa em  $(\mathbb{C}^2, 0)$** 

No presente capítulo, baseados em [8] e [13], procuramos entender como o número de Milnor e a multiplicidade algébrica estão relacionados com invariantes polares de um germe de folheação holomorfa com singularidade isolada na origem de  $(\mathbb{C}^2, 0)$ . Apresentamos dois novos resultados que generalizam o Corolário 1 e a Proposição 2 de [8]. Além disso, no contexto de folheações holomorfas singulares, apresentamos também uma outra versão de uma conhecida formula para germes de curvas planas apresentada por Teissier em [25]. Graças ao principal resultado dessa seção, o Teorema 3.2.12, conseguimos estudar na Seção 4.6 a relação entre o número de Milnor e a existência de separatriz real em germes de campos analíticos reais com singularidade algebricamente isolada na origem. Embora o foco de nosso trabalho esteja no contexto real, nesse capítulo nossos resultados são independentes do tema central da tese. Devido a isso e para facilitar a leitura, começamos com uma seção preliminar, assim esse capítulo pode ser lido independentemente dos outros.

**3.1. Preliminares em  $(\mathbb{C}^2, 0)$** 

Um germe de folheação holomorfa singular  $\mathcal{F}$  em  $(\mathbb{C}^2, 0)$  é definido pela equação

$$\omega = 0,$$

onde

$$(20) \quad \omega = P(x, y)dy - Q(x, y)dx$$

é um germe de 1-forma holomorfa, onde  $P, Q \in \mathbb{C}\{x, y\}$  não têm fator comum. Também pode ser definido pelo campo vetorial

$$X = P(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$$

Fazendo o desenvolvimento de Taylor de uma função holomorfa  $f$ , escrevemos

$$f = \sum_{k=m}^{\infty} f_k = f_m + f_{m+1} + \dots,$$

onde  $f_m$  é o primeiro jato não identicamente nulo ( $f_m \neq 0$ ). Esse número  $m$  é chamado de *multiplicidade algébrica* da função  $f$  e, no caso em que  $f(0) = 0$ , é também chamado multiplicidade algébrica da curva definida por  $f = 0$  e denotado por  $\nu_0(f)$ .

A *multiplicidade algébrica* do germe de folheação holomorfa  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ , induzida por  $X_{\mathbb{R}}$ , é definida como

$$\nu_0(\mathcal{F}) = \min\{\nu_0(P), \nu_0(Q)\}.$$

O *número de Milnor* de  $\mathcal{F}$  é definido por

$$\mu_0(\mathcal{F}) = \dim \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(P, Q)},$$

onde  $(P, Q)$  é o ideal gerado por  $P, Q \in \mathbb{C}\{x, y\}$ .

Da seção 1.1.3, uma *curva formal*  $C$  em  $(\mathbb{C}^2, 0)$  é o objeto definido por uma equação  $f(x, y) = 0$ , onde  $f \in \mathbb{C}[[x, y]]$  é uma série formal, não trivial, não unidade e reduzida. Uma curva formal é *invariante por  $\mathcal{F}$*  se ela é a união de curvas irreduzíveis tangentes à folheação, ou seja, se existe uma função formal  $h$  que satisfaz

$$\omega \wedge df = (fh)dx \wedge dy,$$

ou equivalentemente

$$P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y} = fh,$$

para algum  $h \in \mathbb{C}[[x, y]]$ . Se uma decomposição de  $f$  como produto de fatores irreduzíveis é  $f = f_1 f_2 \cdots f_e$ , cada  $f_i = 0$  define um *ramo*  $C_i$  de  $C$ . Fixado um germe de folheação  $\mathcal{F}$  definido pela 1-forma  $\omega$ , denominamos *separatriz formal* ou simplesmente *separatriz* a um germe de curva formal, irreduzível e invariante por  $\mathcal{F}$  que passa pela origem de  $(\mathbb{C}^2, 0)$ . Se a separatriz pertence a  $\mathbb{C}\{x, y\}$  ela é chamada de *separatriz convergente* ou *separatriz analítica*. Caso contrário, diz-se que é *puramente formal*. A família de todas as separatrizes de  $\mathcal{F}$  na origem 0 é denotada por  $\text{Sep}_0(\mathcal{F})$ .

Segundo o estudado nas Seções 2.1 e 2.4, um *blow-up puntual* em  $(0, 0) \in (\mathbb{C}^2, 0)$  é o mapa analítico

$$\pi : (\tilde{\mathbb{C}}^2, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0),$$

onde  $D = \pi^{-1}(0) = \{0\} \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ .  $(\tilde{\mathbb{C}}^2, D)$  se identifica com  $(\mathbb{C}^2, 0)$  no seguinte sentido:  $\{(0, 0)\}$  é substituído por  $D$ , um espaço projetivo  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  mergulhado em  $\tilde{\mathbb{C}}^2$ , que parametriza as direções tangentes em  $0 \in \mathbb{C}^2$ . O blow-up  $\pi$  é definido nas coordenadas  $(x, v), (u, y) \in \mathbb{C}^2$  identificadas pelas relações  $y = vx$  com  $x \neq 0$  e  $x = uy$  com  $y \neq 0$ , de forma tal que  $(x, v) \mapsto (x, vx)$ ,  $(u, y) \mapsto (uy, y)$ . O blow-up restrito a  $\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus \{D\}$  é um difeomorfismo holomorfo entre  $\tilde{\mathbb{C}}^2 \setminus \{D\}$  e  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  que leva a folheação holomorfa  $\mathcal{F}$  à folheação  $\pi^*\mathcal{F}$  em  $(\tilde{\mathbb{C}}^2, D)$ , denominada *transformada estrita* de  $\mathcal{F}$ , a qual é induzida por  $\pi^*\omega = 0$  e que corresponde difeomorficamente a  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$  sobre os pontos onde  $\pi_{\mathbb{K}}$  é um difeomorfismo. Se  $D$  é uma curva invariante por  $\pi^*\mathcal{F}$ , dizemos que tanto o blow-up  $\pi$  como  $D$  são *não-dicríticos*, caso contrário são *dicríticos*. No caso dicrítico, infinitas curvas analíticas invariantes cortam  $D$ . Elas são projetadas em infinitas separatrizes de  $\mathcal{F}$ .

Dizemos que um germe de folheação holomorfa com singularidade isolada na origem de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  tem uma *singularidade simples* ou *reduzida* em  $0 \in \mathbb{C}^2$  se os autovalores da parte linear do campo,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ , satisfazem uma das seguintes condições:

- (1)  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$  com  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}^+$  (*singularidade simples não-degenerada*),
- (2)  $\lambda_1 \neq 0$  e  $\lambda_2 = 0$  (*singularidade simples sela-nó*).

Uma singularidade simples tem exatamente duas separatrizes transversais [16]. No caso não-degenerado, ambas são convergentes. No caso sela-nó, aquela associada ao autovetor do autovalor não-nulo é convergente e é chamada de *separatriz forte*. A outra separatriz é formal e é chamada de *separatriz fraca*. Quando a separatriz fraca de uma sela-nó está contida em uma componente do divisor a singularidade é chamada *sela-nó tangente*. Para uma singularidade sela-nó, existem coordenadas formais, em que ela é escrita

$$\omega = y(1 + \mu x^k)dx + x^{k+1}dy,$$

onde  $\mu \in \mathbb{C}$  e  $k \in \mathbb{Z}_+$  são invariantes formais, a separatriz forte corresponde a  $\{x = 0\}$ , a separatriz fraca corresponde a  $\{y = 0\}$  e o inteiro  $i_0^w(\mathcal{F}) = k + 1 > 1$  é chamado *índice fraco* da sela-nó [18].

Em [23], Seidenberg provou que qualquer germe de folheação holomorfa com singularidade isolada na origem de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  admite um *processo de redução de singularidades complexa*, ou seja, após aplicar uma sequência finita de blow-ups pontuais complexos

$$\sigma = \pi^1 \circ \dots \circ \pi^{n-1} \circ \pi^n : (\widetilde{M}, \mathcal{D}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0),$$

que foram explicados na Seção 2.6, podemos obter uma nova folheação  $\widetilde{\mathcal{F}}$  que tem uma quantidade finita de singularidades, todas elas simples e sobre o divisor  $\mathcal{D} = \sigma^{-1}(0)$ , uma união finita de retas projetivas, chamadas componentes e denotadas por  $D$ , com cruzamentos normais. Um ponto que pertence a  $\mathcal{D}$  e está na interseção de duas componentes irredutíveis é chamado de *esquina*. Caso contrário, é chamado de *ponto traço*. A *valência* de  $D$ , denotada por  $\text{Val}(D)$ , é o número de outras componentes de  $\mathcal{D}$  intersectando  $D$ . Por exemplo, se uma componente  $D$  é intersectada por outras 3 componentes, então  $\text{Val}(D) = 3$ . Uma componente irredutível de  $\mathcal{D}$  que é não-invariante por  $\widetilde{\mathcal{F}}$  é classificada como *dicrítica*, caso contrário, é classificada como *não-dicrítica*. Dizemos que  $B \in \text{Sep}_0(\mathcal{F})$  é uma *separatriz dicrítica*, se  $\widetilde{B} = \sigma^*B$  toca o divisor  $\mathcal{D}$  em uma componente dicrítica. Caso contrário, dizemos que  $B$  é uma *separatriz isolada*. O conjunto de separatrizes dicríticas de  $\mathcal{F}$  é denotado por  $\text{Dic}_0(\mathcal{F})$ . O conjunto de separatrizes isoladas de  $\mathcal{F}$  é denotado por  $\text{Iso}_0(\mathcal{F})$ . As transformadas estritas das separatrizes de  $\mathcal{F}$  são suaves (têm multiplicidade algébrica 1), disjuntas e transversais a  $\mathcal{D}$ . Cada singularidade isolada de  $\widetilde{\mathcal{F}}$  é reduzida e está fora das esquinas de  $\mathcal{D}$ . Por cada uma delas passa uma separatriz não contida no divisor. Além disso, a folheação  $\widetilde{\mathcal{F}}$  é sempre transversal às componentes dicríticas. Ou seja, um processo de redução de singularidades de  $\mathcal{F}$  também dessingulariza as separatrizes de  $\mathcal{F}$ . De [21], existe um processo minimal, no sentido que minimiza a quantidade de blow-ups necessários para obter singularidades simples e dessingularizar as separatrizes (todas elas disjuntas, transversais ao divisor fora das esquinas, tal que duas componentes dicríticas não se interceptam). Nesse sentido, sempre que mencionamos processo de redução de singularidades, nos referimos a um processo minimal. O germe da folheação  $\mathcal{F}$  é definida pela 1-forma  $\omega$  e o germe da folheação  $\widetilde{\mathcal{F}}$  é definido por  $\sigma^*\omega$  (observe que  $\sigma^*\omega$  se anula sobre o divisor; localmente, da Seção 2.4,  $\widetilde{\mathcal{F}}$  é definida por uma 1-forma com singularidades isoladas obtida pela divisão de  $\sigma^*\omega$  por uma potência da equação local do divisor).

**Definição 3.1.1.** O *índice de excesso de tangência* de  $\mathcal{F}$  em  $0 \in \mathbb{C}^2$  como o número inteiro não negativo

$$(21) \quad \tau_0(\mathcal{F}) = \sum_{q \in \text{SN}(\widetilde{\mathcal{F}})} \rho(D_q)(i_q^w(\widetilde{\mathcal{F}}) - 1),$$

onde  $\text{SN}(\widetilde{\mathcal{F}})$  é o conjunto de singularidades do tipo sela-nó tangente no divisor excepcional  $\mathcal{D}$ ,  $D_q$  é a componente contendo a separatriz fraca e  $\rho(D_q)$  é o peso da componente  $D_q$ . Este é definido como a multiplicidade algébrica de uma curva  $\gamma$  tal que sua transformada estrita  $\sigma^*\gamma$  é transversal a  $D_q$  fora das esquinas.

Sempre  $\tau_0(\mathcal{F}) \geq 0$ , e  $\tau_0(\mathcal{F}) = 0$  se e somente se  $\text{SN}(\widetilde{\mathcal{F}}) = \emptyset$  (não há selas-nós tangentes na redução de singularidades de  $\mathcal{F}$ ). Em geral, um *divisor de separatrizes* de



uma folheação  $\mathcal{F}$  é uma soma formal

$$\mathcal{B} = \sum_{B \in \text{Sep}_0(\mathcal{F})} a_B \cdot B,$$

onde os coeficientes  $a_B \in \mathbb{Z}$  são zero, exceto para um número finito de separatrizes  $B \in \text{Sep}_0(\mathcal{F})$ . O *suporte do divisor*  $\mathcal{B}$  é o conjunto formado por todas as separatrizes  $B \in \mathcal{F}$  tal que  $a_B \neq 0$ . A definição seguinte foi proposta por Genzmer em [12] (veja também [11]).

**Definição 3.1.2.** O *divisor equilibrado de separatrizes*  $\mathcal{B}$  de um germe de folheação holomorfa singular em  $(\mathbb{C}^2, 0)$  é uma soma formal

$$(22) \quad \mathcal{B} = \sum_{B \in \text{Sep}_0(\mathcal{F})} a_B \cdot B$$

onde os  $a_B \in \{-1, 0, 1\}$ , valem 1 para cada separatriz isolada, são não-nulos para um número finito de separatrizes dicríticas,  $B \in \text{Dic}_0(\mathcal{F})$  e, para cada componente dicrítica, satisfazem

$$\sum_{B \in \text{Sep}_0(D)} a_B = 2 - \text{Val}(D),$$

onde  $\text{Val}(D)$  é a *valência* da componente  $D$  e  $\text{Sep}_0(D)$  é o conjunto de separatrizes cujo transformado estrito por  $\sigma$  toca a componente  $D$ .

A *multiplicidade algébrica de um divisor* de separatrizes  $\mathcal{B}$  é

$$(23) \quad \nu_0(\mathcal{B}) = \sum_{B \in \text{Sep}_0(\mathcal{F})} a_B \nu_0(B).$$

Observe que o resultado dessa soma formal é um número inteiro pois a quantidade de coeficientes  $a_B$  é finita. Cada componente dicrítica tem infinitas curvas invariantes que têm a mesma multiplicidade algébrica. Portanto, se  $B_1, B_2$  são duas separatrizes diferentes cujos levantamentos interceptam a mesma componente dicrítica, então  $a_{B_1} \nu_0(B_1) = a_{B_2} \nu_0(B_2)$ . Assim,  $\nu_0(\mathcal{B})$  é a mesma para qualquer divisor equilibrado de  $\mathcal{F}$ . O seguinte resultado é provado em [13, Prop.3.3]. Ele relaciona as multiplicidades algébricas da folheação e do divisor equilibrado com o excesso de tangência da folheação.

**Proposição 3.1.3.** *Sejam  $\mathcal{F}$ , um germe de folheação holomorfa singular em  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , e  $\mathcal{B}$  um divisor equilibrado de separatrizes de  $\mathcal{F}$ . Então*

$$\nu_0(\mathcal{F}) = \nu_0(\mathcal{B}) - 1 + \tau_0(\mathcal{F}).$$

### 3.2. Invariantes polares

O seguinte teorema clássico permite parametrizar um germe de curva analítica em  $(\mathbb{C}^2, 0)$  por um mapa analítico definido em  $(\mathbb{C}, 0)$ .

**Teorema 3.2.1** (Parametrização de Puiseux). [5] *Seja  $C$ , o germe de curva analítica irreduzível em  $(\mathbb{C}^2, 0)$  que passa pela origem e distinta dos eixos coordenados, com equação reduzida  $f(x, y) = 0$ , onde  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ . Então, existe germe de aplicação holomorfa*

$$\begin{aligned} \gamma : (\mathbb{C}, 0) &\rightarrow (\mathbb{C}^2, 0) \\ t &\mapsto \left( t^m, \sum_{i \geq n} a_i t^i \right), \text{ com } n \geq m \end{aligned}$$

tal que  $f(\gamma(t)) = 0$  e  $\gamma$  é uma bijeção entre  $(\mathbb{C}, 0)$  e  $\{f(x, y) = 0\}$ .

Ou seja, uma *parametrização de Puiseux* de um germe de curva irredutível com equação reduzida  $f = 0$ , multiplicidade  $\nu_0(f) = m$  e que satisfaz  $f(0, 0) = 0$  pode ser obtida no formato  $x = t^m$ ,  $y = \phi(t) = \sum_{i \geq n} a_i t^i$ , com  $\text{ord}_t(\phi(t)) \geq m$ ,  $a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Sejam  $C_1$  e  $C_2$  dois germes de curvas analíticas (respectivamente formais) na origem definidas por  $f = 0$  e  $g = 0$ , onde  $f, g \in \mathbb{C}\{x, y\}$  (respectivamente  $\mathbb{C}[[x, y]]$ ), a *multiplicidade de interseção* na origem de dois germes de  $C_1$  e  $C_2$  é definida por

$$(f, g)_0 = \dim_{\mathbb{C}} \left( \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(f, g)} \right) \left( \text{respectivamente } \dim_{\mathbb{C}} \left( \frac{\mathbb{C}[[x, y]]}{(f, g)} \right) \right) \in \mathbb{N} \cup \infty,$$

onde  $(f, g)$  é o ideal gerado por  $f$  e  $g$ . As propriedades de  $(\cdot, \cdot)_0$  que vamos usar são (as provas delas e mais propriedades podem ser vistas em [15]):

- (i)  $(f, g)_0 < \infty$  se, e somente se,  $f$  e  $g$  não tem fatores em comum,
- (ii)  $(f, g)_0 = (g, f)_0$ ,
- (iii)  $(f, gh)_0 = (f, g)_0 + (f, h)_0$ ,
- (iv)  $(f, g)_0 = 0$  se, e somente se,  $f$  e  $g$  não se interceptam na origem,
- (v)  $(f, g)_0$  é invariante por mudança de coordenadas,
- (vi)  $(f + hg, g)_0 = (f, g)_0$

Seja  $\mathcal{F}$  um germe de folheação holomorfa com singularidade isolada na origem de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  e definido pela equação  $\omega = 0$ , tal que

$$(24) \quad \omega = P(x, y)dy - Q(x, y)dx$$

é um germe de 1-forma holomorfa, onde  $P, Q \in \mathbb{C}\{x, y\}$  não têm fator comum. Uma *curva polar* de  $\mathcal{F}$  com respeito a  $(a : b) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ , denotada  $\mathcal{P}_{(a:b)}^{\mathcal{F}}$ , é a curva definida pela equação

$$aP - bQ = 0.$$

No contexto das formas diferenciáveis, é dada por  $\omega \wedge (-b dy + a dx) = 0$ . Observe que, geometricamente, a curva  $\mathcal{P}_{(a:b)}^{\mathcal{F}}$  é o conjunto dos pontos onde a reta tangente à folheação tem inclinação  $\frac{a}{b}$ , com  $b \neq 0$ . Exceto no caso radial, a curva polar  $\mathcal{P}_{(a:b)}^{\mathcal{F}}$  não tem ramos invariantes. Além disso, como  $P$  e  $Q$  não tem fatores comuns, temos que  $\nu_0(\mathcal{F}) = \min\{\nu_0(P), \nu_0(Q)\} = \nu_0(aP - bQ)$ , então para  $(a : b) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  genérico:

$$\nu_0(\mathcal{P}_{(a:b)}^{\mathcal{F}}) = \nu_0(\mathcal{F}),$$

Para qualquer separatriz fixa  $B$ , o tipo de equisingularidade de  $\mathcal{P}_{(a:b)}^{\mathcal{F}} \cup B$  é independente de  $(a : b)$ , para  $(a : b) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  genérico. Assim, se  $\Gamma \in (\mathbb{C}^2, 0)$  é uma curva reduzida formal não invariante tal que  $\Gamma \cup B$  é equisingular a  $\mathcal{P}_{(a:b)}^{\mathcal{F}} \cup B$ , elas possuem o mesmo número de ramos e vale

$$(\Gamma, B)_0 = (\mathcal{P}_{(a:b)}^{\mathcal{F}}, B)_0,$$

onde  $(\cdot, \cdot)_0$  é a multiplicidade de interseção. Isto permite fazer a seguinte definição

**Definição 3.2.2.** Dada a separatriz  $B$ , o *número de interseção polar de  $\mathcal{F}$  com respeito a  $B$*  é o número inteiro:

$$p_0(\mathcal{F}, B) = (\mathcal{P}_{(a:b)}^{\mathcal{F}}, B)_0,$$

onde  $(a : b) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  genérico.

Para calcular  $p_0(\mathcal{F}, B)$ , parametrizamos  $B$  com uma parametrização de Puiseux  $\gamma_B(t)$ ,

$$p_0(\mathcal{F}, B) = \text{ord}_{t=0}((aP - bQ) \circ \gamma_B(t)),$$

onde  $(a : b) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  genérico. Como o número de interseção polar é um número de interseção, é natural definirmos, para  $B_1, B_2 \in \mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ , o número de interseção polar

$$p_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}, B_1 \cup B_2) = p_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}, B_1) + p_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}, B_2).$$

Temos a seguinte definição

**Definição 3.2.3.** Dado um divisor de separatrizes  $\mathcal{B}$ , o número de interseção polar de  $\mathcal{F}$  com respeito a  $\mathcal{B}$  é

$$(25) \quad p_0(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = \sum_{B \in \text{Sep}_0(\mathcal{F})} a_B \cdot (\mathcal{P}_{(a:b)}, B)_0 = \sum_{B \in \text{Sep}_0(\mathcal{F})} a_B \cdot p_0(\mathcal{F}, B).$$

De um modo geral, se  $\mathcal{B}$  é um divisor equilibrado e  $\zeta$  um ramo não invariante de  $\mathcal{F}$ ,

$$(26) \quad (\mathcal{B}, \zeta)_0 = \sum_{B \in \text{Sep}_0(\mathcal{F})} a_B \cdot (B, \zeta)_0.$$

Para calcular  $(\mathcal{B}, \zeta)_0$  damos a cada  $\zeta$  uma parametrização de Puiseux  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , e considerando a separatriz  $B$  definida por  $f(x, y) = 0$ . Então,  $(B, \zeta)_0 = \text{ord}_t(f \circ \gamma(t))$ .

**Definição 3.2.4.** Se  $\zeta$  é um ramo formal não invariante por  $\mathcal{F}$  com parametrização de Puiseux  $\gamma(t)$ , a ordem de tangência de  $\mathcal{F}$  com respeito a  $\zeta$  em  $0 \in \mathbb{C}^2$  é o inteiro

$$\mathcal{T}_0(\mathcal{F}, \zeta) = \text{ord}_{t=0}(\gamma^* \omega).$$

A seguir, estudamos o que acontece com  $\mathcal{T}_0(\mathcal{F}, \zeta)$ , a ordem de tangência de  $\mathcal{F}$  com respeito a  $\zeta$ , depois de aplicar um blow-up  $\pi : (\tilde{\mathbb{C}}^2, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ . O blow-up  $\pi$  pode ser não-dicrítico ou dicrítico. Denotamos  $\tilde{\mathcal{F}}$  e  $\tilde{\zeta}$  os transformados estritos da folheação  $\mathcal{F}$  e do ramo formal não invariante  $\zeta$  respectivamente, e consideramos o ponto  $q \in \tilde{\zeta} \cap D$ . Obtemos o seguinte:

**Proposição 3.2.5.** Seja  $\zeta$  um ramo formal não invariante por  $\mathcal{F}$ . Então

$$\mathcal{T}_0(\mathcal{F}, \zeta) = m \nu_0(\zeta) + \mathcal{T}_q(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\zeta}),$$

onde  $m = \nu_0(\mathcal{F})$  no caso não-dicrítico,  $m = \nu_0(\mathcal{F}) + 1$  no caso dicrítico.

**DEMONSTRAÇÃO.** Se  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  é uma parametrização Puiseux de  $\zeta$  na qual o eixo  $x$  é tangente a  $\zeta$  (fazemos uma mudança linear de coordenadas, se necessário), obtemos uma parametrização  $\tilde{\gamma}(t)$  de  $\tilde{\zeta}$ , tal que  $\gamma(t) = \pi \circ \tilde{\gamma}(t)$ . Se  $\omega = P(x, y)dy - Q(x, y)dx$ , onde  $P(x, y) = \sum_{j=\nu} P_j(x, y)$ ,  $Q(x, y) = \sum_{j=\nu} Q_j(x, y)$ ,  $\nu = \nu_0(\omega) = \nu_0(\mathcal{F})$ , e  $P_j, Q_j$  são polinômios homogêneos de grau  $j$ :

$$\begin{aligned} \pi^* \omega &= P(x, vx)dx - Q(x, vx)(vdx + xdv) \\ &= (P(x, vx) - vQ(x, vx))dx - xQ(x, vx)dv. \end{aligned}$$

No caso não-dicrítico  $P_\nu(x, vx) - vQ_\nu(x, vx) \neq 0$ , então

$$\begin{aligned} \pi^* \omega &= x^\nu \left\{ \left( \frac{P(x, vx)}{x^\nu} - v \frac{Q(x, vx)}{x^\nu} \right) dx - x \frac{Q(x, vx)}{x^\nu} dv \right\} \\ &= x^\nu \tilde{\omega}. \end{aligned}$$

Onde  $\tilde{\omega}$  define  $\tilde{\mathcal{F}}$ . Como  $(\tilde{\gamma})^*\pi^*\omega = (x(t))^\nu(\tilde{\gamma})^*\tilde{\omega}$ , temos

$$\text{ord}\{(\tilde{\gamma})^*\pi^*\omega\} = \text{ord}\{(x(t))^\nu\} + \text{ord}\{(\tilde{\gamma})^*\tilde{\omega}\} = \nu_0(\mathcal{F})\text{ord}\{x(t)\} + \mathcal{T}_q(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\zeta})$$

Como  $\mathcal{T}_0(\mathcal{F}, \zeta) = \text{ord}\{(\tilde{\gamma})^*\pi^*\omega\}$  e  $\text{ord}\{x(t)\} = \nu_0(\zeta)$  obtemos

$$(27) \quad \mathcal{T}_0(\mathcal{F}, \zeta) = \nu_0(\mathcal{F})\nu_0(\zeta) + \mathcal{T}_q(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\zeta})$$

No caso dicrítico,  $P_\nu(x, vx) - vQ_\nu(x, vx) = 0$ , e por um processo semelhante, obtemos

$$(28) \quad \mathcal{T}_0(\mathcal{F}, \zeta) = (\nu_0(\mathcal{F}) + 1)\nu_0(\zeta) + \mathcal{T}_q(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\zeta})$$

Então, consolidando (27) e (28) em um único resultado, obtemos

$$\mathcal{T}_0(\mathcal{F}, \zeta) = m \nu_0(\zeta) + \mathcal{T}_q(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\zeta}).$$

□

A seguir, estudamos o que acontece com a multiplicidade de interseção  $(\mathcal{B}, \zeta)_0$  após aplicar o blow-up  $\pi : (\tilde{\mathbb{C}}^2, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ . Denotamos  $\tilde{B} = \pi^*B$  a transformada estrita de  $B \in \text{Sep}_0(\mathcal{F})$ , o divisor é  $D = \pi^{-1}(0)$ ,  $\zeta$  é um ramo formal não invariante, enquanto  $\tilde{\mathcal{F}}$ ,  $\tilde{\mathcal{B}}$  e  $\tilde{\zeta}$  são as transformadas estritas de  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{B}$  e  $\zeta$  respectivamente, e o ponto  $q \in \tilde{\zeta} \cap D$ . Nesse contexto, definimos  $\tilde{\mathcal{B}}$ , o *transformado estrito de um divisor* de separatrizes  $\mathcal{B}$ , como

$$(29) \quad \tilde{\mathcal{B}} = \pi^*\mathcal{B} = \sum_{B \in \text{Sep}_0(\mathcal{F})} a_B \cdot \pi^*(B) = \sum_{B \in \text{Sep}_0(\mathcal{F})} a_B \cdot \tilde{B}.$$

Após o blow-up, as transformadas estritas das separatrizes de  $\mathcal{B}$  intersectam  $D$  em distintos pontos. A *localização* em  $q \in D$  do transformado estrito de um divisor é

$$(30) \quad \tilde{\mathcal{B}}_q = (\pi^*\mathcal{B})_q$$

Isto é, a localização  $\tilde{\mathcal{B}}_q$  só considera as transformadas estritas das separatrizes do divisor  $\mathcal{B}$  que passam por  $q$ . Das equações (26), (29) e (30) obtemos

**Proposição 3.2.6.**

$$(\tilde{\mathcal{B}}_q, \tilde{\zeta})_q = \sum_{B \in \text{Sep}_0(\mathcal{F})} a_B \cdot (\tilde{B}, \tilde{\zeta})_q.$$

O seguinte lema permite relacionar invariantes de germes de curvas analíticas antes do blow-up com invariantes de suas transformadas estritas.

**Lema 3.2.7.** (*Fórmula de Noether [9]*). *Se  $\xi_1$  e  $\xi_2$  são germes de curvas analíticas definidas em  $(\mathbb{C}^2, 0)$  e  $\pi : (\tilde{\mathbb{C}}^2, D) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$  é um blow-up, então*

$$(\xi_1, \xi_2)_0 = \nu_0(\xi_1)\nu_0(\xi_2) + \sum_{q \in \pi^{-1}(0)} (\tilde{\xi}_1, \tilde{\xi}_2)_q.$$

A seguir, temos:

**Proposição 3.2.8.** *Seja  $\zeta$  um ramo formal não invariante por  $\mathcal{F}$ , cujo transformado estrito pelo blow-up  $\pi$  é  $\tilde{\zeta}$ . Seja  $\tilde{\mathcal{B}}_q$  a localização em  $q \in \tilde{\zeta} \cap D$  do transformado estrito do divisor equilibrado  $\mathcal{B}$ . Então*

$$(\mathcal{B}, \zeta)_0 = (m - \tau_0(\mathcal{F}))\nu_0(\zeta) + (\mathcal{B}_q, \tilde{\zeta})_q,$$

onde  $m = \nu_0(\mathcal{F})$  no caso não-dicrítico,  $m = \nu_0(\mathcal{F}) + 1$  no caso dicrítico.

DEMONSTRAÇÃO. Se o blow-up  $\pi$  é não-dicrítico então a componente  $D$  é uma separatriz passando por  $q$  e o divisor equilibrado da folheação local no ponto  $q$  é  $\mathcal{B}_q = \tilde{\mathcal{B}}_q + D$ . Se  $\pi$  é dicrítico, então  $D$  não é separatriz e  $\mathcal{B}_q = \tilde{\mathcal{B}}_q$ . Então, o divisor equilibrado no ponto  $q$  é

$$(31) \quad \mathcal{B}_q = \tilde{\mathcal{B}}_q + \ell D_q$$

onde  $\ell$  é 1 se  $\pi$  é não-dicrítico ou é 0 se  $\pi$  é dicrítico. Pelo Lema 3.2.7 temos que, para  $B \in \text{Sep}_0(\mathcal{F})$ ,

$$(B, \zeta)_0 = \nu_0(B)\nu_0(\zeta) + (\tilde{B}, \tilde{\zeta})_q.$$

Da equação (26)

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}, \zeta)_0 &= \sum_{B \in \text{Sep}_0(\mathcal{F})} a_B \cdot \left( \nu_0(B)\nu_0(\zeta) + (\tilde{B}, \tilde{\zeta})_q \right) \\ &= \left( \sum_{B \in \text{Sep}_0(\mathcal{F})} a_B \cdot \nu_0(B) \right) \nu_0(\zeta) + \sum_{B \in \text{Sep}_0(\mathcal{F})} a_B \cdot (\tilde{B}, \tilde{\zeta})_q. \end{aligned}$$

Da equação (23) e da Proposição 3.2.6

$$(\mathcal{B}, \zeta)_0 = \nu_0(\mathcal{B})\nu_0(\zeta) + (\tilde{\mathcal{B}}_q, \tilde{\zeta})_q.$$

Da Proposição 4.5.6, temos  $\nu_0(\mathcal{B}) = \nu_0(\mathcal{F}) + 1 - \tau_0(\mathcal{F})$ , então

$$(32) \quad (\mathcal{B}, \zeta)_0 = (\nu_0(\mathcal{F}) + 1 - \tau_0(\mathcal{F}))\nu_0(\zeta) + (\tilde{\mathcal{B}}_q, \tilde{\zeta})_q.$$

Paralelamente, de (31),

$$(\mathcal{B}_q, \tilde{\zeta})_q = (\tilde{\mathcal{B}}_q + \ell D_q, \tilde{\zeta})_q = (\tilde{\mathcal{B}}_q, \tilde{\zeta})_q + \ell(D_q, \tilde{\zeta})_q = (\tilde{\mathcal{B}}_q, \tilde{\zeta})_q + \ell \nu_0(\zeta).$$

De onde,

$$(\tilde{\mathcal{B}}_q, \tilde{\zeta})_q = (\mathcal{B}_q, \tilde{\zeta})_q - \ell \nu_0(\zeta).$$

E substituindo em (32), obtemos

$$(\mathcal{B}, \zeta)_0 = (\nu_0(\mathcal{F}) + 1 - \ell - \tau_0(\mathcal{F}))\nu_0(\zeta) + (\mathcal{B}_q, \tilde{\zeta})_q.$$

Se  $\pi$  é não-dicrítico  $\nu_0(\mathcal{F}) + 1 - \ell = \nu_0(\mathcal{F})$ , e se  $\pi$  é dicrítico,  $\nu_0(\mathcal{F}) + 1 - \ell = \nu_0(\mathcal{F}) + 1$ . Usando o invariante  $m$  da Proposição 3.2.5, obtemos

$$(\mathcal{B}, \zeta)_0 = (m - \tau_0(\mathcal{F}))\nu_0(\zeta) + (\mathcal{B}_q, \tilde{\zeta})_q,$$

□

Após o blow-up  $\pi$ , partindo de  $q \in \tilde{\zeta} \cap D$ , pode-se aplicar uma quantidade infinita de blow-ups, passando pelos pontos  $q_j$  que estão na interseção dos transformados estritos dos ramos não invariantes com os respectivos divisores que aparecem após cada blow-up, gerando uma sequência infinita de pontos  $q_0 = 0, q_1 = q, q_2, q_3, \dots, q_n, \dots$

Ditos pontos formam o conjunto de pontos infinitamente próximos da curva  $\zeta$ , denotado por  $\mathcal{I}(\zeta)$ . Estamos interessados em um subconjunto finito de  $\mathcal{I}(\zeta)$ , cujos  $n + 1$  elementos  $q_0 = 0, q_1 = q, q_2, q_3, \dots, q_n$  são tais que, em  $q_n$ , as transformadas estritas  $\tilde{\zeta}_{q_n}$  e  $\tilde{\mathcal{F}}_{q_n}$  são regulares e transversais, Tal  $n$  existe, pois a curva  $\zeta$  não é invariante por  $\mathcal{F}$ .

**Definição 3.2.9.** Se  $\zeta$  é um ramo formal não invariante por  $\mathcal{F}$ , o *índice do excesso de tangência de  $\mathcal{F}$  ao longo de  $\zeta$*  é

$$(33) \quad \tau_0(\mathcal{F}, \zeta) = \sum_{q \in \mathcal{I}(\zeta)} \tau_q(\tilde{\mathcal{F}}) \nu_q(\tilde{\zeta}),$$

onde  $\tilde{\mathcal{F}}$  e  $\tilde{\zeta}$  são as transformadas estritas de  $\mathcal{F}$  e  $\zeta$ , em cada  $q \in \mathcal{I}(\zeta)$ .

Como o ramo  $\zeta$  é não invariante, essa soma tem um número finito de termos não nulos. A seguir, provaremos o seguinte

**Lema 3.2.10.** *Se  $\mathcal{F}$  é um germe de folheação holomorfa em  $(\mathbb{C}^2, 0)$ ,  $\mathcal{B}$  o divisor equilibrado de separatrizes de  $\mathcal{F}$  e  $\zeta$  um ramo formal não invariante. Então*

$$(\mathcal{B}, \zeta)_0 = \mathcal{T}_0(\mathcal{F}, \zeta) + 1 - \tau_0(\mathcal{F}, \zeta).$$

DEMONSTRAÇÃO. Das proposições 3.2.5 e 3.2.8

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_0(\mathcal{F}, \zeta) - \mathcal{T}_q(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\zeta}) &= m \nu_0(\zeta) \\ (\mathcal{B}, \zeta)_0 - (\mathcal{B}_q, \tilde{\zeta})_q &= (m - \tau_0(\mathcal{F})) \nu_0(\zeta). \end{aligned}$$

Calculamos a diferença entre elas, e vemos que, depois de aplicar o blow-up  $\pi$ ,

$$(34) \quad \left( \mathcal{T}_0(\mathcal{F}, \zeta) - \mathcal{T}_q(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\zeta}) \right) - \left( (\mathcal{B}, \zeta)_0 - (\mathcal{B}_q, \tilde{\zeta})_q \right) = \tau_0(\mathcal{F}) \nu_0(\zeta).$$

Após aplicar os  $n$  primeiros blow-ups, conforme foi explicado anteriormente, como para cada blow-up obtemos uma equação correspondente a (34), somamos todas elas e obtemos uma soma telescópica

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left( \mathcal{T}_{q_j}(\mathcal{F}, \zeta) - \mathcal{T}_{q_{j+1}}(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\zeta}) \right) - \left( (\mathcal{B}, \zeta)_{q_j} - (\mathcal{B}_{q_{j+1}}, \tilde{\zeta})_{q_{j+1}} \right) = \sum_{j=0}^{n-1} \tau_{q_j}(\tilde{\mathcal{F}}) \nu_{q_j}(\tilde{\zeta}).$$

onde  $\tilde{\mathcal{F}}$ ,  $\tilde{\mathcal{B}}$  e  $\tilde{\Gamma}_i$  são as transformadas estritas de  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{B}$  e  $\zeta$ , em cada  $q \in \mathcal{I}(\zeta)$ . Obtemos então

$$\left( \mathcal{T}_0(\mathcal{F}, \zeta) - \mathcal{T}_{q_n}(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\zeta}) \right) - \left( (\mathcal{B}, \zeta)_0 - (\mathcal{B}_{q_n}, \tilde{\zeta})_{q_n} \right) = \sum_{j=0}^{n-1} \tau_{q_j}(\tilde{\mathcal{F}}) \nu_{q_j}(\tilde{\zeta}).$$

Sempre é possível obter um  $n$ -ésimo blow-up, tal que em  $q_n$ , as transformadas estritas de  $\zeta$  e  $\mathcal{F}$  sejam regulares e transversais. Então, podemos colocar um sistema de coordenadas em  $q_n$  tal que a folheação local esteja definida por  $\omega = dx$  e que o eixo  $x$  seja  $\tilde{\zeta}$ . Então, como  $B_{q_n} = \{x = 0\}$  é a única separatriz da folheação local em  $q_n$ , o divisor equilibrado de separatrizes  $\mathcal{B}_{q_n} = B_{q_n} = \{x = 0\}$  e portanto  $\mathcal{T}_{q_n}(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\zeta}) = 0$ . Como  $\mathcal{B}_{q_n}$  e  $\tilde{\zeta}$  são lisas e transversais  $(\mathcal{B}_{q_n}, \tilde{\zeta})_{q_n} = (B_{q_n}, \tilde{\zeta})_{q_n} = 1$ , e, como a folheação é regular,  $\tau_{q_n}(\tilde{\mathcal{F}}) = 0$ . Obtemos

$$\mathcal{T}_0(\mathcal{F}, \zeta) - (\mathcal{B}, \zeta)_0 + 1 = \sum_{q \in \mathcal{I}(\zeta)} \tau_q(\tilde{\mathcal{F}}) \nu_q(\tilde{\zeta})$$

E com a definição 3.2.9, obtemos

$$(\mathcal{B}, \zeta)_0 = \mathcal{T}_0(\mathcal{F}, \zeta) + 1 - \tau_0(\mathcal{F}, \zeta).$$

□

**Definição 3.2.11.** Se  $\Gamma$  é uma curva reduzida tal que nenhuma de suas componentes irredutíveis  $\zeta_i$  é invariante por  $\mathcal{F}$ , e  $\Gamma = \cup_{i=1}^k \zeta_i$  é a sua decomposição em componentes irredutíveis, definimos o *índice do excesso de tangência de  $\mathcal{F}$  ao longo de  $\Gamma$*  como

$$(35) \quad \tau_0(\mathcal{F}, \Gamma) = \sum_{i=1}^k \tau_0(\mathcal{F}, \zeta_i).$$

A seguir provaremos o resultado principal dessa seção, o qual generaliza a fórmula de Teissier para germes de curvas planas.

**Teorema 3.2.12.** *Sejam  $\mathcal{F}$  um germe de folheação holomorfa em  $(\mathbb{C}^2, 0)$  e  $\mathcal{B}$  um divisor equilibrado de separatrizes para  $\mathcal{F}$ . Então, para toda curva polar genérica  $\Gamma$ , o número de interseção polar satisfaz*

$$(36) \quad p_0(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = (\Gamma, \mathcal{B})_0 = \mu_0(\mathcal{F}) + \nu_0(\mathcal{F}) - \tau_0(\mathcal{F}, \Gamma).$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja  $\Gamma = \mathcal{P}_{(a:b)}^{\mathcal{F}}$  uma curva polar genérica, onde  $(a : b) \in \mathbb{P}^1$ . Podemos supor que  $a = 1$ . Seja  $\Gamma = \cup_{i=1}^k \zeta_i$  a decomposição de  $\Gamma$  em componentes irredutíveis. Como

$$p_0(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = (\Gamma, \mathcal{B})_0 = \sum_{i=1}^k (\zeta_i, \mathcal{B})_0,$$

e pelo Lema 3.2.10,  $(\zeta_i, \mathcal{B})_0 = \mathcal{T}_0(\mathcal{F}, \zeta_i) + 1 - \tau_0(\mathcal{F}, \zeta_i)$  então

$$(37) \quad p_0(\mathcal{F}, \mathcal{B}) = \sum_{i=1}^k (\mathcal{T}_0(\mathcal{F}, \zeta_i) + 1) - \sum_{i=1}^k \tau_0(\mathcal{F}, \zeta_i) = \sum_{i=1}^k (\mathcal{T}_0(\mathcal{F}, \zeta_i) + 1) - \tau_0(\mathcal{F}, \Gamma).$$

Damos a cada  $\zeta_i$  a parametrização  $\gamma_i(t) = (x_i(t), y_i(t))$ . Como  $\Gamma : P - bQ = 0$  então  $P(\gamma_i(t)) = bQ(\gamma_i(t))$  e

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_0(\mathcal{F}, \zeta_i) + 1 &= \text{ord}_{t=0}(\gamma_i^* \omega) + 1 \\ &= \text{ord}_{t=0}\{(P(\gamma_i(t))y_i'(t) - Q(\gamma_i(t))x_i'(t))\} + 1 \\ &= \text{ord}_{t=0}\{(bQ(\gamma_i(t))y_i'(t) - Q(\gamma_i(t))x_i'(t))\} + 1 \\ &= \text{ord}_{t=0}\{Q(\gamma_i(t))(by_i'(t) - x_i'(t))\} + 1 \\ &= \text{ord}_{t=0}Q(\gamma_i(t)) + \text{ord}_{t=0}(by_i'(t) - x_i'(t)) + 1 \\ &= \text{ord}_{t=0}Q(\gamma_i(t)) + \text{ord}_{t=0}(by_i(t) - x_i(t)) \\ &= (Q, \zeta_i)_0 + \nu_0(\zeta_i). \end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^k (\mathcal{T}_0(\mathcal{F}, \zeta_i) + 1) = \sum_{i=1}^k (Q, \zeta_i)_0 + \sum_{i=1}^k \nu_0(\zeta_i).$$

Como  $\sum_{i=1}^k (Q, \zeta_i)_0 = (Q, \Gamma)_0 = (Q, P - bQ)_0 = (Q, P)_0 = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x,y\}}{(Q,P)} = \mu_0(\mathcal{F})$  e, além disso,  $\sum_{i=1}^k \nu_0(\zeta_i) = \nu_0(\Gamma) = \nu_0(\mathcal{F})$ , substituindo em (37) obtemos o resultado.  $\square$

**Observação 2.** como mencionamos anteriormente, nosso resultado generaliza uma conhecida fórmula de Teissier para curvas [25]. Pois, se  $f = 0$ , onde  $f \in \mathbb{C}\{x, y\}$ , é uma equação reduzida de um germe de curva analítica complexa  $C$  em  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , então a equação

$\omega = 0$ , onde  $\omega$  é a 1-forma definida por  $\omega = df$ , define uma folheação  $\mathcal{F}$  do tipo curva generalizada. A Equação (36) torna-se, para  $(a : b) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  genérico,

$$(af_x + bf_y, C)_0 = \mu_0(f) + \nu_0(f) - 1.$$



## CAPÍTULO 4

**Existência de Separatrizes em  $(\mathbb{R}^2, 0)$** 

Esse capítulo está dirigido especificamente ao estudo de condições para garantir a existência de separatrizes em folheações definidas por um germe de campo vetorial analítico real com singularidade algebricamente isolada na origem de  $\mathbb{R}^2$ . As fórmulas nas definições dos objetos reais podem coincidir com as fórmulas de seus respectivos objetos complexificados, porém ditos objetos não são iguais, têm propriedades e interpretações geométricas diferentes. Além disso, os objetos reais e seus complexificados têm relações entre si. Por esses motivos usamos o sub-índice  $\mathbb{R}$  para nos referir aos objetos reais e usamos o sub-índice  $\mathbb{C}$  para nos referir a seus respectivos objetos complexificados.

**4.1. Preliminares em  $(\mathbb{R}^2, 0)$** 

Essa primeira seção é um resumo básico, no contexto real, do que já foi apresentado por extenso nos dois primeiros capítulos. Nesse capítulo o principal objeto de estudo é um germe de campo vetorial analítico real com singularidade algebricamente isolada na origem de  $(\mathbb{R}^2, 0)$  definido por

$$(38) \quad X_{\mathbb{R}} = P_{\mathbb{R}}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q_{\mathbb{R}}(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

onde  $P_{\mathbb{R}}$  e  $Q_{\mathbb{R}}$  são elementos do anel  $\mathbb{R}\{x, y\}$  de germes de funções analíticas reais em  $(\mathbb{R}^2, 0)$  sem fatores comuns e  $X_{\mathbb{R}}(0) = 0$ . Lembramos que  $X_{\mathbb{R}}$  tem *singularidade algebricamente isolada* se seu complexificado  $X_{\mathbb{C}}$  tem singularidade isolada. Isso equivale ao fato que os coeficientes de  $X_{\mathbb{R}}$  serem ambos não unidades e relativamente primos em  $\mathbb{R}\{x, y\}$ .

Denotamos por  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  o germe de folheação analítica real com singularidade algebricamente isolada na origem que é definido por  $X_{\mathbb{R}}$ , ou pela equação

$$\omega_{\mathbb{R}} = 0,$$

onde  $\omega_{\mathbb{R}}$  é um germe de 1-forma analítica real com singularidade algebricamente isolada na origem e satisfaz

$$(39) \quad \omega_{\mathbb{R}} = P_{\mathbb{R}}(x, y)dy - Q_{\mathbb{R}}(x, y)dx.$$

Fazendo o desenvolvimento de Taylor de uma função analítica real  $f_{\mathbb{R}}$ , escrevemos

$$f_{\mathbb{R}} = \sum_{k=m}^{\infty} f_k = f_m + f_{m+1} + \dots,$$

onde  $f_m$  é o primeiro jato não identicamente nulo ( $f_m \neq 0$ ). Esse número  $m$  é chamado de *multiplicidade algébrica* da função  $f_{\mathbb{R}}$  e, no caso em que  $f_{\mathbb{R}}(0) = 0$ , é também chamado multiplicidade algébrica da curva definida por  $f_{\mathbb{R}} = 0$  e denotado por  $\nu(f_{\mathbb{R}})$ . A *multiplicidade algébrica* do germe de folheação analítica real  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ , induzida por  $X_{\mathbb{R}}$ , é definida como

$$\nu(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}) = \min\{\nu(P_{\mathbb{R}}), \nu(Q_{\mathbb{R}})\}.$$

Uma *curva formal*  $C_{\mathbb{R}}$  em  $(\mathbb{R}^2, 0)$  é definida por uma equação reduzida  $f_{\mathbb{R}}(x, y) = 0$ , onde  $f_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}[[x, y]]$  é uma série formal, não trivial e não unidade. Se

$$f_{\mathbb{R}} = f_1^{i_1} f_2^{i_2} \cdots f_e^{i_e}$$

é uma decomposição de  $f_{\mathbb{R}}$  como produto de fatores irredutíveis, cada  $f_j = 0$  define um *ramo*  $C_j$  de  $C_{\mathbb{R}}$ . Uma curva formal é *invariante por*  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  se ela é a união de curvas irredutíveis tangentes à folheação, ou seja, se existe uma função formal  $h$  que satisfaz

$$\omega_{\mathbb{R}} \wedge df_{\mathbb{R}} = (f_{\mathbb{R}} h_{\mathbb{R}}) dx \wedge dy,$$

ou equivalentemente

$$P_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_{\mathbb{R}}}{\partial x} + Q_{\mathbb{R}} \frac{\partial f_{\mathbb{R}}}{\partial y} = f_{\mathbb{R}} h_{\mathbb{R}},$$

para algum  $h_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}[[x, y]]$ . Fixado um germe de folheação  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  definido pela 1-forma  $\omega_{\mathbb{R}}$ , denominamos *separatriz formal (real)* ou simplesmente *separatriz (real)* a um germe de curva formal, irredutível e invariante por  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  que passa pela origem de  $(\mathbb{R}^2, 0)$ . Se a separatriz pertence a  $\mathbb{R}\{x, y\}$  ela é chamada de *separatriz convergente* ou *separatriz analítica*. Caso contrário, diz-se que é puramente formal. A família de todas as separatrizes de  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  na origem 0 é denotada por  $\text{Sep}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}})$ . Em 1982, Camacho e Sad [4] provaram que um germe de campo vetorial analítico complexo definido em  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , com singularidade isolada na origem, possui pelo menos uma separatriz convergente. Porém, nem todo germe de campo analítico real tem soluções não triviais passando pela origem. Por exemplo, as soluções do campo

$$X_{\mathbb{R}} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$$

são os círculos centrados na origem,  $x^2 + y^2 = c$ , com  $c \geq 0$ , e portanto a folheação induzida por esse campo não tem separatrizes.

Enfatizamos que a existência de separatrizes formais não implica na existência de separatrizes convergentes. No exemplo [22, p.219], a folheação analítica real induzida pelo campo

$$X_{\mathbb{R}} = (-y^2 + x^4) \frac{\partial}{\partial x} + (xy + x^3 + x^3 y) \frac{\partial}{\partial y}$$

possui separatriz formal mas não tem separatrizes convergentes.

Das Seções 2.2 e 2.5, temos que um *blow-up puntual real*, ou simplesmente *blow-up real*, em  $(0, 0) \in (\mathbb{R}^2, 0)$  é o mapa analítico

$$\pi_{\mathbb{R}} : (\tilde{\mathbb{R}}^2, D_{\mathbb{R}}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0),$$

onde  $D_{\mathbb{R}} = \pi_{\mathbb{R}}^{-1}(0) = \{0\} \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ .  $(\tilde{\mathbb{R}}^2, D_{\mathbb{R}})$  se identifica com  $(\mathbb{R}^2, 0)$  no seguinte sentido:  $\{(0, 0)\}$  é substituído por  $D_{\mathbb{R}}$ , um espaço projetivo  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  mergulhado em  $\tilde{\mathbb{R}}^2$ , que parametriza as direções tangentes em  $0 \in \mathbb{R}^2$ . Duas cartas  $(x, v), (u, y) \in \mathbb{R}^2$  da variedade analítica  $\tilde{\mathbb{R}}^2$  são definidas pelas relações  $y = vx$  com  $x \neq 0$  e  $x = uy$  com  $y \neq 0$ , de forma tal que  $(x, v) \mapsto (x, vx)$ ,  $(u, y) \mapsto (uy, y)$ . Além disso, o blow-up restrito a  $\tilde{\mathbb{R}}^2 \setminus D_{\mathbb{R}}$  é um difeomorfismo analítico em sua imagem. Dado um germe de folheação analítica singular  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  em  $(\mathbb{R}^2, 0)$ , um blow-up em  $(\mathbb{R}^2, 0)$  transforma  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  em uma outra folheação  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}^1 = \pi_{\mathbb{R}}^* \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  em  $(\tilde{\mathbb{R}}^2, D_{\mathbb{R}})$ , denominada *transformada estrita* de  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ , que possui um número finito de singularidades isoladas sobre  $D_{\mathbb{R}}$ , e corresponde difeomorficamente a  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  sobre os pontos onde  $\pi_{\mathbb{R}}$  é um difeomorfismo. Se  $D_{\mathbb{R}}$  é uma curva invariante por  $\pi_{\mathbb{R}}^* \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ , dizemos que tanto

$\pi_{\mathbb{R}}$  como  $D_{\mathbb{R}}$  são *não-dicríticos*, caso contrário são *dicríticos*. No caso dicrítico, infinitas curvas analíticas invariantes cortam  $D_{\mathbb{R}}$ . Elas são projetadas em infinitas separatrizes de  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ .

#### 4.2. Processo de complexificação

Considerando as variáveis  $x$  e  $y$  de (38) como variáveis complexas, obtemos o germe de campo vetorial holomorfo com singularidade isolada na origem definido por

$$(40) \quad X_{\mathbb{C}} = P_{\mathbb{C}}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q_{\mathbb{C}}(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

Denotamos por  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  o germe de folheação holomorfa singular em 0 induzido por  $X_{\mathbb{C}}$ , ou pela equação

$$\omega_{\mathbb{C}} = 0,$$

onde

$$\omega_{\mathbb{C}} = P_{\mathbb{C}}(x, y)dy - Q_{\mathbb{C}}(x, y)dx..$$

A *multiplicidade algébrica da folheação*  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  é

$$\nu(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}) = \min\{\nu(P_{\mathbb{C}}), \nu(Q_{\mathbb{C}})\}.$$

Como as fórmulas de  $X_{\mathbb{C}}$  e  $X_{\mathbb{R}}$  coincidem, então  $\nu(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}) = \nu(\mathcal{F}_{\mathbb{R}})$ . Em nosso trabalho consideramos que o *número de Milnor* de  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  é

$$\mu(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}) = \mu = \mu(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}) = \dim \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(P_{\mathbb{C}}, Q_{\mathbb{C}})},$$

onde  $(P_{\mathbb{C}}, Q_{\mathbb{C}})$  é o ideal gerado por  $P_{\mathbb{C}}, Q_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}\{x, y\}$ . Ao complexificar um germe de curva formal real  $C_{\mathbb{R}} \in (\mathbb{R}^2, 0)$  obtemos um germe de curva formal complexa  $C_{\mathbb{C}} \in (\mathbb{C}^2, 0)$  o qual é definido por uma equação reduzida  $f_{\mathbb{C}}(x, y) = 0$ , onde  $f_{\mathbb{C}}$  é a complexificação da equação  $f_{\mathbb{R}}$  de  $C_{\mathbb{R}}$ . Se  $f_{\mathbb{R}} = 0$  define um germe de curva irreduzível formal, não trivial, passando pela origem  $(\mathbb{R}^2, 0)$  então, seu complexificado,  $f_{\mathbb{C}} = 0$ , define um germe de curva irreduzível formal complexa passando pela origem de  $(\mathbb{C}^2, 0)$ .

Considerando a Seção 3.1, uma *separatriz formal complexa* ou simplesmente *separatriz complexa* de  $\omega_{\mathbb{C}}$  é uma curva formal, irreduzível e invariante que passa pela origem de  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , i.e, um objeto dado pela equação  $g(x, y) = 0$ , onde  $g \in \mathbb{C}[[x, y]]$  é uma série formal irreduzível tal que  $g(0, 0) = 0$ , e que satisfaz

$$\omega_{\mathbb{C}} \wedge dg = (gh)dx \wedge dy,$$

para algum  $h \in \mathbb{C}[[x, y]]$ . Se a separatriz complexa  $B$  pertence a  $\mathbb{C}\{x, y\}$ , ela é chamada de *separatriz convergente* ou *separatriz analítica*, caso contrário, diz-se que ela é *puramente formal*. A família de todas as separatrizes de  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  na origem 0 é denotada  $\text{Sep}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})$ . Observe que, embora a equação que define uma separatriz real  $B_{\mathbb{R}}$  possa ser identificada com a equação que define uma separatriz complexa  $B_{\mathbb{C}}$ , o oposto pode não acontecer pois uma separatriz  $B$  de  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  pode estar definida por uma equação não-real.

Na Seção 2.1, (respectivamente 2.2) estudamos o que é um blow-up pontual complexo (respectivamente real). Na Seção 2.3 estudamos como um blow-up real está relacionado com um blow-up complexo. Na Seção 2.4 estudamos o que acontece com um germe de folheação analítica complexa com singularidade isolada na origem após aplicar um blow-up complexo na origem e na Seção 2.5 fazemos o mesmo estudo porém para o caso real. Na seção 2.6 estudamos o que é aplicar uma sequência de blow-ups complexos

ou uma sequência de blow-ups reais em singularidades isoladas que aparecem após de cada blow-up, essa informação, junto com os preliminares dessa seção e da anterior são essenciais para a análise que vem a continuação, por isso vamos assumir que o leitor está familiarizado com as notações e conteúdos daquelas seções.

Aplicar uma sequência de  $j$  blow-ups reais implica aplicar  $j$  blow-ups complexos definidos pelas mesmas equações. Imagine que aplicamos um total de  $k$  blow-ups complexos, tal que os  $j$  primeiros se identificam com blow-ups reais. Da Seção 2.3, se um blow-up complexo é realizado em uma singularidade que está no traço real, ele determina o levantamento da involução anti-holomorfa  $J$  para a variedade obtida pelo blow-up. Porém, um blow-up complexo pode produzir singularidades isoladas fora do traço real do respectivo levantamento da folheação. Além disso, pode chegar o momento em que só precisemos fazer mais blow-ups complexos em singularidades isoladas fora do traço real da variedade obtida pela sequência de blow-ups aplicados até aquele instante. O inconveniente que aparece, é o seguinte, um blow-up complexo feito numa singularidade isolada fora do traço real não levanta o mapa de conjugação. Para resolver esse inconveniente, temos que ter em conta como é o  $X_{\mathbb{C}}$  definido na equação (40), vamos supor que já fizemos  $j$  blow-ups complexos sobre singularidades no traço real de cada levantamento, então até aqui observamos que o levantamento da involução canônica  $J$  pela sequência de blow-ups complexos

$$\pi_{\mathbb{C}}^1 \circ \cdots \circ \pi_{\mathbb{C}}^{j-1} \circ \pi_{\mathbb{C}}^j : (\widetilde{M}_{\mathbb{C}}^j, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^j) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0),$$

define uma única involução contínua

$$J^j : (\widetilde{M}_{\mathbb{C}}^j, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^j) \rightarrow (\widetilde{M}_{\mathbb{C}}^j, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^j),$$

tal que

$$(\pi_{\mathbb{C}}^1 \circ \cdots \circ \pi_{\mathbb{C}}^{j-1} \circ \pi_{\mathbb{C}}^j) \circ J^j = J \circ (\pi_{\mathbb{C}}^1 \circ \cdots \circ \pi_{\mathbb{C}}^{j-1} \circ \pi_{\mathbb{C}}^j),$$

Por esse motivo, a folheação obtida  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}^j$  é simétrica com respeito ao traço real de  $\widetilde{M}_{\mathbb{C}}^j$ . Agora, como o seguinte blow-up será aplicado sobre  $p_1$ , uma singularidade fora do traço real de  $\widetilde{M}_{\mathbb{C}}^j$ , temos que considerar a singularidade  $p_2 = J^j(p_1)$  e fazer dois blow-ups sucessivos  $\pi_{\mathbb{C}}^{j+1}$  e  $\pi_{\mathbb{C}}^{j+2}$ , o primeiro em  $p_1$  e outro na singularidade  $(\pi_{\mathbb{C}}^{j+1})^{-1}(p_2)$ . Informalmente podemos considerar dita composição como se fosse um único blow-up. Ou seja, consideramos os blow-ups

$$\pi_{\mathbb{C}}^{j+1} : (\widetilde{M}_{\mathbb{C}}^{j+1}, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{j+1}) \rightarrow (\widetilde{M}_{\mathbb{C}}^j, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^j)$$

e

$$\pi_{\mathbb{C}}^{j+2} : (\widetilde{M}_{\mathbb{C}}^{j+2}, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{j+2}) \rightarrow (\widetilde{M}_{\mathbb{C}}^{j+1}, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{j+1}),$$

para fazer a composição

$$\pi_{\mathbb{C}}^{(j+1, j+2)} = \pi_{\mathbb{C}}^{j+1} \circ \pi_{\mathbb{C}}^{j+2} : (\widetilde{M}_{\mathbb{C}}^{j+2}, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{j+2}) \rightarrow (\widetilde{M}_{\mathbb{C}}^j, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^j).$$

Assim, é possível definir em  $(\widetilde{M}_{\mathbb{C}}^{j+2}, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{j+2})$  uma única involução contínua

$$J^{(j+1, j+2)} : (\widetilde{M}_{\mathbb{C}}^{j+2}, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{j+2}) \rightarrow (\widetilde{M}_{\mathbb{C}}^{j+2}, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^{j+2}),$$

tal que

$$\pi_{\mathbb{C}}^{(j+1, j+2)} \circ J^{(j+1, j+2)} = J \circ \pi_{\mathbb{C}}^{(j+1, j+2)}.$$

Desse modo, toda vez que apliquemos um blow-up puntual complexo numa singularidade fora do traço real, vamos considerar que aplicamos a composição de dois blow-ups tal como acabamos de explicar. Dessa forma, aplicando em total  $k$  blow-ups complexos, obtemos a sequência

$$\sigma_{\mathbb{C}} = \pi_{\mathbb{C}}^1 \circ \cdots \circ \pi_{\mathbb{C}}^j \circ \cdots \circ \pi_{\mathbb{C}}^{k-1} \circ \pi_{\mathbb{C}}^k : (\widetilde{M}_{\mathbb{C}}, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$$

que determina a involução anti-holomorfa  $\widetilde{J} : \widetilde{M}_{\mathbb{C}} \rightarrow \widetilde{M}_{\mathbb{C}}$ , tal que  $\sigma_{\mathbb{C}} \circ \widetilde{J} = J \circ \sigma_{\mathbb{C}}$ . Como cada blow-up complexo, fora do conjunto singular, é um difeomorfismo holomorfo com sua imagem, identificando  $\widetilde{M}_{\mathbb{R}}$ , a variedade analítica real obtida pelos  $j$  blow-ups reais, com  $\{\tilde{p} \in \widetilde{M}_{\mathbb{C}} : \tilde{p} = \widetilde{J}(\tilde{p})\}$ , e fazendo um abuso de notação, definimos

$$\widetilde{M}_{\mathbb{R}} = \{\tilde{p} \in \widetilde{M}_{\mathbb{C}} : \tilde{p} = \widetilde{J}(\tilde{p})\},$$

então,  $\widetilde{M}_{\mathbb{R}}$  é o traço real de  $\widetilde{M}_{\mathbb{C}}$ . Identificamos  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$  com  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}} \cap \widetilde{M}_{\mathbb{R}}$  e  $\sigma_{\mathbb{R}}$  com  $\sigma_{\mathbb{C}}|_{\widetilde{M}_{\mathbb{R}}}$ . Dessa forma, identificamos a sequência dos  $j$  blow-ups reais com a restrição da sequência dos  $k$  blow-ups complexos ao traço real. Notemos que, por tudo o exposto, em  $\widetilde{M}_{\mathbb{C}}$  obtemos a folheação  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}} = \sigma_{\mathbb{C}}^*(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})$  que é simétrica com respeito a  $\widetilde{M}_{\mathbb{R}}$ . Identificamos também  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{R}} = \sigma_{\mathbb{R}}^*\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  com  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}} \cap \widetilde{M}_{\mathbb{R}}$ .

### 4.3. Redução de singularidades em $(\mathbb{R}^2, 0)$ e $(\mathbb{C}^2, 0)$

No preliminar do capítulo anterior, mencionamos o resultado de redução de singularidades e a definição de singularidade simples para um germe de folheação holomorfa com singularidade isolada, mas elas têm uma apresentação que considera tanto o caso real como o complexo, por esse motivo denotamos momentaneamente  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Dizemos que um germe de folheação analítica (real ou complexa) com singularidade isolada na origem de  $(\mathbb{K}^2, 0)$  tem uma *singularidade simples* ou *reduzida* em  $0 \in \mathbb{K}^2$  se os autovalores da parte linear do campo,  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ , satisfazem uma das seguintes condições:

- (1)  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$  com  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}^+$  (*singularidade simples não-degenerada*),
- (2)  $\lambda_1 \neq 0$  e  $\lambda_2 = 0$  (*singularidade simples sela-nó*).

No contexto de folheações analíticas reais, nos referiremos a uma singularidade sela-nó como *singularidade sela-nó algébrica*. Uma singularidade simples tem exatamente duas separatrizes transversais [16]. No caso não-degenerado, ambas são convergentes. No caso sela-nó, aquela associada ao autovetor do autovalor não-nulo é convergente e é chamada de *separatriz forte*. A outra separatriz é formal e é chamada de *separatriz fraca*. Para uma singularidade sela-nó, existem coordenadas formais, em que ela é escrita [18]:

$$\omega_{\mathbb{K}} = y(1 + \mu x^k)dx \pm x^{k+1}dy,$$

onde  $\mu \in \mathbb{K}$  e  $k \in \mathbb{Z}_+$  são invariantes formais, a separatriz forte corresponde a  $\{x = 0\}$ , a separatriz fraca corresponde a  $\{y = 0\}$  e o inteiro  $i_0^w(\mathcal{F}_{\mathbb{K}}) = k + 1 > 1$  é chamado *índice fraco* da sela-nó algébrica [18, 16]. Note que, na fórmula normal acima, o sinal só é relevante quando  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

Em [23], Seidenberg provou que qualquer germe de folheação analítica (real ou complexa) com singularidade isolada na origem de  $(\mathbb{K}^2, 0)$  admite um *processo de redução de singularidades*

$$\sigma_{\mathbb{K}} = \pi_{\mathbb{K}}^1 \circ \cdots \circ \pi_{\mathbb{K}}^{n-1} \circ \pi_{\mathbb{K}}^n : (\widetilde{M}, \mathcal{D}_{\mathbb{K}}) \rightarrow (\mathbb{K}^2, 0),$$

que permite obter uma nova folheação  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{K}}$  que tem uma quantidade finita de singularidades, todas elas simples e sobre o divisor  $\mathcal{D}_{\mathbb{K}} = \sigma_{\mathbb{K}}^{-1}(0)$ , união finita de componentes irredutíveis  $D_{\mathbb{K}}$ , que são retas projetivas com cruzamentos normais obtidas por esse processo. Um ponto que está na interseção de duas componentes irredutíveis é chamado de *esquina*. Caso contrário, é chamado de *ponto traço*. A *valência* de  $D_{\mathbb{K}}$ , denotada por  $\text{Val}(D_{\mathbb{K}})$ , é o número de outras componentes de  $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}$  intersectando  $D_{\mathbb{K}}$ .

Uma componente irredutível de  $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}$  que é não-invariante por  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{K}}$  é classificada como *dicrítica*, caso contrário, é classificada como *não-dicrítica*. Dizemos que  $B_{\mathbb{K}} \in \text{Sep}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{K}})$  é uma *separatriz dicrítica*, se  $\tilde{B}_{\mathbb{K}} = \sigma^* B_{\mathbb{K}}$  toca o divisor  $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}$  em uma componente dicrítica. Caso contrário, dizemos que  $B_{\mathbb{K}}$  é uma *separatriz isolada*. O conjunto de separatrizes dicríticas de  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$  é denotado por  $\text{Dic}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{K}})$ . O conjunto de separatrizes isoladas de  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$  é denotado por  $\text{Iso}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{K}})$ . As transformadas estritas das separatrizes de  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$  são suaves (têm multiplicidade algébrica 1), disjuntas e transversais a  $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}$ . Cada singularidade isolada de  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{K}}$  é reduzida e esta fora das esquinas de  $\mathcal{D}_{\mathbb{K}}$ . Por cada uma delas passa uma separatriz não contida no divisor. Além disso, a folheação  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{K}}$  é sempre transversal às componentes dicríticas. Ou seja, um processo de redução de singularidades de  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$  também dessingulariza as separatrizes de  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$ .  $\mathcal{F}_{\mathbb{K}}$  é definida pela 1-forma  $\omega_{\mathbb{K}}$  e  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{K}}$  é definido pela divisão de  $\sigma_{\mathbb{K}}^* \omega_{\mathbb{K}}$  por uma potência da equação local do divisor de  $\sigma_{\mathbb{K}}^* \omega_{\mathbb{K}}$ . Como um processo de redução de singularidades é uma composição de blow-ups aplicados sucessivamente, as observações que fizemos na Seção 4.2 também são válidas para o processo de redução de singularidades. Uma singularidade simples é dita real se, após aplicar um processo de redução de singularidades  $\sigma_{\mathbb{C}}$ , ela está sobre o traço real de  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}$ .

#### 4.4. Classificação topológica de uma sela-nó algébrica

De [2], um germe de folheação holomorfa singular em  $(\mathbb{C}^2, 0)$  é do tipo curva generalizada complexa se não tem singularidades sela-nó em seu processo de redução de singularidades. De [22], um germe de uma folheação analítica real singular em  $(\mathbb{R}^2, 0)$  é do tipo curva generalizada real se não tem singularidades sela-nó algébricas em seu processo de redução de singularidades real. Isso equivale a pedir que seu campo complexificado não possua selas-nós sobre o traço real do divisor excepcional  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ . Sejam  $X$  e  $X'$  dois campos de vetores analíticos reais que definem as folheações  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{F}'$  nas superfícies  $M$  e  $M'$  respectivamente. Dizemos que  $X$  e  $X'$  são campos *topologicamente equivalentes* se houver um homeomorfismo  $H : M \rightarrow M'$  que preserva a orientação, levando o conjunto singular de  $X$  no conjunto singular de  $X'$  e as folhas de  $\mathcal{F}$  nas folhas de  $\mathcal{F}'$ , respeitando as orientações. Dois germes de campos vetoriais são topologicamente equivalentes, se admitem representantes topologicamente equivalentes. Pelo [16, Teo.9,1], temos que uma singularidade sela-nó algébrica pode ser classificada, segundo equivalência topológica, como uma sela topológica ou um nó topológico ou uma sela-nó topológica. De [16], se o índice fraco  $i_0^w(\mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  é par, a singularidade é uma sela-nó topológica. Se  $i_0^w(\mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  é ímpar, a singularidade pode ser ou sela topológica ou nó topológica. Dizemos que um germe de campo vetorial analítico com uma única singularidade algebricamente isolada em  $(\mathbb{R}^2, 0)$  é do tipo *curva generalizada real topológica* se nenhuma singularidade sela-nó algébrica, obtida após um processo de redução de singularidades, é uma sela-nó topológica.

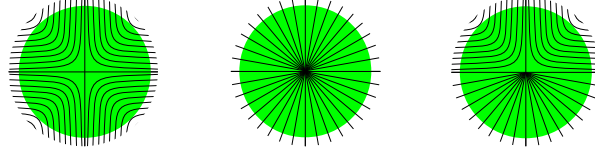


FIGURA 1. Classificação topológica de uma sela-nó algébrica: sela topológico, nó topológico, sela-nó topológica

**Definição 4.4.1.** O índice de *excesso de tangência* de  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  em  $0 \in \mathbb{R}^2$  é o número inteiro positivo

$$\tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}) = \sum_{q \in \text{SN}(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{R}})} \rho(D_{\mathbb{R},q})(i_q^w(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{R}}) - 1),$$

onde  $\text{SN}(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{R}})$  é o conjunto de singularidades do tipo sela-nó tangente no divisor excepcional  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ ,  $D_{\mathbb{R},q}$  é a componente contendo a separatriz fraca e  $\rho(D_{\mathbb{R},q})$  é o peso da componente  $D_{\mathbb{R},q}$ . Este é definido como a multiplicidade algébrica de uma curva  $\gamma$  tal que sua transformada estrita  $\sigma_{\mathbb{R}}^* \gamma$  é transversal a  $D_{\mathbb{R},q}$  fora das esquinas.

Sempre temos que  $\tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}) \geq 0$ , e  $\tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}) = 0$  se e somente se  $\text{SN}(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{R}}) = \emptyset$  (não há selas-nós tangentes na redução de singularidades de  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ ).

#### 4.5. A multiplicidade algébrica e a existência de separatrizes

Em geral, um *divisor de separatrizes* de uma folheação  $\mathcal{F}$ , real ou complexa, é uma soma formal

$$\mathcal{B} = \sum_{B \in \text{Sep}_0(\mathcal{F})} a_B \cdot B,$$

onde os coeficientes  $a_B \in \mathbb{Z}$  são zero, exceto por um número finito de separatrizes  $B \in \text{Sep}_0(\mathcal{F})$ . No caso complexo  $\mathcal{B}$  é denotado  $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$  e no caso real  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ . A *multiplicidade algébrica de um divisor* de separatrizes é

$$(41) \quad \nu_0(\mathcal{B}) = \sum_{B \in \text{Iso}_0(\mathcal{F})} \nu_0(B) + \sum_{D \in \text{Dic}_0(\mathcal{F})} \sum_{B \in \text{Sep}_0(D)} a_B \nu_0(B),$$

onde  $\text{Iso}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  é o conjunto de separatrizes isoladas de  $\mathcal{F}$ ,  $\text{Dic}_0(\mathcal{F})$  é o conjunto de separatrizes dicríticas de  $\mathcal{F}$  e  $\text{Sep}_0(D)$  é o conjunto de separatrizes de  $\mathcal{F}$  cujos levantamentos pelo processo de redução de singularidades intersectam a componente  $D$ .

A seguir, adaptamos para o contexto dessa seção, duas definições propostas por Genzmer em [12]. O *divisor equilibrado complexo de separatrizes* para  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  é um divisor da forma

$$(42) \quad \mathcal{B}_{\mathbb{C}} = \sum_{B_{\mathbb{C}} \in \text{Sep}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})} a_{B_{\mathbb{C}}} \cdot B_{\mathbb{C}} = \sum_{B_{\mathbb{C}} \in \text{Iso}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})} B_{\mathbb{C}} + \sum_{D_{\mathbb{C}} \in \text{Dic}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})} \sum_{B_{\mathbb{C}} \in \text{Sep}_0(D_{\mathbb{C}})} a_{B_{\mathbb{C}}} \cdot B_{\mathbb{C}},$$

onde os  $a_{B_{\mathbb{C}}} \in \{-1, 0, 1\}$ , são 1 para cada separatriz isolada e são não nulos para um número finito de  $B_{\mathbb{C}} \in \text{Dic}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})$  e para cada componente dicrítica

$$(43) \quad \sum_{B_{\mathbb{C}} \in \text{Sep}_0(D_{\mathbb{C}})} a_{B_{\mathbb{C}}} = 2 - \text{Val}(D_{\mathbb{C}}),$$

onde  $\text{Val}_{\mathbb{C}}(D_{\mathbb{C}})$ , denominada *valência complexa* de  $D_{\mathbb{C}}$  é o número de outras componentes de  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  intersectando  $D_{\mathbb{C}}$ .

A *multiplicidade algébrica de um divisor complexo* de separatrizes é

$$(44) \quad \nu_0(\mathcal{B}_{\mathbb{C}}) = \sum_{B_{\mathbb{C}} \in \text{Iso}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})} \nu_0(B_{\mathbb{C}}) + \sum_{D_{\mathbb{C}} \in \text{Dic}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})} \sum_{B_{\mathbb{C}} \in \text{Sep}_0(D_{\mathbb{C}})} a_{B_{\mathbb{C}}} \nu_0(B_{\mathbb{C}}).$$

Se após um processo de redução de singularidades consideramos só o traço real, podemos ter definições semelhantes para o caso real. Seguindo as duas definições anteriores e nos referindo à folheação real, definimos

**Definição 4.5.1.** O *divisor equilibrado real de separatrizes* para  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  é

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sum_{B_{\mathbb{R}} \in \text{Iso}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}})} B_{\mathbb{R}} + \sum_{D_{\mathbb{R}} \in \text{Dic}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}})} \sum_{B_{\mathbb{R}} \in \text{Sep}_0(D_{\mathbb{R}})} a_{B_{\mathbb{R}}} \cdot B_{\mathbb{R}},$$

onde os  $a_{B_{\mathbb{R}}} \in \{-1, 0\}$ , são não nulos para um número finito de  $B_{\mathbb{R}} \in \text{Dic}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  e para cada componente dicrítica  $\sum_{B_{\mathbb{R}} \in \text{Sep}_0(D_{\mathbb{R}})} a_{B_{\mathbb{R}}} = 2 - \text{Val}_{\mathbb{R}}(D_{\mathbb{R}})$ , onde  $\text{Val}_{\mathbb{R}}(D_{\mathbb{R}})$ , denominada *valência real* de  $D_{\mathbb{R}}$  é o número de outras componentes de  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$  intersectando  $D_{\mathbb{R}}$ .

A relação entre a valência complexa e a real é determinada no seguinte resultado.

**Proposição 4.5.2.** Para cada componente dicrítica  $D_{\mathbb{C}} \subset \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  com traço real não trivial  $D_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{D}_{\mathbb{R}}$ , se cumpre que

$$(45) \quad \text{Val}_{\mathbb{R}}(D_{\mathbb{R}}) \equiv \text{Val}_{\mathbb{C}}(D_{\mathbb{C}}) \pmod{2}.$$

**DEMONSTRAÇÃO.** Existem dois tipos de componentes na desingularização: Aqueles que vêm de explosões em singularidades invariantes por conjugação complexa, e aqueles que vêm de singularidades que não são invariantes por conjugação complexa. Os últimos aparecem em quantidade par.  $\square$

O resultado segue então do fato que  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  e sua redução de singularidades é invariante por conjugação.

**Definição 4.5.3.** A *multiplicidade de uma componente*  $D_{\mathbb{C}} \subset \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ , denotada por  $\rho(D_{\mathbb{C}})$  é a multiplicidade algébrica de uma curva  $B_{\mathbb{C}}$  em  $(\mathbb{C}^2, 0)$  tal que  $\pi^*B_{\mathbb{C}}$  é transversal a  $D_{\mathbb{C}}$  fora das esquinas de  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ .

Todas as separatrizes na mesma componente dicrítica possuem a mesma multiplicidade algébrica. Então, a multiplicidade algébrica de um divisor equilibrado não depende da escolha das separatrizes em cada componente dicrítica. Então, podemos selecionar uma separatriz conveniente para cada componente dicrítica no seguinte sentido: se  $D_{\mathbb{C}} \in \text{Dic}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})$  tem traço real não-trivial, então selecionamos apenas separatrizes reais. Usamos explicitamente o fato que curvas equisingulares têm a mesma multiplicidade algébrica. Observe que  $\nu_0(\mathcal{B}_{\mathbb{C}})$  e  $\nu_0(\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$  podem ser diferentes pois podem existir separatrizes de  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  sem interseção não trivial com o traço real.

**Proposição 4.5.4.** Seja  $X_{\mathbb{R}}$  um germe de campo vetorial analítico real com singularidade algebricamente isolada na origem de  $(\mathbb{R}^2, 0)$ , com complexificação  $X_{\mathbb{C}}$ . Denote por  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  e  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  as folheações induzidas por eles. Se  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  e  $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$  são os divisores equilibrados de separatrizes de  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  e  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  respectivamente, então

$$\nu_0(\mathcal{B}_{\mathbb{C}}) \equiv \nu_0(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \pmod{2}.$$



DEMONSTRAÇÃO. Aplicando a Definição 4.5.3, se  $B_{\mathbb{C}} \in \text{Sep}_0(D_{\mathbb{C}})$ , obtemos  $\nu_0(B_{\mathbb{C}}) = \rho(D_{\mathbb{C}})$ . Inserindo a equação (43) na equação (42), temos

$$(46) \quad \begin{aligned} \nu_0(\mathcal{B}_{\mathbb{C}}) &= \sum_{B_{\mathbb{C}} \in \text{Iso}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})} \nu_0(B_{\mathbb{C}}) + \sum_{D_{\mathbb{C}} \in \text{Dic}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})} \sum_{B_{\mathbb{C}} \in \text{Sep}_0(D_{\mathbb{C}})} a_{B_{\mathbb{C}}} \nu_0(B_{\mathbb{C}}) \\ &= \sum_{B_{\mathbb{C}} \in \text{Iso}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})} \nu_0(B_{\mathbb{C}}) + \sum_{D_{\mathbb{C}} \in \text{Dic}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})} (2 - \text{Val}_{\mathbb{C}}(D_{\mathbb{C}})) \rho(D_{\mathbb{C}}). \end{aligned}$$

Decompomos

$$\sum_{B_{\mathbb{C}} \in \text{Iso}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})} \nu_0(B_{\mathbb{C}}) = \sum_{\substack{B_{\mathbb{C}} \in \text{Iso}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}) \\ J\text{-invariante}}} \nu_0(B_{\mathbb{C}}) + \sum_{\substack{B_{\mathbb{C}} \in \text{Iso}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}) \\ \text{não } J\text{-invariante}}} \nu_0(B_{\mathbb{C}}).$$

Como as separatrizes não  $J$ -invariantes que são isoladas aparecem em pares, vale

$$\sum_{B_{\mathbb{C}} \in \text{Iso}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})} \nu_0(B_{\mathbb{C}}) \equiv \sum_{\substack{B_{\mathbb{C}} \in \text{Iso}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}) \\ J\text{-invariante}}} \nu_0(B_{\mathbb{C}}) \pmod{2}.$$

Visto que a interseção de uma separatriz isolada  $J$ -invariante de  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  com o traço real se identifica com uma separatriz isolada de  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ , e que as equações de uma separatriz real e de seu complexificado coincidem, tem-se  $\nu_0(B_{\mathbb{R}}) = \nu_0(B_{\mathbb{C}})$ , e portanto

$$(47) \quad \sum_{B_{\mathbb{C}} \in \text{Iso}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})} \nu_0(B_{\mathbb{C}}) \equiv \sum_{\substack{B_{\mathbb{R}} \in \text{Iso}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}) \\ J\text{-invariante}}} \nu_0(B_{\mathbb{R}}) \pmod{2}.$$

Agora, separamos as componentes dicríticas  $J$ -invariantes das dicríticas não  $J$ -invariantes de  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ , e temos que

$$\begin{aligned} \sum_{D_{\mathbb{C}} \in \text{Dic}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})} (2 - \text{Val}_{\mathbb{C}}(D_{\mathbb{C}})) \rho(D_{\mathbb{C}}) &= \sum_{\substack{D_{\mathbb{C}} \in \text{Dic}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}) \\ J\text{-invariante}}} (2 - \text{Val}_{\mathbb{C}}(D_{\mathbb{C}})) \rho(D_{\mathbb{C}}) \\ &\quad + \sum_{\substack{D_{\mathbb{C}} \in \text{Dic}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}) \\ \text{não } J\text{-invariante}}} (2 - \text{Val}_{\mathbb{C}}(D_{\mathbb{C}})) \rho(D_{\mathbb{C}}). \end{aligned}$$

Como a quantidade de componentes dicríticas  $D_{\mathbb{C}}$  que não são  $J$ -invariantes é par, e usando (45), obtemos

$$(48) \quad \sum_{D_{\mathbb{C}} \in \text{Dic}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})} (2 - \text{Val}_{\mathbb{C}}(D_{\mathbb{C}})) \rho(D_{\mathbb{C}}) \equiv \sum_{D_{\mathbb{R}} \in \text{Dic}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}})} (2 - \text{Val}_{\mathbb{R}}(D_{\mathbb{R}})) \rho(D_{\mathbb{R}}) \pmod{2}.$$

Ao substituir (47) e (48) em (46),

$$\nu_0(\mathcal{B}_{\mathbb{C}}) \equiv \sum_{B \in \text{Iso}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}})} \nu_0(B_{\mathbb{R}}) + \sum_{D_{\mathbb{R}} \in \text{Dic}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}})} (2 - \text{Val}_{\mathbb{R}}(D_{\mathbb{R}})) \rho(D_{\mathbb{R}}) \pmod{2},$$

chegamos a

$$\nu_0(\mathcal{B}_{\mathbb{C}}) \equiv \nu_0(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \pmod{2}.$$

□

**Proposição 4.5.5.** *Seja  $X_{\mathbb{R}}$  um germe de campo vetorial analítico real com singularidade algebricamente isolada na origem de  $(\mathbb{R}^2, 0)$ , com complexificação  $X_{\mathbb{C}}$ . Denote por  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$*

e  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  as folheações induzidas por eles. Se  $\tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  e  $\tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})$  são os índices de excesso de tangência de  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  e  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ , respectivamente, então

$$\tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}) \equiv \tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}) \pmod{2}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Da equação (21), temos que o excesso de tangência de  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  é

$$\tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}) = \sum_{q \in \text{SN}(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}})} \rho(D_{\mathbb{C},q})(i_q^w(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}) - 1).$$

Se consideramos, por um lado, as separatrizes reais ( $J$ -invariantes) e, por outro, as separatrizes puramente complexas (não  $J$ -invariantes), podemos escrever o excesso de tangência de  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  como

$$\tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}) = \sum_{q \in \text{SN}^r(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}})} \rho(D_{\mathbb{C},q})(i_q^w(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}) - 1) + \sum_{q \in \text{SN}^c(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}})} \rho(D_{\mathbb{C},q})(i_q^w(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}) - 1).$$

A primeira parcela pode ser par ou ímpar. Porém, a segunda parcela sempre é par, pois as singularidades do tipo sela-nó tangente que estão fora do traço real aparecem aos pares e têm o mesmo índice fraco  $i_q^w(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}})$ . Então

$$\tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}) \equiv \sum_{q \in \text{SN}^r(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}})} \rho(D_{\mathbb{C},q})(i_q^w(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}) - 1) \pmod{2}.$$

Como  $q \in \text{SN}^r(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}})$  está no traço real,  $\rho(D_{\mathbb{C},q}) = \rho(D_{\mathbb{R},q})$  e  $i_q^w(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}) = i_q^w(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{R}})$ . Portanto,

$$\tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}) \equiv \sum_{q \in \text{SN}(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{R}})} \rho(D_{\mathbb{R},q})(i_q^w(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{R}}) - 1) \pmod{2}.$$

Concluimos que

$$(49) \quad \tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}) \equiv \tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}) \pmod{2}.$$

□

Adaptando [13, Prop.3.3] ao contexto dessa seção, temos o seguinte:

**Proposição 4.5.6.** *Sejam,  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  um germe de folheação holomorfa singular em  $(\mathbb{C}^2, 0)$ , e  $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$  um divisor equilibrado complexo de separatrizes de  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ . Denotando por  $\nu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})$  a multiplicidade algébrica de  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  e por  $\nu_0(\mathcal{B}_{\mathbb{C}})$  a multiplicidade algébrica do divisor equilibrado, temos*

$$\nu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}) = \nu_0(\mathcal{B}_{\mathbb{C}}) - 1 + \tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}).$$

O seguinte resultado dá condições suficientes, em termos da multiplicidade algébrica, para a existência de separatrizes em  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ :

**Proposição 4.5.7.** *Seja  $X_{\mathbb{R}}$  um germe de campo analítico real com singularidade algebricamente isolada na origem de  $(\mathbb{R}^2, 0)$ . Denote por  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  a folheação induzida. Suponhamos que  $\nu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}) \equiv \tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}) \pmod{2}$ . Então,  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  tem pelo menos uma separatriz.*

DEMONSTRAÇÃO. Da Proposição 4.5.6, temos que

$$\nu_0(\mathcal{B}_{\mathbb{C}}) = \nu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}) - \tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}) + 1.$$

Por definição,  $\nu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}) = \nu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}})$ . Das Proposições 4.5.4 e 4.5.5, temos respectivamente que  $\nu_0(\mathcal{B}_{\mathbb{C}}) \equiv \nu_0(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \pmod{2}$  e que  $\tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}) \equiv \tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}) \pmod{2}$ . Então

$$\nu_0(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \equiv \nu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}) - \tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}) + 1 \pmod{2}.$$

Assim, a condição  $\nu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}) \equiv \tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}) \pmod{2}$ , implica que  $\nu_0(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \equiv 1 \pmod{2}$ . E isso só pode acontecer quando  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  tem pelo menos uma separatriz.  $\square$

O principal resultado dessa seção é

**Teorema A.** *Seja  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  um germe de folheação do tipo curva generalizada real topológica. Se  $\nu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  é par, então existe uma separatriz em  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ .*

DEMONSTRAÇÃO. Observamos que se  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  é uma folheação curva generalizada real topológica, cada sela-nó ou bem é sela topológica ou bem é nó topológico. Em ambos os casos, o índice fraco  $i_q^w(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{R}})$  é ímpar. Como  $\tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}) \equiv \sum_{q \in \text{SN}(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{R}})} \rho(D_{\mathbb{R},q})(i_q^w(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{R}}) - 1)$ , então  $\tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  é par. Usando a proposição 4.5.7, obtemos diretamente nosso resultado.  $\square$

O Teorema A fornece outra demonstração para um dos principais resultados de [22]:

**Corolário 4.5.8.** *Se  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  é uma folheação curva generalizada real com  $\nu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  par, então  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  tem pelo menos uma separatriz convergente (analítica).*

DEMONSTRAÇÃO. A existência da separatriz, a princípio formal, que denotaremos por  $B_{\mathbb{R}}$ , é obtida diretamente do Teorema A, pelo fato que uma folheação curva generalizada real é uma folheação curva generalizada real topológica. Após redução de singularidades, o levantamento da separatriz  $B_{\mathbb{R}}$ , que denotamos  $\tilde{B}_{\mathbb{R}}$ , toca o divisor  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$  em uma singularidade  $q$  do tipo traço que é do tipo não degenerada, pois a folheação é do tipo curva generalizada real. Por esse motivo,  $q$  só possui duas separatrizes convergentes, sendo  $\tilde{B}_{\mathbb{R}}$  uma de elas. Portanto,  $B_{\mathbb{R}}$  é convergente.  $\square$

De [16, Th.9.13], um germe de folheação real é *centro-foco* se e somente se, após um processo de redução de singularidades, não possui singularidades fora das esquinas do divisor (singularidades tipo traço) e possui apenas selas topológicas nas esquinas do divisor excepcional, e além disso, todos os blow-ups que levam a essa redução são não-dicríticos. Segue da definição que  $\text{Sep}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  não tem elementos. Além disso,  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  não admite singularidades do tipo sela-nó topológica em sua redução de singularidades. Portanto, uma folheação centro-foco é uma folheação curva generalizada real topológica. Considerando isso, conseguimos o seguinte resultado que foi obtido também em [22, Cor.3.5].

**Corolário 4.5.9.** *Se  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  é uma folheação centro-foco, então  $\nu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  é ímpar.*

DEMONSTRAÇÃO. Se  $\nu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  fosse par, pelo Teorema A, a folheação  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  teria pelo menos uma separatriz. Porém isso é uma contradição com o fato de ser centro-foco.  $\square$

#### 4.6. O número de Milnor e a existência de separatrizes reais

O número de Milnor de  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  é definido por

$$\mu(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}) = \dim \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{(P_{\mathbb{C}}, Q_{\mathbb{C}})},$$

onde  $(P_{\mathbb{C}}, Q_{\mathbb{C}})$  é o ideal gerado por  $P_{\mathbb{C}}$  e  $Q_{\mathbb{C}}$ . Para o contexto de nosso trabalho definimos o número de Milnor de  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  como  $\mu(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}) = \mu(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})$ . Seja  $\zeta_{\mathbb{C}}$  um ramo formal invariante pela conjugação  $J$  e que não é invariante por  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ . Seja  $\zeta_{\mathbb{R}}$  o ramo formal não invariante por  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  que se identifica com a interseção de  $\zeta_{\mathbb{C}}$  com o traço real, e sejam  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}$  e  $\tilde{\zeta}_{\mathbb{C}}$  as

transformadas estritas de  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  e  $\zeta_{\mathbb{C}}$ , em cada  $q \in \mathcal{I}(\zeta_{\mathbb{C}})$ . Pela Definição 3.2.9, temos que o *índice do excesso de tangência* de  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  ao longo de  $\zeta_{\mathbb{C}}$  é

$$(50) \quad \tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}, \zeta_{\mathbb{C}}) = \sum_{q \in \mathcal{I}(\zeta_{\mathbb{C}})} \tau_q(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}) \nu_q(\tilde{\zeta}_{\mathbb{C}}).$$

Seja  $\Gamma_{\mathbb{C}}$  uma curva reduzida tal que nenhuma de suas componentes irredutíveis  $\zeta_{\mathbb{C},i}$  é invariante por  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ , e  $\Gamma_{\mathbb{C}} = \cup_{i=1}^k \zeta_{\mathbb{C},i}$  sua escrita em componentes irredutíveis. Pela definição 3.2.11, o *índice do excesso de tangência* de  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  ao longo de  $\Gamma_{\mathbb{C}}$  é

$$(51) \quad \tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}, \Gamma_{\mathbb{C}}) = \sum_{i=1}^k \tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}, \zeta_{\mathbb{C},i}).$$

E definimos para o caso real:

**Definição 4.6.1.** Se  $\zeta_{\mathbb{R}}$  é um ramo formal não invariante por  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ , o *índice do excesso de tangência* de  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  ao longo de  $\zeta_{\mathbb{R}}$  é

$$(52) \quad \tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}, \zeta_{\mathbb{R}}) = \sum_{q \in \mathcal{I}(\zeta_{\mathbb{R}})} \tau_q(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{R}}) \nu_q(\tilde{\zeta}_{\mathbb{R}}),$$

onde  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{R}}$  e  $\tilde{\zeta}_{\mathbb{R}}$  são as transformadas estritas de  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  e  $\zeta_{\mathbb{R}}$ , em cada  $q \in \mathcal{I}(\zeta_{\mathbb{R}})$ .

**Definição 4.6.2.** Se  $\Gamma_{\mathbb{R}}$  é uma curva reduzida tal que nenhuma de suas componentes irredutíveis  $\zeta_{\mathbb{R}}$  é invariante por  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ , e  $\Gamma_{\mathbb{R}} = \cup_{i=1}^k \zeta_{\mathbb{R},i}$  sua escrita em componentes irredutíveis. O *índice de excesso de tangência* de  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  ao longo de  $\Gamma_{\mathbb{R}}$  é

$$(53) \quad \tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}, \Gamma_{\mathbb{R}}) = \sum_{i=1}^k \tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}, \zeta_{\mathbb{R},i}).$$

Visto que  $P_{\mathbb{C}}$  e  $Q_{\mathbb{C}}$  tem coeficientes reais, escolhemos  $a$  e  $b$  reais, tal que  $aP_{\mathbb{C}} - bQ_{\mathbb{C}} = 0$ . Assim, a decomposição da curva polar genérica  $\Gamma_{\mathbb{C}} = \mathcal{P}_{(a:b)}$  é simétrica com respeito ao traço real e as componentes puramente complexas (não  $J$ -simétricos) aparecem aos pares. Nesse contexto, a curva  $\Gamma_{\mathbb{R}}$  que é a restrição da curva  $\Gamma_{\mathbb{C}}$  ao traço real é denominada *curva polar genérica real* para  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ , e se identifica com a união das componentes  $J$ -simétricas de  $\Gamma_{\mathbb{C}}$ . Diretamente da definição 3.2.2, o *número de interseção polar* de  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  com respeito a uma separatriz  $B_{\mathbb{C}}$  é o número inteiro:

$$(54) \quad p_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}, B_{\mathbb{C}}) = (\mathcal{P}_{(a:b)}, B_{\mathbb{C}})_0,$$

com  $(a : b) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$  genérico, onde, pelo nosso contexto,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dada a separatriz  $B_{\mathbb{R}}$ , o *número de interseção polar* de  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  com respeito a  $B_{\mathbb{R}}$  é o número inteiro:

$$p_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}, B_{\mathbb{R}}) = (\mathcal{P}_{(a:b)}, B_{\mathbb{R}})_0 = \text{ord}_{t=0}((aP - bQ) \circ \gamma_{B_{\mathbb{R}}}(t)),$$

com  $(a : b) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$  genérico e  $\gamma_{B_{\mathbb{R}}}(t)$  é uma parametrização de Puiseux de  $B_{\mathbb{R}}$ . Diretamente da definição 3.2.3, temos que o *número de interseção polar* de  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  com respeito a um divisor de separatrizes  $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$  é

$$(55) \quad p_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}}) = \sum_{B_{\mathbb{C}} \in \text{Sep}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})} a_{B_{\mathbb{C}}} \cdot p_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}, B_{\mathbb{C}}).$$

**Definição 4.6.3.** Dado um divisor de separatrizes  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  para  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ , o *número de interseção polar de  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  com respeito a  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$*  é

$$(56) \quad p_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) = \sum_{B_{\mathbb{R}} \in \text{Sep}_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}})} a_{B_{\mathbb{R}}} \cdot p_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}, B_{\mathbb{R}}).$$

A versão real do teorema 3.2.12 é:

**Proposição 4.6.4.** *Sejam  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  uma folheação analítica real com singularidade algebricamente isolada na origem de  $(\mathbb{R}^2, 0)$  e  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  um divisor equilibrado de separatrizes. Então*

$$p_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \equiv \mu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}) + \nu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}) - \tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}, \Gamma_{\mathbb{R}}) \pmod{2},$$

onde  $\Gamma_{\mathbb{R}}$  é uma curva polar real genérica.

**DEMONSTRAÇÃO.** Pelo Teorema 3.2.12, podemos afirmar diretamente que se  $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$  é um divisor equilibrado de separatrizes para  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  então, para toda curva polar genérica  $\Gamma_{\mathbb{C}}$ , o número de interseção polar satisfaz

$$(57) \quad p_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}}) = \mu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}) + \nu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}) - \tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}, \Gamma_{\mathbb{C}}).$$

Por definição

$$(58) \quad \mu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}) = \mu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}) \text{ e } \nu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}) = \nu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}).$$

De (49), temos que  $\tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}) \equiv \tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}) \pmod{2}$ , e como no traço real  $\nu_q(\tilde{\zeta}_{\mathbb{R}}) = \nu_q(\tilde{\zeta}_{\mathbb{C}})$ , então das equações (50) e (52) obtemos  $\tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}, \zeta_{\mathbb{R}}) \equiv \tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}, \zeta_{\mathbb{C}}) \pmod{2}$ . Com isso, das equações (51) e (53) chegamos a

$$(59) \quad \tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}, \Gamma_{\mathbb{R}}) \equiv \tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}, \Gamma_{\mathbb{C}}) \pmod{2}.$$

Uma vez que as componentes  $B_{\mathbb{C}}$  do divisor  $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$  que não são  $J$ -simétricos aparecem aos pares, obtemos

$$(60) \quad p_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \equiv p_0(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}}) \pmod{2}.$$

Aplicando (58), (59) e (60) em (57), obtemos

$$p_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \equiv \mu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}) + \nu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}) - \tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}, \Gamma_{\mathbb{R}}) \pmod{2}.$$

□

Observamos que se  $p_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$  é ímpar, então  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  terá separatriz real. Assim, obtemos o seguinte resultado:

**Proposição 4.6.5.** *Sejam  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  uma folheação analítica real com singularidade algebricamente isolada em  $(\mathbb{R}^2, 0)$ ,  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$  um divisor equilibrado de separatrizes real,  $\tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}, \Gamma_{\mathbb{R}})$  o excesso de tangência de  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  ao longo de  $\Gamma_{\mathbb{R}}$ , onde  $\Gamma_{\mathbb{R}}$  é uma curva polar real genérica. Se*

$$\mu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}) + \nu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}) \equiv \tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}, \Gamma_{\mathbb{R}}) + 1 \pmod{2},$$

então  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  tem pelo menos uma separatriz formal.

A seguir apresentamos o resultado principal dessa seção:

**Teorema B.** *Suponhamos que  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  seja uma folheação do tipo curva generalizada real topológica. Se  $\mu(\mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  é par, então  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  tem pelo menos uma separatriz.*

DEMONSTRAÇÃO. Se  $\nu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  fosse par, pelo Teorema A, a folheação  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  teria pelo menos uma separatriz. Por outro lado, se  $\nu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  fosse ímpar, consideremos  $\Gamma_{\mathbb{R}}$  uma curva polar genérica e denotemos  $\zeta_{\mathbb{R},i}$  a cada ramo não invariante dela. Como no processo de redução de singularidades a folheação  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  não admite pontos singulares do tipo sela-nó topológico, temos que em cada ponto infinitamente próximo de cada ramo  $\zeta_{\mathbb{R},i}$  o índice de excesso de tangência  $\tau_0$  é par. Então, pelas equações (52) e (53) temos que  $\tau_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}, \Gamma_{\mathbb{R}})$  é também par. Juntando isso ao fato que  $\mu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  é par, pela Proposição 4.6.5, a folheação  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  tem pelo menos uma separatriz formal.  $\square$

Com argumentos similares aos das provas dos Corolários 4.5.8 e 4.5.9, obtemos os dois seguintes resultados que aparecem também em [22]:

**Corolário 4.6.6.** *Se  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  é uma folheação curva generalizada real com  $\mu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  par, então  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  tem pelo menos uma separatriz analítica.*

**Corolário 4.6.7.** *Se  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  é uma folheação centro foco, então  $\mu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  é ímpar.*

Quando a redução de singularidades admite singularidades do tipo sela-nó, podem aparecer separatrizes não convergentes. De [20, Prop. 10], temos o seguinte exemplo de curva generalizada real topológica, com  $\mu = 6$ ,  $\nu = 2$ , que para valores genéricos de  $a(x)$  possui apenas uma única separatriz real puramente formal.

**Exemplo 4.6.8.** Seja  $a = a(x) \in \mathbb{R}\{x\}$  uma série convergente em uma variável tal que  $a(0) = a'(0) = 0$  e considere

$$X_{\mathbb{R}} = (y^2 + x^4) \frac{\partial}{\partial x} + \left( -xy + x^3 a(x) + \frac{a(x)}{x} y^2 \right) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Após de um blow-up  $\pi_1 : (x, y_1) \mapsto (x, y = xy_1)$ , a transformada estrita da folheação tem uma única singularidade sobre  $D_1 = \pi_1^{-1}(0)$ , situada em  $(x, y_1) = (0, 0)$ , que é uma sela-nó com uma separatriz forte contida em  $D_1$ . Outra explosão  $\pi_1 : (x, y_2) \mapsto (x, y_1 = xy_2)$  produz como transformada estrita a folheação induzida na origem por

$$x^3 \frac{\partial}{\partial x} + (-y_2(1 + b(x, y_2)) + a(x)) \frac{\partial}{\partial y_2},$$

onde  $b(x, y_2)$  contém os termos de ordem pelo menos dois. O índice fraco da sela-nó é  $i^w = 3$  e não é uma sela-nó topológica (é uma sela topológica, que pode ser convertida em um nó topológico, alterando  $y$  por  $-y$  nos coeficientes de  $X_{\mathbb{R}}$ ). O campo vetorial  $X_{\mathbb{R}}$  é, portanto, uma curva generalizada real topológica cuja única separatriz (para uma escolha genérica de  $a(x)$ ) é puramente formal. Como  $\nu_0(X_{\mathbb{R}}) = 2$  e  $\mu_0(X_{\mathbb{R}}) = 6$  são pares temos que as afirmações dos Teoremas A e B não podem ser melhoradas pedindo uma separatriz convergente.

O seguinte resultado considera uma família de folheações mais extensa que a família de folheações de segundo tipo. Essa é a *família de folheações do segundo tipo real topológica* (as que após dessingularização, não tem alguma sela-nó topológica tangente).

**Corolário 4.6.9.** *Se  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  é uma folheação do segundo tipo real topológica, tal que  $\mu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  é par ou  $\nu_0(\mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  é par, então  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  tem pelo menos uma separatriz formal.*

DEMONSTRAÇÃO. Se  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ , a folheação do segundo tipo real topológica, não tivesse separatriz, não teria singularidades tipo traço e portanto seria uma folheação curva topológica generalizada. O que contradiz os Teoremas A e B.  $\square$

## CAPÍTULO 5

## Existência de separatrizes de 1-formas integráveis em $(\mathbb{C}^3, 0)$ e $(\mathbb{R}^3, 0)$

Um germe de 1-forma analítica complexa em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  com conjunto singular de dimensão no máximo 1 é representado por

$$(61) \quad \omega = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz,$$

onde  $P, Q, R$  são elementos do anel  $\mathbb{C}\{x, y, z\}$  de germes de funções holomorfas sem fator comum e  $\omega$  satisfaz a condição de integrabilidade de Frobenius  $\omega \wedge d\omega = 0$  (ver Subseção 1.1.7.3). Denotamos  $\mathcal{F}$  a folheação analítica complexa de codimensão 1 induzida por  $\omega$ . O conjunto singular de  $\mathcal{F}$  definido por

$$\text{Sing}(\mathcal{F}) = \{(x, y, z) : P = Q = R = 0\}$$

é um subconjunto analítico fechado de codimensão  $\geq 2$ . Diferentemente do caso bidimensional, o conjunto singular de um germe de folheação holomorfa em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ , definido por uma 1-forma holomorfa integrável  $\omega$ , pode ter dimensão um e as folhas são superfícies e não curvas.

**Definição.** Um germe de superfície  $B$  é denominado *separatriz formal* ou simplesmente *separatriz* de  $\mathcal{F}$  se é um germe de superfície formal, irredutível e invariante, que passa pela origem de  $(\mathbb{C}^3, 0)$ , isto é, um objeto dado por uma função formal irredutível  $f \in \mathbb{C}[[x, y, z]]$ , tal que

$$\omega \wedge df = f\theta$$

para alguma 2-forma analítica complexa  $\theta$ .

O conjunto de separatrizes de  $\mathcal{F}$  é denotado por  $\text{Sep}(\mathcal{F})$ .

### 5.1. Composição de blow-ups com centros em pontos ou curvas lisas

Para a composição de blow-ups em dimensão 3, usamos blow-ups em centros  $Y$  (que podem ser pontos ou curvas lisas e cuja análise foi feita nas Seções 2.7 e 2.8).

$$\pi^Y : \left( (\tilde{\mathbb{C}}^3)^Y, D^Y \right) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0).$$

Cada blow-up  $\pi^Y$  é um morfismo próprio entre espaços ambientes não singulares que induz um isomorfismo fora de  $Y$  e fora do divisor excepcional  $D^Y = (\pi^Y)^{-1}(Y)$ . A transformada estrita  $\mathcal{F}^1$  de  $\mathcal{F}$  por  $\pi^Y$  é a folheação definida localmente pelo pull-back  $(\pi^Y)^*\omega$ . Podemos aplicar novamente outro blow-up em outro centro e assim sucessivamente, obtendo a composição

$$\sigma = \pi^{Y_1} \circ \dots \circ \pi^{Y_{k-1}} \circ \pi^{Y_k}.$$

Esse processo pode ser recommençado uma e outra vez considerando composições sucessivas de blow-ups em centros  $Y_j$ ,

$$\pi^{Y_j} : (\widetilde{M}^j, \mathcal{D}^j) \rightarrow (\widetilde{M}^{j-1}, \mathcal{D}^{j-1}),$$

para  $j = 1, \dots, k$ , onde

- $(\widetilde{M}^0, \mathcal{D}^0) = (\mathbb{C}^3, 0)$ ,  $(\widetilde{M}^1, \mathcal{D}^1) = ((\widetilde{\mathbb{C}}^3)^{Y_1}, D^{Y_1})$ ,
- o blow-up com centro  $Y_1$  é  $\pi^{Y_1} : (\widetilde{M}^1, \mathcal{D}^1) \rightarrow (\widetilde{M}^0, \mathcal{D}^0)$ ,
- cada  $\pi^{Y_j}$  é um blow-up complexo com centro  $Y_j$ ,
- para cada  $j = 1, \dots, k$ , temos que o divisor é  $\mathcal{D}^j = (\pi^{Y_1} \circ \dots \circ \pi^{Y_{j-1}} \circ \pi^{Y_j})^{-1}(Y_1)$  e  $\mathcal{F}^j = (\pi^{Y_1} \circ \dots \circ \pi^{Y_{j-1}} \circ \pi^{Y_j})^*(\mathcal{F})$ .

Denotando  $(\widetilde{M}, \mathcal{D})$  a  $(\widetilde{M}^k, \mathcal{D}^k)$  podemos descrever a sequência de blow-ups por

$$\sigma = \pi^{Y_1} \circ \dots \circ \pi^{Y_{k-1}} \circ \pi^{Y_k} : (\widetilde{M}, \mathcal{D}) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0),$$

onde  $\mathcal{D} = \sigma^{-1}(Y_1)$ . Denotamos por  $\widetilde{\mathcal{F}} = \sigma^*\mathcal{F}$  a transformada estrita de  $\mathcal{F}$  pela sequência de blow-ups. Especificamente para nosso estudo, onde os coeficientes de  $P, Q, R$  são reais, podemos assumir que essa sequência de blow-ups complexos define uma única involução canônica

$$\widetilde{J} : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M},$$

tal que  $\sigma_{\mathbb{C}} \circ \widetilde{J} = J \circ \sigma_{\mathbb{C}}$ . Pois, de forma análoga ao caso bidimensional, quando o blow-up é feito em torno de um centro  $Y_j$  que não é invariante por conjugação complexa, fazemos também outro blow-up cujo centro seja o levantamento do conjunto singular que é simétrico por conjugação complexa a  $Y_j$ . Veremos isso com detalhes na Seção 5.5.

Assim após aplicar uma sequência finita de blow-ups obtemos um divisor excepcional  $\mathcal{D}$  que surge do processo descrito anteriormente. Se, nesse processo, ao fazer um blow-up  $\pi^{Y_j}$ , sobre um centro  $Y_j$ , obtemos uma componente  $D^{Y_j} = (\pi^{Y_j})^{-1}(Y_j)$ , que é invariante por  $\mathcal{F}^j$ , o blow-up  $\pi^{Y_j}$  é denominado *blow-up não-dicrítico* e a componente  $D^{Y_j}$  é denominada *componente não-dicrítica*. Caso contrário, são denominados *blow-up dicrítico* e *componente dicrítica*, respectivamente. Após aplicar todos os  $k$  blow-ups da sequência total, denotamos também  $D^{Y_j}$  ao levantamento dessa componente  $D^{Y_j}$ , observando que essa nova  $D^{Y_j}$  é uma componente no divisor  $\mathcal{D}^k$ . Uma folheação singular  $\mathcal{F}$  é *dicrítica* se existe uma sequência de blow-ups com centros permissíveis contendo um blow-up dicrítico. Em  $(\mathbb{C}^2, 0)$  uma folheação dicrítica tem a propriedade de ter infinitas separatrizes. Em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  existem folheações dicríticas singulares que não tem separatrizes. Por exemplo, a folheação de Jouanolou [17], que é induzida pela 1-forma

$$\omega = (x^m y - z^{m+1})dx + (y^m z - x^{m+1})dy + (z^m x - y^{m+1})dz,$$

onde  $m \geq 2$ , é dicrítica, pois o primeiro blow-up é dicrítico, e não tem separatrizes. Em [7], Cano e Cerveau provaram que uma folheação holomorfa singular não-dicrítica em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  tem pelo menos uma separatriz convergente.



### 5.2. Redução de singularidades no caso não-dicrítico complexo

Procuramos escolher adequadamente centros  $Y$ , que podem ser pontos ou curvas lisas, e aplicar sucessivos blow-ups para obter singularidades que sejam o mais simples possível. Esse processo é chamado de *redução de singularidades*. Toda folheação holomorfa de codimensão 1 em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  admite um processo de redução de singularidades. O caso não-dicrítico foi estudado por Cano e Cerveau em [7], e o caso dicrítico foi estudado por Cano em [6]. Em nosso estudo, consideramos  $\mathcal{F}$  não-dicrítica. Os centros  $Y$  que permitem atingir esse objetivo, são chamados de *centros permissíveis*. Eles vão impedir gerar situações estranhas. Por exemplo, consideremos a folheação não singular em  $\mathbb{C}^3$  definida por  $dz = 0$  e consideremos com centro  $Y$  a curva  $x = y = 0$ , que corta todas as folhas, então obtemos um blow-up dicrítico, o que não devemos permitir. De forma geral, um centro permissível deve estar contido numa única folha ou deve estar contida no  $\text{Sing}(\mathcal{F})$ .

**Definição 5.2.1.** Seja  $M$  uma variedade complexa de dimensão 3. Um subconjunto  $E \subset M$  é um *divisor com cruzamentos normais* em  $M$  se, localmente, em cada  $p \in E$ , é a união finita de no máximo três superfícies lisas não tangentes entre elas passando por  $p$ .

Note que, em dimensão três, o divisor  $E$  é localmente isomorfo a uma união finita de planos coordenados. Ou seja, num sistema de coordenadas  $x_1, x_2, x_3$ , localmente, módulo difeomorfismo holomorfo, os possíveis casos para  $E$  são:  $x_1 = 0$ ,  $x_1x_2 = 0$ ,  $x_1x_2x_3 = 0$ . Dizemos que uma curva  $Y$  tem *cruzamentos normais* com o divisor  $E$ , quando existe um sistema de coordenadas analíticas no qual a curva é um dos eixos coordenados e o divisor é uma união de planos coordenados. Ressaltamos que a curva  $Y$  pode não estar contida no divisor de cruzamentos normais  $E$ . Se  $Y$  tem cruzamentos normais com o divisor  $E$ , podemos considerar um novo divisor de cruzamentos normais  $E^1 = (\pi^Y)^{-1}(E \cup Y)$  e continuar com o processo de aplicar sucessivos blow-ups, caso seja necessário. Para o contexto de nosso trabalho, em que  $\mathcal{F}$  é não dicrítica, consideramos a seguinte definição.

**Definição 5.2.2.** Um subconjunto  $Y \neq \emptyset$  é chamado de *centro permissível* se é um ponto contido no  $\text{Sing}(\mathcal{F})$  ou é uma curva lisa contida no  $\text{Sing}(\mathcal{F})$  que tem cruzamentos normais com o divisor de cruzamentos normais  $E$ .

**Definição 5.2.3.** Seja  $\mathcal{F}$  um germe de folheação de codimensão um, definido em uma vizinhança de um ponto  $p \in M$  (onde  $M$  é uma variedade holomorfa de dimensão três) pela 1-forma integrável  $\omega$ , e seja  $E$  um germe de divisor com cruzamentos normais em  $M$  passando por  $p$  e invariante por  $\mathcal{F}$ . O *tipo dimensional* de  $\mathcal{F}$  em  $p \in E$ , denotado por  $\tau_p(\mathcal{F})$  ou por  $\tau_p$ , é o menor número de variáveis necessárias para expressar a equação  $\omega = 0$  em algum sistema de coordenadas locais.

Em dimensão três, as singularidades simples de tipo dimensional dois são descritos por modelos formais:

(a)

$$\omega = xy \left( \lambda_1 \frac{dx}{x} + \lambda_2 \frac{dy}{y} \right),$$

onde  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$  são tais que  $m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 \neq 0$  sempre que  $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  com pelo menos um deles diferente de zero;

(b<sub>1</sub>)

$$\omega = xy \left( p_1 \frac{dx}{x} + p_2 \frac{dy}{y} + \phi(x^{p_1} y^{p_2}) \lambda_2 \frac{dy}{y} \right),$$

onde  $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$ ,  $\phi \in \mathbb{C}[[z]]$  é uma não-unidade e  $\lambda_2 \in \mathbb{C}^*$ ;

(b<sub>2</sub>)

$$\omega = xy \left( p_1 \frac{dx}{x} + \phi(x^{p_1}) \lambda_2 \frac{dy}{y} \right),$$

onde  $p_1 \in \mathbb{Z}_{>0}$ ,  $\phi \in \mathbb{C}[[z]]$  é uma não-unidade e  $\lambda_2 \in \mathbb{C}^*$ .

Esses modelos correspondem aos modelos simples bidimensionais, onde os casos (a) e (b<sub>1</sub>) são singularidades não degeneradas e o caso (b<sub>2</sub>) é singularidade do tipo sela-nó. Os modelos de singularidades simples de tipo dimensional três são descritos por modelos formais:

(A)

$$\omega = xyz \left( \lambda_1 \frac{dx}{x} + \lambda_2 \frac{dy}{y} + \lambda_3 \frac{dz}{z} \right),$$

onde  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}^*$  são tais que  $m_1 \lambda_1 + m_2 \lambda_2 + m_3 \lambda_3 \neq 0$  sempre que  $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  com pelo menos um deles diferente de zero;

(B<sub>1</sub>)

$$\omega = xyz \left( p_1 \frac{dx}{x} + \phi(x^{p_1}) \left( \lambda_2 \frac{dy}{y} + \lambda_3 \frac{dz}{z} \right) \right),$$

onde  $p_1 \in \mathbb{Z}_{>0}$ ,  $\phi \in \mathbb{C}[[z]]$  é uma não-unidade e  $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}^*$  satisfaz  $m_2 \lambda_2 + m_3 \lambda_3 \neq 0$  sempre que  $m_2, m_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  com pelo menos um deles diferente de zero;

(B<sub>2</sub>)

$$\omega = xyz \left( p_1 \frac{dx}{x} + p_2 \frac{dy}{y} + \phi(x^{p_1} y^{p_2}) \left( \lambda_2 \frac{dy}{y} + \lambda_3 \frac{dz}{z} \right) \right),$$

onde  $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$ ,  $\phi \in \mathbb{C}[[z]]$  é uma não-unidade e  $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}^*$  satisfaz  $m_2 \lambda_2 + m_3 \lambda_3 \neq 0$  sempre que  $m_2, m_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  com pelo menos um deles diferente de zero;

(B<sub>3</sub>)

$$\omega = xyz \left( p_1 \frac{dx}{x} + p_2 \frac{dy}{y} + p_3 \frac{dz}{z} + \phi(x^{p_1} y^{p_2} z^{p_3}) \left( \lambda_2 \frac{dy}{y} + \lambda_3 \frac{dz}{z} \right) \right),$$

onde  $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{Z}_{>0}$ ,  $\phi \in \mathbb{C}[[z]]$  é uma não-unidade e  $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}^*$  satisfaz  $m_2 \lambda_2 + m_3 \lambda_3 \neq 0$  sempre que  $m_2, m_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  com pelo menos um deles diferente de zero.

As singularidades que correspondem aos modelos (A) e (B<sub>3</sub>) são chamadas singularidades hiperbólicas complexas simples (caso não degenerado), e as que correspondem aos modelo (B<sub>1</sub>) ou (B<sub>2</sub>) são denominadas singularidades do tipo sela-nó. O conjunto singular é formado por curvas analíticas transversais correspondentes aos eixos de coordenadas. Localmente, as singularidades fora da origem são do tipo dimensional 2.

A importância das singularidades simples, centros e blow-ups permissíveis para nosso estudo no caso não-dicrítico em dimensão 3, reside no seguinte teorema de [7]:

**Teorema 5.2.4** (Redução de singularidades de Cano e Cerveau). *Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação não-dicrítica em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ . Então existe uma sequência finita de blow-ups permissíveis*

$$(\mathbb{C}^3, 0) = M_0 \xleftarrow{\pi_{Y_1}} M_1 \xleftarrow{\pi_{Y_2}} \dots \xleftarrow{\pi_{Y_n}} M_n = (\widetilde{M}, \mathcal{D})$$

tal que  $\tilde{\mathcal{F}}$ , a transformada estrita de  $\mathcal{F}$  por essa sequência, tem apenas singularidades simples.

Esse resultado foi estendido para o caso dicrítico por Cano em [6]. Esse teorema quer dizer que sempre é possível encontrar uma sequência finita de blow-ups permissíveis com centros permissíveis  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}, Y_n$ :

$$\sigma = \pi^{Y_1} \circ \dots \circ \pi^{Y_{n-1}} \circ \pi^{Y_n} : (\tilde{M}, \mathcal{D}) \rightarrow (\mathbb{C}^3, \text{Sing}(\mathcal{F})),$$

tal que cada singularidade obtida é simples. Ditos blow-ups permissíveis podem ser *puntuais*, se o centro permissível é um ponto, ou *monoidais* se o centro permissível é um germe de curva lisa.

Como mencionamos anteriormente, no caso específico de nosso trabalho, e que será justificado na Seção 5.5, podemos considerar que a involução canônica definida por

$$J : (x, y, z) \in (\mathbb{C}^3, 0) \mapsto (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in (\mathbb{C}^3, 0),$$

é levantada por  $\sigma$  a uma única involução canônica

$$\tilde{J} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M},$$

tal que  $\sigma \circ \tilde{J} = J \circ \sigma$ .

### 5.3. Germe de folheação analítica real singular de codimensão 1 em $(\mathbb{R}^3, 0)$

Um germe de 1-forma analítica real em  $(\mathbb{R}^3, 0)$  é representado por

$$(62) \quad \omega_{\mathbb{R}} = P_{\mathbb{R}}(x, y, z)dx + Q_{\mathbb{R}}(x, y, z)dy + R_{\mathbb{R}}(x, y, z)dz,$$

onde  $P_{\mathbb{R}}, Q_{\mathbb{R}}, R_{\mathbb{R}}$  são elementos do anel  $\mathbb{R}\{x, y, z\}$  de germes de funções analíticas reais sem fatores comuns e  $\omega_{\mathbb{R}}$  satisfaz a condição de integrabilidade de Frobenius,  $\omega_{\mathbb{R}} \wedge d\omega_{\mathbb{R}} = 0$ . Denotamos por  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  a folheação real de codimensão 1 induzida por  $\omega_{\mathbb{R}}$ . O conjunto singular de  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ , definido por

$$\text{Sing}(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}) = \{(x, y, z) : P_{\mathbb{R}} = Q_{\mathbb{R}} = R_{\mathbb{R}} = 0\},$$

é um subconjunto analítico fechado de codimensão  $\geq 2$ . Uma *separatriz formal real* ou simplesmente *separatriz* de  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  é um germe irreduzível de superfície formal e invariante, que passa pela origem de  $(\mathbb{R}^3, 0)$ , isto é, um objeto dado por uma função formal irreduzível  $f_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}[[x, y, z]]$ , tal que

$$\omega_{\mathbb{R}} \wedge df_{\mathbb{R}} = f_{\mathbb{R}}\theta_{\mathbb{R}}$$

para alguma 2-forma analítica real  $\theta_{\mathbb{R}}$ . O conjunto de separatrizes de  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  é denotado por  $\text{Sep}(\mathcal{F}_{\mathbb{R}})$ . Em  $(\mathbb{R}^3, 0)$ , a existência de separatrizes reais não está garantida. De fato, a equação  $x dx + y dy + z dz = 0$  define uma folheação que não tem separatriz, pois é satisfeita por superfícies  $x^2 + y^2 + z^2 = c$ , com a constante real  $c \geq 0$ .

### 5.4. Complexificação de uma folheação analítica real em $(\mathbb{R}^3, 0)$

Interpretando as variáveis  $x, y, z$  de (62) como variáveis complexas, obtemos as complexificações de  $P_{\mathbb{R}}, Q_{\mathbb{R}}, R_{\mathbb{R}}$ , que denotamos  $P_{\mathbb{C}}, Q_{\mathbb{C}}, R_{\mathbb{C}}$ . Além disso, não tem fator comum complexo, pois, caso contrário, seu conjugado seria outro fator comum de  $P_{\mathbb{C}}, Q_{\mathbb{C}}, R_{\mathbb{C}}$ . Então,  $P_{\mathbb{R}}, Q_{\mathbb{R}}, R_{\mathbb{R}}$  teriam fator comum real, o que não é possível. Assim, ao complexificar  $\omega_{\mathbb{R}}$  obtemos em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  a 1-forma holomorfa

$$(63) \quad \omega_{\mathbb{C}} = P_{\mathbb{C}}(x, y, z)dx + Q_{\mathbb{C}}(x, y, z)dy + R_{\mathbb{C}}(x, y, z)dz,$$

onde  $P_{\mathbb{C}}, Q_{\mathbb{C}}, R_{\mathbb{C}}$  são as respectivas complexificações de  $P_{\mathbb{R}}, Q_{\mathbb{R}}, R_{\mathbb{R}}$  sem fator comum. Seu conjunto singular tem dimensão no máximo 1. Definimos o *traço real* de  $\mathbb{C}^3$  como o conjunto

$$\text{Tr}(\mathbb{C}^3) = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : (x, y, z) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\}.$$

Identificamos a restrição de  $\omega_{\mathbb{C}}$  ao traço real com  $\omega_{\mathbb{R}}$ . De forma similar ao caso plano, em dimensão 3, a condição do conjunto singular de  $\omega_{\mathbb{R}}$  ser algebricamente reduzido ( $P_{\mathbb{R}}, Q_{\mathbb{R}}, R_{\mathbb{R}}$  não têm fator comum) significa que  $\omega_{\mathbb{C}}$  não tem componentes de codimensão um no conjunto singular.

**Observação 3.** Se  $f$  é um germe de uma função analítica complexa em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  tal que  $f|_{\text{Tr}(\mathbb{C}^3)} \equiv 0$ , então  $f \equiv 0$ . Pois, considerando  $x = x_1 + ix_2$ ,  $y = y_1 + iy_2$ ,  $z = z_1 + iz_2$ ,  $f = \text{Re}(f) + i \text{Im}(f)$ , e as equações de Cauchy-Riemann para a primeira coordenada, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0) = \frac{\partial \text{Re}(f)}{\partial x_1}(0, 0, 0) + i \frac{\partial \text{Im}(f)}{\partial x_1}(0, 0, 0) = 0 + 0 = 0.$$

Procedendo de forma similar obtemos que  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 0) = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0) = 0$ . Por ser  $f$  uma função analítica escrevemos ela como

$$f(Z) = \sum_I \frac{\partial^I f(0)}{I!} Z^I,$$

onde  $Z = (x, y, z)$ . E como na origem  $f$  tem derivadas parciais de todas as ordens nulas, então  $f = 0$ .

Como  $\omega_{\mathbb{R}} \wedge d\omega_{\mathbb{R}} = a_{\mathbb{R}}(x, y, z) dx \wedge dy \wedge dz$ , onde  $a_{\mathbb{R}}$  é uma função analítica real, então,  $\omega_{\mathbb{C}} \wedge d\omega_{\mathbb{C}} = a_{\mathbb{C}}(x, y, z) dx \wedge dy \wedge dz$ , onde  $a_{\mathbb{C}}$  é a complexificação de  $a_{\mathbb{R}}$ . Da condição de integrabilidade de  $\omega_{\mathbb{R}}$  temos que

$$(\omega_{\mathbb{C}} \wedge d\omega_{\mathbb{C}})|_{\text{Tr}(\mathbb{C}^3)} = (a_{\mathbb{C}} dx \wedge dy \wedge dz)|_{\text{Tr}(\mathbb{C}^3)} = 0.$$

Pela Observação 3, como  $a_{\mathbb{C}}$  é uma função analítica complexa tal que  $a_{\mathbb{C}}|_{\text{Tr}(\mathbb{C}^3)} = 0$ , então  $a_{\mathbb{C}} = 0$ . Em consequência, como

$$\omega_{\mathbb{C}} \wedge d\omega_{\mathbb{C}} = a_{\mathbb{C}}(x, y, z) dx \wedge dy \wedge dz = 0$$

temos que a 1-forma  $\omega_{\mathbb{C}}$  é integrável.

Em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ , uma separatriz  $J$ -invariante, i.e. tal que  $J(B_{\mathbb{C}}) = B_{\mathbb{C}}$ , é chamada de *separatriz real*, e uma não  $J$ -invariante é chamada de *separatriz puramente complexa*. Lembrando que a folheação  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  é a complexificação da folheação  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ , se  $\text{Sep}(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})$  é o conjunto de todas as separatrizes formais de  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ , denotamos por  $\text{Sep}^r(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})$  o conjunto de separatrizes formais  $J$ -invariantes e por  $\text{Sep}^c(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})$  o conjunto de separatrizes formais não  $J$ -invariantes. Temos

$$(64) \quad \text{Sep}(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}) = \text{Sep}^r(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}) \cup \text{Sep}^c(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}).$$

**Observação 4.** Cada separatriz de  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ , corresponde a uma separatriz de  $\text{Sep}^r(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})$  e vice versa. Em consequência, se  $\text{Sep}^r(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}) \neq \emptyset$ , então  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  tem pelo menos uma separatriz invariante por conjugação complexa e  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  tem pelo menos uma separatriz.

### 5.5. Blow-ups permissíveis no espaço complexificado

Lembrando que involução canônica anti-holomorfa em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  é definida por

$$J : (x, y, z) \in (\mathbb{C}^3, 0) \mapsto (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in (\mathbb{C}^3, 0),$$

e que o subconjunto de  $(\mathbb{C}^3, 0)$  de pontos fixos de  $J$  é o traço real de  $(\mathbb{C}^3, 0)$  denotado por  $\text{Tr}(\mathbb{C}^3)$ . Considerando que

$$\omega_{\mathbb{C}}(x, y, z) = P_{\mathbb{C}}(x, y, z)dx + Q_{\mathbb{C}}(x, y, z)dy + R_{\mathbb{C}}(x, y, z)dz,$$

satisfaz as condições mencionadas na seção anterior, denotamos por  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  a folheação holomorfa induzida pela 1-forma holomorfa  $\omega_{\mathbb{C}}$ . Uma vez que  $\omega_{\mathbb{C}}$  é definida por coeficientes reais, os coeficientes  $P_{\mathbb{C}}, Q_{\mathbb{C}}, R_{\mathbb{C}}$  no traço real coincidem com os coeficientes  $P_{\mathbb{R}}, Q_{\mathbb{R}}, R_{\mathbb{R}}$ . Através da 1-forma  $\omega_{\mathbb{C}}$ , cada ponto  $(x_0, y_0, z_0) \in (\mathbb{C}^3, 0)$  fora do conjunto singular está associado a um único plano

$$P_{\mathbb{C}}(x_0, y_0, z_0)x + Q_{\mathbb{C}}(x_0, y_0, z_0)y + R_{\mathbb{C}}(x_0, y_0, z_0)z = 0,$$

que é simétrico, com respeito ao traço real, ao plano

$$P_{\mathbb{C}}(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)x + Q_{\mathbb{C}}(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)y + R_{\mathbb{C}}(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)z = 0,$$

pois

$$\overline{(P_{\mathbb{C}}(x_0, y_0, z_0), Q_{\mathbb{C}}(x_0, y_0, z_0), R_{\mathbb{C}}(x_0, y_0, z_0))} = (P_{\mathbb{C}}(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0), Q_{\mathbb{C}}(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0), R_{\mathbb{C}}(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)).$$

Por isso, as folhas de  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  são simétricas com respeito ao traço real (são  $J$ -simétricas). Além disso, o conjunto das singularidades  $\text{Sing}(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})$  é  $J$ -invariante, ou seja se  $(x, y, z) \in \text{Sing}(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})$  então  $J((x, y, z)) = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \text{Sing}(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})$ , pois, se

$$P_{\mathbb{C}}((x, y, z)) = Q_{\mathbb{C}}((x, y, z)) = R_{\mathbb{C}}((x, y, z)) = 0,$$

então

$$\overline{P_{\mathbb{C}}((x, y, z))} = \overline{Q_{\mathbb{C}}((x, y, z))} = \overline{R_{\mathbb{C}}((x, y, z))} = 0$$

e, portanto,

$$P_{\mathbb{C}}(\overline{(x, y, z)}) = Q_{\mathbb{C}}(\overline{(x, y, z)}) = R_{\mathbb{C}}(\overline{(x, y, z)}) = 0.$$

Isto permite decompor  $\text{Sing}(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})$  em centros permissíveis  $Y$ , que podem ser  $J$ -invariantes ou  $J$ -simétricos.

Se o centro  $Y_1$  é  $J$ -invariante, o blow-up com centro  $Y_1$  (segundo as notações apresentadas na Seção 5.1)

$$\pi_{\mathbb{C}}^{Y_1} : (\widetilde{M}_{\mathbb{C}}^1, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^1) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0),$$

onde  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^1 = D_{\mathbb{C}}^{Y_1}$ , define em  $(\widetilde{M}_{\mathbb{C}}^1, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^1)$  uma única involução canônica

$$J^{Y_1} : (\widetilde{M}_{\mathbb{C}}^1, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^1) \rightarrow (\widetilde{M}_{\mathbb{C}}^1, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^1),$$

tal que

$$\pi_{\mathbb{C}}^{Y_1} \circ J^{Y_1} = J \circ \pi_{\mathbb{C}}^{Y_1}.$$

Então considerando

$$\widetilde{M}_{\mathbb{R}}^1 = \{p \in \widetilde{M}_{\mathbb{C}}^1 : p = J^{Y_1}(p)\},$$

podemos dizer que  $\widetilde{M}_{\mathbb{R}}^1$  é o traço real de  $\widetilde{M}_{\mathbb{C}}^1$  e identificar  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}^1$  com  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^1 \cap \widetilde{M}_{\mathbb{R}}^1$ . Denotando  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}^0 = \mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ ,  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}^1 = (\pi_{\mathbb{C}}^{Y_1})^*(\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}^0)$  identificamos  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{R}}^1$  com  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}^1 \cap \widetilde{M}_{\mathbb{R}}^1$  e  $\pi_{\mathbb{R}}^{Y_1} = \pi_{\mathbb{C}}^{Y_1} \Big|_{\widetilde{M}_{\mathbb{R}}^1}$ .

Se o centro permissível  $Y_1$  não é  $J$ -invariante, então  $J(Y_1)$  é outro centro que é  $J$ -simétrico a  $Y_1$  (simétrico com respeito ao traço real via conjugação complexa). Nesse caso, se  $Y_1$  e  $J(Y_1)$  se intersectam em um ponto  $p$ , podemos fazer sucessivos blow-ups pontuais até separar eles. Assim, podemos supor que  $Y_1$  e  $J(Y_1)$  são disjuntos. Isso nos permite fazer a composição de dois blow-ups, o primeiro blow-up  $\pi_{\mathbb{C}}^{Y_1}$  com centro permissível  $Y_1$ , e compor o resultado com outro blow-up  $\pi_{\mathbb{C}}^{Y_2}$  com centro permissível  $Y_2 = (\pi_{\mathbb{C}}^{Y_1})^{-1}(J(Y_1))$ . Informalmente podemos considerar dita composição como se fosse um único blow-up. Ou seja, seguindo as notações apresentadas na Seção 5.1, consideramos a composição de

$$\pi_{\mathbb{C}}^{Y_1} : (\widetilde{M}_{\mathbb{C}}^1, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^1) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$$

com

$$\pi_{\mathbb{C}}^{Y_2} : (\widetilde{M}_{\mathbb{C}}^2, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^2) \rightarrow (\widetilde{M}_{\mathbb{C}}^1, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^1)$$

como a composição

$$\pi_{\mathbb{C}}^{(Y_1, Y_2)} = \pi_{\mathbb{C}}^{Y_1} \circ \pi_{\mathbb{C}}^{Y_2} : (\widetilde{M}_{\mathbb{C}}^2, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^2) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$$

Visto que  $Y$  e  $J(Y)$  estão de lados diferentes do traço real, a involução canônica  $J$  e  $\pi_{\mathbb{C}}^{(Y_1, Y_2)}$  definem em  $(\widetilde{M}_{\mathbb{C}}^2, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^2)$  uma única involução contínua

$$J^{(Y_1, Y_2)} : (\widetilde{M}_{\mathbb{C}}^2, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^2) \rightarrow (\widetilde{M}_{\mathbb{C}}^2, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}^2),$$

tal que

$$\pi_{\mathbb{C}}^{(Y_1, Y_2)} \circ J^{(Y_1, Y_2)} = J \circ \pi_{\mathbb{C}}^{(Y_1, Y_2)}.$$

Então, considerando

$$\widetilde{M}_{\mathbb{R}}^2 = \{p \in \widetilde{M}_{\mathbb{C}}^2 : p = J^{(Y_1, Y_2)}(p)\},$$

podemos dizer que  $\widetilde{M}_{\mathbb{R}}^2$  é o traço real de  $\widetilde{M}_{\mathbb{C}}^2$  e identificamos  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}^2$  com  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}^2 \cap \widetilde{M}_{\mathbb{R}}^2$ . Denotando  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}^0 = \mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ ,  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}^1 = (\pi_{\mathbb{C}}^{Y_1})^*(\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}^0)$ ,  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}^2 = (\pi_{\mathbb{C}}^{Y_2})^*(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}^1)$ , identificamos  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{R}}^2$  com  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}^2 \cap \widetilde{M}_{\mathbb{R}}^2$ , identificamos também  $\pi_{\mathbb{R}}^{(Y_1, Y_2)} = \pi_{\mathbb{C}}^{(Y_1, Y_2)}|_{\widetilde{M}_{\mathbb{R}}^2}$ . Ao fazer uma composição de  $k$  blow-ups

$$\pi_{\mathbb{C}}^{Y_1} \circ \dots \circ \pi_{\mathbb{C}}^{Y_{k-1}} \circ \pi_{\mathbb{C}}^{Y_k}$$

com centros permissíveis  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$  devemos ter em conta os dois casos anteriores.

### 5.6. Redução de singularidades de uma folheação analítica real em $(\mathbb{R}^3, 0)$

Se a folheação  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  é a complexificação da folheação  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ , pelo Teorema 5.2.4, existe uma sequência finita de blow-ups permissíveis tal que  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}$ , a transformada estrita de  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ , tem unicamente singularidades simples. Seja  $\sigma_{\mathbb{C}}$  um processo de redução de singularidades para a folheação  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ , definido por

$$\sigma_{\mathbb{C}} = \pi_{\mathbb{C}}^{Y_1} \circ \dots \circ \pi_{\mathbb{C}}^{Y_{n-1}} \circ \pi_{\mathbb{C}}^{Y_n} : (\widetilde{M}_{\mathbb{C}}, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}) \rightarrow (\mathbb{C}^3, \text{Sing}(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})),$$

onde  $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}, Y_n$  são os centros permissíveis de cada blow-up. Conforme explicamos na seção anterior, produzimos essa sequência de blow-ups de forma a obter uma única involução contínua  $\widetilde{J} : \widetilde{M}_{\mathbb{C}} \rightarrow \widetilde{M}_{\mathbb{C}}$ , tal que  $\sigma_{\mathbb{C}} \circ \widetilde{J} = J \circ \sigma_{\mathbb{C}}$ . Então considerando

$$\widetilde{M}_{\mathbb{R}} = \{\widetilde{p} \in \widetilde{M}_{\mathbb{C}} : \widetilde{p} = \widetilde{J}(\widetilde{p})\},$$

dizemos que  $\widetilde{M}_{\mathbb{R}}$  é o traço real de  $\widetilde{M}_{\mathbb{C}}$  e identificamos  $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$  com  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}} \cap \widetilde{M}_{\mathbb{R}}$ , assim como  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{R}}$  com  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}} \cap \widetilde{M}_{\mathbb{R}}$  e  $\sigma_{\mathbb{R}} = \sigma_{\mathbb{C}}|_{\widetilde{M}_{\mathbb{R}}}$ . Após um processo de redução de singularidades as componentes do divisor excepcional  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  são simétricas com respeito ao traço real. Isso é porque  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  é  $J$ -simétrica e a sequência de blow-ups é simétrica e levanta o mapa de conjugação.

**Observação 5.** Um germe de folheação  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  é dicrítica se, para sua respectiva complexificação  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ , existe, uma sequência de blow-ups com centros permissíveis tal que a restrição de  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  ao traço real contém um blow-up real dicrítico, i.e., um blow-up real com componente não-invariante real. Dizemos que um germe de folheação  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  em  $(\mathbb{R}^3, 0)$  é  $\mathbb{C}$ -não-dicrítica se sua complexificação  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  é um germe de folheação holomorfa não-dicrítica. Observe que se  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  é  $\mathbb{C}$ -não-dicrítica, então  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  também é não-dicrítica.

### 5.7. Relação entre as separatrizes complexas e a redução de singularidades

Nessa seção descrevemos alguns resultados de Cano-Cerveau [7]. Seja  $\mathcal{F}$  um germe de uma folheação analítica complexa singular de codimensão um em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ , definida pela 1-forma  $\omega$  como na equação (61). Se  $\mathcal{F}$  é não-dicrítica, após aplicar um processo de redução de singularidades com centros permissíveis  $Y_1, \dots, Y_{n-1}, Y_n$ ,

$$\sigma = \pi^{Y_1} \circ \dots \circ \pi^{Y_{n-1}} \circ \pi^{Y_n} : (\widetilde{M}, \mathcal{D}) \rightarrow (\mathbb{C}^3, \text{Sing}(\mathcal{F})),$$

obtemos  $\widetilde{\mathcal{F}}$ , a transformada de  $\mathcal{F}$  em torno do divisor excepcional  $\mathcal{D} = \sigma^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{F}))$ , invariante por  $\widetilde{\mathcal{F}}$ , cujas singularidades são simples. Essas singularidades simples podem ser de dois tipos: *singularidade tipo esquina*, se ela está na interseção de pelo menos duas componentes do divisor  $\mathcal{D}$ , e *singularidade tipo traço*, se por ela passa uma única componente do divisor  $\mathcal{D}$ . O fecho das singularidades tipo traço formam um subconjunto analítico de  $(\widetilde{M}, \mathcal{D})$ , denotado por  $\text{Sing}^t(\widetilde{\mathcal{F}}, \mathcal{D})$ , cujas componentes irredutíveis são não singulares e têm dimensão um.  $\text{Sing}^t(\widetilde{\mathcal{F}}, \mathcal{D})$  tem cruzamentos normais com  $\mathcal{D}$ . Em cada singularidade tipo traço  $q$  existe exatamente uma única separatriz  $\widetilde{B}_q$ , que não é uma componente do divisor  $\mathcal{D}$ , passando sobre ela. Além disso, essa separatriz é uma superfície transversalmente formal a  $\mathcal{D}$ , e as singularidades tipo traço próximas dela correspondem exatamente a  $\mathcal{D} \cap \widetilde{B}_q$ . Devido a isso, em cada componente conexa de  $\text{Sing}^t(\widetilde{\mathcal{F}}, \mathcal{D})$ , as separatrizes  $\widetilde{B}_q$  podem se colar em um germe de superfície transversalmente formal  $\widetilde{B}$  em torno do divisor  $\mathcal{D}$ . As superfícies  $\widetilde{B}$  obtidas desta forma são as únicas superfícies invariantes de  $\widetilde{\mathcal{F}}$  diferentes das componentes irredutíveis de  $\mathcal{D}$ . Suas imagens pela sequência de blow-ups são separatrizes de  $\mathcal{F}$ . Temos a seguinte bijeção:

$$\{\text{Separatrizes de } \mathcal{F}\} \leftrightarrow \{\text{Componentes conexas de } \text{Sing}^t(\widetilde{\mathcal{F}}, \mathcal{D})\}.$$

### 5.8. Imersões transversais complexas e reais

Temos a seguinte definição

**Definição 5.8.1.** Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação holomorfa singular de codimensão um em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ , com multiplicidade  $\nu(\mathcal{F})$  e definida pela equação  $\omega = 0$ , onde  $\omega$  é uma 1-forma holomorfa e integrável. Uma imersão complexa  $i : (\mathbb{C}^2, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  é *transversal* a  $\mathcal{F}$  se satisfaz

- $\text{Sing}(i^*\omega) = i^{-1}(\text{Sing}(\omega)) = 0$ ;

- $\nu(\mathcal{F}) = \nu(i^*\mathcal{F})$ .

Mattei e Moussu, em [19], mostram que as imersões complexas são genericamente transversais. Portanto, sempre existe pelo menos uma imersão complexa satisfazendo as duas condições acima. Temos o seguinte conceito

**Definição 5.8.2.** Seja  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  um germe de folheação analítica real singular de codimensão 1 em  $(\mathbb{R}^3, 0)$  definida por um germe de 1-forma analítica real  $\omega_{\mathbb{R}}$ . Uma *imersão real*  $i_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}^2, 0) \hookrightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  é *transversal* a  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  se satisfaz

- $\text{Sing}(i_{\mathbb{R}}^*\mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  é algebricamente isolada na origem,
- $\nu(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}) = \nu(i_{\mathbb{R}}^*\mathcal{F}_{\mathbb{R}})$ .

Lembremos que em  $(\mathbb{R}^2, 0)$  uma singularidade de um germe de folheação analítica real singular é algebricamente isolada se sua complexificação tem singularidade isolada. Se  $\omega_{\mathbb{C}}$  e  $i_{\mathbb{C}} : (\mathbb{C}^2, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$  a 1-forma analítica complexa e a imersão complexa obtidas pela complexificação de  $\omega_{\mathbb{R}}$  e  $i_{\mathbb{R}}$  respectivamente, a condição de  $\text{Sing}(i_{\mathbb{R}}^*\mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  ser algebricamente isolada na origem equivale a pedir que  $i_{\mathbb{C}}^*\omega_{\mathbb{C}}$  tem singularidade isolada. Como  $\nu(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}) = \nu(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})$ , temos que  $i_{\mathbb{C}}$  é uma imersão complexa transversal. Pelo Teorema de existência de separatriz de Camacho-Sad [4], a folheação  $i_{\mathbb{C}}^*\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  tem separatriz complexa. Com essas observações temos o seguinte resultado.

**Proposição 5.8.3.** *Seja  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  um germe de folheação analítica real singular de codimensão um em  $(\mathbb{R}^3, 0)$  tal que  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  é  $\mathbb{C}$ -não-dicrítica. Se, para alguma imersão transversal real  $i_{\mathbb{R}}$ , a folheação  $i_{\mathbb{R}}^*\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  tiver separatriz, então  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  tem separatriz.*

**DEMONSTRAÇÃO.** Seja  $\omega_{\mathbb{R}}$  a 1-forma que define a folheação  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  em  $(\mathbb{R}^3, 0)$ . Via a imersão

$$i_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}^2, 0) \hookrightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$$

obtemos a 1-forma  $\eta_{\mathbb{R}} = i_{\mathbb{R}}^*\omega$  e definimos a folheação  $\mathcal{G}_{\mathbb{R}} = i_{\mathbb{R}}^*\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  em  $(\mathbb{R}^2, 0)$  com singularidade algebricamente isolada em  $0 \in \mathbb{R}^2$ . Por hipótese,  $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}$  tem uma separatriz  $\gamma$ . Considerando a parametrização de  $\gamma$ ,

$$\gamma(t) = \sum_{n \geq 1} a_n t^n,$$

então a composição  $\delta = i_{\mathbb{R}} \circ \gamma$  define em  $(\mathbb{R}^3, 0)$  uma curva formal  $\delta$  que é invariante por  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ . De fato, como  $\gamma$  é separatriz em  $(\mathbb{R}^2, 0)$ , segue que

$$0 = \eta \cdot \gamma'(t) = i_{\mathbb{R}}^*\omega \cdot \gamma'(t) = \omega \cdot D(i_{\mathbb{R}}) \cdot \gamma'(t) = \omega \cdot \delta'(t),$$

onde  $D$  é denota a derivada. Sejam  $\delta_{\mathbb{C}}$  a complexificação de  $\delta$ , e  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  a complexificação de  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ . A curva  $\delta \in (\mathbb{R}^3, 0)$  se identifica com a interseção de  $\delta_{\mathbb{C}}$  com o traço real de  $(\mathbb{C}^3, 0)$  que denotamos por  $\delta_{\mathbb{R}}$ . A curva  $\delta_{\mathbb{C}}$ , por ser invariante, está contida em uma folha de  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ . Note que pela construção feita,  $\delta_{\mathbb{R}}$  e  $\delta_{\mathbb{C}}$  não estão contidas no conjunto  $\text{Sing}(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})$ . Fazemos uma redução de singularidades para  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ ,

$$\sigma_{\mathbb{C}} : (\widetilde{M}_{\mathbb{C}}, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}) \rightarrow (\mathbb{C}^3, \text{Sing}(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}))$$

e obtemos  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}} = \sigma_{\mathbb{C}}^*\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ , o divisor invariante  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}} = \sigma_{\mathbb{C}}^{-1}(\text{Sing}(\mathcal{F}_{\mathbb{C}}))$  com  $\text{Sing}(\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}) \subset \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ , e a curva  $\widetilde{\delta}_{\mathbb{C}} = \sigma_{\mathbb{C}}^*\delta_{\mathbb{C}}$  que é invariante por  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}$  e não está contida no conjunto  $\text{Sing}(\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}})$ . Assim como  $\delta_{\mathbb{R}}$  é o traço real de  $\delta_{\mathbb{C}}$ , o levantamento de  $\delta_{\mathbb{R}}$  pela redução de singularidades, que denotamos  $\widetilde{\delta}_{\mathbb{R}}$ , é o traço real de  $\widetilde{\delta}_{\mathbb{C}}$ .



Denotamos  $\tilde{\delta}_{\mathbb{R}} \cap \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  por  $p$ . Observe que  $p = \tilde{\delta}_{\mathbb{R}} \cap \mathcal{D}_{\mathbb{C}} = \tilde{\delta}_{\mathbb{C}} \cap \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  está no traço real. Podemos supor  $p$  fora das esquinas do divisor  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ , pois se for necessário, fazendo alguns blow-ups pontuais (reais) a mais, podemos dessingularizar a curva  $\tilde{\delta}_{\mathbb{C}}$ . Isso em particular implica separar  $\tilde{\delta}_{\mathbb{C}}$  das esquinas do  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ . Temos que  $\tilde{\delta}_{\mathbb{C}}$  e  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  são  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}$ -invariantes, logo,  $p \in \text{Sing}^t(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}, \mathcal{D}_{\mathbb{C}})$  e está no traço real. Pelo método de Cano-Cerveau, (veja Seção 5.7), temos que existe pelo menos uma superfície formal  $\tilde{\Sigma}_{\mathbb{C}}$ , em torno de  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ , invariante por  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}$  que passa por  $p$ , que está relacionada biunivocamente com a separatriz formal  $\Sigma_{\mathbb{C}} = \sigma_{\mathbb{C}}(\tilde{\Sigma}_{\mathbb{C}})$  de  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ . Além disso, observe que  $\tilde{\Sigma}_{\mathbb{C}}$  é  $\tilde{J}$ -invariante, ou seja  $\tilde{\Sigma}_{\mathbb{C}} = \tilde{J}(\tilde{\Sigma}_{\mathbb{C}})$ . Pois, caso contrário, a curva  $\tilde{\delta}_{\mathbb{R}}$  teria que estar na interseção de  $\tilde{\Sigma}_{\mathbb{C}} \cap \tilde{J}(\tilde{\Sigma}_{\mathbb{C}})$  pois ela está no traço real. E portanto,  $\tilde{\delta}_{\mathbb{R}}$  estaria no conjunto  $\text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}) \subset \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ , e isso não é possível pois  $\tilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}$  é obtida pela redução de singularidades e  $\tilde{\delta}_{\mathbb{R}} \not\subset \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ . Isso implica que  $\Sigma_{\mathbb{C}} = J(\Sigma_{\mathbb{C}})$  e intersectando  $\Sigma_{\mathbb{C}}$  com o traço real obtemos a separatriz procurada.  $\square$

### 5.9. Superfície generalizada real e superfície generalizada real topológica

Seja  $\mathcal{F}$  uma folheação holomorfa singular de codimensão um em  $(\mathbb{C}^3, p)$ , não-dicrítica, definida pela 1-forma integrável  $\omega$  e tal que  $p$  é uma singularidade simples de  $\mathcal{F}$ . Se o tipo dimensional de  $\mathcal{F}$  em  $p$  é  $\tau(\mathcal{F}, p) = 2$ , temos que a folheação  $\mathcal{F}$  é um cilindro sobre a folheação induzida por  $i^*\omega$ , onde  $i : (\mathbb{C}^2, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^3, p)$  é uma imersão transversal em  $p$ . Do trabalho de Cano-Cerveau [7] temos que, se  $\tau(\mathcal{F}, p) = 3$  então existe uma vizinhança  $U$  de  $p$  tal que todas as singularidades  $q \neq p$  contidas naquela vizinhança são simples de tipo dimensional  $\tau = 2$ . Ou seja, os elementos do conjunto

$$A = \{q \in U \setminus \{p\} : q \in \text{Sing}(\mathcal{F})\},$$

são singularidades do tipo dimensional  $\tau = 2$ . Além disso, a singularidade  $p$  é simples se e somente se todos os elementos no conjunto  $A$  são simples. Em [10] Fernandez e Mozo definem o conceito de folheação do tipo *superfície generalizada* para descrever folhações holomorfas não-dicríticas de codimensão 1, definidas por 1-formas integráveis em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ , em cujas reduções de singularidades não aparecem sela-nós. Lembramos que um germe de folheação analítica real singular de codimensão um em  $(\mathbb{R}^3, 0)$  é  $\mathbb{C}$ -não-dicrítica se ela e sua complexificação são não-dicríticas. A seguir definimos um conceito análogo àquele de Fernandez e Mozo para o caso real.

**Definição 5.9.1.** Seja  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  um germe de folheação analítica real singular de codimensão 1 em  $(\mathbb{R}^3, 0)$ . Dizemos que  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  é uma folheação do tipo *superfície generalizada real* se não possui sela-nós reais na sua redução de singularidades e, além disso, é  $\mathbb{C}$ -não-dicrítica.

A seguir apresentamos a versão real de [10, Lem.3.4].

**Lema 5.9.2.** Se  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  é uma superfície generalizada real e  $i_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}^2, 0) \hookrightarrow (\mathbb{R}^3, p)$  é uma imersão transversal real, então a folheação  $i_{\mathbb{R}}^* \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  é uma curva generalizada real.

**DEMONSTRAÇÃO.** Complexificamos as variáveis reais e obtemos, com as mesmas fórmulas que definem  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  e  $i_{\mathbb{R}}$ , a folheação holomorfa  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  e a imersão transversal

$$i_{\mathbb{C}} = (i_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} : (\mathbb{C}^2, 0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^3, 0),$$

onde  $i_{\mathbb{C}}$  denota a complexificação da imersão  $i_{\mathbb{R}}$ . Essa imersão transversal define uma superfície lisa  $H = i_{\mathbb{C}}((\mathbb{C}^2, 0))$  que é transversal ao conjunto  $\text{Sing}(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})$  em um ponto  $p$ .

Consideramos para  $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$  um processo de redução de singularidades

$$\sigma_{\mathbb{C}} : (\widetilde{M}_{\mathbb{C}}, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}) \rightarrow \cdots \rightarrow (\mathbb{C}^3, \text{Sing}(\mathcal{F}_{\mathbb{C}})).$$

Denotamos por  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}$  a folheação obtida pelo processo  $\sigma_{\mathbb{C}}$ . Denotamos por  $\mathcal{H} = \sigma_{\mathbb{C}}^*(H)$ . Vemos que  $\mathcal{H}$  intersecta transversalmente o divisor  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  e além disso é transversal à folheação  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}$ . Tomamos o levantamento da imersão transversal  $i_{\mathbb{C}}$  pelo processo de redução de singularidades como o mapa

$$\widetilde{i}_{\mathbb{C}} : (\mathbb{C}^2, 0) \hookrightarrow (\widetilde{M}_{\mathbb{C}}, \mathcal{D}_{\mathbb{C}}),$$

definido por  $\widetilde{i}_{\mathbb{C}} = \sigma_{\mathbb{C}}^* \circ i_{\mathbb{C}}$ . Observamos que cada ponto singular de  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}$  em  $\mathcal{H} \cap \mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  pode ter tipos dimensionais  $\tau = 2$  ou  $\tau = 3$ . Por hipótese, as singularidades simples  $\widetilde{p}$  que estão no traço real de  $\widetilde{M}_{\mathbb{C}}$  não são do tipo sela-nó. Considerando  $\widetilde{M}_{\mathbb{R}}$ , o traço real de  $\widetilde{M}_{\mathbb{C}}$ , localizando  $\mathcal{H}$  como germe de superfície em  $\widetilde{p} \in (\text{Sing}(\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}) \cap \mathcal{H} \cap \widetilde{M}_{\mathbb{R}})$  vemos que  $\mathcal{H}$  é transversal à folheação  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}$ .

Se localmente  $\tau(\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}, \widetilde{p}) = 2$ , então perto de  $\widetilde{p}$  a folheação  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}$  é um cilindro sobre a folheação  $\widetilde{i}_{\mathbb{C}}^* \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}$ , portanto  $\widetilde{p}$  não é uma sela-nó real para  $\widetilde{i}_{\mathbb{C}}^* \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}$ . Se  $\tau(\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}, \widetilde{p}) = 3$ , a singularidade  $\widetilde{p}$  está na interseção de três componentes invariantes (três componentes de  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  ou então duas componentes de  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$  e por uma superfície invariante fora de  $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ ). Localizando  $\mathcal{H}$  como germe de superfície em  $\widetilde{p}$  e fazendo mais um blow-up puntual sobre  $\widetilde{p}$ . Seja  $\mathcal{H}_1$  a transformada estrita de  $\mathcal{H}$  por esse blow-up, e seja  $\widetilde{D}_{\widetilde{p}}$  a nova componente, difeomorfa holomorficamente a  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ , obtida por esse blow-up centrado em  $\widetilde{p}$ . Note que, antes desse último blow-up e usando coordenadas locais centradas em  $\widetilde{p}$ , como a superfície lisa  $\mathcal{H}$  é transversal aos três eixos coordenados passando por  $\widetilde{p}$ , então nenhum vetor tangente a  $\mathcal{H}$  saindo de  $\widetilde{p}$  tem inclinação paralela a algum dos eixos coordenados. Isso implica que, após esse último blow-up extra, os pontos que estão na interseção da  $\widetilde{D}_{\widetilde{p}}$  e  $\mathcal{H}_1$  estão fora de pontos com tipo dimensional 3. Pois as cartas dos blow-up usam as inclinações desses vetores tangentes para definir as coordenadas dos pontos depois do blow-up puntual (veja as cartas na Seção 2.7). Então, se algum ponto de  $\mathcal{H}_1 \cap \widetilde{D}_{\widetilde{p}}$  tivesse  $\tau = 3$ , teria que existir algum vetor tangente a  $\mathcal{H}$  e saindo de  $\widetilde{p}$  paralelo a alguns dos eixos coordenados, o que é falso. Temos então, que os pontos que estão na interseção do conjunto singular do levantamento de  $\widetilde{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}$  com  $\mathcal{H}_1 \cap \widetilde{D}_{\widetilde{p}}$  têm tipo dimensional 2, e o resultado é obtido pelas justificativas mencionadas anteriormente. □

Definimos também o conceito de superfície generalizada real topológica como

**Definição.** Seja  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  um germe de uma folheação analítica real singular de codimensão 1 em  $(\mathbb{R}^3, 0)$ . Dizemos que  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  é uma folheação do tipo *superfície generalizada real topológica* se para toda imersão  $i_{\mathbb{R}} : (\mathbb{R}^2, 0) \hookrightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$  transversal a  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ , a folheação  $i_{\mathbb{R}}^* \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  tem singularidade algebricamente isolada e não possui selas-nós topológicas reais na redução de singularidades.

E em particular, pela Proposição 5.8.3 temos os dois seguintes resultados

**Teorema C** (Extensão para  $(\mathbb{R}^3, 0)$  do resultado de Risler). *Seja  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  um germe de folheação do tipo superfície generalizada real em  $(\mathbb{R}^3, 0)$ . Se  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  tem multiplicidade algébrica par ou se existe uma imersão transversal  $i_{\mathbb{R}}$  tal que o número de Milnor  $\mu(i_{\mathbb{R}}^* \mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  é par, então  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  tem pelo menos uma separatriz.*

DEMONSTRAÇÃO. O resultado é consequência direta da Proposição 5.8.3 e do Lema 5.9.2, pois  $i_{\mathbb{R}}^* \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  é uma curva generalizada real com multiplicidade par ou com número de Milnor  $\mu(i_{\mathbb{R}}^* \mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  par e portanto tem separatriz.  $\square$

**Teorema D.** *Seja  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  um germe de folheação do tipo superfície generalizada real topológica em  $(\mathbb{R}^3, 0)$ . Se  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  tem multiplicidade algébrica par ou se existe uma imersão transversal  $i_{\mathbb{R}}$  tal que o número de Milnor  $\mu(i_{\mathbb{R}}^* \mathcal{F}_{\mathbb{R}})$  é par, então  $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$  tem pelo menos uma separatriz.*

DEMONSTRAÇÃO. O resultado é consequência direta da Proposição 5.8.3.  $\square$

## Referências Bibliográficas

- [1] Eduardo Cabrera and Rogério Mol. Separatrices for real analytic vector fields in the plane. *Accepted for publication. Moscow Mathematical Journal*, 2021.
- [2] César Camacho, Alcides Lins Neto, and Paulo Sad. Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields. *J. Differ. Geom*, 20(1):143–174, 1984.
- [3] César Camacho and Alcides Lins Neto. Introdução à teoria das folheações. 1977.
- [4] César Camacho and Paulo Sad. Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields. *Ann. of Math.*, 115:579–595, 1982.
- [5] César Camacho and Paulo Sad. Pontos singulares de equações diferenciais analíticas. *16 Colóquio Brasileiro de Matemática - Rio de Janeiro*.
- [6] Felipe Cano. Reduction of the singularities of codimension one singular foliations in dimension three. *Annals of Mathematics*, (160):907–1011, 2004.
- [7] Felipe Cano and Dominique Cerveau. Desingularization of nondicritical holomorphic foliations and existence of separatrices. *Acta Math.*, (169(1-2)):1–103, 1992.
- [8] Felipe Cano, Nuria Corral, and Rogério Mol. Local polar invariants for plane singular foliations. 2018.
- [9] Eduardo Casas-Alvero. Singularities of plane curves. *Cambridge University Press, London Mathematical Society Lecture Note Series*, 276:79–80, 2000.
- [10] Percy Fernández and Jorge Mozo-Fernández. On generalized surfaces in  $(\mathbb{C}^3, 0)$ . *Astérisque*, 323:261–268, 2009.
- [11] Arturo Fernández-Pérez and Rogério Mol. Residue-type indices and holomorphic foliations. *Annali scuola normal e superiore - classe di scienze*, 03 2017.
- [12] Yohann Genzmer. Rigidity for dicritical germ of foliation in  $\mathbb{C}^2$ . *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (19):Art. ID rnm072, 14, 2007.
- [13] Yohann Genzmer and Rogério Mol. Local polar invariants and the Poincaré problem in the dicritical case. *J. Math. Soc. Japan*, 70(4):1419–1451, 2018.
- [14] Robert Gunning. *Introduction to holomorphic functions of several variables*. Wadsworth e Brooks-Cole, 1990.
- [15] Abramo Hefez. Irreducible plane curve singularities, real and complex singularities, 1–120. *Lecture Notes in Pure and Appl. Math*, 232.
- [16] Yulij Ilyashenko and Sergei Yakovenko. Lectures on analytic differential equations. *Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel*, 2005.
- [17] Jean-Pierre Jouanolou. *Equations de Pfaff algébriques*, volume 708. Springer, 1979.
- [18] Jean Martinet and Jean-Pierre Ramis. Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre. *Publications mathématiques de l’I.H.É.S.*, 55:63–164, 1982.
- [19] J-F Mattei and Robert Moussu. Holonomie et intégrales premières. In *Annales Scientifiques de l’École Normale Supérieure*, volume 13, pages 469–523, 1980.
- [20] Rogério Mol and Fernando Sanz Sánchez. Real analytic vector fields with first integral and separatrices. 2018.
- [21] Rogério Mol and Rudy Rosas. Differentiable equisingularity of holomorphic foliations. *Journal of Singularities*, 11 2016.
- [22] Jean-Jacques Risler. Invariant curves and topological invariants for real plane analytic vector fields. *J. Differential Equations*, 172(1):212–226, 2001.
- [23] Abraham Seidenberg. Reduction of singularities of the differential equation  $ady = bdx$ . *American Journal of Mathematics*, (90):248–269, 1968.

- [24] Marcio G. Soares and Rogério S. Mol. *Índices de campos holomorfos e aplicações*. Publicações Matemáticas do IMPA. [IMPA Mathematical Publications]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2001. 23o Colóquio Brasileiro de Matemática. [23rd Brazilian Mathematics Colloquium].
- [25] B. Teissier. Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney. In *Singularités à Cargèse (Rencontre Singularités Géom. Anal., Inst. Études Sci., Cargèse, 1972)*, pages 285–362. Astérisque, Nos. 7 et 8. 1973.