

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Estatística

Bernardo Okazaki Kehdy

**AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DA CARTA \bar{X} COM USO DA REGRA
SUPLEMENTAR 2-2 DE KLEIN UTILIZANDO CADEIA DE MARKOV**

Belo Horizonte
2021

Bernardo Okazaki Kehdy

**AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DA CARTA \bar{X} COM USO DA REGRA
SUPLEMENTAR 2-2 DE KLEIN UTILIZANDO CADEIA DE MARKOV**

Monografia apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Estatística.

Orientador: Prof. Dr. Roberto da Costa
Quinino

Belo Horizonte
2021

2021, Bernardo Okazaki Kehdy.
Todos os direitos reservados

Kehdy, Bernardo Okazaki.

K26a Avaliação do desempenho da carta \bar{X} bar com uso da
regra suplementar 2-2 de Klein utilizando cadeia de
Markov [manuscrito] / Bernardo Okazaki Kehdy.—
2021.
27.f. il.

Orientador: Roberto da Costa Quinino.
Monografia (especialização) - Universidade Federal
de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas,
Departamento de Estatística.
Referências: f. 23.

1. Estatística. 2. Carta de controle \bar{X} . 3. Controle
estatístico de processo. 4. Monte Carlo, Método. I.
Quinino, Roberto da Costa . II. Universidade Federal
de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas,
Departamento de Estatística .III. Título.

CDU 519.2 (043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende
Costa CRB 6ª Região nº 1510



Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Estatística
Programa de Pós-Graduação / Especialização
Av. Pres. Antônio Carlos, 6627 - Pampulha
31270-901 – Belo Horizonte – MG

E-mail: pgest@ufmg.br
Tel: 3409-5923 – FAX: 3409-5924

ATA DO 238ª. TRABALHO DE FIM DE CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ESTATÍSTICA DE BERNARDO OKAZAKI KEHDY.

Aos quinze dias do mês de dezembro de 2021, às 18:00 horas, com utilização de recursos de videoconferência a distância, reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pela Comissão do Curso de Especialização em Estatística, para julgar a apresentação do trabalho de fim de curso do aluno **Bernardo Okazaki Kehdy**, intitulado: “*Avaliação do desempenho da carta X -bar com uso da regra suplementar 2-2 de Klein utilizando cadeia de Markov*”, como requisito para obtenção do Grau de Especialista em Estatística. Abrindo a sessão, o Presidente da Comissão, Professor Roberto da Costa Quinino – Orientador, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares, passou a palavra ao candidato para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa do candidato. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se sem a presença do candidato e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: o candidato foi considerado Aprovado condicional às modificações sugeridas pela banca examinadora no prazo de 30 dias a partir da data de hoje por unanimidade. O resultado final foi comunicado publicamente ao candidato pelo Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 15 de dezembro de 2021.

Prof. Roberto da Costa Quinino (Orientador)
Departamento de Estatística / ICEX / UFMG

Prof. Anderson Laécio Galindo Trindade
DEP / ICEX / UFMG

Prof. Álvaro Ledo Ferreira
Departamento de Engenharia de Produção / UFRA



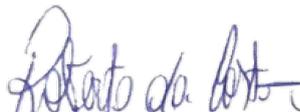
Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Estatística
Programa de Pós-Graduação / Especialização
Av. Pres. Antônio Carlos, 6627 - Pampulha
31270-901 – Belo Horizonte – MG

E-mail: pgest@ufmg.br
Tel: 3409-5923 – FAX: 3409-5924

DECLARAÇÃO DE CUMPRIMENTO DE REQUISITOS PARA CONCLUSÃO DO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ESTATÍSTICA.

Declaro para os devidos fins que **Bernardo Okazaki Kehdy**, número de registro 2020679846, cumpriu todos os requisitos necessários para conclusão do curso de Especialização em Estatística. Como seu orientador, recebi a versão final do trabalho de conclusão de curso e aprovei a versão final. O trabalho foi apresentado no dia 15 de dezembro de 2021 com o título “*Avaliação do desempenho da carta X-bar com uso da regra suplementar 2-2 de Klein utilizando cadeia de Markov*”.

Belo Horizonte, 23 de dezembro de 2021


Prof. Roberto da Costa Quinino
Coordenador da Comissão
de Curso de Especialização
em Estatística
Prof. Roberto da Costa Quinino
Coordenador do curso de
Especialização em Estatística
Departamento de Estatística / UFMG

Resumo

A carta de controle \bar{X} é uma importante ferramenta para o controle estatístico de processos. Ela é de fácil análise e implementação e por este motivo é muito comum o seu uso na indústria. No entanto não apresenta bom desempenho para deslocamentos pequenos na média. Nesse sentido o presente trabalho pretende avaliar o desempenho da carta de controle \bar{X} utilizando a regra suplementar de Klein com uso de Cadeias de Markov. O desempenho das cartas de controle será medido utilizando o número médio de corridas para detectar uma mudança na média.

Palavras-chave: Carta de Controle \bar{X} . Controle Estatístico de Processos. Average Run Length. Cadeias de Markov. Regra Suplementar de Klein.

Abstract

The \bar{X} control chart is an important tool for statistical process control. Since it is a very easy tool to analyze and implement, its use is very widespread in industrial process. However, it does not perform well for small average shifts. As an alternative, the present work intends to evaluate the performance of the \bar{X} control chart using Klein's supplementary rule using Markov Chains. The performance of the control charts will be measured using the average number of runs to detect a change in average.

Keywords: \bar{X} Control Chart. Statistical Process Control. Average Run Length. Markov Chains. Klein's Supplementary Rule.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Ilustração de um gráfico de controle (Montgomery e Runger, 2021).....	10
Figura 2 - LCI e LCS para $k=3$, $\mu_0=0$ e $\sigma=1$	12
Figura 3 - Diferença entre o ARL obtido através da abordagem clássica e a regra 2-2 ($n=1$).....	19
Figura 4 - Diferença entre o ARL obtido através da abordagem clássica e a regra 2-2 ($n=2$).....	20
Figura 5 - Diferença entre o ARL obtido através da abordagem clássica e a regra 2-2 ($n=3$).....	20
Figura 6 - Diferença entre o ARL obtido através da abordagem clássica e a regra 2-2 ($n=4$).....	21
Figura 7 - Diferença entre o ARL obtido através da abordagem clássica e a regra 2-2 ($n=5$).....	21

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - ARLs obtidos para X clássica e X com o uso da regra de Klein (2-2).....	18
Tabela 2 - Resultados dos limites de controle obtidos para X e Klein (2-2).	18

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	10
2. ABORDAGEM DE KLEIN	13
3. ABORDAGEM DE KLEIN POR CADEIA DE MARKOV.....	14
3.1 Cadeia de Markov.....	14
3.2 Modelando regra de Klein 2-2 por Cadeia de Markov	15
4. RESULTADOS.....	18
5. CONCLUSÃO.....	22
REFERÊNCIAS	23
ANEXO A – Programa para encontrar os limites de controle da carta de controle X com regra suplementar 2-2 de Klein	24
ANEXO B – Programa para encontrar ARL utilizando a regra 2-2	26
ANEXO C – Programa para encontrar ARL utilizando a abordagem clássica	27

1. INTRODUÇÃO

Nos dias atuais, o aumento da produtividade, impactando na competitividade das empresas, é um tema recorrente e cada dia mais importante num ambiente de globalização e crescente abertura externa dos negócios. Sem produtividade ou sem eficiência de seus processos, muitas empresas estarão fadadas ao fracasso ou a serem superadas no curto-médio prazo por seus concorrentes, tanto nacionais quanto internacionais (MACEDO, 2012). O Controle Estatístico do Processo (CEP) é uma coleção de ferramentas que tem como objetivo a prevenção de defeitos, melhoria da qualidade e redução de custos.

Uma importante ferramenta do CEP são os gráficos de controle. Segundo Montgomery e Runger (2021), um gráfico de controle é uma disposição gráfica de uma característica de qualidade que foi medida ou calculada a partir de uma amostra, em função do número da amostra ou do tempo. A Figura 1 ilustra um gráfico de controle para avaliar se a média do processo se deslocou da situação sob controle (μ_0) para situação fora de controle (μ_1). Os pontos no gráfico indicam as médias (\bar{X}) de cada amostra de tamanho n . Neste trabalho estamos supondo que a variância não se altera.

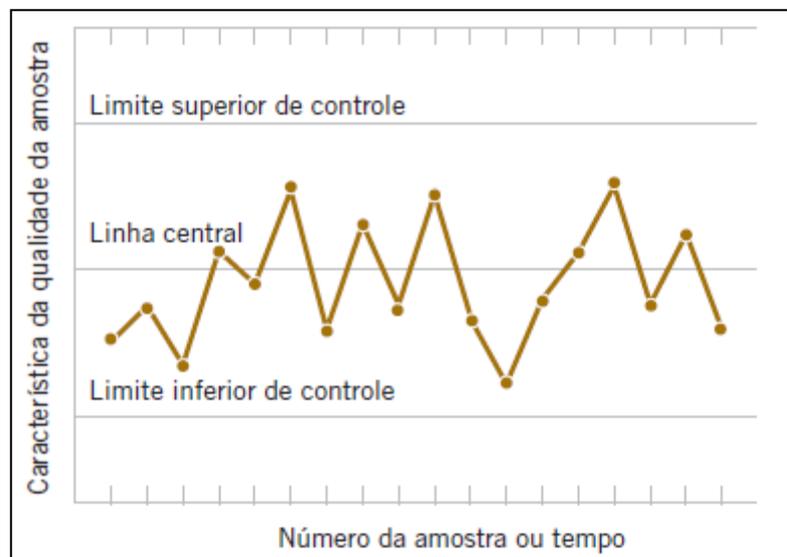


Figura 1 - Ilustração de um gráfico de controle (Montgomery e Runger, 2021).

A linha central (LC) representa o valor médio da característica de qualidade monitorada (μ_0). O limite superior de controle (LSC) e o limite inferior de controle (LIC) são os limites estatísticos da média dos valores da característica de qualidade baseado em uma amostra

aleatória de tamanho n . Em geral, se o processo está sob controle, os pontos (média amostral) cairão entre o LSC e LIC. Um modelo geral para se obter LSC, LC e LIC está descrito nas equações 1.1, 1.2 e 1.3 respectivamente:

$$LSC = \mu_0 + k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (1.1)$$

$$LC = \mu_0 \quad (1.2)$$

$$LIC = \mu_0 - k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (1.3)$$

Em que:

- k é a distância dos limites de controle à linha central, expressa em unidades de desvio-padrão;
- μ_0 é a média;
- σ é o desvio-padrão;
- n é o tamanho da amostra.

A abordagem clássica é definir $k=3$ (Shewhart) com objetivo de observarmos $ARL_0=370$. ARL_0 é o número médio de amostras até que se observa equivocadamente um ponto fora de controle (a média do processo não mudou, mas a carta de controle sinaliza uma mudança). O ARL_1 é o número médio de amostras necessário para se observar no gráfico de controle uma efetiva mudança na média do processo de μ_0 para μ_1 . Por exemplo, para $n=1$, $\mu_0=0$, $\sigma=1$ e amostras independentes, os pontos (a média amostral) para um processo fora de controle cairão na área hachurada (A) como mostrado na Figura 2.

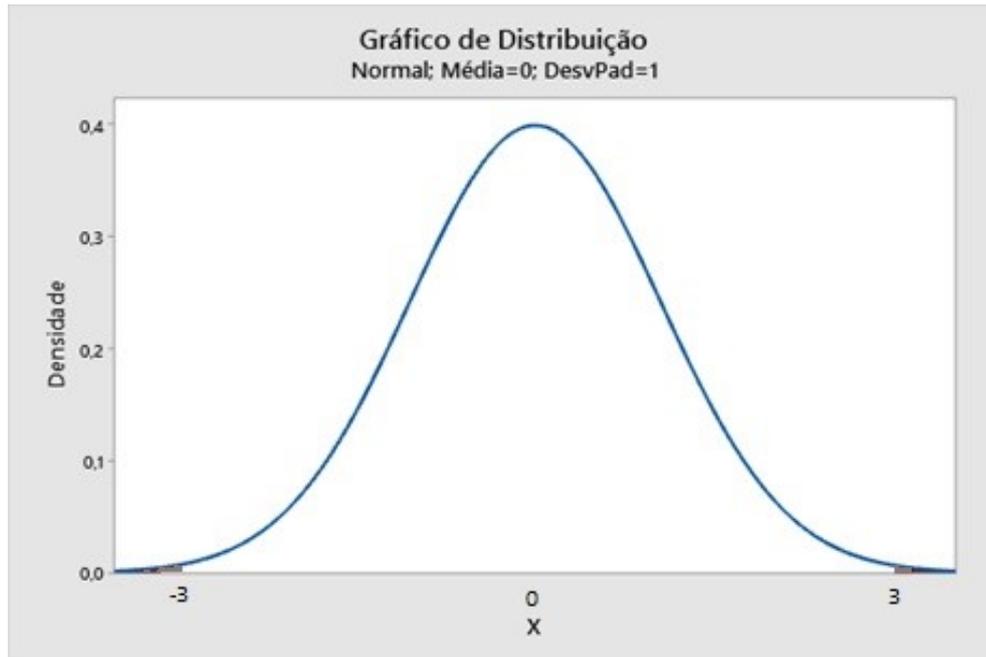


Figura 2 - LCI e LCS para $k=3$, $\mu_0=0$ e $\sigma=1$.

De maneira geral as equações para os cálculos dos ARL's (ARL_0 e ARL_1) são definidas como:

$$ARL = [P(\bar{X} < LIC) + P(\bar{X} > LSC)]^{-1} \quad (1.4)$$

Quando desejarmos calcular ARL_0 então, usa-se a média do processo sob controle, isto é, μ_0 . Se o objetivo é calcular ARL_1 então, usa-se a média do processo fora de controle, isto é μ_1 . As probabilidades são calculadas considerando que a distribuição da média \bar{X} é normal com média μ e desvio padrão dado por σ/\sqrt{n} . Usualmente o desempenho de um gráfico de controle é avaliado fixando o valor do ARL_0 e verificando a magnitude de ARL_1 que deve ser o menor possível. Em geral é difícil termos um gráfico de controle que apresenta o melhor desempenho para todo o espaço paramétrico de μ_1 .

2. ABORDAGEM DE KLEIN

Para aumentar a sensibilidade à mudança da média do processo, alguns autores sugerem utilizar regras suplementares além de simplesmente verificar se a média amostral caiu além dos limites de controle. Klein (2000) sugeriu duas regras diferentes.

Na primeira regra, o processo será considerado fora de controle caso dois pontos sucessivos caiam acima do LSC ou dois pontos sucessivos caiam abaixo do LIC (2-2). Na segunda regra, o processo será considerado fora de controle caso dois pontos de três caiam acima do LSC ou abaixo do LIC (2-3). Foi considerado que as amostras são aleatórias, independentes, com distribuição normal e, sem perda de generalidade, trabalhou-se com os dados padronizados. Assim, para o processo sob controle, a média é igual a zero. Todo o trabalho foi realizado com amostras unitárias ($n=1$). Para comparar a efetividade dos métodos, ele utilizou o comprimento médio das corridas, conhecido por Average Run Length (ARL). Segundo Jensen et al. (2006), ARL é a quantidade média de pontos que o gráfico de controle terá até que um ponto esteja fora dos limites de controle.

O objetivo deste trabalho é comparar, com uso das cadeias de Markov, a eficiência em termos de ARL de uma carta de controle tradicional \bar{X} descrita aqui como uma abordagem clássica com uma carta \bar{X} de controle que utiliza a regra 2-2. Utilizamos a regra suplementar 2-2, pois é mais simples e operacional de ser inserida em um ambiente industrial. Em todos os casos os tamanhos dos subgrupos (n) variaram de um a cinco ampliando assim o trabalho de Klein (2000) que utilizou apenas $n=1$. Fernandes (2021) também discutiu o problema apresentado nesta monografia, mas considerou uma abordagem por simulação de Monte Carlo. Nessa monografia a abordagem é analítica, usando cadeias de Markov, e apresentando resultados exatos.

3. ABORDAGEM DE KLEIN POR CADEIA DE MARKOV

3.1 Cadeia de Markov

Nesta seção iremos realizar uma breve introdução dos conceitos de cadeia de Markov necessários para desenvolvermos a monografia. O texto é uma adaptação de Hillier e Liberman (2006, p.715-716).

Um processo **estocástico** $\{X_t\}$ é dito ter a *propriedade markoviana* se $P\{X_{t+1} = j \mid X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = i\} = P\{X_{t+1} = j \mid X_t = i\}$, para $t = 0, 1, \dots$ e toda *sequência* $i, j, k_0, k_1, \dots, k_{t-1}$. Ou seja, a probabilidade condicional de qualquer “evento” futuro, dado quaisquer “eventos” passados e o estado presente $X_t = i$, é independente dos eventos passados e depende apenas do estado atual. Um processo estocástico $\{X_t\}$ ($t=0, 1, \dots$) é uma cadeia de Markov se possuir a propriedade markoviana.

As probabilidades condicionais $P\{X_{t+1} = j \mid X_t = i\}$ para uma cadeia de Markov são chamadas probabilidades de transição (uma etapa). Se, para cada i e j , $P\{X_{t+1} = j \mid X_t = i\} = P\{X_1 = j \mid X_0 = i\}$, para todo $t = 1, 2, \dots$, então as probabilidades de transição (uma etapa) são ditas estacionárias. Portanto, ter probabilidades de transição estacionárias implica que as probabilidades não mudam ao longo do tempo. Para simplificar a notação com probabilidades de transição estacionárias, façamos que $p_{ij} = P\{X_{t+1} = j \mid X_t = i\}$ e a probabilidade de transição em n etapas $p_{ij}^{(n)}$ é simplesmente a probabilidade condicional de que o sistema estará no estado j após exatamente n -etapas (unidades de tempo), dado que ele inicia no estado i a qualquer instante t . Uma maneira conveniente de mostrar todas as probabilidades de transição de uma etapa é o formato de matriz a seguir:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \text{Estado} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ M \end{array} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \dots & M \\ \left[\begin{array}{cccc} p_{00} & p_{01} & \dots & p_{0M} \\ p_{10} & p_{11} & \dots & p_{1M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{M0} & p_{M1} & \dots & p_{MM} \end{array} \right] \end{array}$$

Observe que a probabilidade de transição em determinada linha e coluna é para a transição do estado de linha para o estado de coluna. Ao calcularmos as probabilidades de transição em n etapas, \mathbf{P}^n , se n for suficientemente grande, todas as linhas da matriz têm valores idênticos, de modo que a probabilidade de o sistema se encontrar em cada estado j não depende mais do estado inicial do sistema. Esta convergência pode ser avaliada facilmente

computacionalmente uma vez que em algumas situações a convergência pode não existir (maiores detalhes são encontrados Hillier e Liberman (2006), por exemplo). Nas situações discutidas nessa monografia o $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$ existe e é independente de i , isto é, $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0$, em que os π_j é o resultado de um sistema linear dado por $\pi_j = \sum_{i=0}^M \pi_i p_{ij}$, para $j = 0, 1, \dots, M$, com a restrição que $\sum_{j=0}^M \pi_j = 1$.

Os π_j são chamados probabilidades de estado estacionário de uma cadeia de Markov. O termo probabilidade de estado estacionário significa que a probabilidade de encontrar o processo em certo estado, digamos j , após grande número de transições, tende a ser o valor π_j , independente da distribuição probabilística do estado inicial. Observe que as equações de estado estacionário são formadas por $M + 2$ equações com $M + 1$ incógnitas desconhecidas. Pelo fato de ser uma solução única, pelo menos uma equação tem de ser redundante e pode, portanto, ser eliminada e substituída por $\sum_{j=0}^M \pi_j = 1$.

3.2 Modelando regra de Klein 2-2 por Cadeia de Markov

Considere uma cadeia de Markov em que o processo de inspeção e decisão seja modelado com uso de cinco estados caracterizados por $Z = [(C), (S; 1), (S; 2), (I; 1), (I; 2)]$. A variável C indica que a média amostral caiu entre os limites de controle (LSC e LIC), S que a média amostral foi superior ao LSC e I indica que a média amostral foi inferior a LIC. Os valores numéricos que acompanham S e I indicam a quantidade de observações sucessivas respectivamente acima ou abaixo dos limites LSC e LIC.

Com os estados contidos em Z podemos elaborar a cadeia de Markov descrita por \mathbf{P}_1 . Por exemplo, $P[(S; 1) | (C)] = p_s$ representa a probabilidade condicional de que a próxima média amostral está em S dado que a anterior média amostral estava na região C . $P[(S; 2) | (C)] = 0$ representa a probabilidade condicional de que a próxima média amostral está pela segunda vez consecutiva em S dado que a anterior média amostral estava na região C , ou seja, probabilidade 0. Já $P[(I; 1) | (C)] = p_i$ representa a probabilidade condicional de que a próxima média amostral está em I dado que a anterior média amostral estava na região C .

$$\mathbf{P}_1 = \begin{array}{c} (C) \quad (S; 1) \quad (S; 2) \quad (I; 1) \quad (I; 2) \\ \begin{array}{c} (C) \\ (S; 1) \\ (S; 2) \\ (I; 1) \\ (I; 2) \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} p_c & p_s & 0 & p_i & 0 \\ p_c & 0 & p_s & p_i & 0 \\ p_c & p_s & 0 & p_i & 0 \\ p_c & p_s & 0 & 0 & p_i \\ p_c & p_s & 0 & p_i & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

Em que:

$$p_s = 1 - P(\bar{x} \leq k_1/\sqrt{n} \mid \bar{x} \sim N(\delta; 1/\sqrt{n}));$$

$$p_i = P(\bar{x} \leq -k_1/\sqrt{n} \mid \bar{x} \sim N(\delta; 1/\sqrt{n}));$$

$$p_c = (-k_1/\sqrt{n} \leq \bar{x} \leq k_1/\sqrt{n} \mid \bar{x} \sim N(\delta; 1/\sqrt{n})).$$

Obs.: Nas situações sob controle, $\delta = 0$ e situações fora de controle $\delta \neq 0$.

Sem perda de generalidade, estamos adotando que os dados estão padronizados. O valor de k_1 precisa ser determinado de tal forma que ARL_0 seja o usual 370,4. Explicaremos nessa seção o procedimento para o cálculo de k_1 .

Considere que a distribuição estacionária seja expressa por $\boldsymbol{\pi} = [\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5]$ e está associada respectivamente aos estados de Z . O vetor $\boldsymbol{\pi}$ é a solução do Sistema linear expresso por $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi P}_1$, sujeito a restrição de que $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1$. Uma das equações do sistema $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi P}_1$ é redundante e pode ser eliminada.

Assim, podemos expressar o valor de ARL_0 pela Equação 1.5. Observe que ARL_0 depende dos limites de controle LIC e LSC (que são simétricos em relação a μ_0). Neste sentido se fixarmos ARL_0 (usualmente em 370,4) podemos obter os LIC e LSC que garanta um ARL_0 igual ao valor fixado. Observe que estados π_3 e π_5 são as probabilidades associadas aos estados que indica a situação fora de controle.

$$ARL_0 = \frac{1}{\pi_3 + \pi_5}, \text{ adotando } \mu = \mu_0 \quad (1.5)$$

Uma vez fixado os limites de controle LIC e LSC então usamos (1.6) para o cálculo do ARL_1 :

$$ARL_1 = \frac{1}{\pi_3 + \pi_5}, \text{ adotando } \mu = \mu_1 \quad (1.6)$$

4. RESULTADOS

O desempenho em termos de ARL da carta de controle \bar{X} clássica e da carta de controle \bar{X} com o uso da regra de Klein (2-2) foram calculadas adotando $\mu_0 = 0$ e μ_1 variando de 0 a 3 com um incremento de 0,2. Utilizamos respectivamente a equação (1.4) e a abordagem por meio da cadeia de Markov, equações (1.5) e (1.6). Os resultados são apresentados na Tabela 1.

A Tabela 2 apresenta os limites de controle usados para a carta de controle \bar{X} clássica e a carta de controle \bar{X} com o uso da regra de Klein (2-2). Todos os cálculos apresentados nesta seção foram realizados com usos dos programas desenvolvidos no software R (R CORE TEAM, 2020) e apresentados no Anexo 1 e 2 (ARL e limites de controle para carta de controle \bar{X} com o uso da regra de Klein 2-2), Anexo 3 (ARL e limites de controle para carta de controle \bar{X}).

Tabela 1 - ARLs obtidos para \bar{X} clássica e \bar{X} com o uso da regra de Klein (2-2).

Média	n= 1		n= 2		n= 3		n= 4		n= 5	
	\bar{X}	2-2								
0,0	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40
0,2	308,43	276,67	262,74	218,39	227,72	178,80	200,08	150,25	177,73	128,77
0,4	200,08	150,25	130,86	87,89	94,04	59,47	71,55	43,63	56,59	33,75
0,6	119,67	78,91	63,38	38,16	40,03	23,44	27,82	16,28	20,56	12,21
0,8	71,55	43,63	32,41	18,92	18,79	11,24	12,38	7,79	8,86	5,94
1,0	43,89	25,78	17,73	10,66	9,76	6,42	6,30	4,61	4,50	3,67
1,2	27,82	16,28	10,38	6,74	5,61	4,25	3,65	3,23	2,66	2,73
1,4	18,25	10,94	6,50	4,71	3,54	3,18	2,38	2,58	1,81	2,30
1,6	12,38	7,79	4,34	3,59	2,44	2,61	1,73	2,26	1,39	2,11
1,8	8,69	5,85	3,08	2,94	1,83	2,31	1,38	2,11	1,18	2,04
2,0	6,30	4,61	2,32	2,55	1,47	2,15	1,19	2,04	1,08	2,01
2,2	4,72	3,79	1,84	2,31	1,26	2,07	1,09	2,01	1,03	2,00
2,4	3,65	3,23	1,53	2,17	1,14	2,03	1,04	2,00	1,01	2,00
2,6	2,90	2,85	1,33	2,09	1,07	2,01	1,01	2,00	1,00	2,00
2,8	2,38	2,58	1,20	2,04	1,03	2,00	1,00	2,00	1,00	2,00
3,0	2,00	2,39	1,12	2,02	1,01	2,00	1,00	2,00	1,00	2,00

Tabela 2 - Resultados dos limites de controle obtidos para \bar{X} e Klein (2-2).

	n= 1	n= 2	n= 3	n= 4	n= 5
Limite Superior de Controle \bar{X}	3,00	2,12132	1,73205	1,50	1,34164
Limites Superior de Controle 2-2	1,781419	1,259653	1,028503	0,890709	0,796675

É possível observar que para deslocamentos grandes em relação à média sob controle, a carta de controle \bar{X} clássica é mais eficiente que a utilização da regra 2-2 uma vez que o valor de ARL se estabiliza em 1 enquanto na carta de controle \bar{X} com a regra 2-2 o valor de ARL se estabiliza em 2. No entanto, para deslocamentos pequenos na média do processo a regra 2-2 apresenta melhores resultados, ou seja, terão um ARL menor, indicando maior sensibilidade a mudanças. Isso é importante, pois em processos atuais com alta qualidade os deslocamentos são em geral pequenos.

As Figuras 3 a 7 ilustram a diferença entre o ARL obtidos por meio da carta de controle \bar{X} clássica e a carta de controle \bar{X} com a regra 2-2. Observe que para pequenos deslocamentos na média os valores de ARL obtidos pela carta de controle \bar{X} clássica são superiores aos obtidos pela carta de controle \bar{X} com a regra 2-2.

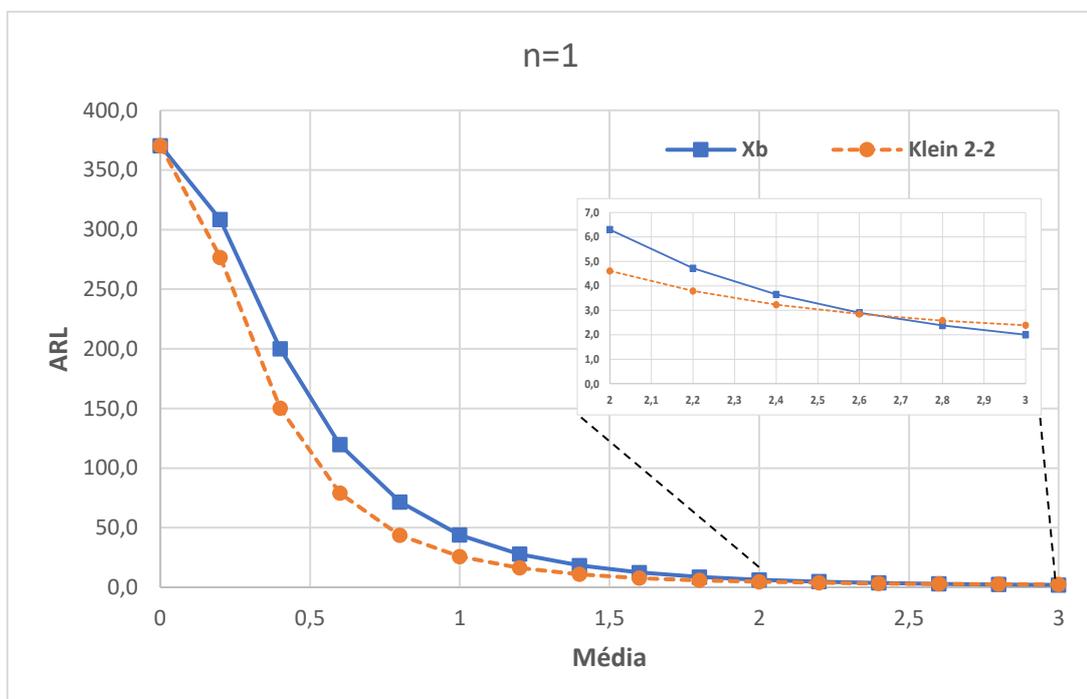


Figura 3 - Diferença entre o ARL obtido através da abordagem clássica e a regra 2-2 (n=1).

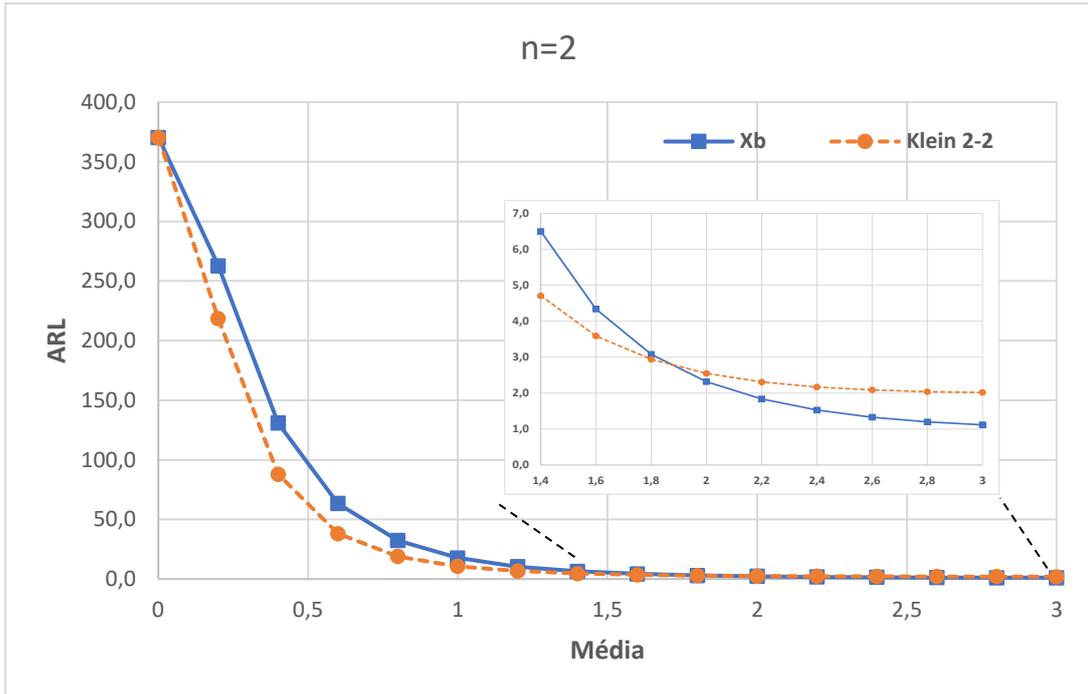


Figura 4 - Diferença entre o ARL obtido através da abordagem clássica e a regra 2-2 ($n=2$).

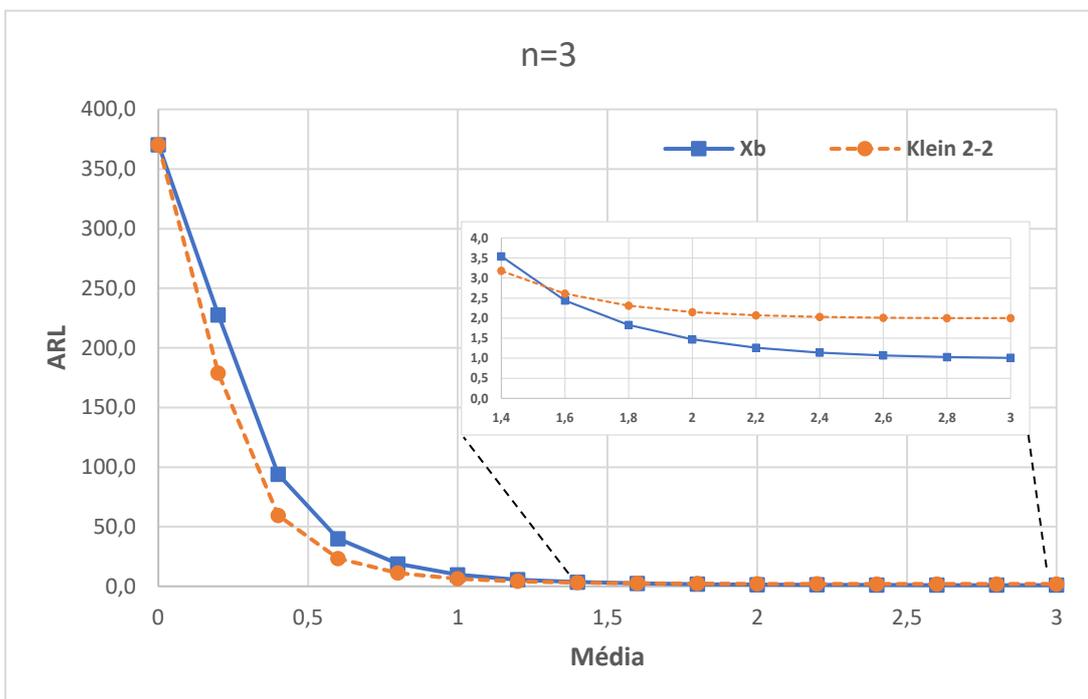


Figura 5 - Diferença entre o ARL obtido através da abordagem clássica e a regra 2-2 ($n=3$).

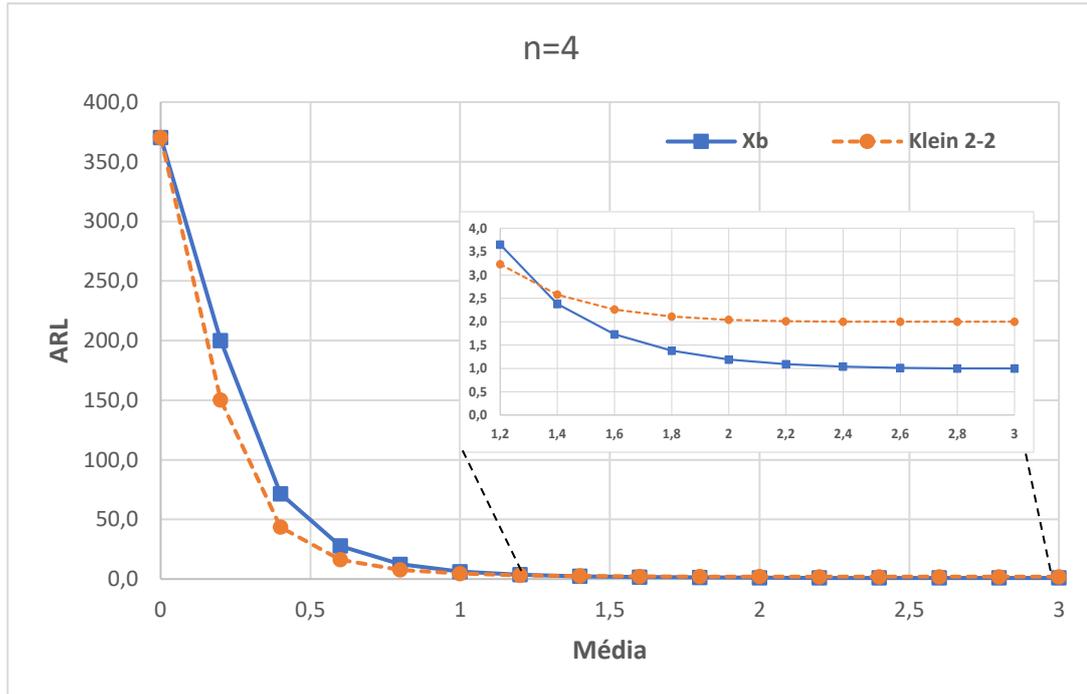


Figura 6 - Diferença entre o ARL obtido através da abordagem clássica e a regra 2-2 ($n=4$).

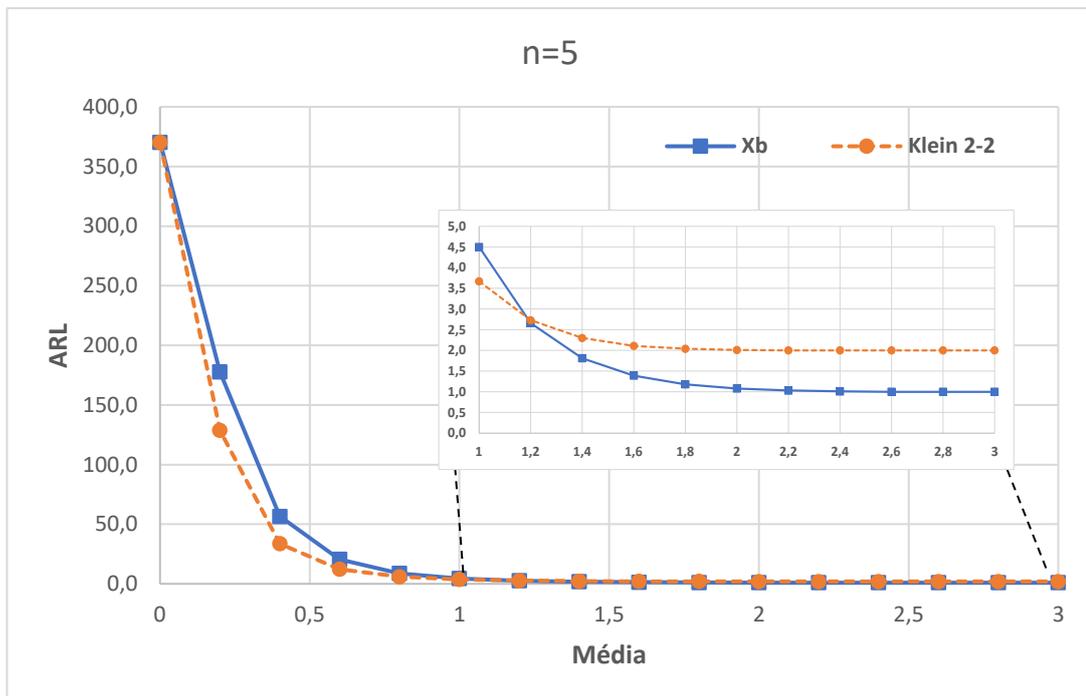


Figura 7 - Diferença entre o ARL obtido através da abordagem clássica e a regra 2-2 ($n=5$).

5. CONCLUSÃO

A utilização da carta de controle \bar{X} com a regra 2-2 mostrou ser mais eficiente em termos de ARL do que a carta de controle \bar{X} clássica nos seguintes casos: $n=1$ e média $\leq 2,6$; $n=2$ e média $\leq 1,8$; $n=3$ e média $\leq 1,4$; $n=4$ e média $\leq 1,2$; $n=5$ e média ≤ 1 .

A decisão de implementar ou não a regra 2-2 dependerá da importância da detecção de pequenos deslocamentos na média do processo. Como em processos industriais atuais grandes deslocamentos são cada vez menos presentes, a utilização da regra 2-2 se torna uma estratégia importante de ser considerada pelos gerentes de controle de qualidade. Neste trabalho a solução foi exata por meio de cadeia de Markov, constituindo-se assim clara contribuição para a literatura. Como trabalho futuro sugerimos a avaliação da regra de Klein 2-2 na carta de controle para avaliação da variância com uso de cadeias de Markov.

REFERÊNCIAS

- FERNANDES, João Lucas. **Avaliação do desempenho da carta \bar{X} com uso da regra suplementar 2-2 de Klein por meio de simulação de Monte Carlo**. 2021. 14 f. Monografia (Especialização em Estatística) – UFMG, Belo Horizonte, 2021.
- HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à Pesquisa Operacional**. 8ª ed. São Paulo: McGraw Hill. 2006. p. 713-730.
- JENSEN, W. A. *et. al.* Effects of Parameter Estimation on Control Chart Properties: A Literature Review, **Journal of Quality Technology**, v. 38, n. 4, p. 349-364. 2006.
- KLEIN, M. Two Alternatives to the Shewhart \bar{X} Control Chart. **Journal of Quality Technology**, v. 32, n. 4, p. 427-431. 2000.
- MACEDO, Mariano de Matos. Gestão da Produtividade nas Empresas. **Revista Organização Sistêmica**, v.1, n.1, pp. 111-119, 2012.
- MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros**. 7ª ed. Rio de Janeiro: LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda. 2021. p. 513-554.
- R CORE TEAM (2020). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. Disponível em: <<https://www.R-project.org>>. Acesso em 20 de nov. 2021.

ANEXO A – Programa para encontrar os limites de controle da carta de controle \bar{X} com regra suplementar 2-2 de Klein

```

### Encontrar limites de controle com regra suplementar 2-2 ###

library(pracma) #Permite comandos similares ao Matlab

tic()
clear()
n=5 #tamanho da amostra
u=0 #Média sob controle
desvio=1
#n=1; LSC= 1.781419
#n=2; LSC= 1.259653
#n=3; LSC= 1.028503
#n=4; LSC= 0.890709
#n=5; LSC= 0.796675

U<-seq(0.6,1.9,0.000001) #Limites a serem pesquisados par LSC.
U1<-size(U)
U2<-U1[2]
Resultados<-matrix(0,U2,3) #matriz para arquivar possíveis ARL0's.
# Looping
for (j in 1:U2){
LSC=U[j]
LIC=-LSC
pi<-pnorm(LIC,u,desvio/(n^0.5)) #Área abaixo do LIC
ps<-1-pnorm(LSC,u,desvio/(n^0.5)) #Área acima do LSC
pc=1-(pi+ps)

#Elaborando a cadeia de Markov
c1<-c(pc,ps, 0,pi,0)
c2<-c(pc,0,ps,pi,0)
c3<-c(pc,ps,0,pi,0)
c4<-c(pc,ps,0,0,pi)
c5<-c(pc,ps,0,pi,0)

M<-rbind(c1, c2, c3, c4, c5)

#Resolvendo o Sistema Linear no R
A = t(M) - eye(5)
A[5,] = ones(1,5)
B = zeros(5, 1)
B[5,1] = 1
MMa = solve(A)%*%B

PP<-1/(MMa[3,1]+MMa[5,1]) #Valor de ARL0 para um determinado LSC
Resultados[j,1]=LSC
Resultados[j,2]=PP
}
Resultados[,3]=abs(Resultados[,2]-370.4) #Diferença ARL0 obtido e Alvo

```

```
Resultados=sortrows(Resultados,3)
cat('ARL0=',Resultados[1,2],"\\n") #Imprimindo no console ARL0 obtido
cat('LSC=',Resultados[1,1],"\\n") #Imprimindo no console LSC obtido
toc()
## elapsed time is 261.080000 seconds
#####
```

ANEXO B – Programa para encontrar ARL utilizando a regra 2-2

```

### Cálculo ARL utilizando regra 2-2 ###

library(pracma)
library(expm) #Pacote para Elevar uma Matriz a determinado valor inteiro
clear()

#Cadeia de Markov
LSC=0.796675 #LSC calculado no programa do Anexo 1 para n=5
LIC=-LSC
n=5
desvio=1
Saida=c()
uA=seq(0,3,0.2)
for (i in uA){
  u=i
  pi<-pnorm(LIC,u,desvio/(n^0.5)) #Área abaixo do LIC
  ps<-1-pnorm(LSC,u,desvio/(n^0.5)) #Área acima do LSC
  pc=1-(pi+ps)
  c1<-c(pc,ps, 0,pi,0)
  c2<-c(pc,0,ps,pi,0)
  c3<-c(pc,ps,0,pi,0)
  c4<-c(pc,ps,0,0,pi)
  c5<-c(pc,ps,0,pi,0)

  M<-rbind(c1, c2, c3, c4, c5)

  #MM<-M%^%100000 - apenas para avaliação do resultado do sistema linear.
  #Resolvendo o Sistema Linear no R
  A = t(M) - eye(5)
  A[5,] = ones(1,5)
  B = zeros(5, 1)
  B[5,1] = 1
  MMA = solve(A)%*%B

  PP<-1/(MMA[3,1]+MMA[5,1])
  Saida=rbind(Saida,c(u,PP))

  colnames(Saida)<- c("u1", "ARL0")
}
write.csv(Saida,"saida.csv")

#####

```

ANEXO C – Programa para encontrar ARL utilizando a abordagem clássica

```

### Cálculo ARL com abordagem clássica ###

# Carrega biblioteca do Matlab
library(pracma)

clear()

#Xbarra Tradicional
desvio = 1
n = 5 #Tamanho da amostra
u0 = 0
LSC = u0+3*(desvio/sqrt(n))
LIC = u0-3*(desvio/sqrt(n))

SaidaT=c()
uA=seq(0,3,0.2) #Mi1
for (i in uA){
  u=i
  pi<-pnorm(LIC,u,desvio/sqrt(n)) #Área abaixo do LIC
  ps<-1-pnorm(LSC,u,desvio/sqrt(n)) #Área acima do LSC

  ARL<-1/(pi+ps)
  SaidaT=rbind(SaidaT,c(u,ARL)) #Empilha e armazena

colnames(SaidaT)<- c("u1","ARL")

}
write.csv(SaidaT,"SaidaT.csv")

#####

```