

# Beta dinâmico utilizando GARCH multivariado para dados brasileiros

Victor Schmidt Comitti\*      Eduardo Senra Coutinho  
Frank Magalhães Pinho†

10 de abril de 2017

## Resumo

Neste trabalho investigamos se há indícios de que o índice  $\beta$  de 10 dez carteiras compostas por ativos listados na bolsa brasileira não foi estático no período pós-crise. Para isso utilizamos o modelo CAPM em cinco versões: Mínimos Quadrados Ordinários (MQO), GARCH com correlação constante, GARCH com correlação dinâmica, APARCH com correlação constante e APARCH com correlação dinâmica. Especificamos ainda cada um dos modelos com cinco distribuições de erro além da normal:  $t$ , *skewed t*, GED, *Skewed GED* e *Skewed Normal*. A comparação entre os modelos foi feita com base no desempenho de cada um deles em teste de previsão dentro e fora da amostra. Verificamos que em 8 dos 10 setores pesquisados os modelos de  $\beta$  dinâmico se mostraram superiores ao modelo estático de Mínimos Quadrados Ordinários. Constatou-se ainda que pelo menos em 6 das 10 carteiras as especificações com erros não gaussianos melhoraram os resultados das estimações. Por outro lado, na média, os modelos de correlação dinâmica tiveram desempenho pior que os de correlação constante. Também não encontramos vantagens dos modelos APARCH sobre os GARCH. De maneira geral, o modelo com melhor desempenho nos testes de previsão foi o GARCH de correlação constante.

**Palavras-chaves:** CAPM, GARCH, APARCH.

## Introdução

Tradicionalmente, costuma-se dividir a teoria de finança em três subáreas: investimentos, financiamento e distribuição de dividendos. Muitos avanços foram feitos dentro da subárea de investimento nas últimas cinco décadas; nenhum deles, provavelmente, teve tanto impacto quanto o modelo de precificação de ativos que ficou conhecido como *Capital Asset Pricing Model* (CAPM). O CAPM foi introduzido por Sharpe (1964) e Lintner (1965) e tem sido amplamente utilizado e estudado desde então. O modelo propõem a existência de uma relação linear entre a expectativa de retorno de um ativo e o excesso de retorno de alguma *proxy* de mercado em relação a uma taxa considerada livre de risco. A relação de

---

\*victorsch2@gmail.com

†frank\_magalhaes@yahoo.com.br

proporcionalidade entre essas duas variáveis - ou Beta - é uma medida do risco sistemático (ou não diversificável) associado ao ativo de interesse.

Usualmente, o Beta do modelo CAPM é estimado pelo método de Mínimos quadrados ordinários (MQO). O Beta MQO é também chamado de Beta estático ou Beta incondicional uma vez que ele não varia na janela de tempo de estimação. Há, no entanto, fundamento teórico para se acreditar que o Beta é, de fato, dinâmico. Segundo Moonis e Shah (2004), o Beta condicional é preferível à versão estática porque as variáveis macroeconômicas são dinâmicas - uma mudança no cenário econômico pode levar à uma mudança no risco não diversificável dos ativos e, portanto, à uma mudança no Beta.

Outros motivos pelos quais o Beta condicional seria preferível ao incondicional citados frequentemente na literatura são: assimetria de informação; ou seja, a capacidade que um determinado evento tem de afetar fortemente os retornos de um ativo específico ou de um setor, mas não o retorno do mercado como um todo; o fato de que a taxa livre de risco não é constante - no caso brasileiro, por exemplo, a remuneração de inúmeros títulos vendidos no mercado é afetada sempre que o Banco Central altera o valor da SELIC; mudança tecnológica; efeitos de alavancagem que fazem com que, em períodos de recessão, os Betas associados a empresas mais alavancadas tendem a aumentar mais do que aqueles de empresas menos alavancadas. Outro fator importante são os chamados *Volatility Clusters*. O fenômeno de *Volatility Clustering* é tipicamente observado em séries financeiras e ocorre quando períodos de grande movimento dos retornos são seguidos por períodos de grande movimento e períodos de baixo movimento são seguidos por períodos de baixo movimento. A existência do *volatility clustering* é incompatível com Betas incondicionais.

Existem ainda outras críticas mais gerais à validade do CAPM estático. Particularmente, os trabalhos empíricos mostram que o modelo original de Fama e Lintner tem dificuldade para explicar o porquê de firmas com maior razão *book to market* ( $\frac{B}{M}$ ) possuírem melhor performance em relação àquelas com baixa razão  $\frac{B}{M}$ . O CAPM tradicional também não é capaz de explicar os motivos pelos quais ativos menores têm retornos superiores aos de ativos maiores (efeito tamanho) e não consegue captar o chamado efeito momento, segundo o qual papéis com maior retorno no passado continuam a ter melhor performance nos períodos subsequentes.

A necessidade de uma nova formulação para o CAPM levou ao desenvolvimento de vários métodos para o cálculo de Betas dinâmicos. As abordagens mais promissoras e frequentes na literatura são aquelas que utilizam métodos de espaço de estado, GARCH multivariado, volatilidade estocástica ou *Markov Switching*.

O cálculo de Betas dinâmicos para ativos brasileiros ainda é pouco difundido e o objetivo deste trabalho é ajudar a preencher esta lacuna. Foram estimados Betas condicionais utilizando modelos GARCH e APARCH para ativos de dez setores da economia brasileira no período pós crise. O Beta de cada setor foi estimado por dois métodos diferentes: o primeiro considera que a correlação entre o excesso de retorno do setor e o excesso de retorno do índice Ibovespa é constante ao longo do período de estimação e o outro considera que a mesma correlação é dinâmica. Testou-se também se a utilização de resíduos com caudas pesadas melhoram ou não os Betas estimados. As distribuições escolhidas foram a *t*, a GED, a *Skewed t*, a *Skewed GED* e a *Skewed Normal*. A comparação dos modelos dinâmicos com o modelo de mínimos quadrados ordinários mostra que em oito dos setores analisados o Beta condicional se mostrou superior ao Beta estático. No próximo capítulo há uma revisão da literatura existente sobre CAPM dinâmico. No capítulo seguinte será discutida a metodologia utilizada neste trabalho e, em seguida, os resultados

serão apresentados acompanhados das análises pertinentes.

## 1 CAPM condicional

As primeiras metodologias para o cálculo de Betas dinâmicos surgiram na literatura durante a década de 1980. Bollerslev, Engle e Wooldridge (1988) partiram da premissa de que os agentes de mercado possuem expectativas comuns em relação aos momentos futuros dos retornos de um ativo. Essas expectativas, porém, seriam condicionais ao conjunto de informação até o período imediatamente anterior. Os autores propuseram estimar variâncias e covariâncias condicionais utilizando GARCH multivariado na média (GARCH-M). Para tanto, utilizaram uma carteira composta por ações negociadas em bolsa além de títulos e notas do tesouro norte-americano. Os retornos utilizados eram trimestrais e iam do primeiro trimestre de 1959 até o segundo trimestre de 1984, totalizando 102 observações. Os resultados reportados mostram que os retornos esperados dos prêmios de risco dos ativos são altamente dependentes dos segundos momentos condicionais dos retornos. Os autores apontam ainda que há evidência de que outras variáveis, como inovações no consumo, podem ser capazes de explicar os retornos dos ativos.

Harvey(1989) aponta que a abordagem de Bollerslev, Engle e Woodridge (1988) traz como desvantagem o fato de partir de pressupostos fortes demais a respeito da forma funcional dos segundos momentos dos retornos. O autor argumenta também que o processo ARCH seguido por um ativo em particular não se generaliza, necessariamente, para uma carteira de ativos. Harvey propõem um modelo multivariado para o retorno dos ativos no qual tanto o primeiro momento condicional dos retornos como o segundo variam com o tempo. Nesta formulação define-se  $\Omega_{t-1}$  como o conjunto de informação disponível aos agentes em  $t - 1$  e define-se a versão condicional do CAPM original de Sharpe e Lintner como:

$$E[r_{jt}|\Omega_{t-1}] = \frac{E[r_{mt}|\Omega_{t-1}]}{var[r_{mt}|\Omega_{t-1}]}cov[r_j, r_{mt}|\Omega_{t-1}] \quad (1)$$

O modelo de Harvey (1989) permite que qualquer uma das quantidades em 1 varie com o tempo, ao contrário do modelo de Bollerslev, Engle e Wooldridge (1988). Nesta abordagem, as covariâncias condicionais entre os retornos são aproximadas pelos produtos das inovações decorrentes de previsões lineares sobre os retornos, dado o conjunto de informação  $\Omega_{t-1}$ . Para testar o modelo foi utilizada uma amostra com retornos mensais de carteiras de ações negociadas na bolsa de Nova Iorque (NYSE). A *proxy* de mercado utilizada foi o índice da NYSE e como ativo livre de risco consideraram-se as notas do tesouro norte-americano. Os dados coletados vão de setembro de 1941 até dezembro de 1987. Todos os parâmetros do modelo foram estimados via GMM e MQO. Os resultados mostraram que rejeita-se a hipótese de que as covariâncias condicionais entre o retorno de mercado e o retorno das carteiras analisadas não variam com o tempo. Mostrou-se também que maiores retornos levam à maiores covariâncias condicionais, como previsto pelo modelo CAPM. Encontrou-se ainda evidência de que a relação risco retorno é dependente do tempo, reforçando, em concordância com o trabalho anterior de Bollerslev et. al (1988), que a versão condicional do CAPM é preferível à incondicional.

Os modelos da família ARCH/GARCH se tornaram muito populares para estimação e previsão de volatilidade dos retornos de ativos e carteiras. Vários trabalhos utilizando métodos de heterocedasticidade condicional foram publicados na literatura especializada,

sobretudo a partir da década de 1990. Dentre estes artigos, alguns são de maior interesse para este trabalho pois tratam da estimação de Betas condicionais.

Ng (1991) calculou Betas dinâmicos utilizando GARCH multivariado com correlação constante entre os retornos das carteiras analisadas e da *proxy* de mercado. Os resultados obtidos pela autora mostram variabilidade significativa no excesso de retorno esperado condicional dos portfólios estudados. Há evidência, também, de que o prêmio de risco de mercado é linearmente relacionado com a variância condicional de seu retorno. Esta relação observada possui intercepto negativo, o que é compatível com os resultados de Bollerslev (1988) e Harvey (1989).

Giannopoulos (1995) estima Betas dinâmicos através de um GARCH bivariado numa amostra de retornos semanais de treze portfólios formados por papéis australianos. Das treze carteiras analisadas onze mostraram evidência estatisticamente significativa de que a especificação condicional é mais adequada do que a incondicional.

Brook, Faff e McKenzie (1998) estimam Betas dependentes do tempo para portfólios industriais australianos utilizando GARCH multivariado e métodos baseados no filtro de Kalman. A base de dados deste trabalho era composta por retornos mensais das carteiras durante o período que vai de 1974 até 1996. Mostra-se através de testes de previsão dentro e fora da amostra que, por uma grande margem, as estimações feitas via filtro de Kalman são superiores.

Ainda que os modelos GARCH sejam capazes de capturar certas características intrínsecas das séries de retornos financeiros, como os já citados *volatility clusters*, eles falham em capturar outros aspectos como a assimetria existente entre choques positivos e negativos. Para tentar minimizar este problema, alguns autores utilizaram extensões não lineares dos modelos da família GARCH. Um exemplo de trabalho deste tipo é Braun, Nelson e Sunier (1995) que estudaram a covariância condicional entre retornos de ações através de um EGARCH bivariado.

Percebe-se, no entanto, que os modelos da família GARCH, embora, quase sempre, de fácil implementação, tendem a superestimar a volatilidade, uma vez que são determinísticos e não estocásticos. Uma abordagem alternativa aos modelos GARCH é a classe de modelos de volatilidade estocástica (SV). A abordagem de volatilidade estocástica inclui um componente estocástico que não pode ser explicado pelo conjunto passado de informação na variância do retorno do ativo. Ghysels et al. (1996) propôs um modelo de volatilidade estocástica em tempo discreto com a forma:

$$y_t = \mu + \sigma \exp\left(\frac{1}{2}h_t\right)\epsilon_t, \epsilon_t \sim iid(0, 1) \quad (2)$$

$$h_{t+1} = \phi h_t + \eta_t, \eta_t \sim iid(0, \sigma_\eta^2), h_1 \sim N\left(0, \frac{\sigma_\eta^2}{(1 - \phi^2)}\right) \quad (3)$$

onde  $y_t$  pode representar o retorno de um determinado ativo e  $\sigma_\eta^2$  é um hiperparâmetro do modelo.

Li (2003) utilizou modelos SV para estimar Betas dinâmicos de carteiras formadas por retornos de portfólios industriais da Nova Zelândia. O autor compara os resultados obtidos através dos estimadores de volatilidade estocástica com aqueles conseguidos via filtro de Kalman e GARCH multivariado aplicados sobre a mesma base de dados. A comparação é feita através de previsões dentro e fora da amostra. Os resultados mostram

que os modelos SV foram superiores aos outros dois em testes de previsão dentro da amostra, um resultado surpreendente tendo em vista que as estimações por filtro de Kalman tinham se mostrado superiores em outros trabalhos, como o de Brooks et al. (1998), já mencionado. Nos testes de previsão fora da amostra o modelo que teve o melhor desempenho foi o GARCH. Apesar de mais robusto, do ponto de vista teórico, os modelos de volatilidade estocástica são muito mais difíceis de se estimar em relação aos modelos GARCH já que não possuem uma forma fechada para a sua função de verossimilhança, uma vez que os erros de observação não seguem uma distribuição normal. Como os modelos SV são relativamente novos, não há ainda um consenso sobre a melhor maneira de estimar os seus hiperparâmetros. A maior parte dos trabalhos na literatura utiliza MCMC ou MCL.

Nos últimos anos têm crescido também o número de trabalhos que utilizam o filtro de Kalman para estimar Betas condicionais através de métodos de espaço de estados. Além dos trabalhos já citados de Li (2003) e Brooks (1998) que utilizam esta técnica, vale citar também Faff, Hillier e Hillier (2000) e Lie, Brooks e Faff (2000). Nesses dois trabalhos comparam-se as estimações feitas através do filtro de Kalman com as obtidas utilizando GARCH multivariado. Em ambos os casos o filtro de Kalman se mostra superior. Um trabalho mais abrangente é o de Zivot, Wang e Koopman (2003) que mostra aplicações dos métodos de espaço de estado em finanças utilizando pacotes disponíveis no S+FinMetrics. Outras abordagens para o cálculo de Betas dinâmicos, mas de menor interesse para este trabalho, são os modelos de Markov Switching e o de Schwert e Seguin (SS). Um exemplo de trabalho que utiliza o primeiro é Huang (2000); já o segundo foi utilizado pelo próprio Li no artigo já mencionado.

Uma comparação mais completa dos diversos modelos existentes para se estimar Betas que variam no tempo foi feita por Mergner (2009). Neste trabalho o autor estima Betas dinâmicos utilizando todos os métodos já citados anteriormente e compara os resultados obtidos, primeiro, verificando a aderência do modelo com os dados amostrais e, em seguida, dividindo a base de dados para fazer previsões fora da amostra. Os critérios tomados para se avaliar a qualidade das previsões foram o *Mean Average Error* (MAE) e o *Mean Squared Error* (MSE). Mergner utilizou uma base de dados composta por retornos semanais de 18 portfólios industriais do mercado europeu. As observações vão de dezembro de 1987 até fevereiro de 2005.

O autor trabalha com o CAPM na forma de espaço de estados em quatro versões diferentes. No modelo *Random Walk* RW ele considera que o Beta é um passeio aleatório. No chamado *Mean Reverting Model* (MR) o Beta é modelado como um processo autoregressivo de ordem um. A extensão do MR é o *Moving Mean Reverting Model* (MMR) que permite que a média do Beta também varie com o tempo. O modelo mais abrangente de todos é o *Generalizes Random Walk Model* (GRWM) que considera que os erros do modelo não seguem uma distribuição normal. Comparando os quatro modelos baseados no filtro de Kalman com os modelos GARCH, de volatilidade estocástica e de *Markov Switching*, Mergner chega às seguintes conclusões:

- Os modelos de média móvel e de reversão à média parecem ser mais flexíveis em capturar a sensibilidade de um setor à uma mudança no mercado.
- Nos testes de previsão dentro da amostra o modelo de MQO se saiu pior em relação a todos os outros, reafirmando a hipótese de que Beta de fato varia.
- Os modelos GARCH se saem apenas um pouco melhor que o modelo de MQO. As

técnicas de reversão à média, por outro lado, se saem consideravelmente melhor, registrando erros quadráticos médios até 50% menores.

- Os modelos de volatilidade estocástica apresentam erros quadráticos médios 13% menores que aqueles apresentados pelo modelo GARCH, em média.
- Nas previsões fora da amostra os modelos que foram estimados por filtro de Kalman se saíram muito melhor que os outros.
- Não há um vencedor claro entre os modelos GARCH e de volatilidade estocástica uma vez que as estatísticas MAE e MSE são muito semelhantes entre si.

Como já mencionado, os trabalhos que utilizam Beta dinâmico para estimar a volatilidade de ativos negociados na bolsa de valores brasileira são escassos na literatura. Nota-se também que todos os trabalhos nacionais existentes sobre o assunto são aplicações de metodologias desenvolvidas e já testadas por pesquisadores de fora. Um dos trabalhos brasileiros mais importantes que utiliza o CAPM é condicional é o de Tambosi Filho e Moreiras (2010). Os autores utilizaram a metodologia desenvolvida por WANG (1996) para estimar Betas condicionais para carteiras de ativos dos mercados brasileiro, chileno, argentino. O modelo de Wang incorpora ao CAPM tradicional variáveis macroeconômicas e financeiras como o capital humano e o retorno do trabalho. O Beta condicional é definido como a covariância entre o retorno do ativo 'i' e o retorno de mercado no tempo  $t$  sobre a variância condicional do retorno de mercado dado o conjunto de informação até o período  $t - 1$ . Wang assume que o capital investido numa economia é proporcional ao retorno de educação e que, portanto, há uma relação linear entre o retorno da carteira de mercado e o capital humano, este último representado no modelo como a taxa de crescimento da renda do trabalho.

No trabalho de Tambosi Filho e Moreiras foram utilizadas sete carteiras contendo, cada uma, ações de cinco empresas listadas na bolsa brasileira. Os retornos coletados eram mensais e o período de análise foi de janeiro de 1994 até dezembro de 2002; totalizando, portanto, 108 observações de cada carteira. No caso de Chile e Argentina o procedimento foi o mesmo: as carteiras foram criadas a partir de cinco ações listadas na bolsa de valores de cada um dos países. Diferentemente do Brasil, no entanto, para a análise do CAPM no Chile e na Argentina foram utilizadas apenas cinco carteiras. Um aspecto importante da base de dados utilizada pelos autores é que, em cada carteira, todos os ativos tinham o mesmo peso. Como *proxy* para o prêmio de risco em cada um dos três países foram utilizados o *spread* entre a taxa DI e a taxa de juros básica da economia (SELIC), no caso brasileiro; o *spread* entre a taxa de juros sobre empréstimo para o setor privado e a taxa básica da economia, para o caso argentino e o *spread* entre as taxas de juros cobras em linhas de crédito para o setor secundário e a taxa básica da economia. A *proxy* utilizada para o capital humano nos três países foi o PIB mensal.

Tombosi Filho e Moreiras mostram que o CAPM estático não é capaz de explicar o retorno esperado *cross sectional* dos mercados brasileiro, chileno e argentino. Como medida de aderência dos dados ao modelo os autores utilizam o coeficiente de determinação ( $R^2$ ). Verifica-se que o  $R^2$  dos modelos aumenta quando se inclui a variável capital humano. No entanto, não há evidência estatisticamente significativa de que os parâmetros mudem ao longo do tempo. O modelo condicional se sai consideravelmente melhor que o estático pois consegue captar os efeitos dinâmicos da economia o que gera regressões com mais poder explicativo - sobretudo no caso brasileiro. Nota-se, porém, que a versão estática do CAPM

é capaz de explicar o retorno esperado das carteiras analisadas por certos períodos. Os autores concluem que o modelo de Wang, aplicado para o mercado norte-americano em Jagannathan e Wang (1996), também é capaz de explicar satisfatoriamente os retornos de carteiras no mercado sul-americano.

Outro trabalho relevante é o de Flister, Bressan e Amaral (2010). Neste artigo os autores tentam determinar se é possível explicar os efeitos Tamanho, Momento e *Book to Market* utilizando a versão condicional do CAPM. A base de dados utilizada foi formada com os retornos de ativos da Bovespa no período que vai de junho de 1995 até julho de 2008, o número de papéis analisados variou de 98 a 175 divididos em quinze carteiras ao longo do período de estudo e a taxa livre de risco foi o CDI. Como no trabalho de Tombosi Filho e Moreiras, o Beta condicional também foi estimado seguindo a metodologia proposta por Jagannathan e Wang (1996). O retorno esperado de uma carteira 'i' foi calculado segundo a equação:

$$E[R_{it}] = \bar{\beta}_i \gamma_{t-1} + cov(R_{mt-1}, \beta_{it-1}); \quad (4)$$

onde  $\bar{\beta}_i = E[\beta_{it-1}]$  e  $\gamma_{t-1} = E[R_{mt-1}]$ . Quando a covariância entre o prêmio de mercado e o Beta condicional à informação até o período  $t - 1$  for nula a equação 4 se transforma no modelo incondicional.

O modelo CAPM condicional foi estimado por MQO em janelas temporais de doze meses, seguindo a abordagem proposta por Lewellen e Nagel (2006). Os resultados obtidos mostram que há um ganho ínfimo do modelo condicional sobre o incondicional no cálculo dos alfas de Jensen. Os autores ressaltam, porém, que seus resultados podem ter sido prejudicados pelo fato de que o período de tempo estudado foi menor do que em outros estudos similares feitos para outros mercados. Verificou-se também que, no modelo condicional, os Betas variaram com o tempo, o que sugere cautela no uso de modelos estáticos. Os autores concluem que a proposição de que as anomalias de momento, tamanho e *book to market* podem ser explicadas através do CAPM condicional não pode ser validada com os resultados obtidos a partir da amostra estudada.

Um trabalho metodologicamente diferente em relação aos outros dois mencionados é o de Godeiro (2012). Godeiro estima Betas condicionais utilizando GARCH multivariado (MGARCH) e filtro de Kalman. O modelo MGARCH utilizado por Godeiro foi desenvolvido por Tse e Tui (2002) e é uma atualização das formulações propostas por Bollerslev, Engle e Wooldridge (1988) e Engle e Kroner (1995) que estimam variâncias e covariâncias condicionais usando métodos de heterocedasticidade condicional. Um aspecto importante do modelo de TSE e TSUI é que as correlações também são condicionais e definidas por uma matriz  $\psi_{ijt-1}$ , onde os índices representam o i-ésimo e o j-ésimo ativos.

Para estimar as correlações condicionais foi usado o filtro de Kalman. Godeiro utilizou o CAPM condicional na forma definida por Hamilton (1994):

$$(\beta_{t+1} + \bar{\beta}) = F(\beta_t + \bar{\beta}) + \nu_{t+1} \quad (5)$$

Se os autovalores de F estão dentro do círculo unitário então pode-se definir o vetor de estado como  $\epsilon = \beta_t - \bar{\beta}$  e então reescrever a equação do CAPM como:

$$r_t = \bar{\beta} r_{mt} + \epsilon r_{mt} + \xi \quad (6)$$

Definindo o conjunto de informação condicional de  $r_{mt}$  e a matriz variância-covariância do processo é possível estimar os parâmetros de 6 através da função de máxima verossimilhança.

A amostra de Godeiro (2012) foi construída com os retornos diários de 28 ações negociadas na bolsa de São Paulo no período que vai de 02/01/1995 até 20/03/2012. A *proxy* de mercado foi o retorno do IBOVESPA e a taxa livre de risco utilizada foi a SELIC. Como os retornos em séries financeiras tendem a ser assimétricos e com distribuição pesada nas caudas o autor modelou a amostra com um TGARCH e utilizou a distribuição t de Student. Os resultados obtidos confirmam aqueles de Flister, Bressan e Amaral (2010) e indicam que o modelo condicional é de fato superior ao modelo incondicional. Observou-se ainda um aumento significativo dos Betas no período pré-crise, sinalizando um aumento no risco do mercado acionário no período.

## 2 Metodologia

O propósito deste trabalho é comparar duas versões condicionais do modelo CAPM com o CAPM incondicional ou estático. Nesta seção serão apresentados os três modelos concorrentes e o método utilizado para compará-los.

### 2.1 O Beta MQO

Como mencionado na introdução do artigo, o modelo CAPM estabelece uma relação linear entre a expectativa de retorno de um ativo e o excesso de retorno de alguma *proxy* de mercado em relação a uma taxa livre de risco. Tal relação pode ser escrita como:

$$E(r_i) = r^f + \beta[E(r_m) - r^f], \quad (7)$$

onde  $r_i$  é o log-retorno ativo 'i',  $r_m$  é o retorno de mercado,  $r^f$  é o retorno de um ativo livre de risco e  $\beta$  é o coeficiente de proporcionalidade que se quer estimar. Strydom e Charteris (2013) argumentam que existe uma literatura relativamente extensa a respeito da melhor maneira de se escolher a *proxy* de mercado, porém não há consenso sobre a melhor maneira de se escolher a taxa livre de risco. Araujo e Oliveira (2012) mostram que as *proxies* mais usadas em trabalhos que utilizam o modelo CAPM para dados brasileiros são o índice IBOVESPA e a taxa do CDI.

Mergner (2009) reescreve a equação 7 de uma maneira mais compacta definindo o excesso de retorno como:

$$R_i = r_i - r^f \quad (8)$$

Substituindo 8 em 7 chega-se em:

$$E(R_i) = \beta E(R_m) \quad (9)$$

O estimador mais utilizado para o parâmetro  $\beta$  é o de Mínimos Quadrados Ordinários (MQO) obtido a partir da equação:

$$R_i = \alpha + \beta R_m + \epsilon_i, \quad (10)$$



onde o termo de erro  $\epsilon_i$  é um processo normalmente distribuído, homocedástico e não correlacionado com as variáveis explicativas do modelo, conforme as hipóteses básicas do modelo de regressão simples. O valor esperado para  $\alpha$  é zero. O estimador do parâmetro Beta é bem conhecido e é dado pela covariância entre os excessos de retorno do ativo e de mercado sobre a variância do excesso de retorno do mercado, segundo a equação abaixo:

$$\hat{\beta}^{MQO} = \frac{cov(R_m, R_i)}{var(R_m)}, \quad (11)$$

O Beta da equação 11 é chamado de beta estático ou incondicional.

## 2.2 Beta GARCH com correlação constante

Os *clusters* de volatilidade característicos de séries financeiras fazem dos modelos de heterocedasticidades condicional da família GARCH candidatos naturais para a modelagem de Betas condicionais. O Beta GARCH pode ser escrito como:

$$\hat{\beta}^{GARCH} = \frac{cov(R_{0,t}, R_{i,t})}{var(R_{0,t})} \quad (12)$$

e os retornos podem ser definidos como:

$$\vec{R}_t = \vec{\mu} + \vec{\epsilon}_t \quad (13)$$

onde  $\vec{R}_t$  é o vetor com os retornos do ativo 'i' e do mercado respectivamente e  $\vec{\mu}$  é um vetor de constantes.

$$\vec{R}_t = [R_{i,t}, R_{o,t}]' \quad (14)$$

e

$$\vec{\mu} = [\mu_1, \mu_2]' \quad (15)$$

o vetor de erros  $\vec{\epsilon}_t$  é um processo estocásticos condicionado ao conjunto de informação do período anterior,  $\Omega_{t-1}$ , e é definido como:

$$\vec{\epsilon}_t = \mathbf{a}_t \mathbf{H}_t^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

onde  $\mathbf{a}_t$  é um processo bidimensional, identicamente distribuído e cuja matriz de variância-covariância é uma identidade. A matriz de variância-covariância  $\mathbf{H}_t$ , no caso bivariado, pode ser representado como:

$$\mathbf{H}_t = \begin{bmatrix} h_{ii,t} & h_{i0,t} \\ h_{0i,t} & h_{00,t} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Em 17,  $h_{ii,t}$  e  $h_{00,t}$  representam, respectivamente, as variâncias condicionais do vetor de retornos do ativo 'i' e do mercado. Os termos cruzados são as covariâncias condicionais. As variâncias condicionais podem ser modeladas como um GARCH(p,q), ou seja: um

processo autoregressivo com defasagens no erro quadrático e na variância condicionais. Mais formalmente, o termo  $h_{ii,t}$  pode ser escrito da seguinte forma:

$$h_{ii,t} = \alpha + \sum_{i=1}^{i=q} \gamma_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{j=p} \delta_j h_{t-j} \quad (18)$$

Segue ainda, da definição de covariância, que:

$$h_{ij} = \rho_{ij,t} (h_{ii,t})^{\frac{1}{2}} (h_{00,t})^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

Substituindo 19 em 12 chega-se à uma nova expressão para o  $\hat{\beta}^{GARCH}$ :

$$\hat{\beta}^{GARCH} = \rho_{ij,t} \frac{h_{ii,t}}{h_{00,t}} \quad (20)$$

Nesta última expressão,  $\rho_{ij,t}$  representa a correlação incondicional entre  $R_i$  e  $R_0$ . Bollerslev(1990) propõem que se considere esse termo constante ao longo de todo o período analisado. Essa restrição é obviamente forte e limita a validade do modelo. NG (1991) testou o CAPM GARCH com correlação condicional constante (CCC). Os resultados obtidos pela autora mostram variabilidade significativa no excesso de retorno esperado condicional dos portfólios estudados. Há evidência, também, de que o prêmio de risco de mercado é linearmente relacionado com a variância condicional de seu retorno. Esta relação observada possui intercepto negativo, o que é compatível com trabalhos anteriores de BOLLERSLEV(1988) e HARVEY (1989). Outro trabalho que utiliza o GARCH CAPM é o de GIANNOPOULOS (1995). Ele estima Betas dinâmicos através a partir de uma amostra de retornos semanais de treze portfólios formados por papéis europeus. Das treze carteiras analisadas onze mostraram evidência estatisticamente significativa de que a especificação condicional é mais adequada do que a incondicional.

### 2.3 Beta GARCH com correlação condicional

Os modelos de correlação condicional dinâmica (DCC), devido à maior necessidade de processamento computacional em sua estimação, demoraram mais tempo que os modelos CCC para se tornarem populares. Uma proposta simples de modelo CDC é a de TSAY (2005). O autor parte das expressões bem conhecidas para a variância da soma e diferença de duas variáveis aleatórias e reescreve a equação 20 apenas em termos das variâncias dos dois ativos. Formalmente o modelo de Tsay pode ser escrito como:

$$\sigma_{X+Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2cov(X, Y) \quad (21)$$

$$\sigma_{X-Y}^2 = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2cov(X, Y) \quad (22)$$

Subtraindo 21 de 22 chega-se em:

$$cov(X, Y) = \frac{\sigma_{X+Y}^2 - \sigma_{X-Y}^2}{4} \quad (23)$$

A correlação condicional  $\rho_{XY_t}$  entre as variáveis aleatórias X e Y pode ser escrita como:

$$\rho_{XY_t} = \text{cov}(X, Y) \sigma_X \sigma_Y \quad (24)$$

Substituindo 23 em 24 chega-se em:

$$\rho_{XY_t} = \frac{\sigma_{X+Y}^2 - \sigma_{X-Y}^2}{4\sigma_X \sigma_Y} \quad (25)$$

Identificando  $\sigma_X^2$  e  $\sigma_Y^2$  com as variâncias  $h_{00}$  e  $h_{ii}$ , pode-se reescrever a equação 20 como:

$$\beta_t^{GARCH} = \frac{\sigma_{X+Y}^2 - \sigma_{X-Y}^2}{4\sigma_X} \quad (26)$$

A abordagem de Tsay para o cálculo de Betas GARCH com correlação condicional é uma das mais simples. Recentemente os modelos DCC voltaram a ganhar força na literatura e outras metodologias foram propostas. Um exemplo é o trabalho de BALI e ENGLE (2010) que estima o modelo CAPM GARCH DCC utilizando o filtro de Kalman.

## 2.4 Comparação entre modelos

O CAPM incondicional possui uma grande vantagem sobre a sua contraparte condicional apresentada na seção anterior: ele é muito mais fácil de ser estimado. Só faz sentido utilizar os métodos dinâmicos se os resultados obtidos por eles forem significativamente melhores que aqueles conseguidos através do modelo de mínimos quadrados ordinários. Em geral, a comparação entre modelos é feita através dos testes de *goodness o fitness*, como o *Bayesian Information Criteria*(BIC) ou dos testes sobre os resíduos do modelo. MERGNER (2007) argumenta, no entanto, que a comparação entre modelos da família GARCH e MQO não pode ser feita dessa maneira. Segundo ele o problema está no cálculo dos resíduos de cada modelo. O resíduo dos modelos GARCH são calculados recursivamente enquanto que os resíduos dos modelos MQO são calculados com base na amostra inteira, o que confere aos Betas incondicionais uma vantagem estrutural neste tipo de comparação. Para contornar este problema, seguimos a proposta do próprio Mergner e utilizamos como critério de decisão entre modelos o desempenho de cada um em testes de previsão dentro e fora da amostra. O objetivo desta seção é tratar brevemente destas duas técnicas e detalhar como os testes foram feitos.

### 2.4.1 Previsão dentro da amostra

Seja uma série temporal com realizações  $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$ , em que N é o número de valores observados. A análise dentro da amostra (*in sample* consiste em estimar um modelo para toda a amostra disponível e em seguida comparar os valores ajustados para cada observação com aqueles que de fato foram realizados. Neste trabalho estamos interessados em comparar os Betas estimados por diferentes métodos, porém, os dados realizados

disponíveis são de retornos. Para calcular os retornos previstos a partir dos Betas estimados utilizamos a seguinte equação:

$$\hat{R}_{i,t} = \hat{\beta}_{i,t} R_{o,t} \quad (27)$$

em que, como usual, os subscritos 'i' e 'o' representam o setor analisado e IBOVESPA respectivamente.

As medida utilizada para avaliar a performance dos modelos foi o *Mean Squared Error* (MSE), definido como:

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{N=1}^N |\hat{R}_{i,t} - R_{i,t}|^2 \quad (28)$$

O MSE foi escolhido em detrimento de outras medidas pois a função perda associada a ele é minimizada pela esperança do parâmetro estimado, o que o torna uma medida mais adequada que o MAE, por exemplo, cuja função perda é minimizada pela mediana do parâmetro estimado.

O método *in sample*, no entanto, não permite uma comparação completa entre os modelos. O ajuste dentro da amostra tende a ser otimista demais uma vez que os algoritmos de estimação mais comuns, como os de máxima verossimilhança utilizados neste trabalho, evitam erros de ajuste muito grandes ao custo de superestimar a capacidade de previsão do modelo. Uma extensão natural da análise aqui proposta é a previsão fora da amostra.

#### 2.4.2 Previsão fora da amostra

Um procedimento de previsão fora da amostra *out of sample* verdadeiro consistiria em calcular o valor de  $Y_{N+1}$  e esperar até o próximo período para computar o erro de previsão, em seguida incluir a nova observação e reestimar o modelo de modo a obter a previsão para  $Y_{N+2}$  e assim por diante por quantos períodos se queira. A desvantagem óbvia deste método é que ele toma tempo demais, de modo que o mais comum é que se adote o método de pseudo previsão fora da amostra.

Para realizar o procedimento de pseudo previsão fora da amostra o primeiro passo é dividir a amostra em duas subamostras: uma parte de tamanho T, e a outra de tamanho N-T. O modelo é rodado sobre a subamostra de tamanho T, em seguida computa-se a previsão do período T+1 e o valor encontrado é comparado com o valor realizado na outra subamostra. O passo seguinte é rolar a janela de estimação um período para a frente. Agora a subamostra sobre a qual o modelo será rodado inclui todos os valores realizados até o período T+1. Como no passo anterior, a previsão para o período T+2 é comparada com o valor realizado na outra subamostra. Este procedimento se repete por N-T vezes, ou seja: até que não hajam mais valores realizados na segunda subamostra para que possamos estimar o erro de previsão do modelo. Neste trabalho a subamostra N-T foi ajustada para incluir 100 observação. Isso significa que o MSE foi calculado como:

$$MSE = \frac{1}{100} \sum_{N=1}^N |\hat{R}_{i,t} - R_{i,t}|^2 \quad (29)$$

### 3 Base de dados

A base de dados utilizada é composta por excessos de retorno semanais de setores da Bovespa. Os setores foram organizados segundo os critérios da própria bolsa de valores<sup>1</sup>. Foram excluídas da base as empresas que não fizeram parte do IBOVESPA em algum momento ao longo do período analisado neste trabalho. A amostra inclui o fechamento semanal de empresas pertencentes a 10 setores listados no período que vai de 26 de Dezembro de 2008 até 03 de Janeiro de 2014 totalizando 263 observações. A tabela 1 mostra a composição de cada carteira de ativos analisada.

Setor	Código	Ativo	Tipo
Transportes	EMBR3	EMBRAER	ON
	POMO4	MARCOPOLO	PN
Consumo não cíclico	BRFS3	BRF SA	ON
	CSAN3	COSAN	ON
	JBSS3	JBS	ON
	MRF33	MARFRIG	ON
	ABEV3	AMBEV S/A	ON
	PCAR4	PÃO DE AÇÚCAR-CBD	PN
	CRUZ3	SOUZA CRUZ	ON
	NATU3	NATURA	ON
Construção	HYPE3	HYPERMARCAS	ON
	CYRE3	CYRELA REALT	ON
	EVEN3	EVEN	ON
	GFSA3	GAFISA	ON
	MRVE3	MRV	ON
	PDGR3	PDG REALT	ON
	ALLL3	ALL AMER LAT	ON
	CCRO3	CCR SA	ON
Consumo cíclico	GOLL4	GOL	PN
	LAME4	LOJAS AMERICANAS	PN
	LREN3	LOJAS RENNER	ON
Diversos	HGTX3	CIA HERING	ON
	ESTC3	ESTACIO PART	ON
Materiais Básicos	RENT3	LOCALIZA	ON
	DTEX3	DURATEX	ON
	SUZB5	SUZANO PAPEL	PN
	VALE3	VALE	ON
	VALE5	VALE	PN
	BRKM5	BRASKEM	PN
	GGBR4	GERDAU	PN
	GOAU4	GERDAU MET	PN
	CSNA3	SID NACIONAL	ON
USIM5	USIMINAS	PN	
Petróleo e Gás	PETR3	PETROBRAS	ON
	PETR4	PETROBRAS	PN

<sup>1</sup> Conforme lista encontrada em (<http://www.bmfbovespa.com.br/indices/ResumoCarteiraTeorica.aspx?Indice=IBOVESPAIdioma=pt-br>)

**Tabela 1 – Continuação da página anterior**

Setor	Código	Ativo	Tipo
Telecomunicações	OIBR4	OI	PN
	VIVT4	TELEF BRASIL	PN
	TIMP3	TIM PART S/A	ON
Saneamento	SBSP3	SABESP	ON
Energia	CMIG4	CEMIG	PN
	CESP6	CESP	PN
	CPLE6	COPEL	PN
	CPFE3	CPFL ENERGIA	ON
	ELET3	ELETROBRAS	ON
	ELET6	ELETROBRAS	PN
	ENBR3	ENERGIAS BR	ON
	ELPL4	ELETROPAULO	PN
	LIGT3	LIGHT S/A	ON
TBLE3	TRACTEBEL	ON	

Tabela 1 – Composição dos setores

A análise de setores agregados é vantajosa do ponto de vista estatístico pois elimina grandes variações idiossincráticas nos retornos de ativos específicos. Especialmente em setores compostos por muitos ativos espera-se que os Betas estimados sejam mais robustos. Já a opção por excessos de retorno semanais se dá para evitar o excesso de ruído dos retornos diários.

O fechamento semanal por setor foi construído como uma média aritmética simples dos fechamentos de cada ativo que compõem a carteira. Ou seja: para um setor composto por 'n' ativos, e chamando o fechamento semanal do ativo de  $F_j$ , o fechamento do setor  $F_i$  na semana 't' será dado por:

$$F_{i,t} = \frac{F_{1,t} + \dots + F_{j,t}}{n} \quad (30)$$

Os retornos semanais entre dois períodos consecutivos foram compostos continuamente usando logaritmos da seguinte forma:

$$r_{i,t} = \log(F_{i,t}) - \log(F_{i,t-1}) \quad (31)$$

Os excessos de retorno foram construídos seguindo a forma apresentada em 8. Como taxa livre de risco utilizamos o CDI. Os dados estão disponíveis para consulta pública no *website* da CETIP. Optamos aqui por pegar o último valor da taxa CDI na semana e calcular a taxa semanal equivalente. Como *proxy* de mercado escolheu-se o IBOVESPA. Os fechamentos semanais de todos os ativos analisados foram retirados da base de dados ECONOMATICA.

## 4 Resultados

Neste capítulo serão apresentados os resultados de previsão dos modelos descritos nos capítulos anteriores seguidos das análises necessárias. O capítulo ficou dividido em três

seções apenas. Na primeira serão apresentados, brevemente, os resultados das estimações MQO no formato de tabela acompanhados dos comentários pertinentes. Na segunda seção passa-se ao foco deste trabalho, que é a comparação entre os modelos estáticos e os modelos dinâmicos. Os resultados serão apresentados na forma de gráficos por uma questão de organização. Na terceira seção encontra-se uma análise da evolução dos Betas dos setores analisados. Atenção especial será dada ao setor de energia.

#### 4.1 Beta MQO

Os betas incondicionais foram calculados com auxílio do pacote PerformanceAnalytics do R <sup>2</sup>. Os resultados obtidos estão resumidos na tabela abaixo.

Setor	Variável	Coefficiente	P-Valor
TRANSPORTES	$\alpha$	0,00327241	0,1294
	$\beta$	0,648736	0,0000
SANEAMENTO	$\alpha$	0,00253302	0,2647
	$\beta$	0,711556	0,0000
TELECOM	$\alpha$	0,0000	0,9515
	$\beta$	0,440376	0,0000
PETROLEO	$\alpha$	-0,00224058	0,2235
	$\beta$	1,04539	0,0000
ENERGIA	$\alpha$	-0,000104176	0,9428
	$\beta$	0,467794	0,0000
DIVERSOS	$\alpha$	0,00503666	0,0174
	$\beta$	0,639125	0,0000
MATERIAIS	$\alpha$	0,000630714	0,5912
	$\beta$	1,11151	0,0000
CONSTRUÇÃO	$\alpha$	-0,000895871	0,7159
	$\beta$	1,09171	0,0000
CONSUMO NÃO CÍCLICO	$\alpha$	0,00275112	0,0129
	$\beta$	0,562462	0,0000
CONSUMO CÍCLICO	$\alpha$	0,00508475	0,0161
	$\beta$	0,758012	0,0000

Tabela 2 – Resultados das estimações por MQO

Os resultados das estimações estão parcialmente coerentes com o que se espera de acordo com a teoria do CAPM tradicional. Segundo a teoria de finanças, na presença de retornos normais, o valor do intercepto, também conhecido na literatura como  $\alpha$  de Jensen, deve ser estatisticamente nulo. Verifica-se que isso é verdade para todos os setores pesquisados com exceção de três - Diversos, Consumo Cíclico e Consumo Não cíclico -, o que pode indicar desequilíbrio de preços nesses setores. Já os valores dos betas são altamente significativos em todos os setores, como esperado, o que se pode confirmar pelos p-valores dos coeficientes. Observa-se ainda que, na maioria dos setores pesquisados, tem-se  $\beta < 1$ ; o que indica risco acionário baixo.

<sup>2</sup> cuja documentação está disponível em: [cran.r-project.org/web/packages/PerformanceAnalytics/PerformanceAnalytics.pdf](http://cran.r-project.org/web/packages/PerformanceAnalytics/PerformanceAnalytics.pdf)

## 4.2 Comparações entre modelos

Nesta seção o foco é a comparação entre o CAPM estático e o CAPM condicional. Conforme a metodologia já delineada em seções anteriores, a comparação será feita através do *mean squared error*.

Todos os modelos foram estimados com o auxílio do pacote 'fGarch' implementado no R<sup>3</sup>. A média das séries foi estimada por um modelo ARMA(0,0) escolha padrão no caso de séries financeiras e justificada pela ausência de autocorrelação serial dos retornos. Um fato importante observado foi a dificuldade que os modelos da família GARCH têm para convergir. Em particular, os APARCH, via de regra, só convergiam quando era imposto ao algoritmo que o parâmetro de forma deveria ser mantido fixo ao longo do processo de otimização. Ainda assim, alguns modelos apresentavam forte viés nos primeiros valores de variância prevista. Para tentar minimizar o problema optou-se por excluir os primeiros 30 Betas estimados em todos os modelos.

Para organizar melhor os dados, escolheu-se apresentá-los na forma de gráficos. São 20 gráficos, ou dois gráficos por setor, - um para as previsões dentro da amostra (*in sample*) e outro para as previsões fora da amostra (*out of sample*). O eixo y das figuras representa o valor do MSE e o eixo x indica a distribuição do modelo analisado. A linha reta mostra o valor do erro de previsão obtido pelo modelo MQO para aquele setor. A interpretação é bastante direta: sempre que um ponto estiver abaixo da linha reta é porque o modelo representado pelo ponto teve desempenho superior de previsão em relação ao modelo estático. Abaixo estão os resultados obtidos organizados por setor.

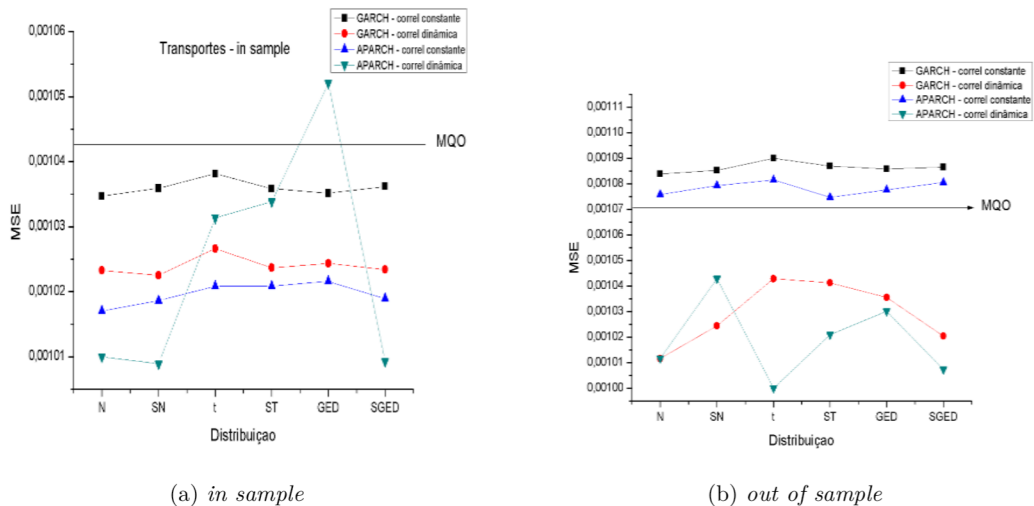
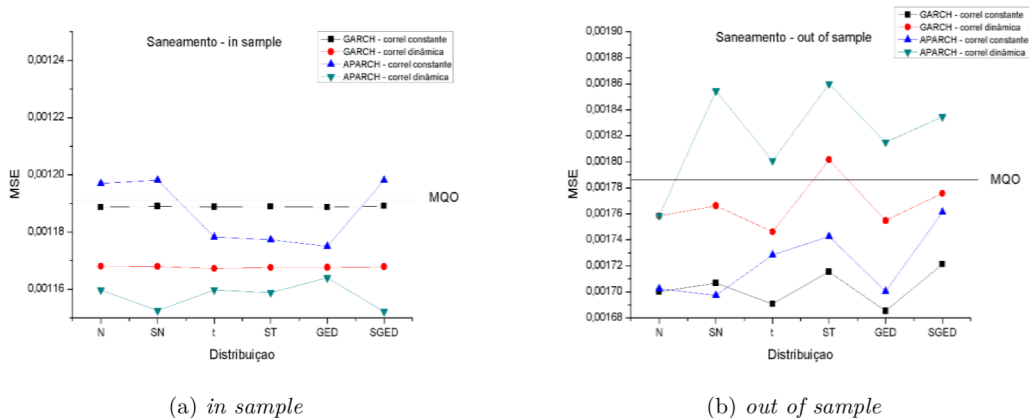


Figura 1 – Setor de transportes MSE

<sup>3</sup> Uma descrição do pacote pode ser encontrada em: <<http://cran.r-project.org/web/packages/fGarch/fGarch.pdf>>. Acesso em: 25 de junho de 2015

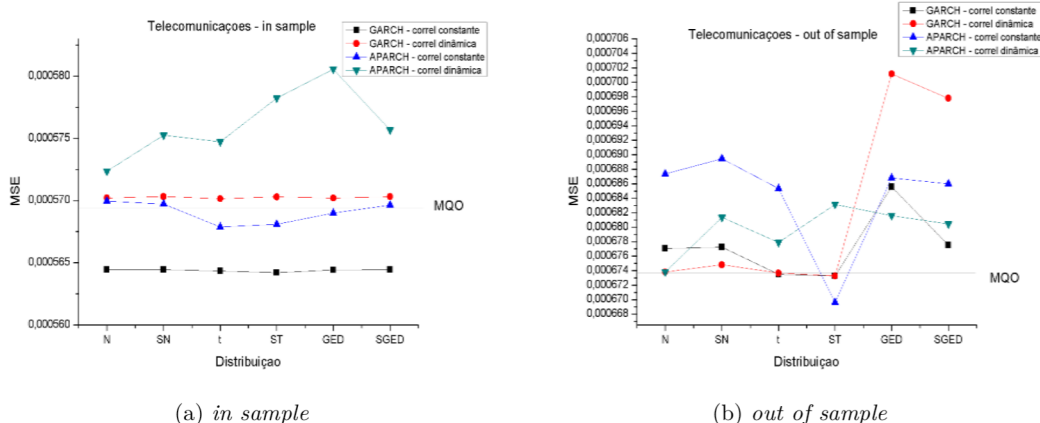




(a) *in sample*

(b) *out of sample*

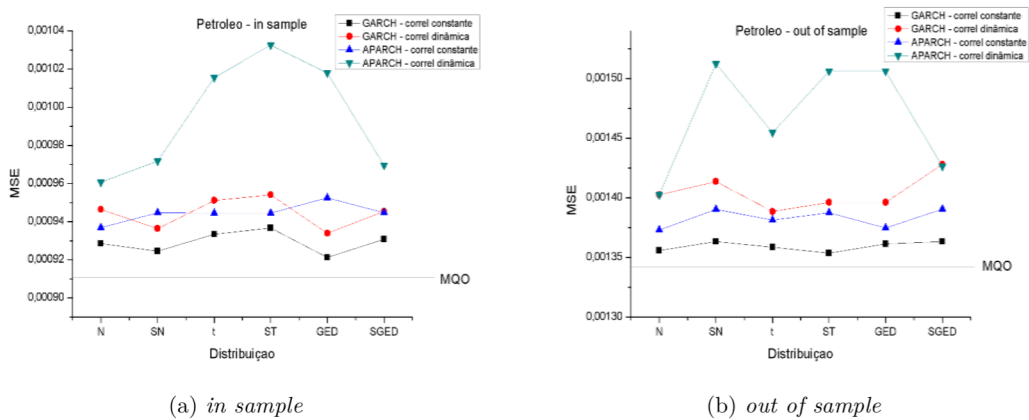
Figura 2 – Setor de saneamento MSE



(a) *in sample*

(b) *out of sample*

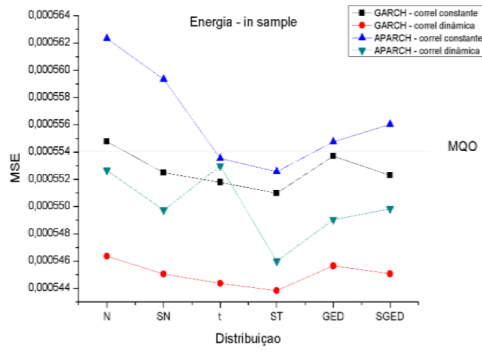
Figura 3 – Setor de telecomunicações MSE



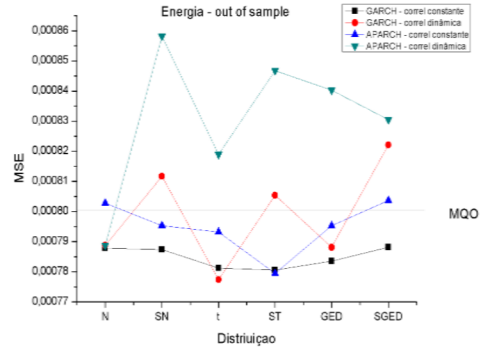
(a) *in sample*

(b) *out of sample*

Figura 4 – Setor de petróleo MSE

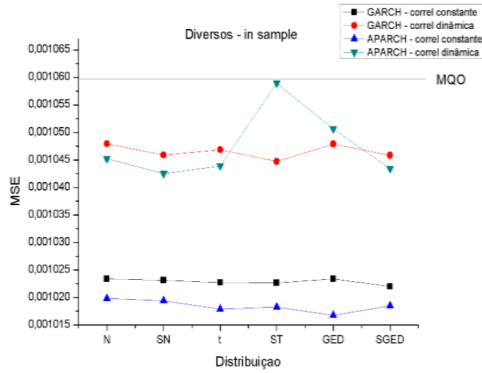


(a) *in sample*

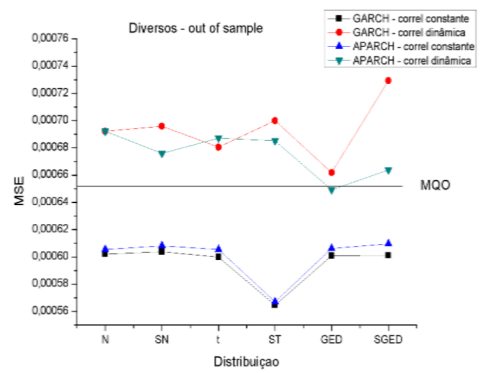


(b) *out of sample*

Figura 5 – Setor de energia MSE

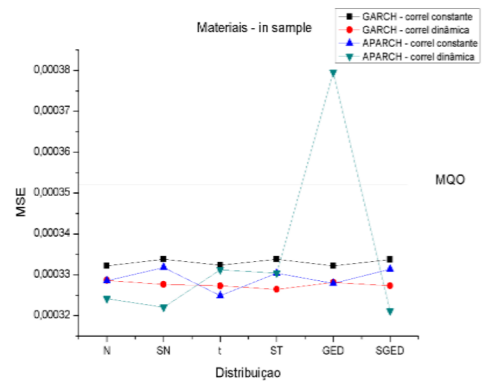


(a) *in sample*

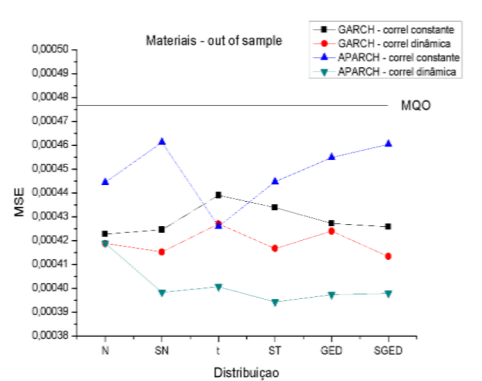


(b) *out of sample*

Figura 6 – Setor de diversos MSE



(a) *in sample*



(b) *out of sample*

Figura 7 – Setor de materiais MSE

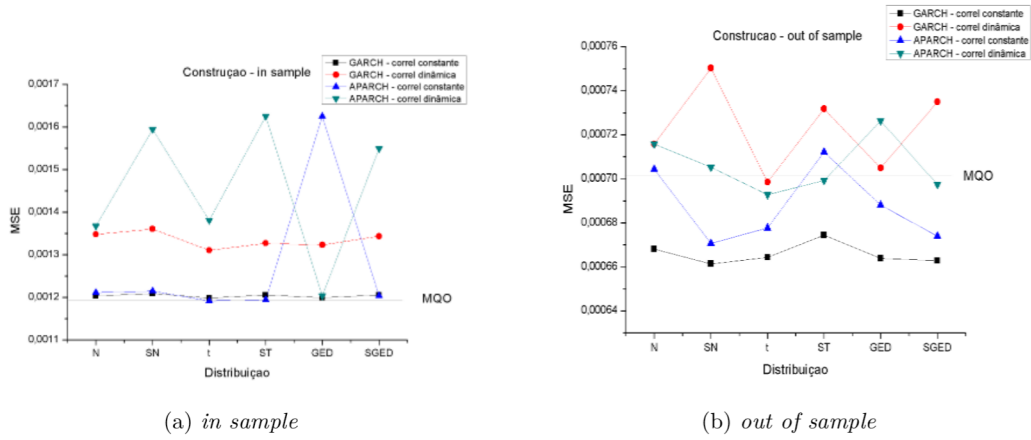


Figura 8 – Setor de construção MSE

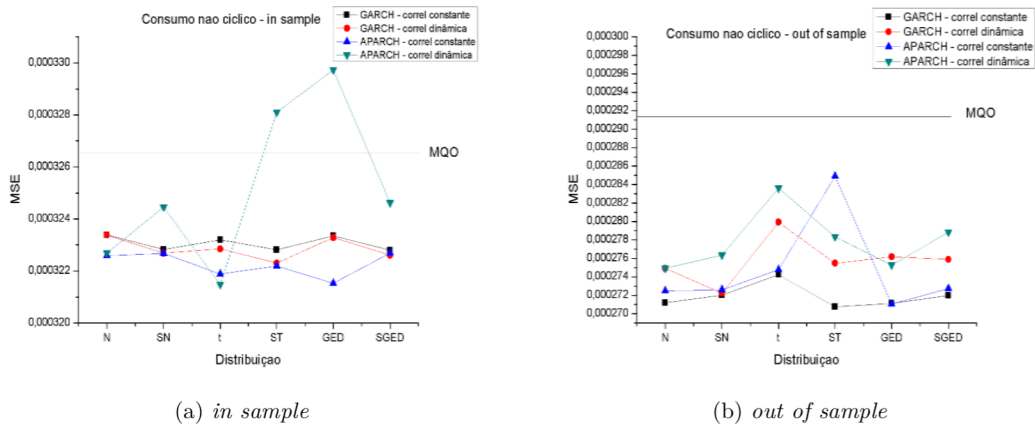


Figura 9 – Setor de consumo não cíclico MSE

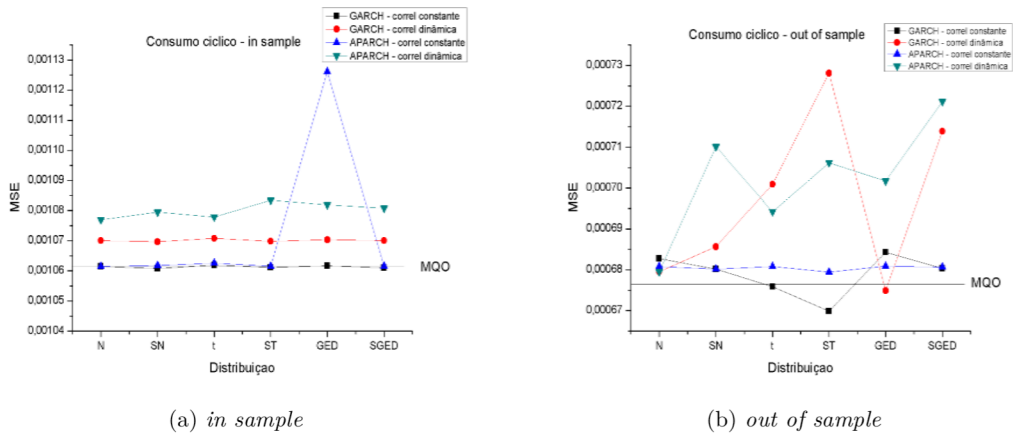


Figura 10 – Setor de consumo cíclico MSE

Os resultados mostram que em 8 dos 10 setores pesquisados há evidências de que os Betas condicionais são preferíveis em relação aos incondicionais, o que confirma os resultados já encontrados por Godeiro e Flister, Bressan e Amaral. As exceções são os setores de Petróleo e Gás, composto unicamente pela Petrobras e o setor de consumo cíclico. Verificou-se ainda que o desempenho dos modelos dinâmicos não foi superior ao dos modelos de correlação constante na maior parte dos setores analisados. De fato, em 6 dos 10 setores analisados há uma vantagem clara de ambos os modelos de correlação constante sobre a sua contraparte de correlação dinâmica tanto em previsão dentro da amostra quanto fora. Isso provavelmente se deve às dificuldades encontradas pelo pacote econométrico utilizado para estimar tais modelos. Sobretudo a estimação dos termos  $\sigma_{X+Y}^2$  e  $\sigma_{X-Y}^2$  em 26 se mostrou extremamente problemática devido aos problemas de convergência dos algoritmos. Cabe ressaltar, no entanto, que os algoritmos do pacote 'fgarch' ainda se saíram consideravelmente melhor em relação aos algoritmos de outros pacotes econométricos como o Gretl, o STATA e o OXmetrics que, de maneira geral, falharam em estimar a maior parte dos modelos de correlação dinâmica.

Outro aspecto interessante dos resultados é que, em média, não há melhora nos resultados quando se utilizam modelos APARCH. Como mostrado no capítulo que trata dos modelos de heterocedasticidade condicional, o modelo APARCH é um caso geral do modelo GARCH e, por isso, seria esperado que os modelos de Beta APARCH tivessem melhores resultados de previsão do que os modelos Beta Garch. Porém, com poucas exceções, o que ocorre é o contrário - os modelos GARCH, na média, se saem melhor que os modelos APARCH. O motivo é o mesmo pelo qual os modelos de correlação dinâmica se saem pior que os de correlação constante: dificuldades de estimação. No caso dos modelos APARCH notam-se grandes problemas de convergência. Uma das saídas para esses problemas, já mencionada, foi fixar um dos parâmetros de estimação, o que também contribuía para diminuir o tempo computacional desses modelos. Outra solução possível seria trabalhar com séries diárias para aumentar o tamanho da amostra. Nota-se ainda que os problemas de estimação se agravam quando são utilizadas distribuições *skewed* devido ao maior número de parâmetros a serem estimados.

Por fim, como último aspecto da comparação entre modelos ainda não analisada, está a questão das distribuições de cauda pesada. Fica claro aqui que lida-se com um *trade off*: se há motivos teóricos para acreditar que tais distribuições são capazes de captar com mais precisão as idiosincrasias das séries financeiras, por outro lado elas trazem mais parâmetros para serem estimados e, como já ficou claro, quanto mais parâmetros o modelo possui, pior será a qualidade dos resultados estimados. De maneira geral, o que se observa é que o uso de distribuições de caudas pesadas melhora os resultados obtidos seja qual for o modelo utilizado. Em alguns casos, no entanto, a penalização devido ao maior número de parâmetros é grande. Isso é especialmente válido para os modelos APARCH. Já no caso dos modelos GARCH isso ocorre de maneira menos acentuada. Nota-se que em pelos 6 dos setores pesquisados as distribuições com o melhor desempenho foram a *skewed t*, a *skewed normal* e a *t*, confirmando a hipótese de que séries financeiras são melhor modeladas quando se utilizam distribuições não gaussianas. O bom desempenho das distribuições *skewed* para os modelos GARCH também é um resultado interessante porque mostra que os efeitos de assimetria são relevantes na análise deste tipo de série.

Em resumo, o que se nota é que os resultados obtidos são compatíveis com as hipóteses iniciais deste trabalho: os Betas no período pós crise são condicionais e são melhor estimados quando os resíduos dos modelos utilizados são não gaussianos.

## 5 Análise setorial

Nesta seção será analisada a evolução do índice  $\beta$  no período pós crise para os setores analisados. Para que a comparação seja justa, é importante que ela seja feita de um mesmo referencial - ou seja: é necessário que, para cada setor, a evolução dos Betas tenha sido estimada pelo mesmo modelo. Isso se torna ainda mais importante devido às peculiaridades de cada um dos modelos. Nota-se que os Betas estimados com correlação dinâmica possuem uma variabilidade menor quando comparados aos de correlação constante. Como visto na seção anterior, o modelo mais robusto, na média, é o GARCH de correlação constante, por isso ele foi escolhido como referencial comum de comparação. Na seção anterior, também foi mostrado que os modelos ficam melhor especificados com erros não gaussianos; sendo assim, escolhemos a distribuição *Skewed t* que teve um desempenho *in sample* um pouco superior ao das outras distribuições. Portanto, para essa análise os Betas de todos os setores foram estimados através do modelo de correlação constante com erros distribuídos de acordo com uma *Skewed t*. Optou-se, por razões que ficarão claras a seguir, por colocar no texto apenas a evolução dos betas para o setor de energia. Os gráficos correspondentemente aos outros setores estão no apêndice A.

O caso do setor de energia é emblemático porque ilustra a capacidade dos modelos dinâmicos de captar efeitos de mudanças no cenário econômico. Em 11 de Setembro de 2012 a presidência da República adotou a Medida Provisória 579 ( que depois se tornaria a lei 12.783) que tinha como meta revisar as tarifas de energia elétrica e promover uma série de mudanças regulatórias no setor. Dentre as mudanças, as principais estavam relacionadas às regras de renovação dos contratos de concessões e dos leilões de energia. Os agentes de mercado reagiram às mudanças com desconfiança uma vez que tal medida retirava boa parte da autonomia do setor e o deixava extremamente dependente de recursos do tesouro nacional. O efeito da MP 579 no mercado acionário pode ser visto na figura 11, abaixo:

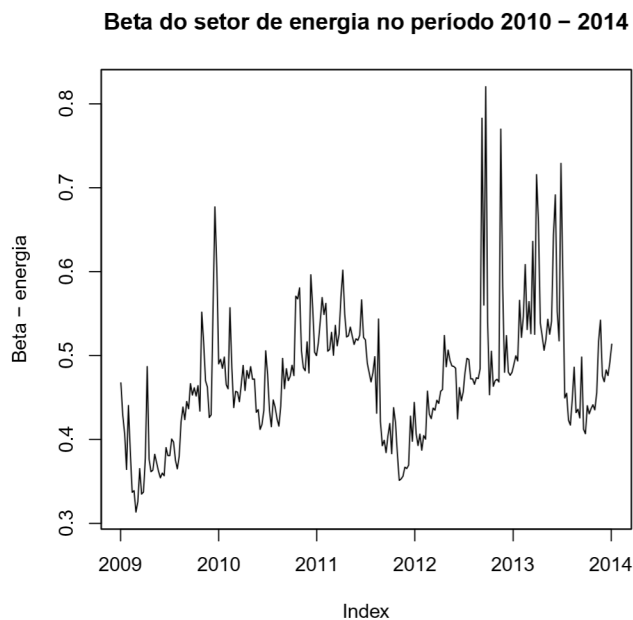


Figura 11 – Evolução do  $\beta$  para o setor de energia

Observa-se que no último trimestre de 2012, portanto logo após o anúncio da Medida Provisória, há um salto nos valores dos Betas sinalizando um grande aumento do risco acionário do setor de energia. Verifica-se, então, que para esse setor específico o modelo de  $\beta$  dinâmico utilizando GARCH com correlação constante foi capaz de capturar a percepção de risco dos agentes econômicos quase que instantaneamente.

Outro aspecto que chama a atenção na figura 11 é o aumento, ainda que discreto, do risco acionário no final de 2013. Este é um fato que, por si só, não teria tanta importância, mas que é relevante no contexto uma vez que o mesmo aumento no risco acionário nesse mesmo período foi observado em outros 7 setores pesquisados. Esta tendência é especialmente forte para os setores de Petróleo e Gás, Telecomunicações e Consumo não Cíclico. De maneira geral, o que se nota é que em todos os setores houve grande variabilidade do risco acionário no período pesquisado. Todos os setores apresentaram uma alta dos betas entre 2010 e 2012 - um provável reflexo da crise européia. Entre 2012 e 2013 o risco acionário em relação ao mercado como um todo diminuiu na maior parte dos setores pesquisados até que no fim de 2013, como já mencionado, o risco voltou a aumentar. Esse último aumento pode ser interpretado como uma consequência de dois fatores: 1) a deterioração dos fundamentos macroeconômicos da economia brasileira no período; 2) A proximidade das eleições de 2014 - Worthington (2010) mostra que, para o mercado australiano, o risco acionário (medido pela volatilidade) tende a aumentar ao final dos ciclos políticos, sobretudo quando é o partido dos trabalhadores (*labor Party*) no poder. Embora não hajam estudos que mostrem efeitos dos ciclos políticos na volatilidade do mercado acionário brasileiro, não se descarta a hipótese de que o período eleitoral possa ter afetado o valor dos Betas. Com o agravamento da crise brasileira em 2014 e 2015, espera-se que o risco acionário tenha aumentado ainda mais em média. A verificação desta hipótese através de uma análise de volatilidade é uma possível continuação deste trabalho.

## Conclusão

O objetivo deste trabalho foi verificar se a versão condicional do modelo CAPM captou melhor o índice Beta por setor no Brasil durante o período pós crise. Para isso foram utilizadas 10 carteiras de ações negociadas na bolsa brasileira correspondentes a 10 setores da economia. Cada carteira é composta por 263 fechamentos semanais no período que vai de Dezembro de 2008 até 03 de Janeiro de 2014.

Para cada setor foram estimados dois modelos, um que considera a correlação entre os retornos setoriais e a *proxy* de mercado constante e outro que considera a correlação como dinâmica. As variâncias e covariâncias foram estimadas utilizando modelos GARCH e APARCH. Havia interesse em saber também se as estimativas dos Betas condicionais melhoram quando os modelos de heterocedasticidade condicional são especificados com erros não Gaussianos. Por isso cada um dos modelos foi estimado utilizando 5 distribuições de cauda pesada: a *t* de Student, a *Skewed t*, a *Generalized error Distribution (GED)*, a *Skewed GED* e a *Skewed Normal*. No total, foram estimados 24 modelos diferentes para cada setor. Os modelos foram comparados entre si pela sua capacidade de fazer previsões dentro e fora da amostra. A medida de avaliação de previsão utilizada foi o MSE.

Os resultados mostram que em 8 dos 10 setores estudados há evidência de que os modelos CAPM condicionais são superiores ao CAPM tradicional calculado por MQO. Verificou-se ainda que os modelos com erros não gaussianos se mostraram superiores àqueles estimados com inovações normais. Por outro lado, não se observou melhora significativa

nos Betas quando eles foram estimados por modelos de correlação dinâmica. De fato, o que aconteceu foi o contrário - via de regra os modelos de correlação dinâmica tiveram piores resultados de previsão em relação aos modelos de correlação constante. Também observou-se que os modelos APARCH, em média, se mostraram inferiores aos modelos GARCH - em alguns casos, muito inferiores. Esses resultados pouco esperados foram atribuídos a dificuldades computacionais. Por terem mais parâmetros a serem estimados que os modelos GARCH, os algoritmos utilizados na estimação dos modelos APARCH tiveram muitos problemas de convergência. Em especial, quando combinam-se modelos APARCH com distribuições não gaussianas, a convergência do algoritmo foi particularmente difícil.

De maneira geral, o modelo com melhor desempenho levando em conta todos os setores estudados foi o GARCH com correlação constante. Já entre as distribuições de cauda pesada, as que se saíram melhor foram a *skewed t*, a *skewed normal* e a *t*. Sabe-se que modelos da família GARCH são melhores quanto maior for a série analisada. Por isso acredita-se que uma extensão natural deste trabalho envolveria uma análise num período mais longo. Naturalmente, um trabalho deste tipo deveria incluir técnicas para lidar com as possíveis quebras estruturais que surgiriam nas séries devido à crise financeira de 2008.

Também analisou-se a evolução dos Betas em cada setor ao longo do período analisado. Foi observada grande variabilidade dos Betas em todos os setores. Verificou-se também aumento do risco acionário no período entre 2010 e 2012, fato este atribuído à crise europeia. No fim de 2013 observa-se novo aumento do risco acionário em 7 setores. Desta vez, a tendência foi interpretada como sendo compatível com a piora dos fundamentos da economia brasileira e não com fatores externos.

Como possíveis continuações deste trabalho sugerem-se: traçar o perfil de risco dos setores pesquisados através da análise do histórico de volatilidade em cada um deles; estender o período de estudo deste artigo para períodos pré crise; uma investigação detalhada dos três setores cujo  $\alpha$  de Jensen possuem valores estatisticamente diferentes de zero.

## Agradecimentos

O autores agradecem ao professor Cláudio Dissey Shikida pelas valiosas contribuições a este trabalho.

## Referências

Araujo, E.A.T; Oliveira, V.C.; Silva, W.A.C. "CAPM em estudos brasileiros: uma análise da pesquisa", Revista de Contabilidade e Organizações, 6 (15), 95-122, 2012

Bali, T.G.; Engle, R.F. "The intertemporal capital asset pricing model with dynamic conditional correlations". Journal of Monetary Economics 57, 377-390, 2010

Bollerslev, T. "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity". Journal of Econometrics 31 (3), 307-327, 1986.

Bollerslev, T.; Engle, R.F.; Wooldridge, J.M. "A Capital Asset Pricing Model with Time-Varying Covariances", Journal of Political Economy 96, 116-131, 1988

- Bollerslev, T. "Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: A multivariate generalized ARCH model". *Review of Economics and Statistics* 72 (3), 498-505, 1990
- Braun, P. A.; D. B. Nelson; A. M. Sunier. "Good news, bad news, volatility and betas". *Journal of Finance* 50 (5), 1575-1603, 1995
- Brooks, R.D.; Faff, R.W.; McKenzie, M.D. "Time Varying Beta Risk of Australian Industry Portfolios: A Comparison of Modelling Techniques". *Australian Journal of Management*. 23 (1), 1-22, 1998
- Bueno, R.L.S. "Econometria de Séries Temporais", 1. ed. São Paulo, Cengage, 2008
- Ding, Z., Granger C.W.J.; Engle, R.F. "A long memory property of stock market returns and a new model", *Journal of Empirical Finance*, 1(1), 1993.
- Ding, Z. "Modeling of Market Volatility with APARCH Model", Relatório técnico, 2011. Disponível em: <<http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:417608/FULLTEXT01.pdf>>. Acesso em: 25 de maio de 2015
- Engle, R. "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation", *Econometrica*, 50(4), 987-1007, 1982.
- Engle, R. F.; Kroner, K. F. "Multivariate simultaneous generalized ARCH. *Econometric Theory*". 11(1), 122-150, 1995.
- Faff, R. W.; Hillier, D.; Hillier, J. "Time Varying Beta Risk: An Analysis of Alternative Modelling Techniques". *Journal of Business Finance and Accounting*. 27, 523-554, 2000.
- Flister, F. V.; Bressan, A. A. ; Amaral, H.D. "CAPM Condicional no Mercado Brasileiro: um estudo dos efeitos Momento, Tamanho e Book-to-Market entre 1995 e 2008". *Anais do XXXIV Encontro da Anpad*. Rio de Janeiro: ANPAD, 1-15, 2010.
- Godeiro, L.L. "Testando o CAPM para o mercado acionário brasileiro utilizando GARCH Multivariado". *Revista de Economia e Administração*, 11(3), 342-363, 2012.
- Ghysels, E.; Harvey, A.; Renault, E. "Stochastic Volatility", *Handbook of Statistics*, 14, 128-198, 1996.
- Giannopoulos, K. "Estimating the time varying components of international stock markets risk". *European Journal of Finance* 1, 129-164, 1995
- Hamilton, J. D. "Time series analysis". Princeton, NJ: Princeton University Press, 1994
- Harvey, C.R. "Time Varying Conditional Covariances in Tests of Asset Pricing Models". *Journal of Financial Economics* 24, 289-317, 1989
- Harvey, A. C., E. Ruiz, and N. Shephard. "Multivariate stochastic variance models". *Review of Economic Studies* 61 (2), 1994



- Huang, H.C. "Tests of Regime Switching CAPM". *Applied Financial Economics* 10, 573-578, 2000.
- Lewellen, J.; Nagel, S. "The conditional CAPM does not explain asset-pricing anomalies". *Journal of financial economics*, 82(2), 289-314, 2006.
- Li, X. "On unstable beta risk and its modelling techniques for New Zealand industry portfolios". Working Paper 03.01, Massey University Commerce, Auckland, New Zealand, 2003
- Lie, F.; Brooks, R.; Faff, R.; "Modelling the Equity Beta Risk of Australian Financial Sector Companies". *Australian Economic Papers* 39(3), 301-311, 2000.
- Lintner, John. "The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets", *Review of Economics and Statistics*, 47 (1), 13-37, 1965
- Mergner, S. "Applications os State Space Models in Finance", *Universitätsverlag Göttingen* , 2009
- Moonis, S. A. and A. Shah. "Testing for time variation in beta in India", disponível em <http://www.mayin.org/ajayshah/pdffdocs>, 2004
- Morettin, P.A.; Toloi, C.M.C. "Analise de Series Temporais". Editora Edgard Blucher, 2004.
- Mossin, J. "Equilibrium in a Capital Asset Market", *Econometrica*, 34, 768-783, 1966
- Ng, L. "Tests of the CAPM with Time-Varying Covariances: A Multivariate GARCH Approach". *The Journal of Finance* 46 (4), 1507-1521, 1991
- Rachev, S. T., *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*, Volume 1, Elsevier, 2003
- Sharpe, William F. "Capital Asset Prices - A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk". *Journal of Finance* XIX (3): 425-42, 1964
- Tambosi Filho, E.; Fabio G. G. ; J. Onome Imoniana ; Moreiras, L. M. F. "Teste do CAPM Condicional dos Retornos de Carteiras dos Mercados Brasileiro, Argentino e Chileno, Comparando-os com o Mercado Norte-Americano". *RAE (Impresso)* , 50, 60-74, 2010.
- Treynor, Jack L. "Toward a Theory of Market Value of Risky Assets". Manuscrito não publicado. 1962
- Tsay, R.S. "An Introduction to Analysis of Financial Data with R". *Wiley Series in Probability and Statistics*, John Wiley, 2012
- Tse, Y. K.; Tsui, A. K. C. "A Multivariate generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model with time-varying correlations". *Journal of Business and Economic Statistics*, 20(3), 351-376, 2002.

Worthington, A. C.; "Political cycles and risk and return in the Australian stock market, Menzies to Howard". Menzies to Howard, School of Accounting & Finance, University of Wollongong, Working Paper 6, 2006. <<http://ro.uow.edu.au/acfinwp/22>>

Zivot, E.; Wang, J.; Koopman, S. "State Space Modeling in Macroeconomics and Finance Using SsfPack in S+FinMetrics". State Space and Unobserved Component Models. Editado por Andrew Harvey, Siem Jan Koopman e Neil Shephard, 2003

# Apêndices

# 1 Betas por setor

**Beta do setor de saneamento no período 2010 – 2014**

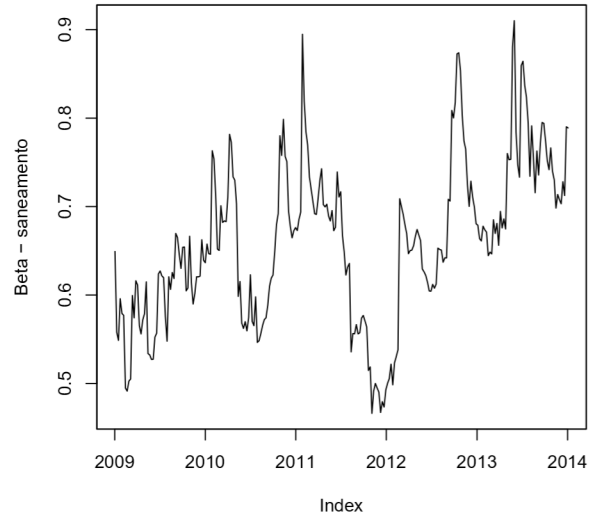


Figura 12 – Evolução do  $\beta$  para o setor de saneamento

**Beta do setor de transportes no período 2010 – 2014**

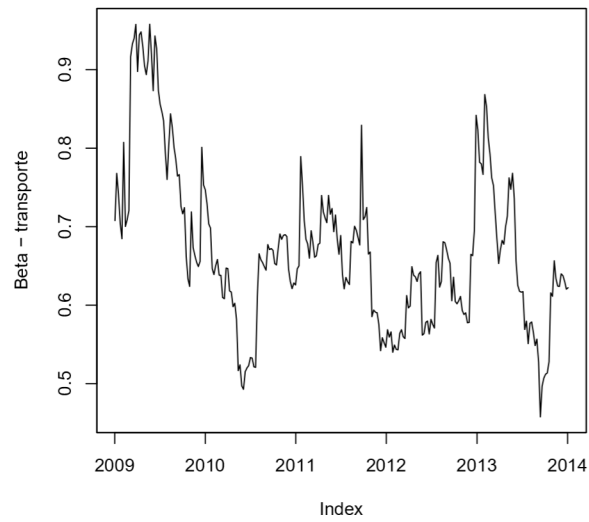


Figura 13 – Evolução do  $\beta$  para o setor de transportes

**Beta do setor de transportes no período 2010 – 2014**

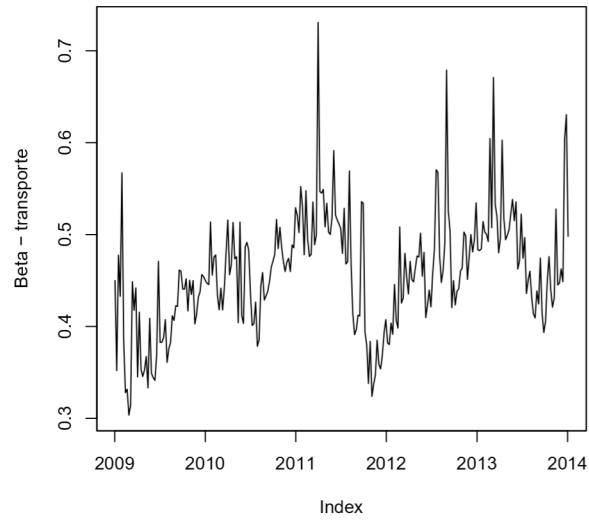


Figura 14 – Evolução do  $\beta$  para o setor de telecomunicações

**Beta do setor de petróleo no período 2010 – 2014**

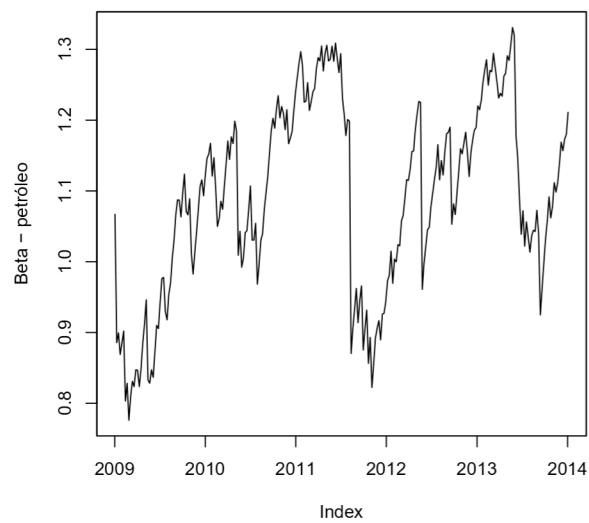


Figura 15 – Evolução do  $\beta$  para o setor de petróleo

**Beta do setor de diversos no período 2010 – 2014**

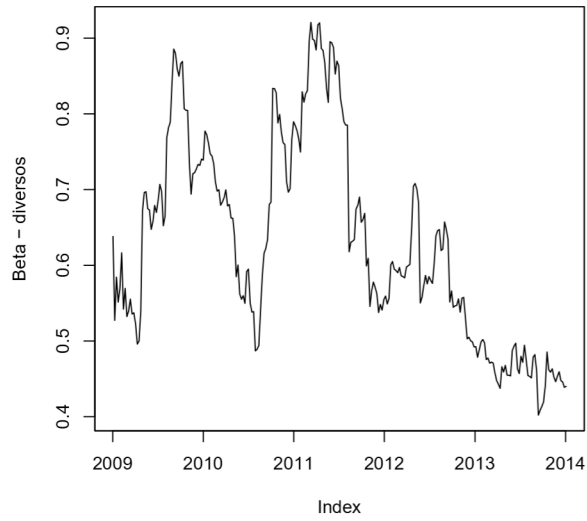


Figura 16 – Evolução do  $\beta$  para o setor de diversos

**Beta do setor de materiais no período 2010 – 2014**

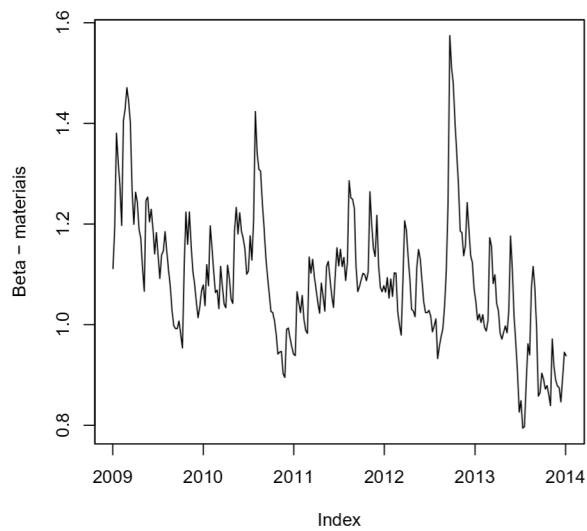


Figura 17 – Evolução do  $\beta$  para o setor de materiais

**Beta do setor de construção no período 2010 – 2014**

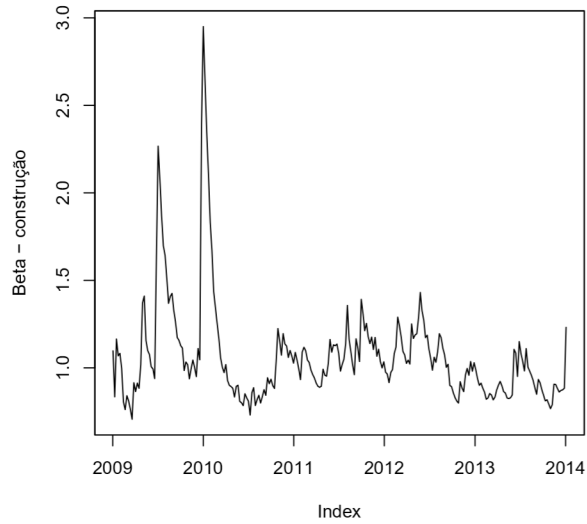


Figura 18 – Evolução do  $\beta$  para o setor de construção

**Beta do setor de consumo não cíclico no período 2010 – 2014**

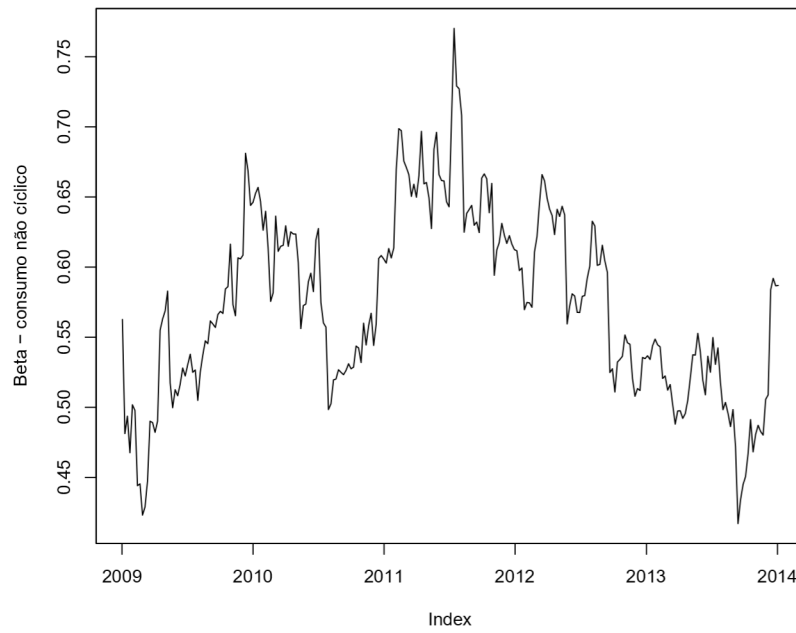


Figura 19 – Evolução do  $\beta$  para o setor de consumo não cíclico

**Beta do setor de consumo cíclico no período 2010 – 2014**

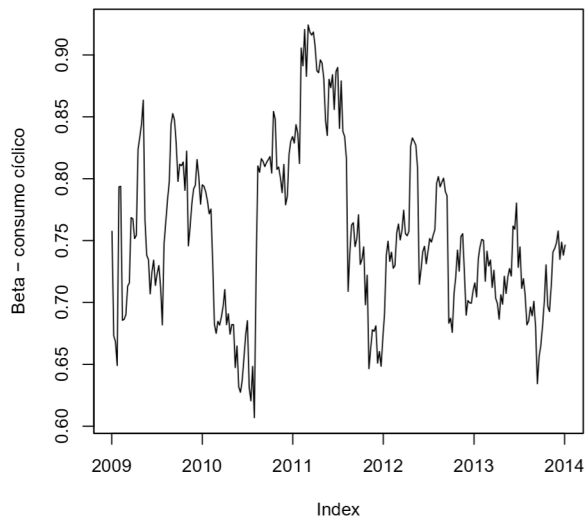


Figura 20 – Evolução do  $\beta$  para o setor de consumo cíclico