UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Bernardo Leal de Oliveira

Operadores de Schrödinger Ergódicos em Variedades Compactas

BELO HORIZONTE
2021

Bernardo Leal de Oliveira

Operadores de Schrödinger Ergódicos em Variedades Compactas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Silas Luiz de Carvalho

Belo Horizonte

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

O48o Oliveira, Bernardo Leal de.
Operadores de Schrödinger ergódicos em variedades compactas / Bernardo Leal de Oliveira. – 2021.
90f., enc. : il.

Orientador: Silas Luiz de Carvalho.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Física.
Bibliografia: f. 88-90.

1. Operadores de Schrodinger. 2. Operadores aleatórios. 3. Teoria ergódica. I. Título. II. Carvalho, Silas Luiz de. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Física.

CDU – 530.145 (043)

Ficha catalográfica elaborada por Romário Martins Ribeiro – CRB6 3595
Biblioteca Professor Manoel Lopes de Siqueira – Departamento de Física - UFMG

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

A presente dissertação, intitulada **"Operadores de Schrödinger Ergódicos em Variedades Compactas"** de autoria de **BERNARDO LEAL DE OLIVEIRA**, submetida à Comissão Examinadora, abaixo-assinada, foi aprovada para obtenção do grau de **MESTRE EM FÍSICA** em 26 de novembro de 2021.

Belo Horizonte, 26 de novembro de 2021.

Prof. Silas Luiz de Carvalho

Orientador do estudante

Departamento de Matemática/UFMG

Prof. Emmanuel Araújo Pereira

Departamento de Física/UFMG

Prof. Nelson de Oliveira Yokomizo

Departamento de Física/UFMG

Prof. Gustavo Barbagallo de Oliveira

Departamento de Matemática/UFMG

Documento assinado eletronicamente por **Emmanuel Araujo Pereira**, **Membro de comissão**, em 29/11/2021, às 11:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Nelson de Oliveira Yokomizo**, **Professor do Magistério Superior**, em 29/11/2021, às 11:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Silas Luiz de Carvalho**, **Professor do Magistério Superior**, em 29/11/2021, às 12:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

Documento assinado eletronicamente por **Gustavo Barbagallo de Oliveira**, **Professor do Magistério Superior**, em 29/11/2021, às 14:48, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1112603** e o código CRC **1976C2F0**.

Referência: Processo nº 23072.261446/2021-01 SEI nº 1112603

Agradecimentos

A Deus, Pai e Todo Poderoso, por todas as dádivas e por sempre estar ao meu lado em todos os momentos.

Aos meus pais, Leonardo e Conceição, por serem o alicerce da minha vida e por sempre estarem ao meu lado, pelas orientações e por todo o suporte financeiro e emocional. Por serem meus melhores amigos e por serem pais que me enchem de orgulho.

Ao meu irmão, Gustavo Leal, por ser meu super-herói, meu melhor amigo e por sempre estar ao meu lado. Com sua esposa, Carolina Avelin, agradeço por terem me dado a honra de ser o padrinho da Sophia, minha princesinha.

Ao meu orientador, Silas Luiz de Carvalho, por todo o aprendizado em Física e Matemática, pelas orientações e conversas sobre os mais diversos assuntos e principalmente pela paciência, compreensão e dedicação ao ser meu professor.

Ao programa de Pós-Graduação pela oportunidade.

A todos os professores que contribuíram para minha formação, em especial, ao professor Mario Sérgio de Carvalho Mazzoni por ter sido meu orientador na graduação.

As secretárias, Ana Luiza e Marília Pacheco, pela atenção e orientação.

Aos meu amigos e colegas por todos os momentos que guardo com muito carinho na minha memória, pelos apoios e conselhos nos mais diversos momentos da minha vida.

Por fim, a CAPES pelo auxílio financeiro.

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar a mensurabilidade e os espectros de operadores aleatórios em variedades compactas, em particular a densidade integrada de estados associada a uma família de operadores de Schrödinger aleatórios. A motivação para este trabalho vem da Física do Estado Sólido, onde procuramos um modelo matemático que descreva como operadores, em especial, o operador de Schrödinger comporta-se em uma variedade, considerando que tanto o operador Laplaciano, quanto o potencial e o tensor métrico da variedade são indexados por elementos de um espaço de probabilidade. É simples imaginar um cenário físico para tal modelo, como por exemplo, uma estrutura cristalina onde não se sabe como as impurezas estão distribuídas pela rede. Para compreender tal modelo, bem como algumas de suas propriedades, estudamos em detalhes todas as definições e todos os resultados apresentados em [1].

Palavras-chave: Operadores de Schrödinger Aleatórios, Operadores Aleatórios, Variedades Riemannianas, Densidade Integrada de Estados, Teorema Ergódico de Lindenstrauss.

Abstract

The aim of this work is to study the measurability and spectra of random operators on compact manifolds, in particular the integrated density of states associated with a family of random Schrödinger operators. The motivation for this work comes from Solid State Physics, where we look for a mathematical model that describes how operators, in particular, the Schrödinger operator behaves in a manifold, considering that both the Laplacian operator, the potential and the metric tensor of manifold are indexed by elements of a probability space. It is simple to imagine a physical scenario for such a model, such as a crystalline structure where it is not known how impurities are distributed across the network. To understand this model, as well as some of its properties, we studied in detail all the definitions and all the results presented in [1].

Keywords: Random Schrödinger Operators, Random Operators, Riemannian Manifolds, Integrated Density of State, Lindenstrauss's Ergodic Theorem.

Sumário

1 Introdução

Operadores de Schrödinger[1] aleatórios são modelos para a descrição da mecânica quântica de meios desordenados. O estudo destes operadores tem origem na Física do Estado Sólido, onde o fenômeno de localização foi tratado pela primeira vez por Philip W. Anderson no final dos anos cinquenta e por Nevill F. Mott e W.D. Twose nos anos sessenta; vale destacar que as contribuições de I. M. Lifshitz, na década de 1960, estabeleceram as bases para o estudo matematicamente rigoroso da teoria. É padrão da Física do Estado Sólido tratar de sistemas, no caso materiais (redes cristalinas), onde é atribuída uma ordem (periodicidade) aos componentes do sistema, por exemplo, átomos ou moléculas dispostos em uma rede. Porém, quando é adicionada uma componente diferente (impureza) ao sistema, temos então o que é chamado de sistema desordenado (sem periodicidade).

Um sólido macroscópico consiste em uma ordem de grandeza de 10^{23} núcleos e elétrons. O hamiltoniano resultante, levando em consideração todas as interações, é altamente complicado. Para chegar a um operador de Schrödinger que possa ser estudado com algum detalhe, negligenciamos as interações elétron-elétron e tratamos os núcleos na aproximação de massa infinita. Assim, chega-se a um operador Schrödinger de um elétron com um potencial externo devido às forças elétricas entre o elétron e os núcleos, que se supõem serem fixos no espaço. Para o caso em que os núcleos são organizados periodicamente em uma rede, a energia potencial do elétron é uma função periódica da variável espacial.

Por outro lado, o elétron pode estar se movendo em um meio desordenado, caso em que não há um grupo de simetria do hamiltoniano. No entanto, do ponto de vista físico, é razoável supor que a estrutura local do meio seja, em média, invariante à translação [2]. Isso significa que consideramos o potencial que o elétron experimenta como uma realização particular de um processo aleatório e assumimos a localização em relação a algum grupo de translação. Além disso, a intuição física sugere supor que as propriedades locais do meio em duas regiões distantes (na escala microscópica) são aproximadamente independentes uma da outra. Portanto, o processo estocástico que descreve o potencial deve ter uma função de correlação que decai para zero ou - mais geralmente - deve ser ergódico [2], [3] e [4].

[1] Operador de Schrödinger, operador hamiltoniano e operador energia são sinônimos.

1.1 Os Operadores Aleatórios

Para incorporar a desordem aos modelos matemáticos, é preciso considerar um operador como um elemento de uma família de operadores, família esta indexada pelos elementos de um espaço de probabilidade. Isso quer dizer que, do ponto de vista físico, não se sabe exatamente como as impurezas se distribuem ao longo da rede cristalina. Unindo-se a tal família a propriedade de ergodicidade, é possível mostrar que os tipos espectrais que normalmente se consideram, ou seja, espectros absolutamente contínuo, singular contínuo e puramente pontual, não são aleatórios (i.e., independem do operador, a menos de um conjunto de probabilidade zero) [3], [4] e [5].

Recordemo-nos da definição de sistema ergódico:

Definição 1.1. *Seja* $(\Omega, B_\Omega, \mathbb{P})$ *um espaço de probabilidade. Uma transformação invertível* $\beta : \Omega \to \Omega$ *é dita ser uma* ***transformação que preserva a medida*** *(invariante ou estacionária) se* $\beta(A), \beta^{-1}(A) \in B_\Omega$ *e* $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\beta(A)) = \mathbb{P}(\beta^{-1}(A))$ *para todo* $A \in B_\Omega$*. Uma medida invariante* $\mathbb{P}$ *é chamada de medida estacionária ou medida* β*-invariante.*

Definição 1.2. *Uma transformação* β *(ou uma probabilidade* $\mathbb{P}$ *estacionária) é* β***-ergódica*** *se qualquer conjunto invariante pela transformação* β*, ou seja,* $A \in B_\Omega$*,* $\beta^{-1}(A) = A$*, tem probabilidade* $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$*.*

Considere, por exemplo, o potencial dado por

$$V_\omega(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} u_k(\omega, x),$$

onde k corresponde a um núcleo localizado em um ponto da rede cristalina. A função $u_k(\omega, x)$ descreve o potencial atômico em k e depende do parâmetro aleatório ω que descreve as possíveis configurações de k. Se houver apenas um tipo de átomo presente na rede cristalina, que possui potencial com simetria esférica, então todas $u_k(\omega, \cdot)$ são iguais e V_ω é periódico. Agora, suponha que existam dois tipos de átomos, a e b, presentes na rede cristalina com potencial simetricamente esférico, mas que difere no número de carga q_a e q_b. Neste caso, o potencial é dado por

$$V_\omega(x) := \sum_{k_a} q_a u(x - k) + \sum_{k_b} q_b u(x - k).$$

Se estes dois tipos de átomos estão dispostos na rede em um padrão regular, então temos, novamente, um potencial periódico [2], [3] e [4]. Entretanto, há muitas situações físicas interessantes onde os sítios atômicos k são aleatórios, obedecendo, por exemplo, a lei

$$\mathbb{P}\{\ k_a\} = P, \quad \mathbb{P}\{k_b\} = 1 - P,$$

para algum $P \in (0, 1)$, em que $\mathbb{P}\{\cdots\}$ representa a probabilidade de um sítio k estar ocupado por um átomo do tipo a ou b. Se, além disso, assumirmos que as probabilidades acima são independentes em cada local e que o parâmetro P é o mesmo para todo k, chegamos ao potencial contínuo de Bernoulli-Anderson

$$V_\omega(x) = \sum_k q_k(\omega)u(x-k),$$

onde $q_k(\omega) \in \{q_a, q_b\}$, com $k \in \mathbb{Z}^d$, denota uma coleção de variáveis aleatórias de Bernoulli independentes e identicamente distribuídas, e u é algum potencial atômico [2], [3] e [4].

O objetivo principal da análise de tais modelos é a compreensão das propriedades de transporte do material. Por exemplo, no caso do Hamiltoniano quântico para um elétron em um sólido desordenado, as propriedades de condutividade elétrica são o principal objeto de interesse. Acontece que muitas das propriedades de interesse dos operadores de Schrödinger aleatórios estão relacionadas a uma quantidade chamada densidade integrada de estados. Na Física de Estado Sólido e na Física da Matéria Condensada, a densidade de estados (na Física, $D(\varepsilon)$) de um sistema estabelece uma relação entre os estados que podem ser ocupados pelo sistema e sua energia, mais precisamente, o número de estados livres abaixo de uma certa energia. Um nome alternativo para essa quantidade é função de distribuição espectral [2].

A densidade integrada de estados pode ser usada para calcular a energia livre e, portanto, todas as quantidades termodinâmicas básicas do sistema de muitas partículas não interagentes. Matematicamente, tal quantidade é representada como uma distribuição N^H, sendo essa o limite da função de contagem $N_\omega^D(\lambda)$ dos autovalores do operador $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$, uma vez que é a função de distribuição de uma medida espectral associada à família aleatória de operadores [1], [2], [4], [6], [7] e [8].

Além disso, a função de distribuição espectral é objeto de estudo em outros campos da matemática, como Geometria Diferencial, Álgebras de Grupo e de von Neumann e Álgebra Homológica [2], e desempenha um papel proeminente nas provas de teoremas.

1.2 O Cenário Geométrico

Para motivar a geometria do problema podemos ter em mente os materiais bidimensionais (ou 2D) que são formados por camadas únicas de átomos. O grafeno, por exemplo, foi o primeiro desses materiais a ser isolado, em 2004, feito que resultou no prêmio Nobel de Física de 2010 para Andre Geim e Konstantin Novoselov da Universidade de Manchester [9]. O grafeno corresponde a um cristal de grafite com espessura de um átomo de carbono. É centenas de vezes mais forte do que o aço e suas condutividades térmica e elétrica são superiores às do cobre, o que o torna um material de enorme potencial para as indústrias de semicondutor e de eletrônicos [9]. Assim, é natural do ponto de vista das aplicações, estudar modelos matemáticos que descrevam o comportamento de operadores auto-adjuntos em superfícies bidimensionais.

A seguir, apresentamos um modelo que incorpora aleatoriedade não apenas no potencial, como também na própria geometria da superfície. A ideia é buscar modelar matematicamente a situação em que as impurezas do material afetam a disposição espacial dos átomos no material, e portanto a geometria da superfície. **Vale a pena mencionar que a dimensão da variedade não está restrita a 2D**.

Seja $M = X/\Gamma$ uma variedade Riemanniana compacta com métrica g_0 e uma forma de volume vol_0 associada a g_0, onde Γ é o subgrupo discreto e finitamente gerado das isometrias da variedade X (vide Seção 1.3 para uma discussão sobre Γ). Além disso, seja $(\Omega, B_\Omega, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade no qual Γ atua ergodicamente por transformações que preservam medida.

Definição 1.3. *Uma família de tensores métricos Riemannianos* $\{g_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ *em* X *com formas de volumes* vol_ω *é chamado uma **tensor métrico aleatório** em* (X, g_0) *se as seguintes propriedades forem satisfeitas:*

1. *O mapa* $\Omega \times TM \to \mathbb{R}$, $(\omega, v) \mapsto g_\omega(v, v)$, *é conjuntamente mensurável.*

2. *Existe uma constante* $C_g \in (0, \infty)$ *tal que*

$$C_g^{-1} g_0(v, v) \leqslant g_\omega(v, v) \leqslant C_g g_0(v, v), \text{ para todos } \omega \in \Omega \text{ e } v \in TX.$$

3. *Existe uma constante* $C_\rho > 0$ *tal que*

$$|\nabla_0 \rho_\omega(x)|_0 \leqslant C_\rho, \text{ para todos } \omega \in \Omega \text{ e } x \in X,$$

   onde ∇_0 *é o gradiente*[2] *com respeito a métrica* g_0, $\rho_\omega(x)$ *é a única densidade suave que satisfaz* $\boldsymbol{d}vol_0 = \rho_\omega \boldsymbol{d}vol_\omega$, *e* $|v|_0^2 = g_0(v, v)$.

4. *Existe um limite inferior uniforme* $(d-1)K \in \mathbb{R}$ *para o tensor de curvatura de Ricci de todas as variedades Riemannianas* (X, g_ω). *Explicitamente,* $\mathrm{Ric}(g_\omega) \geqslant (d-1)K g_\omega$ *para todo* $\omega \in \Omega$ *e para todo* $x \in X$.

5. *As métricas são compatíveis, no sentido que as transformações*

$$\gamma : (X, g_\omega) \to (X, g_{\gamma\omega}), \quad \gamma : x \mapsto \gamma x$$

   são isometrias. Isto implica, em particular, que

$$U_{(\omega,\gamma)} : L^2(X, vol_{\gamma^{-1}\omega}) \to L^2(X, vol_\omega), \quad U_{(\omega,\gamma)} f_{\gamma^{-1}\omega}(x) = f_\omega(\gamma^{-1}x)$$

   são operadores unitários na família de espaços de Hilbert sobre as variedades $\{(X, g_\omega)\}_{\omega\in\Omega}$.

[2] Vide equação (33.135) na página 1637 de [10] ou página 27 de [11] para uma expressão do gradiente em variedades.

A densidade $\rho_\omega(x)$ é uma função suave ($\rho_\omega(x) \in C^\infty(X)$) tal que

$$\int_X f_\omega(x)\ \boldsymbol{d}vol_0(x) = \int_X f_\omega(x)\rho_\omega(x)\ \boldsymbol{d}vol_\omega(x) \tag{1.1}$$

e

$$\rho_\omega(x) = (\det g_0(e^i_\omega, e^j_\omega))^{1/2} = (\det g_\omega(e^i_0, e^j_0))^{-1/2},$$

onde $\{e^1_0, \cdots, e^n_0\}$ é uma base ortonormal para T_xX com respeito ao tensor métrico g_0 e $\{e^1_\omega, \cdots, e^n_\omega\}$ uma base ortonormal para T_xX com respeito ao tensor métrico g_ω.

Note que pela propriedade (2) da Definição (1.3) e pela identidade (1.1), os espaços de Hilbert $L^2(D, vol_0)$ e $L^2(D, vol_\omega)$ coincidem como conjuntos para todo $\omega \in \Omega$, embora seus produtos escalares não coincidam. Assim, faz sentido falar sobre funções $f_\omega \equiv f_0$ como elementos de $L^2(D, vol_\omega) \equiv L^2(D, vol_0)$. Consequentemente, o operador

$$S_\omega : L^2(D, vol_0) \to L^2(D, vol_\omega) \quad \text{definido pela lei} \quad S_\omega f_0(x) = \rho^{1/2}_\omega(x) f_\omega(x) \tag{1.2}$$

é unitário. Com efeito, pela identidade (1.2), temos que

$$\begin{aligned}
\langle S_\omega f_0(x), S_\omega f_0(x)\rangle_\omega &= \langle \rho^{1/2}_\omega(x) f_\omega(x), \rho^{1/2}_\omega(x) f_\omega(x)\rangle_\omega \\
&= \int_D \overline{\rho^{1/2}_\omega(x) f_\omega(x)}\rho^{1/2}_\omega(x) f_\omega(x)\ \boldsymbol{d}vol_\omega(x) \\
&= \int_D \overline{f_\omega(x)}\rho^{1/2}_\omega(x)\rho^{1/2}_\omega(x) f_\omega(x)\ \boldsymbol{d}vol_\omega(x) \\
&= \int_D |f_\omega(x)|^2\ \rho_\omega(x)\ \boldsymbol{d}vol_\omega(x) \\
&\overset{\text{por } 1.1}{=} \int_D |f_\omega(x)|^2\ \boldsymbol{d}vol_0(x) = \langle f_\omega, f_\omega\rangle_0.
\end{aligned}$$

Sendo $f_\omega \equiv f_0$, conclui-se que S_ω é uma isometria. Resta mostrar que S_ω é sobrejetivo. Para tanto, seja $f_\omega \in L^2(D, vol_\omega)$. Então, para toda f_ω existe $f_0 \in L^2(D, vol_0)$ tal que $f_0(x) = \rho^{1/2}_\omega(x) S^{-1}_\omega f_\omega(x)$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\langle S^{-1}_\omega f_\omega(x), S^{-1}_\omega f_\omega(x)\rangle_0 &= \langle \rho^{-1/2}_\omega(x) f_0(x), \rho^{-1/2}_\omega(x) f_0(x)\rangle_0 \\
&= \int_D \overline{\rho^{-1/2}_\omega(x) f_0(x)}\rho^{-1/2}_\omega(x) f_0(x)\ \boldsymbol{d}vol_0(x) \\
&= \int_D \overline{f_0(x)}\rho^{-1/2}_\omega(x)\rho^{-1/2}_\omega(x) f_0(x)\ \boldsymbol{d}vol_0(x) \\
&= \int_D |f_0(x)|^2 \rho^{-1}_\omega(x)\ \boldsymbol{d}vol_0(x) \\
&\overset{\text{por } 1.1}{=} \int_D |f_0(x)|^2\ \boldsymbol{d}vol_\omega(x) = \langle f_0, f_0\rangle_\omega < \infty
\end{aligned}$$

e portanto S_ω é sobrejetivo.

Agora, seja $\mathcal{A}$ a matriz de mudança de base real e ortogonal $n \times n$ tal que

$$e_0^i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_\omega^j. \tag{1.3}$$

Então, segue-se da propriedade (2) da Definição (1.3) que

$$C_g^{-1}\mathbf{I} \leqslant \mathcal{A}\mathcal{A}^T \leqslant C_g\mathbf{I}. \tag{1.4}$$

Com efeito, temos que

$$C_g^{-1}\ g_0(e_0^i, e_0^j) \leqslant g_\omega(e_0^i, e_0^j) \leqslant C_g\ g_0(e_0^i, e_0^j).$$

Pela definição do tensor métrico Riemanniano, segue-se que

$$C_g^{-1}\ \delta_{ij} \leqslant g_\omega(e_0^i, e_0^j) \leqslant C_g\ \delta_{ij};$$

em particular, usando a identidade (1.3) na desigualdade acima, temos

$$C_g^{-1}\delta_{ij} \leqslant g_\omega\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}e_\omega^k, \sum_{l=1}^{n} a_{jl}e_\omega^l\right) \leqslant C_g\delta_{ij};$$

agora, da definição do tensor métrico Riemanniano, chegamos a

$$C_g^{-1}\delta_{ij} \leqslant \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{ik}e_\omega^k, \sum_{l=1}^{n} a_{jl}e_\omega^l \right\rangle_\omega \leqslant C_g\delta_{ij}.$$

Pela linearidade do produto interno, temos que

$$C_g^{-1}\delta_{ij} \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{l=1}^{n} a_{jl}\langle e_\omega^k, e_\omega^l\rangle_\omega = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{l=1}^{n} a_{jl}\delta_{kl} \leqslant C_g\delta_{ij}.$$

Pela definição do Delta de Kronecker, temos que

$$C_g^{-1}\delta_{ij} \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} \leqslant C_g\delta_{ij},$$

donde

$$(C_g^{-1}\mathbf{I})_{ij} \leqslant (\mathcal{A}\mathcal{A}^T)_{ij} \leqslant (C_g\mathbf{I})_{ij},$$

e portanto,

$$C_g^{-1}\langle\varphi,\varphi\rangle_0 \leqslant \langle\varphi, \mathcal{A}\mathcal{A}^T\varphi\rangle_0 \leqslant C_g\langle\varphi,\varphi\rangle_0$$

para todo $\varphi \in TX$.

Segue-se de (1.4) que

$$C_g^{-n/2} \leqslant \rho_\omega(x) \leqslant C_g^{n/2}. \tag{1.5}$$

Com efeito, como acabamos de mostrar, $(\mathcal{A}\mathcal{A}^T)_{ij} = g_\omega(e_0^i, e_0^j)$, e assim

$$C_g^{-n/2} \leqslant \det g_\omega(e_0^i, e_0^j)^{-1/2} = \rho_\omega(x) \leqslant C_g^{n/2}.$$

Além disso, sabemos que o tensor métrico induz uma forma de volume por meio de $vol(D) = \sqrt{\det(g_{ij})}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$, onde g_{ij} é matriz que representa o tensor métrico [10], [11] e [12]. Assim, temos que

$$C_g^{-n/2}vol_0(D) \leqslant vol_\omega(D) \leqslant C_g^{n/2}vol_0(D). \tag{1.6}$$

1.3 Operadores de Schrödinger

Pelos postulados da Mecânica Quântica, é necessário que os operadores de Schrödinger sejam auto-adjuntos. Assim, estamos considerando operadores da forma $H = -\Delta + V$ onde $-\Delta$, o operador Laplaciano[3], é uma quantização para a energia cinética e V é uma função mensurável. ***Note que estamos usando a convenção de que $-\Delta$ é um operador positivo***. Segue-se do Teorema (A.1) que em $\mathbb{R}^n$, $\sigma(-\Delta) = [0, \infty)$.

Assumimos que tanto $-\Delta$ quanto V são aleatórios (ergódicos), onde V é um processo estocástico ergódico estacionário definido em um espaço de probabilidade $(\Omega, B_\Omega, \mathbb{P})$; denotaremos doravante tanto $-\Delta$ quanto V como $-\Delta_\omega$ e V_ω, respectivamente, em que $\omega \in \Omega$. Ser estacionário significa que todas as médias sobre o parâmetro aleatório ω são invariantes por translação, e esta é uma suposição compatível com a suposição de homogeneidade [4]. A ergodicidade não é menos natural, pois a experiência mostra que a maioria dos sistemas físicos que encontramos são, na verdade, ergódicos [4]. Consequentemente, o operador de Schrödinger torna-se uma função do parâmetro aleatório ω e estamos diante de um operador auto-adjunto e aleatório que deve ser e ergódico com respeito às transformações $\gamma \in \Gamma$ [4].

Definição 1.4. *Seja g_ω um tensor métrico aleatório em (X, g_0). Para cada $\omega \in \Omega$ seja $H_\omega = -\Delta_\omega + V_\omega$ o operador de Schrödinger definido no subespaço denso $\mathcal{D}_\omega$ do espaço de Hilbert $L^2(X, vol_\omega)$ com $V : \Omega \times X \longrightarrow [0, \infty)$ uma aplicação conjuntamente mensurável tal que $V_\omega \equiv V(\omega, \cdot) \in L^1_{loc}(X)$ para todo $\omega \in \Omega$. Assuma, além disso, que $V(\gamma\omega, x) = V(\omega, \gamma^{-1}x)$ para $x \in X$, $\omega \in \Omega$ e $\gamma \in \Gamma$ arbitrários. Uma família de operadores $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ será chamada de* ***operador de Schrödinger aleatório*** *na variedade X se satisfizer a condição de equivariância*

$$H_\omega = U_{(\omega,\gamma)} H_{\gamma^{-1}\omega} U^*_{(\omega,\gamma)} \tag{1.7}$$

para todos $\gamma \in \Gamma$ e $\omega \in \Omega$.

Sabe-se, da Física Téorica, que a evolução temporal de um sistema quântico é governada pela Equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t)\psi(\vec{r}, t),$$

e em um sistema ordenado as soluções da Equação de Schrödinger apresentam coerência de longo alcance [13] e [14], o que torna possível definir a solução para todo o espaço. Porém, em um meio desordenado, as impurezas destroem a ordem de longo alcance e podem acarretar na inexistência de soluções estendidas a todo espaço para baixas energias [3] e [4].

[3] Vide equação (33.140) na página 1639 de [10] ou Proposição (2.46) de [11] para uma expressão do Laplaciano em variedades.

Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\psi(t) \in \mathcal{H}$ uma solução para equação de Schrödinger com $\psi(0)$ o estado inicial suportado em um conjunto compacto $\mathbb{A} \subset \mathbb{R}^d$. Considere, por exemplo, uma onda de baixa energia dada por $\psi(t) = e^{-itH_\omega}\psi(0)$ que se propaga a partir de uma parte regular (periódica) de um meio desordenado. Imediatamente após atingir uma impureza, a coerência é destruída e parte da onde é refletida. Esta situação pode resultar em que parte da energia fique sempre presa em uma região finita do espaço e assim se fala em localização. A localização (grosso modo) está ligada ao fato de que o operador de Schrödinger, que descreve o sistema sólido desordenado, possui espectro puramente pontual, com auto-funções localizadas [2], [3], [4] e [15]. No entanto, existem algumas classes de operadores ergódicos que exibem espectro puramente contínuo; conjectura-se que para uma grande classe de operadores ergódicos os espectros puramente pontual e contínuo devem coexistir, com um ou vários valores de energia separando-os. Tais valores de energia são chamados de bordas de mobilidade [3], [4] e [5].

Mais especificamente, dado um espaço de probabilidade $(\Omega, B_\Omega, \mathbb{P})$, os operadores aleatórios $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega} = -\Delta_\omega + V_\omega$ têm para quase todo $\omega \in \Omega$ com respeito a $\mathbb{P}$ os mesmos tipos espectrais. Espectros diferentes de um operador auto-adjunto $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$, em geral, acarretam comportamentos diferentes para o grupo unitário de evolução temporal e^{-itH_ω} (particularmente quando $|t| \to \infty$) (vide capítulo 13 de [5]). Assim, alguns conceitos físicos como, por exemplo, a probabilidade de retorno quântico e os momentos do operador posição, são usados para analisar o comportamento de $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ quando $|t| \to \infty$.

Um resultado interessante envolvendo os tipos espectrais de um operador auto-adjunto e a dinâmica quântica é o seguinte: sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, $T : dom(T) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ um operador auto-adjunto e $f \in dom(T)$. Sobre a evolução temporal $e^{-itT}f$, o estado f é completamente abandonada em média (temporal) se f pertencer ao subespaço contínuo[4] de T, o que significa dizer que o valor médio da probabilidade quântica de retorno vai para zero quando $t \to \infty$. Algumas vezes, este resultado é associada com a noção de instabilidade, i.e., ionização atômica [5].

Apresentamos, a seguir, alguns dos principais resultados estudados neste trabalhado envolvendo operadores de Schrödinger Aleatórios. Em particular, o Teorema (1.2) nos diz que para quase todo $\omega \in \Omega$ o operador de Schrödinger apresenta, quase com certeza, espectro constante. Especialmente, para quase todo $\omega \in \Omega$, o operador não possui autovalores isolados.

Teorema 1.1. *Um operador $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ é uma família mensurável de operadores.*

Teorema 1.2. *Sejam $\Omega \times \Gamma$ ergódico*[5] *e $H = \int_\Omega^\oplus H_\omega d\mathbb{P}(\omega)$ um operador auto-adjunto agindo*

[4] isso significa que a medida espectral de T associada a f é não atômica [5]

[5] Ou seja, para cada $\gamma \in \Gamma$, $(\Omega, \gamma, \mathbb{P})$ é um sistema ergódico.

no espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \int_{\Omega}^{\oplus} \mathcal{H}(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$ *tal que* $E^H \in \mathcal{N}(\Omega \times \Gamma, \Omega \times X)$ *onde* E^H *é a resolução da identidade para* $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ *e* $\mathcal{N}(\Omega \times \Gamma, \Omega \times X)$ *é a álgebra de von Neumann formada pelos operadores aleatórios e limitados. Então, existem* $\Omega' \subset \Omega$ *com* $\mathbb{P}(\Omega') = 1$ *e* Σ, $\Sigma_\bullet \subset \mathbb{R}$, *tal que* $\sigma(H_\omega) = \Sigma$ *e* $\sigma^\bullet(H_\omega) = \Sigma_\bullet$ *para todo* $\omega \in \Omega'$, *onde* $\bullet$ = *discreto (disc), essencial (ess), absolutamente contínuo (ac), singular contínuo (sc), puramente pontual (pp). Além disso,* $\Sigma_{disc} = \emptyset$.

1.4 A Densidade Integrada de Estados

A densidade integrada de estados (IDS) desempenha um papel muito importante para a Física do Estado Sólido e a Física da Matéria Condensada. Considere, por exemplo, um sólido desordenado como uma liga metálica com estrutura cristalina, onde os elementos químicos da liga são distribuídos aleatoriamente nos pontos da rede. Sejam $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ um cubo de lado n centrado na origem e $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}^{\Lambda_n}$ a restrição de $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ ao cubo Λ_n com condição de contorno, por exemplo, Dirichlet, Neumann ou periódica [1], [2], [6], [7] e [8]. Assim, a IDS é o limite das funções de contagem dos autovalores de $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}^{\Lambda_n}$ normalizadas pelo volume do cubo Λ_n. Pela hipótese de ergodicidade, pode-se mostrar que os pontos de aumento da IDS coincidem com o espectro quase certo de $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ (vide Corolário (3.1) para detalhes). A não-aleatoriedade dos tipos espectrais sugere que um elétron que se move em uma rede cristalina exibe quase com certeza um comportamento dinâmico particular (i.e., tem-se transporte, localização ou alguma situação mista) [3], [4] e [5].

Quase toda propriedade de transporte eletrônico de um sólido será proporcional a $D(\varepsilon_F)$, a densidade de estados na superfície de Fermi[6], como por exemplo, a capacidade dos elétrons de absorver calor ou sua resposta a campos elétricos aplicados. Os elétrons que estão abaixo da energia de Fermi não podem contribuir para as propriedades de transporte, porque todos os estados a sua volta estão ocupados. Uma vez que não podem mudar seu estado, estes elétrons localizados abaixo da energia de Fermi não podem responder às perturbações. Estados muito acima da superfície de Fermi não são ocupados em baixas temperaturas e não respondem a nenhum campo externo. Dessa maneira, a densidade do número de elétrons na superfície de Fermi é, portanto, uma quantidade fisicamente importante [16]. Para o gás livre de Fermi, por exemplo, temos: $D(\varepsilon_F) = \frac{3}{2}\frac{n}{\varepsilon_F} = 4.11 \cdot 10^{-2}[n \cdot \mathring{A}^3] eV^{-1} \mathring{A}^{-3}$.

Seja $D \subset X$ um aberto com forma de volume $vol_\omega(D) < \infty$. Entenda por $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}^{D}$ ou simplesmente H_ω^D a restrição de $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ a D com condição de Dirichlet (i.e. $H|_{\partial D} = 0$). A restrição H_ω^D é auto-adjunta, limitada inferiormente e possui espectro puramente discreto [1], [4] e [5]. Portanto, podemos enumerar seus autovalores em ordem crescente, contando multiplicidades: $\lambda_1(H_\omega^D) \leq \lambda_2(H_\omega^D) \leq \cdots \leq \lambda_i(H_\omega^D) \to \infty$.

6 Seja $\vec{k}$ o vetor de onda associado a um estado quântico $\vec{\psi}$. A coleção de todos os $\vec{k}$s tal que $\vec{\psi}$ possui energia ε_F (energia de Fermi) é chamada de superfície de Fermi; vide [16] para detalhes.

Apresentemos as definições precisas das quantidades discutidas anteriormente.

Definição 1.5. *A* ***função normalizada de contagem de autovalores*** *é dada por*

$$N_\omega^D(\lambda) = \frac{\#\{i|\lambda_i(H_\omega^D) < \lambda\}}{vol_\omega(D)}.$$

Segue que N_ω^D é uma função de distribuição e possui um conjunto enumerável de pontos de descontinuidade.

Definição 1.6. *Dado $x \in X$, o conjunto $\mathcal{O}(x) := \{y \in X \mid \exists \gamma \in \Gamma : y = \gamma x\}$ é chamado de Γ-órbita de x. A relação $x \sim y \iff \mathcal{O}(x) \cap \mathcal{O}(y) \neq \emptyset$ particiona X em classes de equivalência. Um subconjunto $\mathcal{F} \subset X$ é chamado de* ***domínio Γ-fundamental*** *se contém exatamente um elemento de cada classe de equivalência.*

Definição 1.7. *Sejam $\mathcal{F} \subset X$ um domínio pré-compacto Γ-fundamental com fronteira suave por partes e $\mathbb{E}$ o valor esperado com respeito a $\mathbb{P}$, com Tr_ω o traço no espaço de Hilbert $L^2(X, vol_\omega)$. A* ***densidade de estados*** *para um operador $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ é a medida em $\mathbb{R}$ dada por*

$$N^H(f) := \frac{\mathbb{E}[Tr_\omega(\chi_{\mathcal{F}} f(H_\bullet))]}{\mathbb{E}[vol_\bullet(\mathcal{F})]},$$

em que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função limitada e mensurável.

Definição 1.8. *Seja a densidade de estados dada pela Definição (1.7). O caso particular em que $f = \chi_{(-\infty,\lambda)}$ é chamado de* ***densidade integrada de estados***[7] *(IDS) do operador aleatório $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$.*

Para calcular a IDS usaremos o método da transformada de Laplace desenvolvido por Pastur [17] e Shubin [18]. Uma ideia particular dessa abordagem é provar a convergência das transformadas de Laplace da função densidade de estados em vez de provar a convergência das funções diretamente. Existe ainda uma outra forma para se calcular a IDS. Ela usa estimativas de colchetes de Dirichlet-Neumann para operadores de Schrödinger, que são transferidos para as funções de contagem de autovalores correspondentes [2]. Esses são, portanto, processos estocásticos super ou subaditivos, aos quais um teorema ergódico pode ser aplicado [1], [2], [6], [7] e [8].

De fato, os operadores aleatórios em variedades são equivariantes em relação a um grupo que não precisa ser comutativo [2]. Isso significa que é necessário usar um teorema ergódico não abeliano para derivar a convergência das funções de distribuição ou, alternativamente, de suas transformadas de Laplace. Isso impõe alguma restrição à estratégia da prova, visto que os teoremas ergódicos que se aplicam a grupos não abelianos precisam de suposições mais restritivas do que suas contrapartes para grupos comutativos

[7] Vide Teorema (1.4) para uma justificativa para a nomenclatura.

(vide Observação 2.6.2 de [2] para detalhes) [2]. Para tanto, usaremos o Teorema Ergódico de Lindenstrauss.

Apresentamos a seguir as propriedades necessárias que o grupo das isometrias Γ deve satisfazer para que possamos aplicar o Teorema Ergódico de Lindenstrauss ao nosso problema.

Definição 1.9. *Um grupo G localmente compacto é dito ser **amenable** se para qualquer compacto $F \subset G$ e $\varepsilon > 0$ existir um compacto $\mathcal{G} \subset G$ tal que*

$$m_L(\mathcal{G}\Delta F\mathcal{G}) < \varepsilon\ m_L(\mathcal{G}),$$

onde ambas m_L e $|\cdot|$ denotam uma medida de Haar[8] invariante a esquerda e Δ a diferença simétrica entre conjuntos. Se G for discreto e finitamente gerado, então $m_L(\cdot) = |\cdot|$ representa a medida de contagem de G, ou seja, a cardinalidade do grupo G. O compacto $\mathcal{G}$ será chamado de (F, ε)-invariante.

Observação 1.1. *Existe uma outra definição, usualmente empregada nos livros, para o conceito de grupo amenable, naturalmente equivalente à Definição (1.9) (vide Definição 18.18 de [19] para detalhes). No entanto, para nossos propósitos, a Definição (1.9) é mais natural.*

Definição 1.10. *Uma sequência monotonicamente crescente $\mathcal{G}_j$ de subconjuntos compactos de um grupo G com $j \in \mathbb{N}$ é dita ser uma **sequência de Følner** se para todo $\gamma \in \Gamma$, tivermos que*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{|\mathcal{G}_j \Delta \mathcal{G}_j \gamma|}{|\mathcal{G}_j|} = 0. \tag{1.8}$$

Observação 1.2. *Segue-se das Definições (1.9) e (1.10) que um grupo G será amenable se, e somente se, existir uma sequência de Følner em G. Por [20], uma sequência de subconjuntos compactos $\mathcal{G}_n$ de G será uma sequência de Følner se para todo compacto F e $\varepsilon > 0$, para n suficientemente grande $\mathcal{G}_n$ for (F, ε)-invariante.*

Assumimos, portanto, que o subgrupo das isometrias Γ é amenable. Segue-se que existe uma sequência de Følner para G, uma condição necessária para evocar o Teorema Ergódico (6.1). Além disso, o fato de Γ ser amenable garante a existência de uma cobertura para X por conjuntos abertos $\{D^j\}_j$. Esta cobertura $\{D^j\}_j$ é chamada uma sequência admissível de subconjuntos de X. Logo, conclui-se a necessidade de termos $M = X/\Gamma$.

Por fim, apresentamos os demais resultados cujas demonstrações estudaremos neste trabalho.

[8] Vide Definição (A.9) para detalhes.

Teorema 1.3. *A função N^H é uma medida espectral* [9] *para o operador integral direto*

$$H := \int_{\Omega}^{\oplus} H_\omega \; d\mathbb{P}(\omega)$$

e $N^H(f)$ e $\tau(f(H))$ [10] *coincidem para toda $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ limitada e mensurável, a menos de um valor constante fixo. Em particular, o espectro quase certo Σ coincide com $\{\lambda \in \mathbb{R} | N((\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon)) > 0 \; \forall \; \varepsilon > 0\}$, i.e., o suporte topológico de N^H.*

Uma consequência do Teorema (1.3) é que N^H é zero fora do espectro Σ.

Teorema 1.4. *Sejam $\{D^j\}_j$ uma sequência admissível e $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ um operador aleatório. Existe um conjunto $\Omega' \subset \Omega$ tal que $\mathbb{P}(\Omega') = 1$ e*

$$\lim_{j \to \infty} N_\omega^{D^j}(\lambda) = N^H(-\infty, \lambda), \tag{1.9}$$

para todos $\omega \in \Omega'$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $N^H(\{\lambda\}) = 0$.

O processo para se obter $N^H(-\infty, \lambda)$ por uma sequência admissível de subconjuntos de X, $\{D^j\}_j \to X$, sem integrar sobre Ω diretamente é conhecido como ***selfaveraging***. Assim, o Teorema (1.4) estabelece a propriedade de selfaveraging para a IDS através da fórmula do traço tipo Šubin[11]. Para um conjunto $D_j \subset X$, segue-se que

$$N_\omega^{D^j, \mathfrak{f}}(\lambda) := \frac{Tr(\chi_{D^j} E^{H_\omega}(\lambda))}{vol_\omega(D^j)},$$

onde $\mathfrak{f}$ indica o fato da IDS ser definida livre de condições de fronteira[12] e E^{H_ω} representa a resolução da identidade para H_ω para todo $\omega \in \Omega$.

Corolário 1.1. *Para quase todo $\omega \in \Omega$, a convergência*

$$\lim_{j \to \infty} N_\omega^{D^j, \mathfrak{f}}(\lambda) = N^H(-\infty, \lambda)$$

vale para todo ponto λ de $N^H(-\infty, \lambda)$.

O Corolário (1.1) nos diz que no limite macroscópico, $\{D^j\}_j \to X$, não é possível perceber se a restrição do operador no espaço ou a projeção sobre um intervalo de energia ocorreu primeiro.

Por simplicidade, o potencial V_ω será sempre não-negativo. Então, é suficiente assumir que V_ω é limitado inferiormente por uma constante C que não depende de $\omega \in \Omega$.

[9] Vide Definição (3.13) no Capítulo 3 para detalhes.
[10] τ é o traço da Álgebra de von Neumann.
[11] Será visto no Capítulo 6 deste trabalho.
[12] O fato da IDS ser definida sem condições de fronteira é conhecido como ***princípio de não sentir a fronteira*** e será visto no Capítulo 5 deste trabalho.

Os resultados podem ser aplicados a uma família de operadores $\{H_\omega - C\}_{\omega\in\Omega}$, uma vez que $N^{H-C}(-\infty, \lambda - C) = N^H(-\infty, \lambda)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e $N_\omega^D(H - C) = N_\omega^D(H)$ para a função normalizada de contagem de autovalor, donde os resultados são transferidos para os operadores originais.

1.5 Resultados Clássicos

Os principais resultados apresentados em [1] foram amplamente estudados em $\mathbb{R}^n$ para o caso em que o tensor métrico g é mantido fixo (estamos denotando por clássico a situação em que o tensor métrico da variedade não depende de $\omega \in \Omega$). Assim, mesmo tomando o tensor métrico da variedade como aleatório, os resultados obtidos mostram uma uniformidade em relação a $\omega \in \Omega$ no sentido que os resultados apresentados são os mesmo para g fixo, ou seja, independem de $\omega \in \Omega$.

Assim, vale a pena saber que o resultado obtido para o Teorema (1.1) pode ser encontrado no Corolário (3) e na Proposição (5) de [21]. O resultado apresentado no Teorema (1.2) pode ser encontrado no Teorema (1) e no Corolário (1) de [21], no Teorema (1.2.5) de [3] e no Teorema (4.3) de [15]. O resultado apresentado no Teorema (1.3) pode ser encontrado na Proposição (VI.1.3) de [4] e na Proposição (5.12) de [15]. Finalmente, o resultado apresentado no Teorema (1.4) pode ser encontrado no Teorema (1.4) de [7], no Teorema (7) de [8], no Corolário (5.8) e no Teorema (5.14) de [15] e, em especial a convergência das transformadas de Laplace da função densidade de estados, pode ser encontrada no Teorema (VI.1.1) de [4].

1.6 Organização

A presente dissertação se organiza da seguinte forma. No Capítulo 2, apresentamos resultados sobre formas quadráticas e mensurabilidade dos operadores aleatórios $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$, e então apresentamos a demonstração do Teorema (1.1).

No Capítulo 3, discutimos algumas propriedades espectrais dos operadores aleatórios, e para tanto, apresentamos alguns resultados sobre Álgebras de von Neumann. Concluímos o Capítulo 3 com as demonstrações dos Teoremas (1.2) e (1.3).

No Capítulo 4, discutimos alguns resultados sobre os núcleos integrais dos operadores aleatórios $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$. Esses resultados são utilizados na demonstração do princípio de não sentir a fronteira.

No Capítulo 5, demonstraremos o princípio de não sentir a fronteira.

Por fim, no Capítulo 6 apresentaremos, sem demonstrar, o Critério para Convergência de Pastur-Shubin e o Teorema Ergódico de Lindenstrauss, e então apresentamos a demonstração do Teorema (1.4).

2 Formas Quadráticas e Mensurabilidade

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados sobre formas quadráticas e mensurabilidade de operadores aleatórios; esses resultados são fundamentais na demonstração do Teorema (1.1).

Sejam $\langle v, w\rangle_\omega := g_\omega(x)(v, w)$ o produto interno no espaço tangente a X para todos $v, w \in T_xX$ e $f, h : \Omega \times X \to \mathbb{R}$, com $f(\omega, \cdot) = f_\omega \in L^2(X, vol_\omega)$ e $h(\omega, \cdot) = h_\omega \in L^2(X, vol_\omega)$. Para um aberto $D \subset X$ e para todo $\omega \in \Omega$, definimos as formas quadráticas

$$\widetilde{\mathcal{Q}}(-\Delta_\omega^D) : C_c^\infty(D) \times C_c^\infty(D) \to \mathbb{R}, \quad (f, h) \mapsto \int_D \langle \nabla f_\omega(x), \nabla h_\omega(x)\rangle_\omega \, \boldsymbol{d}vol_\omega(x)$$

e

$$\widetilde{\mathcal{Q}}(V_\omega^D) : C_c^\infty(D) \times C_c^\infty(D) \to \mathbb{R}, \quad (f, h) \mapsto \int_D f_\omega(x)V_\omega(x)h_\omega(x) \, \boldsymbol{d}vol_\omega(x).$$

Estas formas são fechadas, ou seja, seus gráficos são subespaços fechados de $C_c^\infty(D) \times C_c^\infty(D) \times \mathbb{R}$ e seus fechos $\mathcal{Q}(-\Delta_\omega^D)$ e $\mathcal{Q}(V_\omega^D)$, respectivamente, definem operadores auto-adjuntos e não-negativos $-\Delta_\omega^D$ e V_ω. Pelo Teorema (A.3), temos então que a forma quadrática

$$\widetilde{\mathcal{Q}}(H_\omega^D) : C_c^\infty(D) \times C_c^\infty(D) \to \mathbb{R},$$
$$(f, h) \mapsto \int_D \langle \nabla f_\omega(x), \nabla h_\omega(x)\rangle_\omega \, \boldsymbol{d}vol_\omega(x) + \int_D f_\omega(x)V_\omega(x)h_\omega(x) \, \boldsymbol{d}vol_\omega(x),$$

é fechada e seu fecho $\mathcal{Q}(H_\omega^D)$ define um operador auto-adjunto e não-negativo H_ω^D, onde $\mathcal{Q}(H_\omega^D)$ é soma das formas $\mathcal{Q}(-\Delta_\omega^D)$ e $\mathcal{Q}(V_\omega^D)$.

O único operador auto-adjunto associado a $\mathcal{Q}(H_\omega^D)$ é chamado *operador de Schrödinger com condição de fronteira de Dirichlet* [2]. Segue-se do Teorema (A.2) e do Corolário (A.2) que H_ω^D é a única extensão auto-adjunta (extensão de Friedrichs) da restrição $H_\omega^D|_{C_c^\infty(D)}$ [2]. Logo, para $f_\omega(x) \in C_c^\infty(D)$ e V_ω suave, temos que $H_\omega^D f_\omega(x) = -\Delta_\omega^D f_\omega(x) + V_\omega(x)f_\omega(x)$ para todo $\omega \in \Omega$.

Definição 2.1. *Uma família de operadores auto-adjuntos $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ onde para todo $\omega \in \Omega$, $dom(H_\omega)$ é um subespaço denso de $L^2(D, vol_\omega)$, é dita ser uma família mensurável de operadores se o mapa*

$$\omega \mapsto \langle f_\omega, F(H_\omega)f_\omega\rangle_\omega$$

for mensurável para toda função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ limitada e mensurável e para toda $f : \Omega \times D \to \mathbb{R}$ mensurável para todo $\omega \in \Omega$.

Lema 2.1. *Um operador de Schrödinger aleatório $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ será mensurável se, e somente se, o mapa*

$$\omega \mapsto \langle f_0, F(H_\omega) f_0\rangle_\omega \tag{2.1}$$

for mensurável para toda $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mensurável e limitada, e para toda $f_0 \in L^2(D, vol_0)$.

Demonstração. Temos que se a aplicação definida por (2.1) for mensurável, então o mapa $\omega \mapsto \langle h_\omega, F(H_\omega)h_\omega\rangle_\omega$ também o será, com $h(\omega, x) = \tilde{f}(\omega)f_0(x)$, $\tilde{f} \in L^2(\Omega, \mathbb{P})$ e $f_0 \in L^2(D, vol_0)$. Tais funções formam um conjunto total, i.e, $\overline{\text{span}A} = L^2(\Omega \times D, \mathbb{P} \circ vol)$ onde $A = \{h(\omega, x) = \tilde{f}(\omega)f_0(x) \mid \tilde{f} \in L^2(\Omega, \mathbb{P}), f_0 \in L^2(D, vol_0)\}$.

Agora, considere $h : \Omega \times D \to \mathbb{R}$ mensurável tal que $h(\omega, \cdot) \in L^2(D, vol_\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$. Então, existe $h_n(\omega, x) := \chi_{h,n}(\omega)h(\omega, x)$ está em $L^2(\Omega \times D, \mathbb{P} \circ vol)$ onde $\chi_{h,n}$ é a função característica do conjunto $\{\omega \in \Omega \mid ||h(\omega)||_{L^2(D,vol_\omega)} \leqslant n\}$. Uma vez que $\chi_{h,n} \to 1$ pontualmente em Ω quando $n \to \infty$, temos que

$$\langle h_n(\omega, x), F(H_\omega)h_n(\omega, x)\rangle_\omega \to \langle h(\omega, x), F(H_\omega)h(\omega, x)\rangle_\omega,$$

mostrando que $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ é uma família mensurável de operadores e isso encerra a demonstração. $\square$

Proposição 2.1. *Seja $\{A_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ uma família não-negativa densamente definida de operadores auto-adjuntos em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Seja $\tilde{\Sigma} = \overline{\bigcup_\omega \sigma(A_\omega)}$ e denote por $\boldsymbol{F}_i$ a seguintes classes de funções:*

1. $\boldsymbol{F}_1 = \{\chi_{(-\infty,\lambda)} \mid \lambda \geqslant 0\}$;
2. $\boldsymbol{F}_2 = \{x \mapsto e^{itx} \mid t \in \mathbb{R}\}$;
3. $\boldsymbol{F}_3 = \{x \mapsto e^{-tx} \mid t \geqslant 0\}$;
4. $\boldsymbol{F}_4 = \{x \mapsto (z - x)^{-1} \mid z \in \mathbb{C}\backslash\tilde{\Sigma}\}$;
5. $\boldsymbol{F}_5 = \{x \mapsto (z_0 - x)^{-1}\}$ *para* $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\tilde{\Sigma}$ *fixo;*
6. $\boldsymbol{F}_6 = C_b = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\}$ *tal que* f *é limitada e contínua;*
7. $\boldsymbol{F}_7 = L^\infty = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\}$ *tal que* f *é limitada e mensurável.*

Então, as seguintes propriedades são equivalentes:

$$(\boldsymbol{F}_i) \qquad \omega \mapsto \langle f, F(A_\omega)h\rangle_{\mathcal{H}}$$

é mensurável para todas $f, h \in \mathcal{H}$ e $F \in \boldsymbol{F}_i$ onde $i = 1, \cdots 7$.

Demonstração. (5) $\Rightarrow$ (4). Assuma que $\mathcal{Z} := \{z \in \mathbb{C}\backslash\tilde{\Sigma} \mid \omega \mapsto (z - H_\omega)^{-1}\}$, com $\tau_{\mathbb{C}\backslash\tilde{\Sigma}}$ a topologia gerada por abertos de $\mathbb{C}\backslash\tilde{\Sigma}$. Por $\mathbf{F}_4$, sabemos que $\mathcal{Z}$ é não vazio. Seja (z_n) uma sequência com $z_n \in \mathcal{Z}$, tal que $z_n \to z \in \mathbb{C}\backslash\tilde{\Sigma}$, em particular, o resolvente R_n é um operador limitado. Pela primeira identidade dos resolventes, para toda $\tilde{f} \in \mathcal{H}$, temos que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} ||R_z(H_\omega)\tilde{f} - R_{z_n}(H_\omega)\tilde{f}|| &= \lim_{n\to\infty} ||(z - z_n)R_z(H_\omega)R_{z_n}(H_\omega)\tilde{f}|| \\ &= \lim_{n\to\infty} |z - z_n| \; ||R_z(H_\omega)R_{z_n}(H_\omega)\tilde{f}|| = 0,\end{aligned}$$

e assim, $\omega \mapsto (z - H_\omega)^{-1}$ é fracamente mensurável, ou seja, $\omega \mapsto \langle\tilde{h}, R_z(H_\omega)\tilde{f}\rangle_\omega$ é mensurável, pois o limite de uma sequência de funções mensuráveis é uma função mensurável (vide Teorema (A.25) para detalhes). Então,

$$\langle\tilde{h}, R_{z_n}(H_\omega)\tilde{f}\rangle_\omega \to \langle\tilde{h}, R_z(H_\omega)\tilde{f}\rangle_\omega \;\forall\, \omega \in \Omega, \;\forall\, \tilde{h}, \tilde{f} \in \mathcal{H}$$

e isso mostra que $\mathcal{Z}$ é fechado. Agora, seja $z \in \mathcal{Z}$ e denote por $d(z, \tilde{\Sigma}) =: \delta$ a distância de z a $\tilde{\Sigma}$; mostremos que $\forall\, \tilde{z} \in B_\delta(z)$, o mapa $\omega \mapsto (\tilde{z} - H_\omega)^{-1}$ é fracamente mensurável. Pelo Teorema (A.6), para todo $\tilde{z} \in B_\delta(z)$, vale a identidade

$$R_{\tilde{z}}(H_\omega) = \sum_{j\geqslant 0} (\tilde{z} - z)^j R_z(H_\omega)^{j+1},$$

sendo $R_{\tilde{z}}(H_\omega)$ um operador limitado. Segue que

$$\langle\tilde{h}, R_{\tilde{z}}(H_\omega)\tilde{f}\rangle_\omega = \sum_{j\geqslant 0} (\tilde{z} - z)^j \langle\tilde{h}, R_z(H_\omega)^{j+1}(H_\omega)\tilde{f}\rangle_\omega.$$

Uma série convergente de funções mensuráveis é uma função mensurável (vide Teorema (A.25) para detalhes); logo, para todo $\tilde{z} \in B_\delta(z)$ e para todas $\tilde{h}, \tilde{f} \in \mathcal{H}$, o mapa $\omega \mapsto \langle\tilde{h}, R_{\tilde{z}}(H_\omega)\tilde{f}\rangle_\omega$ é mensurável. Assim, $\mathbb{C}\backslash\tilde{\Sigma}$ é conexo, o que implica $\mathcal{Z} = \mathbb{C}\backslash\tilde{\Sigma}$ e isso mostra que (5) $\Rightarrow$ (4).

(4) $\Rightarrow$ (5). ($\mathbf{F}_5$) é simplesmente a restrição de ($\mathbf{F}_4$) para um $z_0 \in \mathcal{Z}$ fixo.

(7) $\Rightarrow$ (6). Sabemos que toda função contínua é mensurável. Logo, temos que $\mathbf{F}_6 \subset \mathbf{F}_7$. Seja p uma propriedade de $\mathbf{F}_7$. Uma vez que p vale para toda $f \in \mathbf{F}_7$, segue que p vale para toda $f \in \mathbf{F}_6 \subset \mathbf{F}_7$, e isso mostra que (7) $\Rightarrow$ (6).

(6) $\Rightarrow$ (3). Para $x \geqslant 0$ e $t \geqslant 0$ temos que $|e^{-tx}| \leqslant 1$. Logo, o mapa $x \mapsto e^{-tx}$ é claramente limitado e contínuo, e isso mostra que (6) $\Rightarrow$ (3).

(6) $\Rightarrow$ (1). Podemos aproximar pontualmente qualquer função $\chi_{(-\infty,\lambda)}$ por uma sequência monótona crescente de funções F_n não-negativas e limitada com $n \in \mathbb{N}$; por exemplo, basta tomar

$$F_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leqslant \lambda - \frac{1}{n} \\ n\lambda - nx, & \text{se } \lambda - \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \lambda \\ 0, & \text{se } \lambda \leqslant x \end{cases}.$$

Pelo Corolário (A.3), temos que

$$\langle f, E^{H_\omega}(F_n)h\rangle = \langle f, F_n(H_\omega)h\rangle = \int_{\sigma(H_\omega)} F_n(H_\omega)\ d\mu_{f,h}^{H_\omega},$$

para todas $f, h \in dom(F_n(H_\omega)) = \mathcal{H}$ em que E^{H_ω} é a resolução da identidade associada a H_ω e $\mu_{f,h}^{H_\omega}$ é a medida espectral associada a f, h. Pelo Teorema da Convergência Monótona, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\sigma(H_\omega)} F_n(H_\omega)\ d\mu_{f,h}^{H_\omega} = \int_{\sigma(H_\omega)} \chi_{(-\infty,\lambda)}(H_\omega)\ d\mu_{f,h}^{H_\omega} = \langle f, E^{H_\omega}(-\infty,\lambda)h\rangle.$$

Por hipótese, para todo $n \in \mathbb{N}$, o mapa $\omega \mapsto \langle f, F_n(H_\omega)h\rangle$ é mensurável para todas $f, h \in \mathcal{H}$. Logo, $\langle f, F_n(H_\omega)h\rangle \to \langle f, E^{H_\omega}(-\infty,\lambda)h\rangle$, uma vez que o limite pontual de uma sequência de funções mensuráveis é uma função mensurável para todas $f, h \in \mathcal{H}$, e isso mostra que (6) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (7). Como toda $f \in \mathbf{F}_7$ mensurável e limitada é o limite pontual de uma sequência de funções simples (vide Lema (A.5) para detalhes), usando o mesmo argumento de (6) $\Rightarrow$ (1), concluímos que (1) $\Rightarrow$ (7).

(1) $\Rightarrow$ (2). Seja $E^{H_\omega}(\Lambda)$ a resolução da identidade para H_ω. Para cada $\omega \in \Omega$, $f, h \in dom(F_t(H_\omega))$ e $t \in \mathbb{R}$, segue-se pelo Corolário (A.3) que

$$\begin{aligned}\langle f, E^{H_\omega}(F_t)h\rangle &= \langle f, F_t(H_\omega)h\rangle \\ &= \langle f, e^{itH_\omega}h\rangle = \int_{\sigma(H_\omega)} e^{it\lambda}\ d\langle f, E^{H_\omega}(\lambda)h\rangle \\ &= \int_{\sigma(H_\omega)} e^{it\lambda} d\mu_{f,h}^{H_\omega}(\lambda). \qquad (2.2)\end{aligned}$$

Pelo Lema (A.5) sabemos que toda função não-negativa e boreliana é o limite pontual de uma sequência monótona não decrescente de funções simples mensuráveis e não-negativas. Então podemos aproximar o lado direito de (2.2) por uma sequência de funções simples e isso mostra (1) $\Rightarrow$ (2).

(1) $\Rightarrow$ (3) É o mesmo argumento de (1) $\Rightarrow$ (2).

(2) $\Rightarrow$ (4). Seja $z \in \mathbb{C}$ com Im $z > 0$. Para $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$\frac{1}{x-z} = -i\int_0^\infty e^{isz}e^{-isx}ds;$$

então, para todas $f, h \in \mathcal{H}$, segue-se do Teorema de Fubini e do Lema (A.1) (note que as funções envolvidas são integráveis) que

$$\begin{aligned}\langle f, R_z(H_\omega)h\rangle_\omega &= \int_{\sigma(H_\omega)} \frac{1}{x-z}\, d\mu_{f,h}^{H_\omega}(x)\\ &= \int_{\sigma(H_\omega)} \left(-i\int_0^\infty e^{isz}e^{-isx}ds\right)\, d\mu_{f,h}^{H_\omega}(x)\\ &\overset{\text{Fubini}}{=} -i\int_0^\infty e^{isz}\left(\int_{\sigma(H_\omega)} e^{-isx}\, d\mu_{f,h}^{H_\omega}(x)\right)ds\\ &= -i\int_0^\infty e^{isz}\langle f, e^{-isH_\omega}h\rangle_\omega\, ds = \left\langle f, \left(-i\int_0^\infty e^{isz}e^{-isH_\omega}ds\right)h\right\rangle,\end{aligned}$$

donde

$$R_z(H_\omega) = -i\int_0^\infty e^{isz}e^{-isH_\omega}ds$$

para todo $\omega \in \Omega$ e isso mostra (2) $\Rightarrow$ (4) (análogo para Im $z < 0$, vide Proposição (A.8) para detalhes).

(4) $\Rightarrow$ (1). Assumamos a existência de números reais a e b fixos tais que $-\infty < a < b < +\infty$, e para cada $\alpha > 0$ definimos a função $F_{a,b,\alpha}$ por:

$$F_{a,b,\alpha}(\lambda) = \frac{1}{2i\pi}\int_a^b \left(\frac{1}{t-i\alpha-\lambda} - \frac{1}{t+i\alpha-\lambda}\right)dt.$$

Se $\alpha \to 0$, então $F_{a,b,\alpha}$ converge para 0, se $\lambda \notin (a,b)$, para 1/2, se $\lambda = a$ ou $\lambda = b$, e para 1 se $\lambda \in (a,b)$. Consequentemente, $\lim\limits_{\alpha\to 0} F_{a-\xi,b+\xi,\alpha}(\lambda)$ converge monotonicamente para a função característica do intervalo (a,b) quando $\xi \to 0$. Já que $F_{a,b,\alpha}(\lambda)$ é uniformemente limitado para $\alpha \to 0^+$, usando o cálculo funcional para operadores auto-adjuntos, temos que

$$\langle E^{H_\omega}(a,b)f, h\rangle_\omega = \lim_{\xi\to 0^+}\lim_{\alpha\to 0^+}\int_{a-\xi}^{a+\xi} \langle f, (R_{t-i\alpha}(H_\omega) - R_{t+i\alpha}(H_\omega))h\rangle_\omega\, dt, \tag{2.3}$$

para todos $f, h \in \mathcal{H}$ e $\omega \in \Omega$. Assim, de (2.3) (Fórmula de Stone[1]), concluímos a mensurabilidade de

$$\omega \to E^{H_\omega}(\Lambda),$$

onde $\Lambda = (a,b)$, e isso mostra que (4) $\Rightarrow$ (1). □

Agora, vamos provar que os operadores aleatórios $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ introduzidos no Capítulo (1) são mensuráveis no sentido da Definição (2.1). O primeiro passo é fazer os operadores $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ agirem sobre o mesmo espaço de Hilbert por meio de transformações unitárias dadas pela identidade (1.2). Além disso, devemos mostrar a compatibilidade entre as formas associadas. Para os próximos resultados, usaremos o fato de que $f_\omega \equiv f_0$ (vide Seção (1.2) da Introdução).

[1] Vide [5], [22] e [23] para detalhes.

Proposição 2.2. *Seja A_ω um operador auto-adjunto*

$$A_\omega : (S_\omega)^{-1}\mathcal{D}(-\Delta_\omega^D) \subset L^2(D, vol_0) \to L^2(D, vol_0)$$

tal que $A_\omega := -(S_\omega)^{-1}\Delta_\omega^D S_\omega$, com $\mathcal{D}(-\Delta_\omega^D)$ o domínio do operador Laplaciano, um subconjunto denso de $L^2(D, vol_\omega)$. Sejam $\mathcal{Q}_0$ e $\mathcal{Q}_\omega$ as formas quadráticas associadas aos operadores $-\Delta_0^D$ e A_ω, respectivamente. Então, existe uma constante C_A tal que

$$C_A^{-1}(\mathcal{Q}_0(f,f) + ||f||_0^2) \leqslant \mathcal{Q}_\omega(f,f) + ||f||_0^2 \leqslant C_A(\mathcal{Q}_0(f,f) + ||f||_0^2), \tag{2.4}$$

para toda $f \in C_c^\infty(D)$ e todo $\omega \in \Omega$. Além disso, existe um subconjunto denso $\mathcal{D} \subset L^2(D, vol_0)$ tal que

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}(A_\omega^{1/2}) = \mathcal{D}((-\Delta_0^D)^{1/2}),$$

para todo $\omega \in \Omega$, e (2.4) vale para toda $f \in \mathcal{D}$.

Demonstração. Para $f \in C_c^\infty(D)$, temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_\omega(f,f) &= -\langle f, (S_\omega^{-1})\Delta_\omega^D S_\omega f\rangle_\omega \overset{S_\omega^{-1}=S_\omega^*}{=} -\langle S_\omega f, \Delta_\omega S_\omega f\rangle_\omega \\
&= -\int \overline{S_\omega f(x)}\Delta_\omega S_\omega f(x)\ \boldsymbol{d}vol_\omega(x) \\
&= -\int \overline{\rho_\omega^{1/2}(x)f(x)}\Delta_\omega(\rho_\omega^{1/2}(x)f(x))\ \boldsymbol{d}vol_\omega(x) \\
&= -\int \rho_\omega^{1/2}(x)f(x)\Delta_\omega(\rho_\omega^{1/2}(x)f(x))\ \boldsymbol{d}vol_\omega(x),
\end{aligned}$$

já que $f(x)$ e $\rho(x)$ são reais. Por integração por partes, segue-se que

$$\mathcal{Q}_\omega(f,f) = \int |\nabla_\omega(\rho_\omega^{1/2}(x)f(x))|_\omega^2\ \boldsymbol{d}vol_\omega(x),$$

onde o termo de fronteira é zero por condição de Dirichlet. Então, temos que

$$\mathcal{Q}_\omega(f,f) = \int |\rho_\omega^{1/2}(x)\nabla_\omega f(x) + f(x)\nabla_\omega\rho_\omega^{1/2}(x)|_\omega^2\ \boldsymbol{d}vol_\omega(x).$$

Pela desigualdade triangular, temos:

$$\begin{aligned}
&|\rho_\omega^{1/2}(x)\nabla_\omega f(x) + f(x)\nabla_\omega\rho_\omega^{1/2}(x)|_\omega^2 \\
&\qquad \leqslant |\rho_\omega^{1/2}(x)\nabla_\omega f(x)|_\omega^2 + 2\ |\rho_\omega^{1/2}(x)\nabla_\omega f(x)|_\omega\ |f(x)\nabla_\omega\rho_\omega^{1/2}(x)|_\omega + |f(x)\nabla_\omega\rho_\omega^{1/2}(x)|_\omega^2 \\
&\qquad \overset{0\leqslant(a-b)^2}{\leqslant} 2(|\rho_\omega^{1/2}(x)\nabla_\omega f(x)|_\omega^2 + |f(x)\nabla_\omega\rho_\omega^{1/2}(x)|_\omega^2),
\end{aligned}$$

o que implica

$$\mathcal{Q}_\omega(f,f) \leqslant 2\int (|\rho_\omega^{1/2}(x)\nabla_\omega f(x)|_\omega^2 + |f(x)\nabla_\omega\rho_\omega^{1/2}(x)|_\omega^2)\ \boldsymbol{d}vol_\omega(x).$$

Para avaliar $||\rho_\omega^{1/2}(x)\nabla_\omega f(x)||_\omega^2 = \int |\rho_\omega^{1/2}(x)\nabla_\omega f(x)|_\omega^2 \ \boldsymbol{dvol}_\omega(x)$, usaremos a relação (1.4), bem como o fato que $\mathcal{A}\mathcal{A}^T = \mathcal{A}^T\mathcal{A}$ (o que se segue do Teorema (A.22), já que $\mathcal{A}$ é uma matriz normal). Assim, para todo $\omega \in \Omega$, temos que

$$\begin{aligned} C_g^{-1}|\nabla_\omega f(x)|_\omega^2 &\leqslant \langle \nabla_\omega f(x), \mathcal{A}\mathcal{A}^T\nabla_\omega f(x)\rangle_\omega = \langle \mathcal{A}\nabla_\omega f(x), \mathcal{A}\nabla_\omega f(x)\rangle_\omega \\ &= \langle \nabla_0 f(x), \nabla_0 f(x)\rangle_0 = g_0(\nabla_0 f(x), \nabla_0 f(x)) = |\nabla_0 f(x)|_0^2 \\ &= \langle \nabla_\omega f(x), \mathcal{A}\mathcal{A}^T\nabla_\omega f(x)\rangle_\omega \leqslant C_g|\nabla_\omega f(x)|_\omega^2, \end{aligned}$$

e portanto,

$$C_g^{-1}|\nabla_\omega f(x)|_\omega^2 \leqslant |\nabla_0 f(x)|_0^2 \leqslant C_g|\nabla_\omega f(x)|_\omega^2. \tag{2.5}$$

Logo,

$$\begin{aligned} ||\rho_\omega^{1/2}(x)\nabla_\omega f(x)||_\omega^2 &= \int |\rho_\omega^{1/2}(x)\nabla_\omega f(x)|_\omega^2 \ \boldsymbol{dvol}_\omega(x) \\ &= \int_D |\nabla_\omega f(x)|_\omega^2\rho_\omega(x) \ \boldsymbol{dvol}_\omega(x) = \int_D |\nabla_\omega f(x)|_\omega^2 \ \boldsymbol{dvol}_0(x) \\ &\overset{\text{por (2.5)}}{\leqslant} C_g\int_D |\nabla_0 f(x)|_0^2 \ \boldsymbol{dvol}_0(x) = C_g\mathcal{Q}_0(f,f). \end{aligned}$$

Para estimar $||f(x)\nabla_\omega\rho_\omega^{1/2}(x)||_\omega^2 = \int |f(x)\nabla_\omega\rho_\omega^{1/2}(x)|_\omega^2 \ \boldsymbol{dvol}_\omega(x)$, usaremos as relações (1.5), (2.5) e a propriedade (3) da Definição (1.3). Por (1.5), temos que $C_g^{-n/2} \leqslant \rho_\omega(x) \leqslant C_g^{n/2} \Rightarrow 1 \leqslant C_g^{n/2}\rho_\omega(x) \leqslant C_g$, donde $1 \leqslant C_g$, e assim $1 \leqslant C_g^{n/2}$. Logo,

$$\begin{aligned} ||f(x)\nabla_\omega\rho_\omega^{1/2}(x)||_\omega^2 &= \int_D \overline{f(x)\nabla_\omega\rho_\omega^{1/2}(x)}f(x)\nabla_\omega\rho_\omega^{1/2}(x) \ \boldsymbol{dvol}_\omega(x) \\ &= \int_D f^2(x)|\nabla_\omega\rho_\omega(x)|^2 \ \boldsymbol{dvol}_\omega(x). \end{aligned}$$

Por (1.5), segue-se que

$$\int_D f^2(x)|\nabla_\omega\rho_\omega(x)|^2 \ \boldsymbol{dvol}_\omega(x) \leqslant C_g^{n/2}\int_D f^2(x)|\nabla_\omega\rho_\omega(x)|_\omega^2 \ \boldsymbol{dvol}_\omega(x),$$

e por (2.5), temos que

$$C_g^{n/2}\int_D f^2(x)|\nabla_\omega\rho_\omega(x)|_\omega^2 \ \boldsymbol{dvol}_\omega(x) \leqslant C_g^{1+n/2}\int_D f^2(x)|\nabla_0\rho_\omega(x)|_0^2 \ \boldsymbol{dvol}_\omega(x).$$

Multiplicando o integrando da segunda integral acima por $\frac{\rho_\omega(x)}{\rho_\omega(x)}$, temos que

$$C_g^{1+n/2}\int_D f^2(x)|\nabla_0\rho_\omega(x)|_0^2 \ \boldsymbol{dvol}_\omega(x) = C_g^{1+n/2}\int_D \frac{f^2(x)|\nabla_0\rho_\omega(x)|_0^2}{\rho_\omega(x)}\boldsymbol{dvol}_0(x)$$

e pela propriedade (3) da Definição (1.3), segue-se que

$$C_g^{1+n/2}\int_D \frac{f^2(x)|\nabla_0\rho_\omega(x)|_0^2}{\rho_\omega(x)}\boldsymbol{dvol}_0(x) \leqslant C_g^{1+n/2}C_\rho^2\int_D \frac{f^2(x)}{\rho_\omega(x)}\boldsymbol{dvol}_0(x).$$

Agora, novamente por (1.5),

$$C_g^{1+n/2}C_\rho^2\int_D \frac{f^2(x)}{\rho_\omega(x)}\boldsymbol{d}vol_0(x) \overset{\rho^{-1}\leqslant C_g^{n/2}}{\leqslant} C_g^{1+n}C_\rho^2\int_D f^2(x)\ \boldsymbol{d}vol_0(x) = C_g^{1+n}C_\rho^2||f||_0^2.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_\omega(f,f) = -\langle S_\omega f, \Delta_\omega S_\omega f\rangle_\omega &\leqslant 2\int (|\rho_\omega^{1/2}(x)\nabla_\omega f(x)|_\omega^2 + |f(x)\nabla_\omega \rho_\omega^{1/2}(x)|_\omega^2)\ \boldsymbol{d}vol_\omega(x)\\ &\leqslant C_g\mathcal{Q}_0(f,f) + C_g^{1+n/2}C_\rho^2||f||_0^2,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_\omega(f,f)+||f||_0^2 &\leqslant C_g\mathcal{Q}_0(f,f) + (C_g^{1+n/2}C_\rho^2+1)||f||_0^2\\ &\leqslant (C_g^{1+n/2}C_\rho^2+1)(\mathcal{Q}_0(f,f)+||f||_0^2) = C_A(\mathcal{Q}_0(f,f)+||f||_0^2).\end{aligned}$$

Pela propriedade (2) da Definição (1.3), o modelo exibe uma simetria em ω. Mais precisamente, dada uma forma quadrática, temos associada a esta forma um produto interno dado pelo tensor métrico. Novamente, pela propriedade (2) da Definição (1.3), estas formas vão obedecer a uma relação equivalente às desigualdades do tensor métrico, mas no caso das formas, a constante será C_A. Assim, explicitamente temos que

$$C_A^{-1}(\mathcal{Q}_0(f,f)+||f||_0^2) \leqslant \mathcal{Q}_\omega(f,f)+||f||_0^2$$

para toda $f\in C_c^\infty(D)$, e (2.4) está provada.

Resta mostrar que $\mathcal{D} = dom(\mathcal{Q}_0) = dom(\mathcal{Q}_\omega)$. Segue da Proposição (A.3) e Lema (A.2) que $C_c^\infty(D)$ é um cerne para $-\Delta_0^D$. Pelo Teorema (A.7) e da discussão final da página 104 de [5], temos que $dom(-\Delta_0^D)$ é denso em $dom(\mathcal{Q}_0)$, e $dom(-\Delta_0^D)$ é um cerne para $\mathcal{Q}_0$. Pela definição de cerne e pelo fato dos cernes coincidirem, temos que

$$\mathcal{D} = dom(\mathcal{Q}_0) = dom(\mathcal{Q}_\omega)$$

é denso em $L^2(D, vol_0)$ e isso encerra a demonstração. □

Restam apenas alguns ingredientes para demonstrar o Teorema (1.1).

Proposição 2.3. *(Proposição (1.2.6) de [3]) Sejam $\mathcal{Q}_\omega$, com $\omega\in\Omega$, e $\mathcal{Q}_0$ formas quadráticas não-negativas fechadas com as seguintes propriedades:*

1. *$\mathcal{Q}_\omega$, com $\omega\in\Omega$, e $\mathcal{Q}_0$ estão definidos para o mesmo subespaço denso $\mathcal{D}$ de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$;*

2. *existe uma constante $C >$ tal que*

$$C^{-1}(\mathcal{Q}_0(f,f)+||f||_0^2) \leqslant \mathcal{Q}_\omega(f,f)+||f||_0^2 \leqslant C(\mathcal{Q}_0(f,f)+||f||_0^2);$$

3. *o mapa* $\omega \to \mathcal{Q}_\omega(f,f)$ *é mensurável para toda* $f \in \mathcal{D}$.

Então, a família $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ *de operadores auto-adjuntos satisfaz as propriedades equivalentes da Proposição (2.1).*

Demonstração. Seja $\mathfrak{H}_0 = \mathcal{Q}_0(\cdot,\cdot) + \langle\cdot,\cdot\rangle_0$ uma forma quadrática associada a $\mathcal{Q}_0$. Por suposição, $\mathcal{D}$ equipado com o produto interno $\mathfrak{H}_0(\cdot,\cdot)$ é um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. A dupla desigualdade implica que fixado $E \geqslant 1$, a forma definida por $(\mathfrak{H}_\omega + E)(f,h)$ é limitada e positiva definida no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Com efeito, temos que

$$Q_\omega(f,f) + ||f||^2 \geqslant C\mathfrak{H}_0(f,f) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$Q_\omega(f,f) + E||f||^2 + ||f||^2 - ||f||^2 \geqslant C\mathfrak{H}_0(f,f) + (E-1)||f||^2 \geqslant 0$$

se, e somente se, $E \geqslant 1$. Agora, o Teorema de Representação de Riesz nos diz que existe um operador inverso limitado A_ω em $(\mathcal{D}, \mathfrak{H}_0(\cdot,\cdot))$ tal que

$$(\mathfrak{H}_\omega + E)(f,h) = \mathfrak{H}_0(A_\omega f, h), \tag{2.6}$$

para todas $f,h \in \mathcal{D}$. A suposição de mensurabilidade implica que $\omega \mapsto A_\omega \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$ é mensurável, onde $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ é o espaço dos operadores limitados definidos em $\mathcal{H}$. Pela Proposição (2.1), o mapa $\omega \mapsto A_\omega^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$ é mensurável. Temos, pela identidade (2.6), que

$$\begin{aligned}(\mathfrak{H}_\omega + E)(f,h) &= \mathfrak{H}_0(A_\omega f, h)\\ \langle (H_\omega + E)f, h\rangle &= \langle K_\omega A_\omega f, h\rangle,\end{aligned}$$

donde

$$(H_\omega + E)^{-1} = A_\omega^{-1} K_\omega^{-1}$$

onde K é o operador associado à forma $\mathfrak{H}_0$. Logo, temos que para todo $E \geqslant 1$, o mapa $\omega \mapsto (H_\omega + E)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$ é mensurável. Assim, a mensurabilidade de $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ se segue da Proposição (2.1) (note que $(H_\omega + E)^{-1}$ é o resolvente de H_ω em $-E$, e que todo $-E \leqslant -1$ pertence ao conjunto resolvente de H_ω) e isso encerra a demonstração. □

Proposição 2.4. *A família de operadores* $\{A_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ *da Proposição (2.2) é uma família mensurável de operadores.*

Demonstração. Mostremos que $\{A_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ satisfaz as propriedades da Proposição (2.3). As propriedades (1) e (2) seguem-se da Proposição (2.2). Toda $f \in C_c^\infty(D)$ pertence a $L^1_{loc}(D)$, logo $Q_\omega(f,f)$ está bem definida para toda $f \in C_c^\infty$. Assim, a propriedade (3) é obvia para $f \in C_c^\infty$ e segue por convergência em norma para toda $f \in \mathcal{D} = C_c^\infty(D)$, já que $C_c^\infty(D)$ é denso em $L^2(D, \mathbb{P} \circ vol_0)$, novamente pela Proposição (2.2), e isso encerra a demonstração. □

Proposição 2.5. *Sejam A_ω e B_ω operadores mensuráveis auto-adjuntos e suponha que $A_\omega + B_\omega$ é essencialmente auto-adjunto em $dom(A_\omega) \cap dom(B_\omega)$. Então, $A_\omega + B_\omega$ é mensurável.*

Demonstração. Usando a fórmula do produto de Trotter (vide Teorema (A.14) para detalhes), temos que

$$e^{i(A_\omega + B_\omega)t} = \mathrm{s} - \lim_{n\to\infty} \left(e^{i\frac{t}{n}A_\omega} e^{i\frac{t}{n}B_\omega} \right)^n.$$

O lado direito da igualdade acima é o limite de funções mensuráveis, logo também é uma função mensurável. Assim, mostramos a propriedade ($\mathbf{F}_2$) da Proposição (2.1), e pela mesma proposição, o resultado se segue. □

Demonstração do Teorema (1.1). Para $n \in \mathbb{N}$ e $\omega \in \Omega$, defina a função limitada $V_{\omega,n} : X \to \mathbb{R}$ por

$$V_{\omega,n} := \min\{n, V_\omega(x)\}.$$

Assim, o operador soma

$$A_{\omega,n} := A_\omega + V_{\omega,n}$$

está bem definido, onde A_ω é como na Proposição (2.2) e $D = X$. Além disso, pela Proposição (2.5) e pela Proposição (2.4), a família de operadores $A_{\omega,n}$ é mensurável. Em particular, os semigrupos correspondentes $\omega \mapsto e^{-tA_{\omega,n}}$, para todo $t > 0$ são, pela Proposição (2.1) item ($\mathbf{F}_3$), fracamente mensuráveis. As formas de $A_{\omega,n}$ convergem monotonicamente para a forma de $A_{\omega,\infty} = A_\omega + V_\omega$.

Pelos Teorema (A.8) e Proposição (A.5), temos que os semigrupos de $A_{\omega,n}$ convergem fracamente para o semigrupo $\omega \mapsto e^{-tA_{\omega,\infty}}$ quando $n \to \infty$ o que implica a mensurabilidade da família $A_{\omega,\infty}$.

Finalmente, como S_ω é o operador multiplicação por $\rho_\omega^{1/2}(x)$ e o mapa $(\omega, x) \mapsto \rho_\omega(x)$ é mensurável, isto implica a mensurabilidade da família $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ com $H_\omega = S_\omega A_{\omega,\infty} S_\omega^{-1}$ e isso encerra a demonstração. □

Observação 2.1. *O mesmo argumento mostra a mensurabilidade da família de operadores $\{H_\omega^D\}_{\omega\in\Omega}$. Assim, concluímos que a família de operadores de Schrödinger aleatórios $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ é uma família mensurável de operadores.*

3 Propriedades Espectrais de Operadores Aleatórios

Neste capítulo, apresentaremos as demonstrações dos Teoremas (1.2) e Teorema (1.3). Para tanto, necessitaremos de alguns resultados envolvendo álgebras de von Neumann.

3.1 Operadores Aleatórios e Álgebras de von Neumann

Para iniciar nosso estudo sobre propriedades espectrais de operadores aleatórios, apresentamos algumas definições básicas a respeito de tais operadores. Em seguida, definimos o conceito de Álgebra de von Neumann, e demonstramos que algumas famílias de operadores aleatórios e limitados associadas a $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ constituem álgebras de von Neumann.

Definição 3.1. *Seja $(\Omega, B_\Omega, \mathbb{P})$ um espaço de probabilidade. $\mathcal{H}(\cdot)$ é chamado um* ***campo de espaços de Hilbert*** *sobre Ω se, para todo $\omega \in \Omega$, $\mathcal{H}(\omega)$ é um espaço de Hilbert. Se $f(\omega) \in \mathcal{H}(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$, então $f(\cdot)$ é chamado campo de vetores relativo a $\mathcal{H}(\cdot)$.*

Definição 3.2. *Um campo de espaços Hilbert $\mathcal{H}(\cdot)$ sobre um espaço de medida de Borel $(\Omega, B_\Omega, \mathbb{P})$ é dito ser mensurável se existir uma sequência $\{f_n(\cdot)\}$ de campos de vetores sobre $(\Omega, B_\Omega, \mathbb{P})$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. *A aplicação $\omega \to \langle f_n(\omega), f_m(\omega)\rangle_\omega$ é mensurável em $(\Omega, B_\Omega, \mathbb{P})$ com $n, m \in \mathbb{N}$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_\omega$ denota o produto interno em $\mathcal{H}(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$.*

2. *Para qualquer $\omega \in \Omega$, $\{f_n(\omega) \mid n \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto total de $\mathcal{H}(\omega)$ (em particular, cada $\mathcal{H}(\omega)$ é separável).*

Definição 3.3. *Seja $\mathcal{H}(\omega)$ um campo de espaços de Hilbert mensurável sobre um espaço de medida $(\Omega, B_\Omega, \mathbb{P})$. O espaço de Hilbert*

$$\mathcal{H} = \int_\Omega^\oplus \mathcal{H}(\omega)\ d\mathbb{P}(\omega)$$

é chamado ***integral direta*** *de $\mathcal{H}(\omega)$.*

Definição 3.4. *Um operador limitado A agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \int_{\Omega}^{\oplus} \mathcal{H}(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega)$ será decomponível por integral direta se, e somente se, existir uma função $A(\cdot) \in L^{\infty}(\Omega, \mathbb{P}; \mathcal{H})$ tal que para toda $f \in \mathcal{H}$,*

$$(Af)(\omega) = A(\omega)f(\omega).$$

Então, A será decomponível, e escreveremos

$$A = \int_{\Omega}^{\oplus} A(\omega)\ d\mathbb{P}(\omega).$$

*Os $A(\omega)$s são chamados de **fibras** de A.*

Definição 3.5. *Uma família de operadores limitados $\{A_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ tal que*

$$A_\omega : L^2(X, vol_\omega) \to L^2(X, vol_\omega)$$

*é chamada de **operador aleatório e limitado** se satisfizer as seguintes propriedades:*

1. *$\omega \mapsto \langle h_\omega, A_\omega f_\omega\rangle$ é mensurável para $f, h \in L^2(\Omega \times X, \mathbb{P} \circ vol)$;*
2. *Existe uma constante $C \geqslant 0$ tal que $||A_\omega|| \leqslant C$ para quase todo $\omega \in \Omega$;*
3. *Para todos $\omega \in \Omega$ e $\gamma \in \Gamma$, a condição de equivariância $A_\omega = U_{(\omega,\gamma)} A_{\gamma^{-1}\omega} U^*_{(\omega,\gamma)}$ é satisfeita.*

Observação 3.1. *Pela condição de equivariância e pela Proposição (2.1) segue-se que o resolvente, a resolução da identidade e o semigrupo associado a $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ são todos operadores aleatórios e limitados.*

Dois operadores aleatórios e limitados $\{A_\omega\}_\omega$ e $\{B_\omega\}_\omega$ são chamados de equivalentes, o que se denota por $\{A_\omega\}_\omega \sim \{B_\omega\}_\omega$, se $A_\omega = B_\omega$ $\mathbb{P}$-q.t. $\omega \in \Omega$. Cada classe de equivalência de operadores aleatórios e limitados do tipo $\{A_\omega\}_\omega$ dá origem a um operador limitado A agindo em $L^2(\Omega \times X, \mathbb{P} \circ vol)$ e definido por $(Af)(\omega, x) := A_\omega f_\omega(x)$. Isto permite identificar as classes de equivalência do operador $\{A_\omega\}_\omega$ com o operador limitado A.

Antes de prosseguirmos, recordemo-nos de algumas definições básicas a respeito das topologias em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Seja $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ o espaço dos operadores limitados agindo sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. O espaço $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ munido da norma de operadores $||A|| = \sup_{f\in\mathcal{H},\ f\neq 0} \frac{||Af||}{||f||}$ é um espaço de Banach. Essa norma define uma topologia, a chamada *topologia uniforme (ou usual)* de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ [10].

Seja a seguinte família de funções:

$$\mathfrak{W} = \{F_{f,h} : \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to \mathbb{C} \mid F_{f,h}(A) = \langle f, Ah \rangle \text{ com } f, h \in \mathcal{H}\}.$$

Assim, $\mathfrak{W}$ é a coleção de todas as funções que associam a cada operador limitado o número complexo $\langle f, Ah \rangle$. Cada função é assim indexada por um par de elementos de $\mathcal{H}$. Define-se a ***topologia operatorial fraca*** ou ***topologia fraca*** em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ como sendo a topologia mais fina para o qual toda função de $\mathfrak{W}$ é contínua [10]. Essa topologia é gerada pelos conjuntos

$$\{\mathfrak{A} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid \forall\, A, A' \in \mathfrak{A}, \text{ tem-se } |\langle f, Ah \rangle - \langle f, A'h \rangle| < r \text{ para algum } r > 0 \text{ e algum par } f, h \in \mathcal{H}\}.$$

Agora, seja a seguinte família de funções:

$$\mathcal{S} = \{F_f : \mathbb{L}(\mathbb{H}) \to \mathcal{H} \mid F_f(A) = Af \text{ com } f \in \mathcal{H}\}.$$

Assim, $\mathcal{S}$ é a coleção de todas as funções que associam a cada operador limitado o elemento $Af \in \mathcal{H}$. Cada função é assim indexada por um elemento de $\mathcal{H}$. Define-se a ***topologia operatorial forte*** ou ***topologia forte*** em $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ como sendo topologia mais fraca para o qual toda função de $\mathcal{S}$ é contínua [10]. Essa topologia é gerada pelos conjuntos

$$\{\mathfrak{A} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid \forall A, A' \in \mathfrak{A}, \text{ tem-se } ||Af - A'f|| < r \text{ para algum } r > 0 \text{ e algum } f \in \mathcal{H}.\}$$

Definição 3.6. *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ o espaço dos operadores limitados agindo sobre $\mathcal{H}$, e $\mathcal{N}$ um subconjunto de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. O* ***conjunto comutante*** *de $\mathcal{N}$, denotado por $\mathcal{N}'$, é o conjunto formado por todos os elementos que comutam com cada elemento de $\mathcal{N}$:*

$$\mathcal{N}' := \{b \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \mid ab = ba \quad \textit{para todo} \quad a \in \mathcal{L}(\mathcal{H})\}.$$

Segue-se da definição acima que $\mathcal{N}'' := (\mathcal{N}')'$ é o conjunto bicomutante de $\mathcal{N}$.

Definição 3.7. *Seja $\mathcal{N}$ uma álgebra*[1] *(espaço vetorial) sobre o corpo $\mathbb{C}$. Uma involução em $\mathcal{N}$ é uma aplicação $* : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ tal que*

1. $(A^*)^* = A$;
2. $(AB)^* = B^* A^*$;
3. $(\alpha A + B)^* = \overline{\alpha} A^* + B^*$;
4. *Se a álgebra possuir uma identidade* $\mathbf{I}^* = \mathbf{I}$;

para todos $A, B \in \mathcal{N}$ e todo $\alpha \in \mathbb{C}$. A^* é chamado de adjunto de A.

[1] Vide [10] para detalhes.

Uma álgebra que possua uma involução é dita ser uma álgebra involutiva ou $*$-álgebra.

Definição 3.8. *Uma $*$-subálgebra $\mathcal{N}$ de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ que contém o operador identidade $\mathbf{I}$ de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ e é fechada com respeito à topologia fraca é chamada de* ***Álgebra de von Neumann****.*

Teorema 3.1. *(Teorema do Bicomutante)*[2] *Seja $\mathcal{N} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ uma álgebra auto-adjunta e não degenerada. Então, são equivalentes as seguintes afirmações:*

1. $\mathcal{N} = \mathcal{N}''$.
2. $\mathcal{N}$ *é fracamente fechada.*
3. $\mathcal{N}$ *é fortemente fechada.*

Demonstração. Vide Teorema (38.24) de [10], Teorema (12.3) de [24] e Teorema (1.3.10) de [25] para detalhes. □

Segue-se do Teorema (3.1) que uma $*$-subálgebra $\mathcal{N} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ será uma álgebra de von Neumann se, e somente se, $\mathcal{N} = \mathcal{N}''$.

Proposição 3.1. *Seja $(\mathcal{N}_i)_{i \in I}$ uma família de álgebras de von Neumann. Então, $\mathcal{N} = \bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{N}_i$ é uma álgebra de von Neumann.*

Demonstração. Seja $\{\mathcal{N}_i \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}), i \in I\}$ uma família não vazia de subconjuntos de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Tem-se $\bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{N}_i \subset \mathcal{N}_j$ para todo $j \in I$. Logo, $\mathcal{N}_j' \subset \left(\bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{N}_i\right)'$ e, além disso, segue também que $\left(\bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{N}_i\right)'' \subset \mathcal{N}_j''$. Como isso vale para todo $j \in I$, segue que $\left(\bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{N}_i\right)'' \subset \bigcap\limits_{j\in I} \mathcal{N}_j''$. Logo, valem as seguintes relações de continência:

$$\bigcap_{i\in I} \mathcal{N}_i \subset \left(\bigcap_{i\in I} \mathcal{N}_i\right)'' \subset \bigcap_{i\in I} \mathcal{N}_i''. \tag{3.1}$$

Se $\{\mathcal{N}_i \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}), i \in I\}$ for uma família de $*$-subálgebra agindo em $\mathcal{H}$, segue-se que $\bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{N}_i$ é igualmente uma $*$-subálgebra de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Se $\{\mathcal{N}_i \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}), i \in I\}$ for uma família de álgebras de von Neumann agindo em $\mathcal{H}$, (ou seja, se $\mathcal{N}_i = \mathcal{N}_i''$ para todo $i \in I$), então $\bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{N}_i$ é igualmente uma família de álgebra de von Neumann agindo em $\mathcal{H}$, pois (3.1) garante-nos que $\bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{N}_i = \left(\bigcap\limits_{i\in I} \mathcal{N}_i\right)''$, e isso encerra a demonstração. □

---

[2] Devido a von Neumann.

Teorema 3.2. *O conjunto dos operadores aleatórios e limitados forma uma álgebra de von Neumann $\mathcal{N}$.*

Demonstração. Seja $\{A_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ uma família de operadores aleatórios tal que

$$A_\omega : L^2(X, vol_\omega) \to L^2(X, vol_\omega)$$

para todo $\omega \in \Omega$, com $(\omega, x) \mapsto (A_\omega f_\omega)(x)$ mensurável e $\omega \mapsto A_\omega f_\omega \in L^2(X, vol_\omega)$ para toda $f \in L^2(\Omega \times X, \mathbb{P} \circ vol)$, satisfazendo a condição de equivariância

$$A_\omega = U_{(\omega,\gamma)} A_{\gamma^{-1}\omega} U^*_{(\omega,\gamma)}. \tag{3.2}$$

Podemos associar A_ω a um operador A no espaço de Hilbert $L^2(\Omega \times X, \mathbb{P} \circ vol)$ pela lei $(Af)(\omega, x) \equiv (A_\omega f_\omega)(x)$. Agora, (3.2) implica

$$A\tilde{U}_\gamma = \tilde{U}_\gamma A, \tag{3.3}$$

onde $\tilde{U}_\gamma$ é um operador unitário agindo em $L^2(\Omega \times X, \mathbb{P} \circ vol)$ e definido por $(\tilde{U}_\gamma f)_\omega = f_{\gamma^{-1}\omega}(\gamma^{-1}x)$. Com efeito, para $f_\omega \in L^2(X, vol_\omega)$, temos que

$$\begin{aligned}
A\tilde{U}_\gamma f_\omega(x) &= A f_{\gamma^{-1}\omega}(\gamma^{-1}x) \\
&= A_{\gamma^{-1}\omega} f_{\gamma^{-1}\omega}(\gamma^{-1}x) \overset{\text{por (3.2)}}{=} U^*_{(\omega,\gamma)} A_\omega U_{(\omega,\gamma)} f_{\gamma^{-1}\omega}(\gamma^{-1}x) \\
&= U^*_{(\omega,\gamma)} A_\omega f_\omega(\gamma^{-2}x) = A_{\gamma^{-1}\omega} f_{\gamma^{-1}\omega}(\gamma^{-1}x) \\
&= \tilde{U}_\gamma A_\omega f_\omega(x) = \tilde{U}_\gamma A f_\omega(x).
\end{aligned}$$

Por outro lado, para um operador decomponível A temos que (3.3) implica (3.2) $\mathbb{P}$-q.t.p. Com efeito, temos que

$$\begin{aligned}
U_{(\omega,\gamma)} A_{\gamma^{-1}} U^*_{(\omega,\gamma)} f_\omega(\gamma^{-2}x) &= U_{(\omega,\gamma)} A_{\gamma^{-1}\omega} f_{\gamma^{-1}\omega}(\gamma^{-1}x) \\
&= U_{(\gamma,\omega)} \tilde{U}_\gamma A_\omega f_\omega(x) = U_{(\gamma,\omega)} \tilde{U}_\gamma A f_\omega(x) \\
&\overset{\text{por (3.3)}}{=} U_{(\gamma,\omega)} A\tilde{U}_\gamma f_\omega(x) = U_{(\gamma,\omega)} A f_{\gamma^{-1}\omega}(\gamma^{-1}x) \\
&= U_{(\gamma,\omega)} A_{\gamma^{-1}\omega} f_{\gamma^{-1}\omega}(\gamma^{-1}x) = A_\omega f_\omega(\gamma^{-2}x).
\end{aligned}$$

Sabe-se que um operador A agindo em $L^2(\Omega \times X)$ é decomponível, isto é, $A = \int_\Omega^\oplus A_\omega d\mathbb{P}(\omega)$ para uma família $\{A_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ se, e somente se, A comuta com o operador multiplicação $\mathcal{M}_{h\circ\pi}$, com $\pi : \Omega \times X \to \Omega$ e para toda $h \in L^\infty(\Omega, \mathbb{P})$ (vide Teorema (A.19) para detalhes). Resumindo estas considerações, concluímos que

$$\mathcal{N}(\Omega \times \Gamma, \Omega \times X) = \{\tilde{U}_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}' \cap \{\mathcal{M}_{h\circ\pi} \mid h \in L^\infty(\Omega, \mathbb{P})\}',$$

onde $'$ é o comutante do conjunto de operadores. Os conjuntos $\{\tilde{U}_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ e $\{\mathcal{M}_{h\circ\pi} \mid h \in L^\infty(\Omega, \mathbb{P})\}$ são fechados pela operação de tomada de adjunto. Conclui-se, pela Proposição (3.1) e pelo Teorema (3.1), que o conjunto dos operadores aleatórios e limitados forma uma álgebra de von Neumann e isso encerra a demonstração. □

Definição 3.9. *Seja $(\Omega \times \Gamma)$ um espaço com medida de Haar m_L. Uma medida $\mathbb{P}$ no conjunto (Ω, B_Ω) será chamada m_L-invariante se*

$$\mathbb{P} \circ m_L = (\mathbb{P} \circ m_L)^{\sim},$$

onde $(\mathbb{P} \circ m_L)(f) = \int_\Omega m_L(f) d\mathbb{P}(\omega)$ *e* $(\mathbb{P} \circ m_L)^{\sim}(f) = (\mathbb{P} \circ m_L)(\tilde{f})$ *com* $\tilde{f}(\omega, \gamma) = f((\omega, \gamma)^{-1})$.

3.1.1 Operadores de Carleman

Definiremos, agora, uma classe importante de operadores com núcleo integral, a saber, os operadores de Carleman. No decorrer do capítulo mostraremos que o operador $e^{t\Delta_\omega}$ é um operador de Carleman.

Definição 3.10. *Um operador $\mathcal{K}$ agindo em $L^2(\Omega \times X, \mathbb{P} \circ vol)$ é um* ***operador de Carleman*** *se existir um núcleo*

$$k((\omega, x), \cdot) \in L^2((\{\omega\} \times X) \times (\{\omega\} \times X), vol_\omega)$$

para todo $(\omega, x) \in \Omega \times X$ tal que

$$\mathcal{K} f(\omega, x) = \int_X k((\omega, x), (\omega, \tilde{x})) f(\omega, \tilde{x}) \, \boldsymbol{d}vol_\omega(\tilde{x}).$$

Segue que $\mathcal{K} = \int_\Omega^{\oplus} \mathcal{K}_\omega d\mathbb{P}(\omega)$, *ou seja, o operador de Carleman é decomponível.*

O conjunto $\mathbb{K}$ de todos os operadores de Carleman satisfaz, para todos $\gamma \in \Gamma$ e $\omega \in \Omega$

$$k((\omega, \gamma x), (\omega, \gamma \tilde{x})) = k((\omega, x), (\omega, \tilde{x}))$$

para quase todos $x, \tilde{x} \in X$ com respeito a vol_ω.

Observação 3.2. *Segue-se de [26] que os operadores do tipo Hilbert-Schmidt são uma subclasse dos operadores de Carleman.*

Definição 3.11. *Seja $\mathcal{K}$ um operador de Carleman. Então, $\mathcal{K}$ será chamado de* ***operador de Carleman forte*** *se $U\mathcal{K}U^*$ for um operador de Carleman para qualquer operador unitário U.*

Teorema 3.3. *Todo operador auto-adjunto de Carleman forte é do tipo Hilbert-Schmidt*

Demonstração. Seja $\mathcal{K}$ um operador de Carleman forte e auto-adjunto. O Teorema (A.16) afirma que o espectro de $\mathcal{K}$ consiste de uma sequência de autovalores (λ_n) com 0 o ponto limite (e eventualmente $\pm\infty$). Como $\mathcal{K}$ é um operador de Carleman forte, então existe para qualquer base ortonormal completa (ξ_n) uma transformação unitária U e um núcleo $k_U(x, y)$ tal que

$$\int_a^b |k_U(x, y)|^2 \, dy < \infty,$$

$$(U\mathcal{K}U^*\xi_n)(x) = \lambda_n\xi_n(x), \quad (U\mathcal{K}U^*f)(x) = \int_a^b k_U(x,y)f(y)\,dy$$

para quase todo x e $f \in dom(U\mathcal{K}U^*) = U dom(\mathcal{K})$. Isso implica que $\lambda_n\xi_n(x)$ são coeficientes de Fourier de $k_U(x,y)$ (como função de y) com respeito a base ortonormal completa (ξ_n). Como $k_U(x,y)$ (como função de y) pertence a $L^2(a,b)$ para quase todo x, isso implica que $\sum_n |\lambda_n\xi_n(x)| < \infty$ para quase todo x. Faça

$$\xi_n(x) = (b-a)^{-1/2}\exp(2\pi inx/(b-a));$$

segue que $\sum_n |\lambda_n|^2 < \infty$, i.e, $\mathcal{K}$ é um operador de Hilbert-Schmidt. □

Teorema 3.4. *Todo operador de Carleman forte é um operador de Hilbert-Schmidt.*

Demonstração. Seja $\mathcal{K}$ um operador de Carleman forte; então $\mathcal{K}$ é fechado pelo Teorema (A.18). Segue do Teorema (A.17) que $\mathcal{K} = UT$ onde T é um operador auto-adjunto e $U : \overline{\text{img}(R(T))} \to \overline{\text{img}(R(\mathcal{K}))}$ uma isometria parcial. Então, $U^*U : \overline{\text{img}(R(T))} \to \overline{\text{img}(R(T))}$ é uma isometria parcial e portanto $T = U^*\mathcal{K}$. Pelo Teorema (A.15), T é um operador de Carleman forte e auto-adjunto e consequentemente, pelo Teorema (3.3), é um operador do tipo Hilbert-Schmidt. Então, $\mathcal{K} = UT$ é um operador de Hilbert-Schmidt. □

Pela Definição (3.5), temos que todo operador aleatório e limitado deve satisfazer a condição de equivariância. Assim, temos que todos os operadores aleatórios e limitados que são Carleman, são pela Definição (3.5) e Definição (3.11) operadores de Carleman fortes. Conclui-se, pelo Teorema (3.4), que os operadores auto-adjuntos, aleatórios e limitados de Carleman forte são operadores de Hilbert-Schmidt.

3.2 O Traço na Álgebra de von Neumann

Discutiremos agora a noção de traço em álgebras de von Neumann, conceito necessário para a demonstração dos Teoremas (1.2), (1.3) e (1.4).

Definição 3.12. *Um **peso** em uma álgebra de von Neumann é uma aplicação $\tau : \mathcal{N}^+ \to [0,\infty]$, onde $\mathcal{N}^+ \subset \mathcal{N}$ é o conjunto dos operadores auto-adjuntos e não-negativos, satisfazendo as seguintes condições:*

1. $\tau(\lambda A) = \lambda\tau(A)$ *para todos* $A \in \mathcal{N}^+$ *e* $\lambda \geqslant 0$;
2. $\tau(A+B) = \tau(A) + \tau(B)$ *para todos* $A, B \in \mathcal{N}^+$.

O peso será chamado ***normal*** se $\tau(A_n)$ convergir para $\tau(A)$ sempre que A_n for uma sequência crescente e limitada de operadores, ou seja, $A_n \leqslant A_{n+1}$ com $n \in \mathbb{N}$. O peso será chamado ***fiel*** se $\tau(A) = 0$ implicar $A = 0$. Será chamado ***semi-finito*** se $\tau(A) = \sup\{\tau(B) \mid B \leqslant A, \tau(B) < \infty\}$. Se o peso τ satisfizer $\tau(CC^*) = \tau(C^*C)$[3] para $C \in \mathcal{N}$ arbitrário (ou, equivalentemente, $\tau(UAU^*) = \tau(A)$ para $A \in \mathcal{N}$ e $U \in \mathcal{N}$ unitário)[4], então o peso será um ***traço***.

Teorema 3.5. *Para $A \in \mathcal{N}^+(\Omega \times \Gamma, \Omega \times X)$ a expressão*

$$\tau(A) := \int_\Omega Tr(A_\omega^{1/2} M_{u_\omega} A_\omega^{1/2})\ d\mathbb{P}(\omega) = \int_\Omega Tr(M_{u_\omega}^{1/2} A_\omega M_{u_\omega}^{1/2})\ d\mathbb{P}(\omega),$$

onde M_{u_ω} é o operador multiplicação por $u : (\Omega \times X) \to \mathbb{R}^+$ mensurável, não depende de u desde que $m_L * u := \int_\Gamma u(\omega, \gamma^{-1}x)\ dm_L(\gamma) = 1$.

1. *A aplicação $\tau : \mathcal{N}^+(\Omega \times \Gamma, \Omega \times X) \to [0, \infty]$ é um peso normal, semi-finito e fiel em $\mathcal{N}(\Omega \times \Gamma, \Omega \times X)$.*

Demonstração. Vide Teorema (4.2) de [6] para detalhes. □

Proposição 3.2. *Seja $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ dado. Então,*

$$\tau(\mathcal{K}^*\mathcal{K}) = \int_\Omega \int_X \int_X u(\omega, \tilde{x}) |k((\omega, x), (\omega, \tilde{x}))|^2\ \boldsymbol{d}vol_\omega(x) \boldsymbol{d}vol_\omega(\tilde{x}) \boldsymbol{d}\mathbb{P}(\omega) = \tau(\mathcal{K}\mathcal{K}^*) \quad (3.4)$$

para qualquer $u : (\Omega \times X) \to \mathbb{R}^+$ satisfazendo $m_L * u \equiv 1$.

Demonstração. Considere a identidade

$$Tr(A^*A) = \int_{S \times S} |a(x, y)|^2\ \boldsymbol{d}vol(x) \boldsymbol{d}vol(y)$$

(vide Teorema (A.9) e Teorema (A.10) para detalhes), válida para qualquer operador limitado A com núcleo a. Note que esta fórmula vale tanto para $a \in L^2(S \times S, vol \circ vol)$ quanto para $a \notin L^2(S \times S, vol \circ vol)$. No último caso, ambos os lados da fórmula são infinitos. Agora, pelo Teorema (3.5), temos que

$$\begin{aligned} \tau(\mathcal{K}^*\mathcal{K}) &= \int_\Omega Tr(M_{u_\omega}^{1/2} \mathcal{K}_\omega^* \mathcal{K}_\omega M_{u_\omega}^{1/2})\ d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \int_\Omega \int_X \int_X u(\omega, \tilde{x}) |k((\omega, x), (\omega, \tilde{x}))|^2\ \boldsymbol{d}vol_\omega(x) \boldsymbol{d}vol_\omega(\tilde{x}) \boldsymbol{d}\mathbb{P}(\omega) \end{aligned}$$

e isto prova a primeira equação. Para mostrar a segunda, vamos inserir

$$m_L * u := \int_\Gamma u(\omega, \gamma^{-1}x)\ dm_L(\gamma) = 1$$

[3] Vide Corolário (1) seção I.6.1 de [27], Lema (55.2) de [24] e Proposição (6.5.2) de [25] para detalhes.

[4] Vide Definição (1) seção I.6.1 de [27] e Definição (6.5.1) de [25] para detalhes.

na primeira equação. Assim, segue-se que

$$\tau(\mathcal{K}^*\mathcal{K}) = \int_\Omega \int_X \int_X \left(\int_\Gamma u(\omega, \gamma^{-1}x) \; dm_L(\gamma) \right) u(\omega, \tilde{x}) |k((\omega, x), (\omega, \tilde{x}))|^2 \boldsymbol{d}vol_\omega(x) \boldsymbol{d}vol_\omega(\tilde{x}) \boldsymbol{d}\mathbb{P}(\omega).$$

Por Fubini e pelo fato de $\mathbb{K}$ ser invariante, temos que

$$\tau(\mathcal{K}^*\mathcal{K}) = \int_{\Omega\times\Gamma} \int_X \int_X u(\omega, \gamma^{-1}x) u(\omega, \tilde{x}) |k((\omega, \gamma^{-1}x), (\omega, \gamma^{-1}\tilde{x}))|^2 \boldsymbol{d}vol_\omega(x) \boldsymbol{d}vol_\omega(\tilde{x}) \boldsymbol{d}(\mathbb{P} \circ m_L)(\omega, \gamma).$$

Fazendo uso da invariância de $\mathbb{P}$, ou seja, $\mathbb{P} \circ m_L = (\mathbb{P} \circ m_L)^\sim$ temos que

$$\tau(\mathcal{K}^*\mathcal{K}) = \int_{\Omega\times\Gamma} \int_X \int_X u(\omega, \gamma x) u(\omega, \tilde{x}) |k((\omega, \gamma x), (\omega, \gamma\tilde{x}))|^2 \boldsymbol{d}vol_{\gamma^{-1}\omega}(x) \boldsymbol{d}vol_{\gamma^{-1}\omega}(\tilde{x}) \boldsymbol{d}(\mathbb{P} \circ m_L)(\omega, \gamma).$$

Uma vez que a medida é invariante por uma mudança de variável, temos que

$$\tau(\mathcal{K}^*\mathcal{K}) = \int_{\Omega\times\Gamma} \int_X \int_X u(\omega', x') u(\omega', \gamma^{-1}\tilde{x}') |k((\omega', x'), (\omega', \tilde{x}'))|^2 \boldsymbol{d}vol_\omega(x') \boldsymbol{d}vol_\omega(\tilde{x}') \boldsymbol{d}(\mathbb{P} \circ m_L)(\omega, \gamma).$$

Novamente por Fubini, temos que

$$\tau(\mathcal{K}^*\mathcal{K}) = \int_\Omega \int_X \int_X \left(\int_\Gamma u(\omega', \gamma^{-1}\tilde{x}') \; dm_L(\gamma) \right) u(\omega', x') |k((\omega', x'), (\omega', \tilde{x}'))|^2 \boldsymbol{d}vol_\omega(x') \boldsymbol{d}vol_\omega(\tilde{x}') \boldsymbol{d}\mathbb{P}(\omega),$$

donde

$$\tau(\mathcal{K}^*\mathcal{K}) = \int_\Omega \int_X \int_X u(\omega', x') |k((\omega', x'), (\omega', \tilde{x}'))|^2 \; \boldsymbol{d}vol_\omega(x') \boldsymbol{d}vol_\omega(\tilde{x}') \boldsymbol{d}\mathbb{P}(\omega).$$

Assim,

$$\tau(\mathcal{K}^*\mathcal{K}) = \int_\Omega Tr(M_{u_\omega}^{1/2} \mathcal{K}_\omega \mathcal{K}_\omega^* M_{u_\omega}^{1/2}) \; d\mathbb{P}(\omega) = \tau(\mathcal{K}\mathcal{K}^*).$$

Isso encerra a demonstração. $\square$

Lema 3.1. *Seja $\mathcal{I}$ um ideal*[5] *em uma álgebra de von Neumann $\mathcal{N}$ agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ com $\overline{\mathcal{I}^*\mathcal{I}(\mathcal{H})} = \mathcal{H}$. Seja τ um peso normal em $\mathcal{N}$ satisfazendo $\tau(A^*A) = \tau(AA^*)$ para todo $A \in \mathcal{I}$. Então, τ é um traço.*

Demonstração. É suficiente mostrar que $\tau(UAU^*) = \tau(A)$ para $A \in \mathcal{N}^+$ arbitrário e $U \in \mathcal{N}$ unitário. Seja $C(\mathcal{I})$ o fecho da norma de $\mathcal{I}^*\mathcal{I}$ (logo, $\mathcal{I}^*\mathcal{I}$ é um ideal denso em $C(\mathcal{I})$). Pela Proposição (A.7), existe uma rede crescente de aproximantes da identidade $(\mathbf{I}_\lambda)$ para $C(\mathcal{I})$ em $\mathcal{I}$. Como $\mathcal{H}$ é separável, podemos escolher $(\mathbf{I}_\lambda)$ como uma sequência crescente $(\mathbf{I}_n)$. Por $\overline{\mathcal{I}^*\mathcal{I}(\mathcal{H})} = \mathcal{H}$, inferimos que $\mathbf{I}_n$ converge monotonicamente para identidade $\mathbf{I}$ em $\mathcal{H}$. Por decomposição polar, todo $\mathbf{I}_n \in \mathcal{I}^*\mathcal{I}$ pode ser escrito como

$$\mathbf{I}_n = \sum D_{i,n}^* D_{i,n} - \sum C_{j,n}^* C_{j,n} \tag{3.5}$$

para um número finito de $D_{i,n}, C_{j,n} \in \mathcal{I}$. Agora, seja $D \in \mathcal{I}$ dado. Sendo $\mathcal{I}$ é um ideal à direita, podemos calcular

$$\tau(UA^{1/2}D^*DA^{1/2}U^*) = \tau(DA^{1/2}U^*UA^{1/2}D^*) = \tau(DA^{1/2}A^{1/2}D^*) = \tau(A^{1/2}D^*DA^{1/2}), \tag{3.6}$$

onde a primeira identidade segue-se de $B = DA^{1/2}U^*,\ B^* = UA^{1/2}D^*$. Combinando (3.5) e (3.6) ao fato de τ ser normal, podemos concluir a demonstração do lema da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\tau(UAU^*) &= \lim_{n\to\infty} \tau(UA^{1/2}\mathbf{I}_n A^{1/2}U^*) \\
&= \lim_{n\to\infty} \tau\left(UA^{1/2}\left(\sum D_{i,n}^* D_{i,n} - \sum C_{j,n}^* C_{j,n}\right) A^{1/2}U^*\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \tau\left(\sum UA^{1/2}D_{i,n}^* D_{i,n}A^{1/2}U^* - \sum UA^{1/2}C_{j,n}^* C_{j,n}A^{1/2}U^*\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \tau\left(\sum A^{1/2}D_{i,n}^* D_{i,n}A^{1/2} - \sum A^{1/2}C_{j,n}^* C_{j,n}A^{1/2}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \tau\left(A^{1/2}\left(\sum D_{i,n}^* D_{i,n} - \sum C_{j,n}^* C_{j,n}\right) A^{1/2}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \tau(A^{1/2}\mathbf{I}_n A^{1/2}) = \tau(A).
\end{aligned}$$

Isso encerra a demonstração. □

Agora, mostraremos que a álgebra de von Neumann formada pelos operadores aleatórios e limitados é tal que τ definido no Teorema (3.5) é um traço normal.

Proposição 3.3. *Seja $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ um operador de Schrödinger aleatório e defina, para $t \geqslant 0$, o operador*

$$S(t) : L^2(\Omega \times X) \to L^2(\Omega \times X)$$

por

$$S(t)f_\omega(x) := (e^{t\Delta_\omega} f_\omega)(x).$$

[5] Seja $(\mathbf{a}, +, \cdot)$ um anel e seja $\mathcal{I}$ um subconjunto de não-vazio de $\mathbf{a}$. Dizemos que $\mathcal{I}$ é um ideal de $\mathbf{a}$ se para todos $x, y \in \mathcal{I}$ temos $x + y \in \mathcal{I}$ e para todos $c \in \mathbf{a}$ e $x \in \mathcal{I}$ temos $cx \in \mathcal{I}$.

Então, $S(t)$ é um operador auto-adjunto, aleatório e limitado para $t \geqslant 0$. Para $t > 0$, o operador $S(t)$ pertence a $\mathbb{K}$. A família $t \mapsto S(t)$ é um semigrupo fortemente contínuo.

Demonstração. A Proposição (2.1) fornece imediatamente a mensurabilidade de $S(t)$. Pelo cálculo funcional (vide Corolários (A.3) e (A.4) para detalhes), temos que

$$S(t)f_\omega(x) = \int_{[0,\infty)} e^{-ty}\ dE^{-\Delta_\omega}(y) f_\omega(x),$$

(note que $E^{-\Delta_\omega}(y) = 0$ se $y \leqslant 0$). Segue-se que

$$||S(t)f(x)||^2_{L^2(\Omega\times X)} = \int_{\Omega\times[0,\infty)} e^{-2ty}\ d(\mu_f^{-\Delta_\omega}(y)\circ\omega) \overset{\text{Fubini}}{\leqslant} \int_\Omega \int_{[0,\infty)} 1\ d\mu_f^{-\Delta_\omega}(y) d\omega = ||f(x)||^2_{L^2(\Omega\times X)},$$

onde $d\mu_f^{-\Delta_\omega}(y) = |f(x)|^2 dx$ é uma medida espectral (vide Seção 8.4 de [5] para detalhes). Conclui-se que $S(t)$ é um operador decomponível, porque por Fubini vale a decomposição para toda $f \in L^2(\Omega \times X)$. Como suas fibras são auto-adjuntas, $S(t)$ também é auto-adjunto (vide Teorema (A.20) e (A.21) para detalhes). Pela fórmula de transformação $\Delta_\omega = U_{(\omega,\gamma)}\Delta_{\gamma^{-1}\omega}U^*_{(\omega,\gamma)}$, temos que

$$\begin{aligned} U_{(\omega,\gamma)}S_{\gamma^{-1}\omega}(t)U^*_{(\omega,\gamma)}f_\omega(\gamma^{-1}x) &= U_{(\omega,\gamma)}\int_{[0,\infty)} e^{-ty}\ dE^{-\Delta_{\gamma^{-1}\omega}}(y)U^*_{(\omega,\gamma)}f_\omega(\gamma^{-1}x) \\ &= \int_{[0,\infty)} e^{-ty}\ d(U_{(\omega,\gamma)}E^{-\Delta_{\gamma^{-1}\omega}}U^*_{(\omega,\gamma)})(y)f_\omega(\gamma^{-1}x) \\ &= \int_{[0,\infty)} e^{-ty}\ dE^{-\Delta_\omega}(y)f_\omega(\gamma^{-1}x) = (e^{t\Delta_\omega}f_\omega)(\gamma^{-1}x) \\ &= S(t)f_\omega(\gamma^{-1}x), \end{aligned}$$

o que mostra que $S(t)$ satisfaz a condição de equivariância, donde se conclui que $S(t)$ é de fato um operador aleatório. Usando que $t \to e^{t\Delta_\omega}$ é semigrupo fortemente contínuo de operadores com norma não excedendo 1 para todo $\omega \in \Omega$, podemos através de um cálculo concluir que $S(t)$ também é um semigrupo fortemente contínuo.

Para $t > 0$, todo $S(t)$ tem um núcleo k^t_ω (vide Teorema (4.1) para detalhes). Mostremos que $S(t) \in \mathbb{K}$. Com efeito, segue-se dos Teoremas (A.9) e Teorema (A.10) que

$$||S(t)||^2_{L^2} = \int_{X\times X} |k^t_\omega(x,y)|^2\ \boldsymbol{d}vol_\omega(x)\boldsymbol{d}vol_\omega(y).$$

Supondo que $S(t)$ é um operador de Carleman, temos que

$$||S(t)||^2_{L^2} = \int_X |k^t_\omega(x,y)|^2\ \boldsymbol{d}vol_\omega(y) = \int_X \overline{k^t_\omega(x,y)}k^t_\omega(x,y)\ \boldsymbol{d}vol_\omega(y).$$

Agora, já que $S(t)$ é auto-adjunto, segue-se da Proposição (A.4) e Teorema (A.11), que

$$||S(t)||^2_{L^2} = \int_X k^t_\omega(y,x)k^t_\omega(x,y)\ \boldsymbol{d}vol_\omega(y),$$

e novamente pela mesma proposição e pelo mesmo teorema, uma vez que $S(t)$ é um semigrupo, segue-se que
$$||S(t)||_{L^2}^2 = k_\omega^{2t}(x,x) < \infty.$$
Isto mostra que $S(t)$ pertence a $\mathbb{K}$ e isso encerra a demonstração. □

Teorema 3.6. *Considere $\mathcal{N}$ a álgebra de von Neumann formada pelos operadores de Schrödinger aleatórios em uma variedade compacta. A aplicação τ definida no enunciado do Teorema (3.5) é um traço normal.*

Demonstração. Pela Proposição (3.2) e pelo Lema (3.1), é suficiente mostrar que $\mathbb{K}^*\mathbb{K}(L^2(\Omega\times X))$ é denso em $L^2(\Omega\times X)$. Porém, isso segue diretamente da Proposição (3.3), que mostra que $S(t)f$ converge para f para toda $f \in L^2(\Omega\times X)$, onde $S(t) \in \mathbb{K}^*\mathbb{K}$ por propriedades de semigrupo e isso encerra a demonstração. □

Em $\mathcal{N}$, um traço do tipo II_∞ (vide [24], [25], [27] e [28] para definição) é dado por

$$\tau(A) := \mathbb{E}(Tr_\omega(\chi_{\mathcal{F}}A_\bullet)),$$

onde Tr denota o traço no espaço de Hilbert $L^2(X, vol_\omega)$. Note que tal expressão é um caso particular do traço definido no enunciado do Teorema (3.5). Com efeito, para qualquer $u : \Omega\times X \to \mathbb{R}^+$ mensurável com $\sum_{\gamma\in\Gamma} u_{\gamma^{-1}\omega}(\gamma^{-1}x) \equiv 1$ para todo $(\omega, x) \in \Omega\times Z$, temos que

$$\tau(A) := \mathbb{E}(Tr(u_\bullet A_\bullet)).$$

A resolução da identidade $\{E^{H_\omega}(-\infty,\lambda)\}_{\omega\in\Omega}$ de $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ no intervalo $]-\infty,\lambda[$ é um operador aleatório e limitado e é um elemento de $\mathcal{N}$. Assim, a densidade de estados

$$N^H(-\infty,\lambda) := \frac{\tau(E(]-\infty,\lambda[))}{\mathbb{E}(vol_\bullet(\mathcal{F}))},$$

onde $\mathcal{F} \subset X$ é um domínio pré-compacto Γ-fundamental, também é um traço.

3.3 O Espectro do Operador de Schrödinger

Agora, mostraremos que N^H é uma medida espectral para $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$. Apresentaremos, também, a definição de medida espectral bem como a definição de espectro de um operador auto-adjunto. Por fim, apresentaremos as demonstrações dos Teoremas (1.2) e (1.3).

Definição 3.13. *Seja ϕ uma medida em $\mathbb{R}$. Então ϕ será uma* ***medida espectral*** *para um operador auto-adjunto A com respeito a resolução da identidade E^A se para um boreliano $\mathbf{B} \subset \mathbb{R}$,*

$$\phi(\mathbf{B}) = 0 \Longleftrightarrow E^A(\mathbf{B}) = 0.$$

Para mais detalhes a respeito da Definição (3.13) vide Proposição (A.6).

Proposição 3.4. *Para um boreliano mensurável* $\mathbf{B} \subset \mathbb{R}$ *e um operador auto-adjunto* H *tal que* $E^H \in \mathcal{N}(\Omega \times \Gamma, \Omega \times X)$*, seja* $N^H(\mathbf{B})$ *dada por* $N^H(\mathbf{B}) := \tau(E^H(\mathbf{B}))$*. Então,* N^H *é uma medida espectral para* H*. Além disso, para uma função mensurável limitada* $F : \mathbb{R} \to [0, \infty)$*, a identidade* $\tau(F(H)) = N^H(F) := \int F(x)\, dN^H(x)$ *está bem definida.*

Demonstração. Seja $\{\mathbf{B}_n\}$ uma família de conjuntos mensuráveis dois a dois disjuntos. Mostraremos que $N^H(\bigcup \mathbf{B}_n) = \sum N^H(\mathbf{B}_n)$, e assim que N^H é uma medida. Com efeito, como para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\bigcup_{n=1}^{m} \mathbf{B}_n \subset \bigcup_{n=1}^{m+1} \mathbf{B}_n,$$

temos que

$$\begin{aligned} N^H\left(\bigcup_{n=1}^{m} \mathbf{B}_n\right) &= Tr\left(E^H\left(\bigcup_{n=1}^{m} \mathbf{B}_n\right)\right) \\ &= \sum \left\langle f, E^H\left(\bigcup_{n=1}^{m} \mathbf{B}_n\right) f\right\rangle_\omega \\ &= \sum_{n=1}^{m} \sum \langle f, E^H(\mathbf{B}_n) f\rangle_\omega = \sum_{n=1}^{m} N^H(\mathbf{B}_n), \end{aligned}$$

e o resultado se segue do fato de τ ser normal. Logo, N^H é uma medida. Como τ é fiel, temos que $\tau(E^H(\mathbf{B})) = 0 \to E^H(\mathbf{B}) = 0$. Segue da Definição (3.13) que N^H é uma medida espectral.

A última afirmação é então imediata para combinação linear de funções características com coeficientes não-negativos. Pelo Lema (A.5) podemos aproximar as partes positiva e negativa de uma função boreliana limitada por sequências monótonas não decrescentes de funções simples não-negativas. Então, pela definição de medida espectral e pelo Teorema da Convergência Monótona, $N^H(F)$ está bem definida e isso encerra a demonstração. □

Definição 3.14. *Seja* $\mathcal{J}$ *uma família dado pela união finita de abertos em* $\mathbb{R}$ *cujos pontos finais são racionais. O* ***espectro de um operador auto-adjunto*** H *tal que* $E^H \in \mathcal{N}(\Omega \times \Gamma, \Omega \times X)$ *é o conjunto*

$$\sigma(H) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid E^H(\mathbf{B}) \neq 0, \text{ para todo } \mathbf{B} \in \mathcal{J} \text{ com } \lambda \in \mathbf{B}\}.$$

Corolário 3.1. *O suporte topológico de* N^H*,* $\mathrm{supp}(N^H) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid N^H(]\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon[) > 0 \text{ para todo } \varepsilon > 0\}$*, coincide com o espectro* $\sigma(H)$ *de* H *para todo operador auto-adjunto* H *tal que* $E^H \in \mathcal{N}(\Omega \times \Gamma, \Omega \times X)$*. Se* $\Omega \times \Gamma$ *é ergódico, então* $\mathrm{supp}(N^H) = \sigma(H_\omega)$ *para quase todo* $\omega \in \Omega$*.*

Demonstração. Sendo N^H uma medida espectral, segue-se que $E^H(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) > 0 \Leftrightarrow N^H(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) > 0$; em particular, $\sigma(H) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid N^H(\mathbf{B}) \neq 0 \ \forall\ \mathbf{B} \in \mathcal{J}, \lambda \in \mathbf{B}\} = \mathrm{supp}(N^H)$. A segunda afirmação segue do Teorema (1.2) e isso encerra a demonstração. □

Demonstração do Teorema (1.3). Segue diretamente da Proposição (3.4) e do Corolário (3.1). $\square$

Por fim, resta-nos neste capítulo apresentar a demonstração do Teorema (1.2). Para tanto, alguns resultados preliminares são necessários.

Sejam

$$\mathcal{J} = \{\mathbb{I} = \bigcup_{k=1}^{n} \mathbb{I}_k \mid \mathbb{I}_k = (p_k, q_k) \text{ é um intervalo aberto com } p_k, q_k \in \mathbb{Q}\}, \tag{3.7}$$

$\mathcal{J}^m$ um conjunto formado pelos elementos de $\mathcal{J}$ cuja união consiste em exatamente m intervalos, e $\mathbf{B} \subset \mathcal{J}$ boreliano.

Proposição 3.5. *Seja μ uma medida de Borel e finita em $\mathbb{R}$ para o operador $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$. A parte singular μ_s de μ é dada por*

$$\mu_s(\mathbf{B}) = \lim_{n\to\infty} \sup\left\{\mu(\mathbf{B}\cap\mathbb{I}) \mid \mathbb{I}\in\mathcal{J},\ \ell(\mathbb{I}) < \frac{1}{n}\right\} =: \nu(\mathbf{B}), \tag{3.8}$$

onde $\ell(\mathbb{I})$ indica a medida de Lebesgue de $\mathbb{I}$.

Demonstração. Note inicialmente que $\sup\{\mu(\mathbf{B}\cap\mathbb{I}) \mid \mathbb{I}\in\mathcal{J},\ \ell(\mathbb{I}) < \frac{1}{n}\}$ decresce quando n cresce e portanto o limite definido por $\nu(\mathbf{B})$ existe.

Escrevamos $d_{\mu_{ac}}(x) = f(x)d\ell(x)$ ($f \in L^1(X)$ pelo Teorema de Radon-Nikodym[6]), $\mathfrak{R} := \{x \mid f(x) > R\}$ e $\eta(\mathfrak{R}) = \mu_{ac}(\mathfrak{R})$. É claro que $\eta(\mathfrak{R}) \to 0^+$ quando $R\to\infty$. Então, para todo $\mathbb{I}\in\mathcal{J}$, $\mu_{ac}(\mathbb{I}) \leqslant R\ell(\mathbb{I}) + \eta(\mathfrak{R})$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \mu_{ac}(\mathbb{I}) &= \mu_{ac}(\mathfrak{R}) + \mu_{ac}(\mathfrak{R}^c) \\ &= \eta(\mathfrak{R}) + \mu_{ac}(\mathfrak{R}^c) \end{aligned}$$

e

$$\mu_{ac}(\mathfrak{R}^c) = \int\limits_{\mathfrak{R}^c} f d\ell \leqslant R\ell(\mathfrak{R}^c) \leqslant R\ell(\mathbb{I}),$$

para toda $f(x) < R$ com $x\in\mathfrak{R}^c$. Já que $\mu(\mathbf{B}\cap\mathbb{I}) = \mu_{ac}(\mathbf{B}\cap\mathbb{I}) + \mu_s(\mathbf{B}\cap\mathbb{I})$ (pelo Teorema de Decomposição de Lebesgue), temos que

$$\mu(\mathbf{B}\cap\mathbb{I}) \leqslant R\ell(\mathbb{I}) + \eta(\mathfrak{R}).$$

Assim, para todo R, $\nu(\mathbf{B}) \leqslant \mu_s(\mathbf{B}) + \eta(\mathfrak{R})$, e portanto $\nu(\mathbf{B}) \leqslant \mu_s(\mathbf{B})$.

Reciprocamente, como μ_s e ℓ são mutuamente singulares, existe um $\mathbb{B}\subset\mathbb{R}$ com $\ell(\mathbb{B}) = 0$ e $\mu_s(\mathbb{R}\backslash\mathbb{B}) = 0$. Sejam $\mathbb{A}_m$ conjuntos abertos tais que $\mathbf{B}\cap\mathbb{B}\subset\mathbb{A}_m$ e $\ell(\mathbb{A}_m)\to 0^+$.

[6] Vide [22], [29], [23], [30], [31] para detalhes.

Dados n e $\varepsilon > 0$, é possível encontrar m de modo que $\ell(\mathbb{A}_m) < \frac{1}{n}$ e então um $\mathbb{I} \in \mathcal{J}$ tal que $\mu(\mathbb{A}_m \backslash \mathbb{I}) \leqslant \varepsilon$ (já que $\mu_s \perp \ell$). Logo, como $\mathbf{B} \cap \mathbb{A}_m \subset (\mathbf{B} \cap \mathbb{I}) \sqcup (\mathbb{A}_m \backslash \mathbb{I})$, segue-se que

$$\mu(\mathbf{B} \cap \mathbb{I}) \geqslant \mu(\mathbf{B} \cap \mathbb{A}_m) - \mu(\mathbb{A}_m \backslash \mathbb{I}) \geqslant \mu(\mathbf{B} \cap \mathbb{B}) - \varepsilon = \mu_s(\mathbf{B}) - \varepsilon.$$

Portanto,

$$\nu(\mathbf{B}) = \lim_{n\to\infty} \sup_{\mathbb{I} \in \mathcal{J}, \ell(\mathbb{I}) < \frac{1}{n}} \mu(\mathbf{B} \cap \mathbb{I}) \geqslant \mu_s(\mathbf{B}) - \varepsilon.$$

Agora, como ε foi escolhido arbitrariamente, segue que $\nu(\mathbf{B}) \geqslant \mu_s(\mathbf{B})$ e isso encerra a demonstração. $\square$

Lema 3.2. *Seja μ uma medida contínua e finita em $\mathbb{R}$ e seja $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}$ um aberto. Então, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(\mathbb{B}_n) = 0$ para toda sequência $(\mathbb{B}_n)$ de intervalos abertos cujos comprimentos tendem para zero.*

Demonstração. Assuma o contrário. Então, existe uma sequência de intervalos abertos $(\mathbb{B}_n)$ com $\ell(\mathbb{B}_n) \to 0$ e $\delta > 0$ tal que $\mu(\mathbb{B}_n) \geqslant \delta$ para $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escolha uma sequência $x_n \in \mathbb{B}_n$ arbitrária. Se a sequência (x_n) for ilimitada, então poderemos encontrar uma subsequência $(\mathbb{B}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(\mathbb{B}_n)$ consistindo de intervalos disjuntos aos pares. Então, $\mu(\mathbb{R}) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(\mathbb{B}_{n_k}) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta = \infty$, uma contradição. Assim, a sequência (x_n) é limitada e contém uma subsequência convergente.

Sem perda de generalidade, assumimos que $x_n \to x$ para $n \to \infty$. Para todo intervalo aberto $\mathbb{B}$ contendo x, temos que $\mu(\mathbb{B}) \geqslant \mu(\mathbb{B}_n)$ para n suficientemente grande. Isso fornece $\mu(\mathbb{B}) \geqslant \delta$ para cada intervalo. Como $\mathbb{B}_{n_k} \supset \mathbb{B}_{n_{k+1}} \supset \cdots$ e $\bigcap\limits_k \mathbb{B}_{n_k} = \{x\}$, temos que $\mu(\{x\}) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(\mathbb{B}_{n_k}) \geqslant \delta$, contradizendo a continuidade de μ e isso encerra a demonstração. $\square$

Proposição 3.6. *Seja μ uma medida de Borel e finita em $\mathbb{R}$ com parte puramente pontual μ_{pp} e parte contínua μ_c. Então, para cada $\mathbf{B} \subset \mathbb{R}$, μ_{pp} é dada por*

$$\mu_{pp}(\mathbf{B}) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \sup_{\ell(\mathbb{I}) \leqslant \frac{1}{n},\ \mathbb{I} \in \mathcal{J}^m} \mu(\mathbf{B} \cap \mathbb{I}).$$

Demonstração. Denote por $a_{m,n}(\mathbf{B}) = \sup\limits_{\ell(\mathbb{I}) \leqslant \frac{1}{n},\ \mathbb{I} \in \mathcal{J}^m} \mu(\mathbf{B} \cap \mathbb{I})$ e note que $a_{m,n}(\mathbf{B})$ não decresce quando m cresce. Portanto, os limites existem.

($\leqslant$): Seja $\{x_i\}$ um subconjunto contável de $\mathbb{R}$ com $\mu_{pp} = \sum\limits_i \mu(\{x_i\}) \delta_{x_i}$, onde δ_{x_i} denota a medida de Dirac. Assim, temos $\mu_{pp}(\mathbf{B}) = \sum\limits_{x_i \in \mathbf{B}} \mu(\{x_i\})$. Para todo $\varepsilon > 0$, existe um subconjunto finito $\mathbf{B}_\varepsilon = \{x_i \mid x_i \in \mathbf{B}\}$ com número de elementos $\#\mathbf{B}_\varepsilon$ e $\mu_{pp} \leqslant \varepsilon + \sum\limits_{x \in \mathbf{B}_\varepsilon} \mu(\{x\})$. Logo,

$$\mu_{pp}(\mathbf{B}) \leqslant \varepsilon + \sum_{x \in \mathbf{B}_\varepsilon} \mu(\{x\}) \leqslant \varepsilon + \mu(\mathbf{B} \cap \mathbb{I})$$

para um $\mathbb{I} \in \mathcal{J}^{\#\mathbf{B}_\varepsilon}$ adequado de medida de Lebesgue arbitrariamente pequena. Como ε é arbitrário, segue-se a desigualdade desejada.

($\geqslant$) Pelo Lema (3.2), podemos concluir que para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\ell(\mathbb{I})\leqslant \frac{1}{n},\ \mathbb{I}\in\mathcal{J}^m} \mu_c(\mathbf{B}\cap\mathbb{I}) = 0.$$

Combinando isso com a desigualdade $\mu_{pp}(\mathbf{B}) \geqslant \mu_{pp}(\mathbf{B}\cap\mathbb{I})$, válida para $\mathbf{B}, \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ arbitrários e mensuráveis, temos que

$$\begin{aligned}
\mu_{pp}(\mathbf{B}) &\geqslant \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} \sup_{\ell(\mathbb{I})\leqslant \frac{1}{n},\ \mathbb{I}\in\mathcal{J}^m} \mu_{pp}(\mathbf{B}\cap\mathbb{I}) \\
&= \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} \sup_{\ell(\mathbb{I})\leqslant \frac{1}{n},\ \mathbb{I}\in\mathcal{J}^m} \mu_{pp}(\mathbf{B}\cap\mathbb{I}) + \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} \sup_{\ell(\mathbb{I})\leqslant \frac{1}{n},\ \mathbb{I}\in\mathcal{J}^m} \mu_c(\mathbf{B}\cap\mathbb{I}) \\
&= \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} \sup_{\ell(\mathbb{I})\leqslant \frac{1}{n},\ \mathbb{I}\in\mathcal{J}^m} \mu(\mathbf{B}\cap\mathbb{I}).
\end{aligned}$$

Isso encerra a demonstração. $\square$

Demonstração do Teorema (1.2). Seja $\mathcal{J}$ como descrito acima e seja E^{H_ω} a resolução da identidade para o operador auto-adjunto H_ω, com $\omega \in \Omega$. Sabemos pelo Lema (2.1) e pelo Teorema (1.1) que o operador de Schrödinger $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ é mensurável. Para um boreliano $\mathbf{B} \subset \mathbb{R}$ é possível, na topologia forte, aproximar $E^{H_\omega}(\mathbf{B})$ por polinômios (vide Proposição (A.2) para detalhes) independentes de ω, uma vez que o conjuntos dos polinômios é denso no conjunto da funções contínuas pelo Teorema de Stone-Weierstrass. Isso implica a mensurabilidade forte de $E^{H_\omega}(\mathbf{B})$.

Segue da cálculo funcional que $\sum\limits_i \langle\phi_i, E^{H_\omega}(\mathbf{B})\phi_i\rangle_\omega = Tr(E^{H_\omega}(\mathbf{B}))$ está bem definido, onde $\{\phi_i\}$ é uma base ortonormal para o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Logo, a aplicação $\omega \to Tr(E^{H_\omega}(\mathbf{B}))$ é uma função invariante e mensurável para todo $\mathbf{B} \in \mathcal{J}$.

Assim, por ergodicidade (vide Teorema (A.28) para detalhes), esta aplicação é quase certamente constante. Denote esta constante por $\mathfrak{F}_B$.

Como $\mathcal{J}$ é contável, podemos encontrar $\Omega' \subset \Omega$ com $\mathbb{P}(\Omega') = 1$, tal que para todo $\omega \in \Omega'$, temos $Tr((E^{H_\omega}(\mathbf{B})) = \mathfrak{F}_B$ para todo $\mathbf{B} \in \mathcal{J}$ (a saber, para cada $\mathbf{B} \in \mathcal{J}$ existe $\Omega_\mathbf{B}$ tal que $\mathbb{P}(\Omega_\mathbf{B}) = 1$; faça $\Omega' := \bigcap\limits_{\mathbf{B}\in\mathcal{J}} \Omega_\mathbf{B}$). Pela Definição (3.14) e pelo fato do traço ser fiel, inferimos a constância de $\sigma(H_\omega)$ em Ω'. Por argumentos completamente análogos e usando que

$$\sigma_{ess}(H_\omega) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid Tr(E^{H_\omega}(\mathbf{B})) = \infty \text{ para todo } \mathbf{B} \in \mathcal{J} \text{ com } \lambda \in \mathbf{B}\}$$

e

$$\sigma_{disc}(H_\omega) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid Tr(E^{H_\omega}(\mathbf{B})) < \infty \text{ para todo } \mathbf{B} \in \mathcal{J} \text{ com } \lambda \in \mathbf{B}\},$$

também inferimos a constância de $\sigma_{ess}(H_\omega)$ e também de $\sigma_{disc}(H_\omega)$, uma vez que $\sigma(H_\omega) = \sigma_{ess}(H_\omega) \sqcup \sigma_{disc}(H_\omega)$ (união disjunta).

Para mostrar a constância dos espectros restantes, é suficiente mostrar a mensurabilidade de

$$\omega \mapsto \langle f_\omega, E_{pp}^{H_\omega}(\mathbf{B}) f_\omega \rangle_\omega \qquad \text{e} \qquad \omega \mapsto \langle f_\omega, E_s^{H_\omega}(\mathbf{B}) f_\omega \rangle_\omega \tag{3.9}$$

para toda $f \in L^2(\Omega \times X, \mathbb{P} \circ vol)$ e todo $\mathbf{B} \in \mathcal{J}$. Para tanto, devemos lembrar que para uma medida $\mu \in \mathbb{R}$ arbitrária com parte puramente pontual μ_{pp} e parte singular μ_s, temos da Proposição (3.5) e da Proposição (3.6) que

$$\mu_s(\mathbf{B}) = \lim_{n \to \infty} \sup_{\mathbb{I} \in \mathcal{J},\ \ell(\mathbb{I}) \leqslant \frac{1}{n}} \mu(\mathbf{B} \cap \mathbb{I})$$

e

$$\mu_{pp}(\mathbf{B}) = \lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} \sup_{\ell(\mathbb{I}) \leqslant \frac{1}{n},\ \mathbb{I} \in \mathcal{J}^m} \mu(\mathbf{B} \cap \mathbb{I}).$$

Dadas tais identidades, segue-se que (3.9) é uma consequência imediata da mensurabilidade de $\omega \mapsto \langle f_\omega, E^{H_\omega}(\mathbf{B}) f_\omega \rangle_\omega$, que vale por suposição para $H = \int_\Omega^\oplus H_\omega d\mathbb{P}(\omega)$ (note que $E_{sc}^{H_\omega}(\mathbf{B}) = E_s^{H_\omega}(\mathbf{B}) - E_{pp}^{H_\omega}(\mathbf{B})$). Resta mostrar a última afirmação. Temos que $E^H(\mathbf{B}) = 0$ se, e somente se, $E^{H\omega}(\mathbf{B}) = 0$ para quase todo $\omega \in \Omega$. Usando isso, a Definição (3.14) e a quase constância de $Tr(E^{H_\omega}(\mathbf{B}))$, podemos inferir que $\lambda \in \sigma(H)$ se, e somente se, $E^{H_\omega}(\mathbf{B}) \neq 0$ para todo $\mathbf{B} \in \mathcal{J}$ com $\lambda \in \mathbf{B}$ e quase todo $\omega \in \Omega$, e isso encerra a demonstração. $\square$

4 Núcleo de Calor

Neste capítulo discutiremos a existência e algumas propriedades dos núcleos de calor referentes aos semigrupos $\exp(-tH_\omega)$ e $\exp(-jH_\omega^D)$. Em particular, avaliaremos a dependência das estimativas dos núcleos tanto em função do potencial quanto da métrica, uma vez que variam com o parâmetro aleatório $\omega \in \Omega$. Um fato importante é que usaremos tais estimativas para mostrar o princípio de não sentir a fronteira, muitas vezes tratado na Física como "desconsiderar condições de contorno", e na demonstração do Lema (6.1) (vide Capítulo 5).

Considere por $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ uma família de operadores lineares agindo no espaço de Banach $\mathcal{B}$ das funções mensuráveis $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ e seja $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ o espaço dos operadores limitados.

Definição 4.1. *Uma família $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ de operadores lineares é dita ser um **semigrupo** se as seguintes condições forem satisfeitas:*

1. *$T_t \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ para todo $t \geqslant 0$;*
2. *$T_0 = \mathbf{I}$ (operador identidade);*
3. *$T_t \cdot T_s = T_{t+s}$ para todos $t, s \geqslant 0$ (**propriedade de semigrupo**).*

Definição 4.2. *Seja $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ família de operadores agindo no espaço das funções mensuráveis com medida σ-finita invariante μ, satisfazendo as condições da Definição (4.1). Além disso, suponha que $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ satisfaz as seguintes condições:*

1. *$T_t(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, onde $\mathbf{1}$ é a função constante igual a 1;*
2. *Se $f \geqslant 0$, então $T_t f \geqslant 0$ (preservado positivamente).*

*Então, $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ é dita ser um **semigrupo de Markov**.*

Definição 4.3. *Uma família $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ de operadores lineares $T_t : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, $t \geqslant 0$, será chamada de semigrupo de contração se satisfizer as seguintes propriedades:*

1. *$T_{t+s} = T_t \cdot T_s$ para todos $t, s \geqslant 0$;*
2. *$\lim\limits_{t\to 0} ||T_t f - f|| = 0$ para toda $f \in \mathcal{B}$;*
3. *$||T_t|| \leqslant 1$ para todo $t \geqslant 0$.*

Observação 4.1. *Sejam $D \subset X$ um aberto e μ uma medida de Borel σ-finita em D. Seja T um operador auto-adjunto, real e não-negativo agindo em $L^2(D,\mu)$. O semigrupo e^{-tT}, com $t > 0$, é preservado positivamente se $e^{tT} f \geqslant 0$ para toda $0 < f \in L^2(D,\mu)$. Além disso, se e^{-tT} com $t > 0$ estiver bem definido em $L^\infty(D,\mu)$ então valerão as seguintes propriedades:*

1. *$e^{-tT} : L^2(D,\mu) \to L^2(D,\mu)$ é preservado positivamente para todo $t > 0$,*

2. *$e^{-tT} : L^\infty(D,\mu) \to L^\infty(D,\mu)$ é uma contração para todo $t > 0$.*

Segue-se que e^{-tT} é um semigrupo de Markov.

Pelo Teorema (A.12), temos que e^{-tH_ω} é uma contração em L^p para todos $1 \leqslant p \leqslant \infty$ e $t \geqslant 0$, e segue do Teorema (A.13) que o operador de Schrödinger H_ω^D em $L^2(D)$ é uma forma de Dirichlet[1] (as demonstrações de tais resultados valem para $X = \mathbb{R}^d$, mas também se estendem para uma variedade [2]).

Definição 4.4. *Sejam $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$. Um semigrupo $\{T_t\}_{t\geqslant 0} : L^p \to L^q$ é dito ser **ultracontrativo**, se existir uma função positiva $c(t)$ em $(0,+\infty)$ tal que para toda $f \in L^p \cap L^2$ e $t > 0$, temos que $T_t f \in L^q$ e*

$$||T_t f||_q \leqslant c(t)||f||_p.$$

Mostraremos, a seguir, que $e^{t\Delta_\omega}$ é ultracontrativo.

Seja $e^{t\Delta_\omega} : L^1(X, vol_\omega) \to L^\infty(X, vol_\omega)$. Então, pelo Teorema (A.23), $e^{t\Delta_\omega}$ é limitado e vale que

$$||e^{t\Delta_\omega} f(x)||_{L^\infty_{(X,vol_\omega)}} \leqslant ||e^{t\Delta_\omega}||_{1\to\infty}||f(x)||_{L^1(x,vol_\omega)},$$

com $||e^{t\Delta_\omega}||_{1\to\infty} = C_t$ para todo $\omega \in \Omega$ e $t > 0$.

Agora, pelo Lema (A.4), o semigrupo $e^{t\Delta_\omega}$ tem um núcleo $k_{-\Delta_\omega}$ tal que

$$0 \leqslant k_{-\Delta_\omega}(t,x,y) \leqslant ||e^{t\Delta_\omega}||_{1\to\infty} =: C_{\omega,t} \tag{4.1}$$

para todo $t > 0$ e para quase todos $x, y \in X$. Pela fórmula de Trotter, para $0 \leqslant f \in L^1(X, vol_\omega)$, temos que

$$0 \leqslant e^{-tH_\omega} f(x) \leqslant e^{t\Delta_\omega} f(x) \leqslant C_{\omega,t}||f||_{L^1}$$

para quase todo $x \in X$ (já que $V_\omega(x) \geqslant 0$ para todo $x \in X$). Assim, $e^{-tH_\omega} : L^1(X, vol_\omega) \to L^\infty(X, vol_\omega)$ é também limitado por $C_{\omega,t}$ e temos

$$0 \leqslant k_{H_\omega}(t,x,y) \leqslant C_{\omega,t} \tag{4.2}$$

[1] Operador com condição de Dirichlet.

para quase todos $x, y \in X$.

Por fim, pela Definição (4.4), resta-nos mostrar que para toda $f \in L^1 \cap L^2$, o semigrupo $e^{t\Delta_\omega} : L^2(X, vol_\omega) \to L^\infty(X, vol_\omega)$ também é limitado. Com efeito, temos que

$$||e^{t\Delta_\omega} f||_\infty \leqslant C_{w,t}||f||_1,$$

e por Cauchy–Schwarz

$$\begin{aligned} C_{\omega,t}\int_X |f|\ \boldsymbol{d}vol_\omega(x) &\leqslant \left(\int_X 1\ \boldsymbol{d}vol_\omega(x)\right)^{1/2}\left(\int_X |f|^2\ \boldsymbol{d}vol_\omega(x)\right)^{1/2} \\ &= (vol_\omega(X))^{1/2}||f||_2, \end{aligned}$$

donde

$$||e^{t\Delta_\omega} f||_\infty \leqslant c(t)||f||_2, \tag{4.3}$$

com $c(t) = (vol_\omega(X))^{1/2}C_{\omega,t}^{-1}$. Isso mostra que o semigrupo $e^{t\Delta_\omega}$ é ultracontrativo.

Teorema 4.1. *O semigrupo e^{-tH_ω} agindo em $L^2(X, vol_\omega)$ tem um núcleo estritamente positivo em $C^\infty((0,\infty) \times X \times X)$.*

Demonstração. Vide Teorema (5.2.1) de [32] para detalhes. □

Teorema 4.2. *Seja $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega} = \{-\Delta_\omega + V_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ um operador aleatório com potencial suave $V_\omega \in C^\infty(X)$. Então, o núcleo k_{H_ω} tem um representante não-negativo em $C^\infty((0,\infty) \times X \times X)$. Além disso, temos:*

1. *O núcleo k_{H_ω} é solução para equação do calor*

$$\left(\frac{d}{dt} - \Delta_\omega^y + V_\omega\right) k_{H_\omega}(t, x, y) = 0,$$

onde $-\Delta_\omega^y$ denota o operador $-\Delta_\omega$ agindo na variável y;

2. *Para todo $x \in X$, o núcleo $k_{H_\omega}(t, x, \cdot)$ converge fracamente quando $t \to 0$ para a medida atômica δ_x, isto é, para toda $f : X \to \mathbb{R}$ limitada e contínua, temos que*

$$\lim_{t\to 0}\int k_{H_\omega}(t, x, y) f(y)\ dy = f(x).$$

Demonstração. Pelo Teorema (4.1) temos que k_{H_ω} tem um representante em $C^\infty((0,\infty) \times X \times X)$. Já que e^{-tH_ω} é preservado positivamente, concluímos que $k_{H_\omega} \geqslant 0$. Agora, sendo k_{H_ω} a função de Green por definição, segue-se que k_{H_ω} é a solução fundamental para equação do calor (vide Teorema (A.11) para detalhes.) e isso mostra o item (1).

Para mostrar (2), devemos observar que o espaço onde o núcleo está definido é um espaço de medida de Lebesgue finita. Assim, Pelo Teorema de Portemanteau[2], convergência

[2] Vide Teorema (A.26) para detalhes.

vaga e convergência fraca coincidem (vide Definição (A.7) para detalhes), e é suficiente tomar $f \in C_c(X)$, onde $C_c(X)$ é o conjunto das funções contínuas de suporte compacto.

Segue-se do Teorema de Stone-Weierstrass que $C_c^\infty(X)$ é denso em $C_c(X)$ com respeito à norma sup. Sabemos que a aplicação identidade $\mathbf{I} : (C_c(X), ||\cdot||_\infty) \to (C_c(X), ||\cdot||_2)$ é contínua. Logo, $C_c^\infty(X)$ é denso em $C_c(X)$ na norma $||\cdot||_2$. Pelo Teorema de Lusin (vide Teorema (A.27) para detalhes), temos que $C_c(X)$ é denso em $L^2(X, vol_\omega)$ na norma $||\cdot||_2$, e assim C_c^∞ é denso em $L^2(X, vol_\omega)$ na norma $||\cdot||_2$. Assim, podemos restringir nossa argumentação para C_c^∞.

Para $f \in C_c^\infty$, temos que $-\Delta_\omega f \in C_c^\infty(X)$, donde segue que $f \in dom(-\Delta_\omega^m)$ com condição de Dirichlet e para qualquer inteiro m. Como $V_\omega \in C_c^\infty$, segue que $(-\Delta_\omega + V_\omega)f \in C_c^\infty$. Pelo cálculo funcional, para $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ boreliana, temos que

$$F(H_\omega) = \int_{\sigma(H_\omega)} F(x)\; dE^{H_\omega}(x), \tag{4.4}$$

com

$$dom(F(H_\omega)) = \left\{ f \in \mathcal{H} \;:\; \int_{\sigma(H\omega)} |F(x)|^2\; d\mu_f^{H_\omega}(x) \right\}.$$

Segue-se que

$$H_\omega^m f = \int_0^\infty x^m\; dE^{H_\omega}(x) f(x)$$

e

$$H_\omega^m T_t f = \int_0^\infty x^m e^{-tx}\; dE^{H_\omega}(x) f(x),$$

onde T_t é um semigrupo. Isso implica

$$||H_\omega^m(T_t f - f)||_{L^2}^2 = \int_0^\infty x^{2m}(1 - e^{-tx})^2\; d\mu_f^{H_\omega}.$$

Já que $x^{2m}(1 - e^{-tx})^2$ é limitada pela função integrável x^{2m} (uma vez que $H_\omega f \in dom(H_\omega^m) \subset L^2$, para todo $t > 0$, e que $x^{2m}(1 - e^{-tx})^2 \to 0$ quando $t \to 0$), então pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$||H_\omega^m(T_t f - f)||_{L^2} \to 0 \text{ quando } t \to 0.$$

Podemos ver que $T_t f - f \to 0$ no espaço de Sobolev[3] $\mathcal{W}_{loc}^\infty$, o que implica, pelo Corolário (A.5), que

$$T_t f \xrightarrow[C^\infty]{} f,$$

e isso encerra a demonstração. $\square$

[3] Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{W}_{loc}^{2k}(X) = \{f \mid f, -\Delta_\omega f, \cdots, -\Delta_\omega^k f \in L_{loc}^2(X)\}$. Considere por $\mathcal{W}_{loc}^\infty = \bigcap_{k=1}^{k=\infty} \mathcal{W}_{loc}^{2k}(X)$.

A seguir, apresentamos limites superiores explícitos para os núcleos. Essas estimativas foram demostradas em [33] para soluções fundamentais da equação do calor. É de se esperar, naturalmente, que a solução fundamental e o núcleo de calor do semigrupo coincidam sob algumas suposições de regularidade.

Seja $d_\omega : X \times X \to [0, \infty)$ a função distância Riemanniana em X com respeito a g_ω e seja d_0 a função distância Riemanniana com respeito a g_0.

Proposição 4.1. *Para todo $t > 0$, existem constantes $C_t > 0$ e $\alpha_t > 0$ tais que*

$$k_{-\Delta_\omega}(t, x, y) \leqslant C_t \exp(-\alpha_t d_0^2(x, y)) \tag{4.5}$$

para todo $\omega \in \Omega$. Em particular, valem as seguintes afirmações:

1. *$C_{\omega,t} \leqslant C_t$ para todo $\omega \in \Omega$, onde $C_{\omega,t}$ foi definido em (4.1).*

2. *Para todo $m > 0$, existe $\mathfrak{B}_{t,m} < \infty$ tal que a estimativa*

$$\int_X (k_{-\Delta_\omega}(t, x, y))^m \, dvol_\omega(y) \leqslant \mathfrak{B}_{t,m}$$

vale uniformemente em $x \in X$ e $\omega \in \Omega$; faça $\mathfrak{B}_t := \mathfrak{B}_{t,1}$.

Demonstração. A desigualdade (4.5) é uma aplicação direta do Corolário (3.1) de [33] (Propriedade de Li e Yau) para um operador de Schrödinger fixo. Seja $\mathbf{V}$ o volume dado pela bola aberta $B_x(\sqrt{t})$ de raio $\sqrt{t}$ centrada em $x \in X$. Pelo Corolário (3.1) de [33], podemos fazer uma estimativa para o núcleo de calor usando argumentos geométricos da variedade como segue:

$$k_\omega(t, x, y) \leqslant C(\varepsilon)^\alpha \mathbf{V}_\omega^{1/2}(B_x(\sqrt{t}))\mathbf{V}_\omega^{1/2}(B_y(\sqrt{t})) \exp\left(\mathcal{C}\varepsilon(\alpha - 1)^{-1} K t - \frac{r^2(x, y)}{(4 + \varepsilon)t}\right), \tag{4.6}$$

onde $K \geqslant 0$ é uma constante, $1 < \alpha < 2$, $0 < \epsilon < 1$, $\mathcal{C}$ é uma constante que depende da dimensão da variedade e $C(\varepsilon)$ depende apenas de ε, com $C(\varepsilon) \to \infty$ quando $\varepsilon \to 0$. Usando (4.6) para o modelo estudado neste trabalho, temos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}^{1/2}(B_x(\sqrt{t})) &= \int_{B_x(\sqrt{t})} dvol_\omega(x) = \int_{B_x(\sqrt{t})} \frac{\rho_\omega(x)}{\rho_\omega(x)} \, dvol_\omega(x) \\
&= \int_{B_x(\sqrt{t})} \frac{1}{\rho_\omega(x)} \, dvol_0(x) \leqslant C_g^{n/2} \int_{B_x(\sqrt{t})} dvol_0(x),
\end{aligned}$$

donde se segue que $k_\omega(t, x, y) \leqslant C_g^{n/2} \int\limits_{B_x(\sqrt{t})} dvol_0(x)$ não depende de $\omega \in \Omega$. Então, temos que

$$C(\varepsilon)^\alpha \mathbf{V}_\omega^{1/2}(B_x(\sqrt{t}))\mathbf{V}_\omega^{1/2}(B_y(\sqrt{t})) \exp\left(\mathcal{C}\varepsilon(\alpha - 1)^{-1} K t\right) = C_t \tag{4.7}$$

e

$$\exp\left(-\frac{r^2(x, y)}{(4 + \varepsilon)t}\right) = \exp(-\alpha_t d_0^2(x, y)),$$

com $r^2(x,y) = d_0^2(x,y)$. Pela propriedade (3) da Definição (1.3), por (1.5) e por

$$C_g^{-1} d_0(x,y) \leqslant d_\omega(x,y) \leqslant C_g d_0(x,y), \tag{4.8}$$

segue-se que a constante C_t não depende de $\omega \in \Omega$. Além disso, para medir a distância entre os pontos x e y, podemos sempre substituir d_ω por d_0 aumentando α_t e isso mostra que o modelo obedece a Propriedade de Li e Yau.

Para demonstrar (1), segue-se do Lema (A.4) e Teorema (A.9) que $C_{\omega,t} = \sup \text{ess}\, k_{-\Delta_\omega}(t,x,y)$ (com respeito à medida de Lebesgue). Logo, para todo $\tilde{\varepsilon} > 0$ existe um conjunto $\mathbb{A}_{\tilde{\varepsilon}}$ de medida de Lebesgue positiva tal que $C_{\omega,t} - \tilde{\varepsilon} < k_{-\Delta_\omega}(t,x,y)$ para todos $x, y \in \mathbb{A}_{\tilde{\varepsilon}}$. Temos, por (4.5), que $k_{-\Delta_\omega}(t,x,y) \leqslant C_t \exp(-\alpha_t d_0^2(x,y)) \leqslant C_t$ para todos $t \geqslant 0$, $\omega \in \Omega$ e $x, y \in X$. Assim, $C_{\omega,t} - \tilde{\varepsilon} \leqslant C_t$ donde $C_{\omega,t} \leqslant C_t$.

Para demonstrar (2), usaremos o Teorema de Comparação de Bishop[4] para controlar o crescimento dos volumes das bolas. Isso nos diz que o limite inferior $(d-1)K \in \mathbb{R}$ na curvatura de Ricci é suficiente para limitar o crescimento do volume das bolas à medida que o raio aumenta. O volume da bola pode ser estimado pelo volume de uma bola com o mesmo raio em um espaço com curvatura constante K. Este último volume cresce no máximo exponencialmente com o raio. Para nossos propósitos, é necessário ter uma versão ω-uniforme da estimativa de crescimento de volume. Usando as propriedades (2) e (4) da Definição (1.3), e as relações (1.5), obtemos o limite uniforme

$$\begin{aligned} vol_\omega(\{y \mid d_\omega(x,y) < r\}) &= \int_{B(r)_\omega} \frac{\rho_\omega(x)}{\rho_\omega(x)}\, \boldsymbol{d}vol_\omega(x) = \int_{B(r)_\omega} \frac{1}{\rho_\omega(x)}\, \boldsymbol{d}vol_0(x) \\ &\leqslant C_g^{n/2} \int_{B(r)_\omega} \boldsymbol{d}vol_0(x) \leqslant C_g^{n/2} \int_{B(rC_g)_0} \boldsymbol{d}vol_0(x) \\ &= vol_0(\{y \mid d_0(x,y) < rC_g\}) \\ &\leqslant C_1 e^{rC_2} \end{aligned}$$

para todo $x \in X$, onde B_ω e B_0 são as bolas centras em y com $d_\omega(x,y) < r$ e $d_0(x,y) < C_g r$ respectivamente e C_1 e C_2 são independentes de x e ω.

Isso implica que para todo $m > 0$ temos, por (4.5), que

$$(k_{-\Delta_\omega}(t,x,y))^m \leqslant C_t^m \exp(-\alpha_t d_0^2(x,y) m),$$

donde

$$\begin{aligned} \int (k_{-\Delta_\omega}(t,x,y))^m\, dvol_\omega(y) &\leqslant C_t^m \int \exp(-\alpha_t d_0^2(x,y)m)\, dvol_\omega(y) \\ &= C_t^m \int \exp(-\alpha_t d_0^2(x,y)m) \frac{\rho_\omega(x)}{\rho_\omega(x)}\, dvol_\omega(y) \\ &= C_t^m \int \exp(-\alpha_t d_0^2(x,y)m) \frac{1}{\rho_\omega(x)}\, dvol_0(y) \\ &\leqslant C_g^{n/2} C_t^m \int \exp(-\alpha_t d_0^2(x,y)m)\, dvol_0(y), \end{aligned}$$

[4] Vide Teorema (A.29) para detalhes.

com

$$C_g^{n/2} C_t^m \int \exp(-\alpha_t d_0^2(x,y)m)\ dvol_0(y) =: \mathfrak{B}_{t,m}.$$

Assim,

$$\int (k_{-\Delta_\omega}(t,x,y))^m\ dvol_\omega(y) \leqslant \mathfrak{B}_{t,m},$$

como desejado, e isso encerra a demonstração. □

Os resultados da Proposição (4.1) podem ser estendidos para operadores perturbados, i.e, para $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$. Para isso, precisaremos da Fórmula de Feynman-Kac (vide Teorema (A.24) para detalhes)

$$e^{-tH_\omega} f(x) = \mathbf{E}_x \left(\exp\left(-\int_0^t V_\omega(\mathcal{X}_s)\ ds \right) f(\mathcal{X})_t \right), \tag{4.9}$$

onde $\mathbf{E}_x$ é o valor esperado com respeito ao movimento Browniano $\mathcal{X}_t$ começando em x. Usando propriedades de semigrupo e teoremas de convergência para integrais como feito na demonstração do Teorema (A.24), podemos estender a validade desta fórmula para potenciais não-negativos L^1_{loc}.

Corolário 4.1. *Para um aberto D arbitrário e $t > 0$, valem as desigualdades*

$$0 \leqslant k_{H_\omega^D}(t,x,y) \leqslant k_{H_\omega}(t,x,y) \leqslant C_t \exp(-\alpha_t d_0^2(x,y)) \tag{4.10}$$

para todos $x, y \in D$, com C_t dado por (4.7). Em particular, a integral estimada na Proposição (4.1) item (2) também vale para o operador perturbado H_ω para quase todo $x \in X$.

Demonstração. Pela definição da Fórmula de Feynman-Kac, temos

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \int_X k_{H_\omega}(t,x,y) f(y)\ dy &= \mathbf{E}_x \left(\exp\left(-\int_0^t V_\omega(\mathcal{X}_s)\ ds \right) f(\mathcal{X}_t) \right) \\ &\leqslant \mathbf{E}_x(f(\mathcal{X}_t)) = \int_X k_{-\Delta_\omega}(t,x,y) f(y)\ dy \end{aligned}$$

para toda $f \in L^2(X, vol_\omega)$. Pela Proposição (4.1), temos que

$$0 \leqslant k_{H_\omega}(t,x,y) \leqslant C_t \exp(-\alpha_t d_0^2(x,y)),$$

para quase todos $x, y \in X$. Para a desigualdade referente a $k_{H_\omega^D}$, considere a sequência de subconjuntos $D_j \subset D$ tal que D_j tem fecho compacto e $\overline{D_j} \subseteq D_{j+1}$ para todo j e $\bigcup_j D_j = D$ com $D \subset X$. Seja χ_j a função característica de $X \backslash D_j$. Então, o operador $(H_\omega + m\chi_j) = H_\omega^{D_j,m}$ cresce monotonicamente quando $m \to \infty$, ou seja,

$$\langle f, (H_\omega + m\chi_j) f\rangle_\omega \leqslant \langle f, (H_\omega + (m+1)\chi_j) f\rangle_\omega.$$

Seja também $\mathcal{Q}^{D_j,m} = \langle (H_\omega^{D_j,m})^{1/2} f, (H_\omega^{D_j,m})^{1/2} f\rangle_\omega$ a forma associada ao operador $(H_\omega + m\chi_j)$ tal que $\lim\limits_{m\to\infty} \mathcal{Q}^{D_j,m} =: \mathcal{Q}^{D_j}$. Então, pelo Teorema (A.4), existe um operador auto-adjunto H_ω^D com $dom(\mathcal{Q}^{D_j}) \subseteq \bigcap\limits_j dom(\mathcal{Q}^{D_j,m})$ tal que

$$\langle (H_\omega^{D_j})^{1/2} f, (H_\omega^{D_j})^{1/2} f, \rangle_\omega = \lim_{m\to\infty} \langle (H_\omega + m\chi_j)^{1/2} f, (H_\omega + m\chi_j)^{1/2} f\rangle_\omega$$

para toda $f \in dom(\mathcal{Q}^{D_j})$. Pelo Teorema (A.5), as formas $\mathcal{Q}^{D_j}$ decrescem e convergem quando $j \to \infty$ para $\mathcal{Q}^D$, porque $C_c^\infty(D)$ é um cerne para $\mathcal{Q}$ e toda $f \in C_c^\infty(D)$ também pertence ao $dom(\mathcal{Q}^{D_j})$. Agora, pela Fórmula de Trotter, temos que

$$0 \leqslant \exp(-(H_\omega^D + m\chi_j)t) f \leqslant \exp(-H_\omega^D t) f$$

para toda $0 \leqslant f \in L^2(D)$ e todo $\omega \in \Omega$. Então, tomando os dois limites, vale que

$$0 \leqslant \exp(-H_\omega^D t) f \leqslant \exp(-H_\omega t) f. \tag{4.11}$$

A equivalência entre (4.10) e (4.11) é padrão e isso encerra a demonstração. □

Finalmente, para $vol_\omega(D) < \infty$, a estimativa $0 \leqslant k_{H_\omega^D}(t,x,y) \leqslant C_t$ implica que $\exp(-tH_\omega^D)$ é um operador de Hilbert-Schmidt compacto. Pelo Corolário (A.1), o espectro é puramente discreto, com exceção do 0 (único ponto de acumulação). Segue do Teorema de Mapeamento Espectral[5], que para todo $t > 0$,

$$\sigma(H_\omega^D) = \left\{ -\frac{1}{t}\log(e^{-t\lambda}) \mid \lambda \in \sigma(e^{-tH_\omega^D})/\{0\} \right\}$$

e assim, H_ω^D tem espectro puramente discreto (note que $+\infty$ é o único ponto de acumulação de $\sigma(H_\omega^D)$, limite da sequência $-\frac{1}{t}\log(e^{-t\lambda_n})$ quando $\lambda_n \to 0$, $\lambda_n \in \sigma(e^{-tH_\omega^D})$).

[5] Vide Proposição (A.1) para detalhes.

5 O Princípio de Não Sentir a Fronteira

Neste capítulo, mostraremos que os semigrupos associados aos operadores aleatórios $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$, sob certas condições, satisfazem o princípio de não sentir a fronteira.

Seja D um aberto da variedade X. É esperado que a diferença entre os núcleos de calor $k_{H_\omega^D}(t,x,y)$ e $k_{H_\omega}(t,x,y)$ seja pequena para $t>0$ e para x e y longe o suficientemente da fronteira de D. Este fenômeno é chamado de princípio de não sentir a fronteira, equivalente na Física ao procedimento de desprezar as condições de contorno. Para tratar este fenômeno de maneira rigorosa, introduziremos a noção de fronteira com espessura. Assim, para $\zeta>0$ faça $\partial_\zeta D := \{x\in X \mid d_0(x,\partial D)\leqslant \zeta\}$ e defina por D_ζ o interior do conjunto $D\backslash\partial_\zeta D$.

Iniciamos a nossa discussão apresentando o princípio do máximo para equação do calor com potencial não-negativo. Heuristicamente, pelo princípio do máximo, a contribuição da fronteira para o comportamento do núcleo do semigrupo pouco afeta o seu comportamento no interior do domínio $D\subset X$, daí a ideia de não sentir a fronteira.

Lema 5.1. *Sejam $D\subset X$ um aberto com fecho compacto, $V\geqslant 0$ e*

$$u\in C([0,T)\times\overline{D})\cap C^2((0,T)\times D)$$

uma solução para equação do calor

$$\frac{\partial}{\partial t}u+(-\Delta+V)u=0 \quad \text{em} \quad (0.T)\times D$$

com supremo não-negativo $s=\sup\{u(t,x)\mid (t,x)\in[0.T)\times\overline{D}\}$. Então,

$$s=\max\left\{\max_{x\in\overline{D}} u(0,x), \sup_{[0,T)\times\overline{\partial D}} u(t,x)\right\}.$$

Demonstração. É suficiente mostrar que para qualquer $c\geqslant 0$, a afirmação

$$u<c \text{ em } (\{0\}\times\overline{D})\cup([0,T)\times\partial D) \tag{5.1}$$

implica $u\leqslant c$ em $[0,T)\times D$. Para tanto, definiremos a função auxiliar $u_\xi(t,x)=u(t,x)-\xi t$, $\xi>0$, e mostraremos que (5.1) implica que $u_\xi(t_0,x_0)<c$ em $[0,T)\times D$.

Assuma que a afirmação é falsa. Então, existe $(t_0,x_0)\in(0,T)\times D$ tal que $u_\xi(t_0,x_0)>c$. Por continuidade, a função $f(t):=\max_{x\in\overline{D}} u_\xi(t_0,x_0)>c$ está bem definida e $t_1:=\min_{t\geqslant 0}\{t\mid f(t)=c\}$ existe. Por (5.1), temos que $0<t_1\leqslant t_0$ e existe um $x_1\in D$ tal que $u_\xi(t_1,x_1)=c$. Por um lado, temos que $(\partial u_\xi/\partial t)(t_1,x_1)\geqslant 0$ e por outro lado,

$u_\xi(t_1, \cdot)$ tem um máximo global em x_1, $(\Delta_x u_\xi)(t_1, x_1) \leqslant 0$. Avaliando para (t_1, x_1), temos que

$$0 \leqslant \frac{\partial u_\xi}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} - \xi = \Delta u - Vu - \xi \leqslant -\xi < 0,$$

um absurdo. Isso encerra a demonstração □

Proposição 5.1. *Para $t, \varepsilon > 0$ fixos, existe um $\zeta = \zeta(t, \varepsilon) > 0$ tal que para todo aberto $D \subset X$ e todos $\omega \in \Omega$, $x \in D$ e $y \in D_\zeta$,*

$$0 \leqslant k_{-\Delta_\omega}(t, x, y) - k_{-\Delta_\omega^D}(t, x, y) \leqslant \varepsilon.$$

Demonstração. Mostraremos que a afirmação é verdadeira para qualquer $\zeta > 0$ satisfazendo

$$C_t \exp(-\alpha_t (\zeta/2)^2) \leqslant \varepsilon.$$

Fixe $\omega \in \Omega$ e seja $f_\delta \in C_0^\infty(B_\delta(z))$ com $0 < \delta < \zeta/2$ uma aproximação não-negativa para a distribuição-δ em $y \in D_\zeta$, e $B_\delta(z) = \{y \in X \mid d_0(y, z) < \delta\}$. Seja

$$u_1(t, x) := \int_X k_{-\Delta_\omega}(t, x, y) f_\delta(y) \, \boldsymbol{d}vol_\omega(y) = \int_D k_{-\Delta_\omega}(t, x, y) f_\delta(y) \, \boldsymbol{d}vol_\omega(y).$$

Além disso, denote por $k_{-\Delta_\omega^D}(t, x, y)$ o núcleo de calor do semigrupo $e^{t\Delta_\omega^D}$ em D com condição de Dirichlet na fronteira ∂D e defina

$$u_2(t, x) := \int_D k_{-\Delta_\omega^D}(t, x, y) f_\delta(y) \, \boldsymbol{d}vol_\omega(y).$$

Pelo Princípio da Superposição, temos que $u_1(t, x) - u_2(t, x)$ é solução para equação $(\partial_t - \Delta_\omega)u = 0$ e satisfaz a condição inicial $u_1(0, x) - u_2(0, x) = f_\delta(x) - f_\delta(x) = 0$ para todo $x \in D$. Agora, por monotonicidade do domínio, sabemos que

$$k_{-\Delta_\omega}(t, x, y) - k_{-\Delta_\omega^D}(t, x, y) \geqslant 0.$$

Assim,

$$u_1(t, x) - u_2(t, x) = \int_D (k_{-\Delta_\omega}(t, x, y) - k_{-\Delta_\omega^D}(t, x, y)) f_\delta(y) \, \boldsymbol{d}vol_\omega(y) \geqslant 0$$

para todos $t > 0$ e $x \in D$. Pelo Lema (5.1), temos que

$$u_1(t, x) - u_2(t, x) \leqslant \sup_{(0,t] \times \overline{\partial D}} \{u_1(s, w) - u_2(s, w)\}.$$

O lado direito da desigualdade acima pode ser estimado como

$$\begin{aligned} u_1(s, w) - u_2(s, w) &\leqslant \int_D k_{-\Delta_\omega}(s, w, y) f_\delta(y) \, \boldsymbol{d}vol_\omega(y) \\ &\leqslant \int_{D_{\zeta/2}} k_{-\Delta_\omega}(s, w, y) f_\delta(y) \, \boldsymbol{d}vol_\omega(y) \end{aligned}$$

(note que $f_\delta(y) = 0$ se $y \notin D_{\zeta/2}$). Já que $w \in \partial D$ e $y \in D_{\zeta/2}$, segue-se da Proposição (4.1) que

$$\int_{D_{\zeta/2}} k_{-\Delta_\omega}(s, w, y) f_\delta(y)\ \boldsymbol{d}vol_\omega(y) \leqslant C_t \exp(-\alpha_t(\zeta/2)^2) \int_{D_{\zeta/2}} f_\delta(y)\ \boldsymbol{d}vol_\omega(y) \leqslant \varepsilon.$$

Logo, para todos $t, \varepsilon > 0$ fixos, existe $\zeta > 0$ tal que para todo $D \subset X$ aberto e para todos $x \in D$ e $y \in D_\zeta$,

$$\int_D (k_{-\Delta_\omega}(t, x, y) - k_{-\Delta_\omega^D}(t, x, y)) f_\delta(y)\ \boldsymbol{d}vol_\omega(y) \leqslant \varepsilon.$$

Tomando o limite quando $\delta \to 0$, o resultado se segue. □

Proposição 5.2. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Para todos $t, \varepsilon > 0$, existe um $\zeta = \zeta(t, \varepsilon)$ tal que para todo conjunto aberto $D \subset X$ e todo $\omega \in \Omega$, temos que*

$$0 \leqslant k_{-\Delta_\omega}(t, x, y) - k_{-\Delta_\omega^D}(t, x, y) \leqslant \varepsilon,$$

para quase todos $x, y \in D_\zeta$.

2. *Para todos $t, \varepsilon > 0$, existe um $\zeta = \zeta(t, \varepsilon)$ tal que para todo conjunto aberto $D \subset X$ e todo $\omega \in \Omega$, temos que*

$$\mathbf{E}_x(\chi_{D_\zeta}(\mathcal{X}_t)\chi_{\{\tau_x^D < t\}}) \leqslant \varepsilon,$$

para quase todo $x \in D_\zeta$.

3. *Para todo operador de Schrödinger aleatório $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ e todos $t, \varepsilon > 0$, existe um $\zeta = \zeta(t, \varepsilon, H) > 0$ tal que para todo conjunto aberto $D \subset X$ e todo $\omega \in \Omega$, temos que*

$$0 \leqslant k_{H_\omega}(t, x, y) - k_{H_\omega^D}(t, x, y) \leqslant \varepsilon$$

para quase todos $x, y \in D_\zeta$.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2). Pela fórmula de Feynman-Kac para $-\Delta_\omega$ não perturbado, temos que

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x(\chi_{D_\zeta}(\mathcal{X}_t)\chi_{\{\tau_x^D < t\}}) &= \int (k_{-\Delta_\omega}(t, x, y) - k_{-\Delta_\omega^D}(t, x, y))\chi_{D_\zeta}(y)\ dy \\ &= \int (k_{-\Delta_\omega}(t, x, y) - k_{-\Delta_\omega^D}(t, x, y))^{1/2} \\ &\qquad (k_{-\Delta_\omega}(t, x, y) - k_{-\Delta_\omega^D}(t, x, y))^{1/2}\chi_{D_\zeta}(y)\ dy,\end{aligned}$$

e pela desigualdade de Hölder, $||fh||_1 \leqslant ||f||_1||h||_\infty$ com $||h||_\infty = \sup \operatorname{ess}(h)$, temos que

$$\leqslant \sup_{y \in D_\zeta} \operatorname{ess}|k_{-\Delta_\omega}(t, x, y) - k_{-\Delta_\omega^D}(t, x, y)|^{1/2} \int (k_{-\Delta_\omega}(t, x, y) - k_{-\Delta_\omega^D}(t, x, y))^{1/2}\chi_{D_\zeta}(y)\ dy.$$

Pela hipótese (1), segue-se que

$$\begin{aligned} &\leqslant \sup_{y\in D_\zeta} \text{ess}|k_{-\Delta_\omega}(t,x,y) - k_{-\Delta_\omega^D}(t,x,y)|^{1/2} \int k_{-\Delta_\omega}(t,x,y)^{1/2}\chi_{D_\zeta}(y)\ dy \\ &\leqslant \varepsilon^{1/2}\int k_{-\Delta_\omega}(t,x,y)^{1/2}\chi_{D_\zeta}(y)\ dy. \end{aligned}$$

O primeiro termo da desigualdade acima pode ser limitado por (1) e o segundo termo pode ser limitado pelo item (2) da Proposição (4.1) por $\mathfrak{B}_{t,1/2}$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Devemos mostrar que

$$\chi_{D_\zeta}(e^{-tH_\omega} - e^{-tH_\omega^D})\chi_{D_\zeta} : L^1(D_\zeta, vol_\omega) \to L^\infty(D_\zeta, vol_\omega)$$

é arbitrariamente pequeno para ζ suficientemente grande (independente de ω e D). Note que pelo cálculo funcional o operador e^{-tH_ω} é limitado. Então, pela Definição (4.4) o operador $\chi_{D_\zeta}(e^{-tH_\omega} - e^{-tH_\omega^D})\chi_{D_\zeta}$ é ultracontrativo, logo para $f \in L^1 \cap L^2$ podemos olhar para o operador

$$\chi_{D_\zeta}(e^{-tH_\omega} - e^{-tH_\omega^D})\chi_{D_\zeta} : L^2(D_\zeta, vol_\omega) \to L^\infty(D_\zeta, vol_\omega).$$

Usando a fórmula de Feynman-Kac, temos que

$$\begin{aligned} (e^{-tH_\omega} - e^{-tH_\omega^D})f(x) &= \mathbf{E}_x\left(\exp\left(-\int_0^t V_\omega(\mathcal{X}_s)ds\right)\chi_{D_\zeta}(\mathcal{X}_t)f(\mathcal{X}_t)\chi_{\{\tau_x^D<t\}}\right) \\ &\leqslant \mathbf{E}_x\left(\chi_{D_\zeta}(\mathcal{X}_t)f(\mathcal{X}_t)\chi_{\{\tau_x^D<t\}}\right) \\ &\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leqslant} \mathbf{E}_x(f(\mathcal{X}_t)^2)^{1/2}\mathbf{E}_x(\chi_{D_\zeta}(\mathcal{X}_t)\chi_{\{\tau_x^D<t\}})^{1/2} \\ &= \left(\int_X k_{-\Delta_\omega}(t,x,y)|f(y)|^2\ dy\right)^{1/2}\mathbf{E}_x(\chi_{D_\zeta}(\mathcal{X}_t)\chi_{\{\tau_x^D<t\}})^{1/2} \\ &\overset{\text{por (4.1)}}{\leqslant} C_{\omega,t}^{1/2}\left(\int_X |f(y)|^2\ dy\right)^{1/2}\mathbf{E}_x(\chi_{D_\zeta}(\mathcal{X}_t)\chi_{\{\tau_x^D<t\}})^{1/2} \\ &= C_{\omega,t}^{1/2}\ ||f||_{L^2}\ \mathbf{E}_x(\chi_{D_\zeta}(\mathcal{X}_t)\chi_{\{\tau_x^D<t\}})^{1/2} \\ &\overset{\text{pelo item (2)}}{\leqslant} C_{\omega,t}^{1/2}\ ||f||_{L^2}\ \varepsilon. \end{aligned}$$

(3) $\Rightarrow$ (1). É imediato, escolhendo $V_\omega = 0$. □

O resultado principal deste capítulo é o Teorema que se segue, resultado este que pode ser interpretado como "princípio de não sentir a fronteira".

Teorema 5.1. *Para todos $t, \varepsilon > 0$, existe um $\zeta = \zeta(t,\varepsilon) > 0$ tal que para todo conjunto aberto $D \subset X$ e todo $\omega \in \Omega$, temos que*

$$0 \leqslant k_{H_\omega}(t,x,y) - k_{H_\omega^D}(t,x,y) \leqslant \varepsilon, \tag{5.2}$$

para quase todos $x, y \in D_\zeta$.

Demonstração. O resultado segue diretamente da Proposição (5.2). □

Podemos perceber pelo Teorema (5.1) que a fronteira não interfere no comportamento do núcleo de calor para o operador de Schrödinger $\{H_\omega\}_{\omega \in \Omega}$. Tal propriedade desempenha um papel fundamental na demonstração do Teorema (1.4), como veremos no próximo capítulo.

6 Densidade Integrada de Estados

Neste capítulo apresentamos a demonstração do Teorema (1.4). Para tanto, mostraremos que a IDS definida pela identidade (1.9) coincide com o limite de um processo de exaustão para quase todo $\omega \in \Omega$, e isso demonstra a propriedade de auto-média da IDS apresentada no Teorema (1.4).

Começaremos, como de praxe, introduzindo alguns conceitos necessários para o desenvolvimento deste capítulo.

Definição 6.1. *Uma sequência de Følner* $\{\mathcal{G}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *será uma* ***sequência de Følner temperada*** *se crescer monotonicamente e satisfazer*

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{|\mathcal{G}_j\mathcal{G}_{j-1}^{-1}|}{|\mathcal{G}_j|} < \infty. \tag{6.1}$$

A equação (6.1) é chamada de ***Condição de Shulman***. Segue-se de [20] que uma sequência de Følner será temperada se satisfizer a Condição de Shulman.

Proposição 6.1. *Toda sequência de Følner* $\mathcal{G}_j$ *tem uma subsequência temperada. Em particular, todo grupo amenable tem uma sequência de Følner temperada.*

Demonstração. Seja $\mathcal{G}_n$ uma sequência de Følner. Provemos por indução. Começamos com $n_1 = 1$. Se $n_1, \cdot\cdot\cdot, n_i$ foram determinados, faça $\tilde{\mathcal{G}}_i = \bigcup_{j\leqslant i} \mathcal{G}_{n_j}$ e tome n_{i+1} suficientemente grande tal que $\mathcal{G}_{n_i+1}$ é $(\tilde{\mathcal{G}}_i^{-1}, 1/|\tilde{\mathcal{G}}_i|)$-invariante. Um cálculo direto mostra que

$$\left|\bigcup_{j\leqslant i} \mathcal{G}_{n_j}^{-1}\mathcal{G}_{n_i+1}\right| < 2|\mathcal{G}_{n_i+1}|,$$

e portanto a sequência satisfaz a Condição de Shulman. $\square$

Definição 6.2. *Uma sequência* $\{D^j\}_j$ *de subconjuntos de* X *será uma* ***sequência admissível*** *para* X *se satisfazer (1.8) e (6.1), com* $\bigcup_j \mathcal{G}_j = \Gamma$ *tal que* $D^j = \phi(\mathcal{G}_j)$ *para todo* $j \in \mathbb{N}$ *em que*

$$\phi(\mathcal{G}) := int\left(\bigcup_{\gamma\in\mathcal{G}} \gamma\overline{\mathcal{F}}\right) \subset X.$$

Pelo Lema (A.6), temos que uma sequência admissível satisfaz a propriedade isoperimétrica

$$\lim_{j\to\infty} \frac{vol_0(\partial_\zeta D^j)}{vol_0(D^j)} = 0, \quad \text{para todo} \quad \zeta > 0. \tag{6.2}$$

Segue-se de (1.6) que a identidade (6.2) satisfaz

$$\lim_{j\to\infty} \frac{vol_\omega(\partial_\zeta D^j)}{vol_\omega(D^j)} = 0, \quad \text{para todo} \quad \zeta > 0. \tag{6.3}$$

O próximo resultado é a principal ferramenta empregada na demonstração do Teorema (1.4).

Teorema 6.1. *(Teorema Ergódico de Lindenstrauss) Seja Γ um grupo discreto e amenable atuando ergodicamente em um espaço de probabilidade $(\Omega, B_\Omega, \mathbb{P})$ por transformações que preservam medida. Seja também $\{\mathcal{G}_j\}_j$ uma sequência de Følner temperada. Então, para toda $f \in L^1(\Omega, \mathbb{P})$, para quase todo $\omega \in \Omega$, temos que*

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{|\mathcal{G}_j|} \sum_{\gamma\in\mathcal{G}_j} f(\gamma\omega) = \mathbb{E}(f), \tag{6.4}$$

com a identidade válida em L^1.

Demonstração. Vide Teorema (1.2) de [20] e Corolário (4.6) de [34] para detalhes. □

Os resultados das duas últimas seções serão usados na demonstração do seguinte lema sobre núcleo de calor.

Lema 6.1. *Sejam $\{D^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência admissível e $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ um operador aleatório. Então, valem as seguintes afirmações:*

1. $\sup_{\omega\in\Omega} vol_\omega(D^j)^{-1}|Tr(\chi_{D^j} e^{-tH_\omega}) - Tr(e^{-tH_\omega^{D^j}})| \to 0$, *quando* $j \to \infty$.
2. *Existe uma constante $C > 0$ com $Tr(\chi_{\mathcal{F}}\ e^{-tH_\omega}) \leqslant C$ para todo $\omega \in \Omega$.*
3. *A aplicação $\omega \to Tr(\chi_{\mathcal{F}}\ e^{-tH_\omega})$ é mensurável.*

Demonstração. 1) Já que $e^{-tH_\omega} = e^{-tH_\omega/2}\ e^{-tH_\omega/2}$ (pela Fórmula de Lie-Trotter para $H_\omega \geqslant 0$), e pelos Teoremas (A.9) e (A.10) (os quais mostram que podemos expressar o traço de um operador do tipo Hilbert-Schmidt através da integral do núcleo de calor do operador), segue-se do cálculo funcional que

$$Tr(\chi_{D^j}\ e^{-tH_\omega}) = \int_{D^j}\int_{D^j} k_{H_\omega}(t/2,x,y)^2\ \boldsymbol{d}vol_\omega(x)\boldsymbol{d}vol_\omega(y) \tag{6.5}$$

e

$$Tr(e^{-tH_\omega}) = \int_{D^j}\int_{D^j} k_{H_\omega^{D^j}}(t/2,x,y)^2\ \boldsymbol{d}vol_\omega(x)\boldsymbol{d}vol_\omega(y). \tag{6.6}$$

Podemos expressar a diferença entre as identidades (6.5) e (6.6) usando

$$k_{H_\omega}^2 - k_{H_\omega^{D^j}}^2 = (k_{H_\omega} - k_{H_\omega^{D^j}})(k_{H_\omega} + k_{H_\omega^{D^j}})$$

e assim, pelo Teorema (5.1),

$$0 \leqslant Tr(\chi_{D^j} e^{-tH_\omega}) - Tr(e^{-tH_\omega^{D^j}}) = \int_{D^j}\int_{D^j} (k_{H_\omega} - k_{H_\omega^{D^j}})(k_{H_\omega} + k_{H_\omega^{D^j}})\ \boldsymbol{d}vol_\omega(x)\boldsymbol{d}vol_\omega(y).$$

Decompondo o domínio como

$$D^j \times D^j = (D^j \times D^j_\zeta) \cup (D^j \times \partial_\zeta D^j) = (D^j_\zeta \times D^j_\zeta) \cup (\partial_\zeta D^j \times D^j_\zeta) \cup (D^j_\zeta \times \partial_\zeta D^j) \cup (\partial_\zeta D^j \times \partial_\zeta D^j),$$

temos que

$$\begin{aligned}
&\int_{D^j}\int_{D^j} (k_{H_\omega} - k_{H_\omega^{D^j}})(k_{H_\omega} + k_{H_\omega^{D^j}})\ \boldsymbol{d}vol_\omega(x)\boldsymbol{d}vol_\omega(y) = \\
&\quad \int_{\partial_\zeta D^j}\int_{\partial_\zeta D^j} (k_{H_\omega} - k_{H_\omega^{D^j}})(k_{H_\omega} + k_{H_\omega^{D^j}})\ \boldsymbol{d}vol_\omega(x)\boldsymbol{d}vol_\omega(y) + \\
&\quad \int_{D^j_\zeta}\int_{\partial_\zeta D^j} (k_{H_\omega} - k_{H_\omega^{D^j}})(k_{H_\omega} + k_{H_\omega^{D^j}})\ \boldsymbol{d}vol_\omega(x)\boldsymbol{d}vol_\omega(y) + \\
&\quad \int_{\partial_\zeta D^j}\int_{D^j_\zeta} (k_{H_\omega} - k_{H_\omega^{D^j}})(k_{H_\omega} + k_{H_\omega^{D^j}})\ \boldsymbol{d}vol_\omega(x)\boldsymbol{d}vol_\omega(y) + \\
&\quad \int_{D^j_\zeta}\int_{D^j_\zeta} (k_{H_\omega} - k_{H_\omega^{D^j}})(k_{H_\omega} + k_{H_\omega^{D^j}})\ \boldsymbol{d}vol_\omega(x)\boldsymbol{d}vol_\omega(y).
\end{aligned}$$

Podemos estimar o primeiro termo da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial_\zeta D^j}\int_{\partial_\zeta D^j} (k_{H_\omega} - k_{H_\omega^{D^j}})(k_{H_\omega} + k_{H_\omega^{D^j}})\ \boldsymbol{d}vol_\omega(x)\boldsymbol{d}vol_\omega(y) \\
&\qquad \leqslant \int_{\partial_\zeta D^j}\int_{\partial_\zeta D^j} k_{H_\omega}(k_{H_\omega} + k_{H_\omega^{D^j}})\ \boldsymbol{d}vol_\omega(x)\boldsymbol{d}vol_\omega(y) \\
&\qquad \leqslant C_{t/2}\int_{\partial_\zeta D^j}\int_{\partial_\zeta D^j} (k_{H_\omega} + k_{H_\omega^{D^j}})\ \boldsymbol{d}vol_\omega(x)\boldsymbol{d}vol_\omega(y) \\
&\qquad \leqslant 2C_{t/2}\int_{\partial_\zeta D^j}\int_{\partial_\zeta D^j} k_{H_\omega}\ \boldsymbol{d}vol_\omega(x)\boldsymbol{d}vol_\omega(y);
\end{aligned}$$

agora, pela Proposição (4.1) e por Fubini, temos que

$$\begin{aligned}
2C_{t/2}\int_{\partial_\zeta D^j}\int_{D^j_\zeta} k_{H_\omega}\ \boldsymbol{d}vol_\omega(x)\boldsymbol{d}vol_\omega(y) &\leqslant 2C_{t/2}\mathfrak{B}_{t/2}\int_{\partial_\zeta D^j} \boldsymbol{d}vol_\omega(x)\boldsymbol{d}vol_\omega(y) \\
&= 2C_{t/2}\mathfrak{B}_{t/2} vol_\omega(\partial_\zeta D^j).
\end{aligned}$$

Considerações análogas nos permitem concluir que a mesma estimativa segue para o 2º e 3º termos.

Para o último termo, fixemos $\varepsilon > 0$ e escolhamos $\zeta = \zeta(t/2, \varepsilon)$ de acordo com o Teorema (5.1). Assim, pelo Teorema (5.1), temos que $0 \leqslant k_{H_\omega}(t,x,y) - k_{H_\omega^{D^j}}(t,x,y) \leqslant \varepsilon$ para todos $x \in D$, $y \in D_\zeta$, e portanto

$$\begin{aligned}
&\int_{D^j_\zeta}\int_{D^j_\zeta} (k_{H_\omega} - k_{H_\omega^{D^j}})(k_{H_\omega} + k_{H_\omega^{D^j}})\ \boldsymbol{d}vol_\omega(x)\boldsymbol{d}vol_\omega(y) \leqslant \\
&\qquad \varepsilon\int_{D^j_\zeta}\int_{D^j_\zeta} (k_{H_\omega} + k_{H_\omega^{D^j}})\ \boldsymbol{d}vol_\omega(x)\boldsymbol{d}vol_\omega(y) \leqslant 2\varepsilon\int_{D^j_\zeta}\int_{D^j_\zeta} k_{H_\omega}\ \boldsymbol{d}vol_\omega(x)\boldsymbol{d}vol_\omega(y).
\end{aligned}$$

Agora, pelo item (2) da Proposição (4.1) e por Fubini, temos que

$$2\varepsilon \int_{D_\zeta^j} \int_{D_\zeta^j} k_{H_\omega} \ \boldsymbol{d}vol_\omega(x)\boldsymbol{d}vol_\omega(y) \leqslant 2\varepsilon\mathfrak{B}_{t/2} \int_{D_\zeta^j} \boldsymbol{d}vol_\omega(y) = 2\varepsilon\mathfrak{B}_{t/2} vol_\omega(D^j).$$

Combinando as estimativas anteriores, segue-se que

$$\frac{1}{vol_\omega(D^j)}\left(Tr(\chi_{D^j}e^{-tH_\omega}) - Tr(e^{-tH_\omega^{D^j}})\right) \leqslant 2\varepsilon\mathfrak{B}_{t/2} + \left(2C_{t/2}\mathfrak{B}_{t/2}\frac{vol_\omega(\partial_\zeta D^j)}{vol_\omega(D^j)}\right).$$

Por fim, tomando o limite $j \to \infty$, segue-se da identidade (6.3) que

$$\sup_{\omega\in\Omega} vol_\omega(D^j)^{-1}|Tr(\chi_{D^j}e^{-tH_\omega}) - Tr(e^{-tH_\omega^{D^j}})| < 2\varepsilon\mathfrak{B}_{t/2}.$$

O resultado se segue da arbitrariedade de $\varepsilon > 0$.

2) Temos que

$$Tr(\chi_{\mathcal{F}}e^{-tH_\omega}) = \int_{\mathcal{F}}\int_{\mathcal{F}} k_{H_\omega}(t/2, x, y)^2 \ \boldsymbol{d}vol_\omega(x)\boldsymbol{d}vol_\omega(y),$$

e assim, por Fubini e pelo item (2) da Proposição (4.1), obtemos

$$Tr(\chi_{\mathcal{F}}e^{-tH_\omega}) = \int_{\mathcal{F}}\int_{\mathcal{F}} k_{H_\omega}(t/2, x, y)^2 \ \boldsymbol{d}vol_\omega(y)\boldsymbol{d}vol_\omega(x) \leqslant \mathfrak{B}_{t/2,2}\int_{\mathcal{F}} \boldsymbol{d}vol_\omega(x).$$

Agora, por (1.5), chegamos a

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_{t/2,2}\int_{\mathcal{F}} \boldsymbol{d}vol_\omega(x) &= \mathfrak{B}_{t/2,2}\int_{\mathcal{F}} \frac{\rho_\omega(x)}{\rho_\omega(x)}\boldsymbol{d}vol_\omega(x) \\
&= \mathfrak{B}_{t/2,2}\int_{\mathcal{F}} \frac{1}{\rho_\omega(x)}\boldsymbol{d}vol_0(x) \\
&\leqslant \mathfrak{B}_{t/2,2}C_g^{n/2}\int_{\mathcal{F}} \boldsymbol{d}vol_0(x) \\
&= \mathfrak{B}_{t/2,2}C_g^{n/2}vol_0(\mathcal{F}) =: C
\end{aligned}$$

3) Seja ϕ_n uma base para $L^2(X, vol_\omega)$ escolhida de acordo com o Lema (A.3). Segue que a aplicação $\omega \to Tr(\chi_{\mathcal{F}}\ e^{-tH_\omega})$ está bem definida para todos $t \geqslant 0$ e $\omega \in \Omega$. Já que E^{H_ω} é mensurável, e pela Proposição (2.1) o traço é mensurável, temos que $\omega \to Tr(\chi_{\mathcal{F}}\ e^{-tH_\omega})$ é mensurável. □

Estamos quase prontos para apresentar a demonstração do Teorema (1.4), mas ainda falta um detalhe. Aplicaremos o Teorema (6.1) não à função normalizada de contagem de autovalores $N_\omega^{D^j}$, mas sim a sua transformada de Laplace $\mathcal{L}_\omega^{D^j}$. A razão é porque $\mathcal{L}_\omega^{D^j}$ é limitada, enquanto que $N_\omega^{D^j}$ não é [2]. A saber, dada uma função $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), a transformada de Laplace $\mathcal{L}$ de f é dada por

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-ts}f(t)dt.$$

Temos que

$$\mathcal{L}_\omega^{D^j}(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{-t\lambda} dN_\omega^{D^j}(\lambda) = \frac{1}{vol_\omega(D^j)}\ Tr(e^{-tH_\omega^{D^j}}).$$

Assim, segue-se do item (2) do Lema (6.1) que $\mathcal{L}_\omega^{D^j}(t)$ é limitada. Usaremos o critério para convergência de Pastur e Shubin, que afirma que é suficiente testar a convergência das transformadas de Laplace.

Lema 6.2. *(Critério para Convergência de Pastur-Shubin) Seja N_n uma sequência de funções distribuição tal que*

1. *Existe um $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $N_j(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \leqslant \lambda_0$ e $j \in \mathbb{N}$.*
2. *Existe uma função $C : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{L}_j(t) := \int e^{-\lambda t}\, dN_j(\lambda) \leqslant C(t)$ para todos $j \in \mathbb{N}$ e $t > 0$.*
3. *Existe $\lim_{j\to\infty} \mathcal{L}_j(t) =: \mathcal{L}(t)$ para todo $t > 0$.*

Então, $\mathcal{L}$ é a transformada de Laplace de uma função distribuição e para todos os pontos de continuidade λ de N, temos que

$$N(\lambda) := \lim_{j\to\infty} N_j(\lambda).$$

Demonstração. Vide [17] e [18] para detalhes. □

Demonstração do Teorema (1.4). Temos que verificar as condições do Lema (6.2) para a função normalizada de contagem de autovalores $N_\omega^{D^j}$. O item (1) é satisfeito para $\lambda_0 = 0$, uma vez que o operador $\{H_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ é não-negativo.

O item (2) expressa a transformada de Laplace por meio do traço do semigrupo de calor, a saber,

$$\mathcal{L}_\omega^{D^j}(t) = \frac{1}{vol_\omega(D^j)} \sum_{n,\lambda_n\in\sigma} e^{-t\lambda_n} = \frac{1}{vol_\omega(D^j)} Tr(e^{-tH_\omega^{D^j}}),$$

onde a soma se estende sobre todos os autovalores λ_n de $H_\omega^{D^j}$, contando multiplicidade. Agora, aplicando monotonicidade do domínio ao item (2) do Lema (6.1), verificamos a validade do item (2) do critério de Pastur-Shubin.

A fim de demonstrar o item (3), mostraremos que para todo $t > 0$,

$$\lim_{j\to\infty} \mathcal{L}_\omega^{D^j}(t) = \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-t\lambda} dN_\omega^{D^j}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t\lambda} dN^H(\lambda)$$

converge no sentido L^1 e $\mathbb{P}$-q.t.p. Por razões técnicas, vamos lidar separadamente com a convergência do numerador e do denominador em

$$\mathcal{L}_\omega^{D^j}(t) = \frac{1}{vol_\omega(D^j)} Tr(e^{-tH_\omega^{D^j}}).$$

Entretanto, precisamos de alguma normalização, para evitar divergências. Considere primeiramente o numerador com uma normalização auxiliar

$$\frac{1}{|\mathcal{G}|}Tr(e^{-tH_\omega^{D^j}}).$$

Dizemos que duas sequências $(a_j(\omega))$ e $(b_j(\omega))$ são equivalentes, e denotaremos tal fato por $a_j \sim b_j$, se $a_j - b_j \to 0$ quando $j \to \infty$ em L^1 e $\mathbb{P}$-q.t.p. Pelo Lema (6.1), temos que

$$\frac{1}{|\mathcal{G}_j|}Tr(e^{-tH_\omega^{D^j}}) \underset{j\to\infty}{\sim} \frac{1}{|\mathcal{G}_j|}Tr(\chi_{D^j}e^{-tH_\omega}),$$

e pelo fato de $\{D^j\}_j$ ser uma sequência admissível para X, segue-se que

$$\frac{1}{|\mathcal{G}_j|}Tr(\chi_{D^j}e^{-tH_\omega}) = \frac{1}{|\mathcal{G}_j|}\sum_{\gamma\in\mathcal{G}_j^{-1}} Tr(\chi_{\gamma\mathcal{F}}e^{-tH_\omega}).$$

Agora, pela condição de equivariância, temos que

$$\frac{1}{|\mathcal{G}_j|}\sum_{\gamma\in\mathcal{G}_j^{-1}} Tr(\chi_{\gamma\mathcal{F}}e^{-tH_\omega}) = \frac{1}{|\mathcal{G}_j|}\sum_{\gamma\in\mathcal{G}_j} Tr(\chi_{\mathcal{F}}e^{-tH_{\gamma\omega}}).$$

Por fim, pelo Teorema Ergódico de Lindenstrauss (Teorema (6.1)), temos que

$$\frac{1}{|\mathcal{G}_j|}\sum_{\gamma\in\mathcal{G}_j} Tr(\chi_{\mathcal{F}}e^{-tH_{\gamma\omega}}) \underset{j\to\infty}{\sim} \mathbb{E}(Tr(\chi_{\mathcal{F}}e^{-tH_\bullet})).$$

De maneira similar, podemos inferir para o denominador normalizado a relação

$$\frac{1}{|\mathcal{G}_j|}vol_\omega(D^j) = \frac{1}{|\mathcal{G}_j|}\sum_{\gamma\in\mathcal{G}_j^{-1}} vol_\omega(\gamma\mathcal{F}) = \frac{1}{|\mathcal{G}_j|}\sum_{\gamma\in\mathcal{G}_j} vol_\omega(\mathcal{F}) \underset{j\to\infty}{\sim} \mathbb{E}(vol_\bullet(\mathcal{F})). \tag{6.7}$$

Note que por (1.6), temos que

$$C_g^{-n/2}vol_0(\mathcal{F}) \leqslant |\mathcal{G}|^{-1}vol_\omega(\phi(\mathcal{G})) \leqslant C_g^{n/2}vol_0(\mathcal{F}),$$

e todos os termos de (6.7) são limitados por cima e por baixo uniformemente em ω. Finalmente, para todo conjunto finito $\mathcal{G} \subset \Gamma$, temos que

$$\mathcal{L}_\omega^{D^j}(t) = \frac{1}{vol_\omega(D^j)}Tr(e^{-tH_\omega^{D^j}}) = \frac{|\mathcal{G}_j|^{-1}Tr(e^{-tH_\omega^{D^j}})}{|\mathcal{G}_j|^{-1}vol_\omega(D^j)} \underset{j\to\infty}{\sim} \frac{\mathbb{E}(Tr(\chi_{\mathcal{F}}e^{-tH_\bullet}))}{\mathbb{E}(vol_\bullet(\mathcal{F}))}.$$

Pela Definição (1.7), temos que

$$\frac{\mathbb{E}(Tr(\chi_{\mathcal{F}}e^{-tH_\bullet}))}{\mathbb{E}(vol_\bullet(\mathcal{F}))} = \int_{\mathbb{R}} e^{-t\lambda}dN^H(\lambda)$$

e isso encerra a demonstração. □

7 Conclusão

O modelo matemático apresentado neste trabalho mostra-se satisfatório em sua proposta. A partir deste modelo foi possível obter propriedades espectrais para o operador de Schrödinger aleatório em variedades compactas, bem como obter uma equação para densidade integrada de estados, e como já informado na Introdução deste trabalho, pode ser usada para calcular quantidades termodinâmicas de um sistema com muitas partículas não interagentes.

Além disso, como é mostrado na Seção 7 de [6] e em suas referências, é possível estudar quasicristais do ponto de vista dos operadores aleatórios.

Vale a pena lembrar que as propriedades espectrais estão ligadas à dinâmica do sistema (mais especificamente, à probabilidade de retorno do sistema aos seu estado inicial e aos momentos médios, com respeito ao tempo, do operador de posição), e assim é possível obter tais informações sobre a dinâmica do operador a partir do estudo detalhado da densidade integrada de estados.

Apêndices

APÊNDICE A – Resultados Auxiliares

Este apêndice tem como objetivo apresentar, sem demonstrar, resultados auxiliares para total compreensão do trabalho.

A.1 Análise Funcional e Teoria Espectral

Teorema A.1. *O operador de Schrödinger livre $H_0 = -\Delta$ é auto-adjunto e seu espectro é caracterizado por*

$$\sigma(H_0) = \sigma_{ac}(H_0) = [0, \infty), \qquad \sigma_{sc}(H_0) = \sigma_{pp}(H_0) = \emptyset$$

Demonstração. Vide Teorema (7.17) de [22] para detalhes. □

Corolário A.1. *Seja H um operador linear compacto agindo sobre um espaço de Banach $\mathcal{B}$, então:*

1. *O único ponto de acumulação possível de $\sigma_p(H)$ é zero.*

2. *$\sigma_p(H)$ é contável e, se $\lambda \neq 0$, então o núcleo do operador tem dimensão finita.*

3. *Se $\sigma_p(H)$ é finito, então os autovalores de H podem ser ordenados numa sequência convergindo a zero.*

4. *Se $\dim\mathcal{B} = \infty$, então zero pertence ao espectro de H.*

Demonstração. Vide Corolário (30.3) de [35] para detalhes. □

Proposição A.1. ***(Teorema de Mapeamento Espectral)*** *Seja H auto-adjunto e $F \in C(\sigma(H))$. Então (a barra indica o fecho)*

$$\sigma(F(H)) = \overline{F(\sigma(H))} := \overline{\{F(\lambda) : \lambda \in \sigma(H)\}}.$$

Demonstração. Vide Proposição (9.6.1) de [5] para detalhes. □

Definição A.1. ***(Definição para o Teorema (A.2))***

1. *Se $\mathcal{Q} \leqslant \beta$, denotaremos por $(\mathcal{H}_+, \mathcal{Q}_+)$ o completamento do espaço com produto interno $(dom(\mathcal{Q}), \langle f, h\rangle_+ := \mathcal{Q}(f, h) + (1 - \beta)\langle f, h\rangle)$.*

2. *Seja $\mathcal{Q}$ uma forma fechada e limitada por baixo. Um cerne para $\mathcal{Q}$ é um subespaço $\mathcal{D} \subset dom(\mathcal{Q})$ denso em $dom(\mathcal{Q})$ equipado com o produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_+$.*

Teorema A.2. ***(Extensão de Friedrichs)*** *Seja H um operador hermitiano limitado por baixo com $H \geqslant \beta\mathbf{I}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\mathcal{Q}(H)$ a forma gerada por H, i.e.,*

$$\mathcal{Q}(H)(f,h) = \langle f, Hh\rangle, \qquad f,h \in dom(\mathcal{Q}(H)) = dom(H),$$

e $(\mathcal{H}_+^H, \mathcal{Q}(H)_+)$ como na Definição (A.1). Então, o operador H tem uma única extensão auto-adjunta $H_F : dom(H_F) \to \mathcal{H}$ com $dom(H_F) \sqsubseteq \mathcal{H}_+^H$. Além disso, $H_F \geqslant \beta\mathbf{I}$ e $dom(H_F)$ é um cerne para $\mathcal{Q}(H)_+$. $\mathcal{H}_+^H$ é o domínio de forma de H_F.

Demonstração. Vide Teorema (4.3.1) de [5] para detalhes. □

Teorema A.3. *Se $0 \leqslant V \in L^1_{loc}$, então a forma $\mathcal{Q}$ associada ao operador de Schrödinger é fechada em C_c^∞ e seu fecho é a soma das formas quadráticas de $-\Delta$ e V, com*

$$dom(\mathcal{Q}(H)) = dom(\mathcal{Q}(-\Delta)) \cap dom(\mathcal{Q}(V)).$$

O operador de Schrödinger agindo em L^2 é o gerador do semigrupo simétrico de Markov e^{-tH}

Demonstração. Vide Teorema (1.8.1) de [32] para detalhes. □

Teorema A.4. *Seja H_n uma sequência crescente de operadores auto-adjuntos e não-negativos agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Seja $\mathcal{Q}_n$ a forma associada e defina $\mathcal{Q}$ em $\mathcal{H}$ por*

$$\mathcal{Q}(f) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{Q}_n(f)$$

tal que

$$dom(\mathcal{Q}) \subseteq \bigcap_n dom(\mathcal{Q}_n^{1/2}).$$

Então, existe um operador auto-adjunto $H \geqslant 0$ no fecho do $dom(\mathcal{Q})$ tal que

$$\langle H^{1/2}f, H^{1/2}f\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle H_n^{1/2}f, H_n^{1/2}f\rangle$$

para toda $f \in dom(\mathcal{Q})$.

Demonstração. Vide Teorema (1.2.2) de [32] para detalhes. □

Teorema A.5. *Sejam H_n e H operadores auto-adjunto e não-negativos agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ tal que*

$$H_n \geqslant H_{n+1} \geqslant H$$

para todo n. Suponha que a forma associada satisfaz

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{Q}_n(f) = \mathcal{Q}(f)$$

para toda f no cerne de forma de $\mathcal{Q}$. Então, H_n converge para H no sentido forte do resolvente.

Demonstração. Vide Teorema (1.2.3) de [32] para detalhes. □

Corolário A.2. *Se existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $V \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ satisfizer $V(x) \geqslant \beta$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, então a extensão de Friedrichs do oeprador de Schrödinger*

$$dom(H) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \qquad Hf = -\Delta f + Vf, \qquad f \in dom(H),$$

é a única extensão auto-adjunta de H.

Demonstração. Vide Corolário (4.3.7) de [5] para detalhes. □

Teorema A.6. *Seja $H \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ e $\lambda_0 \in \rho(H)$, então para todo λ no disco $|\lambda - \lambda_0| < 1/||R_{\lambda_0}(H)||$ do plano complexo tem-se que $R_\lambda(H) \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ e*

$$R_\lambda(H) = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}(H)^{j+1},$$

com a série convergindo em $\mathcal{L}(\mathcal{B})$.

Demonstração. Vide Teorema (27.6) de [35] para detalhes. □

Proposição A.2. *Seja E uma resolução da identidade em $\mathcal{H}$. Se $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é polinomial com $F(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j$, $a_j \in \mathbb{C}$, para todo j, então $E(F) = \sum_{j=0}^{n} a_j H^j$, onde $H := E(h)$ com $h(t) = t$.*

Demonstração. Vide Proposição (8.3.10) de [10] para detalhes. □

Corolário A.3. *Seja H auto-adjunto em $\mathcal{H}$. Então:*

1. *Para toda função Boreliana $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,*

$$F(H) = \int_{\sigma(H)} F \, dE^H := E^H(\chi_{\sigma(H)} F);$$

   em particular, para $f \in dom(F(H))$, temos que $\langle f, F(H)f \rangle = \int_{\sigma(H)} F \, d\mu_f^H$.

2. *Um número real $t_0 \in \rho(H)$ se, e somente se, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que*

$$\mu_f^H(t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon_0) = 0, \qquad \forall f \in dom(H).$$

Demonstração. Vide Corolário (8.3.17) de [5] para detalhes. □

Corolário A.4. ***(Cálculo Funcional)*** *Sejam $B^\infty(\mathbb{R})$ o espaço das funções Borelianas limitadas em $\mathbb{R}$ com norma $||F||_\infty := \sup_{t\in\mathbb{R}}|F(t)|$ e H auto-adjunto em $\mathcal{H}$. Então, existe um único mapa linear $B^\infty \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $F \mapsto F(H)$, tal que os seguintes itens são satisfeitos:*

1. $F_A F_B \mapsto F_A(H)F_B(H) = F_B(H)F_A(H)$.
2. $\overline{F}(H) = F(H)*$.
3. $||F(H)|| \leqslant ||F||_\infty$.
4. *Se $z \in \rho(H)$, então $\frac{1}{t-z} \mapsto R_z(H)$ e*
$$\langle f, R_z(H)f\rangle = \int_{\sigma(H)} \frac{1}{t-z} d\mu_f^H(t).$$
5. *Se support$(F) \cap \sigma(H) = \emptyset$, então $F(H) = 0$.*
6. *Se F_n é uma sequência limitada por baixo em $B^\infty(\mathbb{R})$ e $F_n \to F$ pontualmente, então $F_n(H) \xrightarrow{s} F(H)$.*

Além disso,

- *Se $F \geqslant 0$ então $F(H) \geqslant 0$ (assim, se $F \geqslant J$ então $F(H) \geqslant J(H)$).*
- *Se $Hf_\lambda = \lambda f_\lambda$ e F é contínua, então $F(H)f_\lambda = F(\lambda)f_\lambda$.*

Demonstração. Vide Corolário (8.3.19) de [5] para detalhes. □

Lema A.1. *Sejam $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $F : \mathbb{B}\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função (uniforme) Boreliana limitada tal que para cada x a função $t \mapsto F(t,x)$ é integrável com respeito a medida de Lesbegue. Se $G(H) = \int_{\mathbb{B}} F(t,x)dt$, então*

$$G(H) = \int_{\mathbb{B}} F(t,H)dt.$$

Demonstração. Vide Lema (9.5.1) de [5] para detalhes. □

Proposição A.3. *Os operadores H_C e H_S com domínios $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (espaço de Schwartz), respectivamente, ambos com ação $f \mapsto -\Delta f$, são essencialmente auto-adjuntos e*

$$\overline{H_C} = -\Delta = \overline{H_S}.$$

Em outras palavras, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ são um cerne para $-\Delta$.

Demonstração. Vide Proposição (3.4.1) de [5] para detalhes. □

Lema A.2. *O conjunto* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \mid supp(f) \text{é compacto}\}$ *é um cerne para* $-\Delta$.

Demonstração. Vide Lema (7.19) de [22] para detalhes. □

Teorema A.7. *Sejam* $dom(\mathcal{Q}) \sqsubseteq \mathcal{H}$ *e* $\mathcal{Q} : dom(\mathcal{Q}) \times dom(\mathcal{Q}) \to \mathbb{C}$ *uma forma sesquilinear fechada com limite inferior* $\beta \in \mathbb{R}$ *(então hermitiana).*

Então, o operador $H_{\mathcal{Q}}$ *associado com a forma* $\mathcal{Q}$ *é o única operador auto-adjunto com* $dom(H_{\mathcal{Q}}) \sqsubseteq dom(\mathcal{Q}) \mapsto \mathcal{H}$ *tal que*

$$\mathcal{Q}(f,h) = \langle f, H_{\mathcal{Q}} h \rangle, \qquad \forall f \in dom(\mathcal{Q}), \forall h \in dom(H_{\mathcal{Q}}).$$

Além disso, $H_{\mathcal{Q}} \geqslant \beta \mathbf{I}$ *e* $dom(H_{\mathcal{Q}})$ *é um cerne de forma para* $\mathcal{Q}$. *O subespaço* $dom(\mathcal{Q})$ *é chamado domínio de forma de* $H_{\mathcal{Q}}$.

Demonstração. Vide Teorema (4.2.6) de [5] para detalhes. □

Teorema A.8. *Seja* $\mathcal{Q}_1 \leqslant \mathcal{Q}_2 \leqslant \cdots$ *uma sequência monótona não-decrescente de formas fechadas por baixo. Defina por* $\mathcal{Q}[f] = \lim_{n\to\infty} \mathcal{Q}_n[f]$ *sempre que o limite finito existir.* $\mathcal{Q}$ *é uma forma fechada e limitada por baixo. Suponha* $\mathcal{Q}$, *e então* $\mathcal{Q}_n$, *sejam densamente definidos, e sejam* H *e* H_n *operadores auto-adjunto associados com os resolventes* R *e* R_n *respectivamente. Então, quando* $\to \infty$, *temos que*

1. $\mathcal{Q}_n(f,h) \to \mathcal{Q}(f,h), \quad f, h \in dom(\mathcal{Q})$.
2. $R_n(\zeta) \xrightarrow{s} R(\zeta), \quad \mathrm{Re}\,\zeta < \eta_1$ *(o limite inferior de* $\mathcal{Q}_1$*).*
3. $(H_n - \xi)^{1/2} f \xrightarrow{s} (H - \xi)^{1/2} f, \quad f \in dom(\mathcal{Q}), \quad \xi < \eta_1$.

Demonstração. Vide Teorema (VIII - 3.13a) de [36] para detalhes. □

Teorema A.9. *Seja* (M, B_M, μ) *um espaço mensurável, com* M *sendo um conjunto não-vazio,* B_M *uma* σ*-álgebra em* M *e* μ *uma medida em* M. *Sejam* $\mathcal{H} = L^2(M, d\mu)$ *(que supomos ser separável) e* $\mathcal{H}^2 = L^2(M \times M, d\mu \circ d\mu)$. *Então,* $H_A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *é um operador de Hilbert-Schmidt (ou seja,* $H_A \in \mathcal{J}_2$ *onde* $\mathcal{J}_2$ *é uma* $*$*-álgebra de Banach na norma* $||\cdot||_2$*) se, e somente se, existe* $k_{H_A} \in \mathcal{H}^2$ *tal que*

$$(H_A f)(x) = \int_X k_{H_A}(x,y) f(y)\, d\mu(y), \quad \forall f \in \mathcal{H},$$

sendo $||H_A||_2 = ||k_{H_A}||_{\mathcal{H}^2}$, *isto é,* $Tr(H_A^* H_A) = \int_{M\times M} |k_{H_A}(x,y)|^2\, d\mu(x) d\mu(y)$. *A aplicação* $U : \mathcal{H}^2 \to \mathcal{J}_2$ *entre os espaços de Hilbert* $\mathcal{H}^2$ *e* $\mathcal{J}_2(\mathcal{H})$, *definida por* $U(k_{H_A}) = H_A$, *é unitária e, portanto, vale mais geralmente*

$$\langle H_A, H_B \rangle_{\mathcal{J}_2(\mathcal{H})} = Tr(H_A^* H_B) = \int_{X\times X} \overline{k_{H_A}(x,y)} k_{H_B}(x,y)\, d\mu(x) d\mu(y),$$

para todos $H_A, H_B \in \mathcal{J}_2(\mathcal{H})$, *com* $k_{H_A} \equiv U^{-1}(H_A)$ *e* $k_{H_B} \equiv U^{-1}(H_B)$.

Demonstração. Vide Teorema (38.48) de [10] para detalhes. □

Teorema A.10. *Seja* (X, μ) *um espaço de medida e* $\mathcal{H} = L^2(X, d\mu)$*. Então,* $H \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *é um operador de Hilbert-Schmidt se, e somente se, existe uma função*

$$k \in L^2(X \times X, d\mu \circ d\mu)$$

com

$$(Hf)(x) = \int k(x,y) f(y)\ d\mu(y).$$

Além disso,

$$||H||_2^2 = \int |k(x,y)|^2\ d\mu(x) d\mu(y).$$

Demonstração. Vide Teorema (VI.23) de [23] para detalhes. □

Definição A.2. ***(Definição para o Teorema (A.11))*** *Uma tripla* (M, g, μ) *será chamada de variedade ponderada, se* (M, g) *for uma variedade Riemanniana e* μ *uma medida em* M *com função densidade positiva e suave.*

Teorema A.11. *Em qualquer variedade ponderada* (M, g, μ) *o núcleo de calor satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Simetria:* $k_t(x,y) \equiv k_t(y,x)$ *para todos* $x, y \in M$ *e* $t > 0$.

2. *Para qualquer* $f \in L^2$*, e para todo* $x \in M$ *e* $t > 0$,

$$T_t f(x) = \int_M k_t(x,y) f(y)\ d\mu(y),$$

   onde T_t *é um semigrupo.*

3. $k_t(x,y) \geqslant 0$ *para todos* $x, y \in M$ *e* $t > 0$*, e*

$$\int_M k_t(x,y)\ d\mu(y) \leqslant 1,$$

   para todo $x \in M$ *e* $t > 0$.

4. *A identidade de semigrupo: para todos* $x, y \in M$ *e* $t, s > 0$,

$$k_{t+s}(x,y) = \int_M k_t(x,z) k_s(z,y)\ d\mu(z).$$

5. *Para qualquer* $y \in M$*, a função* $u(t,x) := k_t(x,y)$ *é* C^∞ *em* $(0, +\infty) \times M$ *e satisfaz a equação do calor*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_\mu u,$$

   onde Δ_μ *é o operador Laplaciano em* (M, g, μ).

6. *Para qualquer função* $f \in C_0^\infty(M)$,

$$\int_M k_t(x,y)f(y)\ d\mu(y) \underset{t\to 0}{\to} f(x),$$

onde a convergência é em $C^\infty(M)$.

Demonstração. Vide Teorema (7.13) de [30] para detalhes. □

Proposição A.4. *Seja* $\mathcal{H} = L^2(M, d\mu)$ *como no Teorema (A.9) e seja* $k_{H_A} = U^*(H_A)$ *o núcleo integral associado a* $H_A \in \mathcal{J}_2(\mathcal{H})$, *tal como definido naquele teorema. Então, valem as seguintes propriedades:*

1. *Para todo* $H_A \in \mathcal{J}_2(\mathcal{H})$ *vale* $k_{H_A^*}(x,y) = \overline{k_{H_A}(y,x)}$, $(\mu \circ \mu)$*-q.t.p.*

2. *Para todos* $H_A, H_B \in \mathcal{J}_2(\mathcal{H})$ *vale* $k_{H_A H_B}(x,y) = \int_M k_{H_A}(x,z)k_{H_B}(z,y)\ d\mu(z)$, $(\mu\circ\mu)$*-q.t.p.*

3. *Para todos* $H_A, H_B \in \mathcal{J}_2(\mathcal{H})$ *vale*

$$Tr(H_A H_B) = \int_{M\times M} k_{H_A}(y,x)k_{H_B}(x,y)\ d\mu(x)d\mu(y).$$

4. *Se* H_A *é um operador tracial, então existe um núcleo integral* $\mathbf{L}_{H_A}$ *tal que* $(H_A f)(x) = \int_M \mathbf{L}_{H_A}(x,y)f(y)\ d\mu(y)$ *e vale*

$$Tr(H_A) = \int_M \mathbf{L}_{H_A}(x,x)\ d\mu(x).$$

Demonstração. Vide Proposição (38.101) de [10] para detalhes. □

Teorema A.12. *Seja* $X \subset \mathbb{R}^n$ *localmente compacto, segundo contável e Hausdorff. Suponha que* $H \geqslant 0$ *satisfaz as seguintes condições:*

- $(H+\alpha)^{-1}$ *é preservado positivamente para todo* $\alpha > 0$,
- e^{-tH} *é preservado positivamente para todo* $t \geqslant 0$.

Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

1. e^{-tH} *é uma contração em* L^∞ *para todo* $t \geqslant 0$.

2. e^{-tH} *é uma contração em* L^p *para todos* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *e* $t \geqslant 0$.

3. *Seja* $f \in dom(H^{1/2})$ *e seja* $h \in L^2$ *satisfazendo*

$$|h(x)| \leqslant |f(x)|,$$

$$|h(x) - h(y)| \leqslant |f(x) - f(y)|,$$

para todo $x, y \in X$. Então, $h \in dom(H^{1/2})$ e

$$\mathcal{Q}(h) \leqslant \mathcal{Q}(f).$$

4. *Se $0 \leqslant f \in dom(H^{1/2})$, então $\min\{f, 1\}$ pertence ao $dom(H^{1/2})$ e*

$$\mathcal{Q}(\min\{f, 1\}) \leqslant \mathcal{Q}(f).$$

Demonstração. Vide Teorema (1.3.3) de [32] para detalhes. □

Teorema A.13. *Se $X \subset \mathbb{R}^n$ e H é um operador elíptico agindo em $L^2(X)$ satisfazendo condição de fronteira de Dirichlet, então H satisfaz as condições dos Teoremas (1.3.2) e (1.3.3).*

Demonstração. Vide Teorema (1.3.5) de [32] para detalhes. □

Definição A.3. ***(Definição para a Proposição (A.5))*** *Seja H um operador auto-adjunto agindo em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Afirmamos que H_N converge para H no sentido forte do resolvente se $R_i(H_n) \xrightarrow{s} R_i(H)$, e escrevemos $H_n \xrightarrow{SR} H$.*

Proposição A.5. *$H_n \xrightarrow{SR} H$ se, e somente se, $F(H_n) \xrightarrow{s} F(H)$ para toda função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ contínua e limitada.*

Demonstração. Vide Proposição (10.1.9) de [5] para detalhes. □

Teorema A.14. ***(Fórmula do Produto de Trotter)*** *Se H_A e H_B são operadores auto-adjuntos e $H_A + H_B$ é essencialmente auto-adjunto em $dom(H_A) \cap dom(H_B)$, então*

$$\mathrm{s} - \lim_{n\to\infty} (e^{itH_A/n} e^{itH_B/n}) = e^{it(H_A+H_B)}.$$

Além disso, se H_A e H_B são limitados por baixo, então

$$\mathrm{s} - \lim_{n\to\infty} (e^{tH_A/n} e^{tH_B/n}) = e^{t(H_A+H_B)}.$$

Demonstração. Vide Teorema (VIII.31) de [23] para detalhes. □

Teorema A.15. *Se $\mathcal{K}$ é um operador de Carleman forte e H é um operador limitado, então $\mathcal{K}H$ e $H\mathcal{K}$ também são operadores de Carleman fortes.*

Demonstração. Vide Teorema (I) de [37] para detalhes. □

Teorema A.16. *Para todo operador de Carleman auto-adjunto, 0 é o ponto limite do seu espectro; o espectro de um operador de Carleman forte tem no máximo os pontos limites $-\infty$, 0 e $+\infty$.*

Demonstração. Vide Teorema (II) de [37] para detalhes. □

Teorema A.17. *Um operador fechado e densamente definido H agindo em um espaço de Hilbert, pode ser fatorado como $H = UT$, onde T é auto-adjunto (não-negativo) e $U : \overline{\mathrm{img}(R(T))} \to \overline{\mathrm{img}(R(H))}$ é uma isometria parcial.*

Demonstração. Vide Teorema (III) de [37] para detalhes. □

Teorema A.18. *Todo operador de Carleman é fechado.*

Demonstração. Vide Teorema (2) de [37] para detalhes. □

A.1.1 Álgebra de Operadores

Proposição A.6. *Se $\mathbf{B}$ é um Boreliano, então $\mu(\mathbf{B}) = 0$ se, e somente se, $E(\mathbf{B}) = 0$.*

Demonstração. Vide Proposição (15.3) de [24] para detalhes. □

Definição A.4. ***(Definição para o Teorema (A.19))*** *Considere por $L^{\infty}_{C}(Z, \nu)$ o espaço essencialmente limitado das funções complexas ν-mensuráveis em Z (conjunto espectral de uma álgebra-C^* abeliana de operadores agindo em $\mathcal{H}$), em que duas funções, iguais localmente em quase todos os pontos, são identificadas.*

Teorema A.19. *Seja H um operador linear contínuo tal que para toda $f \in L^{\infty}_{C}(Z, \nu)$, temos que $M_f H = H M_f$. Então, H é decomponível.*

Demonstração. Vide Teorema (1) da Seção (II.2.5) de [27] para detalhes. □

Proposição A.7. *Sejam $\mathcal{N}$ uma álgebra-C^* e $\mathfrak{a}$ um ideal bilateral de $\mathcal{N}$ denso em $\mathcal{N}$. Então, existe uma rede crescente de aproximantes da identidade de elementos de $\mathfrak{a}$ em $\mathcal{N}$. Se $\mathcal{N}$ é separável, essa rede de aproximantes pode ser indexada por $\{1, 2, \cdots\}$.*

Demonstração. Vide Proposição (1.7.2) de [28] para detalhes. □

Definição A.5. ***(Definição para o Teorema (A.20))*** *Uma função $H(\cdot)$ de um espaço de medida Ω para o operador auto-adjunto (não necessariamente limitado) em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}'$ será chamada de mensurável se, e somente se, a função $(H(\cdot) + i)^{-1}$ é mensurável. Dada essa função, nos definimos o operador H em $\mathcal{H} = \int_{\Omega}^{\oplus} \mathcal{H}'$ com domínio*

$$dom(H) = \left\{ f \in \mathcal{H} \mid f(\omega) \in dom(H(\omega)) \ i.e.; \ \int_{\Omega} ||H(\omega) f(\omega)||^2_{\mathcal{H}'} \, d\mu(\omega) < \infty \right\}$$

por

$$(Hf)(\omega) = H(\omega) f(\omega).$$

Escrevemos $H = \int_{\Omega}^{\oplus} H(\omega) \, d\mu$.

Definição A.6. ***(Definição para o Teorema (A.20))*** *Se H_A, H_B são operadores lineares fechados agindo em um espaço métrico, diz-se que H_A é H_B-limitado se $dom(H_B) \subset dom(H_A)$ e existem $\xi, \eta \geqslant 0$ de forma que $||H_A f|| \leqslant \xi ||H_B f|| + \eta ||f||$, para toda $f \in dom(H_B)$; o ínfimo dos valores de $\xi \geqslant 0$ que tal relação vale é chamado de H_B-limite de H_A (em geral η é função não-decrescente de ξ).*

Teorema A.20. *Seja $H = \int_\Omega^\oplus H(\omega)\, d\mu$ onde $H(\cdot)$ é mensurável e $H(\omega)$ é auto-adjunto para todo $\omega \in \Omega$. Então:*

1. *O operador H é auto-adjunto.*
2. *Um operador auto-adjunto $H \in \mathcal{H}$ tem a forma $\int_\Omega^\oplus H(\omega)\, d\mu$ se, e somente se, $(H+i)^{-1}$ é um operador limitado e decomponível.*
3. *Para qualquer função Boreliana F em (R),*
$$F(H) = \int_\Omega^\oplus F(H(\omega))\, d\mu.$$
4. *$\lambda \in \sigma(H)$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$,*
$$\mu(\{\omega \mid \sigma(H(\omega)) \cap (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \neq \emptyset\}) > 0.$$
5. *λ é um autovalor de H se, e somente se,*
$$\mu(\{\omega \mid \lambda \text{ é um autovalor de } H(\omega)\}) > 0.$$
6. *Se cada $H(\omega)$ tem espetro puramente absolutamente contínuo, então H também.*
7. *Suponha que $H_B = \int_\Omega^\oplus H_B(\omega)\, d\mu$ com cada $H_B(\omega)$ auto-adjunto. Se H_B é H_A-limitado com H_A-limite ξ, então $H_B(\omega)$ é $H_A(\omega)$-limitado μ-q.t.p. com H_A-limite $\xi(\omega) \leqslant \xi$. Se $\xi < 1$, então*
$$H_A + H_B = \int_\Omega^\oplus (H_A(\omega) + H_B(\omega))\, d\mu,$$
é auto-adjunto em $dom(H)$.

Demonstração. Vide Teorema (XIII.85) de [38] para detalhes. □

Teorema A.21. *Se $H_A = \int^\oplus H_A(\omega)\, d\mu(\omega)$ e $H_B = \int^\oplus H_B(\omega)\, d\mu(\omega)$ são decomponíveis, então temos que*

$$H_A + H_B = \int^\oplus (H_A(\omega) + H_B(\omega))\, d\mu(\omega), \qquad H_A H_B = \int^\oplus H_A(\omega) H_B(\omega)\, d\mu(\omega),$$

$$\lambda H_A = \int^\oplus \lambda H_A(\omega)\, d\mu(\omega), \qquad H_A^* = \int^\oplus H_A(\omega)^*\, d\mu(\omega).$$

Demonstração. Vide (A.78) de [28] para detalhes. □

Lema A.3. *Existem uma função mensurável $F : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, uma sequência $(\phi^{(n)})_n$ de funções mensuráveis em $\Omega \times X$ e um conjunto $\Omega' \subset \Omega$ tal que $\mathbb{P}(\Omega') = 1$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. $(\phi_\omega^{(n)} : 1 \leqslant n \leqslant F(\omega))$ *é uma base para* $L^2(X, vol_\omega)$ *para todo* $\omega \in \Omega'$.
2. $\phi_\omega^{(n)} = 0$ *para* $n > F(\omega)$, $\omega \in \Omega'$.
3. $\phi_\omega^{(n)} = 0$ *para* $\omega \notin \Omega'$.

Demonstração. Vide Lema (A.1) de [6] para detalhes. □

A.1.2 Operadores Aleatórios

Proposição A.8. *Se para cada $\omega \in \Omega$, sejam H_ω um operador auto-adjunto agindo em $\mathcal{H}$ e $\{E^{H_\omega}(\mathbf{B}); \mathbf{B} \in B_\mathbb{R}\}$ a resolução da identidade para H_ω. Então, as seguintes propriedades são equivalentes:*

1. $\Omega \ni \omega \to E^{H_\omega}(\mathbf{B}) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *é mensurável para todo* $\mathbf{B} \in B_\mathbb{R}$.
2. $\Omega \ni \omega \to e^{itH_\omega} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *é mensurável para todo* $t \in \mathbb{R}$.
3. $\Omega \ni \omega \to (H_\omega - z\mathbb{I})^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *é mensurável para todo* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Demonstração. Vide Proposição (V.1.2) de [4] para detalhes. □

A.1.3 Análise Matricial

Teorema A.22. *Seja $\mathcal{A}$ uma matriz quadrada e normal. As seguintes propriedades são equivalentes:*

1. $\bar{\mathcal{A}}\mathcal{A} = \mathcal{A}\bar{\mathcal{A}}$.
2. $\mathcal{A}^T\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{A}^T$.
3. *Existe uma matriz real e ortogonal Q tal que $Q^T\mathcal{A}Q$ é uma soma direta de blocos, em qualquer ordem prescrita, cada um dos quais é um bloco zero ou um múltiplo escalar diferente de zero de*

$$[1], \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C}$$

com $a \neq 0 \neq b$ *e* $a^2 + b^2 = 1$.

Demonstração. Vide Teorema (2.5.17) de [39] para detalhes. □

A.2 Semigrupos

Teorema A.23. ***(Ultracontrativo)*** *Seja (X, B_X, μ) um espaço de medida Polonês*[1] *e T_t um semigrupo. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Existe uma constante $C > 0$ tal que vale a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev*
$$||f||^2_{L^{p^*}} \leqslant C||\nabla f||^2_{L^2} = C\int_X |\nabla f|^2 \, dx.$$
2. *Existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $t > 0$, temos que*
$$||T_t||_{1\to 2} \leqslant \frac{C}{t^{n/4}}.$$
3. *Existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $t > 0$, temos que*
$$||T_t||_{1\to\infty} \leqslant \frac{C}{t^{n/2}}.$$

Demonstração. Vide Teorema (6.3.1) de [40] para detalhes. □

Lema A.4. *Se e^{-tH} é ultracontrativo, então e^{-tH} possui um núcleo integral $k(t, x, y)$ para todo $t > 0$, satisfazendo*
$$0 \leqslant k(t, x, y) \leqslant C^2_{t/2},$$
em quase todos os pontos. Por outro lado, se e^{-tH} tem um núcleo satisfazendo
$$0 \leqslant k(t, x, y) \leqslant a_t < \infty,$$
em quase todos os pontos, então e^{-tH} é ultracontrativo com $C_t \leqslant a_t^{1/2}$.

Demonstração. Vide Lema (2.1.2) de [32] para detalhes. □

Teorema A.24. ***(Fórmula de Feynman-Kac)*** *Seja V uma função real em $L^2(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3)$ e seja $H = -\Delta + V$. Então, para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$, temos que*
$$(e^{-tH}f)(x) = \int_{\Lambda_\alpha} f(\omega(t)) \exp\left(-\int_0^t V(\omega(s)) \, ds\right) \, dW,$$
onde Λ_α, para $0 < \alpha \leqslant 1$, é o conjunto de todos os caminhos Hölder contínuos de ordem α e dW é uma medida de Wiener.

Demonstração. Vide Teorema (X.68) de [41] para detalhes. □

[1] Vide Definição (A.8) para detalhes.

A.3 Teoria de Medida e Integração

Teorema A.25. *Sejam X um espaço de medida com uma σ-álgebra e $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma família de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ mensuráveis. Então, as seguintes funções são mensuráveis com valores em $\mathbb{R} \cap \{\pm\infty\}$:*

$$\sup f_n(x),\ \inf f_n(x),\ \limsup f_n(x),\ \liminf f_n(x).$$

Demonstração. Vide Teorema (4.3.6) de [29] ou página 1404 de [10] para detalhes. □

Lema A.5. *Seja X um espaço de medida com uma σ-álgebra, toda função $f : X \to \mathbb{R}$ não-negativa e Boreliana (ou mensurável por Lebesgue) é o limite pontual de uma sequência monótona não-negativa de funções simples mensuráveis e não-negativas. Se f for também limitada, a convergência é até mesmo uniforme.*

Demonstração. Vide Lema (30.3) de [10] para detalhes. □

Definição A.7. ***(Convergência Fraca e Vaga)*** *Sejam X um espaço métrico e B_X uma σ-álgebra de Borel para X.*

1. *Sejam $\mu, \mu_1, \mu_2, \cdots$ medidas finitas em (X, B_X). Dizemos que $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fracamente para μ, e escrevemos $\mu = \mathrm{w} - \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n$, se*

$$\int f\ d\mu_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f\ d\mu$$

para toda f contínua e limitada com domínio em X.

2. *Sejam $\mu, \mu_1, \mu_2, \cdots$ medidas aleatórias em (X, B_X). Dizemos que $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vagamente para μ, e escrevemos $\mu = \mathrm{v} - \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n$, se*

$$\int f\ d\mu_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f\ d\mu$$

para toda f contínua, limitada e de suporte compacto com domínio em X.

Para mais informações a respeito da Definição (A.7) vide Teorema (4.5.7) de [29] para uma demonstração da existência dos limites apresentados na Definição (A.7).

Definição A.8. ***(Definição para o Teorema (A.26))*** *Um espaço topológico separável em que a topologia é gerada pela métrica completa é chamado de* ***espaço Polonês****.*

Teorema A.26. ***(Portemanteau)*** *Sejam X um espaço métrico e $\mu, \mu_1, \mu_2, \cdots$ medidas de probabilidade. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\mu = \mathrm{w} - \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n$,
2. $\int f \; d\mu_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f \; d\mu$ *para toda função Lipschitz, contínua e limitada.*
3. $\int f \; d\mu_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f \; d\mu$ *para toda função mensurável e limitada com* $\mu(D_f) = 0$, *onde* D_f *é o conjunto dos pontos de descontinuidade de* f.
4. $\lim\inf\limits_{n\to\infty} \mu_n(X) \geqslant \mu(X)$ *e* $\lim\sup\limits_{n\to\infty} \mu_n(\mathbb{F}) \leqslant \mu(\mathbb{F})$ *para todo fechado* $\mathbb{F} \subset X$.
5. $\lim\sup\limits_{n\to\infty} \mu_n(X) \leqslant \mu(X)$ *e* $\lim\inf\limits_{n\to\infty} \mu_n(\mathbb{B}) \geqslant \mu(\mathbb{B})$ *para todo aberto* $\mathbb{B} \subset X$.
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(\mathbb{X}) = \mu(\mathbb{X})$ *para todo conjunto* $\mathbb{X}$ *mensurável com* $\mu(\partial\mathbb{X}) = 0$.

Se X é localmente compacto e Polonês, segue-se que cada uma das afirmações a seguir são equivalente às declarações anteriores:

1. $\mu = \mathrm{v} - \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n$ *e* $\mu(X) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(X)$.
2. $\mu = \mathrm{v} - \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n$ *e* $\mu(X) \geqslant \lim\sup\limits_{n\to\infty} \mu_n(X)$.

Demonstração. Vide Teorema (13.16) de [31] ou Teorema (4.14.4) de [29] para detalhes. □

Teorema A.27. ***(Lusin)*** *Seja X um espaço localmente compacto e Hausdorff e seja μ uma medida positiva sobre uma σ-álgebra B_X de X que contém a σ-álgebra de Borel de X tal que:*

1. $\mu(\mathbb{F}) < \infty$ *para todo compacto* $\mathbb{F} \subset X$;
2. μ *é regular, ou seja,* $\mu(\mathbb{U}) = \inf\{\mu(\mathbb{B}), \mathbb{U} \subset \mathbb{B}, \mathbb{B} \text{ aberto}\}$ *para todo* $\mathbb{U} \in B_X$ *e* $\mu(\mathbb{U}) = \sup\{\mu(\mathbb{F}), \mathbb{F} \subset \mathbb{U}, \mathbb{F} \text{ compacto}\}$ *para todo* $\mathbb{U} \in B_X$ *com* $\mu(\mathbb{U}) < \infty$;
3. *O espaço de medida produzido por B_X e μ é completo, ou seja, se $\mathbb{U} \in B_X$ é tal que $\mu(\mathbb{U}) = 0$, então todo subconjunto de $\mathbb{U}$ pertence a B_X.*

Suponha que h seja uma função complexa e mensurável em X com a propriedade que $h(x) = 0$ se $x \notin \mathbb{G}$, sendo $\mathbb{G} \subset X$ tal que $\mu(\mathbb{G}) < \infty$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ existe $f \in C_c(X)$ (o espaço das funções contínuas definidas em X que tenham suporte compacto) tal que

$$\mu(\{x \in X \mid h(x) \neq f(x)\}) \leqslant \varepsilon.$$

Além disso, f pode ser escolhida de forma que

$$\sup_{x\in X} |f(x)| \leqslant \sup_{\in X} |h(x)|.$$

Demonstração. Vide Teorema (38.42) de [10] para detalhes. □

A.3.1 Topologia

Corolário A.5. *Seja M uma variedade Riemanniana. A aplicação identidade*

$$I : C^{\infty}(M) \to \mathcal{W}^{\infty}_{loc}(M)$$

é um homeomorfismo entre os espaços topológicos $C^{\infty}(M)$ e $\mathcal{W}^{\infty}_{loc}(M)$.

Demonstração. Vide Corolário (7.2) de [30] para detalhes. □

A.4 Teoria Ergódica

Definição A.9. *Seja G um grupo finito e compacto. Uma medida finita m_L em G é chamada de medida de Haar se, e somente se, $m_L \neq 0$ e para toda $F : G \to \mathbb{C}$ de suporte compacto em G, temos que*

$$\int_G F(\mathfrak{g})\ dm_L(\mathfrak{g}) = \int_G F(\mathfrak{h}\mathfrak{g})\ dm_L(\mathfrak{g}) = \int_G F(\mathfrak{g}\mathfrak{h})\ dm_L(\mathfrak{g}) = \int_G F(\mathfrak{g}^{-1})\ dm_L(\mathfrak{g}),$$

para todo $\mathfrak{h} \in G$.

Teorema A.28. *Se $(\Omega, B_{\Omega}, \mathbb{P})$ é um espaço de probabilidade e $\beta : \Omega \to \Omega$ uma transformação que preserva a medida, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *β é ergódica.*
2. *Sempre que f for mensurável e $(f \circ \beta)(\omega) = f(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$, então f é constante $\mathbb{P}$-q.t.p.*
3. *Sempre que f for mensurável e $(f \circ \beta)(\omega) = f(\omega)$ $\mathbb{P}$-q.t.p., então f é constante $\mathbb{P}$-q.t.p.*
4. *Sempre que $f \in L^2(\mathbb{P})$ e $(f \circ \beta)(\omega) = f(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$, então f é constante $\mathbb{P}$-q.t.p.*
5. *Sempre que $f \in L^2(\mathbb{P})$ e $(f \circ \beta)(\omega) = f(\omega)$ $\mathbb{P}$-q.t.p., então f é constante $\mathbb{P}$-q.t.p.*

Demonstração. Vide Teorema (1.6) de [42] para detalhes. □

A.5 Geometria Riemanniana

Teorema A.29. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana conexa n-dimensional, e suponha que exista uma constante K tal que o tensor de curvatura de Ricci de M satisfaz $\mathrm{Ric}(v, v) \geqslant (d-1)K$ para todos o vetores unitários v. Seja $p \in M$ dado, e para todo número positivo δ, seja $V_g(\delta)$ o volume da esfera métrica de raio δ centrada em p, e $V_K(\delta)$ o volume da esfera métrica de raio δ no espaço Euclidiano n-dimensional, espaço hiperbólico ou esfera com curvatura seccional constante K.*

Então, para todo $0 < \delta \leqslant \mathrm{inj}(p)$, onde $\mathrm{inj}(p)$ é o supremo de todas os $a > 0$ tal que a aplicação $\exp_p$ é um difeomorfismo de $B_a(0) \subseteq T_pM$ em sua imagem, temos que

$$V_g(\delta) \leqslant V_K(\delta), \tag{A.1}$$

e o quociente $V_g(\delta)/V_K(\delta)$ é uma função não-crescente de δ que aproxima-se de 1 quando $\delta \searrow 0$. Se (M, g) é completa, o mesmo é verdade para todo δ positivo, não apenas $\delta \leqslant \mathrm{inj}_p$. Em ambos os casos, se vale a igualdade em (A.1) para algum δ, então g tem curvatura seccional constante em toda a esfera métrica de raio δ centra em p.

Demonstração. Vide Teorema (11.19) de [11] para detalhes. □

A.6 Densidade Integrada de Estados

Lema A.6. *Seja $\mathcal{G}_n \subset \Gamma$ uma sequência não vazia e finita. Então, as seguintes propriedades são equivalentes:*

1. *$\{\mathcal{G}_n\}$ é uma sequência de Følner.*
2. *$\{\phi(\mathcal{G}_n)\}$ satisfaz a propriedade isoperimétrica (6.2).*

Demonstração. Vide Lema (2.4) de [7] para detalhes. □

Referências

[1] Daniel Lenz and Norbert Peyerimhoff and Ivan Veselić: *Integrated density of states for random metrics on manifolds.* Proceedings of the London Mathematical Society, 88(3):733–752, 2004.

[2] Ivan Veselić: *Existence and Regularity Properties of the Integrated Density of States of Random Schrödinger Operators.* Springer.

[3] Peter Stollmann: *Caught by disorder: A course on bound states in random media.* Springer.

[4] René Carmona and Jean Lacroix: *Spectral Theory of Random Schrödinger Operators.* Birkhäuser.

[5] César Rogério de Oliveira: *Intermediate Spectral Theory and Quantum Dynamics.* Birkhäuser.

[6] Daniel Lenz and Norbert Peyerimhoff and Ivan Veselić: *Groupoids, von Neumann algebras and the integrated density of states.* Mathematical Physics, Analysis and Geometry, 10(1):1–41, 2007.

[7] Norbert Peyerimhoff and Ivan Veselić: *Integrated density of states for ergodic random Schrödinger operators on manifolds.* Geometriae Dedicata, 91(1):117–135, 2002.

[8] Norbert Peyerimhoff and Ivan Veselić: *Integrated density of states for random Schrödinger operators on manifolds.* University of Aarhus. Centre for Mathematical Physics and Stochastics, 2000.

[9] https://agencia.fapesp.br/materiais-bidimensionais-quase-invisiveis-e-de-enorme-potencial/29332/.

[10] João Carlos Alves Barata: *Notas para Cursos de Física-Matemática.* http://denebola.if.usp.br/∼jbarata/Notas_de_aula/capitulos.html.

[11] John Marshall Lee: *Introduction to Riemannian Manifolds.* Springer.

[12] Manfredo Perdigão do Carmo: *Geometria Riemanniana.* IMPA.

[13] Claude Cohen-Tannoudji and Bernard Diu and Franck Laloë: *Quantum Mechanics, Vol. 1.* Wiley-VCH.

[14] Claude Cohen-Tannoudji and Bernard Diu and Franck Laloë: *Quantum Mechanics, Vol. 2.* Wiley-VCH.

[15] Werner Kirsch: *An invitation to random Schrödinger operators.* arXiv preprint arXiv:0709.3707, 2007.

[16] Michael P. Marder: *Condensed Matter Physics.* Wiley.

[17] Leonid A. Pastur: *Selfaverageability of the number of states of the Schrödinger equation with a random potential.* Mat. Fiz. i Funkcional. Anal, 238(2):111–116, 1971.

[18] M. A. Shubin: *Spectral theory and the index of elliptic operators with almostperiodic coefficients.* Uspekhi Mat. Nauk, 34(2):206, 1979.

[19] Cornelia Drutu and Michael Kapovich: *Geometric Group Theory.* American Mathematical Society.

[20] Elon Lindenstrauss: *Pointwise theorems for amenable groups.* Inventiones mathematicae, 146(2):259–295, 2001.

[21] F. Martinelli and W. Kirsch: *On the ergodic properties of the specrum of general random operators.* 1982.

[22] Gerald Teschl: *Mathematical Methods in Quantum Mechanics - with applications to Schrodinger operators.* American Mathematical Society.

[23] Michael Reed and Barry Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 1.* Academic Press.

[24] John Bligh Conway: *A Course in Operator Theory.* American Mathematical Society.

[25] Li Bing-Ren: *Introduction to Operator Algebras.* World Scientific Publishing.

[26] György I. Targonski: *Seminar on Functional Operators and Equations.* Springer.

[27] Jacques Dixmier: *Von Neumann Algebras.* Elsevier.

[28] Jacques Dixmier: *C*-Algebras.* Elsevier.

[29] Barry Simon: *A Comprehensive Course in Analysis - Part 1 Real Analysis.* American Mathematical Society.

[30] Alexander Grigor'yan: *Heat Kernel and Analysis on Manifolds.* American Mathematical Society.

[31] Achim Klenke: *Probability Theory - A Comprehensive Course.* Springer.

[32] Edward Brian Davies: *Heat kernels and spectral theory.* Cambridge University Press.

[33] Peter Li and Shing Tung Yau: *On the parabolic kernel of the Schrödinger operator.* Acta Mathematica, 156:153–201, 1986.

[34] Felix Pogorzelski: *Ergodic theorems on amenable groups*. 2010.

[35] César Rogério de Oliveira: *Introdução à Análise Funcional*. IMPA.

[36] Tosio Kato: *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer.

[37] Joachim Weidmann: *Strong Carleman operators are of Hilbert-Schmidt type*. Bulletin of the American Mathematical Society, 74(4):735–737, 1968.

[38] Michael Reed and Barry Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 4*. Academic Press.

[39] Roger Alan Horn and Charles Royal Johnson: *Matrix Analysis*. Cambridge University Press.

[40] Dominique Bakry and Ivan Gentil and Michel Ledoux: *Analysis and Geometry of Markov Diffusion Operators*. Springer.

[41] Michael Reed and Barry Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. 2*. Academic Press.

[42] Peter Walters: *An Introduction to Ergodic Theory*. Springer.