UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMATICA

Eder Raúl Huaccachi Huamani

Homeomorfismos 2-Expansivos em Superfícies

Belo Horizonte
2019

Eder Raúl Huaccachi Huamani

Homeomorfismos 2-Expansivos em Superfícies

Versão final

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Bernardo Melo de Carvalho

Coorientador: Alberto Berly Sarmiento Vera

Belo Horizonte
2019

© 2019 Eder Raúl Huaccachi Huamani.
Todos os direitos reservados.

	Huaccachi Huamani, Eder Raúl.
H874h	Homeomorfismos 2-expansivos em superfícies [manuscrito] / Eder Raúl Huaccachi Huamani. – 2019. 82 f. il. Orientador: Bernardo Melo de Carvalho Coorientador: Alberto Berly Sarmiento Vera Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. Referências: f. 81-82. 1. Matemática – Teses. 2. Homeomorfismos – Teses. 3. Sistemas dinâmicos – Teses. 4. Variedades (Matemática) – Teses. I. Carvalho, Bernardo Melo de. II. Sarmiento Vera, Alberto Berly. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. IV. Título.
	CDU 51 (043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende Costa
CRB 6ª Região nº 1510

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

Homeomorfismos 2-Expansivos em Superfícies

EDER RAÚL HUACCACHI HUAMANI

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Bernardo Melo de Carvalho

Prof. Bernardo Melo de Carvalho
UFMG

Prof. Alberto Berly Sarmiento Vera
UFMG

Prof. Javier Alexis Correa Mayobre
UFMG

Prof. José Antônio Gonçalves Miranda
UFMG

Belo Horizonte, 29 de julho de 2019.

Av. Antônio Carlos, 6627 – Campus Pampulha - Caixa Postal: 702
CEP-31270-901 - Belo Horizonte – Minas Gerais - Fone (31) 3409-5963
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br - home page: http://www.mat.ufmg.br/pgmat

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por me dar a oportunidade de concluir esta etapa da minha vida e guiar cada um dos meus passos.

Aos meus pais, Raúl e Lucy, e a minha irmã Marilyn, que estiveram sempre ao meu lado. Agradeço a eles pelo amor, e cuidado. Agradeço a toda minha família que sempre acreditou nos meus sonhos e se sacrificou para que eu pudesse alcançá-los e pessoas que conheci ao longo da minha vida que me motivaram e ajudaram sempre seguir meu caminho.

Ao meu orientador, o professor Bernardo Melo de Carvalho. Agradeço tudo sua paciência, apoio e dedicação durante a realização deste trabalho. Ao professor Alberto Berly Sarmiento Vera pela ajuda em as correções neste trabalho e por esclarecer minhas as dúvidas.

Aos professores Javier Alexis Correa Mayobre, José Antônio Gonçalves Miranda e Karina Daniela Marín por aceitar o convite para fazer parte dessa banca.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMG, aos colegas da pós graduação, pelo companheirismo, e as secretárias Andréa e Kelli pela ajuda e disposição.

Ao CNPq, lo auxílio financeiro que possibilitou que eu me dedicasse exclusivamente aos estudos.

Resumo

No presente trabalho temos como objetivo classificar os homeomorfismos 2-expansivos em superfícies. Mais especificamente, o objetivo principal é mostrar que dado $f : M \to M$ um homeomorfismo 2-expansivo definido em uma superfície compacta M com $\Omega(f) = M$, implica que f é um homeomorfismo expansivo. Juntando este resultado com a classificação de expansivos em superfícies feita por Lewowicz, obteremos a classificação dos homeomorfismos 2-expansivos em superfícies.

Palavras-chave: Homeomorfismos expansivos. cw-expansividade.

Abstract

The goal of this work is to classify 2-expansive homeomorphisms on surfaces. More specifically, the main objective is to show that given $f : M \to M$ a 2-expansive homeomorphism defined on a compact surface M with $\Omega(f) = M$, it implies that f is an expansive homeomorphism. Combining this result with the classification of expansives on surfaces made by Lewowicz, we will obtain the classification of 2-expansive homeomorphisms on surfaces.

Keywords: Expansive homeomorphisms. cw-expansiveness.

Sumário

Introdução

No final do seculo XIX, Henri Poincaré busca compreender a evolução do sistema solar. Poincaré propõe a utilização de ferramentas de outras áreas, tais como a Topologia, Geometria, Álgebra e Análise, para obter uma descrição qualitativa e quando for possível quantitativa do comportamento do sistema. Esta proposta marca o nascimento dos Sistemas Dinâmicos como área de pesquisa em matemática, tendo como objetivo desenvolver uma teoria capaz de prever a evolução de certos fenômenos, estudando o comportamento das órbitas de aplicações e fluxos.

O caos é um dos temas mais importantes para pesquisa em sistemas dinâmicos, a qual estuda certos sistemas sensíveis a variações iniciais, ou seja, pequenas variações nestas condições iniciais implicam grandes diferenças no comportamento futuro, fazendo impossível a predição a longo prazo. Um caso particular de movimento caótico é a expansividade introduzida no ano 1950 por Utz com o nome de “instável” em [16].

A expansividade é uma propriedade compartilhada por uma grande classe de sistemas dinâmicos as quais tem um comportamento caótico. Em outras palavras, em um sistema dinâmico expansivo, a dinâmica de pontos diferentes é distinta. Mais precisamente, dados dois pontos distintos suas órbitas se separam um certo valor uniforme no futuro ou no passado. Isto implica que uma pequena perturbação nas condições iniciais pode dar uma grande diferença entre as órbitas e os conjuntos limite.

J. Lewowicz em [9] utiliza a expansividade para mostrar que os conjuntos estáveis e instáveis locais formam folheações singulares com finitas singularidades, e recentemente foi introduzido em [11] o conceito de N-expansividade por C. A. Morales, generalizando a definição de expansividade.

Nesta dissertação estamos interessados na classificação dos homeomorfismos 2- expansivos em superfícies, mais especificamente estudar de perto o artigo [2] feito por A. Artigue, M. J. Pacífico e J. L. Vieitez, no qual os autores fazem uso das ferramentas dadas por J. Lewowicz. Assim será desenvolvida uma relação entre Topologia e Sistemas Dinâmicos para descrever as propriedades dos sistemas expansivos que permitem sua classificação.

Estruturamos esta dissertação em quatro capítulos:

No capítulo 1, são apresentados os conceitos básicos que serão utilizados ao longo do trabalho, exibimos os conceitos de dinâmica topológica, variedades, folheações e teoria dos contínuos, e estabelecemos a notação a ser usada.

No capítulo 2, nos dedicamos ao estudo dos principais resultados dos homeomorfismos cw- expansivos, e de particularmente dos homeomorfismos N-expansivos. Esta parte conclui com um resumo da classificação de homeomorfismos expansivos em superfícies feita por Lewowicz em [9].

No capítulo 3, estudaremos a 2-expansividade e mostraremos o resultado principal deste trabalho: Se $f : M \to M$ é um homeomorfismo 2-expansivo definido em uma superfície compacta e $\Omega(f) = M$, então f é expansivo. A partir deste resultado nós conseguiremos fazer a classificação dos homeomorfismos 2-expansivos, tendo assim:

- Não existe homeomorfismos 2-expansivos na esfera sendo o conjunto no errante toda $\mathbb{S}^2$.
- Seja $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ um homeomorfismo 2-expansivo no toro com $\Omega(f) = \mathbb{T}^2$ então f é conjugado a um difeomorfismo Anosov.
- Seja $f : \Sigma_g \to \Sigma_g$ um homeomorfismo 2-expansivo na superfície compacta Σ_g com gênero maior que 1 ($g > 1$). Se $\Omega(f) = \Sigma_g$, então f é conjugada a um Pseudo-Anosov.

No capítulo 4, fazemos a construção de dois exemplos muito importantes. O primeiro é um homeomorfismo 2-expansivo que não é expansivo, e o segundo é um homeomorfismo cw-expansivo que não é N-expansivo.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo introduzimos alguns conceitos básicos, que serão necessários nos seguintes capítulos. Na primeira seção definimos conceitos básicos de sistemas dinâmicos, tais como conjunto limite, conjunto não errante, entre outros. Na segunda seção, definimos as variedades topológicas e diferenciáveis, falaremos de folheações em uma superfície, e é apresentado o exemplo de difeomorfismo de Anosov. Na última seção vamos definir os conceito de contínuos, sub-contínuos e métrica de Hausdorff.

As referências principais são os livros de C. Robinson [14], L. Conlon [4], C. Camacho e A. Neto [3], M. Brin e G. Stuck [10] e Nadler [12].

1.1 Noções Básicas de Sistemas Dinâmicos

Um sistema dinâmico discreto consiste de um conjunto não vazio M e uma aplicação $f : M \to M$. Para $n \in \mathbb{N}$, a n-ésima iterada de f é a composta $f^n = f \circ \ldots \circ f$. Nós definimos f^0 como a aplicação identidade, denotado por Id. Se f é invertível, então $f^{-n} = f^{-1} \circ \ldots \circ f^{-1}$ (n-vezes). Como $f^{n+m} = f^n \circ f^m$, estas iterações formam um grupo se f é invertível, e um semigrupo em o outro caso.

Para cada $x \in M$, definimos a **semi órbita positiva** como o conjunto $\mathcal{O}_f^+(x) = \{f^n(x) : n \geq 0\}$. No caso invertível, definimos a **semi órbita negativa** é dada por $\mathcal{O}_f^-(x) = \{f^{-n}(x) : n \geq 0\}$, e a **órbita** de x sobre f se define como

$$\mathcal{O}_f(x) = \mathcal{O}_f^+ \cup \mathcal{O}_f^-$$

omitimos o subíndice "f"se o contexto fica claro.

Um ponto $x \in M$ é um **ponto periódico** de período $k \in \mathbb{N}$ se $f^k(x) = x$. A órbita de um ponto periódico é chamado **órbita periódica**. Se $f^k(x) = x$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então x é um **ponto fixo**. Um subconjunto $A \subset M$ é f-invariante se $f(A) = A$.

Neste trabalho estamos interessados no caso que f é um homeomorfismo, isto é uma aplicação contínua com inversa contínua. De agora em diante, neste capítulo, salvo menção contrária $f : M \to M$ é um homeomorfismo sobre o espaço métrico $(M, dist)$, o qual chamaremos de "Sistema dinâmico topológico".

Sejam $f : M_1 \to M_1$ e $g : M_2 \to M_2$ sistemas dinâmicos topológicos. Uma **semi conjugação topológica** de f para g é uma aplicação sobrejetiva $h : M_1 \to M_2$ tal que $f \circ h = h \circ g$. Se h é um homeomorfismo, é chamado de **conjugação topológica**, e f e g são ditos topologicamente conjugados ou isomorfos. Esta identidade é representada no diagrama comutativo seguinte.

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & M_1 \arrow[d, "h"] \\
M_2 \arrow[r, "g"'] & M_2
\end{tikzcd}$$

Os sistemas dinâmicos topologicamente conjugados possuem propriedades topológicas idênticas. Consequentemente, todas as propriedades e invariantes que introduzimos neste trabalho são preservadas pela conjugação topológica.

Definição 1.1. *Seja $f : M \to M$ um homeomorfismo sobre um espaço métrico $(M, dist)$. Um ponto $y \in M$ é dito ponto do ω-limite de x para f se existe uma subsequencia de números naturais $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ indo para o infinito, quando k vai para o infinito de tal forma que*

$$\lim_{k \to \infty} dist(f^{n_k}(x), y) = 0.$$

O conjunto de todos os pontos ω-limite de x para f é chamado de **conjunto**

ω**-limite** e é denotado por $\omega(x)$ ou $\omega(x, f)$.

$$\omega(x) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{i\geq n} f^i(x)}.$$

Como f é invertível, o conjunto α-limite de x é $\alpha(x) = \alpha(x, f) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup_{i\geq n} f^{-i}(x)}$. Um ponto em $\alpha(x)$ é um ponto α-limite de x. Os conjuntos α-limite e ω-limite são fechados e f-invariantes.

Um ponto x é chamado de (positivamente) **recorrente** se $x \in \omega(x)$; o conjunto $\mathcal{R}(f)$ de pontos recorrentes é f-invariante. Se tem que os pontos periódicos são recorrentes.

Definição 1.2 (Ponto Não Errante)**.** *Seja $f : M \to M$ um homeomorfismo sobre o espaço métrico M. Um ponto x é chamado não errante, se para qualquer vizinhança aberta U de x existe um inteiro positivo $n > 0$ tal que $f^n(U) \cap U \neq \varnothing$. Portanto, existe um ponto $y \in U$ com $f^n(y) \in U$. O conjunto de todos os pontos não errantes de f é chamado* ***conjunto não errante****, e é denotado por $\Omega(f)$.*

O conjunto $\Omega(f)$ é fechado, f-invariante, e contem os conjuntos $\omega(x)$ e $\alpha(x)$ para todo $x \in M$. Todo ponto Recorrente é não errante, e de fato temos que $\overline{\mathcal{R}(f)} \subset \Omega(f)$.

Um sistema dinâmico topológico $f : M \to M$ é **topologicamente transitivo** se existe um ponto $x \in M$ cuja órbita é densa em M, ou seja $\overline{\mathcal{O}_f(x)} = M$.

Sejam os homeomorfismos $f : M_1 \to M_1$ e $g : M_2 \to M_2$ topologicamente conjugadas por $h : M_1 \to M_2$, temos que:

1. p é um ponto periódico de f, de período n, se e somente se $h(p)$ é um ponto periódico para g de período n.

2. $h(\omega(x, f)) = \omega(h(x), g)$, $\forall x \in M$.

3. $h(\Omega(f)) = \Omega(g)$.

4. f é transitivo se, e somente se g é transitivo.

1.2 Variedades e Folheações

Nós estamos interessados no estudo de homeomorfismos sobre superfícies (ou seja, variedades de dimensão 2), é por isso que precisamos do estudo das variedades feito nesta seção. As definições e os resultados feitos nesta seção são dos livros de Lawrence Conlon [4] ; C, Camacho e A, Neto [3].

Definição 1.3. *Um espaço topológico X é localmente euclideano se, para todo $x \in X$, existe um inteiro $n \geq 0$, um vizinhança aberta $U \subseteq X$ de x, um subconjunto aberto $W \subset \mathbb{R}^n$ e um homeomorfismo $\varphi : U \to W$.*

Se pudermos mostrar que n é determinado exclusivamente por x, escreveremos $n = d(x)$ e chamaremos isto de dimensão local de X em x.

Teorema 1.1 (Invariância do Domínio)**.** *Se $U \subseteq \mathbb{R}^n$ é aberto e $f : U \to \mathbb{R}^n$ é contínua e injetiva, então $f(U)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$.*

Corolário 1.1.1. *Se $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e $V \subseteq \mathbb{R}^m$ são subconjuntos abertos tal que U é homeomorfo a V, então $n = m$.*

Corolário 1.1.2. *Se X é localmente euclideano, então a dimensão local é uma função bem definida, localmente constante $d : X \to \mathbb{Z}^+$.*

Definição 1.4 (Variedade)**.** *Um espaço topológico X é uma variedade de dimensão n (uma n- variedade topológica) se*

1. *X é localmente euclideano e $d(x) = n = dim(X)$;*

2. *X é de Hausdorff;*

3. *X possui uma base enumerável (segundo enumerável).*

Lema 1.1. *Se X é um espaço metrizável, compacto, conexo que é localmente euclideano, então Xé uma n-variedade, para algum $n \in \mathbb{Z}^+$.*

Exemplo 1. *Aqui estão alguns exemplos de variedades.*

1. *A n-esfera $\mathbb{S}^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : ||v|| = 1\}$ é uma n-variedade. Uma maneira de ver que é localmente euclidiana é por projeção estereográfica. Em particular o círculo $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ e a esfera $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ são variedades de dimensão 1 e 2 respectivamente.*

2. *Se N é uma n-variedade e M é uma m-variedade, então $N \times M$ é uma $n+m$-variedade. De fato, dado $(x, y) \in N \times M$, ou seja existe um inteiro $n \geq 0$ e uma vizinhança aberta U de x em N homeomorfo a um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, além disso temos que existe um inteiro $m \geq 0$ e uma vizinhança aberta V de y em M homeomorfa a um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^m$. Então a vizinhança $U \times V \subseteq N \times M$ de (x, y) é homeomorfa a um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$. Como M e N são espaços de Hausdorff que possuem uma base enumerável, então $N \times M$ também lo é. Portanto $N \times M$ é uma $n+m$-variedade.*

3. *O n-toro*
$$\mathbb{T}^n = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{n-vezes},$$
é uma variedade n-dimensional. De fato fazendo uso dos exemplos anteriores, temos que $\mathbb{S}^1$ é uma 1-variedade e aplicando sucessivamente o exemplo de acima, então temos que $\mathbb{T}^n$ é uma n-variedade.

4. *O Toro 2-dimensional ou bidimensional é um caso particular do exemplo anterior ou seja $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, é o mesmo vê-lo da seguinte forma. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^2$, definamos a relação de equivalência "$\sim$"por $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}^2$. Definamos a aplicação $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dada por $\pi(x) = x + \mathbb{Z}^2$ sendo $\pi(x)$ a classe de equivalência de x sob $\sim$. A aplicação π é conhecida como a* ***projeção canônica ou natural****. As classes de equivalência dividem o plano $\mathbb{R}^2$ em quadrados de comprimento 1. Pegando um representante de cada classe fixamos o quadrado $C = [0, 1] \times [0, 1]$, identificamos os lados por $(x, 0) \equiv (x, 1)$ e $(0, y) \equiv (1, y)$, o primeiro par de bordos é colado, o resultado é um cilindro. Quando o segundo par é colado, o cilindro se torna o 2-toro ou seja $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.*

Definição 1.5. *Sejam M_1 e M_2 variedades 2-dimensionais sem fronteira e sejam $D_i \subset M_i$ discos mergulhados, para cada $i = 1, 2$. Seja $M_i' = M_i - int(D_i)$, $i = 1, 2$. Seja o homeomorfismo $h : M_1 \to M_2$, os bordos ∂D_1 e ∂D_2 são coladas pelo homeomorfismo h, ou seja $h(\partial D_1) = \partial D_2$. Resultando a 2-variedade $M_1 \# M_2$, chamada de soma conexa de M_1 e M_2.*

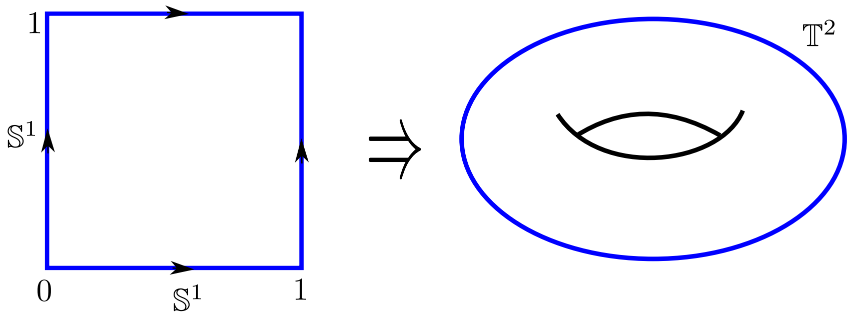


Figura 1.1: O toro 2-dimensional

Estritamente falando, os símbolos M_1, M_2 e $M_1\#M_2$ devem denotar classes de homeomorfismos de 2-variedades. Com esse entendimento, a soma conexa pode ser vista como comutativa,

$$M_1\#M_2 = M_2\#M_1,$$

associativa,

$$(M_1\#M_2)\#M_3 = M_1\#(M_2\#M_3).$$

A soma conexa da variedade M com a esfera $\mathbb{S}^2$ (sendo $\mathbb{S}^2$ a identidade em ambos lados), é o mesmo M, isto é

$$M\#\mathbb{S}^2 = M = \mathbb{S}^2\#M.$$

Exemplo 2. *A soma conexa $\mathbb{T}^2\#\mathbb{T}^2$ de suas cópias do toro é o toro de dois furos ilustrado na seguinte figura.*

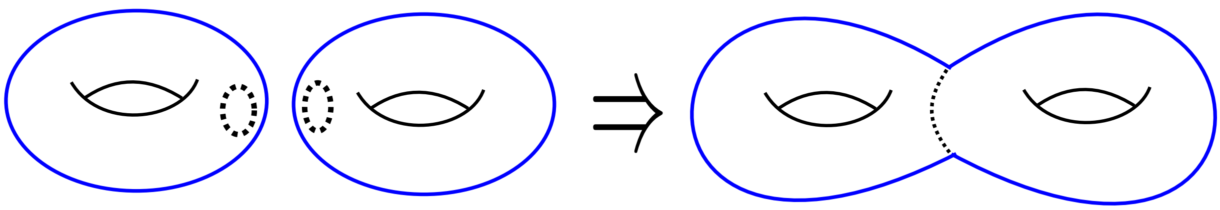


Figura 1.2: Suma conexa de Toros

Seja M uma variedade, então ela é localmente euclideano, logo temos uma família de cartas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$, onde para cada $\alpha \in I$ os U_α são vizinhanças abertas em M, φ_α-homeomorfas a um aberto de $\mathbb{R}^n$ e que cobrem M. A família $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ é chamada de **Atlas** de M, e cada par $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ é chamado **sistema**

de coordenadas locais ou **carta local** em M.

Agora dados os sistemas de coordenadas locais $\varphi : U_\alpha \to W_\alpha$ e $\varphi_\beta : U_\beta \to W_\beta$ no espaço topológico M, tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$, então a aplicação

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

o qual é um homeomorfismo chamado **mudança de coordenadas**. No caso que $\varphi_{\alpha\beta}$ são difeomorfismos de classe C^r com $r \geq 1$, dizemos que M é uma **variedade diferenciável** de classe C^r, $r \geq 1$.

Definição 1.6 (Folheação). *Uma folheação $\mathcal{F}$ sobre uma superfície M de classe C^r, $r \geq 0$ com dimensão 1 é um atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ de classe C^r, $r \geq 0$ tais que:*

1. $\bigcup_{i \in I} U_i = M$.

2. *Se $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, as mudanças de coordenadas*

$$\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j((U_i \cap U_j)$$

que tem a forma

$$\varphi_{ij}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)) \ , (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

as quais são de classe C^r, $r \geq 0$.

As componentes conexas de $\varphi^{-1}(x, y_0)$, y_0 = constante, são denominadas **placas** de U_i, elas estão contidas em U_i. A segunda condição da definição anterior, expressa que se $\alpha_i \subset U_i$ e $\beta_j \subset U_j$ são placas, então ou $\alpha_i \cap \beta_j = \varnothing$ ou $\alpha_i \cap \beta_j$ é aberto em α_i e β_j.

Na Figura [1.3] ilustramos o aspecto local de uma variedade de dimensão 2 folheada por uma folheação de dimensão 1.

Exemplo 3. *Seja A uma matriz 2×2, fixamos um autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ da matriz A. Seja E_λ o auto-espaço associado a λ de dimensão 1, que tem inclinação m. A projeção do auto-espaço E_λ no toro pela projeção $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ é $\pi(E_\lambda)$. Dependendo do valor de m, temos o seguinte:*

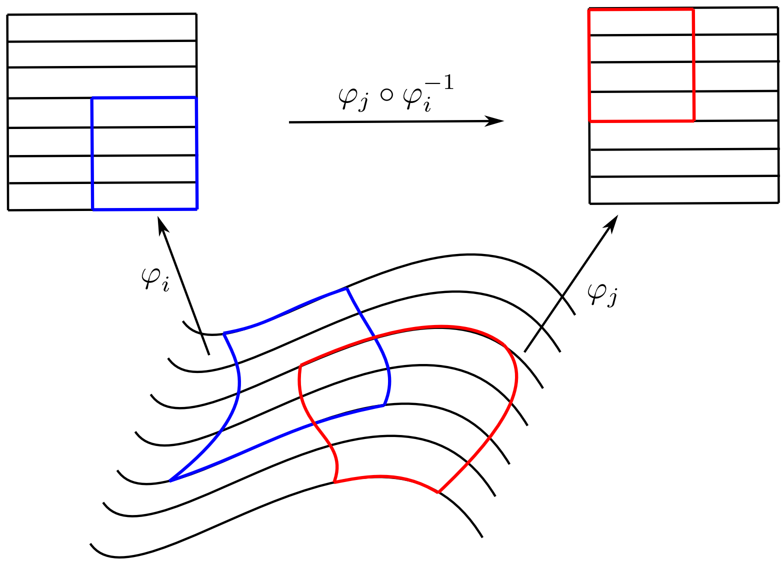


Figura 1.3: Folheação de dimensão 1.

- *Se $m \in \mathbb{Q}$, então $\pi(E_\lambda)$ é uma curva fechada simples e conexa.*
- *Se $m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então $\pi(E_\lambda)$ é uma curva infinita sem auto interseções, mais ainda a curva $\pi(E_\lambda)$ é densa no toro.*

Consideramos uma família de retas $\{\mathcal{L}_i\}_{i\in I}$ paralelas com o auto-espaço E_λ. Logo aplicando projeção π para cada uma das retas $\mathcal{L}_i$, temos que a família $\{\pi(\mathcal{L}_i)\}_{i\in I}$ forma uma folheação no toro $\mathbb{T}^2$.

Agora apresentamos um exemplo importante de dinâmica hiperbólica para olhar como é que são suas folheações.

Exemplo 4 (Difeomorfismo de Anosov no Toro)**.** *Seja a matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, cujos autovalores são $\mu = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ e $\lambda = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, onde $0 < \mu < 1 < \lambda$, e $\det(A) = \mu\lambda = 1$. Do Exemplo [1] temos que a projeção $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ leva um ponto x em $\mathbb{R}^2$ a uma classe de equivalência do toro. Por outro lado o mapa associado à matriz A é a aplicação linear $F_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido por $F_A(x) = Ax$ para cada $x \in \mathbb{R}^2$. Logo como $F_A(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$ (pois A tem coeficientes inteiros), então a aplicação linear F_A induz um mapa f_A do toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ tal que $f_A \circ \pi(x) = \pi \circ F_A(x)$, logo f_A esta bem definido. Dados $\pi(x), \pi(x') \in \mathbb{T}^2$, tal que $\pi(x) = \pi(x')$, então $x = x' + m$ com $m \in \mathbb{Z}^2$, assim $\pi(F_A(x)) = \pi(F_A(x')) + \pi(F_A(m)) = \pi(F_A(x'))$. Além disso como $\det(A) = 1$, então A^{-1} é novamente uma matriz com entradas inteiras, então f_A é um difeomorfismo com $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$. O mapa f_A é chamado de* ***Difeomorfismo de Anosov no toro****.*

Os auto-espaços de dimensão 1 associados a os autovalores μ *e* λ *são* $E_\mu \subset \mathbb{R}^2$ *e* $E_\lambda \subset \mathbb{R}^2$*, dadas por:*

$$E_\mu = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}x\} \subset \mathbb{R}^2,$$

$$E_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{-\sqrt{5}+1}{2}x\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Observa-se que os auto-espaços E_μ *e* E_λ *tem inclinação irracional, então as projeções no toro,* $\pi(E_\mu)$ *e* $\pi(E_\lambda)$*, são curvas densas no toro* $\mathbb{T}^2$*. De agora em diante vamos denotar os auto-espaços por* $E_\mu = \mathbb{E}^s$*,* $E_\lambda = \mathbb{E}^u$*; e as projeções como* $W^s(0) = \pi(\mathbb{E}^s)$ *e* $W^u(0) = \pi(\mathbb{E}^u)$*.*

Definimos agora as variedades estáveis W^s *e as variedades instáveis* W^u *de outros pontos do Toro. Seja* $x \in \mathbb{T}^2$*, definimos*

$$W^s(x) = \{y \in \mathbb{T}^2 : \lim_{n\to+\infty} dist(f^n(x), f^n(y)) = 0\},$$

$$W^u(x) = \{y \in \mathbb{T}^2 : \lim_{n\to+\infty} dist(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0\}.$$

Seguindo a ideia do Exemplo [3] temos que as projeções das retas paralelas a $\mathbb{E}^s$ *e* $\mathbb{E}^u$ *são* $W^s(x) = \pi(x+\mathbb{E}^s)$*,* $W^u(x) = \pi(x+\mathbb{E}^u)$*. O conjunto de todas as variedades estáveis forma a* ***folheação estável****, dada por*

$$\mathcal{F}^s = \{W^s(x) : x \in \mathbb{T}^2\},$$

similarmente a ***folheação instável*** *dada por*

$$\mathcal{F}^u = \{W^u(x) : x \in \mathbb{T}^2\}.$$

Um difeomorfismo $f : M \to M$ de uma variedade compacta M, é chamada **Anosov**, se em todo ponto $p \in M$ existe uma decomposição do espaço tangente $T_pM = \mathbb{E}^s(p) \oplus \mathbb{E}^u(p)$ em dois subespaços transversais $\mathbb{E}^s(p)$ e $\mathbb{E}^u(p)$, tais que

1. Esta decomposição é contínua.

2. A decomposição é invariante pela derivada de f, isto é

$$Df(p)(\mathbb{E}^s(p)) = \mathbb{E}^s(f(p)) \ , \ Df(p)(\mathbb{E}^u(p)) = \mathbb{E}^u(f(p)).$$

3. Existem números $C \geq 1$ e $0 < \lambda < 1$ tais que para todo $n \geq 0$,

$$||Df^n(p).v_p|| \leq C\lambda^n||v_p|| \text{ , para todo } v_p \in \mathbb{E}^s(p), \text{ e}$$

$$||Df^{-n}(p).v_p|| \leq C\lambda^n||w_p|| \text{ , para todo } w_p \in \mathbb{E}^u(p).$$

Todo difeomorfismo Anosov tem um par de folheações transversais $\mathcal{F}^s$ e $\mathcal{F}^u$ tais que suas folhas tem como espaços tangentes aos espaços $\mathbb{E}^s$ e $\mathbb{E}^u$ respectivamente. Além disso para N grande (para compensar a constante C em 3.) o difeomorfismo f^N contrai as folhas estáveis $W^s(p)$ e expande as folhas instáveis $W^u(p)$. As folhas estáveis $W^s(p)$ são copias de $\mathbb{R}^s$ imersas em M, onde $s = dim(\mathbb{E}^s(p))$, analogamente para as folhas instáveis $W^u(p)$.

A única superfície compacta orientável que admite um difeomorfismo de Anosov é o Toro $\mathbb{T}^2$.

1.3 Contínuos e Métrica de Hausdorff

Nesta seção vamos definir o conceito de continuo e sub-contínuo dos Hiperespaços 2^M e $C(M)$, junto com algumas propriedades de tais hiperespaços. As demonstrações das afirmações são feitas por M. Nadler em [12].

Um **contínuo** é um espaço métrico compacto conexo não degenerado. O fato de dizer que não é degenerado significa que não é apenas um ponto. Seja $(M, dist)$ um espaço métrico compacto. Dizemos que $A \subset M$ é um **sub-contínuo** se A é compacto e conexo. Os **Hiperespaços** de M, são os conjuntos 2^M e $C(M)$ definidos por:

$$2^M = \{A \subset M : A \text{ é não vazio e compacto } \}$$

$$C(M) = \{A \in 2^M : A \text{ é conexo } \}.$$

Uma métrica é definida para 2^M da seguinte forma: Seja $\varepsilon > 0$ e $A \in 2^M$, então a ε-vizinhança de A em M é dada por

$$U_\varepsilon(A) = \{x \in M : dist(x, a) < \varepsilon \text{ para algum } a \in A\}.$$

Se $A, B \in 2^M$, então definimos a métrica para 2^M por:

$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : U_\varepsilon(A) \supset B \text{ e } U_\varepsilon(B) \supset A\}$$

que é chamada **métrica de Hausdorff** induzida por $dist$. Para os hiperespaços 2^M e $C(M)$ se tem os seguintes resultados.

Teorema 1.2. *Se M é compacto, então 2^M e $C(M)$ são compactos.*

Demonstração. A prova se encontra no livro de M. Nadler ([12], pp. 8-9). ■

Teorema 1.3. *Se M é contínuo, então 2^M e $C(M)$ são contínuos.*

Demonstração. A prova está no Capítulo 1 do livro de M. Nadler ([12],pp. 65), nela se mostra um resultado mais forte, logo segue o resultado. ■

Teorema 1.4. *Seja M compacto e conexo não degenerado. Os hiperespaços 2^M e $C(M)$ são contínuos arco-conexos.*

Demonstração. A prova pode ser olhada no livro de M. Nadler ([12],pp. 63-65). ■

Teorema 1.5. *Se M compacto e conexo não degenerado, então 2^M e $C(M)$ são conexos*

Demonstração. Ver o Capítulo 1 do livro de M. Nadler [12]. ■

Capítulo 2

Homeomorfismos Expansivos

Começamos este capítulo com a definição de homeomorfismos expansivos, mostraremos algumas de suas propriedades e logo enunciaremos a classificação de homeomorfismos expansivos em superfícies feita por Lewowicz. Depois a definição de expansividade é generalizada dando origem ao conceito de N-expansividade. A continuação introduzimos os conceitos de homeomorfismos cw-expansivos, onde o principal resultado é mostrado nesta seção.

As referências utilizadas neste capítulo são os artigos de A. Artigue [1]; J Lewowicz [9] e H. Kato [8] , [7].

2.1 Homeomorfismos Expansivos

Definição 2.1 (Expansividade)**.** *Um homeomorfismo $f : M \to M$ é expansivo se existe $\alpha > 0$ tal que para $x, y \in M$, $x \neq y$, então $dist(f^n(x), f^n(y)) > \alpha$ para algum $n \in \mathbb{Z}$. De forma equivalente f é expansivo se existe $\alpha > 0$ tal que se para $x, y \in M$ e $dist(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, então $x = y$.*

Exemplo 5. *O Difeomorfismo de Anosov apresentada no Exemplo 4 do capítulo 1 é expansivo. A prova é feita no livro de C. Robinson [14].*

Teorema 2.1. *Seja $f : M \to M$ um homeomorfismo de um espaço métrico compacto M e seja $n \neq 0$ um inteiro. Então f é expansivo se e somente se f^n é expansivo.*

Demonstração. Observe que f é expansivo se, e somente se f^{-1} é expansivo, a prova é direta da definição de expansividade. Agora só precisamos mostrar que f é expansivo se, e somente se, f^n é expansivo para $n \in \mathbb{N}$. É claro que, se f^n é expansivo, então f é expansivo, isto por definição de expansividade.

Agora suponhamos que f é expansivo com constante de expansividade α, como f é suas iteradas são contínuas então existe $\varepsilon > 0$ tal que $dist(x, y) < \varepsilon$ implica $dist(f^i(x), f^i(y)) < \alpha$ para cada $0 \le i \le n-1$. Suponhamos que f^n não é expansivo, então para todo $\lambda > 0$ existem $x_\lambda, y_\lambda \in M$, $x_\lambda \neq y_\lambda$ tal que $dist(f^{nk}(x_\lambda), f^{nk}(y_\lambda)) \le \lambda$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Em particular para $\lambda = \varepsilon$ temos que $dist(f^{nk}(x_\varepsilon), f^{nk}(y_\varepsilon)) \le \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Logo pela continuidade de f e suas iteradas temos $dist(f^{nk+i}(x_\varepsilon), f^{nk+i}(y_\varepsilon)) \le \alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $0 \le i \le n-1$, mas qualquer inteiro tem a forma $m = nk + i$ onde $n \in \mathbb{Z}$ e $0 \le i \le n-1$, assim $dist(f^m(x_\varepsilon), f^m(y_\varepsilon)) \le \alpha$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, o que contradiz a expansividade de f com a constante de expansividade α. Portanto f^n é expansivo. ■

Teorema 2.2. *1. Se $f : M \to M$ é expansivo e A um subconjunto fechado de M com $f(A) = A$, então $f|_A$ é expansivo.*

2. Sejam $f : M \to M$ e $g : N \to N$ homeomorfismos e suponha que f é topologicamente conjugado a g. Então f é expansivo se, e somente se g é expansivo.

Demonstração. Temos:

1. A prova é imediato.

2. Suponhamos que g é expansivo com constante de expansividade α. Pela continuidade de h para $x, y \in M$ escolhemos $\varepsilon > 0$ tal que $dist(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$ implica $dist(h(f^k(x)), h(f^k(y))) < \alpha$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, onde h é um homeomorfismo tal que $h \circ f^n = g^n \circ h$; logo temos

$$dist(h(f^k(x)), h(f^k(y))) = dist(g^n(h(x)), g^n(h(y))) < \alpha \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}$$

o que implica $h(x) = h(y) \Leftrightarrow x = y$ pois h é um homeomorfismo. Logo f é expansivo com constante de expansividade ε. O reciproco é mostrado da mesma forma, temos que trocar h por h^{-1}.

■

Teorema 2.3. *Se $f : M \to M$ é um homeomorfismo expansivo com constante de expansividade $\alpha > 0$, então para qualquer $n \in \mathbb{N}$ existe apenas um número finito de pontos periódicos de período n.*

Demonstração. Suponhamos pelo absurdo, ou seja existe $n \in \mathbb{N}$ tal que temos um número infinitos de pontos periódicos de período n, assim temos uma sequência $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de pontos periódicos distintos de período n, como M é compacto temos que a sequência anterior possui uma subsequência convergente em M, ou seja $\{p_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $p_{i_k} \to p \in M$ quando $k \to \infty$. Logo temos

$$\begin{aligned} dist(f^n(p), p) &= dist(f^n(\lim_{k\to\infty} p_{i_k}), \lim_{k\to\infty} p_{i_k}) \\ &= dist(\lim_{k\to\infty} f^n(p_{i_k}), \lim_{k\to\infty} p_{i_k})) \\ &= \lim_{k\to\infty} dist(f^n(p_{i_k}), p_{i_k}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

assim $f^n(p) = p$. Se $f^j(p) = p$ para qualquer $j \in \{1, ..., n-1\}$ teríamos $f^j(p_{i_k}) = p_{i_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto p é um ponto periódico de período n. Seja $\alpha > 0$ a constante de expansividade de f^n, então existem infinitos pontos fixos de f^n na bola $B_\alpha(p)$. Portanto $\Gamma_\alpha(p)$ tem infinitos pontos, assim temos uma contradição. ■

2.2 Classificação de Expansivos

Agora fazemos um resumo da classificação de homeomorfismos expansivos em superfícies feita no artigo de J. Lewowicz [9]. Todos os seguintes resultados são provados nesse mesmo artigo.

Teorema 2.4 (A Esfera). *Não existem homeomorfismos expansivos na esfera $\mathbb{S}^2$.*

Com relação à equivalência topológica dos difeomorfismos expansivos, Franks mostra em [5] que um difeomorfismo Anosov no toro $\mathbb{T}^2$, é conjugado a um isomorfismo linear hiperbólico.

Teorema 2.5 (O Toro)**.** *Seja $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ um homeomorfismo expansivo, então é conjugado a um difeomorfismo Anosov.*

A classificação dos homeomorfismos expansivos de $\mathbb{T}^2$ segue-se das conclusões anteriores e dos resultados de [5] sobre a conjugação: Se g é um homeomorfismo de $\mathbb{T}^2$, homotópico a um isomorfismo linear hiperbólico f, então existe um mapa contínuo sobrejetivo $h : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ ta que $f \circ h = h \circ g$ (g é semi-conjugada a f). O fato que o levantamento de h para $\mathbb{R}^2$ é um mapa próprio (a imagem inversa de um conjunto compacto é compacto), juntamente com as propriedades mencionadas de levantamentos de variedades estáveis (instáveis), permite mostrar que, se g é um homeomorfismo expansivo, então h é injetiva. Como alguns diâmetros crescem exponencialmente sob os iterados de um levantamento de g, obtemos que g é conjugado a f.

Denotemos as superfícies compactas orientáveis de gênero maior ou igual a 2 por Σ_g, onde $g \geq 2$. Na seção 6 de [9] se mostra o seguinte Teorema.

Teorema 2.6 (Superfícies de Gênero maior que 1)**.** *Todo homeomorfismo expansivo em Σ_g é conjugada a um Pseudo-Anosov.*

Para uma superfície Σ_g com gênero maior, o resultado de Handel M. em [6] afirma que, se g é homotópico a um Pseudo-Anosov f, então existe um conjunto compacto g-invariante $C \subset \Sigma_g$ tal que $g|_C$ é semi-conjugada a f. Em [9] se mostra que quando g é expansivo, então $C = \Sigma_g$. A classificação dos homeomorfismos expansivos em Σ_g segue agora de argumentos semelhantes aos usados no caso do toro e do Teorema de classificação isotópica de Thurston em [15].

2.3 N-expansividade

O conceito de N- expansividade foi introduzido por C. Morales no artigo [11], onde faz uma generalização do conceito de expansividade. Um homeomorfismo N-expansivo, significa que temos no máximo N órbitas que podem acompanhar uma órbita fixa.

Seja $f : M \to M$ um homeomorfismo de um espaço métrico compacto M dado $x \in M$ e $\varepsilon > 0$ definimos o conjunto

$$\Gamma_\varepsilon(x) = \{y \in M : dist(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon \text{ , } \forall n \in \mathbb{Z}\}$$

chamada de **bola dinâmica** de raio ε e centro x.

Definição 2.2 (N-expansividade)**.** *Dado um inteiro positivo N, o homeomorfismo f é N-expansivo, se existe $\alpha > 0$ tal que $\#(\Gamma_\alpha(x)) \leq N$ para todo $x \in M$.*

Na definição anterior $\#(A)$ denota o cardinal do conjunto A.

Observação 1. *Um homeomorfismo é expansivo se ela é 1-expansivo, isso é verdade a partir da definição de expansividade. Sendo $\alpha > 0$ a constante de expansividade de f temos que $\Gamma_\alpha(x) = \{x\}$ para todo $x \in M$, o recíproco é verdade.*

Observação 2. *O Teorema 2.3 também é válido se f fosse N-expansivo, a prova é a mesma.*

2.4 Homeomorfismos cw-expansivos

Utilizaremos a notação dada por A. Artigue em [1].

Definição 2.3. *Seja $(M, dist)$ um espaço métrico compacto. Um homeomorfismo $f : M \to M$ é **continuum-wise expansivo** (ou cw-expansivo), se existe um número positivo $c > 0$ tal que se A é um sub-contínuo não degenerado de M, então existe um inteiro $n = n(A) \in \mathbb{Z}$ tal que $diam(f^n(A)) > c$. O número c é chamado de **constante de expansividade** para f. Onde o diâmetro de um conjunto $S \subset M$ é $diam(S) = \sup\{dist(x, y) : x, y \in S\}$.*

No seguinte Lema mostramos que a classe de homeomorfismos cw-expansivo é mais geral que os N-expansivos.

Lema 2.1. *Seja M um espaço métrico compacto. Se $f : M \to M$ é N-expansivo, então f é cw-expansivo.*

Demonstração. Seja A um sub-contínuo não degenerado de M e $x \in A$, como A é um sub-contínuo não degenerado de M então existem infinitos pontos em A, e como f é N-expansivo então existe algum $y \in (A \setminus \Gamma_\alpha(x))$. Como f é N-expansivo e $y \notin \Gamma_\alpha(x)$ então existe um $n \in \mathbb{Z}$ tal que $d(f^n(x), f^n(y)) > \alpha$. De maneira particular temos que diam$(f^n(A)) = \sup\{d(f^n(x), f^n(y)) : x, y \in A\} > \alpha$. Portanto temos que f é CW-expansivo. ■

De agora em diante neste trabalho denotamos "continuum-wise"expansivo por "cw-expansivo. Note que o concito de homeomorfismos cw-expansivos é mais geral que os N=expansivos como na Figura 2.1.

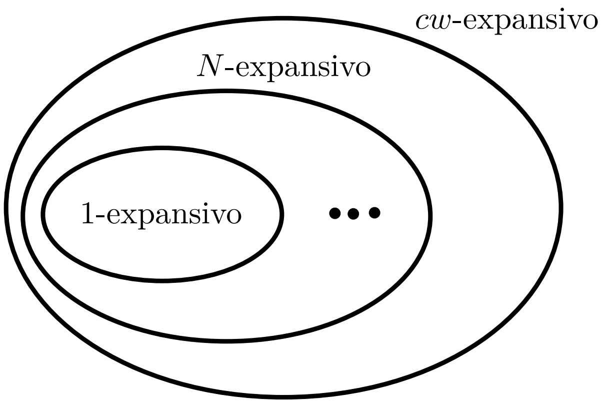


Figura 2.1: Generalização da Expansividade

Seja $f : M \to M$ um homeomorfismo de um espaço métrico $(M, dist)$. Para qualquer $\varepsilon > 0$, definimos os subconjuntos $\mathcal{C}^s_\varepsilon$, $\mathcal{C}^u_\varepsilon \subset C(M)$ que chamamos de **famílias locais estáveis e instáveis**, definidas por:

$$\mathcal{C}^s_\varepsilon = \{A \in C(M) : diam(f^n(A)) \leq \epsilon \text{ , } \forall n \geq 0\}$$

$$\mathcal{C}^u_\varepsilon = \{A \in C(M) : diam(f^{-n}(A)) \leq \epsilon \text{ , } \forall n \geq 0\}.$$

Também definimos **famílias estáveis e instáveis** $\mathcal{C}^s$ e $\mathcal{C}^u$ de $C(M)$ como segue:

$$\mathcal{C}^s = \{A \in C(M) : \lim_{n\to\infty} diam(f^n(A)) = 0\}$$

$$\mathcal{C}^u = \{A \in C(M) : \lim_{n\to\infty} diam(f^{-n}(A)) = 0\}.$$

Agora estudaremos algumas propriedades dos homeomorfismos cw-expansivos. A seguinte proposição mostra que dadas certas condições, se $A \in \mathcal{C}^r_\epsilon$, então $A \in \mathcal{C}^r$ onde $r = s, u$.

Proposição 2.1. *Seja $f : M \to M$ um homeomorfismo cw-expansivo de um espaço métrico compacto M com constante de expansividade $c > 0$ e seja ε tal que $c \geq \varepsilon > 0$. Se $A \in \mathcal{C}^s_\epsilon$ (resp. $\mathcal{C}^u_\varepsilon$), então $A \in \mathcal{C}^s$ (resp. $\mathcal{C}^u$). Em particular*

$$\mathcal{C}^s = \{f^{-n}(A) : A \in \mathcal{C}^s_\varepsilon \text{ , } n \geq 0\} \text{ e}$$

$$\mathcal{C}^u = \{f^{n}(A) : A \in \mathcal{C}^u_\varepsilon \text{ , } n \geq 0\}.$$

Demonstração. Provamos pelo absurdo. Seja $A \in \mathcal{C}^s_\varepsilon$, e suponhamos que $A \notin \mathcal{C}^s$, isto é $\lim\limits_{n\to\infty} diam(f^n(A)) \neq 0$, então pela definição de limite de sequências, existe $\delta > 0$ tal que $\forall i \in \mathbb{N}$, $\exists n(i) \geq i \in \mathbb{N}$ e $diam(f^{n(i)}(A)) \geq \delta$, em outras palavras, existe uma sequência de números naturais $\{n(i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $n(1) < n(2) < ... < n(i)...$ e $diam(f^{n(i)}(A)) \geq \delta$ para algum $\delta > 0$, logo temos a sequência de sub-contínuos $\{f^{n(i)}(A)\}_{i\in\mathbb{N}} \subset C(M)$. Então, como $C(M)$ é compacto, a sequência $\{f^{n(i)}(A)\}_{i\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência $\{f^{n(i_k)}(A)\}_{k\in\mathbb{N}}$ covergente em $C(M)$, isto é

$$\lim_{k\to\infty} f^{n(i_k)}(A) = B \in C(M).$$

Como $A \in \mathcal{C}^s_\varepsilon$, então $diam(f^n(A)) \leq \varepsilon$, $\forall n \geq 0$, além disso sabemos que $\lim\limits_{k\to\infty} n(i_k) = \infty$, assim temos

$$\delta \leq diam(\lim_{k\to\infty} f^{n(i_k)}(A)) = diam(B) \leq \varepsilon.$$

Fixando qualquer $n \in \mathbb{Z}$ temos que:

$$\begin{aligned} diam(f^n(B)) &= diam(f^n(\lim_{i\to\infty} f^{n(i)}(A_i))) \\ &= diam(\lim_{i\to\infty} f^{n+n(i)}(A_i)) \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim encontramos um sub-contínuo B com $diam(B) \geq \delta$ e $diam(f^n(B)) \leq \varepsilon \leq c$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Isso contradiz o fato que f é um homeomorfismo cw-expansivo com constante de expansividade $c > 0$. Portanto $A \in \mathcal{C}^s$. Da mesma forma se mostra que se $A \in \mathcal{C}^u_\varepsilon$, então $A \in \mathcal{C}^u$. ∎

As seguintes proposições são uma serie resultados preliminares que precisaremos para mostrar a Proposição 2.6.

Proposição 2.2. *Seja $f : M \to M$ um homeomorfismo cw-expansivo de um espaço métrico compacto M com uma constante de expansividade $c > 0$. Seja $\varepsilon > 0$ com $0 < 2\varepsilon \leq c$. Então existe $\delta > 0$ tal que para todo $A \in C(M)$ que satisfaz:*

1. $diam(A) \leq \delta$,

2. *existe* $n_0 = n_0(A) > 0$ *tal que* $\varepsilon \leq \sup\{diam(f^j(A)) : j = 0, 1, ..., n_0\} \leq 2\varepsilon$,

temos que $diam(f^{n_0}(A)) \geq \delta$.

Demonstração. Suponhamos pelo absurdo, isto é para todo $\delta > 0$, existe $A_\delta \in C(X)$ que satisfaz: $diam(A_\delta) \leq \delta$, $\varepsilon \leq \sup\{diam(f^j(A_\delta)) : j = 0, 1, ..., n(\delta)\} \leq 2\varepsilon$ para algum $n(\delta) > 0$ e $diam(f^{n(\delta)}(A_\delta)) < \delta$.

Em outras palavras para qualquer $i \in \mathbb{N}$, tomemos os δ 's da forma $\delta_i = \frac{1}{i}$. Assim existe $A_i \in C(X)$ que satisfaz: $diam(A_i) \leq \delta_i$, existe $n(i) > 0$ tal que $\varepsilon \leq \sup\{diam(f^j(A_i)) : j = 0, 1, ..., n(i)\} \leq 2\varepsilon$ e $diam(f^{n(i)}(A_i)) < \delta_i$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Afirmamos que $n(1) < n(2) < ... < n(i) < ....$ Escolhamos $m(i) \in \{n(i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $0 \leq m(i) \leq n(i)$ e $\varepsilon \leq diam(f^{m(i)}(A_i)) \leq 2\varepsilon$. Mas sabemos que $\lim_{i \to \infty} (n(i) - m(i)) = \infty = \lim_{i \to \infty} m(i)$. Logo temos a sequência de contínuos $\{f^{m(i)}(A_i)\} \subset C(M)$, mas como $C(M)$ é compacto, esta sequência possui uma subsequência convergente em $C(M)$, isto é

$$\lim_{k \to \infty} f^{m(i_k)}(A_{i_k}) = B \in C(M).$$

Temos que B é não degenerado pois o diâmetro dos $f^{m(i)}(A_i)$ não é zero. Finalmente afirmamos que $diam(f^n(B)) \leq c$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. De fato, dado um $n \in \mathbb{Z}$ temos

$$\begin{aligned} diam(f^n(B)) &= diam(f^n(\lim_{i \to \infty} f^{m(i)}(A_i))) \\ &= diam(\lim_{i \to \infty} f^{n+m(i)}(A_i)) \\ &\leq 2\varepsilon \leq c. \end{aligned}$$

Isso contradiz a cw-expansividade. ∎

Proposição 2.3. *Seja $f : M \to M$ um homeomorfismo cw-expansivo de um espaço métrico compacto M, com uma constante de expansividade $c > 0$. Seja*

$0 \leq 2\varepsilon \leq c$. *Então existe* $\delta > 0$ *tal que se* A *é qualquer sub-contínuo não degenerado de* M, *com* $diam(A) \leq \delta$ *e* $diam(f^m(A)) \geq \varepsilon$ *para algum* $m \in \mathbb{Z}$, *então uma das seguintes condições é válida:*

1. *Se* $m \geq 0$, *então* $diam(f^n(A)) \geq \delta$ *para qualquer* $n \geq m$. *Mais precisamente, existe um sub-contínuo* B *de* A *tal que* $\sup\{diam(f^j(B)) : j = 0, 1, ..., n\} \leq \varepsilon$ *e* $diam(f^n(B)) = \delta$.

2. *Se* $m < 0$, *então* $diam(f^{-n}(A)) \geq \delta$ *para qualquer* $n \geq -m$. *Mais precisamente, existe um sub-contínuo* B *de* A *tal que* $\sup\{diam(f^{-j}(B)) : j = 0, ..., n\} \leq \varepsilon$ *e* $diam(f^{-n}(B)) = \delta$.

Demonstração. A existência do δ é garantido pela Proposição anterior, então fixamos A, sub-continuo não degenerado de M que satisfaz: $diam(A) \leq \delta$ e $diam(f^m(A)) \geq \varepsilon$ para algum $m \in \mathbb{Z}$. Fixemos um ponto a de A. Suponhamos que $m \geq 0$. Logo como $C(M)$ é arco conexo (pelo Teorema 1.4), temos que existe um arco contínuo $\alpha : [0, 1] \to C(M)$ de $\{a\}$ a A em $C(M)$, isto é:

- $\alpha(0) = \{a\}$ e $\alpha(1) = A$,
- Se $0 \leq t \leq s \leq 1$ então $\alpha(t) \subset \alpha(s)$.

Seja $n \geq m$, definamos o mapa $F : [0, 1] \to [0, \infty)$ por

$$F(t) = \sup\{diam(f^j(\alpha(t))) : j = 0, 1, ..., n\}.$$

A qual está bem definida, pois o supremo é único. Da definição de F temos que existe um $t_0 \in [0, 1]$ tal que $t_0 \in F^{-1}(\varepsilon)$, denotamos o contínuo $\alpha(t_0) = B'$. Como $B' \subset A$ então $diam(B') \leq \delta$, além disso $\sup\{diam(f^j(\alpha(t_0))) : j = 0, 1, ..., n\} = \varepsilon$ pois $F(t_0) = \varepsilon$, então aplicando a Proposição 2.2 a B' temos que

$$diam(f^n(B')) = diam(f^n(\alpha(t_0))) \geq \delta.$$

Logo, como $A = \alpha(1)$ então $diam(f^n(A)) \geq \delta$.

Agora definamos o mapa

$$G : C(B') \to [0, \infty) \text{ por } G(C) = diam(f^n(C)).$$

Como $C(B')$ é conexa (pois B' é um sub-contínuo), então existe um sub-contínuo $B \in G^{-1}(\delta)$, ou seja $G(B) = diam(f^n(B)) = \delta$ onde $\delta \leq \varepsilon$, assim B satisfaz as condições desejadas, isto é $diam(f^n(B)) = \delta$ e $\sup\{diam(f^j(B)) : j = 0, ..., n\} \leq \varepsilon$.

Da mesma forma se mostra para o caso $m < 0$, o que conclui a prova. ■

Corolário 2.6.1. *Seja $f, c, \varepsilon, \delta$ como na Proposição 2.2. Então para cada $\gamma > 0$ existe $N = N(\gamma) > 0$ tal que se $A \in C(M)$ e $diam(A) \geq \gamma$, então $diam(f^n(A)) \geq \delta$ para todo $n \geq N$ ou $diam(f^{-n}(A)) \geq \delta$ para todo $n \geq N$.*

Demonstração. Suponhamos pelo absurdo, isto é, existe $\gamma > 0$ tal que para todo $i \in \mathbb{N}$, existe $A_i \in C(M)$ com $diam(A_i) \geq \gamma$ e $diam(f^n(A_i)) < \delta$, e $diam(f^{-n}(A_i)) < \delta$ para algum $n \geq i$. Vamos denotar o sub-contínuo $f^{-n}(A_i)$ por B, isto é $f^{-n}(A_i) = B$, assim temos $diam(B) < \delta$. Para $n \in \mathbb{Z}$ e fazendo $\gamma = \varepsilon$ temos que

$$diam(f^n(B)) = diam(f^n(f^{-n}(A_i))) = diam(A_i) \geq \gamma = \varepsilon,$$

então aplicando a Proposição 2.3 no sub-contínuo B, temos que $diam(f^k(B)) \geq \delta$ para todo $k \geq n$, mas isso é uma contradição, pois para $k = 2n \geq n$, temos

$$diam(f^{2n}(B)) = diam(f^{2n}(f^{-n}(A_i))) = diam(f^n(A_i)) < \delta$$

Isso completa a prova. ■

Proposição 2.4 (Lema de Mañé). *Se $f : M \to M$ é um homeomorfismo cw-expansivo do espaço métrico compacto M e $\dim(M) > 0$, então existe um sub-contínuo não degenerado A de M tal que $A \in \mathcal{C}^u$ ou $A \in \mathcal{C}^s$.*

Demonstração. Tomemos c, ε, δ números positivos da Proposição 2.2, e seja C um sub-contínuo não degenerado de M, tal que $diam(C) \leq \delta$. Se $C \in \mathcal{C}^s$ ou $C \in \mathcal{C}^u$ não temos nada que mostrar, logo suponhamos que $C \notin \mathcal{C}^s$, então pelo contra positivo da Proposição 2.1 temos que $C \notin \mathcal{C}^s_\varepsilon$, isto é existe $m \geq 0$ tal que $diam(f^m(C)) > \varepsilon$. Então pela Proposição 2.3 (1), fixando $n_1 \geq m$ existe um sub-contínuo C_1 de C tal que $\sup\{diam(f^j(C_1)) : j = 0, ..., n_1\} \leq \varepsilon$ e $diam(f^{n_1}(C_1)) = \delta$.

Novamente se $C_1 \in \mathcal{C}^s$ a Proposição esta mostrada. Suponhamos que $C_1 \notin \mathcal{C}^s$ então pela Proposição 2.1, $C_1 \notin \mathcal{C}^s_\varepsilon$, isto é existe $m_1 \geq 0$ tal que $diam(f^{m_1}(C_1)) > \varepsilon$.

Como C_1 é um sub-contínuo de C, então $diam(C_1) \leq \delta$, logo pela Proposição 2.3 (1), fixando $n_2 \geq m_1$ tal que $n_2 > n_1$ existe um sub-continuo C_2 de C_1 tal que $\sup\{diam(f^j(C_2)) : j = 0, ..., n_2\} \leq \varepsilon$ e $diam(f^{n_2}(C_2)) = \delta$.

Realizando o processo indutivamente obtemos uma sequência de contínuos $\{C_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $C_1 \supset C_2 \supset \cdots$, onde estamos supondo que cada $C_i \notin \mathcal{C}^s$ para cada $i \in \mathbb{N}$, e de acima temos que existe uma sequência de números naturais $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ com $n_1 < n_2 < \cdots$, tais que

$$\sup\{diam(f^j(C_i)) : j = 0, ..., n(i)\} \leq \varepsilon \text{ e } diam(f^{n(i)}(C_i)) = \delta.$$

Como $C_1 \supset C_2 \supset \cdots$ e $C(X)$ é compacto, então a sequência $\{f^{n(i)}(C_i)\}$ de sub-contínuos de C é convergente em $C(X)$, isto é

$$\lim_{i\to\infty} f^{n(i)}(C_i) = A \in C(X).$$

Mostremos que $A \in \mathcal{C}^u_\varepsilon$, ou seja $diam(f^n(A)) \leq \varepsilon$ para cada $n \geq 0$. De fato, dado $n \geq 0$ temos

$$\begin{aligned} diam(f^n(A)) &= diam(f^n(\lim_{i\to\infty} f^{n(i)}(C_i))) \\ &= diam(\lim_{i\to\infty} f^{n+n(i)}(C_i)) \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim $A \in \mathcal{C}^u_\varepsilon$, mas pela Proposição 2.1, $A \in \mathcal{C}^u$, sendo A não degenerado pois $diam(A) = \lim_{i\to\infty} diam(f^{n_i}(C_i)) = \delta$. Isso completa a prova. ■

Um mapa $f : M \to M$ é chamado **positivamente expansivo** em $A \subset M$, se existe um número positivo $c > 0$ tal que para cada $x, y \in A$, $x \neq y$, então existe um número inteiro $n \geq 0$ tal que $dist(f^n(x), f^n(y)) > c$.

Proposição 2.5. *Se $f : M \to M$ é um homeomorfismo cw-expansivo de um espaço métrico compacto M, então existe um número positivo τ tal que para qualquer sub-contínuo não degenerado Y de M, Y contém um conjunto de Cantor C tal que f ou f^{-1} é positivamente expansivo em C com constante de expansividade τ.*

Demonstração. Seja c, ε, δ como na Proposição 2.3. Logo pelo Corolário 2.6.1 para $\gamma = \frac{\delta}{3}$, existe $N > 0$ tal que para um fixo $Y \in C(M)$ com $\frac{\delta}{3} \leq diam(Y) < \delta$, então $diam(f^n(Y)) \geq \delta$ ou $diam(f^{-n}(Y)) \geq \delta$ para todo $n \geq N$. Fazendo $\varepsilon = \delta$ temos para $n = N$ que $diam(f^N(Y)) \geq \varepsilon$ e sabemos $diam(Y) < \delta$, então pela Proposição 2.3 (1) temos que para $N > 0$, $diam(f^n(Y)) \geq \delta$ para todo $n \geq N$.

Fixamos $m > N$ tal que $diam(f^m(Y)) \geq \delta$. Pegamos dois sub-contínuos A_0 e A_1 de $f^m(Y)$ tal que $dist(A_0, A_1) \geq \frac{\delta}{3}$ e $diam(A_i) = \frac{\delta}{3}$ para $i = 1, 2$ (pois $diam(f^m(Y)) \geq \delta$). Como $diam(A_i) = \frac{\delta}{3}$ então pelo Corolário 2.6.1 tem-se $diam(f^n(A_i)) \geq \delta$ para todo $n \geq N$ onde $i = 0, 1$, em particular $diam(f^N(A_i)) \geq \delta$ para $i = 0, 1$.

Pegamos dois sub-contínuos A_{i0}, A_{i1} de $f^N(A_i))$ para cada $i = 0, 1$, de tal forma que $dist(A_{i0}, A_{i1}) \geq \frac{\delta}{3}$ e $diam(A_{ij}) = \frac{\delta}{3}$ para $j = 0, 1$. Se continuarmos o precedimento, obtemos sub-contínuos da forma $A_{i_1 i_2 \cdots i_n}$, onde $i_k = 0$ ou 1, e $n = 1, 2, \cdots$, ou seja:

$$\begin{aligned}
A_{i_1} \subset f^m(Y) \quad &\Rightarrow \quad f^{-m}(A_{i_1}) \subset Y, \text{ onde } i_1 = 0 \text{ ou } 1, \\
A_{i_1 i_2} \subset f^N(A_{i_1}) \quad &\Rightarrow \quad f^{-m-N}(A_{i_1 i_2}) \subset Y, \text{ onde } i_1, i_2 = 0 \text{ ou } 1, \\
&\vdots \\
A_{i_1 \cdots i_n} \subset f^N(A_{i_1 \cdots i_{n-1}}) \quad &\Rightarrow \quad f^{-m-(n-1)N}(A_{i_1 \cdots i_n}) \subset Y, \text{ onde } i_1, \cdots, i_n = 0 \text{ ou } 1.
\end{aligned}$$

Então, quando n vai para infinito temos sub-contínuos da forma:

$$A_{i_1 i_2 \cdots} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-(m+(n-1)N)}(A_{i_1 i_2 \cdots i_n}).$$

Os sub-contínuos $A_{i_1 i_2 \cdots}$ podem ser degenerados ou não degenerados, assim:

- Se, para cada sequência $i_1, i_2, \cdots$, então $A_{i_1 i_2 \cdots}$ é um ponto, logo $C = \{A_{i_1 i_2 \cdots} : i_k = 0 \text{ ou } 1\}$ é um conjunto de Cantor em Y e f é positivamente expansivo em C com constante de expansividade $\tau = \frac{\delta}{4}$.

- Se para alguma sequência $i_1, i_2, \cdots$, o contínuo $A_{i_1 i_2 \cdots}$ é não degenerado, então $A_{i_1 i_2 \cdots} \in \mathcal{C}^s$, pois a iteradas negativas de f sobre os $A_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ não se aproximam a zero. Logo pela mesma prova de acima, fazendo $A_{i_1 i_2 \cdots} = Y$, mostraremos que $A_{i_1 i_2 \cdots}$ contem um conjunto de Cantor C tal que f^{-1} é positivamente expansivo em C com constante de expansividade τ.

Portanto qualquer sub-contínuo Y de M, contém um conjunto de Cantor C tal que f ou f^{-1} é positivamente expansivo em C com constante de expansividade $\tau = \frac{\delta}{4}$. ■

Agora vamos enunciar a Proposição mais importante deste capítulo, a qual é a base de nosso estudo. Ela será adequada no seguinte capítulo mudando algumas notações.

Proposição 2.6. *Seja $f : M \to M$ um homeomorfismo cw-expansivo de um espaço compacto localmente conexo M com constante de expansividade $c > 0$, então para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para qualquer ponto $x \in M$, existem sub contínuos não degenerados A_x e B_x de M tal que $x \in A_x \cap B_x$, com $diam(A_x) = \delta = diam(B_x)$ e $A_x \in \mathcal{C}^s_\varepsilon(x)$ e $B_x \in \mathcal{C}^u_\varepsilon(x)$.*

Demonstração. Podemos assumir que $c > 0$ é como na Proposição 2.5 e ε e δ são como na Proposição 2.3. Seja x_0 um ponto de M. Mostremos que existem os sub-contínuos desejados A_{x_0} e B_{x_0} de M. Pegamos uma sequência de números positivos $\{\eta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, com $\delta > \eta_1 > \eta_2 > \cdots$, com $\lim_{i\to\infty} \eta_i = 0$ (neste caso podemos pegar os números $\eta_i = \frac{1}{i}$), fixamos o sub-continuo A_i de M com $x_0 \in A_i$ e $diam(A_i) = \eta_i$ para cada $i \in \mathbb{N}$ (cada A_i pode ser por exemplo $A_i = B_{\eta_i}(x_0)$). Como f é cw-expansivo, pela Proposição 2.5, temos que existe $\tau_i > 0$ tal que cada A_i contém um conjunto de Cantor C_i, onde nós vamos a supor que f é positivamente expansiva com constante de expansividade τ_i, isto é, dados $x_i, y_i \in C_i$ com $x_i \neq y_i$, então que existe um número inteiro $n_i \geq 0$ tal que

$$dist(f^{n_i}(x_i), f^{n_i}(y_i)) > \tau_i.$$

Afirmação: Sendo M é localmente conexo, então existe um número natural suficientemente grande N tal que, se D é um subconjunto de M com $\#(D) \geq N$ (onde $\#(D)$ denota a cardinalidade de D), então existem dois pontos d_1 e d_2 de D tal que existe um arco E de d_1 para d_2 em M com $diam(E) \leq \frac{\delta}{2}$.

De fato, dado $x \in M$, e dado a cobertura aberta $\mathcal{C} = \{B_{\frac{\delta}{4}}(x)\}_{x\in M}$, então pela compacidade de M existe uma subcobertura finita, ou seja $M = \bigcup_{i=1}^{M} B_{\frac{\delta}{4}}(x_i)$. Fazemos $N = M + 1$, dado um subconjunto D de X, com $\#(D) \geq N$, então temos que D é da forma

$$D = \{y_1, \cdots, y_M, y_{M+1}, \cdots\}.$$

Logo pelo princípio da casa dos pombos existem $y_i, y_j \in B_{\frac{\delta}{4}}(x_i)$, para algum $x_i \in M$. Como M é localmente conexa, então chamamos de E ao arco que liga y_i, y_j, onde $diam(E) \leq \frac{\delta}{2}$. Isso completa a prova da afirmação.

O conjunto C_i é cantor então C_i é infinito, logo fixamos dois pontos x_i e y_i com $x_i \neq y_i$ de C_i tal que para algum número inteiro $n(i) > i > 0$, temos

$$\sup\{dist(f^j(x_i), f^j(y_i)) : j = 0, 1, ..., n(i)\} > \tau_i > \varepsilon,$$

e exite um arco E_i de $f^{n(i)}(x_i)$ para $f^{n(i)}(y_i)$ em M com $diam(E_i) \leq \frac{\delta}{2} < \delta$. Consideremos o contínuo $F_i = f^{-n(i)}(E_i)$ que es um arco de x_i para y_i em M. Observe que

$$\sup\{diam(f^j(F_i)) : j = 0, 1, ..., n(i)\} \geq \sup\{dist(f^j(x_i), f^j(y_i)) : j = 0, 1, ..., n(i)\} > \varepsilon.$$

Se $diam(F_i) \leq \delta$, pela Proposição 2.2, temos $diam(E_i) = diam(f^{n(i)}(F_i)) \geq \delta$. Isso é uma contradição. Daí podemos concluir que $diam(F_i) > \delta$. Escolhemos um sub arco G_i de F_i contendo x_i tal que $diam(G_i) = \delta$. Temos que $diam(f^{n(i)}(G_i)) < \delta$ pois $diam(f^{n(i)}(F_i)) < \delta$, logo pela Proposição 2.3, vemos que

$$\sup\{diam(f^j(G_i)) : j = 0, 1, ..., n(i)\} < \varepsilon.$$

Temos a sequência de contínuos $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, onde cada G_i contém x_0, como $C(X)$ é compacto, então a sequência possui uma subsequência convergente em $C(X)$, ou seja, $\lim\limits_{k\to\infty} G_{i_k} = A_{x_0}$, então $diam(A_{x_0}) = \delta$ e $x_0 \in A_{x_0}$. Além disso $A_{x_0} \in \mathcal{C}^s_\varepsilon$, de fato, dado $n \geq 0$ temos

$$\begin{aligned} diam(f^n(A_{x_0})) &= diam(f^n(\lim_{k\to\infty} G_{i_k})) \\ &= diam(\lim_{k\to\infty} f^n(G_{i_k})) \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto $A_{x_0} \in \mathcal{C}_\varepsilon^s$. Por outro lado escolha uma sequencia $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$ de sub-contínuos não degenerados de A_{x_0} com $\lim_{i\to\infty} diam(B_i) = 0$. Como $B_i \in \mathcal{C}_\varepsilon^s$ podemos escolher um conjunto de Cantor C_i' em B_i tal que a parte (b) da Proposição 2.5 é satisfeita, isto é, existe $\tau_i' > 0$ tal que para $z, w \in C_i'$ com $z \neq w$, temos que existe um número natural $n > 0$ tal que $dist(f^{-n}(z), f^{-n}(w)) > \tau_i'$. Seguindo o mesmo procedimento de acima, podemos escolher um arco H_i tal que H_i contém um ponto de B_i com $diam(H_i) = \delta$ e

$$\sup\{diam(f^{-j}(H_i)) : j = 0, 1, ..., n(i)\} < \varepsilon.$$

Podemos supor que $\lim_{i\to\infty} H_i = B_{x_0}$. Então $x_0 \in B_{x_0} \in \mathcal{C}_\varepsilon^u$ e $diam(B_{x_0}) = \delta$. Isto completa a prova. ■

Capítulo 3

Classificação dos Homeomorfismos 2-expansivos

Neste capítulo vamos a estudar os conjuntos estáveis para homeomorfismos N-expansivos, depois de forma particular começamos com o estudo dos homeomorfismos 2-expansivos, onde vamos a definir os setores bi-assintóticos. Logo se mostra resultados que envolvem o conceito de estrutura de produto local, e finalmente provaremos que sendo f um homeomorfismo 2-expansivo em a superfície compacta M, com $\Omega(f) = M$, então f é expansivo. A referência utilizada é o artigo de A. Artigue, M. J. Pacifico e J. L. Vieitez [2].

Em [2] são utilizadas algumas técnicas desenvolvidas por J. Lewowicz feita em [9], as quais são: que não existem pontos Lyapunov Estáveis; que os contínuos contidos em W^s_ε ou em W^u_ε são localmente conexos para cada $x \in M$; existe um número finito de singularidades. Em consequência se mostra que os conjuntos estáveis e instáveis locais formam folheações singulares.

3.1 Conjuntos Estáveis

Seja $(M, dist)$ um espaço métrico e $f : M \to M$ um homeomorfismo, dado $\varepsilon > 0$ definimos o conjuntos estáveis e instáveis de um ponto $x \in M$ por f como:

$$W^s_\varepsilon(x, f) = \{y \in M : dist(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon, \forall n \geq 0\}$$

$$W^u_\varepsilon(x,f) = \{y \in M : dist(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon, \forall n \leq 0\}.$$

Quando não há confusão deixamos de escrever f e o conjunto estável (instável), além disso quando não é importante especificar o valor de ε dizemos que os conjuntos são estáveis e instáveis.

Definição 3.1 (Ponto Lyapunov Estável)**.** *Seja $f : M \to M$ um homeomorfismo do espaço métrico M. Um ponto $x \in M$ é Lyapunov Estável para f, se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, se $dist(x, y) < \delta$ então $dist(f^n(x); f^n(y)) < \varepsilon$ para todo $n \geq 0$.*

A Proposição 2.6 mostrada no capítulo 2, será adequada para este capítulo. Assim o enunciado equivalente é:

Proposição 3.1. *Seja $f : M \to M$ um homeomorfismo cw-expansivo com constante de expansividade $\alpha > 0$, definida em uma superfície compacta e conexa M, então para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para qualquer ponto $x \in M$, temos que $W^s_\varepsilon(x)$ contém um continuo não trivial D, tal que $x \in D$ e diam$(D) \geq \delta$. Da mesma forma, existe um contínuo não trivial $C \subset W^u_\varepsilon(x)$ com $x \in C$ e diam$(C) \geq \delta$.*

O seguinte Corolário mostra que não podem existir pontos Lyapunov Estáveis (resp. Instáveis), o qual é um fato importante para mostrar resultados posteriores.

Corolário 3.0.1. *Seja $f : M \to M$ um homeomorfismo cw-expansivo definida em uma superfície compacta conexa M, nas condições da Proposição 3.1. Então não existem pontos de Lyapunov Estáveis para f.*

Demonstração. Suponhamos pelo absurdo, isto é, existe um ponto $x \in M$ que é Lyapunov Estável, então por definição existe uma vizinhança $U = B_\delta(x)$ de x que está contida no conjunto estável local de x, ou seja $U \subset W^s_\varepsilon(x)$. Sabemos que a bola U é um contínuo estável de x, contida na superfície M, logo o x não possui um contínuo instável não trivial. Isso contradiz a Proposição 3.1, pois todo ponto de M possui contínuos estáveis e instáveis. ■

No que segue deste capítulo, salvo indique o contrário, consideramos M como sendo uma superfície compacta sem bordo e $f : M \to M$ um homeomorfismo N-expansivo com constante de expansividade $\alpha > 0$, consideramos $\varepsilon > 0$ com $0 < 2\varepsilon < \alpha$. Desta maneira dados $x, y \in M$ temos que $\#(W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y)) \leq N$.

Definição 3.2 (Localmente Conexo). *Seja (X, τ) um espaço topológico, dizemos que X é localmente conexo se para todo $p \in X$ e para toda vizinhança $U_p \subset X$ de p, existe uma vizinhança de p, $V_p \subset U_p$, tal que V_p é conexo.*

Seja $C \subset M$ um conjunto com a topologia induzida de M. Dizemos que C é localmente conexo, se para todo ponto $p \in C$ e para toda vizinhança $U_p \subset M$ de p, existe uma vizinhança $V_p \subset U_p$ de p tal que $V_p \cap C$ é conexo em $U_p \cap C \subset U_p$. Tendo todas estas ferramentas vamos mostrar a seguinte Proposição.

Proposição 3.2. *Se M é uma superfície compacta e $f : M \to M$ um homeomorfismo N-expansivo e dado $x \in M$, então qualquer contínuo contido em $W^s_\varepsilon(x)$ (resp. $W^u_\varepsilon(x)$) é localmente conexo.*

Demonstração. Suponhamos pelo absurdo, ou seja, existe um contínuo $C_0 \subset W^s_\varepsilon(x)$ tal que C_0 não é localmente conexo, então, existe $p \in C_0$ tal que C_0 não é localmente conexo em p, assim existe uma vizinhança U_p de p em M tal que para toda vizinhança $V_p \subset U_p$ de p, temos $V_p \cap C_0$ não é conexo em $U_p \cap C_0$. $\cdots (*)$

Em particular $U_p \cap C_0$ não é conexo, logo existe uma cisão não trivial de $U_p \cap C_0$, isto é, existem abertos A^1_1 e A^1_2 em U_p tais que $A^1_1 \cap C_0 \neq \varnothing$ e $A^1_2 \cap C_0 \neq \varnothing$ que satisfazem as seguintes condições:

$$(A^1_1 \cap C_0) \cap (A^1_2 \cap C_0) = \varnothing \text{ e } (A^1_1 \cap C_0) \cup (A^1_2 \cap C_0) = U_p \cap C_0.$$

Agora p pode estar em $A^1_1 \cap C_0$ ou em $A^1_2 \cap C_0$, mas não em ambas pois são disjuntas. Para fixar ideias consideremos $p \in A^1_1 \cap C_0$ e seja X_1 uma componente conexa de $\overline{A^1_2 \cap C_0}$ (onde X_1 é um contínuo não trivial).

Seja $A^1_1 \cap C_0 \subset U_p$ vizinhança de p. Por $(*)$, $A^1_1 \subset U_p$ e $p \in A^1_1$, então $A^1_1 \cap C_0$ não é conexo, fazendo o processo anterior temos que existe uma cisão não trivial de $A^1_1 \cap C_0$, isto é existem abertos A^2_1 e A^2_2 em A^1_1 tais que $A^2_1 \cap C_0 \neq \varnothing$ e $A^2_2 \cap C_0 \neq \varnothing$ que satisfazem:

$$(A^2_1 \cap C_0) \cap (A^2_2 \cap C_0) = \varnothing \text{ e } (A^2_1 \cap C_0) \cup (A^2_2 \cap C_0) = A^1_1 \cap C_0.$$

O ponto p pode estar em $A_1^2 \cap C_0$ ou $A_2^2 \cap C_0$, logo suponhamos que $p \in A_1^2 \cap C_0$ e seja X_2 a componente conexa de $\overline{A_2^2 \cap C_0}$ (X_2 é um contínuo não trivial).

Fazendo o mesmo procedimento indutivamente, obtemos vizinhanças $A_j^i \cap C_0$ de p, e componentes conexas (contínuos não triviais) X_i de $\overline{A_j^i \cap C_0}$ onde $j = 1, 2$ e $i \in \mathbb{N}$. Assim temos uma sequência de contínuos $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C(M)$ tal que $X_j \cap X_k = \varnothing$ para todo $i \neq k$. Como o espaço métrico $C(M)$ é compacto então a sequência $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência $\{X_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} = \{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente pela métrica de Hausdorff a outro contínuo $X_\infty \subset C_0$, ou seja $X_k \to X_\infty$ quando $k \to \infty$, onde $X_k \cap X_\infty = \varnothing$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Fixamos pontos $y_n \in X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, obtendo uma sequência $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de X_k, como M é compacto a sequência possui uma subsequência $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a $y \in X_\infty$, isso é $y_k \to y$ quando $k \to \infty$. Tome-se uma vizinhança V de y de tal maneira que $diam(V) < \delta$ onde δ é dada pela Proposição 3.1. Agora para cada $k \geq 0$ definamos os Y_k como as componentes conexas de $V \cap X_k$ contendo y_k. Temos que para todo $k \geq k_0$, a partir de um certo k_0, as componentes conexas Y_k separam V, pois $Y_k \subset W_\varepsilon^s(y_k)$, e pela Proposição 3.1 $diam(Y_k) \geq \delta$. Tomando uma subsequência $\{Y_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente, isto é $Y_{n_k} \to Y_\infty$ quando $k \to \infty$, também temos que Y_∞ separa V. Além disso pegando uma subsequencia $\{Y_{n_l}\}$ temos que Y_{n_l} separa Y_{n_k} e Y_∞ si $n_l > n_k$.

Agora denotamos como Z_k à componente conexa em $W_\varepsilon^u(y_k)$ contendo y_k . Temos que Z_k não pode cortar $Y_{k-N} \cup Y_{k+N}$, para $k > N$ pois f é N-expansivo. Assim temos que os Z_k se encontra entre Y_{k+N} e Y_{k-N}, logo tomando o limite quando $k \to \infty$ temos que os Z_k se apinham na componente conexa X_∞. Observa-se que na componente conexa X_∞ temos que encontram-se contidas um continuo estável Y_∞ e um continuo instável Z não triviais, pegamos o continuo $H = Y_\infty \cap Z$ logo temos $diam(f^n(H)) \leq \alpha$ para cada $n \geq 0$ pois $\varepsilon < \alpha/2$ e $H \subset W_\varepsilon^s(x)$, do mesmo jeito $diam(f^n(H)) \leq \alpha$ para cada $n < 0$ pois $\varepsilon < \alpha/2$ e $H \subset W_\varepsilon^u(x)$. Assim temos um continuo H de M tal que $diam(f^n(H)) \leq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, o que contradiz a cw-expansividade. Portanto $C_0 \subset W_\varepsilon^s(x)$ é localmente conexo.

Da mesma forma se mostra que $D \subset W_\varepsilon^u(x)$ é localmente conexo. Se faz a mesma análise aplicado para f^{-1} em qualquer continuo instável. ∎

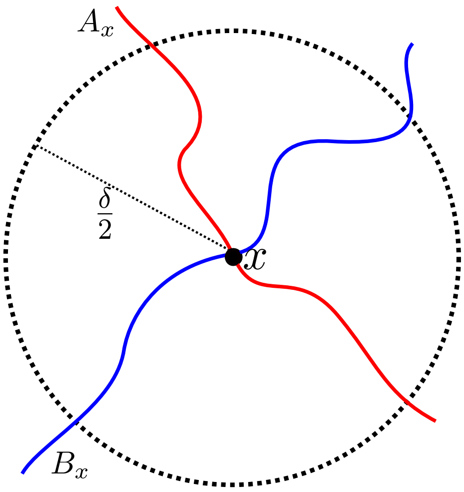


Figura 3.1: Os contínuos são ramos.

Esta proposição mostra que os contínuos estáveis (resp. instáveis) tem a forma de ramos como na Figura 3.1. Como M é uma superfície compacta e conexa então os contínuos C e D são arco-conexos, como se mostra na Figura 3.2.

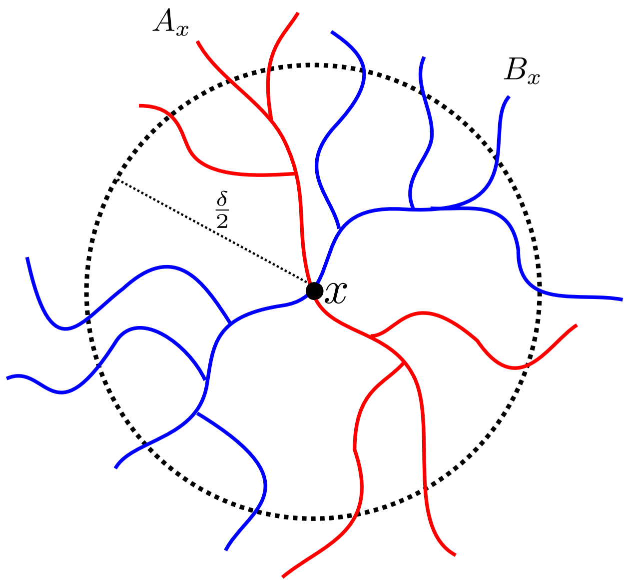


Figura 3.2: Os contínuos são arco-conexos.

3.2 Setores Bi assintóticos

Seja $f : M \to M$ um homeomorfismo N-expansivo com constante de expansividade $\alpha > 0$. Se $N \geq 2$, é permitido que um arco estável local intercepte duas vezes um arco instável local como mínimo, como se mostra na Figura 3.3

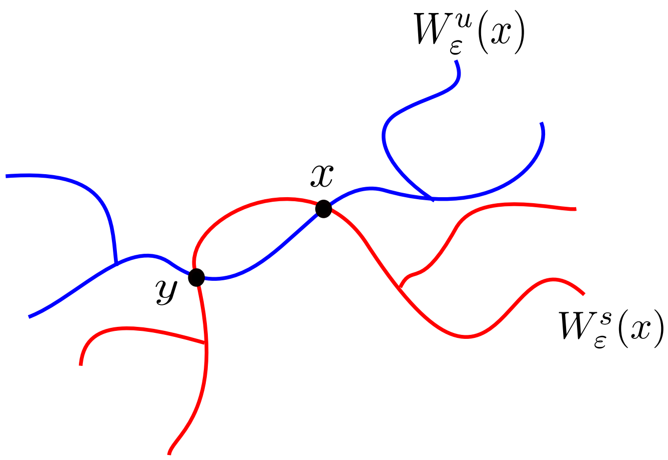


Figura 3.3: Interseção dos arcos estável e instável.

Definição 3.3 (Setor Bi-assintótico)**.** *Um disco D limitado pela união de um arco estável S e um arco instável u é chamado de setor bi-assintótico.*

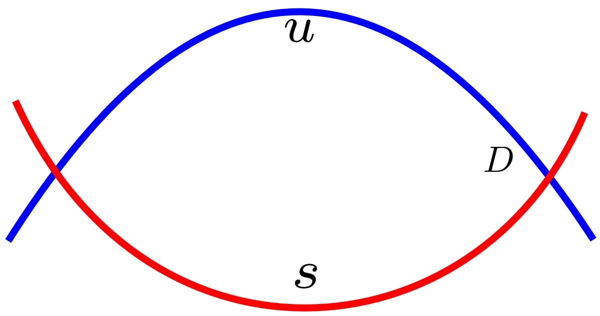


Figura 3.4: Setor bi-assintótico

Seja $f : M \to M$ um homeomorfismo expansivo na superfície compacta sem fronteira M. Lewowicz prova ([9], Lema 3.2) que dado um disco D , $x \in D \subset M$ e um arco estável $b \subset W^s_\varepsilon(x)$ com $x \in b$ que separa D, então existe um arco instável em D ligando x com um ponto de $\partial(D)$. Quando o homeomorfismo $f : M \to M$ é N-expansivo para $N \geq 2$, não podemos assegurar que isso acontece, logo nós temos a seguinte alternativa. Consideremos $\delta > 0$ como na Proposição 3.1.

Lema 3.1. *Seja $D \subset M$ um disco com $diam(D) < \delta$, $x \in D$, e $\beta \subset W^s_\varepsilon(x)$ um arco estável separando D e $x \in \beta$. Denotamos por U uma componente de $D - \beta$. Então, um dos seguintes itens é válido:*

1. *Existe um arco instável em $W^u_\varepsilon(x) \cap U$ de x para ∂D, ou*
2. *existe um setor bi-assintótico em U.*

Demonstração. Suponhamos que 1 não é verdade e vamos mostrar 2. Assim, não existe um arco instável $\gamma \subset W^u_\varepsilon(x) \cap U$ de x a ∂D, contido em U. Vamos a supor que x separa β em dois arcos β_1 e β_2.

Afirmação: Existe $y \in U$ tal que o contínuo instável $C(y) \subset U$ do ponto y corta β em dois pontos, isto é $C(y) \cap \beta = \{p_1, p_2\}$ com $p_1 \neq p_2$.

De fato, mostramos pelo absurdo, isto é, para todo y no interior de U temos 3 casos: O primeiro caso é que o contínuo instável de cada $y \in U$ não corta β. O segundo caso é que o contínuo instável de $y \in U$ corta em um ponto o arco β. O terceiro caso é quando alguns contínuos instáveis não cortam β, e outros instáveis cortam β em um ponto.

Caso 1: Sabe-se que $diam(U) < \delta$ pois $diam(D) < \delta$, então para cada $y \in U$ os contínuos $C(y)$ tem que sair de U pela fronteira do disco D. Como isso acontece para todos os contínuos instáveis dos pontos no interior de U, então existe uma sequência de pontos $\{y_k\}_{n\in\mathbb{N}}$, cujos contínuos $C(y_n)$ formam uma sequência de contínuos $\{C(y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C(M)$. Como o espaço $C(M)$ é compacto (pelo Teorema 1.2), a sequência $\{C(y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência $\{C(y_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente pela métrica de Hausdorff a um sub-arco do arco estável β, o que contradiz a cw-expansividade, da Proposição [3.1], pois vamos a encontrar um contínuo que é estável e instável no mesmo tempo.

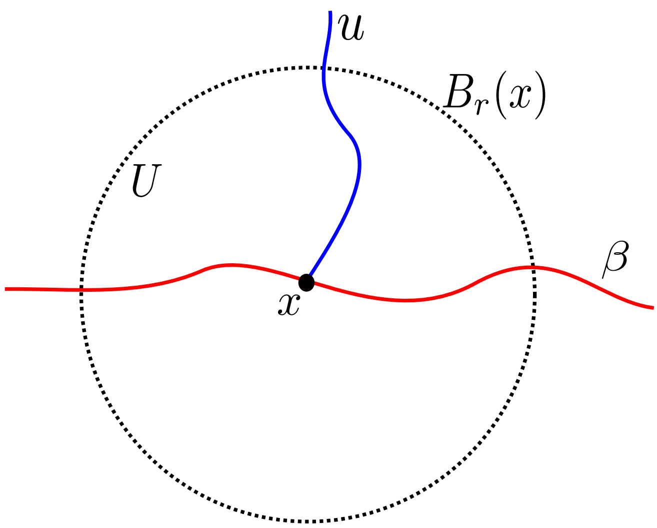


Figura 3.5: Item 1 do Lema 3.1.

Caso 2: Para cada $y \in U$ temos que os contínuos $C(y)$ cortam β em um ponto e $C(y) \subset U$, ou seja, $C(y) \cap \beta = \{p\}$ e $C(y) \cap \partial D \neq \varnothing$, onde $p \in \beta$ e

$y \in U$. Como isso acontece para todo $y \in U$, então temos uma sequência de pontos $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $C(y_n) \cap \beta_1 = p_n$, onde $p_n \in \beta_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como M é compacta e $\beta_1 \subset W^s_\varepsilon(x)$, temos que a sequência $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência $\{p_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge no ponto $x \in \beta$, isto é $p_{n_k} \to x$ quando $k \to \infty$. Logo sabe-se que $C(M)$ é compacto (pelo Teorema 1.2), então a sequência de contínuos $\{C_{y_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência $\{C(y_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente pela métrica de Hausdorff no contínuo C de x, isto é $C(y_{n_k}) \to C$, quando $k \to \infty$, onde C é o contínuo instável através de x e corta a fronteira do disco D, o que contradiz a hipótese de que 1 não é verdade. Se faz o mesmo se o contínuo corta β_2.

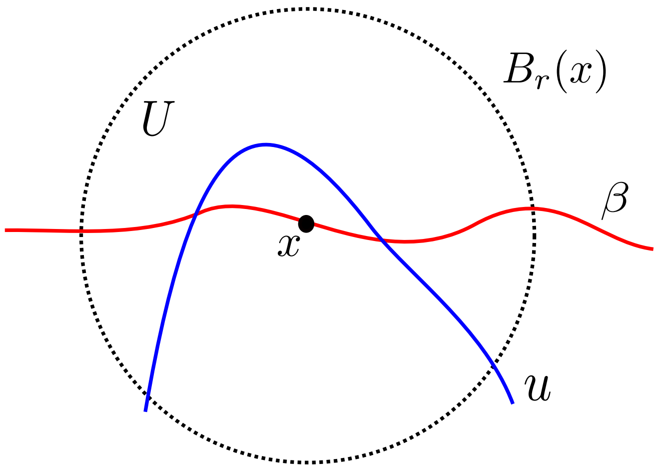


Figura 3.6: Item 2 do Lema 3.1

Caso 3: Nesta parte, juntamos os casos 1 e 2, pois alguns contínuos saem de U sem cotar β, e os outros contínuos cortam β em um ponto. Assim temos uma contradição para ambos os casos.

Portanto a afirmação é verdadeira, assim existe um setor bi-assintótico em U. O que finaliza a prova. ∎

3.3 2-expansividade e Setores Bi-assintóticos

Seja M uma superfície compacta sem fronteira . Nesta seção consideraremos que dado $f : M \to M$ um homeomorfismo 2-expansivo. O trabalho desta seção é mostrar que tais homeomorfismos não tem setores bi-assintóticos. Agora fazemos as seguintes considerações:

Seja $\alpha > 0$ a constante de expansividade de f, ou seja, dado qualquer subconjunto X de M, se $diam(f^n(X)) \leq \alpha$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, então X tem no máximo dois pontos, isto é $\#(X) \leq 2$. De fato pelo absurdo, suponhamos que dado $X \subseteq M$ ele tem mais de dois pontos, e temos $diam(f^n(X)) = \sup\{dist(f^n(x), f^n(y)) : x, y \in X\} \leq \alpha$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, logo pela 2-expansividade o conjunto anterior tem no máximo 2 pontos, o que contradiz a afirmação. Portanto X tem no máximo dois pontos.

Seja D um setor bi-assintótico tal que $diam(D) < \alpha$, onde D é limitado por um arco estável a^s e um arco instável a^u como na Figura 3.7.

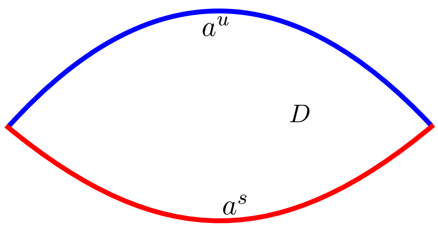


Figura 3.7: Setor Bi-assintótico D

Dado $p \in D$ defina $C^s_D(p)$ como a componente conexa de $W^s(p) \cap D$ e $C^u_D(p)$ como a componente conexa de $W^u(p) \cap D$, onde ambos os componentes contêm p.

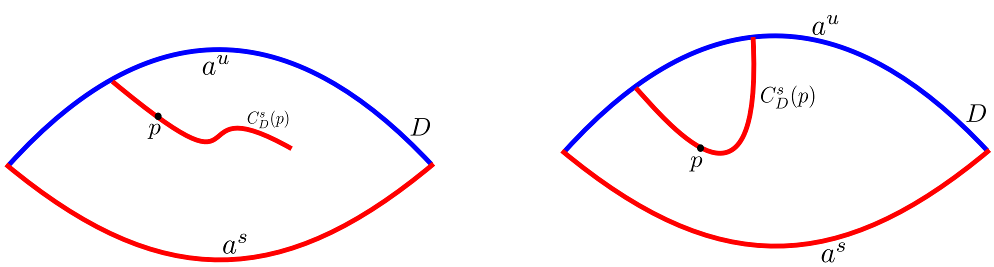


Figura 3.8: Componente conexa $C^s_D(p)$.

Lema 3.2. *Seja D um setor bi-assintótico tal que $diam(D) < \alpha$, onde D é limitado por um arco estável a^s e um arco instável a^u. Se $C^u_D(p)$ separa D então ela encontra duas vezes o arco estável a^s.*

Demonstração. Seja D um disco bidimensional limitado por a^s e a^u e fixemos um ponto p no interior de D. Como $C^u_D(p)$ separa D, temos que $\partial D \cap C^u_D(p)$ tem pelo menos dois pontos. Além disso, como $C^u_D(p)$ é arco conexo, estes dois pontos podem ser unidos por um arco b contido em $C^u_D(p)$. Agora precisamos mostrar que esses pontos estão em a^s. Analisamos três possíveis casos:

1. **Caso I:** No primeiro caso, o arco b corta duas vezes o arco instável a^u, logo temos dois arcos instáveis que limitam um disco aberto que chamaremos de U. Temos que $diam(U) \leq \alpha$ pois $U \subset D$, logo como U é limitado por um mesmo arco instável então $diam(f^{-n}(U)) \leq \alpha$ para cada $n \leq 0$, ou seja $diam(f^{-n}(U)) \to 0$ quando $n \to \infty$. Isso significa que todo ponto $x \in U$ é um ponto de Lyapunov Estável para f^{-1}, o que contradiz o Corolário 3.0.1, pois não existem pontos de Lyapunov Estável para f^{-1}.

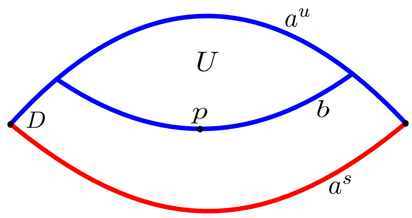


Figura 3.9: Caso I

2. **Caso II:** No segundo caso, o arco b corta os arcos a^s e a^u do setor bi-assintótico D. Temos o conjunto $Q = \{A, B, C\} \subset a^s$. Os pontos A, B, C pertencem ao mesmo arco estável, logo fixando $n \geq 0$ se tem $diam(f^n(Q)) \to 0$, assim $diam(f^n(Q)) \leq \alpha$ para todo $n \geq 0$. Do mesmo jeito quando $n < 0$ temos que $diam(f^n(Q)) \to 0$ pois os pontos A, B, C se encontram em um mesmo arco instável, logo $diam(f^n(Q)) \leq \alpha$ para todo $n < 0$. Assim $diam(f^n(Q)) \leq \alpha, \forall n \in \mathbb{Z}$, portanto $\#(Q) \leq 2$ o que é um absurdo.

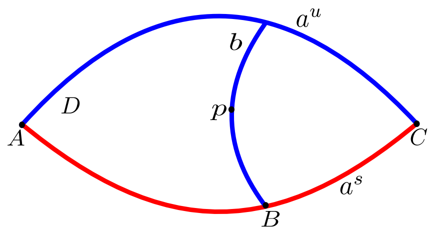


Figura 3.10: Caso II

3. **Caso III:** Por tanto o único caso possível é o terceiro, que é exatamente o que queremos mostrar.

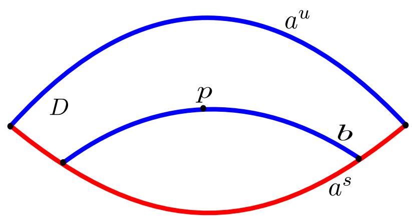


Figura 3.11: Caso III

■

O conjunto de componentes conexas de $W^s(p) \cap D$ é $F^s = \{C_D^s(p) : p \in D\}$. Definamos a ordem "<" como:

$$\text{Se, } a^s \text{ e } C_D^s(y) \text{ são separados por } C_D^s(x) \Leftrightarrow C_D^s(x) < C_D^s(y).$$

A Figura 3.12 mostra os arcos estáveis com a ordem "<".

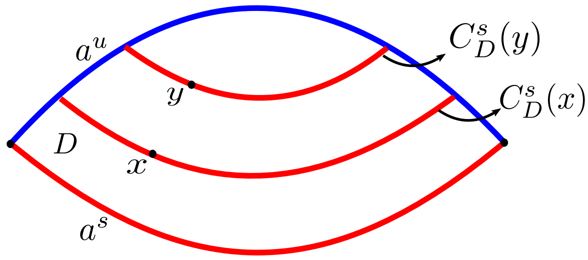


Figura 3.12: Ordem de arcos estáveis separando um setor bi-assintótico.

Lema 3.3. *A ordem "<" é uma ordem total em F^s.*

Demonstração. Dados $C_D^s(x), C_D^s(y) \in F^s$ com $C_D^s(x) \neq C_D^s(y)$, temos que provar que $C_D^s(x) < C_D^s(y)$ ou $C_D^s(y) < C_D^s(x)$. Suponhamos por contradição que isso não é possível. Se $C_D^s(x)$ ou $C_D^s(y)$ interceptam o arco a^s, então temos mais de dois pontos que pertencem no mesmo arco estável e instável seguindo a prova do Caso II do Lema 3.2, obtemos uma contradição. Portanto suponhamos que ambos contínuos $C_D^s(x)$ e $C_D^s(y)$ interceptam a^u pelo menos em um ponto. Considere $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \subset a^u$ os quais são três sub-arcos do arco instável a^u do setor bi-assintótico D. Observamos a Figura 3.13, onde $C_D^s(x) = C_1$ e $C_D^s(y) = C_2$. Seja E a componente conexa de $D - (C_D^s(x) \cup C_D^s(y))$ contendo a^s como se mostra na Figura 3.13. Para $1 \leq i < j \leq 3$, defina

$$A_{ij} = \{x \in E : C_D^s(x) \cap \gamma_i \neq \varnothing, C_D^s(x) \cap \gamma_j \neq \varnothing\}$$

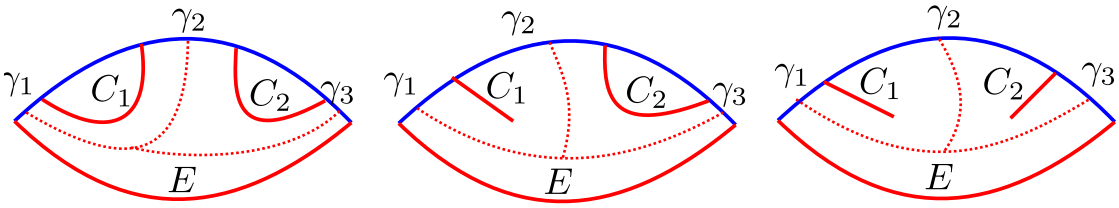


Figura 3.13: Casos impossíveis para o homeomorfismo 2-expansivo.

temos que $C_D^s(x) \subset A_{12}$, $C_D^s(y) \subset A_{23}$ e $a^s \subset A_{13}$, então, esses conjuntos são não vazios. Os A_{ij} são fechados (pela métrica de Hausdorff nos contínuos). Como A_{13} é fechado temos que possui um limite no interior de E, o qual é um arco que vamos chamar de β que intercepta γ_1 e γ_3. Logo vamos ter contínuos estáveis que interceptam duas vezes γ_1, ou contínuos que interceptam γ_1 e γ_2, ou contínuos que interceptam γ_2 e γ_3. Em qualquer caso vamos ter que pela métrica de Hausdorff, esses contínuos convergem a um sub-arco de β, obtendo mais de 2 pontos no mesmo arco estável e no mesmo arco instável. contradizendo a 2-expansividade. Isso completa a prova. ■

O mesmo acontece para as componentes conexas de $W^u(p) \cap D$, neste caso o ordem total $<$ é definida também para o conjunto F^u.

Dado um arco estável b que separa D, logo utilizando o ordem total total $<$, consideremos o mapa $g : b \to b$ a qual é definido por, dado $x \in b$ então

$$g(x) = \begin{cases} (C_D^u(x) \cap b) - \{x\} & \text{,se } C_D^u(x) \text{ intersecta duas vezes } b \\ x & \text{,se } C_D^u(x) \text{ intersecta uma vez } b. \end{cases}$$

A hipótese de 2-expansividade implica que $C_D^u(x) \cap b$ tem no máximo dois pontos, portanto g está bem definida.

Lema 3.4. *Para qualquer arco estável $b \subset D$ separando D, a aplicação $g : b \to b$ é contínua.*

Demonstração. Como b é homeomorfo ao intervalo $[0, 1]$ podemos considerar em b uma ordem que define sua topologia. Agora se uma aplicação f definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ é monótona e a imagem $f(I)$ é um intervalo, então f é contínua. Mostraremos que g é decrescente em ralação a tal ordem no arco b, pois g definido como acima não pode ser crescente, além disso mostrar que $g(b)$ é homeomorfo ao intervalo $[0, 1]$. De fato, Mostremos que g é bijetiva:

- **Injetividade:** Sejam $x, y \in b$ tal que $g(x) = g(y)$ então $x = y$. De fato, suponhamos pelo absurdo, então temos que $g(x) = g(y)$ e $x \neq y$, logo tem-se 3 pontos que se encontram na mesma curva instável e no mesmo arco estável b o qual contradiz a 2-expansividade.

- **Sobrejetividade:** Dado $y \in b$ pela definição de g temos que existe $t \in b$ tal que $g(t) = y$.

Portanto g é bijetiva, logo $g(b)$ e $[0, 1]$ são homeomorfos, e além disso $g = g^{-1}$.

Para mostrar que g é decrescente fixamos $x, y \in b$ tal que $x < y$ implica $g(x) > g(y)$. Suponhamos o contrario, para cada $u, v \in b$ temos $u < v$ e $g(u) < g(v)$, temos essencialmente dois possíveis casos: $u < g(u) < v < g(v)$ ou $u < v < g(u) < g(v)$. Outros casos são obtidos intercambiando u com $g(u)$ ou v com $g(v)$.

1. **Caso I:** ($u < g(u) < v < g(v)$) O primeiro caso contradiz o Lema 3.3 pois o arco que liga u com $g(u)$ não é comparável com o arco que liga v com $g(v)$.

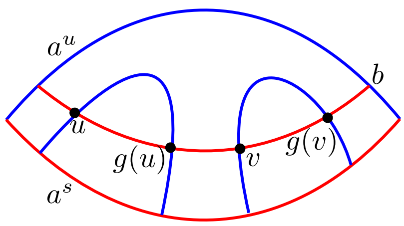


Figura 3.14: Caso I.

2. **Caso II:** ($u < v < g(u) < g(v)$) O segundo caso contradiz a 2-expansividade. De fato, dado o conjunto $\{u, g(u), v, g(v)\} = C$, os pontos de C estão contidos no arco estável b, então temos que $diam(f^n(C)) \to 0$ quando $n \to \infty$, portanto $diam(f^n(C)) \leq \alpha$ para cada $n \geq 0$.

   Da mesma maneira $diam(f^n(C)) \to 0$ quando $n \to -\infty$ pois os pontos $u, g(u)$ estão ligados por um arco instável que chamamos de γ_1, e os pontos $v, g(v)$ estão ligados por um arco instável que nós chamamos de γ_2, mas a interseção de γ_1 e γ_2 não é trivial, logo consideremos o arco instável $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, assim os pontos de C estão no mesmo arco instável γ , então

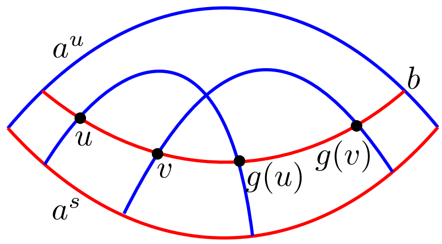


Figura 3.15: Caso II.

$diam(f^n(C)) \leq \alpha$ para cada $n < 0$. Logo $diam(f^n(C)) \leq \alpha$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, então o conjunto $C \subset M$ tem no máximo 2 pontos contradizendo a 2-expansividade.

■

Lema 3.5. *Se $b \subset D$ é um arco instável que se encontra duas vezes com a^s, então existe $z \in b$ tal que $b \cap C^s_D(z) = \{z\}$ (um ponto fixo de g).*

Demonstração. Precisamos mostrar que existe um ponto fixo de g em b como na Figura 3.16. De fato sabemos que b é homeomorfo a um intervalo e g é um homeomorfismo que inverte a orientação (é decrescente), assim temos que $g(b)$ e $[0,1]$ são homeomorfos, logo fazendo a análise na reta $\mathbb{R}$ temos que $g(0) = 1$ e $g(1) = 0$ logo os pontos $0, 1$ não são fixos, como $g(1) < 1$ e $g(0) > 0$ definamos f por $f(t) = g(t) - t$ no intervalo $[0, 1]$, se observa que f é continuo em $[0, 1]$ e $f(0) = g(0) - 0 > 0$ e $f(1) = g(1) - 1 < 0$, logo f cumpre as condições do valor intermediário no intervalo $[0, 1]$. Logo existe um ponto $z \in (0, 1)$ tal que $f(z) = 0$, implica que $g(z) = z$. Portanto z é um ponto fixo para g.

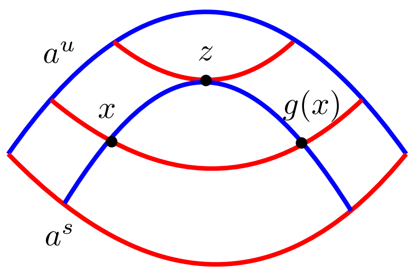


Figura 3.16: Ilustração do mapa g.

■

Setores Regulares Bi-assintóticos

Nesta parte do capitulo nós introduziremos a hipótese de que o homeomorfismo 2-expansivo tem a propriedade de que o conjunto não errante é toda a superfície M.

Definição 3.4 (Setor Bi-assintótico Regular)**.** *Um setor bi-assintótico é regular, se para todo ponto interior p de D temos que $C^s_D(p)$ e $C^u_D(p)$ separam D.*

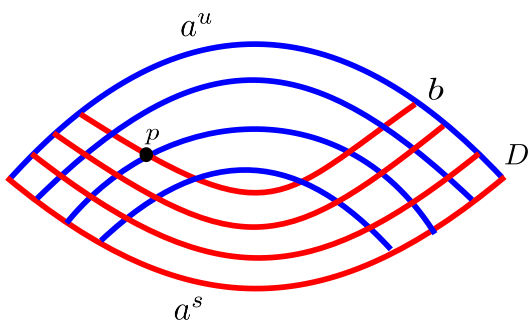


Figura 3.17: Setor bi-assintótico regular.

Proposição 3.3. *Se $f : M \to M$ é um homeomorfismo 2-expansivo e $\Omega(f) = M$, então não existem setores bi-assintóticos regulares do diâmetro menor que α.*

Demonstração. Mostremos por contradição, isto é, suponhamos que existe um setor bi-assintótico regular D de diâmetro menor que α. Como $\Omega(f) = M$, então todos os pontos de D são não errantes, dado um ponto $c \in D$ e uma vizinhança $U \subset D$ de c então existe um inteiro arbitrariamente grande $k > 0$ tal que $f^k(U) \cap U \neq \varnothing$, em outras palavras existe $p \in U$ tal que $q = f^k(p)$ esteja em $U \subset D$. Consideramos que $C^s_D(p) \cap C^u_D(p) = \{p, p'\}$ com $p \neq p'$ e p' perto de p. Os pontos p, p' determinam um setor regular bi-assintótico D_p contido em D como na Figura 3.18.

Para k arbitrariamente grande, o arco estável a^s definida por p e p' é transformado por f^k em um arco estável com pontos extremos $q = f^k(p)$ e $r = f^k(p')$ que está contido em D (pois p' esta perto de p e a iterada do arco estável é mais pequeno). O setor D_p é transformado em $f^k(D_p)$ e a imagem por f^k do arco instável $u(p, p')$ de p a p' não está contida em D. Então existem dois pontos $q', r' \in a^s \cap f^k(u(p, p'))$ como na figura (Lembre-se que a^s é o arco estável no setor bi-assintótico D). Agora consideremos o arco estável $l = s(q', r') \subset a^s$ contido

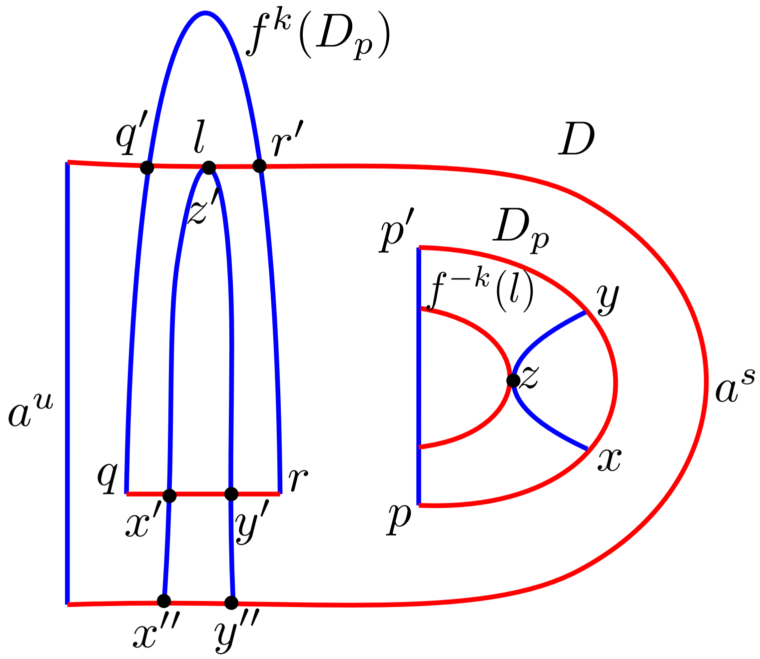


Figura 3.18: Um setor bi-assintótico regular.

em $f^k(D_p)$. O arco estável $f^{-k}(l)$ separa o setor bi-assintótico D_p e portanto, podemos aplicar o Lema 3.5 para obter um ponto fixo $z \in f^{-k}(l)$ tal que o arco instável $u(z)$ através de z em D_p encontra $f^{-k}(l)$ apenas em z. Tome x, y os pontos de interseção do arco estável no limite de D_p e $u(z)$. Considere os pontos $x' = f^k(x)$, $y' = f^k(y)$ e $z' = f^k(z)$ como na Figura 3.18. Como D é um setor bi-assintótico regular, os arcos instáveis em D através de x' e y' encontram a^s em x'' e y'' respectivamente ($C^s_D(x')$ e $C^s_D(y')$ separam D). Os três pontos z', x'', y'' estão na interseção de um arco estável local e um arco instável local, ambos contidos em D e assim as órbitas de x'' e y'' α-sombreiam a órbita de z, e a órbita de x'' α-sombreia a órbita de y'', contradizendo a 2-expansividade. ∎

Setores Bi-assintóticos com Espinhos

Seja D um setor bi-assintótico com $\partial D = a^s \cup a^u$, onde a^s é um arco estável e a^u é um arco instável.

Definição 3.5 (Espinho)**.** *Um contínuo não trivial $C^s_D(p)$ $(C^u_D(p))$ é um espinho estável (resp. espinho instável) se não separa D.*

Como antes, consideramos a aplicação $g : a^u \to a^u$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} (C^u_D(x) \cap a^u) - \{x\} & \text{,se } C^u_D(x) \text{ intersecta duas vezes } a^u \\ x & \text{,se } C^u_D(x) \text{ intersecta uma vez } a^u. \end{cases}$$

Lembremos que pelo Lema 3.4, g é contínuo e inverte orientação. Temos como consequência que, se um ponto $p \in a^u$ está em uma espinha estável então p é um ponto fixo de g. De fato, dado $p \in a^u$ o contínuo $C^s_u(p)$ não separa D, então pela definição de g temos $a^u \cap C^s_u(p) = \{p, g(p)\}$ mas a interseção é só em um ponto, logo $g(p) = p$. Portanto p é um ponto fixo de g.

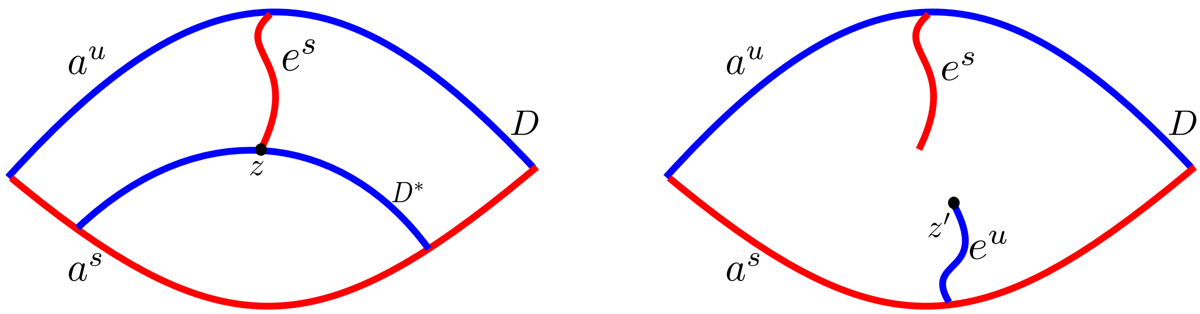
Lema 3.6. *Setores bi-assintóticos contém no máximo um espinho estável e um espinho instável.*

Demonstração. Mostremos pelo absurdo, ou seja dado um setor bi assintótico D, ela contém 2 ou mais espinhos estáveis ou instáveis. Suponha o caso que ela contém 2 espinhos estáveis, isso contradiz o Lema 3.3, pois não se pode comparar 2 espinhos estáveis com o ordem $<$. Logo só existe no máximo um espinho estável. Da mesma maneira se prova quando temos 2 espinhos instáveis. Portanto existe no máximo um espinho estável e um espinho instável. ∎

No seguinte Lema vamos mostrar que a existência de um dos espinhos (estável ou instável) garante a existência do outro espinho.

Lema 3.7. *Seja $f : M \to M$ um homeomorfismo 2-expansivo, $\Omega(f) = M$ e D é um setor bi-assintótico. Se existe um espinho estável, então existe um espinho instável tal que ambos encontram-se em D.*

Demonstração. Mostremos primeiro que, se existe um espinho estável, então existe um espinho instável. De fato, suponhamos que não existe o espinho instável. Chama-se S^s o espinho estável, agora para cada $x \in S^s$ temos que $C^u_D(x)$ separa D, se não fosse verdade teríamos um espinho instável que encontra a S^s em x, assim temos uma contradição com nossa suposição. Logo definamos uma ordem parcial no espinho estável S^s, ou seja dado $x, y \in S^s$ temos que $x < y$, se $C^u_D(y)$ separa x e a^u, logo a partir deste ordem parcial existe um elemento mínimo $z \in S^s$, com relação a esta ordem. Desta forma encontramos um setor bi assintótico $D^* \subset D$, limitado por um sub arco de a^s e o arco $C^u_D(z)$. Pelo Lema 3.6 temos que o setor bi-assintótico D contém no máximo um espinho estável, logo o setor D^* é um setor bi assintótico regular o que é um absurdo pela Proposição 3.3. Portanto existe um espinho instável ao qual chamaremos S^u.



(a) Existência (b) Interseção

Figura 3.19: Prova do Lema 3.7

Se sabe que se existe S^s, então existe S^u. Agora vamos mostrar que $S^s \cap S^u \neq \varnothing$. Suponhamos pelo absurdo, ou seja $S^s \cap S^u = \varnothing$. Para cada $x \in S^u$ o continuo $C^s_D(x)$ separa D, pois se não fosse o caso teríamos dois espinhos que se encontram em x. Da mesma maneira que a prova de acima se define a ordem parcial em S^u como $x < y$ se $C^s_D(y)$ separa x e a^s, logo existe um minimal $z' \in S^u$ em relação a esta ordem. Desta forma encontramos um setor bi assintótico $D' \subset D$ limitado pelo sub arco a^u e o continuo $C^s_D(z')$, D' contém S^s. O espinho S^s não pode cortar o contínuo $C^s_D(z')$ pois teríamos 3 pontos no mesmo arco estável e no mesmo arco instável, contradizendo a 2-expansividade. Logo D' contém só o espinho estável S^s mais não contém um espinho instável, o que contradiz o fato da primeira parte. Portanto $S^s \cap S^u \neq \varnothing$. ∎

Definição 3.6 (Estrutura de Produto Local)**.** *Dizemos que $y \in M$ tem uma estrutura de produto local se existe um homeomorfismo de $\mathbb{R}^2$ em uma vizinhança aberta de y, de tal modo que ele mapeia linhas horizontais (verticais) para subconjuntos abertos de conjuntos estáveis (instáveis) locais.*

Lema 3.8. *Seja γ uma curva fechada delimitando um disco U na superfície e considerando A, B, C, D quatro pontos em γ. Suponhamos que existe um aberto $Q \subset U$ tal que para todo $p \in Q$ temos que existe um arco estável $C^s_U(p)$ e um arco*

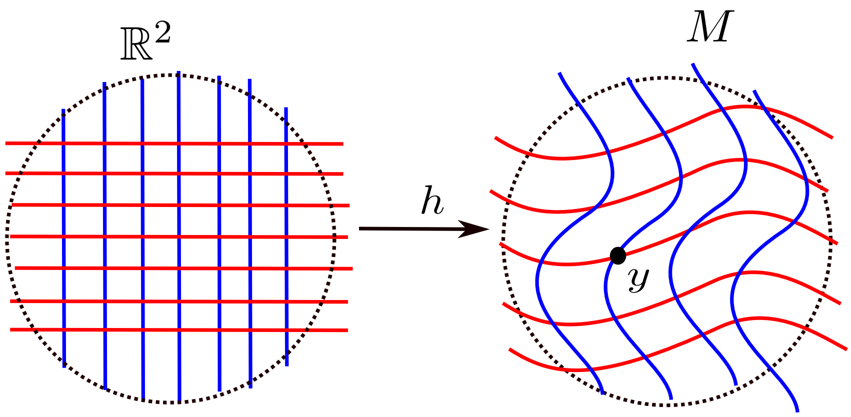


Figura 3.20: Estrutura de produto local.

instável $C^u_U(p)$ que se encontram apenas em p tal que C^s corta AB e CD, e C^u corta BC e DA. Então existe uma estrutura de produto local em torno de cada ponto de Q.

Demonstração. Fixemos um ponto $p \in Q$. Tomemos $L^s \subset C^s(p)$ um arco estável através de p e da mesma maneira $L^u \subset C^u(p)$, com L^s e L^u contidos em Q. Definamos a aplicação $h : L^s \times L^u \longrightarrow M$ como $h(x, y) = C^u_U(x) \cap C^s_U(y)$. Logo h é:

- **Bem definida:** A aplicação h está bem definida, pois $C^u_U(x)$ e $C^s_U(y)$ se encontram só em um ponto para cada $x \in L^s$ e cada $y \in L^u$ devido a que os C^s corta AB e CD, e C^u corta BC e DA.

- **Injetiva:** Dados $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in L^s \times L^u$ tal que $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ então $x_1 \neq x_2$ ou $y_1 \neq y_2$, suponhamos que $x_1 \neq x_2$ e $y_1 = y_2$, logo $C^u_U(x_1)$ e $C^s_U(y_1)$ se encontram em um único ponto, logo se $C^u_U(x_2)$ e $C^u_U(x_1)$ se encontram num ponto de Q então vamos a obter um arco instável com 3 ou mais ramos, o que não pode acontecer pois temos 3 pontos que pertencem ao mesmo arco estável e instável, assim $C^u_U(x_1) \cap C^s_U(y_1) \neq C^u_U(x_2) \cap C^s_U(y_1)$. Portanto h é injetiva.

- **Contínua:** Seja uma sequência de pontos $\{(x_i, y_i)\}_{i\in\mathbb{N}} \subset L^s \times L^u$ tal que $(x_i, y_i) \in Q \to (x^*, y^*)$ quando $i \to \infty$, logo para cada $x_i \in L^s$ e cada $y_i \in L^u$ temos contínuos $C^u_U(x_i)$ e $C^s_U(y_i)$ respectivamente tal que $C^u_U(x_i) \cap C^s_U(y_i) = \{q_i\}$ para cada $i \in \mathbb{N}$, logo temos duas sequências de contínuos $\{C^u_U(x_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\{C^s_U(y_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ em $C(M)$, as quais, como $C(M)$ é compacta na topologia de Hausdorff, estas sequências convergem, ou seja $C^u_U(x_i) \to$

$C_U^u(x^*)$ e $C_U^s(y_i) \to C_U^s(y^*)$ quando $i \to \infty$, então $C_U^u(x_i) \cap C_U^s(y_i) \to C_U^u(x^*) \cap C_U^s(y^*)$ ($q_i \to q^*$), isto é $h(x_i, y_i) \to h(x^*, y^*)$. Portanto h é contínua.

Finalmente pelo Teorema da Invariância do Domínio 1.1, temos que h é uma aplicação aberta. Logo h define uma estrutura de produto local em torno de p. ■

O seguinte Lema é enunciado em [2], a prova segue-se da demonstração para Difeomorfismos Anosov feita por J. Franks ([5],Proposição 1.7).

Lema 3.9. *Seja $f : M \to M$ um homeomorfismo 2-expansivo e $D \subset M$ um setor bi-assintótico. Se $\Omega(f|_D) = D$ e f tem estrutura de produto local, então $\overline{Per(f)} = D$.*

Proposição 3.4. *Se $f : M \to M$ é um homeomorfismo 2-expansivo e $\Omega(f) = M$, então não existe setores bi-assintóticos do diâmetro menor que α.*

Demonstração. Suponhamos pelo absurdo, então temos que existe um setor bi-assintótico que nós chamaremos de D. Como f é 2-expansivo e $\Omega(f) = M$, então pela Proposição 3.3, temos que não existem setores bi-assintóticos regulares, isso implica que existe um espinho estável (ou instável), logo pelo Lema 3.7, existe um espinho instável (resp. estável) tal que os dois espinhos se interceptam em um ponto. Assim temos duas componentes conexas em D onde todas as folhas estáveis regulares cortam duas vezes cada folha instável regular.

Ambos cortes das folhas regulares estáveis e instáveis, encontram-se em diferentes componentes de D. Fixamos uma das componentes de D, chamemos de A o ponto de interseção do espinho instável e o arco estável a^s, B o ponto de interseção dos espinhos estável e instável, C o ponto de interseção do espinho estável com o arco instável a^u, e D é o ponto de interseção dos arcos a^s e a^u. Chama-se de Q à componente limitada pela curva fechada que contém os pontos A, B, C, D. Como em todo ponto de Q é a interseção de folhas estáveis com folhas instáveis, então pelo Lema 3.8, temos que existe uma estrutura de produto local em torno de cada ponto de Q. O mesmo acontece na outra componente conexa de D. Assim vamos ter que existe uma estrutura de produto local em torno de cada ponto de D, exceto nos pontos finais dos espinhos.

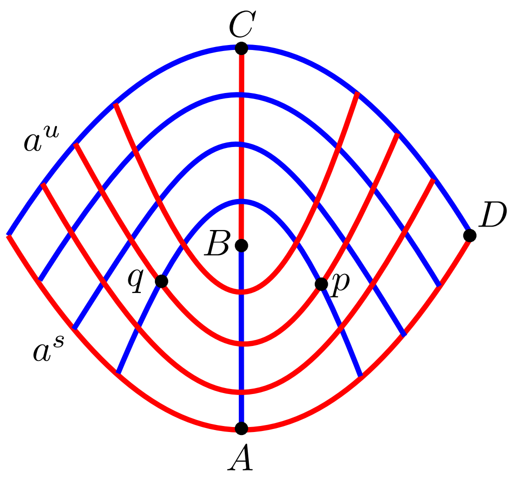


Figura 3.21: Setor bi-assintótico com folhas regulares.

Como estamos assumindo que $\Omega(f) = M$, então pelo Lema 3.9 concluímos que o pontos periódicos são densos em D , isto é $\overline{Per(f)} = D$.

Fixemos $\delta > 0$, com $\delta \leq \alpha$. Seja $p \in D$ um ponto periódico, de período k, que não pertence a nenhum espinho. Denotamos por q o outro ponto na interseção de $C^s_D(p)$ com $C^u_D(p)$. Para $\delta > 0$, suponhamos que $dist(f^n(p), f^n(q)) \leq \delta$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Obviamente, $f^{n+jk}(p) = f^n(p)$ para todo $n, j \in \mathbb{Z}$. Portanto

$$dist(f^{n+jk}(p)), f^{n+jk}(q) = dist(f^n(p), f^n(f^{jk}(q))) \leq \delta \ , \ \forall j, n \in \mathbb{Z}.$$

Então, os pontos p e $f^{jk}(q)$, com $j \in \mathbb{Z}$, contradiz a expansividade de f para a constante de expansividade δ. Como δ é arbitrário, concluímos que os setores bi-assintóticos não podem existir se $\Omega(f) = M$ e f é 2-expansivo. ■

3.4 Estrutura de Produto Local

O objetivo desta seção é provar que, exceto para um número finito de pontos, cada ponto $x \in M$ tem uma vizinhança com estrutura de produto local. A continuação apresentaremos algumas considerações para depois definir um tipo de classe de equivalência entre arcos estáveis e instáveis.

Como M é uma superfície compacta, existe um $\delta' > 0$ tal que para qualquer $x \in M$ a bola aberta $B_{\delta'}(x)$ é homeomorfa a um disco de $\mathbb{R}^2$. Seja $\delta > 0$ como na Proposição 3.1 e suponhamos sem perda de generalidade que $\delta < \delta'$ onde δ' é dada acima. Dado $x \in M$ considere a família $\mathcal{A}^s_\delta(x)$ de todos os arcos contidos em $W^s_\varepsilon(x)$, com origem em x e ponto final em $\partial B_\delta(x)$. Da mesma forma nós definimos $\mathcal{A}^u_\delta(x)$.

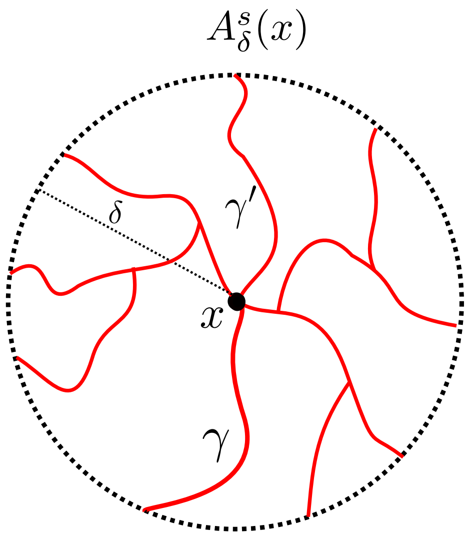


Figura 3.22: Família de arcos estáveis $\mathcal{A}^s_\delta(x)$

Lema 3.10. *Se dois arcos $\gamma, \gamma' \in \mathcal{A}^s_\delta(x)$ se encontram em um ponto y diferente de x, então eles contém um arco contido em $\gamma \cap \gamma'$ que liga x com y.*

Demonstração. De fato, suponhamos que não existe o arco que une x e y contido na interseção $\gamma \cap \gamma'$, então $\gamma \cap \gamma'$ é a união de componentes conexas disjuntas, assim $\gamma \cap \gamma'$ não é conexo. Como $x \in \gamma$ e $x \in \gamma'$ temos que $\gamma \cup \gamma'$ é conexo.

Seja U uma componente conexa de $B_{\delta'}(x) \setminus (\gamma \cup \gamma')$, no interior de uma curva fechada e simples (sem auto-intersecções) $\lambda \subset (\gamma \cup \gamma')$. Fazendo uma iteração direita temos $diam(f^n(\lambda)) \to 0$ quando $n \to \infty$, isso é equivalente a dizer que $diam(f^n(U)) \to 0$ quando $n \to \infty$, o que significa que todos os pontos ao interior de U são pontos de Lyapunov estáveis, o que contradiz o Corolário 3.0.1. ■

No artigo de Lewowicz [9], se introduz a relação de equivalência entre arcos estáveis (instáveis) em $A^s_\delta(x)$. Se $\gamma, \gamma' \in \mathcal{A}^s_\delta(x)$ dizemos que:

$$\gamma \sim \gamma' \Leftrightarrow \gamma \cap \gamma' \text{ contém estritamente } x.$$

Ou seja a interseção $\gamma \cap \gamma'$ contém propriamente $\{x\}$.

Lema 3.11. *Para qualquer ponto $x \in M$, exitem finitas classes de equivalência de arcos em $\mathcal{A}^s_\delta(x)$. Analogamente existem finitas classes de equivalência de arcos em $\mathcal{A}^u_\delta(x)$.*

Demonstração. Mostremos por contradição, suponhamos que existem infinitas classes de equivalência de arcos em $\mathcal{A}^s_\delta$, pegando um representante de cada classe de equivalência, obtemos uma sequência $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{A}^s_\delta(x)$ tal que se $\gamma_n \sim \gamma_m$ então $m = n$. Logo pela métrica de Hausdorff, a sequência $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a um contínuo γ, onde temos que $x \in \gamma$ e $\gamma \cap \partial B_\delta(x) \neq \varnothing$. Pegamos $y \in \partial B_{\delta/2}(x) \cap \gamma$ e definimos o contínuo C como a clausura de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n$. Nós vamos considerar uma pequena vizinhança U_y de y que não contém x, logo para $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, temos que existe $z \in \gamma_m \cap U_y$. Pela Proposição 3.2 se sabe que C é localmente conexo em y, então existe um contínuo $K \subset C \cap U_y$ contendo y e z. Supondo que $K \cap \gamma = \{y\}$ e $K \cap \gamma_m = \{z\}$. Portanto $K \cap (\gamma \cup \gamma_m)$ não é conexo e portanto $K \cup \gamma \cup \gamma_m$ separa a bola $B_\delta(x)$. Da mesma forma que na prova do Lema 3.10, todos os pontos no interior da componente conexa limitada pela curva $K \cup \gamma \cup \gamma_m$ são Lyapunov estáveis, o que contradiz a não existência deste tipo de pontos mostrada no Corolário 3.0.1. ■

Dado $x \in M$ e $\delta > 0$, lembre-se que $A^s_\delta(x)$ é a família de todos os arcos contidos em $W^s_\varepsilon(x)$ com origem em x e ponto final em $\partial B_\delta(x)$. Seja $N^s_\delta(x)$ o número de classes de equivalência em $A^s_\delta(x)$.

Teorema 3.1. *Seja $f : M \to M$ um homeomorfismo 2-expansivo. Se $N^s_\delta(x) \geq 2$ então existe uma vizinhança de x tal que cada $y \neq x$ nessa vizinhança tem uma estrutura de produto local.*

Demonstração. Sejam $a, b \in A^s_\delta(x)$ dois arcos contíguos não equivalentes. Denote por c um arco em $\partial B_\delta(x)$ conectando os pontos finais de a e b. Suponhamos que c não encontre outros arcos estáveis em $A^s_\delta(x)$. Seja X o setor limitado pelos arcos a, b e c. Pelo Lema 3.1 existe um arco instável e em $A^u_\delta(x)$ separando X.

Sejam c_1, c_2 são arcos contidos em c tal que c_1 comece no ponto final de no ponto final de a, e c_2 termina no ponto final de b e $e \cap (c_1 \cup c_2) = \varnothing$. Seja V uma vizinhança aberta conexa de x em X tal que para $y \in V$ a componente conexa de $C^s_{\delta/2}(p) \cap c$ que contém y é, por sua vez, incluído em $c_1 \cup c_2$. Além disso, escolhemos V e c_1, c_2 tal que o conjunto $\delta/2$-instável através de qualquer ponto de V, não encontre c em pontos que pertencem a $c_1 \cup c_2$. Seja Q um subconjunto de V que consiste de aqueles pontos y satisfazendo as seguintes condições:

1. existe um arco estável $s(y) \subset B_\delta(x)$ que intercepta c_1 e c_2,

2. existe um arco instável $u(y) \subset B_\delta(x)$ que encontra c e $\partial B_\delta(x) \setminus c$.

Vamos a mostrar que $x \in Q$. De fato, observe que (1) é satisfeita por x. Para provar a condição (2) observe que a e b são arcos estáveis não equivalentes e portanto eles determinam pelo menos dois setores em $B_\delta(x)$. Aplicando o Lema 3.1 em ambos setores encontramos um arco instável satisfazendo a condição (2). Portanto $x \in Q$.

Agora mostremos que Q é aberto em V. De fato, seja $y \in Q$ e consideremos o arco instável $u(y)$ dada pela condição (2). Para $z \in V \cap u(y)$ podemos considerar $u(z) = u(y)$, um arco instável através de z satisfazendo a condição (2). Este arco separa $B_\delta(x)$ em dois setores, assim aplicando o Lema 3.1 em cada setor, temos que existe um arco estável $s(z)$ satisfazendo a condição (1). Portanto $z \in Q$. Da mesma forma, para $t \in V \cap s(y)$ encontramos $u(t)$ satisfazendo (2), e assim $t \in Q$. Considere a aplicação $h : (V \cap u(y)) \times (V \cap S(y)) \longrightarrow Q$ que envia (z, t) para o ponto de interseção $h(z, t) = C^s_{\delta/2}(z) \cap C^u_{\delta/2}(t)$. Essa interseção tem no máximo um ponto pois não existem setores bi-assintóticos, e não é vazia pela definição de Q. Então, h está bem definido. É fácil ver que é continuo e injetivo. Por tanto pelo Teorema de Invariância do Domínio 1.1, é uma aplicação aberta. Então y está na imagem de h e y é um ponto interior de Q. Isso prova que Q é aberto em V. O Lema 3.8 implica que Q tem estrutura de produto local. Portanto, Q é uma vizinhança de de x no setor X com estrutura de produto local.

Para obter uma estrutura de produto local para cada $y \neq x$ perto de x observamos que cada ponto $y \neq x$ perto de x pertence a um setor por arcos estáveis ou a um setor limitado por arcos instáveis. Repetindo o argumento acima, um número finito de vezes (lembre-se Lema 3.11) mostramos que y admite uma estrutura de produto local. $\blacksquare$

Proposição 3.5. *(Sem espinhos) Para cada $x \in M$ existe $\delta > 0$ tal que $N^s_\delta(x) \geq 2$.*

Demonstração. Suponhamos por contradição que existe $x \in M$ tal que para cada $\delta > 0$ temos que existe apenas uma classe de equivalência A de arcos estáveis. Escolha um pequeno δ e seja $a \in A$ um representante desta classe. Seja $C \subset B_\delta(x)$ um contínuo maximal estável contendo x. Se C também contém pontos diferentes daqueles que estão no arco a, podemos uni-los a x, dentro de C, porque C é arco conexo. Se todos esses arcos contiverem a é fácil ver que para algum δ pequeno , o conjunto estável C consistiria em apenas um arco unindo x a $\partial B_\delta(x)$.

Suponhamos, então que existe um ponto $v \in C - a$ que pode ser unido a x, dentro de C, por um arco que não contém a. Assim existe um ponto $u \in a$ com $u \neq x$, e um arco $b \subset C$ com origem em u e ponto final v, cuja interseção com a é $\{u\}$. Seja J uma curva de Jordan através de de x e v tal que a e b permaneçam em seu interior, exceto por seus pontos finais. Seja $w \in a$, $w \neq x$ o ponto mais próximo a x tal que existe um arco $c \in C$ com origem w e ponto final em $\hat{J}$, $c \cap a = \{w\}$ onde $\hat{J}$ é uma curva de Jordan coincidindo com J exceto em uma pequena vizinhança de x e tendo x em seu interior. Este ponto w deve existir ou teremos mais de uma classe de equivalência em $A(x, \sigma)$ para algum $\sigma > 0$. Consequentemente, o arco contido em a com origem em x e ponto final em w, pertence (exceto para w) ao interior de um setor limitado por arcos estáveis locais (setor estável para breve), digamos X, definido como anteriormente, com w substituindo x e J ao invés de $\partial B_\delta(x)$. Mas, por causa da estrutura de produto local em uma vizinhança de w em X, isso implica que o conjunto estável de w encontra duas vezes a um conjunto instável, o que é absurdo, já que não existem setores bi-assintótico. Assim, para alguns $\delta > 0$, C consiste em um arco a interior para $B_\delta(x)$, exceto pelo seu ponto final em $\partial B_\delta(x)$.

Agora, notamos que todos pontos interiores do arco a tem uma estrutura de produto local e, portanto, seus conjuntos locais instáveis são transversais a a. Seja U uma pequena vizinhança do arco a.

Podemos supor que para qualquer ponto no interior do arco a existe um arco instável γ transversal a a de tal maneira que os pontos finais de γ não pertencem ao $\overline{U}$.

A interseção $U \cap \partial B_\delta(x)$ é um arco que é separado pelo ponto final y de a em dois sub-arcos c_1, c_2 de modo que $U \cap \partial B_\delta(x) \setminus \{y\} = c_1 \cup c_2 \cup \{y\}$, com $c_1 \cap c_2 = \varnothing$.

Pegue um pequeno disco $\mathcal{V}$ de x tal que para todo $y \in \mathcal{V}$, o arco estável em y está contido em em U. Tal disco existe porque de outra forma encontramos por um processo de limite, um arco não equivalente a a contradizendo nossa hipótese. O limite de $\mathcal{V}$ é o círculo $\mathcal{C}$. Seja τ o punto de interseção do arco a com $\mathcal{C}$. O conjunto $\mathcal{C} \setminus \{\tau\}$ é um arco conexo.

Defina $\mathcal{E}_1$ (respectivamente $\mathcal{E}_2$) é o conjunto de pontos de $t \in \mathcal{C} \setminus \{\tau\}$ tal que seu arco estável corta c_1 (respetivamente c_2). Nós temos que $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$ são conjuntos fechados cobrindo $\mathcal{C} \setminus \{\tau\}$. Se $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$ não estiverem vazios, então como $\mathcal{C} \setminus \{\tau\}$ é conexo e $c_1 \cup c_2$ não é conexo, então existe um arco estável local S de um ponto em $\mathcal{C} \setminus \{\tau\}$ tal que corta c_1 e c_2. Mas então existe um arco instável γ como acima, que corta duas vezes S levando a um setor bi-assintótico o que é uma contradição.

Então podemos supor que apenas $\mathcal{E}_1 \neq \varnothing$. Neste caso podemos encontrar um arco estável cortando duas vezes $\mathcal{C} \setminus \{\tau\}$ e escolhendo um arco γ suficientemente próximo de x, e encontramos novamente um setor bi-assintótico chegando novamente a uma contradição. Isso termina a prova. ■

Agora presentamos alguns Lemas que complementam nosso estudo nesta seção.

Lema 3.12. *Se $N_\delta^s(x) = 2$, então existe uma vizinhança de x tal que cada ponto nessa vizinhança tem estrutura de produto local.*

Demonstração. Mostremos que o ponto x tem estrutura de produto local, outros pontos $y \neq x$ na vizinhança de x tem estrutura de produto local pelo Teorema 3.1. Como $N_\delta^s(x) = 2$ pegamos $a, b \in A_\delta^s$ dois arcos não equivalentes e um arco $c \subset \partial B_\delta(x)$ conectando os pontos finais de a e b, além disso vamos assumir que c não encontra outros arcos estáveis (ou seja entre a e b não existem outros arcos estáveis). Chamemos de U ao setor determinado pelos arcos a e b com c no bordo, então pelo Lema 3.2 temos que existe um arco instável em U que liga x com c, mas esse instável é único pois se não fosse verdade temos pelo Lema 3.2 um arco estável entre dois arcos instáveis que liga x com c, o que contradiz a hipótese. Fazemos o mesmo para o outro setor determinado por a e b, temos que existe um único arco instável. Portanto x tem estrutura de Produto Local. ■

A partir da demonstração deste Lema temos que se $N_\delta^s(x) = 2$, então $N_\delta^u(x) = 2$. Em geral $N_\delta^s(x) = n$ então $N_\delta^u(x) = n$.

Definição 3.7 (Singularidade)**.** *Um ponto $x \in M$ sem estrutura de produto local é chamada uma singularidade de f.*

Temos que para cada $x \in M$ o $N_\delta^s(x) \geq 2$, então a partir dos resultados anteriores temos que os pontos chamados de singularidades (que não possuam estrutura de produto local) tem $N_\delta^s > 2$.

Corolário 3.1.1. *Um homeomorfismo de superfície 2-expansivo em M com $\Omega(f) = M$ tem um número finito de singularidades.*

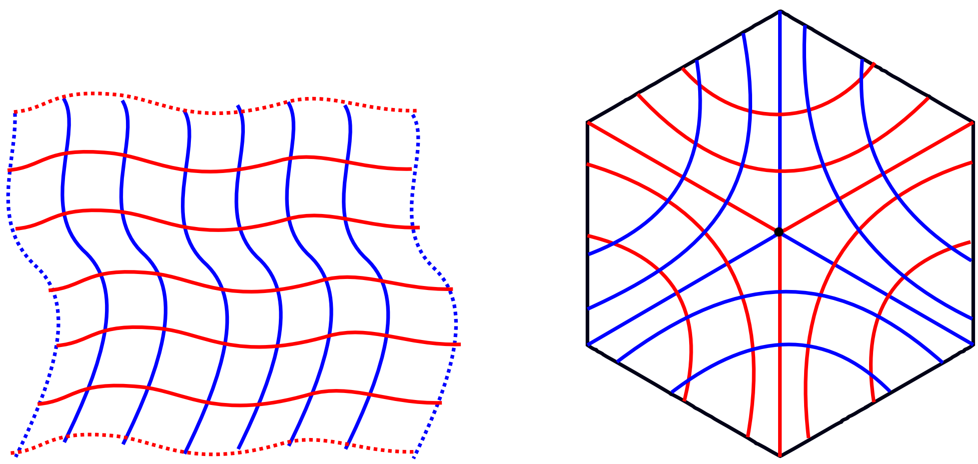
Demonstração. Seja $X = \{p \in M : N_\delta^s(p) \geq 3\}$ o conjunto de singularidades em M. Suponhamos que X é infinito, então temos uma sequência de singularidades $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, como M é compacto então existe uma subsequência $\{p_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ a qual converge a um ponto em M, ou seja $p_{n_k} \to p* \in M$, quando $k \to \infty$. Se $p* \in X$, temos pelo Teorema 3.1 que existe uma vizinhança V de $p*$ tal que cada ponto distinto de $p*$ nessa vizinhança tem estrutura de produto local, mas os pontos p_{n_k} estão próximos a $p*$, então para cada $k \geq k_0$, para certo k_0 temos que os pontos da sequência $\{p_{n_k}\}_{k\geq k_0} \subset V$, o que é um absurdo pois todos os pontos exceto o ponto $p*$ tem estrutura de produto local. Analogamente quando $p* \in (M \setminus X)$. Portanto o conjunto X é finito, ou seja o homeomorfismo 2-expansivo f tem finitas singularidades. ■

O conjunto de pontos onde existe uma estrutura de produto local é aberta. Assim, o conjunto de singularidades é fechado e as singularidades são isoladas pelas proposições anteriores.

3.5 Classificação de 2-expansivos

Vamos observar que cada ponto $x \in M$ que não é uma singularidade tem uma vizinhança com estrutura de produto local. Nós chamamos tal vizinhança de uma "caixa com estrutura de produto local"que nos referimos como uma "caixa", para breve.

Quando x é uma singularidade, da prova do teorema 3.1 e a Proposição 3.5 segue-se que x tem uma vizinhança $\mathcal{B}$ tal que seu conjunto estável (instável) local consiste da união de $\gamma \geq 3$ arcos que se encontram apenas em x. Além disso, dado qualquer arco instável γ^u em $\mathcal{B}$ existe um arco estável γ^s através de x que intercepta γ^u apenas uma vez, o que implica que x é isolado dinamicamente. Denotamos tal vizinhança $\mathcal{B}$ como uma "caixa generalizada"de x, como se mostra na Figura 3.23.



(a) Caixa (b) Caixa generalizada

Figura 3.23: Tipos de Caixas

Teorema 3.2 (Teorema A). *Se $f : M \to M$ é um homeomorfismo 2-expansivo definido em uma superfície compacta e $\Omega(f) = M$, então f é expansivo.*

Demonstração. Seja f o homeomorfismo 2-expansivo, então existe $\varepsilon > 0$ (constante de expansividade) tal que

$$\#(\Gamma_\varepsilon(x)) = \#(\{y \in M : dist(f^n(x), f^n(y)) \leq \varepsilon\}) \leq 2.$$

Dado uma cobertura aberta $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in \Gamma}$ em M onde cada um dos abertos

A_i tem estrutura de caixa ou de caixa generalizada e $diam(A_i) < \varepsilon$ para cada $i \in \Gamma$, logo como M é compacto, possui uma subcobertura finita tal que $M = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, então existe um número de Lebesgue $\lambda_0 > 0$. Para a subcobertura consideremos $\lambda < \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \lambda_0\}$.

Agora suponha por contradição que f não é expansivo, então para todo $\alpha > 0$, existem $x_\alpha, y_\alpha \in M$, $x_\alpha \neq y_\alpha$ tal que

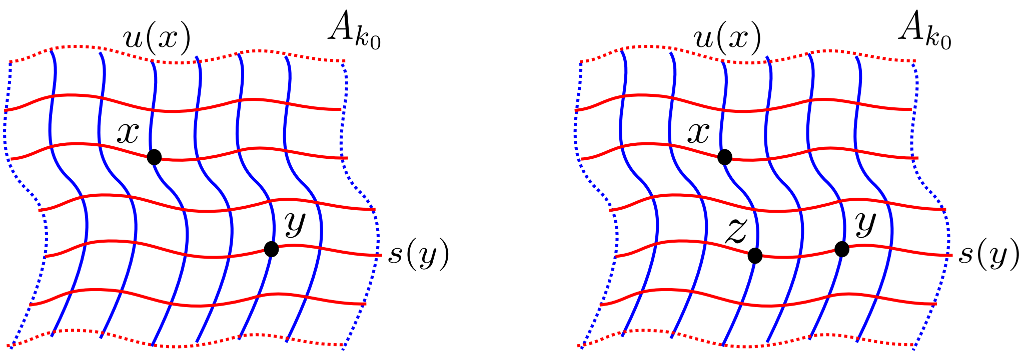
$$dist(f^n(x_\alpha), f^n(y_\alpha)) < \alpha \text{ , para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Em particular para $\alpha = \lambda < \frac{\varepsilon}{2}$, existem $x_\lambda = x$ e $y_\lambda = y$ com $x \neq y$ tal que

$$dist(f^n(x), f^n(y)) < \lambda \text{ , para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

Assim para $n = 0$ temos que $x, y \in A_{k_0}$ para algum $k_0 \in \{1, ..., n\}$. Suponhamos que A_{k_0} seja uma caixa com estrutura de produto local e que x, y não pertencem ao mesmo arco instável ou ao mesmo arco estável em A_{k_0}. Observamos que o arco instável $u(x)$ de x corta o arco estável $s(y)$ de y num ponto z diferente de x e de y. Como $diam(A_{k_0}) < \varepsilon$ temos que $dist(x, z) < \frac{\varepsilon}{2}$, pois $dist(x, z)$ não pode sair de A_{k_0} porque ela tem estrutura de produto local, logo isso contradiz a 2-expansividade. Agora a imagem da caixa A_{k_0}, pode ser novamente uma caixa ou pode pertencer a uma caixa generalizada, neste ultimo $f(A_{k_0})$ é uma caixa que não contém a singularidade. Para $n = 1$ temos que $f(A_{k_0}) = A_{k_1}$ onde $k_1 \in \{1, ..., n\}$, acontece o mesmo que o caso anterior, ou seja $dist(f(x), f(z)) < \lambda$, onde as imagens de $u(x)$ e $s(x)$ continuam se cruzando, mais precisamente no ponto $f(z)$, pois f é um homeomorfismo. Fazendo de maneira indutiva temos que $dist(f^n(x), f^n(z)) < \lambda$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, contradizendo assim a 2-expansividade do homeomorfismo.

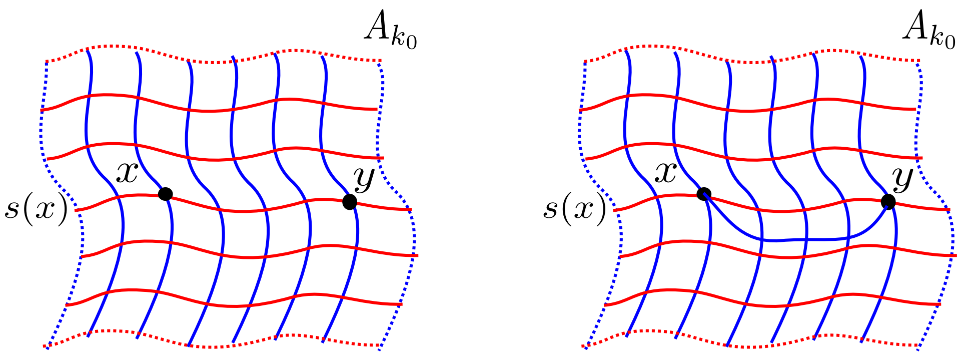
Suponhamos agora que x e y pertencem ao mesmo arco estável, então se pode considerar $y \in s(x)$. Se sabe $dist(f^n(x), f^n(y)) < \lambda$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, em particular consideremos $dist(f^n(x), f^n(y)) < \lambda$ para todo $n \leq 0$, ou seja $y \in W_\lambda^u(x)$, assim temos um arco instável $\overline{u}$ que liga x e y no interior de algum aberto A_k da cobertura, e por outro lado estes dois pontos estão ligados por um arco estável, tendo assim um setor bi-assintótico, o que é impossível pela



(a) Antes. (b) Depois.

Figura 3.24: Caso 1.

Proposição 3.4. Analogamente se mostra se os pontos x e y pertencem ao mesmo arco instável.

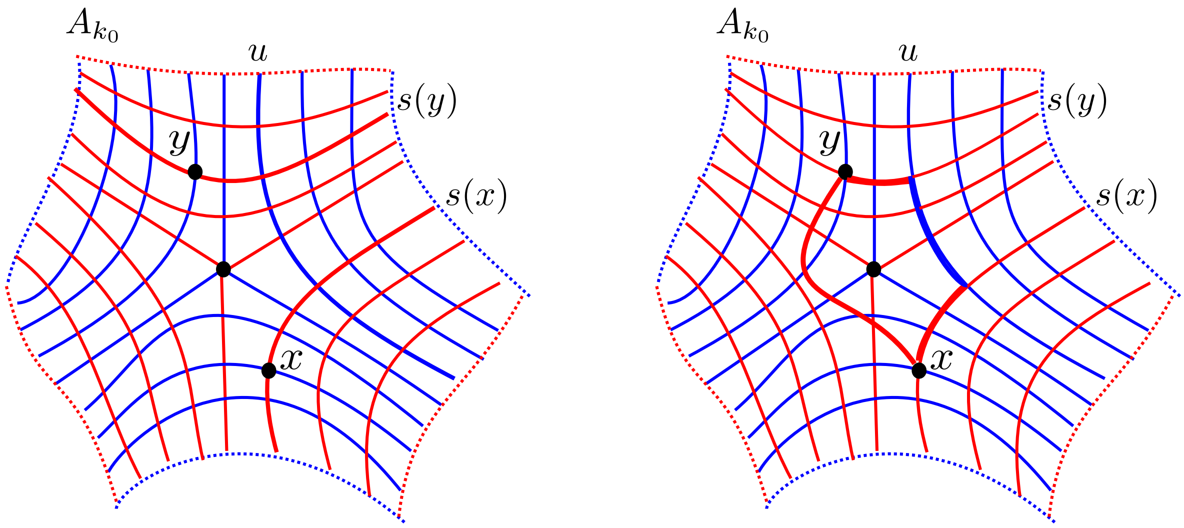


(a) Antes. (b) Depois.

Figura 3.25: Caso 2.

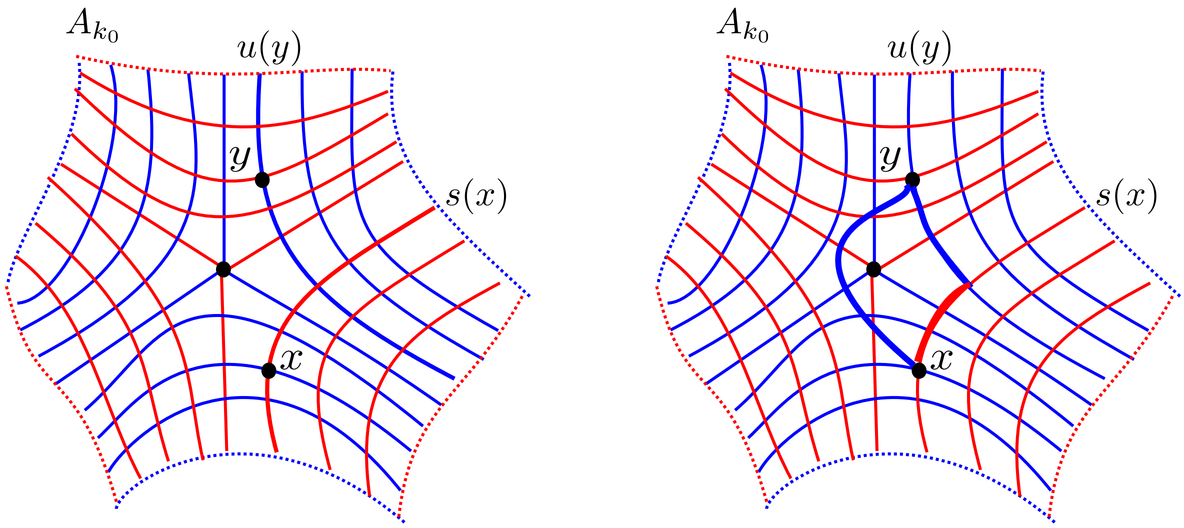
Por outro lado considerando que A_{k_0} tenha estrutura de caixa generalizada, então suponhamos que x e y não pertencem ao mesmo arco estável nem ao mesmo arco instável, assim ambos pontos estão ligados por dois tipos de arcos: De tipo instável-estável-instável (estável-instável-estável) e de tipo instável-estável (estável-instável). Fazendo o mesmo análise anterior, temos para o primeiro tipo de arco que $y \in W^u(x)$ ($y \in W^s(x)$), ou seja x e y estão ligados por um arco instável (estável), obtendo um setor bi assintótico como pode-se observar na Figura 3.26, o que é absurdo. Analogamente para o segundo caso . Portanto, o Teorema é mostrado. ■

Usando a classificação de homeomorfismos expansivos em superfícies resumido na seção 3 do capítulo 2, e pelo Teorema 3.2 (Teorema A), concluímos que:



(a) Antes (b) Depois

Figura 3.26: Caso 3.



(a) Antes (b) Depois

Corolário 3.2.1. *Não existe homeomorfismos 2-expansivos na esfera sem pontos errantes. Um homeomorfismo 2-expansivo no toro sem pontos errantes é conjugado a um mapa Anosov. Seja Σ_g uma superfície com gênero maior que 1 ($g > 1$), se $\Omega(f) = \Sigma_g$ e f é um homeomorfismo 2-expansivo, então f é conjugada a um Pseudo-Anosov.*

Demonstração. A prova segue do Teorema 2.3 e a classificação feita por Lewowicz no artigo [9]. ■

Capítulo 4

Exemplos de Homeomorfismos não Expansivos

Neste capítulo construiremos dois exemplos: O primeiro exemplo é a construção de um homeomorfismo $f : M \to M$, 2-expansivo que não é expansivo. A referência utilizada é o artigo de A. Artigue, M.J. Pacífico, e J. L. Vieitez [2]. O segundo exemplo é a construção de um homeomorfismo cw-expansivo que não é N-expansivo, este exemplo é conhecido como o mapa Pseudo-Anosov na esfera, a referência para este exemplo são os artigos de M. Pacifico, J. Vieitez [13], e A. Artigue [1].

4.1 Homeomorfismo 2-expansivo que não é expansivo

Nesta seção fazemos a construção do Derivado de Anosov, que é uma modificação do Difeomorfismo de Anosov, para depois fazer a construção do primeiro exemplo. A referência nesta seção é o livro de C. Robinson [14].

4.1.1 Derivado de Anosov

Definição 4.1 (Região Trapping, Conjunto Atrator)**.** *Seja $f : M \to M$ um difeomorfismo. Uma região compacta $N \subset M$ é chamado uma* ***região trapping*** *para f, sempre que $f(N) \subset int(N)$. Um conjunto Λ é chamado de* ***conjunto de***

atração ou atrator, *se existe uma região Trapping N tal que $\Lambda = \bigcap_{k\geq 0} f^k(N)$. Finalmente um atrator com uma estrutura hiperbólica é chamada de* ***atrator hiperbólico***.

Definição 4.2 (Dimensão Topológica)**.** *Esta definição é dada indutivamente. Um conjunto Λ tem dimensão topológica zero fornecida para cada ponto $p \in \Lambda$, se existe uma vizinhança arbitrariamente pequena U de p tal que $\partial U \cap \Lambda = \varnothing$. Então indutivamente , um conjunto Λ se diz que tem dimensão $n > 0$ fornecida para cada ponto $p \in \Lambda$, se existe uma vizinhança arbitrariamente pequena U de p tal que $\partial U \cap \Lambda$ tem dimensão $n-1$.*

Definição 4.3 (Atrator em Expansão)**.** *Usando o conceito de dimensão topológica, dizemos que um atrator hiperbólico Λ é um* ***atrator em expansão***, *sempre que a dimensão topológica de Λ seja igual à dimensão da decomposição instável. (Como $W^u(p) \subset \Lambda$, sempre temos que a dimensão topológica é maior ou igual à dimensão da decomposição instável.)*

Seja $g : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ um difeomorfismo Anosov como Exemplo 4 do capítulo 1, induzido por a matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, cujos autovalores são $0 < \lambda_s < 1$ e $\lambda_u > 1$. Seja p_0 o ponto fixo de g correspondente ao $0 \in \mathbb{R}^2$, isto é $\pi(0) = p_0$, onde π é a projeção. Sejam v^u e v^s os autovetores associados a os autovalores λ_u e λ_s respectivamente, usamos as coordenadas $u_1 v^u + u_2 v^s$, numa pequena vizinhança U de 0. Seja r_0 um raio suficientemente pequeno para que a bola aberta $B_{r_0}(0)$ este contida em U.

Seja a aplicação $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **bump function** definida por:

- $\delta(\mathbb{R}) = [0,1]$, $\delta \in C^\infty$.
- $\delta(x) = \begin{cases} 0 & ; \ |x| \geq r_0 \\ 1 & ; \ |x| \leq \frac{r_0}{2} \end{cases}$
- $\delta'(x) < 0$ quando $x \in (\frac{r_0}{2}, r_0)$.
- A função δ é uma função par, ou seja $\delta(x) = \delta(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Consideremos a equação diferenciável

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = 0 \\ \dot{u}_2 = u_2 \delta(||(u_1, u_2)||). \end{cases}$$

Seja φ^t o fluxo associado à equação diferencial $\varphi^t(u_1, u_2) = (u_1, \varphi_2^t(u_1, u_2))$. O campo de vetores é feita na Figura 4.1 . Então o suporte é:

$$supp(\varphi^t - Id) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^2 : (\varphi^t - Id)(x) \neq 0\}} = \overline{\{x \in \mathbb{R}^2 : \varphi^t(x) \neq Id(x)\}} \subset U.$$

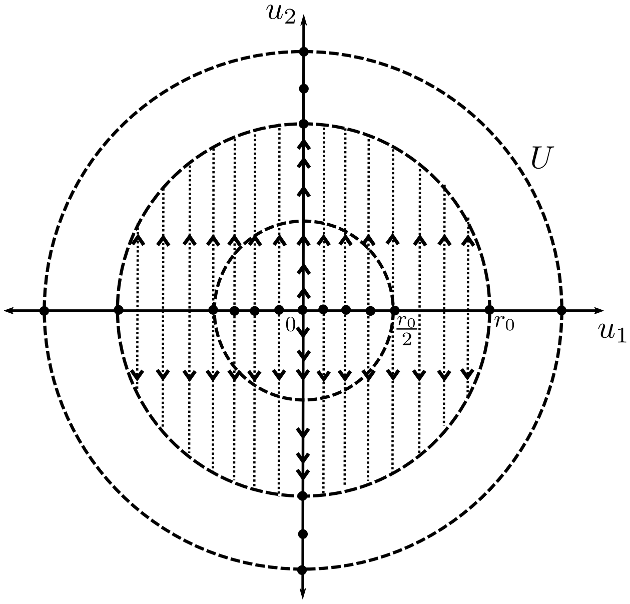


Figura 4.1: Campo de vetores.

Também a derivada do fluxo no ponto 0 em termos das coordenadas (u_1, u_2) é:

$$D\varphi_0^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Agora definamos a aplicação $f = \varphi^\tau \circ g$ para um $\tau > 0$ suficientemente grande, de tal maneira que $e^\tau \lambda_s > 1$, onde λ_s é o autovalor estável. Logo a aplicação f é chamado **Derivado de Anosov** associado à matriz A. Observe que nas coordenadas (u_1, u_2) a derivada de f no ponto $p_0 = \pi(0)$, é:

$$Df_{p_0} = D\varphi_{p_0}^\tau Dg_{p_0} = \begin{pmatrix} \lambda_u & 0 \\ 0 & e^\tau \lambda_s \end{pmatrix},$$

Portanto p_0 é uma fonte.

Teorema 4.1. *O Derivado de Anosov f definido acima tem $\Omega(f) = \{p_0\} \cup \Lambda$, onde $\{p_0\}$ é um ponto fixo fonte e Λ é um Atrator em expansão de dimensão topológica*

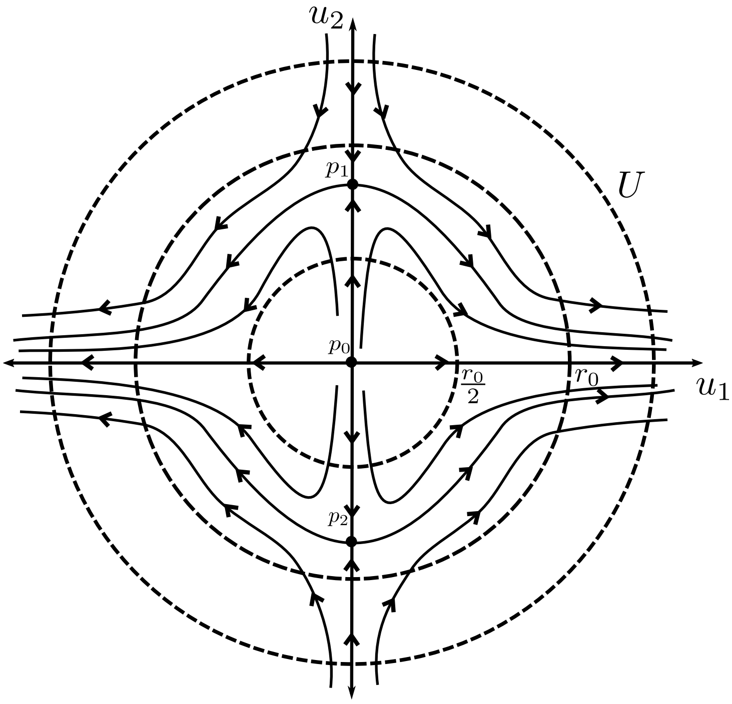


Figura 4.2: O campo de vetores de $f = \varphi^\tau \circ g$.

1. O mapa f é transitivo em Λ e o conjunto dos pontos periódicos a $f|_\Lambda$ são densos em Λ.

Demonstração. Como a vizinhança U pode ser tomada arbitrariamente pequena, f pode ser arbitrariamente C^0-próximo de g, mas não C^1-próximo de g, pois e^τ não pode ser arbitrariamente pequeno. Observe também que o fluxo φ^t preserva cada variedade estável de um ponto para g, $W^s(q,g)$, devido à forma das equações diferenciais. Portanto f preserva cada $W^s(q,g)$.

O novo mapa f tem três pontos fixos em $W^s(p_0,g)$, os quais são p_0 e dois novos pontos fixos, que chamamos de p_1 e p_2. Este fato pode ser visto como verdadeiro porque $f(p_0) = p_0$ é uma fonte, e fora de U a inclinação do grafo de de f em $W^s(q,g)$ é ainda menor que 1. Portanto deve haver um ponto fixo em cada lado de p_0 ao longo de $W^s(q,g)$, como na seguinte Figura 4.3.

Afirmação: Os pontos p_1 e p_2 são pontos selas. De fato, para ver isso, observamos que em U,

$$Df_q = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

com $a_{11} = \lambda_u$ para todo q, e com $0 < a_{22} < 1$ em p_1 e p_2, devido à natureza do gráfico de $f|_{W^s(p_0,g)}$ indicado na Figura 4.3.

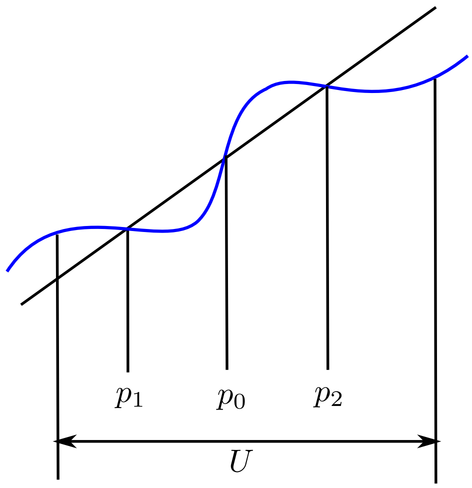


Figura 4.3: Grafo de f restrito a $W^s(p_0, g)$.

Seja V a vizinhança de p_0 (que não contem a p_1 e a p_2) contida em U tal que satisfaz:

1. $a_{22} > 1$ para $q \in V$, ou seja f é uma expansão ao longo de E^s em V.

2. $0 < a_{22} < 1$ para $q \notin f(V)$, isto é, f é uma contração ao longo de E^s fora de V.

3. $f(V) \supset V$, observe a Figura 4.4.

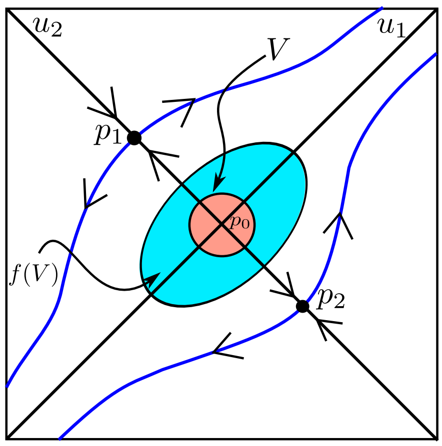


Figura 4.4: Imagem do conjunto aberto V.

Claramente $V \subset W^u(p_0, f)$, então é a variedade instável local de p_0 e $W^u(p_0, f) = \bigcup_{j=0}^{\infty} f^j(V)$. Seja $N = \mathbb{T}^2 \setminus V$. Então N é uma região Trapping pois $V \subset f(V)$. Seja $\Lambda = \bigcap_{j=0}^{\infty} f^j(N)$. Este é um conjunto atrator, e além disso $\Lambda = \mathbb{T}^2 \setminus W^u(p_0, f)$. A variedade instável de p_0 para f, $W^u(p_0, f)$, é uma versão "engrossado"da variedade instável para g. No passo 4 abaixo, nós provamos que $W^u(p_0, f)$ ainda é denso em $\mathbb{T}^2$, então Λ tem o interior vazio. Procedemos a mostrar o Teorema 4.1 através de uma série de etapas.

PASSO 1: O mapa f tem estrutura hiperbólica em Λ.

De fato, em termos do decomposição $\mathbb{E}^u_q(g) \oplus \mathbb{E}^s_q(g)$, a derivada de f dada por $Df_q = (a_{ij})$. é uma matriz triangular inferior em U, e uma matriz diagonal fora de U (pois $a_{12} = 0$ em todos os lugares e $a_{21} = 0$ fora de U). O termo instável $a_{11} = \lambda_u > 1$ em todos os lugares, e $0 < a_{22} < 1$ fora de $f(V)$ pertencem a Λ. Por causa da forma da derivada temos que $\mathbb{E}^s_q(f) = \mathbb{E}^s_q(g)$ é um subespaço invariante e cada vetor neste subespaço é contraído por Df_q para $q \in \Lambda$. Portanto, este é o subespaço estável em Λ. Seja C um limite em $|a_{21}|$ em todos os lugares, definimos $L = C(\lambda_u - \lambda_s)^{-1}$ e pegamos os cones

$$C^u_q = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{E}^u_q(g) \oplus \mathbb{E}^s_q(g) : |v_2| \leq L|v_1|\}.$$

Então pode ser verificado usando a natureza de uma matriz triangular inferior da derivada de f que os cones são invariantes e

$$\mathbb{E}^u_q(f) = \bigcap_{j=0}^{\infty} Df^j_{f^{-j}(q)} C^u_{f^{-j}(q)}$$

é um subespaço invariante no qual a derivada é uma expansão para os pontos $q \in \Lambda$. Assim isso dá o subespaço instável em Λ, portanto temos uma decomposição hiperbólica.

PASSO 2: Os pontos $p_1, p_2 \in \Lambda$ e $W^u(p_j, f) \subset \Lambda$, para $j = 1, 2$.

O fato que $p_1, p_2 \in \Lambda$ segue porque $p_1, p_2 \notin V$ e eles são pontos fixos, então

$$p_1, p_2 \notin \bigcup_{j=0}^{\infty} f^j(V) = \mathbb{T}^2 \setminus \Lambda.$$

O fato sobre as variedades instáveis que provamos para conjuntos de atração geral.

PASSO 3: As variedades estáveis de f satisfazem o seguinte:

$$W^s(p_1, f) \cap W^s(p_1, f) = W^s(p_0, g) \setminus \{p_0\}$$

e $W^s(q,f) = W^s(q,g)$ para $q \notin W^s(p_0,g)$. Portanto $W^s(q,f)$ é denso em $\mathbb{T}^2$ para todo $q \in \Lambda$.

$f(W^s(q,g)) = W^s(f(q),g)$ e $W^s(q,g)$ é tangente a $\mathbb{E}^s(f)$. também para $q \in \Lambda$, f é uma contração em $W^s_{loc}(q,g)$. Portanto $W^s_{loc}(q,f) = W^s_{loc}(q,g)$ e $W^s(q,f) \subset W^s(q,g)$. Um segmento de linha I em $W^s(q,g)$ que não termina em V (vai todo o caminho através de V se ele se cruzar)é alongado por f^{-1}. qualquer segmento de linha cuja extremidade permaneça em V para todas as imagens inversas deve ser um subconjunto de $W^s(p_0,g)$ e ter um fim em $W^s_{loc}(p_0,g)$. Assim, se $q \notin W^s(p_0,g)$ então $W^s(q,f) = W^s(q,g)$. Além disso, isso implica que $W^s(p_j,f)$ é uma componente de $W^s(p_0,g) - \{p_0\}$ para $j = 1,2$. o fato de que o $W^s(q,f)$ é denso em $\mathbb{T}^2$ segue pois são linhas com inclinação irracional.

PASSO 4: A variedade instável de f em p_0, $W^u(p_0,f)$, é um conjunto aberto denso em $\mathbb{T}^2$.

Por construção temos $\mathbb{T}^2 = \Lambda \cup \bigcup_{j=0}^{\infty} f^j(V)$, então precisamos apenas provar que $W^u(p_0,f)$ se acumula em Λ. De fato, seja $p \in \Lambda$ e seja Z_p uma vizinhança arbitrariamente pequena de p em $\mathbb{T}^2$. Seja $I = comp_p(W^s(p,f) \cap Z_p)$. Enquanto $f^{-j}(I)$ não cruze $f(V)$ ele é alongado por uma quantidade uniforme. Mas existe um limite uniforme no comprimento de $comp_z[W^s(z,g) \setminus f(V)]$. Portanto para j grande,

$$
\begin{aligned}
f^{-j}(I) \cap f(V) &\neq \varnothing \\
f^{-j}(Z_p) \cap f(V) &\neq \varnothing \\
Z_p \cap f^{j+1}(V) &\neq \varnothing \text{ e} \\
Z_p \cap W^u(p_0,f) &\neq \varnothing.
\end{aligned}
$$

Como Z_p é uma vizinhança arbitrariamente pequena, segue-se que $W^u(p_0,f)$ é denso em p. Como p é arbitrário, $W^u(p_0,f)$ é denso em $\mathbb{T}^2$.

PASSO 5: $W^u(p_j,f)$ é denso em Λ para $j = 1,2$.

Seja $p \in \Lambda \cap W^s(q,g)$ onde q tenha período k para g. Pelo PASSO 4, $p \in \overline{W^u(p_0,f)} \setminus W^u(p_0,f)$, assim $p \in \partial(W^u(p_0,f))$. Na prova do PASSO 4, quando $f^{-jk}(I)$ intersepta V, ele deve cruzar $W^u(p_1,f) \cup W^u(p_2,f)$ (Ele atravessa de um lado para o outro). Portanto,

$$(W^u(p_1, f) \cup W^u(p_2, f)) \cap f^{-jk}(Z_p) \neq \varnothing$$
$$(W^u(p_1, f) \cup W^u(p_2, f)) \cap Z_p \neq \varnothing.$$

pois as variedades instáveis são invariantes por f. Isso mostra que a união das duas variedades instáveis $W^u(p_1, f) \cup W^u(p_2, f)$ é densa em Λ.

Mostramos que a união de duas variedades é densa em Λ, e agora precisamos mostrar que cada variedade é densa por se mesma. De fato, $W^u(p_1, f)$ é denso em $\mathbb{T}^2$, portanto ele deve-se interceptar com $W^u(p_2, f)$. Porque estes são tangentes aos subespaços $\mathbb{E}^s$ e $\mathbb{E}^u$, as interseções (que estão no Λ) são transversais. Pelo Lema de Inclinação, segue-se que $W^u(p_2, f)$ acumula-se em $W^u(p_1, f)$, $\overline{W^u(p_2, f)} \supset W^u(p_1, f)$, e $\overline{W^u(p_2, f)} = \Lambda$. Da mesma forma, temos $\overline{W^u(p_1, f)} = \Lambda$.

PASSO 6: A dimensão topológica de Λ é 1.

Pelo PASSO 4, sabemos que $W^u(p_0, f)$ é denso em $\mathbb{T}^2$, então Λ tem interior vazio, logo deve ter dimensão topológica no máximo um. As variedades $W^u(p_j, f)$ para $j = 1, 2$ estão contidos em Λ, portanto, ela deve ter dimensão topológica pelo menos um.

PASSO 7: O conjunto $\{q \in \Lambda : q$ é um ponto homoclínico transversal para $p_j\}$ é denso em Λ para $j = 1, 2$.

Se $x \in \Lambda$, os PASSOS 3 e 5 implicam que ambos $W^u(p_j, f)$ e $W^s(p_j, f)$ chegam arbitrariamente perto de x para j igual a 1 ou 2. A existência da estrutura hiperbólica no PASSO 1, implica que $W^u(p_j, f)$ e $W^s(p_j, f)$ se interceptam transversalmente, arbitrariamente perto de x para j igual a 1 ou 2.

PASSO 8 O conjunto Λ é transitivo.

Isso decorre do PASSO 7 e do Teorema da Transitividade de Birkhoff.

PASSO 9: Os pontos periódicos de f são densos em Λ.

Isto segue do PASSO 7 e o Teorema da Ferradura para pontos homoclínicos transversais.

Juntos, todos esses passos provam o Teorema. ■

4.1.2 O 2-expansivo que não é expansivo

Nesta seção fazemos a construção de um exemplo de um homeomorfismo 2-expansivo de superfície com pontos errantes que não é expansivo. Este exemplo foi considerado por Alfonso Artigue, Joaquin Burn e Rafael Potrie. O teorema é o seguinte.

Teorema 4.2. *Existem homeomorfismos 2-expansivos em superfícies que não é expansivo.*

Considere $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$ dois copias separadas do toro $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Seja $f_i : \mathcal{S}_i \longrightarrow \mathcal{S}_i$ dois difeomorfismos tal que:

- f_1 é um derivado de Anosov,
- f_2 é conjugado com f_1^{-1},
- f_i tem um ponto fixo p_i, p_1 é fonte e p_2 é sumidouro.,

também suponhamos que existem cartas locais $\varphi_i : D \to \mathcal{S}_i$, $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 2\}$, tal que

1. $\varphi_i(0) = p_i$,
2. o pull-back da foliação estável (instável) por φ_1 (φ_2 é uma foliação vertical (horizontal) em D, e
3. $\varphi_1^{-1} \circ f_1^{-1} \circ \varphi_1(x) = \varphi_2^{-1} \circ f_2 \circ \varphi_2(x) = x/4$ para todo $x \in D$.

Seja A um anel $\{x \in \mathbb{R}^2 : 1/2 \leq \|x\| \leq 2\}$ e $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a inversão $\psi(x) = x/\|x\|^2$. Considere $\hat{D}$ o disco aberto $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1/2\}$. Em $[\mathcal{S}_1 \setminus \varphi_1(\hat{D})] \cup [\mathcal{S}_1 \setminus \varphi_2(\hat{D})]$ considere a relação de equivalência gerada por

$$\varphi_1(x) \sim \varphi_2 \circ \psi(x) \text{ , para todo } x \in A.$$

Denote por $\bar{x}$ a classe de equivalência de x. A superfície

$$\mathcal{S} = [\mathcal{S}_1 \setminus \varphi_1(\hat{D})] \cup [\mathcal{S}_1 \setminus \varphi_2(\hat{D})]/\sim$$

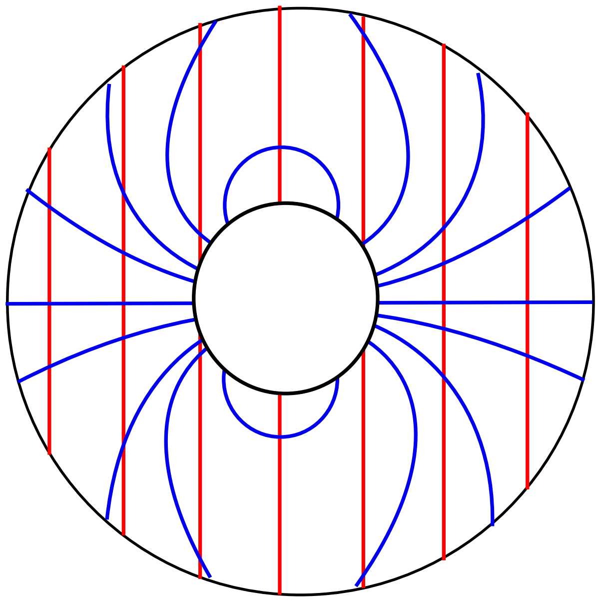


Figura 4.5: As linhas verticais são as folheações estáveis e as curvas são as folheações instáveis.

é um bi-toro com a topologia quociente. As foliações estáveis e instáveis são ilustradas na Figura 4.5.

Considere o homeomorfismo $f : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ definida por:

$$f(\bar{x}) = \begin{cases} \overline{f_1(x)} & \text{se } x \in \mathcal{S}_1 \setminus \varphi_1(\hat{D}) \\ \overline{f_2(x)} & \text{se } x \in \mathcal{S}_2 \setminus \varphi_2(D) \end{cases}$$

Proposição 4.1. *O homeomorfismo f é 2-expansivo mas não é expansivo.*

Demonstração. f não é expansivo porque $\Omega(f) \neq S$. Para mostrar que é 2-expansivo observamos que:

- $\Omega(f)$ é expansivo (porque é hiperbólico), e
- $\Omega(f)$ é isolado, ou seja, existe um conjunto aberto U tal que

$$\Omega(f) = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(U).$$

Então, apenas falta mostrar que existe $\delta > 0$ tal que se $X \cap \Omega(f) = \varnothing$ e

$$\text{diam}(f^n(X)) < \delta$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$, então $|X| < 3$. Seja $\overline{A} = \{\overline{x} : x \in \varphi_1(A)\}$. Seja $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset f^{-1}(\overline{A}) \cap \overline{A} \cap f(\overline{A})$ para todo $x \in \overline{A}$. Por construção, temos que $W^s_\delta(x) \cap W^u_\delta(x)$ tem no máximo dois pontos se $x \in \overline{A}$. Observe que para todo $x \notin \Omega(f)$ existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $f^n(x) \in \overline{A}$. Isso termina a prova. ∎

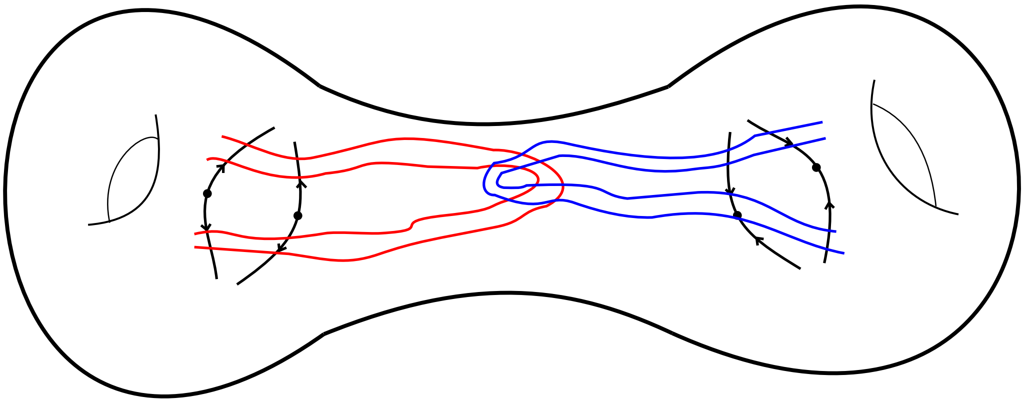


Figura 4.6: Esboço da prova.

Resumindo temos 2 derivados de Anosov, onde um deles é o inverso do outro, nós removemos os pontos fixos, o atrator e o repulsor, então sobra apenas o atrator e repulsor hiperbólico. Logo de fazer o colagem, quocientamos pela inversão. Assim os estáveis do atrator hiperbólico formam uma folheação paralela. O mesmo acontece com os instáveis no repulsor hiperbólico. Quando nós quocientamos pela inversão acontece exatamente o desenho da Figura 4.6 , assim aparecem as seções bi-assintóticas.

4.2 cw-expansivo que não é N-expansivo

Pseudo Anosov na esfera com um espinho.

Seja o Difeomorfismo de Anosov Linear $f_A : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ dado no Exemplo 4 do capítulo 1. Neste exemplo a notação $[(x, y)]$ representa a classe de equivalência de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ em $\mathbb{T}^2$. Definamos em $\mathbb{T}^2$ a relação $[(x, y)] \sim [(-x, -y)] = -[(x, y)]$. O quociente $\mathbb{T}^2/\sim$ dá a esfera $\mathbb{S}^2$. Para ver isso, vamos pegar um quadrado em $\mathbb{R}^2$ limitado pelas linhas retas $x = \frac{-1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{-1}{2}$ e $\frac{1}{2}$. Obtemos um domínio fundamental para o toro e o identificamos com $\mathbb{T}^2$.

No quociente $\mathbb{T}^2$ temos os vértices $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $B(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$, $C(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2})$, $D(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2})$ do quadrado são todos identificados. Vamos chamar de E para o ponto $(\frac{1}{2}, 0)$, F

para o ponto $(\frac{-1}{2}, 0)$, G para o ponto $(0, \frac{1}{2})$, e H para o ponto $(0, \frac{-1}{2})$. Observamos que E está identificado com F e G está identificado com H em $\mathbb{T}^2$.

Agora observe que o limite do quadrado $OEAG$ é identificado com o limite do quadrado $OEDH$ (pelas relações $(x, y) \sim -(x, y)$ e $(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow (x - x', y - y') \in \mathbb{Z}^2$). Portanto são dois discos diferentes colados em seus limites por essa identificação.

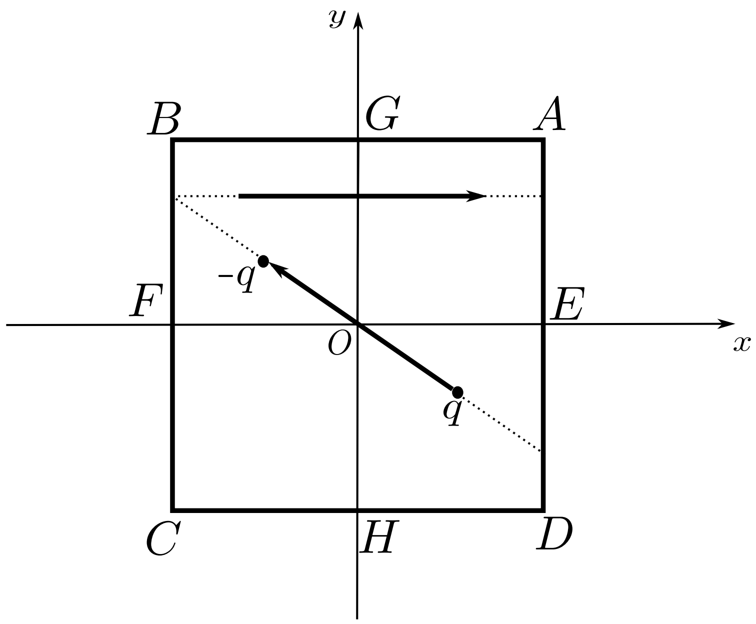


Figura 4.7: Domínio fundamental para $\mathbb{T}^2$.

A topologia quociente coincide no interior dos quadrados $OEAG$ e $OEDH$ com a topologia de $\mathbb{R}^2$, e o limite comum de ambos discos é um círculo separando $\mathbb{T}^2/\sim$. Além disso, o restante do quadrado $ABCD$ não acrescenta mais pontos ao quociente, pois os quadrados $OEAG$ e $OFCH$, $OEDH$ e $OFBG$ são identificados pela relação $(x, y) \sim -(x, y)$. Daqui obtemos que $\mathbb{T}^2/\sim \ \cong \mathbb{S}^2$. Veja a Figura 4.7, onde marcamos dois pontos, q e $-q$, que são identificadas pela relação $\sim$.

Por outro lado $f_A([x, y]) \sim -f_A([x, y]) = f_A(-[x, y])$ pela linearidade, e portanto projeta-se para $\mathbb{S}^2$ como um mapa $g : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ conhecido como um mapa **Pseudo-Anosov generalizado**. Se, $\pi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{S}^2$ é a projeção definida pela relação $\sim$, podemos escrever $g(x) = \pi(f_A(\pi^{-1}(x)))$. Portanto pontos periódicos de f_A projetam-se em pontos periódicos de g. Para g existem pontos singulares p onde os conjuntos ε-estáveis locais e ε-instáveis locais são arcos com o ponto p

como ponto final. Estes conjuntos estáveis (instáveis) locais são chamados de 1-espinho (veja a Figura 4.8 onde O é um ponto com um 1-espinho). o mapa f é conhecido como o mapa generalizado Pseudo-Anosov.

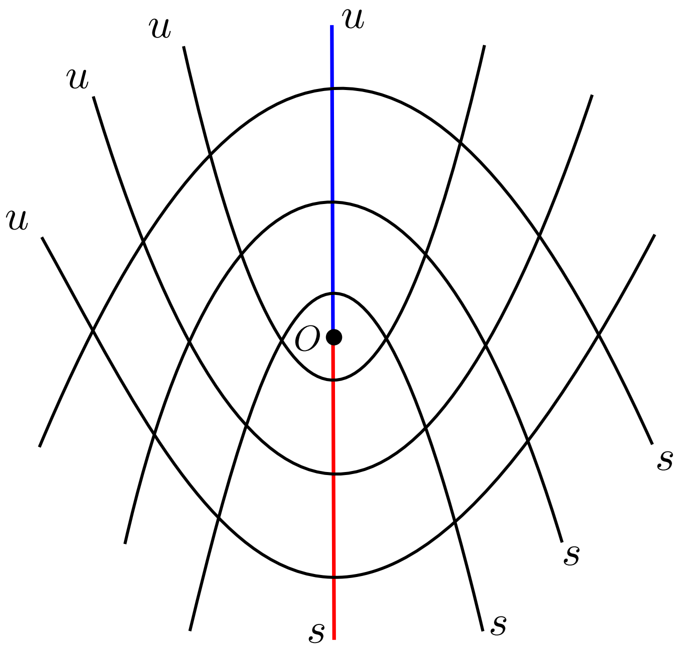


Figura 4.8: Singularidade de um Pseudo-Anosov Generalizado.

O mapa f é cw-expansivo, mas não é N-expansivo para todo $N \geq 1$, a prova é feita por Alfonso Artigue em [1], Proposição [2.2.2].

Referências Bibliográficas

[1] ARTIGUE, A. Dendritations of surfaces. *Ergodic Theory and Dynamical Systems 38*, 8 (2018), 2860–2912.

[2] ARTIGUE, A., PACIFICO, M. J., AND VIEITEZ, J. L. N-expansive homeomorphisms on surfaces. *Communications in Contemporary Mathematics 19*, 01 (2017), 1650040.

[3] CAMACHO, CÉSAR E NETO, A. L. *Teoria geométrica das folheações*, vol. 9. Instituto de matemática pura e aplicada, 1979.

[4] CONLON, L. *Differentiable Manifolds*, 2 ed. Birkhäuser Advanced Texts / Basler Lehrbücher. Birkhäuser Basel, 2001.

[5] FRANKS, J. Anosov diffeomorphisms. *Proceedings of the Symposium in Pure Mathematics 14* (1970), 61–93.

[6] HANDEL, M. Global shadowing of pseudo-anosov homeomorphisms. *Ergodic Theory and Dynamical Systems 5*, 3 (1985), 373–377.

[7] KATO, H. Concerning continuum-wise fully expansive homeomorphisms of continua. *Topology and its Applications 53*, 3 (1993), 239–258.

[8] KATO, H. Continuum-wise expansive homeomorphisms. *Canadian Journal of Mathematics 45*, 3 (1993), 576–598.

[9] LEWOWICZ, J. Expansive homeomorphisms of surfaces. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 20*, 1 (1989), 113–133.

[10] MICHAEL BRIN, G. S. *Introduction to Dynamical Systems*, 1 ed. Cambridge University Press, 2002.

[11] Morales, C. A. A generalization of expansivity. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-A 32*, 1 (2012), 293–301.

[12] Nadler, S. B. *Hyperspaces of sets*, vol. 49. Dekker, 1978.

[13] Pacifico, M. J., and Vieitez, J. L. Entropy-expansiveness and domination for surface diffeomorphisms. *Rev. Mat. Complut 21*, 2 (2008), 293–317.

[14] Robinson, C. *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*. CRC press, 1998.

[15] Thurston, W. P., et al. On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces. *Bulletin (new series) of the american mathematical society 19*, 2 (1988), 417–431.

[16] Utz, W. Unstable homeomorphisms. *Proceedings of the American Mathematical Society 1*, 6 (1950), 769–774.