

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**  
Instituto de Ciências Exatas  
Programa de Pós-Graduação em Física

André Luiz Lara Moreira

**CODIFICAÇÃO DE DUAS IMAGENS NA FUNÇÃO DE ONDA DE UM FÓTON**

Belo Horizonte  
2019

André Luiz Lara Moreira

# **Codificação de duas imagens na função de onda de um fóton**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Pablo Lima Saldanha

Belo Horizonte

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

M838c Moreira, André Luiz Lara.  
Codificação de duas imagens na função de onda de um fóton / André Luiz Lara Moreira. – 2019.  
58f., enc. : il.

Orientador: Pablo Lima Saldanha.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais,  
Departamento de Física.  
Bibliografia: f. 57-58.

1. Óptica quântica. 2. Conversão paramétrica descendente.  
3. Emaranhamento quântico.  
I. Título. II. Saldanha, Pablo Lima. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Física.

CDU – 535.14 (043)



Universidade Federal de Minas Gerais  
Instituto de Ciências Exatas  
Programa de Pós-Graduação em Física  
Caixa Postal 702  
30.123-970 Belo Horizonte - MG - Brasil

Telefone (xx) (31) 3499 5637  
(xx) (31) 3499 5633  
Fax (xx) (31) 3499 5688  
(xx) (31) 3499 5600  
e-mail pgfisica@fisica.ufmg.br

**ATA DA SESSÃO DE ARGUIÇÃO DA 630ª DISSERTAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA DEFENDIDA POR ANDRÉ LUIZ LARA MOREIRA**, orientado pelo professor Pablo Lima Saldanha para obtenção do grau de **MESTRE EM FÍSICA**. Às 09:00 horas de vinte e dois de outubro de 2019, na sala 4129 do Departamento de Física da UFMG, reuniu-se a Comissão Examinadora, composta pelos professores **Pablo Lima Saldanha** (Orientador - Departamento de Física/UFMG), **Raphael Campos Drumond** (Departamento de Matemática/UFMG) e **José Geraldo Peixoto de Faria** (Departamento de Matemática/ CEFET-MG) para dar cumprimento ao Artigo 37 do Regimento Geral da UFMG, submetendo o bacharel **ANDRÉ LUIZ LARA MOREIRA** à arguição de seu trabalho de dissertação, que recebeu o título de **“Codificação de duas imagens na função de onda de um fóton”**. Às 14:00 horas do mesmo dia o candidato fez uma exposição oral de seu trabalho durante aproximadamente 50 minutos. Após esta, os membros da comissão prosseguiram com a sua arguição e apresentaram seus pareceres individuais sobre o trabalho, concluindo pela aprovação do candidato.

Belo Horizonte, 22 de outubro de 2019.

Prof. Pablo Lima Saldanha  
Orientador do estudante  
Departamento de Física/UFMG

Prof. Raphael Campos Drumond  
Departamento de Matemática/UFMG

Prof. José Geraldo Peixoto de Faria  
Departamento de Matemática/CEFET-MG

Candidato *André Luiz Lara Moreira*

# Agradecimentos

Durante a elaboração desta dissertação, eu tive a felicidade de poder contar com o apoio de muitas pessoas queridas.

Minha gratidão está antes de tudo com meu paciente e compreensivo orientador, Pablo, cujo encorajamento foi fundamental para a conclusão deste trabalho. Ela também é devida aos colegas do EnLight — tanto os que ficaram em BH quanto os que se juntaram à diáspora —, cujo trabalho excelente sempre foi uma fonte de inspiração para mim.

Agradeço aos maravilhosos professores que eu tive o prazer de conhecer desde a graduação, e que foram tão importantes para a minha formação como físico e como pessoa. Também agradeço aos funcionários do DF, sobretudo da biblioteca e da secretaria, sempre zelosos com o corpo discente.

Sou especialmente grato aos amigos do departamento e ao pessoal do PRISMA. Sem a gentileza e o companheirismo de vocês, eu não teria conseguido chegar até aqui. Agradeço com carinho especial à Ana, à Anna, à Bel, ao Lucas, ao Marcello, ao Rodolfo, à Stela e ao Tadeu, por toda a força verdadeira que me deram.

Também sou profundamente grato a meus pais (todos os quatro), meus irmãos e toda a minha família, pelo incansável suporte e pelo amor abundante (e recíproco).

Por fim, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.



# Resumo

Neste trabalho propomos um experimento de óptica quântica para codificar a informação de dois objetos bidimensionais na função de onda de um fóton. O método proposto usa a conversão paramétrica descendente da luz de um *laser* para gerar pares de fótons emaranhados. Um dos objetos será colocado no feixe de bombeio, cujo espectro angular é transferido para os fótons convertidos, no caminho de um dos quais será colocado o segundo objeto. Mediante a detecção desse fóton, e dependendo da escolha de lente do experimentalista, o perfil da intensidade do outro fóton no plano de detecção corresponderá à imagem de um ou do outro objeto.

**Palavras-chave:** Óptica quântica, conversão paramétrica descendente, emaranhamento quântico, imageamento quântico.



# Abstract

In this work we propose a quantum optics experiment to encode the information about two two-dimensional objects into the wavefunction of a photon. The method we propose uses parametric downconversion of laser light in order to generate pairs of entangled photons. One of the objects is to be placed along the pump beam, its angular spectrum being transferred to the down-converted photons. The second object is placed along the path taken by one of the photons. Upon detection of that photon, and depending on the experimentalist's choice of lens, the intensity profile on the detection plane of the other photon will match that of one object or the other.

**Keywords:** Quantum optics, parametric downconversion, quantum entanglement, quantum imaging.



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>TÓPICOS EM ÓPTICA CLÁSSICA: DIFRAÇÃO E LENTES FINAS</b> . .	<b>15</b>
<b>2.1</b>	<b>Equação de Helmholtz</b> . . . . .	<b>15</b>
<b>2.2</b>	<b>Difração</b> . . . . .	<b>16</b>
2.2.1	Teorema integral de Helmholtz e Kirchhoff . . . . .	17
2.2.2	Difração por uma tela plana . . . . .	19
2.2.3	Formulação de Rayleigh–Sommerfeld . . . . .	20
2.2.4	Aproximação de Fresnel . . . . .	21
<b>2.3</b>	<b>Espectro angular</b> . . . . .	<b>23</b>
<b>2.4</b>	<b>Lentes finas</b> . . . . .	<b>24</b>
2.4.1	Formação de imagem . . . . .	27
2.4.2	Formação de espectro angular . . . . .	31
<b>3</b>	<b>NOÇÕES DE ÓPTICA QUÂNTICA</b> . . . . .	<b>33</b>
<b>3.1</b>	<b>Quantização do campo eletromagnético</b> . . . . .	<b>33</b>
3.1.1	Expansão em ondas planas . . . . .	33
3.1.2	Quantização canônica . . . . .	34
<b>3.2</b>	<b>Nota sobre fotodeteccção</b> . . . . .	<b>35</b>
<b>3.3</b>	<b>Conversão paramétrica descendente</b> . . . . .	<b>36</b>
<b>3.4</b>	<b>Imageamento quântico</b> . . . . .	<b>41</b>
<b>4</b>	<b>PROPOSTA EXPERIMENTAL</b> . . . . .	<b>45</b>
<b>4.1</b>	<b>Montagem</b> . . . . .	<b>45</b>
<b>4.2</b>	<b>Cálculos das obtenções de imagens</b> . . . . .	<b>47</b>
4.2.1	Situação A . . . . .	48
4.2.2	Situação B . . . . .	50
<b>4.3</b>	<b>Simulação</b> . . . . .	<b>52</b>
<b>4.4</b>	<b>Discussão</b> . . . . .	<b>53</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b> . . . . .	<b>57</b>
	<b>Bibliografia</b> . . . . .	<b>59</b>



# 1 Introdução

Dentre os diversos elementos da natureza que já foram contemplados pelas escolas de pensamento ocidentais, talvez a luz tenha sido um dos mais obscuros, a julgar pela grande quantidade e variedade de compreensões que a história oferece. Matéria sutil ou átomos de fogo, segundo duas filosofias védicas na Índia antiga; “formas” que entravam nos olhos ou raios emitidos por eles, divergiam os ensinamentos de Aristóteles e de Ptolomeu; onda ou partícula, discordariam Huygens e Newton.

Os mistérios da luz foram responsáveis pelas duas grandes revoluções pelas quais a física passou no Século XX. Das deficiências do modelo do éter luminífero surgiu a relatividade restrita, que imediatamente instigaria a relatividade geral. Por sua vez, das surpresas do espectro emitido por corpos negros despontou o que mais tarde se tornaria a mecânica quântica, cujas aparentes lições deixariam Huygens e Newton igualmente frustrados.

Nem plenamente onda nem inteiramente partícula, a luz (assim como a matéria) comporta-se de maneira que não pode ser completamente descrita por nenhuma dessas noções clássicas. Embora exiba propriedades tipicamente ondulatórias, como interferência e difração, descobriu-se que a luz é absorvida por átomos em quantidades discretas, à moda de partículas clássicas.

A mecânica quântica, ao contrário da clássica, dá conta desse aparente conflito. Ao fazê-lo, cria novas possibilidades, algumas das mais célebres sendo o princípio da superposição generalizado (antes inédito para a matéria) e a consequente possibilidade de interferência, a fundamental indistinguibilidade entre partículas da mesma natureza, e as correlações excepcionalmente fortes permitidas pelo emaranhamento quântico.

Várias áreas do conhecimento se beneficiaram das descobertas da mecânica quântica, desde a medicina e a ciência de materiais até a computação e a criptografia. Particularmente, em décadas recentes a teoria quântica da informação desenvolveu-se grandemente e com extenso suporte experimental, encontrando maneiras mais eficientes de codificar, transmitir e processar informação [1].

Um dos méritos mais famosos dessa área é o teleporte quântico, por meio do qual uma parte consegue efetivamente transmitir um *bit* quântico (ou *qubit*) de informação a outra parte mediante o envio de dois *bits* clássicos, desde que as partes compartilhem um sistema quântico emaranhado no começo do processo [2]. O reverso desse procedimento, chamado de *superdense coding* (“codificação superdensa”, em tradução livre), pode ser de particular interesse para a comunicação de grandes quantidades de dados, uma vez que o envio de um único *qubit* permite a comunicação de dois *bits* clássicos [1, 3].

O emaranhamento necessário para esses dois protocolos, no entanto, pode ser atenuado ou até perdido por meio de decoerência [4], isto é, quando o sistema quântico perde coerência ao interagir com o ambiente. Por esse motivo, a capacidade de produzir emaranhamento e mantê-lo é de grande importância para a aplicação de alguns efeitos quânticos e para investigações continuadas dos fundamentos da teoria quântica.

A luz fornece essa capacidade. Ao interagir com ambientes transparentes, como o ar, ela é pouco sensível à decoerência. Entretanto, essa mesma propriedade torna difícil fazer com que dois (ou mais) fótons interajam entre si para criarem emaranhamento. Felizmente, foram desenvolvidas outras maneiras de se criarem fótons emaranhados. Uma das mais prolificamente empregadas é a conversão paramétrica descendente, em que um fóton de bombeio interage com um meio não linear para produzir um par de fótons emaranhados.

Além de facilitar a realização de protocolos de informação quântica, a luz emaranhada também pode ser empregada em técnicas mais eficientes de imageamento. Um dos destaques nessa nova área de pesquisa é o chamado *ghost imaging* (“imageamento fantasma”, em tradução livre) [5–8]. Nesse protocolo, um dos fótons emaranhados interage com o objeto a ser imageado, mas é detectado sem nenhuma resolução. Por sua vez, o outro fóton do par é detectado com resolução, mas jamais interage com o objeto. Somente comparando os padrões de detecção de ambos é que se consegue obter uma imagem do objeto.

Neste trabalho, propomos um experimento inspirado por *ghost imaging* [8] e por *superdense coding* [3]: usando a conversão paramétrica descendente de uma luz que interage com um objeto, sugere-se enviar um dos fótons emaranhados resultantes a um outro objeto e em seguida a um detector *sem* resolução espacial, de modo a preparar o outro fóton num estado que contenha as informações de *ambos* os objetos. Em seguida, pode-se realizar sobre esse fóton ou uma medição que revele um dos objetos, ou uma que revele o outro, ambas exigindo um detector *com* resolução espacial.

No Capítulo 2, revemos alguns conceitos de óptica clássica que são necessários para o desenvolvimento da teoria por trás da proposta experimental — especificamente, para a formação de imagens e de espectros angulares. No Capítulo 3, por sua vez, revemos os conceitos necessários de óptica quântica, e também entramos em mais detalhes sobre *ghost imaging* e outras técnicas de imageamento quântico. No Capítulo 4, apresentamos a proposta experimental e discutimos sua viabilidade. Por fim, no Capítulo 5, apresentamos nossas conclusões.

## 2 Tópicos em óptica clássica: difração e lentes finas

Neste capítulo, abordaremos algumas técnicas originalmente introduzidas no contexto da óptica clássica, mas que não obstante serão aplicáveis à quântica. Primeiro, usaremos a equação de Helmholtz para substituir uma componente do campo elétrico ou magnético por um fasor — uma função complexa mais conveniente de se manipular matematicamente. Depois, demonstraremos o princípio de Huygens–Fresnel para a difração luminosa, que nos permitirá calcular a evolução do campo eletromagnético pelo espaço livre. Em seguida, definiremos o conceito de espectro angular e fornecemos sua interpretação física. Finalmente, calcularemos o efeito de uma lente fina sobre o campo de luz no regime de pequenos ângulos, mostrando como ela pode ser usada no processo de formação de imagem ou de espectro angular.

### 2.1 Equação de Helmholtz

Fundamentais ao estudo do comportamento luminoso são as *equações de Maxwell*, reproduzidas abaixo na presença de cargas e correntes:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \left( \mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right), \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}, \quad (2.4)$$

sendo  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  os campos elétrico e magnético (dependentes da posição e do tempo),  $\mu$  e  $\epsilon$  a permeabilidade e a permissividade do meio, considerado linear, e  $\rho$  e  $\mathbf{J}$  as densidades volumétricas de carga e corrente livres, respectivamente. Se  $\mu$  e  $\epsilon$  forem constantes, podemos empregar a identidade vetorial

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}, \quad (2.5)$$

válida para qualquer campo vetorial  $\mathbf{F}$ , para calcular os rotacionais das equações (2.1) e (2.2). Fazendo isso, obtém-se que:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho + \mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}, \quad (2.6)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu \nabla \times \mathbf{J}, \quad (2.7)$$

$$(2.8)$$

em que  $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$  é a velocidade de propagação do campo eletromagnético pelo meio.

Na ausência de cargas e correntes livres, podemos denotar por  $c$  a velocidade da luz no vácuo e definir o índice de refração  $n = c/v$  para escrever a *equação (escalar) de onda*:

$$\nabla^2 u - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (2.9)$$

em que  $u$  é uma componente qualquer de  $\mathbf{E}$  ou de  $\mathbf{B}$ . Ademais, se a onda for monocromática, a solução da equação de onda é da forma:

$$u(x, y, z, t) = A(x, y, z) \cos(2\pi\nu t - \phi(x, y, z)), \quad (2.10)$$

em que a amplitude  $A$  e a fase  $\phi$  são funções reais da posição  $(x, y, z)$  e  $\nu$  é a frequência de oscilação.

Seja uma função complexa  $U$  (às vezes chamada de *fasor*) da posição tal que

$$U(x, y, z) = A(x, y, z) e^{i\phi(x, y, z)}. \quad (2.11)$$

Então, é fácil verificar a relação:

$$u(x, y, z, t) = \text{Re}\{U(x, y, z) e^{-2\pi i \nu t}\}. \quad (2.12)$$

Dessa forma, segue imediatamente da equação de onda (2.9) para a componente  $u$  que o fasor  $U$  deve obedecer à *equação de Helmholtz*:

$$(\nabla^2 + k^2)U = 0, \quad (2.13)$$

em que  $k = 2\pi\nu n/c$  é o chamado *número de onda*. Equivalentemente, sendo  $\lambda = c/(n\nu)$  o comprimento de onda, expressamos  $k = 2\pi/\lambda$ .

## 2.2 Difração

Muito antes de James Clerk Maxwell ter publicado em 1865 que a luz era uma forma de radiação eletromagnética, já havia propostas para uma teoria ondulatória da luz [9, 10]. Em 1678, Christiaan Huygens deu um passo primordial nessa área ao propor que cada ponto numa frente de onda luminosa atuava como uma fonte secundária de ondas, de modo que o “envelope” de todas as ondas secundárias forma a frente de onda que observamos [11]. No entanto, outro pioneiro da física teórica, Isaac Newton, desenvolvia a teoria corpuscular da luz, e seu grande prestígio influenciou a comunidade física a favorecê-la em detrimento da explicação ondulatória [9].

Em 1818, 15 anos depois do experimento de fenda dupla de Young, Augustin-Jean Fresnel parte da proposta de Huygens e calcula padrões de difração com grande precisão, embora tenha empregado hipóteses um tanto arbitrárias sobre as amplitudes e as fases das

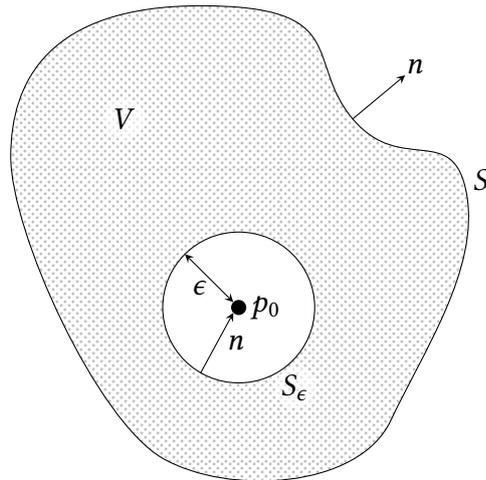


Figura 1 – O valor do campo óptico no ponto de observação  $p_0$  relaciona-se com a superfície  $S$  de acordo com a equação (2.23).

fontes secundárias [9]. Apenas em 1882, depois que a teoria ondulatória da luz destituíra a corpuscular, foi demonstrado que as hipóteses de Fresnel eram, na verdade, consequências lógicas da natureza ondulatória da luz. Esse trabalho foi feito por Gustav Kirchhoff, que assumiu duas condições de contorno para a luz incidente na superfície de um obstáculo.

Suas condições, contudo, eram mutuamente inconsistentes. Em 1894, Arnold Sommerfeld modificou a teoria de Kirchhoff de modo a eliminar essa inconsistência, originando a assim chamada *teoria de difração de Rayleigh–Sommerfeld* e concluindo o trabalho de mais de 200 anos começado por Huygens [9].

Embora a formulação de Kirchhoff forneça resultados que concordem bem com a maioria dos experimentos, a versão de Sommerfeld é mais internamente consistente. Por esse motivo, começaremos com a teoria de Kirchhoff, abandoná-la-emos ao identificarmos sua inconsistência, e continuaremos com a modificação de Sommerfeld.

### 2.2.1 Teorema integral de Helmholtz e Kirchhoff

Kirchhoff invoca suas condições inconsistentes ao tentar resolver uma expressão que relaciona o valor do campo óptico num ponto de observação aos valores que ele e sua derivada normal assumem numa superfície que cerca esse ponto. Essa expressão fora encontrada independentemente por Hermann von Helmholtz, e recebe o nome dos dois cientistas [9].

Para chegarmos até ela, denote  $p_0$  o ponto de observação, envolto por uma superfície bidimensional  $S$ . Para evitar descontinuidades, consideremos uma casca esférica  $S_\epsilon$ , de raio  $\epsilon$  e centrada em  $p_0$ . Assim, como se vê pela Figura 1, a borda do volume  $V$  entre as duas superfícies é a união das duas superfícies fechadas  $S$  e  $S_\epsilon$ :

$$S' = S \cup S_\epsilon, \quad (2.14)$$

em que o símbolo  $\cup$  denota a união de conjuntos.

Assim, sendo  $G$  uma função complexa da posição cujas primeira e segunda derivadas parciais sejam contínuas em  $S'$ , e sendo  $U$  a função expressa na equação (2.12), podemos invocar o teorema de Green:

$$\int_V d^3v (U \nabla^2 G - G \nabla^2 U) = \int_{S'} d^2s \left( U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right), \quad (2.15)$$

em que  $\partial/\partial n$  representa a derivada parcial na direção normal à superfície de integração. Se, ademais, a função  $G$  obedecer à equação de Helmholtz (2.13), então

$$\int_V d^3v (U \nabla^2 G - G \nabla^2 U) = - \int_V d^3v (UGk^2 - GUK^2) = 0. \quad (2.16)$$

Logo, por causa de (2.14),

$$\int_S d^2s \left( U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) + \int_{S_\epsilon} d^2s \left( U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) = 0. \quad (2.17)$$

Escolhamos, como Kirchhoff fez, uma função de Green  $G_K$  tal que, para todo ponto  $p_1$  na superfície  $S'$ ,

$$G_K(p_1) = \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}, \quad (2.18)$$

em que  $r_{01}$  denota a distância entre  $p_0$  e  $p_1$ . Fisicamente,  $G_K$  corresponde a uma onda esférica de amplitude unitária, gerada por uma fonte pontual localizada em  $p_0$ .

Agora, voltemos nossa atenção para a esfera  $S_\epsilon$ . Para um ponto  $p_\epsilon$  sobre ela, temos:

$$G_K(p_\epsilon) = \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} \Rightarrow \frac{\partial G_K(p_\epsilon)}{\partial n} = \left( \frac{1}{\epsilon} - ik \right) \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon}, \quad (2.19)$$

uma vez que o vetor normal de  $S_\epsilon$  aponta para dentro. Fazendo seu raio tender a zero, o segundo termo da relação (2.17) entre  $S$  e  $S_\epsilon$  torna-se:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} d^2s \left( U \frac{\partial G_K}{\partial n} - G_K \frac{\partial U}{\partial n} \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 4\pi\epsilon^2 \left[ U(p_0) \left( \frac{1}{\epsilon} - ik \right) \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} - \frac{e^{ik\epsilon}}{\epsilon} \frac{\partial U(p_0)}{\partial n} \right] \quad (2.20)$$

$$= 4\pi \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ U(p_0) e^{ik\epsilon} - \epsilon e^{ik\epsilon} \left( ikU(p_0) + \frac{\partial U(p_0)}{\partial n} \right) \right] \quad (2.21)$$

$$= 4\pi U(p_0). \quad (2.22)$$

Com esse resultado, podemos reescrever a relação (2.17) no formato conhecido como *teorema integral de Helmholtz e Kirchhoff*:

$$U(p_0) = \frac{1}{4\pi} \int_S d^2s \left( G_K \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G_K}{\partial n} \right). \quad (2.23)$$

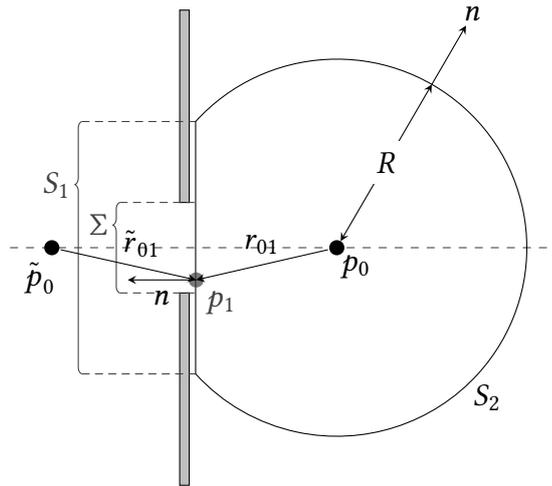


Figura 2 – Difração por tela plana. O valor do campo óptico no ponto de observação relaciona-se com a região  $\Sigma$  de acordo com o princípio de Huygens–Fresnel, conforme expresso na equação (2.33).

### 2.2.2 Difração por uma tela plana

A partir desta seção, desejamos nos especializar num caso particular da situação geral da Figura 1: a difração por um objeto bidimensional com variação de amplitude e fase, situado numa tela plana e opaca, como ilustrado na Figura 2. Nela, consideramos que a iluminação monocromática incide sobre a tela à esquerda, estando o ponto de observação  $p_0$  à sua direita. A superfície fechada  $S$  escolhida consiste na união de duas outras: um disco  $S_1$ , diretamente atrás da tela e concêntrico ao objeto, e a calota esférica  $S_2$  de raio  $R$  e centrada em  $p_0$ .

Segundo o teorema integral de Helmholtz e Kirchhoff (2.23), o valor do campo óptico no ponto de observação,  $U(p_0)$ , depende dos valores que  $U$  e  $\partial U/\partial n$  assumem na superfície  $S = S_1 \cup S_2$  inteira. No entanto, sendo a área  $\Sigma$  do objeto a única região potencialmente não opaca da tela, nossa intuição sugere que essa região é a única que deveria contribuir para  $U(p_0)$ , porque toda a luz que alcança  $p_0$  passa apenas por ela, e não por  $S_2$  nem pelo resto de  $S_1$ . É exatamente isto que desejamos demonstrar nesta e na próxima subseções: que a única região de  $S$  que contribuirá para o teorema integral de Helmholtz e Kirchhoff será a área  $\Sigma$  atrás do objeto.

Nesta subseção, mostraremos que a contribuição de  $S_2$  é nula. Para todo ponto  $p_2 \in S_2$ , temos:

$$G_K(p_2) = \frac{e^{ikR}}{R} \Rightarrow \frac{\partial G_K(p_2)}{\partial n} = \left( ik - \frac{1}{R} \right) \frac{e^{ikR}}{R}, \quad (2.24)$$

uma vez que o vetor normal de  $S_2$  aponta para fora. Quando o raio  $R$  for muito grande, o primeiro termo dentro dos parênteses será dominante, de modo que, nesse regime,

$$\frac{\partial G_K(p_2)}{\partial n} \approx ikG_K(p_2). \quad (2.25)$$

O termo relevante a  $S_2$  no teorema integral de Helmholtz e Kirchhoff (2.23), então, será:

$$\int_{S_2} d^2s \left( G_K \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G_K}{\partial n} \right) = \int_{\Omega} d\omega R^2 G_K \left( \frac{\partial U}{\partial n} - ikU \right) \quad (2.26)$$

$$= \int_{\Omega} d\omega R G_K \cdot R \left( \frac{\partial U}{\partial n} - ikU \right), \quad (2.27)$$

em que  $\Omega$  é o ângulo sólido subtendido por  $S_2$  em  $p_0$ . Uma vez que, em virtude da expressão (2.24),  $R G_K$  é uma quantidade uniformemente finita em  $S_2$ , a integral sobre essa superfície será nula contanto que o limite

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left( \frac{\partial U}{\partial n} - ikU \right) = 0 \quad (2.28)$$

seja uniformemente válido para todo ângulo sólido  $\omega$ . Essa é a *condição de radiação de Sommerfeld*, e é satisfeita se  $U$  divergir pelo menos tão rápido quanto uma onda esférica divergente.

Cumprida essa condição, restará apenas a contribuição de  $S_1$  para o teorema integral de Helmholtz e Kirchhoff:

$$U(p_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} d^2s \left( G_K \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G_K}{\partial n} \right). \quad (2.29)$$

### 2.2.3 Formulação de Rayleigh–Sommerfeld

Para restringir a contribuição de  $S_1$  à região  $\Sigma$ , Kirchhoff propõe as seguintes condições:

1. Para todo ponto  $p \in \Sigma$ , os valores  $U(p)$  e  $\partial U(p)/\partial n$  são exatamente os mesmos que seriam caso a tela opaca não existisse.
2. Para todo ponto  $p' \in S_1 \setminus \Sigma$ , temos  $U(p') = \partial U(p')/\partial n = 0$ .

Se ambas forem simultaneamente verdadeiras, então tanto  $U$  quanto  $\partial U/\partial n$  serão descontínuas na borda da região  $\Sigma$  (borda do objeto), o que é indesejável. Ignorando essa inconsistência matemática, a teoria de Kirchhoff pode ser continuada para fornecer resultados que concordam com muitas situações experimentais. No entanto, desejamos seguir com a correção de Sommerfeld, que remove essa inconsistência sem diminuir a acurácia.

Em vez de reduzir a integral na equação (2.29) de  $S_1$  para  $\Sigma$  manipulando o comportamento do campo  $U$ , Sommerfeld substitui a função de Green  $G_K$  por outra função de Green — uma que preserve o desenvolvimento até então feito, mas também tal que ela ou sua derivada normal seja nula sobre  $S_1$ .

Tomemos como nova função de Green aquela gerada pela superposição de  $G_K$  com a onda esférica de mesmo comprimento de onda, mas originada no ponto  $\tilde{p}_0$  (oposto a  $p_0$  através da tela) e com uma diferença de fase de  $\pi$  radianos. Num ponto  $p_1 \in S_1$ , ela é expressa como:

$$G_-(p_1) = \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} - \frac{e^{ik\tilde{r}_{01}}}{\tilde{r}_{01}}, \quad (2.30)$$

em que  $r_{01}$  e  $\tilde{r}_{01}$  denotam a distância entre  $p_1$  e  $p_0$  ou  $\tilde{p}_0$ , respectivamente. (Veja a Figura 2.)

Como  $G_-$  é nula para todo ponto  $p_1$  elemento de  $S_1 - e$ , particularmente, de  $\Sigma -$ , podemos modificar as condições de Kirchhoff de modo que se apliquem apenas a  $U$ , deixando  $\partial U/\partial n$  livre. Fazendo isso, eliminamos o problema da descontinuidade e podemos reescrever a equação (2.29):

$$U(p_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} d^2s U \frac{\partial G_-}{\partial n}. \quad (2.31)$$

Esse resultado é conhecido como *primeira solução de Rayleigh–Sommerfeld*.<sup>1</sup>

Calculando a derivada normal num ponto  $p_1 \in \Sigma$ ,

$$\frac{\partial G_-(p_1)}{\partial n} = 2 \cos(\theta) \left( ik - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}, \quad (2.32)$$

em que  $\theta$  denota o ângulo entre o vetor normal de  $\Sigma$  e o vetor que aponta de  $p_0$  até  $p_1$ . Se a distância  $r_{01}$  for muito maior do que o comprimento de onda  $\lambda$ , então o número de onda  $k$  será muito maior do que  $1/r_{01}$ , de modo que o primeiro termo dentro dos parênteses será dominante. Nesse caso, podemos combinar a expressão acima com a equação (2.31) para obter:

$$U(p_0) = \frac{1}{i\lambda} \int_{\Sigma} d^2s U(p_1) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} \cos(\theta). \quad (2.33)$$

Na expressão acima, reconhecemos o princípio de Huygens–Fresnel. A integral sobre  $\Sigma$  e as ondas esféricas divergentes  $e^{ikr_{01}}/r_{01}$  remontam ao “envelope” de ondas secundárias proposto por Huygens, as quais têm amplitudes  $U(p_1) \cos(\theta)/\lambda$  e fases  $1/i$ .

#### 2.2.4 Aproximação de Fresnel

Nesta subseção, vamos introduzir algumas simplificações. A primeira diz respeito à notação. Neste trabalho, teremos interesse no valor que o campo óptico  $U$  assume em diversos planos. Então, por conveniência, introduzimos a família de campos bidimensionais  $U_z$ , definida por:

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3: \quad U_z(x, y) = U(x, y, z). \quad (2.34)$$

Considere dois planos paralelos como os ilustrados pela Figura 3: um ocupado por uma tela opaca envolvendo um objeto, sobre a qual uma iluminação monocromática incide

<sup>1</sup> A *segunda solução* de Rayleigh–Sommerfeld é obtida usando uma terceira função de Green,  $G_+$ , que difere de  $G_-$  ao estipular que as duas ondas esféricas que a compõem oscilam *em fase*, e não com uma diferença de  $\pi$  radianos. Em vez de nos permitir restringir as condições de Kirchhoff apenas a  $U$ ,  $G_+$  permite-nos restringi-las apenas a  $\partial U/\partial n$ , deixando  $U$  livre e novamente removendo a descontinuidade. Ambas as soluções são, portanto, correções igualmente satisfatórias. Escolhemos trabalhar com a primeira meramente por convenção.

Essas expressões também são conhecidas na literatura como as *fórmulas de difração de Rayleigh do primeiro e segundo tipos*, respectivamente, em referência à derivação feita por Lorde Rayleigh em 1897 [12].

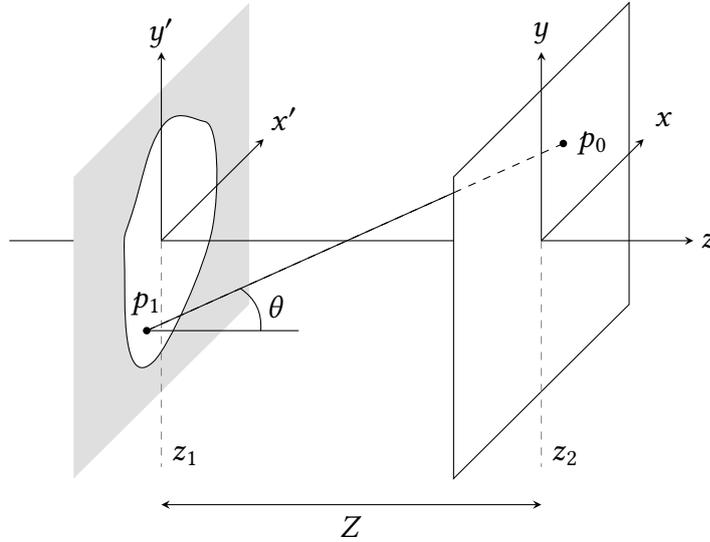


Figura 3 – A evolução do campo luminoso entre os dois planos é dada pela equação (2.39).

à esquerda, e o outro, à direita, sendo o plano de observação. Sejam  $(x', y')$  as coordenadas do plano da tela, e  $(x, y)$  as do plano de observação. Finalmente, esteja a direção  $z$  orientada horizontalmente da esquerda para a direita, e tomemos que o plano da tela encontra-se em  $z = z_1$ , e o de observação, em  $z = z_2$ , sendo a diferença  $Z = z_2 - z_1$ .

Ao invocarmos o princípio de Huygens–Fresnel para essa situação, notamos que o ângulo  $\theta$  entre o vetor normal da tela e o vetor que aponta de  $p_0 = (x, y, z_2)$  até  $p_1 = (x', y', z_1)$  é tal que  $\cos(\theta) = Z/r_{01}$ , permitindo-nos reescrever o princípio (2.33) desta forma:

$$U_{z_2}(x, y) = \frac{Z}{i\lambda} \iint_{\Sigma} dx' dy' U_{z_1}(x', y') \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}^2}. \quad (2.35)$$

Note-se que, sendo  $U_{z_1}(x', y') = 0$  fora de  $\Sigma$ , a integração pode ser tomada sobre  $\mathbb{R}^2$  sem alteração do resultado.

A segunda é uma aproximação sobre a distância  $r_{01}$ . Nas coordenadas introduzidas, ela se expressa como:

$$\begin{aligned} r_{01} &= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + Z^2} \\ &= Z \sqrt{1 + \left(\frac{x - x'}{Z}\right)^2 + \left(\frac{y - y'}{Z}\right)^2} \\ &= Z \sqrt{1 + \zeta}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

em que  $\zeta = [(x - x')^2 + (y - y')^2]/Z^2$ . A série de Taylor de  $\sqrt{1 + \zeta}$  em torno de  $\zeta = 0$  é:

$$\sqrt{1 + \zeta} = 1 + \frac{\zeta}{2} - \frac{\zeta^2}{8} + \dots \quad (2.37)$$

Assumindo que  $\zeta \ll 1$ , podemos manter apenas os dois primeiros termos da expansão acima, e escrever:

$$r_{01} \approx Z \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x-x'}{Z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{y-y'}{Z} \right)^2 \right]. \quad (2.38)$$

Como no denominador da forma (2.35) a distância está elevada ao quadrado, tomaremos apenas o primeiro termo na expansão acima como uma aproximação razoável. Contudo, no expoente da mesma equação, a distância está multiplicada pelo número de onda — que, na faixa visível do espectro luminoso, é muito grande (ordem de  $10^7 \text{ m}^{-1}$ ) —, manteremos os dois primeiros termos da série de Taylor no expoente.

Essa aplicação criteriosa da aproximação (2.38) é conhecida como *aproximação de Fresnel*. Quando combinada com a equação (2.35), resulta na forma

$$U_{z_2}(x, y) = \frac{e^{ikZ}}{i\lambda Z} \iint_{\mathbb{R}^2} dx' dy' U_{z_1}(x', y') e^{(ik/2Z)[(x-x')^2+(y-y')^2]}, \quad (2.39)$$

ou, mais compactamente,

$$U_{z_1+Z} = U_{z_1} * h_Z, \quad (2.40)$$

em que  $*$  denota a operação de convolução,<sup>2</sup> e  $h_Z$  é a *resposta ao impulso de Fresnel*, dada por:

$$h_Z(x, y) = \frac{e^{ikZ}}{i\lambda Z} e^{(ik/2Z)(x^2+y^2)}. \quad (2.41)$$

Essa definição será utilizada nas Subseções 2.4.1 e 2.4.2.

## 2.3 Espectro angular

O espectro angular é uma ferramenta muito poderosa para o estudo de campos em meios homogêneos, e todos os resultados da seção anterior podem ser reobtidos usando essa técnica [9]. Indo um pouco além, uma consideração matematicamente detalhada do fenômeno de propagação luminosa a partir do espectro angular pode ser encontrada na referência [12]. Nesta seção, contudo, limitamo-nos a defini-lo e a fornecer a sua interpretação física.

Considere, novamente, que uma onda monocromática propaga-se na direção  $z$ , atravessando um plano em  $z = 0$ . Mantendo a notação introduzida pela família (2.34), o fasor do campo óptico nesse plano é representado por  $U_0$ . Para resolver o problema da propagação desse campo, o método da representação em espectro angular consiste em expandir  $U_0$  em uma base de ondas planas, calcular suas evoluções espaciais separadamente, e depois recombina-las a uma distância especificada.

<sup>2</sup> A convolução entre duas funções  $f$  e  $g$  é denotada por  $f * g$ , e definida por:

$$(f * g)(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} dx' dy' f(x', y') g(x - x', y - y').$$

Essa expansão será, essencialmente, a *transformada de Fourier*. Neste trabalho, adotaremos a convenção segundo a qual a transformada de Fourier da função  $U_0$ , denotada por  $\tilde{U}_0$ , é dada por:

$$\tilde{U}_0(q_x, q_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} dx dy U_0(x, y) e^{-2\pi i(q_x x + q_y y)}. \quad (2.42)$$

Podemos inverter a relação acima, escrevendo  $U_0$  como a transformada inversa de Fourier de  $\tilde{U}_0$ :

$$U_0(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} dq_x dq_y \tilde{U}_0(q_x, q_y) e^{2\pi i(q_x x + q_y y)}, \quad (2.43)$$

em que o sinal do expoente é trocado.

Para compreender o significado físico do integrando acima, consideremos uma onda plana propagando-se com vetor de onda  $\mathbf{k} = (2\pi/\lambda)(\alpha\hat{\mathbf{x}} + \beta\hat{\mathbf{y}} + \gamma\hat{\mathbf{z}})$ , sendo  $\hat{\mathbf{x}}$ ,  $\hat{\mathbf{y}}$  e  $\hat{\mathbf{z}}$  os vetores unitários do sistema de coordenadas em que estamos trabalhando, e  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  os cossenos diretores.<sup>3</sup> Sendo a posição  $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ , a fase será  $\phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ . Lembrando-nos da definição (2.11) e assumindo amplitude unitária, o fasor dessa onda plana será:

$$U(x, y, z) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = e^{(2\pi i/\lambda)(\alpha x + \beta y)} e^{(2\pi i/\lambda)\gamma z}. \quad (2.44)$$

Comparando a expressão acima com o integrando da transformada inversa de Fourier (2.43), notamos que, caso  $z = 0$ , a função  $e^{2\pi i(q_x x + q_y y)}$  pode ser entendida como representando o fasor de uma onda plana unitária com cossenos diretores  $\alpha = \lambda q_x$ ,  $\beta = \lambda q_y$  e  $\gamma = \sqrt{1 - \lambda^2(q_x^2 + q_y^2)}$ , e o fasor  $U_0$ , como uma combinação linear de tais ondas planas. O coeficiente dessa expansão,  $\tilde{U}_0$ , recebe o nome de *espectro angular* de  $U$ .<sup>4</sup>

A transformada de Fourier tem muitas características úteis. Desejamos salientar que ela obedece ao *teorema da convolução*: se  $\tilde{U}$  e  $\tilde{h}$  são as transformadas de Fourier de duas funções  $U$  e  $h$ , e se  $F = U * h$ , então

$$\tilde{F} = \tilde{U}\tilde{g}. \quad (2.45)$$

## 2.4 Lentes finas

Todo o desenvolvimento anterior foi feito considerando propagação por um meio com índice de refração constante. Esse não é o caso na maioria dos experimentos de óptica, que incluem lentes (frequentemente de vidro) no caminho da luz. Nesta seção corrigimos essa omissão e apresentamos o efeito que uma lente esférica tem sobre o campo luminoso. Consideraremos apenas lentes *finas* — isto é, tais que os raios de luz emergem da face posterior

<sup>3</sup> Cossenos dos ângulos que o vetor  $\mathbf{k}$  faz com os eixos coordenados. No caso,  $\alpha$  é o cosseno diretor relativo ao eixo  $x$ ,  $\beta$  ao eixo  $y$ , e  $\gamma$  ao eixo  $z$ . Por serem cossenos, obedecem à relação  $\gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}$ .

<sup>4</sup> Note que se  $|\mathbf{k}|$  for fixo (por exemplo, com a aproximação monocromática), então o vetor  $\mathbf{q} = q_x\hat{\mathbf{x}} + q_y\hat{\mathbf{y}}$  determina um *ângulo*.

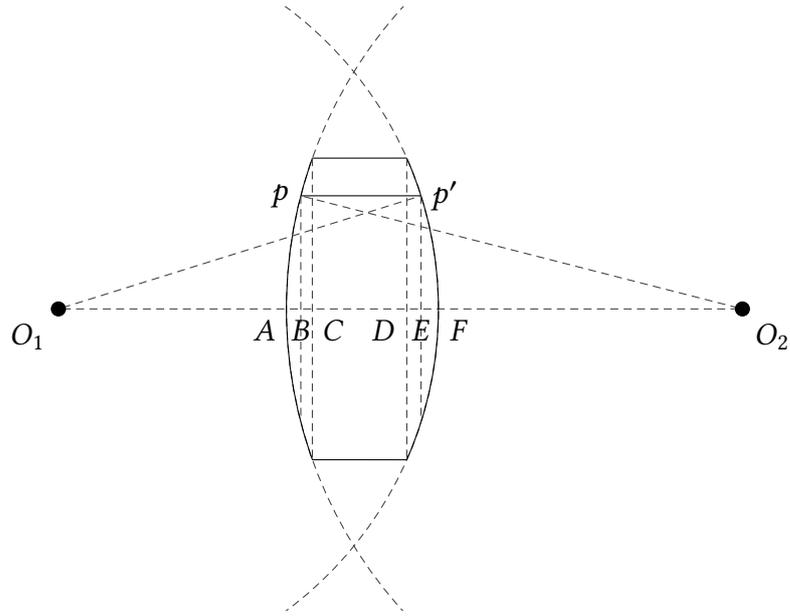


Figura 4 – Ilustração esquemática de uma lente fina. A transformação de fase associada a ela é dada pela equação (2.57)

da lente num ponto com coordenadas aproximadamente iguais às do ponto de incidência na face anterior. Isso implica que o efeito de uma lente fina é apenas de “atrasar” cada raio luminoso, alterando sua fase por uma quantidade proporcional à distância percorrida dentro da lente. Sendo o campo luminoso que incide na lente denotado por  $U_\ell$ , e o campo transmitido por ela denotado por  $U'_\ell$ , o efeito da lente será uma transformação  $t_\ell$  tal que:

$$U'_\ell(x, y) = t_\ell(x, y)U_\ell(x, y) \quad (2.46)$$

para todo ponto  $(x, y)$  no plano da lente, sendo que  $|t_\ell(x, y)| = 1$ .

A Figura 4 esquematiza uma lente biconvexa genérica. A curvatura de uma face não necessariamente iguala a da outra. A grossura máxima da lente será denotada  $\Delta_0$ , e corresponde ao segmento  $\overline{AF}$  da figura. O ponto  $O_1$  é o centro de curvatura do lado direito (posterior) da lente, e  $O_2$ , do esquerdo (anterior).

A distância percorrida dentro da lente por um raio que incide num ponto  $p = (x, y)$  e emerge no ponto  $p'$  de mesmas coordenadas será denotada por  $\Delta(x, y)$ . Assim, a mudança de fase sofrida pela onda ao passar de  $p$  a  $p'$  é igual a  $kn\Delta(x, y)$ , sendo  $n$  o índice de refração da lente. Pelo mesmo raciocínio, a mudança de fase sofrida na região de espaço livre ao redor da lente na mesma altura de  $(x, y)$  será  $k[\Delta_0 - \Delta(x, y)]$ . O efeito total da lente, portanto, pode ser expresso pela seguinte transformação de fase:

$$\begin{aligned} t_\ell(x, y) &= e^{ikn\Delta(x, y) + ik[\Delta_0 - \Delta(x, y)]} \\ &= e^{ik\Delta_0} e^{ik(n-1)\Delta(x, y)}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Resta-nos encontrar uma maneira de expressar a distância  $\Delta(x, y)$  em termos das propriedades geométricas da lente. Por conveniência, dividamos a lente em três partes: a

primeira tendo como superfície a calota esférica que corresponde à face esquerda, de largura máxima  $\Delta_{01} = \overline{AC}$ ; a segunda correspondendo à região de espessura  $\Delta_{02} = \overline{CD}$ ; e a terceira sendo o volume subentendido pela face direita, com largura máxima  $\Delta_{03} = \overline{DF}$ . Note que  $\Delta_{01} + \Delta_{02} + \Delta_{03} = \Delta_0$ , naturalmente.

No diagrama da Figura 4, a distância  $\Delta(x, y)$  corresponde ao segmento de reta  $\overline{pp'}$ , que é congruente com  $\overline{BE}$ . Noutras palavras,

$$\Delta(x, y) = \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE}. \quad (2.48)$$

Considerando a primeira parte da lente, notamos que  $\overline{AB} = \overline{AO_2} - \overline{BO_2}$ . Ora,  $\overline{BO_2}$  é a base do triângulo retângulo  $pBO_2$ , pelo que seu comprimento pode ser obtido pelo teorema de Pitágoras:

$$\overline{BO_2}^2 + \overline{pB}^2 = \overline{pO_2}^2. \quad (2.49)$$

Ambos os segmentos  $\overline{pO_2}$  e  $\overline{AO_2}$  correspondem ao raio de curvatura  $R_e$  da face esquerda. Como o comprimento de  $\overline{pB}$  nada mais é do que  $\sqrt{x^2 + y^2}$ , temos:

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= R_e - \sqrt{R_e^2 - x^2 - y^2} \\ &= R_e \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_e^2}} \right), \end{aligned} \quad (2.50)$$

logo

$$\begin{aligned} \overline{BC} &= \overline{AC} - \overline{AB} \\ &= \Delta_{01} - R_e \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_e^2}} \right). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Aplicando o mesmo raciocínio à terceira parte da lente, encontramos:

$$\overline{DE} = \overline{DF} - \overline{EF} \quad (2.52)$$

$$= \Delta_{03} + R_d \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_d^2}} \right), \quad (2.53)$$

em que, por convenção, tomamos o raio de curvatura  $R_d$  da face direita como sendo negativo. Portanto,

$$\Delta(x, y) = \Delta_0 - R_e \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_e^2}} \right) + R_d \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_d^2}} \right). \quad (2.54)$$

Se considerarmos que as normais das frentes de onda do campo luminoso são todas raios paraxiais — isto é, raios que jazem a pequenos ângulos com o eixo óptico  $O_1O_2$  —, a expressão acima pode ser simplificada. De fato, se os raios de curvaturas forem muito maiores

do que a distância  $\sqrt{x^2 + y^2}$ , podemos aplicar o mesmo raciocínio por trás da expressão (2.37) e expandir as raízes de (2.54) em série de Taylor, mantendo apenas os dois primeiros termos. Essa *aproximação paraxial* resulta em:

$$\Delta(x, y) = \Delta_0 - \frac{x^2 + y^2}{2} \left( \frac{1}{R_e} - \frac{1}{R_d} \right). \quad (2.55)$$

Definindo a distância focal  $f$  por meio de

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_e} - \frac{1}{R_d} \right), \quad (2.56)$$

podemos usar a forma (2.55) para reescrever a transformação (2.47):

$$t_\ell(x, y) = e^{ikn\Delta_0} e^{-(ik/2f)(x^2+y^2)}. \quad (2.57)$$

### 2.4.1 Formação de imagem

Lentes finas podem ser usadas para formar imagens de objetos. Para entender como, considere que um campo luminoso (monocromático, com comprimento e número de onda representados por  $\lambda$  e  $k$ , respectivamente) propaga-se por uma distância  $d_1$  através do espaço livre, atravessa uma lente fina (com distância focal  $f$ ), e depois continua em propagação livre por uma distância  $d_2$ . Essa situação está esquematizada na Figura 5.

Consideremos que o eixo  $z$  coincide com o eixo óptico da lente, tal que o plano do objeto esteja localizado em  $z = 0$ , e o de observação, em  $z = d_1 + d_2$ . Os campos bidimensionais de interesse, entre aqueles da família apresentada na equação (2.34), são  $U_0$  no plano do objeto,  $U_\ell$  incidindo sobre a lente,  $U'_\ell$  transmitido pela lente, e  $U_{d_1+d_2}$  incidindo sobre o plano de observação. Doravante, usaremos a notação  $\boldsymbol{\rho} = (x, y)$ , por brevidade.

De acordo com a teoria desenvolvida na Seção 2.2, a propagação pelo espaço livre corresponde a uma convolução com a resposta ao impulso de Fresnel. Isso significa que  $U_{d_1+d_2} = U'_\ell * h_{d_2}$ , com  $h_d$  definida pela equação (2.41). Por sua vez, segundo a Seção 2.4,  $U'_\ell = t_\ell U_\ell$ , com  $t_\ell$  dada pela equação (2.57). Finalmente,  $U_\ell = U_0 * h_{d_1}$ . Assim, sendo o vetor bidimensional  $\boldsymbol{\rho}$  um elemento do plano de observação, podemos combinar essas relações e escrever:

$$U_{d_1+d_2}(\boldsymbol{\rho}) = \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{\rho}_\ell U'_\ell(\boldsymbol{\rho}_\ell) h_{d_2}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_\ell) \quad (2.58)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{\rho}_\ell t_\ell(\boldsymbol{\rho}_\ell) U_\ell(\boldsymbol{\rho}_\ell) h_{d_2}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_\ell) \quad (2.59)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{\rho}_\ell t_\ell(\boldsymbol{\rho}_\ell) \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{\rho}_0 U_0(\boldsymbol{\rho}_0) h_{d_1}(\boldsymbol{\rho}_\ell - \boldsymbol{\rho}_0) h_{d_2}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_\ell) \quad (2.60)$$

$$\propto \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{\rho}_\ell \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f} \right) \boldsymbol{\rho}_\ell \cdot \boldsymbol{\rho}_\ell \right] \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{\rho}_0 U_0(\boldsymbol{\rho}_0) \quad (2.61)$$

$$\times \exp \left[ \frac{i\pi}{\lambda d_1} \boldsymbol{\rho}_0 \cdot \boldsymbol{\rho}_0 \right] \exp \left[ -\frac{2\pi i}{\lambda} \left( \frac{\boldsymbol{\rho}_0}{d_1} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{d_2} \right) \cdot \boldsymbol{\rho}_\ell \right],$$

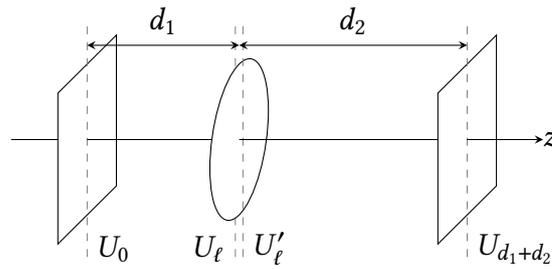


Figura 5 – Ilustração esquemática de um sistema óptico simples. Se as distâncias obedecerem à lei dos pontos conjugados (2.62), então o sistema projetará sobre o plano de observação (direita) a imagem do objeto (localizado no plano da esquerda). Se  $d_2 = f$ , então o sistema projetará sobre o plano de observação o espectro angular do objeto.

em que omitimos um termo  $e^{(i\pi/\lambda d_2)\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho}}$  e outros termos de fase.<sup>5</sup>

Se não fosse pelos termos quadráticos em  $\boldsymbol{\rho}_\ell$  e  $\boldsymbol{\rho}_0$ , a expressão acima seria parecida com uma transformada de Fourier. Em geral, a presença de tais termos de fase quadráticos levará a perda de nitidez. Portanto, no processo de formação de imagem, esses termos devem ser eliminados.

Primeiro, vamos lidar com o termo quadrático em  $\boldsymbol{\rho}_\ell$ . Ele só será nulo se a seguinte condição, chamada de *lei dos pontos conjugados*, for observada:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f} = 0. \quad (2.62)$$

Caso as distâncias  $d_1$  e  $d_2$  e a distância focal  $f$  não obedeçam a relação acima, não ocorre formação perfeita de imagem.

Agora, tratemos do termo quadrático em  $\boldsymbol{\rho}_0$ . Tradicionalmente [13], postula-se que uma imagem nítida requiera uma correspondência de um para um entre os pontos do plano do objeto e os do plano da imagem. Levando em conta uma possível magnificação  $M$ , definida como  $M = -d_2/d_1$ , essa correspondência idealmente garantiria a possibilidade de substituir  $\boldsymbol{\rho}_0$  por  $\boldsymbol{\rho}/M$  no termo quadrático, o qual poderia ser imediatamente descartado pelo mesmo motivo pelo qual já descartamos o termo quadrático em  $\boldsymbol{\rho}$ .

No entanto, se levado ao seu extremo, esse raciocínio permitiria a substituição  $\boldsymbol{\rho}_0 \mapsto \boldsymbol{\rho}/M$  em qualquer termo, não apenas no termo quadrático em consideração. Desejamos, portanto, encontrar as mínimas condições que permitam essa substituição no termo  $\exp\left[\frac{i\pi}{\lambda d_1}\boldsymbol{\rho}_0 \cdot \boldsymbol{\rho}_0\right]$  mas que não necessariamente a justifiquem nos demais, ou, em outras palavras, procuramos identificar quais condições nos permitem substituir  $\boldsymbol{\rho}_0$  por uma constante no termo de fase.

<sup>5</sup> Sendo a intensidade luminosa  $I(\boldsymbol{\rho}) = |U(\boldsymbol{\rho})|^2$ , esses termos se cancelarão. Para aplicações que não estão interessadas apenas na intensidade, contudo, esses termos em geral não devem ser omitidos.

Para fazer isso, comecemos reescrevendo a equação (2.61) (já assumindo a lei (2.62) dos pontos conjugados), mas agora trocando a ordem das integrais:

$$U_{d_1+d_2}(\boldsymbol{\rho}) \propto \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{\rho}_0 U_0(\boldsymbol{\rho}_0) \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda d_1} \boldsymbol{\rho}_0 \cdot \boldsymbol{\rho}_0\right] \times \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{\rho}_\ell \exp\left[-\frac{2\pi i}{\lambda} \left(\frac{\boldsymbol{\rho}_0}{d_1} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{d_2}\right) \cdot \boldsymbol{\rho}_\ell\right] \quad (2.63)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{\rho}_0 U_0(\boldsymbol{\rho}_0) h(\boldsymbol{\rho}; \boldsymbol{\rho}_0), \quad (2.64)$$

em que a resposta ao impulso  $h$  é dada por:

$$h(\boldsymbol{\rho}; \boldsymbol{\rho}_0) = \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda d_1} \boldsymbol{\rho}_0 \cdot \boldsymbol{\rho}_0\right] \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{\rho}_\ell P(\boldsymbol{\rho}_\ell) \exp\left[-\frac{2\pi i}{\lambda} \left(\frac{\boldsymbol{\rho}_0}{d_1} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{d_2}\right) \cdot \boldsymbol{\rho}_\ell\right]. \quad (2.65)$$

Na equação acima, incluímos um termo que havíamos deixado de lado até então: a *função pupilar*  $P(\boldsymbol{\rho}_\ell)$ , em que  $\boldsymbol{\rho}_\ell$  é um ponto no plano da lente. Ela representa a finitude do tamanho da lente. Por exemplo, se o raio da lente esférica for  $R$ , então

$$P(\boldsymbol{\rho}_\ell) = \text{circ}\left(\frac{|\boldsymbol{\rho}_\ell|}{R}\right) = \begin{cases} 1, & \text{se } |\boldsymbol{\rho}_\ell| < R, \\ \frac{1}{2}, & \text{se } |\boldsymbol{\rho}_\ell| = R, \\ 0, & \text{se } |\boldsymbol{\rho}_\ell| > R. \end{cases} \quad (2.66)$$

Havíamos omitido a função pupilar até o momento porque sempre assumimos que a seção reta dos feixes de luz considerados estava completamente contida dentro da área da lente, mas ela será útil na discussão que se segue.

Para podermos substituir o termo de fase quadrática  $\exp\left[\frac{i\pi}{\lambda d_1} \boldsymbol{\rho}_0 \cdot \boldsymbol{\rho}_0\right]$  por um fator de fase constante que possa ser omitido, precisamos: (i) estabelecer a região no plano do objeto dentro da qual a fase  $\frac{i\pi}{\lambda d_1} \boldsymbol{\rho}_0 \cdot \boldsymbol{\rho}_0$  é praticamente constante, (ii) estabelecer a região no plano do objeto que mais contribui para a formação de imagem, e (iii) verificar se essa está inclusa naquela.

(i) A primeira região é determinada pelo raio  $r_0$  sobre o qual a fase em questão difere de seu valor na origem por apenas um radiano, ou seja,

$$\frac{\pi r_0^2}{\lambda d_1} = \pi \quad \Rightarrow \quad r_0 = \sqrt{\lambda d_1}. \quad (2.67)$$

Assim, o termo quadrático em  $\boldsymbol{\rho}_0$  variará pouco dentro da região  $|\boldsymbol{\rho}_0| < r_0$ .

(ii) Para determinar a segunda região, consideremos que o ponto de observação está sobre o eixo de propagação:  $\boldsymbol{\rho} = (0, 0)$ . Assim,

$$h(\boldsymbol{\rho}_0) = \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda d_1} \boldsymbol{\rho}_0 \cdot \boldsymbol{\rho}_0\right] \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{\rho}_\ell \text{circ}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_\ell}{R}\right) \exp\left[-\frac{2\pi i}{\lambda d_1} \boldsymbol{\rho}_0 \cdot \boldsymbol{\rho}_\ell\right] \quad (2.68)$$

$$= 2 \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda d_1} \boldsymbol{\rho}_0 \cdot \boldsymbol{\rho}_0\right] \frac{J_1(2\pi R \rho_0 / \lambda d_1)}{2\pi R \rho_0 / \lambda d_1}, \quad (2.69)$$

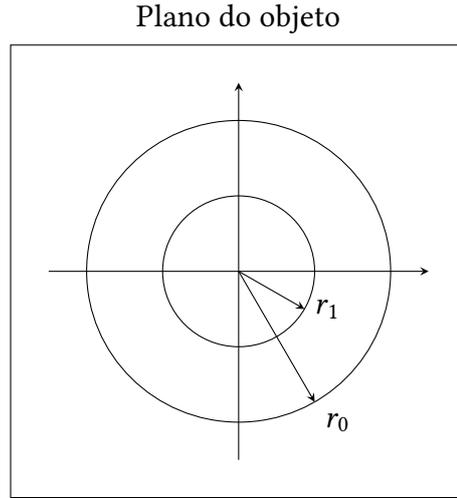


Figura 6 – Representação do plano do objeto. Na região interior a  $r_0 = \sqrt{\lambda d_1}$ , o termo de fase quadrática  $\exp\left[\frac{i\pi}{\lambda d_1} \boldsymbol{\rho}_0 \cdot \boldsymbol{\rho}_0\right]$  que aparece na equação (2.61) não varia apreciavelmente. Na porção do plano interior a  $r_1 = 0,61 \lambda d_1 / R$ , a resposta ao impulso  $h$  fornece a maior contribuição para a formação da imagem do objeto. Tem-se que  $r_0 > r_1$  contanto que o raio  $R$  da lente exceda  $0,61 \sqrt{\lambda d_1}$ .

em que  $\rho_0 = |\boldsymbol{\rho}_0|$ , e  $J_1$  é a função de Bessel de primeiro tipo e de ordem 1, definida por

$$J_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\tau \cos(\tau - x \sin \tau). \quad (2.70)$$

A primeira raiz da equação (2.70) encontra-se em  $\rho_0 = r_1$ , com [9]

$$r_1 \approx 0,61 \frac{\lambda d_1}{R}, \quad (2.71)$$

e, para  $\rho_0 > r_1$ ,  $h(\boldsymbol{\rho}_0)$  assume valores muito pequenos. Portanto, a região no plano do objeto que mais contribui para a formação de imagem corresponde a  $|\boldsymbol{\rho}_0| < r_1$ .

(iii) Agora precisamos garantir que  $\exp\left[\frac{i\pi}{\lambda d_1} \boldsymbol{\rho}_0 \cdot \boldsymbol{\rho}_0\right]$  não varie significativamente sobre a região do plano do objeto em que a resposta ao impulso  $h$  tem valores apreciáveis. Isto é, precisamos impor que essa região, delimitada pelo raio  $r_1$  dado pela equação (2.71), esteja inteiramente contida naquela delimitada pelo raio  $r_0$  dado pela equação (2.67):

$$r_1 < r_0 \quad \Rightarrow \quad R > 0,61 \sqrt{\lambda d_1}. \quad (2.72)$$

Logo, contanto que o raio da lente exceda  $0,61 \sqrt{\lambda d_1}$ , asseguramos que o termo quadrático em  $\boldsymbol{\rho}_0$  pode ser eliminado. Na situação experimental que proporemos no Capítulo 4, teremos  $\lambda$  da ordem de centenas de nanômetros e  $d_1$  da ordem de metros ou menor, enquanto as lentes comumente usadas para aquele tipo de experimento têm raios da ordem de centímetros, confirmando a desigualdade (2.72).

Essas considerações, aliadas à equação (2.62) dos pontos conjugados, permitem-nos descartar os termos quadráticos da expressão (2.61), que fica simplificada:

$$U_{d_1+d_2}(\boldsymbol{\rho}) \propto \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{\rho}_\ell \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{\rho}_0 U_0(\boldsymbol{\rho}_0) \exp\left[-\frac{2\pi i}{\lambda} \left(\frac{\boldsymbol{\rho}_0}{d_1} + \frac{\boldsymbol{\rho}}{d_2}\right) \cdot \boldsymbol{\rho}_\ell\right] \quad (2.73)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{\rho}_0 U_0(\boldsymbol{\rho}_0) \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{\rho}_\ell \exp\left[i\boldsymbol{\rho}_\ell \cdot \left(-\frac{2\pi}{\lambda d_1}\right) \left(\boldsymbol{\rho}_0 - \frac{1}{M}\boldsymbol{\rho}\right)\right] \quad (2.74)$$

$$\propto \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{\rho}_0 U_0(\boldsymbol{\rho}_0) \delta(\boldsymbol{\rho}_0 - \boldsymbol{\rho}/M) \quad (2.75)$$

$$= U_0(\boldsymbol{\rho}/M), \quad (2.76)$$

indicando a formação de uma imagem perfeita. Em particular, se  $d_1 = d_2$ , temos  $M = -1$  e  $U_{d_1+d_2}(\boldsymbol{\rho}) = U_0(-\boldsymbol{\rho})$ , representando uma inversão sem alteração do tamanho. Nesse caso, as duas distâncias são iguais a  $2f$ , por causa da lei dos pontos conjugados (2.62).

### 2.4.2 Formação de espectro angular

Lentes finas também podem ser usadas para realizar transformadas de Fourier bidimensionais – ou, em outras palavras, formar espectros angulares de objetos. Considere uma situação semelhante à considerada na subseção anterior, mas desta vez com  $d_2 = f$ , isto é, com o plano de observação sendo o plano focal (posterior). Então, a continuação da equação (2.59) é:

$$U_{d_1+f}(\boldsymbol{\rho}) = \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{\rho}_\ell t_\ell(\boldsymbol{\rho}_\ell) U_\ell(\boldsymbol{\rho}_\ell) h_f(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_\ell) \quad (2.77)$$

$$\propto \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{\rho}_\ell U_\ell(\boldsymbol{\rho}_\ell) e^{-2\pi i (\boldsymbol{\rho}/\lambda f) \cdot \boldsymbol{\rho}_\ell} \quad (2.78)$$

$$= \tilde{U}_\ell(\boldsymbol{\rho}/\lambda f), \quad (2.79)$$

em que novamente omitimos alguns termos de fase absoluta.

De acordo com o teorema da convolução (2.45),  $\tilde{U}_\ell = \tilde{U}_0 \tilde{h}_f$ , em que a transformada de Fourier da resposta ao impulso de Fresnel é dada por:

$$\tilde{h}_f(x, y) = e^{ikf} e^{-i\pi\lambda d(x^2+y^2)}. \quad (2.80)$$

Como os termos de  $\tilde{h}_f$  se cancelarão durante o cálculo da intensidade, ficamos com:

$$U_{d_1+f}(\boldsymbol{\rho}) \propto \tilde{U}_0(\boldsymbol{\rho}/\lambda f). \quad (2.81)$$



## 3 Noções de óptica quântica

Embora a descrição clássica do campo eletromagnético seja suficiente para a descrição de uma grande variedade de fenômenos ópticos, ela deixa a desejar em algumas situações que envolvem intensidades luminosas muito baixas. Surge a necessidade de tratar o campo eletromagnético quanticamente. Neste capítulo, abordaremos os rudimentos da óptica quântica, descrevendo o procedimento de quantização do campo eletromagnético. Depois, descreveremos um dos vários fenômenos cuja descrição necessita desse procedimento: a conversão paramétrica descendente. Finalmente, apresentaremos uma breve revisão da área de imageamento quântico.

### 3.1 Quantização do campo eletromagnético

Seguiremos o procedimento usualmente adotado em livros-texto [12], consistindo na reescrita do potencial vetorial clássico de uma maneira mais adequada à linguagem da mecânica quântica — variáveis canônicas —, seguida pela passagem de variáveis canônicas a operadores canônicos.

#### 3.1.1 Expansão em ondas planas

Relembrando a terceira equação de Maxwell (2.3),  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . Logo deve haver algum campo vetorial  $\mathbf{A}$  tal que  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ . Assim, na ausência de correntes, podemos combinar a identidade vetorial (2.5) e a equação (2.2) para adquirirmos:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (3.1)$$

Similarmente, (2.1) torna-se:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{A})}{\partial t} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (3.2)$$

Adotando o calibre de Coulomb, segundo o qual  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , os resultados acima implicam:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0, \quad (3.3)$$

que é a mesma relação obedecida por  $u$  em (2.9). Ao contrário de lá, aqui desejamos escrever a expansão em componentes de onda plana em detalhes:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0^{1/2} (2\pi)^{3/2}} \sum_{\sigma} \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{k} \left[ c(\mathbf{k}, \sigma) \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \sigma) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t)} \right] + \text{c.c.} \quad (3.4)$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0^{1/2} (2\pi)^{3/2}} \sum_{\sigma} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \left[ u(\mathbf{k}, \sigma, t) \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \sigma) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right] + \text{c.c.} \quad (3.5)$$

Essa expansão consiste em uma combinação linear de ondas planas  $e^{\pm i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega(\mathbf{k})t)}$  viajando ao longo da direção  $\mathbf{k}$ . Elas têm polarização  $\sigma$ , que é somada sobre duas direções ortogonais à direção de propagação e entre si. O vetor unitário  $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \sigma)$  é o vetor de polarização associado a essas ondas, e os termos  $c(\mathbf{k}, \sigma)$  são os coeficientes da combinação linear. Usamos “c.c.” para indicar o conjugado complexo e definimos  $u(\mathbf{k}, \sigma, t) = c(\mathbf{k}, \sigma)e^{-i\omega(\mathbf{k})t}$  por conveniência. (Note que  $c(\mathbf{k}, \sigma) = u(\mathbf{k}, \sigma, 0)$ .)

Definamos o par de variáveis canônicas reais  $(q(\mathbf{k}, \sigma), p(\mathbf{k}, \sigma))$ :

$$q(\mathbf{k}, \sigma, t) = u(\mathbf{k}, \sigma, t) + u^*(\mathbf{k}, \sigma, t), \quad (3.6)$$

$$p(\mathbf{k}, \sigma, t) = -i\omega(\mathbf{k}) (u(\mathbf{k}, \sigma, t) - u^*(\mathbf{k}, \sigma, t)). \quad (3.7)$$

Invertendo as relações acima, encontramos:

$$u(\mathbf{k}, \sigma, t) = \frac{1}{2} \left( q(\mathbf{k}, \sigma, t) + \frac{i}{\omega(\mathbf{k})} p(\mathbf{k}, \sigma, t) \right), \quad (3.8)$$

o que nos permite reescrever o potencial vetorial como:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\epsilon_0^{1/2}(2\pi)^{3/2}} \sum_{\sigma} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \left[ \left( q(\mathbf{k}, \sigma, t) + \frac{i}{\omega(\mathbf{k})} p(\mathbf{k}, \sigma, t) \right) \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \sigma) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right] + \text{c.c.} \quad (3.9)$$

### 3.1.2 Quantização canônica

Agora, lidaremos com a quantização do campo propriamente dita. O papel que as variáveis dinâmicas como  $q$  e  $p$  desempenham na mecânica clássica é, na quântica, desempenhado por operadores sobre o espaço de Hilbert do sistema. Por isso, vamos substituí-las pelos operadores hermitianos  $Q$  e  $P$ , que obedecem às seguintes relações de comutação:

$$[Q(\mathbf{k}, \sigma, t), Q(\mathbf{k}', \sigma', t)] = 0, \quad (3.10)$$

$$[P(\mathbf{k}, \sigma, t), P(\mathbf{k}', \sigma', t)] = 0, \quad (3.11)$$

$$[Q(\mathbf{k}, \sigma, t), P(\mathbf{k}', \sigma', t)] = i\hbar \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\sigma, \sigma'}. \quad (3.12)$$

Será mais conveniente trabalhar com o operador não hermitiano de aniquilação,

$$\mathbf{a}(\mathbf{k}, \sigma, t) = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega(\mathbf{k})}} \left( \omega(\mathbf{k}) Q(\mathbf{k}, \sigma, t) + iP(\mathbf{k}, \sigma, t) \right), \quad (3.13)$$

e seu conjugado hermitiano  $\mathbf{a}^\dagger(\mathbf{k}, \sigma, t)$ , o operador de criação. Manipulando a relação acima e seu conjugado hermitiano, encontramos:

$$Q(\mathbf{k}, \sigma, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega(\mathbf{k})}} \left( \mathbf{a}(\mathbf{k}, \sigma, t) + \mathbf{a}^\dagger(\mathbf{k}, \sigma, t) \right), \quad (3.14)$$

$$P(\mathbf{k}, \sigma, t) = -i \sqrt{\frac{\hbar\omega(\mathbf{k})}{2}} \left( \mathbf{a}(\mathbf{k}, \sigma, t) - \mathbf{a}^\dagger(\mathbf{k}, \sigma, t) \right). \quad (3.15)$$

Notamos uma semelhança entre as equações (3.6) e (3.7) e os termos entre parênteses em (3.14) e (3.15). Substituindo aqueles por esses na forma (3.9) para o potencial vetorial clássico, encontramos uma expressão para o *operador de potencial vetorial quântico*:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega(\mathbf{k})}} \left( \mathbf{a}(\mathbf{k}, \sigma, t) \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \sigma) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right) + \text{c.h.}, \quad (3.16)$$

em que “c.h.” indica o conjugado hermitiano da expressão imediatamente anterior. Levando a comparação entre  $\mathbf{a}(\mathbf{k}, \sigma, t)$  e  $U(\mathbf{k}, \sigma, t)$  adiante, assumiremos que  $\mathbf{a}(\mathbf{k}, \sigma, t) = \mathbf{a}(\mathbf{k}, \sigma, 0)e^{-i\omega(\mathbf{k})t}$ . Logo,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega(\mathbf{k})}} \left( \mathbf{a}(\mathbf{k}, \sigma, 0) \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \sigma) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega(\mathbf{k})t)} \right) + \text{c.h.} \quad (3.17)$$

Partindo da expressão (3.17) para o operador de potencial vetorial quântico, definimos o *operador de campo elétrico* em semelhança à relação (3.2):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \sqrt{\frac{\hbar\omega(\mathbf{k})}{2\epsilon_0}} \left( i \mathbf{a}(\mathbf{k}, \sigma, 0) \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \sigma) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega(\mathbf{k})t)} \right) + \text{c.h.} \quad (3.18)$$

Chamando  $\mathbf{a}(\mathbf{k}, \sigma, 0)$  simplesmente de  $\mathbf{a}(\mathbf{k}, \sigma)$ , chamaremos de  $\mathbf{E}^{(+)}$  a *parte de frequências positivas* da equação (3.18):

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} i \sqrt{\frac{\hbar\omega(\mathbf{k})}{2\epsilon_0}} \mathbf{a}(\mathbf{k}, \sigma) \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \sigma) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega(\mathbf{k})t)}, \quad (3.19)$$

enquanto a *parte de frequências negativas*  $\mathbf{E}^{(-)}$  corresponderá ao seu conjugado hermitiano.

Podemos fazer duas simplificações. Sendo o vetor de onda  $\mathbf{k} = k_x\hat{\mathbf{x}} + k_y\hat{\mathbf{y}} + k_z\hat{\mathbf{z}}$ , definimos  $\mathbf{q} = k_x\hat{\mathbf{x}} + k_y\hat{\mathbf{y}}$ , de modo que  $k_z = \sqrt{k^2 - q^2}$ . Para campos monocromáticos, isso nos permite transformar a integral tripla em  $d\mathbf{k}$  numa integral dupla em  $d\mathbf{q}$ . Similarmente, sendo a posição  $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ , definimos  $\boldsymbol{\rho} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$ . Ademais, em situações em que a polarização e o instante de tempo não são de interesse, podemos ignorar  $\sigma$  e  $t$  na forma (3.19) e reescrevê-la:

$$\mathbf{E}^{(+)}(\boldsymbol{\rho}, z) \propto \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q} \mathbf{a}(\mathbf{q}) e^{i(\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho} + \sqrt{k^2 - q^2}z)}. \quad (3.20)$$

## 3.2 Nota sobre fotodetecção

O operador de aniquilação, definido na equação (3.13), atua sobre o espaço de momento:  $\mathbf{a}(\mathbf{k}, \sigma, t)$  aniquila um fóton com polarização  $\sigma$  e momento  $\mathbf{k}$  no instante  $t$ . Por sua vez, a parte de frequências positivas  $\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$  do operador de campo elétrico, sendo definida pela equação (3.19) como uma combinação linear apenas de operadores de aniquilação, pode ser entendida como a versão do operador de aniquilação no espaço de configuração, absorvendo

um fóton no instante  $t$  e numa região em torno do ponto espacial  $\mathbf{r}$ , desde que essa região tenha dimensões maiores do que o comprimento de onda do fóton [12]. Desejamos calcular a probabilidade de essa absorção ocorrer.

Para esse fim, denotamos o estado inicial do campo eletromagnético por  $|\psi_1\rangle$  e o estado do mesmo campo após a absorção por  $|\psi_2\rangle$ . Então, a probabilidade de absorção fotônica em torno do ponto  $\mathbf{r}$  e no instante  $t$  será proporcional a  $|\langle\psi_2|\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)|\psi_1\rangle|^2$  [12, 14]. Se desejarmos saber a probabilidade de fotodetecção independentemente do estado final  $|\psi_2\rangle$ , então devemos somar essa probabilidade sobre um conjunto completo de estados finais que o campo pode assumir. Após algumas manipulações algébricas, essa soma simplifica-se, e a probabilidade de absorção fotônica em  $(\mathbf{r}, t)$  expressa-se concisamente:

$$P_1(\mathbf{r}, t) \propto \langle\psi_1|\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}, t)\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}, t)|\psi_1\rangle. \quad (3.21)$$

A expressão (3.21) pode ser facilmente generalizada para a situação em que acontece mais de uma absorção. Por exemplo, para duas fotodetecções, uma em  $(\mathbf{r}_1, t_1)$  e outra em  $(\mathbf{r}_2, t_2)$ , teremos

$$P_2(\mathbf{r}_1, t_1, \mathbf{r}_2, t_2) \propto \langle\psi_1|\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1)\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r}_2, t_2)\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2)\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1)|\psi_1\rangle. \quad (3.22)$$

### 3.3 Conversão paramétrica descendente

Um exemplo de processo físico em que o campo eletromagnético precisa ser descrito quanticamente é o de *conversão paramétrica descendente espontânea* (CPDE). Nele, o campo eletromagnético interage com um cristal birrefringente de maneira não linear, produzindo pares de fótons emaranhados.

A CPDE pode ser descrita como um fenômeno de espalhamento [15]. Classicamente, ao interagir com um campo eletromagnético, um meio transparente adquire um momento de dipolo elétrico. Se o campo for uma onda, então esse momento de dipolo induzido será oscilante, e sua oscilação produzirá ela mesma uma onda eletromagnética. O campo total, portanto, será a superposição da onda incidente com a onda gerada pelo momento de dipolo induzido.

O meio espalhador pode responder ao campo incidente de maneira linear ou não linear. No primeiro caso, o momento de dipolo elétrico induzido é proporcional ao campo elétrico incidente. No segundo, sua forma será um pouco mais complicada. Por exemplo, se a resposta for quadrática, ele conterà a soma dos termos de forma  $E_i E_j$ , em que  $i$  e  $j$  correspondem às componentes do campo. Assim, além de  $E^2 = E_x^2 + E_y^2 + E_z^2$ , aparecerão termos cruzados, como  $E_x E_y$ .

No primeiro caso, se o campo incidente for constituído por apenas um fóton, existe uma amplitude de probabilidade de ele não interagir com o meio e uma amplitude de probabilidade de ele ser instantaneamente absorvido e reemitido por ele. Para se calcular a função de onda do

fóton espalhado, essas duas amplitudes de probabilidade devem ser somadas coerentemente. Uma possível interpretação do processo de absorção e reemissão instantânea do fóton é que a sua absorção induz no objeto um momento de dipolo oscilante, o qual cria o fóton espalhado.

Por sua vez, no caso não linear mencionado, as oscilações que criam o fóton espalhado são induzidas pela absorção de *dois fótons*, não de um. Esse fenômeno é chamado de *geração de segundo harmônico*. A CPDE é o seu oposto — a absorção de um fóton e emissão de dois — e é possibilitada pela simetria do fenômeno [15].

Por motivos históricos, os fótons gêmeos assim gerados são chamados de *signal* e *idler*.

Classicamente, a  $i$ -ésima componente da polarização elétrica de um meio óptico não linear e não centrossimétrico, até a segunda ordem no campo elétrico, é [16–18]:

$$P_i(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_0^\infty dt' \chi_{ij}^{(1)}(t') E_j(\mathbf{r}, t - t') + \int_0^\infty dt' \int_0^\infty dt'' \chi_{ijk}^{(2)}(t', t'') E_j(\mathbf{r}, t - t') E_k(\mathbf{r}, t - t''), \quad (3.23)$$

em que se assume a soma sobre índices repetidos (notação de Einstein). As grandezas  $\chi^{(1)}$  e  $\chi^{(2)}$  são os tensores de susceptibilidade de primeira e de segunda ordens, e  $E_i$  é a  $i$ -ésima componente do campo elétrico  $\mathbf{E}$ .

Essa polarização se acoplará com o campo elétrico segundo a hamiltoniana clássica:

$$\mathcal{H}(t) = \frac{1}{2} \int_V d\mathbf{r} [\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)], \quad (3.24)$$

em que  $V$  é o volume do meio óptico,  $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  é o vetor de deslocamento,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  é o campo magnético e  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = [\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)/\mu_0] - \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$ , sendo  $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$  a magnetização.

Combinando as equações (3.23) e (3.24), podemos reescrever a hamiltoniana de modo a separar a parte não linear das demais. Ela fica sendo

$$\mathcal{H}_{\text{nl}}(t) = \frac{1}{2} \int_V d\mathbf{r} \int_0^\infty dt' \int_0^\infty dt'' \chi_{ijk}^{(2)}(t', t'') E_i(\mathbf{r}, t) E_j(\mathbf{r}, t - t') E_k(\mathbf{r}, t - t''). \quad (3.25)$$

Substituindo os termos de campo elétrico da equação (3.25) por operadores quânticos de campo elétrico segundo a equação (3.18), obtemos o hamiltoniano quântico da interação

não linear:

$$H_{\text{nl}}(t) = \frac{1}{2} \int_V d\mathbf{r} \int_0^\infty dt' \int_0^\infty dt'' \chi_{ijk}^{(2)}(t', t'') \times \quad (3.26)$$

$$\times \left[ (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma_s} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}_s \epsilon_i^*(\mathbf{k}_s, \sigma_s) g^*(\mathbf{k}_s, \sigma_s) \mathbf{a}^\dagger(\mathbf{k}_s, \sigma_s) e^{-i(\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r} - \omega_s(\mathbf{k}_s)t)} \right] \times$$

$$\times \left[ (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma_i} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}_i \epsilon_j^*(\mathbf{k}_i, \sigma_i) g^*(\mathbf{k}_i, \sigma_i) \mathbf{a}^\dagger(\mathbf{k}_i, \sigma_i) e^{-i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i(\mathbf{k}_i)t + \omega_i(\mathbf{k}_i)t')} \right] \times$$

$$\times \left[ (2\pi)^{-3/2} \sum_{\sigma_p} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}_p \epsilon_k(\mathbf{k}_p, \sigma_p) g(\mathbf{k}_p, \sigma_p) \mathbf{a}(\mathbf{k}_p, \sigma_p) e^{i(\mathbf{k}_p \cdot \mathbf{r} - \omega_p(\mathbf{k}_p)t + \omega_p(\mathbf{k}_p)t'')} \right] + \text{c.h.}$$

$$= \frac{(2\pi)^{-9/2}}{2} \sum_{\sigma_s} \sum_{\sigma_i} \sum_{\sigma_p} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}_s \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}_i \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}_p g^*(\mathbf{k}_s, \sigma_s) g^*(\mathbf{k}_i, \sigma_i) g(\mathbf{k}_p, \sigma_p) \times \quad (3.27)$$

$$\times \mathbf{a}^\dagger(\mathbf{k}_s, \sigma_s) \mathbf{a}^\dagger(\mathbf{k}_i, \sigma_i) \mathbf{a}(\mathbf{k}_p, \sigma_p) \epsilon_i^*(\mathbf{k}_s, \sigma_s) \epsilon_j^*(\mathbf{k}_i, \sigma_i) \epsilon_k(\mathbf{k}_p, \sigma_p) \times$$

$$\times \chi_{ijk} e^{i(\omega_s(\mathbf{k}_s) + \omega_i(\mathbf{k}_i) - \omega_p(\mathbf{k}_p))t} \int_V d\mathbf{r} e^{-i(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p) \cdot \mathbf{r}} + \text{c.h.}$$

Nas expressões acima, “s” refere-se a *signal*, “i” a *idler* e “p” ao campo incidente, conhecido como feixe de bombeio (do inglês, *pump beam*). As variáveis  $\sigma_s$ ,  $\sigma_i$  e  $\sigma_p$  são somadas sobre as direções de polarização ordinária e extraordinária do cristal. Os termos da forma  $\epsilon_i$  são a  $i$ -ésima componente do vetor unitário de polarização  $\epsilon$ . No último passo acima, substituímos o tensor de susceptibilidade de segunda ordem pelo termo

$$\chi_{ijk} = \int_0^\infty dt' \int_0^\infty dt'' \chi_{ijk}^{(2)}(t', t'') e^{-i(\omega_i(\mathbf{k}_i)t' - \omega_p(\mathbf{k}_p)t'')}, \quad (3.28)$$

e condensamos alguns outros termos na grandeza

$$g(\mathbf{k}_\alpha, \sigma_\alpha) = i \sqrt{\frac{\hbar \omega(\mathbf{k}_\alpha, \sigma_\alpha)}{2\epsilon_0 n^2(\mathbf{k}_\alpha, \sigma_\alpha)}}, \quad (3.29)$$

em que  $\alpha \in \{s, i, p\}$ .

Para encontrar o estado quântico  $|\psi\rangle$  do campo no instante de tempo  $t$ , usamos o hamiltoniano (3.27) na equação de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H_{\text{nl}}(t) |\psi(t)\rangle, \quad (3.30)$$

cujas solução geral é da forma

$$|\psi(t)\rangle = e^{(1/i\hbar) \int_0^t d\tau H_{\text{nl}}(\tau)} |\psi(0)\rangle, \quad (3.31)$$

em que consideramos que a interação é iniciada no instante  $t = 0$ . Para resolver a equação (3.31), expandimos a exponencial em série de potências e mantemos apenas os dois primeiros termos:

$$e^{(1/i\hbar) \int_0^t d\tau H_{\text{nl}}(\tau)} = 1 + \frac{1}{i\hbar} \left[ \int_0^t d\tau H_{\text{nl}}(\tau) \right] + \dots \quad (3.32)$$

O primeiro termo da expansão acima corresponde à possibilidade de o fóton de bombeio não sofrer conversão paramétrica.

Para resolvermos a expansão (3.32), precisamos da seguinte identidade:

$$\int_0^t d\tau e^{ia\tau} = t e^{iat/2} \operatorname{sinc}\left(\frac{at}{2}\right), \quad (3.33)$$

em que  $\operatorname{sinc}(x) = \operatorname{sen}(x)/x$ . Aplicando-a à integração temporal de (3.32) e à integração espacial de (3.27), ficamos com:

$$\begin{aligned} \int_0^t d\tau H_{\text{nl}}(\tau) &= \frac{(2\pi)^{-9/2}}{2} \sum_{\sigma_s} \sum_{\sigma_i} \sum_{\sigma_p} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}_s \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}_i \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}_p g^*(\mathbf{k}_s, \sigma_s) g^*(\mathbf{k}_i, \sigma_i) g(\mathbf{k}_p, \sigma_p) \times \\ &\times \mathbf{a}^\dagger(\mathbf{k}_s, \sigma_s) \mathbf{a}^\dagger(\mathbf{k}_i, \sigma_i) \mathbf{a}(\mathbf{k}_p, \sigma_p) \epsilon_i^*(\mathbf{k}_s, \sigma_s) \epsilon_j^*(\mathbf{k}_i, \sigma_i) \epsilon_k(\mathbf{k}_p, \sigma_p) \times \\ &\times \chi_{ijk} t e^{i(\omega_s(\mathbf{k}_s) + \omega_i(\mathbf{k}_i) - \omega_p(\mathbf{k}_p))t/2} \operatorname{sinc}((\omega_s(\mathbf{k}_s) + \omega_i(\mathbf{k}_i) - \omega_p(\mathbf{k}_p))t/2) \times \\ &\times \prod_{m=x}^z L_m e^{-i(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p)_m L_m/2} \operatorname{sinc}((\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p)_m L_m/2), \end{aligned} \quad (3.34)$$

em que  $L_m$  é o comprimento do cristal não linear na direção  $m \in \{x, y, z\}$ , seu volume sendo  $V = L_x L_y L_z$ . Com esse resultado, podemos reescrever a solução (3.31):

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= |\text{vác.}\rangle + \\ &+ \frac{Vt}{2i\hbar(2\pi)^{9/2}} \sum_{\sigma_s} \sum_{\sigma_i} \sum_{\sigma_p} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}_s \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}_i \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k}_p g^*(\mathbf{k}_s, \sigma_s) g^*(\mathbf{k}_i, \sigma_i) g(\mathbf{k}_p, \sigma_p) \times \\ &\times V_p(\mathbf{k}_p, \sigma_p) \chi_{ijk} \epsilon_i^*(\mathbf{k}_s, \sigma_s) \epsilon_j^*(\mathbf{k}_i, \sigma_i) \epsilon_k(\mathbf{k}_p, \sigma_p) \operatorname{sinc}((\omega_s(\mathbf{k}_s) + \omega_i(\mathbf{k}_i) - \omega_p(\mathbf{k}_p))t/2) \times \\ &\times e^{i(\omega_s(\mathbf{k}_s) + \omega_i(\mathbf{k}_i) - \omega_p(\mathbf{k}_p))t/2} \prod_{m=x}^z \operatorname{sinc}((\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p)_m L_m/2) e^{-i(\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i - \mathbf{k}_p)_m L_m/2} |1\rangle_{\mathbf{k}_s, \sigma_s} |1\rangle_{\mathbf{k}_i, \sigma_i}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

em que  $|1\rangle_{\mathbf{k}_\alpha, \sigma_\alpha}$  é o estado quântico de um fóton com momento  $\mathbf{k}_\alpha$  e polarização  $\sigma_\alpha$ . A função  $V_p$  representa a distribuição de amplitudes de vetores de onda do feixe de bombeio, e ela surge no lugar do operador de aniquilação para os modos desse feixe porque a intensidade dele é tão alta que podemos desprezar efeitos quânticos relativos a ele.

O primeiro termo da equação (3.35),  $|\text{vác.}\rangle$ , representa o vácuo e corresponde à possibilidade de não ocorrer conversão paramétrica. O segundo termo corresponde ao estado quântico dos fótons gêmeos. Somados, descrevem o estado quântico gerado num processo geral de CPDE.

A partir de agora, desejamos nos especializar no estado que será usado na proposta experimental do Capítulo 4. Em particular, as seguintes considerações se tornarão vigentes:

1. O tempo de interação  $t$  é suficientemente longo para que a contribuição do termo  $\operatorname{sinc}((\omega_s(\mathbf{k}_s) + \omega_i(\mathbf{k}_i) - \omega_p(\mathbf{k}_p))t/2)$  seja apreciável apenas quando  $\omega_s + \omega_i = \omega_p$ . Assim, esse termo e a exponencial que o segue serão ambos iguais à unidade. Para garantir

a validade desta aproximação, podemos impor que o *laser* usado para bombear o cristal não linear seja de potência moderada, tal que o intervalo de tempo entre duas conversões seja grande em comparação com a resolução temporal da detecção dos fótons gêmeos.

2. Se filtros de interferência de banda estreita forem colocados na frente dos detectores, então podemos considerar que  $\omega_s$ ,  $\omega_i$  e  $\omega_p$  sejam constantes. Especificamente, consideraremos que os filtros selecionam  $\omega_s = \omega_i = \omega_p/2$ .
3. Também consideraremos constantes as grandezas  $g$  e  $\chi_{ijk}$ .
4. Estabelecendo que o feixe de bombeio propaga-se na direção  $z$  e que o cristal seja grande o suficiente nas direções  $x$  e  $y$  de modo a abarcar todo o seu perfil de intensidade, podemos substituir o produto por  $\delta(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_p) \text{sinc}((k_{sz} + k_{iz} - k_{pz})L_z/2) e^{-i(k_{sz} + k_{iz} - k_{pz})L_z/2}$ , em que definimos  $\mathbf{q}_\alpha$  implicitamente por  $\mathbf{k}_\alpha = \mathbf{q}_\alpha + k_{\alpha z} \hat{z}$  para  $\alpha \in \{s, i, p\}$ .
5. Ademais, se os fótons *signal* e *idler* forem gerados colinearmente e o cristal for suficiente fino, então  $\text{sinc}((k_{sz} + k_{iz} - k_{pz})L_z/2) \approx 1$ .
6. Com as aproximações paraxial e monocromática, podemos substituir  $V_p(\mathbf{k}_p)$  pelo espectro angular  $v_p(\mathbf{q}_p)$  do feixe de bombeio.
7. Finalmente, consideraremos que o feixe de bombeio tenha apenas polarização extraordinária ( $\sigma_p = e$ ), e que os fótons *signal* e *idler* tenham polarizações perpendiculares — ordinária e extraordinária ( $\sigma_s = o$ ,  $\sigma_i = e$ , ou vice-versa). Esse caso é conhecido como conversão paramétrica descendente espontânea de tipo II.<sup>1</sup>

Sob essas condições, a forma do estado quântico (3.35) simplifica-se grandemente:

$$|\psi\rangle = |\text{vác.}\rangle + C \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}_s \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}_i v_p(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) (|1\rangle_{\mathbf{q}_s, o} |1\rangle_{\mathbf{q}_i, e} + |1\rangle_{\mathbf{q}_s, e} |1\rangle_{\mathbf{q}_i, o}), \quad (3.36)$$

em que  $C$  é uma constante.

Note que há conservação de energia e de momento linear na CPDE [15]. Como consequência disso, a soma das componentes transversais dos momentos lineares dos fótons *signal* e *idler* deve ser igual à componente transversal do momento linear dos fótons do feixe de bombeio:

$$\hbar\mathbf{q}_s + \hbar\mathbf{q}_i = \hbar\mathbf{q}_p. \quad (3.37)$$

Assim, a conservação de momento implica que *signal* e *idler* estão *emaranhados* em momento. Se for sabido o momento transversal de um dos fótons gerados pela CPDE, pode-se inferir o momento do outro.

<sup>1</sup> Na de tipo I, os fótons convertidos têm a mesma polarização (ordinária).

Para melhor ilustrar essa correlação entre os dois, considere que o feixe incidente seja uma onda plana, cujo momento logo jaz inteiramente sobre o eixo de propagação  $z$ . Nesse caso,  $\mathbf{q}_p = (0, 0)$ , logo  $\mathbf{q}_s = -\mathbf{q}_i$ , indicando uma anticorrelação perfeita.

Podemos ver na equação (3.36) que os fótons gêmeos não estão emaranhados apenas em momento, mas também em polarização. De fato, os fótons produzidos pela CPDE podem estar correlacionados em diversos graus de liberdade [15]. A CPDE também é mais fácil de implementar do que outras técnicas de produção de fótons emaranhados [19], de modo que ela, em décadas recentes, tem sido uma fonte muito produtiva de correlações quânticas — isto é, o tipo de correlações mais fortes do que as previstas pela física clássica, e que podem violar o princípio de realismo local [20]. Por esses motivos, essa técnica é amplamente empregada em experimentos que utilizam luz fortemente correlacionada para criar melhores sistemas de imageamento.

### 3.4 Imageamento quântico

Em anos recentes, a elaboração de técnicas para se obterem imagens ópticas por meio de recursos quânticos tem ganhado um interesse crescente [6, 19]. Essa nova área é conhecida em inglês como *quantum imaging* (ou “imageamento quântico”, em tradução livre). Servindo-se principalmente do emaranhamento de alguns sistemas quânticos — a existência de correlações mais fortes do que as previstas pela física clássica —, cada técnica oferece uma vantagem em relação a métodos clássicos de imageamento.

Talvez a técnica mais conhecida seja a de *ghost imaging* (“imageamento fantasma”), demonstrada em 1995 [5, 7]. Dependente de dois feixes fortemente correlacionados, essa técnica comumente emprega fótons emaranhados gerados por CPDE. A Figura 7 ilustra a implementação típica dessa técnica no caso de CPDE de tipo II.

Os dois feixes quanticamente correlacionados são produzidos pelo cristal não linear  $NL$ . Um espelho dicróico separa o feixe de bombeio dos feixes convertidos, que são posteriormente separados por um divisor de feixes polarizante. Um deles ilumina o objeto  $O$  e é coletado por um detector sem resolução espacial, capaz de revelar sua presença mas não sua localização. O outro é detectado com resolução espacial, mas nunca interage com o objeto. Graças à forte correlação entre os feixes, no entanto, uma análise das detecções em coincidência é capaz de formar uma imagem do objeto.

Entretanto, uma vez que o único requisito para *ghost imaging* é que os dois feixes estejam correlacionados, essa técnica pode ser reproduzida com luz clássica — por exemplo, iluminando um divisor de feixes com um *laser*. (A fonte de luz pode até ser caótica [7]; as correlações relevantes são produzidas no divisor de feixes [8].) As resoluções obtidas nas duas versões são semelhantes, mas a versão quântica fornece uma maior visibilidade e uma melhor relação entre sinal e ruído.

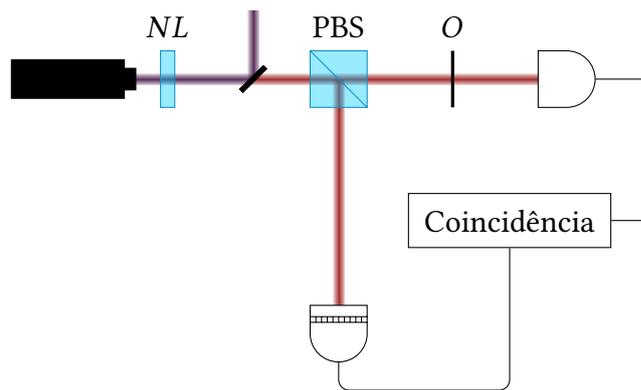


Figura 7 – Imageamento fantasma (*ghost imaging*) quântico. Os fótons emaranhados gerados por CPDE (tipo II) no cristal não linear *NL* são espacialmente separados por um divisor de feixes polarizante (PBS). Um deles interage com o objeto *O* e é coletado por um detector *sem* resolução espacial. O outro não interage com o objeto e incide sobre um detector *com* resolução espacial.

A principal aplicação dessa técnica, seja com fontes quânticas ou clássicas, consiste em produzir imagens em alta resolução de objetos que a câmera (ou o detector) não pode ver. Por exemplo, se o objeto estiver localizado em um ambiente precário ou de difícil acesso, o detector sem resolução espacial seria colocado em tal ambiente, enquanto o outro detector, mais sensível, seria mantido em condições mais favoráveis. A versão clássica já encontra aplicações práticas, tendo resultado em uma patente para o exército dos Estados Unidos [21, 22].

Adicionalmente, se a CPDE ocorrer de modo que os fótons gêmeos não estejam correlacionados em frequência, *ghost imaging* pode ser usada para sondar objetos usando um comprimento de onda diferente daquele usado para formar a imagem. Isso seria útil em situações em que o objeto é opaco apenas para comprimentos de onda para os quais os detectores com resolução espacial sejam ineficientes ou dispendiosos.

Contudo, se o fóton usado para sondar o objeto não puder ser detectado (por exemplo, se não se dispuser de detectores para os comprimentos de onda aos quais o objeto é opaco), então não se pode realizar *ghost imaging*. Felizmente, não é necessário detectá-lo para se formar a imagem do objeto. Na técnica conhecida como *imageamento quântico com fótons não detectados* [19, 23], um feixe de *laser* é dividido em dois, que são usados para bombear dois cristais não lineares. O campo *idler* de um deles é enviado para o objeto e em seguida para o segundo cristal, alinhando-se perfeitamente com o campo *idler* produzido nele. Nesse processo, as informações sobre o objeto são passadas para o campo *signal* gerado no segundo cristal [23]. Os dois campos *idler* são descartados, e os campos *signal* produzidos pelos dois cristais são combinados num divisor de feixes, sua interferência permitindo a reconstrução da imagem do objeto. Os únicos fótons detectados, portanto, são os *signal*— nenhum dos quais interagiu diretamente com o objeto imageado.

Embora a técnica descrita acima seja distinta de *ghost imaging*, ela também requer apenas uma correlação entre o feixe que interage com o objeto e o(s) feixe(s) detectado(s), de modo que uma versão clássica do experimento é factível [24].

Uma outra variação de *ghost imaging* é o método conhecido como *iluminação quântica* [25]. Ele consiste em produzir um par de fótons emaranhados, reter um deles (o *ancilla*) e enviar o outro para imagear um objeto imerso num banho de ruído térmico. Caso um fóton subsequentemente retorne, questiona-se se ele é o fóton que fora enviado e foi refletido pelo objeto ou se ele é meramente devido ao ruído térmico.

A presença do *ancilla* permite que o fóton retornado seja comparado com ele por meio de uma medição conjunta. Comparada com a situação em que não há o *ancilla* (imageamento com um único fóton), essa técnica melhora a relação sinal-ruído efetiva por um fator que cresce exponencialmente com o número de *bits* de emaranhamento do estado emaranhado.<sup>2</sup> Por esse motivo essa técnica é genuinamente quântica, ao contrário de *ghost imaging* propriamente dita. A melhora fornecida pela iluminação quântica persiste mesmo depois que o fóton usado para iluminar o objeto tenha se acoplado com o ambiente e que o emaranhamento original tenha sido perdido [8].

<sup>2</sup> Um *bit* de emaranhamento é a quantidade de emaranhamento possuído por um estado de Bell, isto é, um dos elementos da base formada pelos quatro estados  $|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle)$  e  $|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle)$ .



## 4 Proposta experimental

Neste capítulo, aplicaremos a teoria desenvolvida nos capítulos anteriores a uma proposta de experimento para codificar duas imagens na função de onda de um fóton usando conversão paramétrica descendente. O que queremos dizer com isso é que, nessa proposta, o(a) experimentalista teria à sua disposição uma montagem com duas configurações:

- (A) a primeira sendo tal que, após diversas realizações do experimento, ele(a) seria capaz de recuperar uma das imagens, e
- (B) a segunda sendo tal que, após diversas realizações do experimento, ele(a) seria capaz de recuperar a outra imagem.

Dessa maneira, o(a) experimentalista teria a capacidade de escolher qual imagem deseja observar. Para alternar entre as duas configurações, bastará trocar uma lente no aparato experimental.

### 4.1 Montagem

A montagem que propomos é a da Figura 8. As duas imagens a que nos referimos são as funções de transmitância de amplitude dos objetos  $O_1$  e  $O_2$ , que por brevidade serão denotadas pelos mesmos símbolos que os respectivos objetos. Em outras palavras, se denotarmos por  $U_{i,1}$  a amplitude de campo que incide no objeto  $O_1$  e por  $U_{t,1}$  a que é transmitida por ele, então a função de transmitância de amplitude desse objeto, localizado em  $z = z_1$ , será [9]

$$O_1(x, y) = \frac{U_{t,1}(x, y, z_1)}{U_{i,1}(x, y, z_1)}. \quad (4.1)$$

A função de transmitância de amplitude do objeto  $O_2$  é definida analogamente.

Além dos objetos  $O_1$  e  $O_2$ , a montagem envolve um total de quatro lentes convexas, um *laser*, um cristal não linear, um espelho dicróico, um divisor de feixes polarizante, um fotodetector e um dispositivo de carga acoplada (CCD, do inglês *charge-coupled device*).

O *laser* produz um feixe de bombeio de comprimento de onda  $\lambda_p = \lambda/2$ , que atravessa o objeto  $O_1$  e a lente  $L_p$ , finalmente incidindo no cristal não linear  $NL$ , que obedece às condições 4 e 5 (página 40). A distância focal de  $L_p$  é  $f_p$ , e as distâncias entre  $O_1$  e  $L_p$  e entre  $L_p$  e  $NL$  são ambas iguais a  $2f_p$ . Como mostrado na Subseção 2.4.1, esse arranjo garante que  $L_p$  projete a imagem do objeto  $O_1$  na face anterior de  $NL$ , com magnificação de  $-1$ .

A interação do feixe de bombeio com o cristal  $NL$  causará um processo de conversão paramétrica descendente espontânea (CPDE) de tipo II, que produzirá os campos *signal* e *idler*, de baixa intensidade e de comprimento de onda igual a  $\lambda$  – o dobro do comprimento de onda

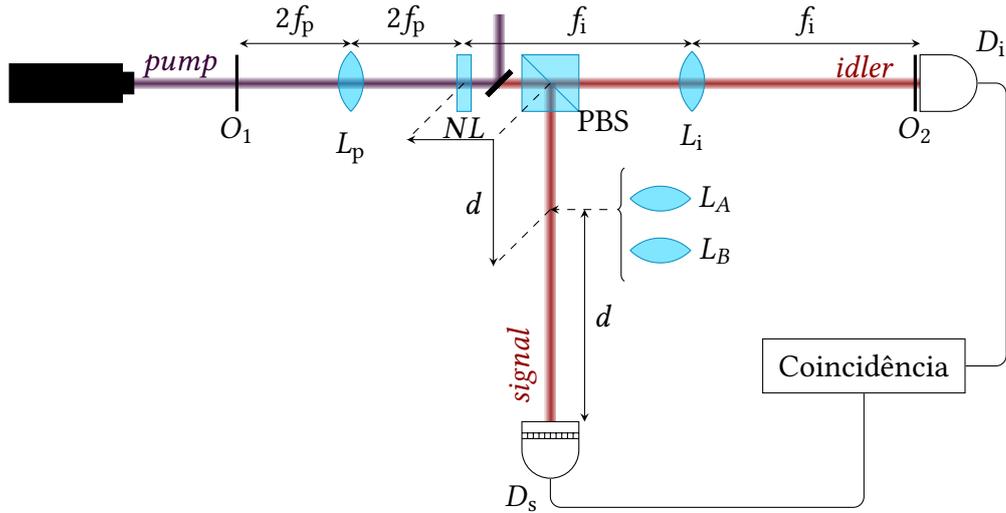


Figura 8 – Proposta de montagem experimental:  $O_1$  e  $O_2$  são as máscaras que contêm as imagens a serem codificadas;  $L_p$ ,  $L_i$ ,  $L_A$  e  $L_B$  são lentes convexas com distâncias focais  $f_p$ ,  $f_i$ ,  $f_A$  e  $f_B$ , respectivamente;  $NL$  é o cristal não linear que efetua a CPDE; PBS é o divisor de feixes polarizante;  $D_i$  é um fotodetector e  $D_s$  é um CCD. Entre  $NL$  e PBS há um espelho dicroico que reflete o comprimento de onda  $\lambda_p$ .

do feixe de bombeio (conforme o item 2, na página 40). A porção do feixe de bombeio que não for convertida será descartada pelo espelho dicroico.

Os feixes *signal* e *idler* são colineares, e suas polarizações são perpendiculares uma à outra. Posicionando o divisor de feixes polarizante (PBS, do inglês *polarizing beam splitter*) logo à frente do cristal não linear, os dois feixes convertidos separam-se espacialmente, tomando caminhos ortogonais.

No caminho do feixe *idler* são colocadas a lente  $L_i$  e, mais adiante, o fotodetector  $D_i$ . As distâncias entre  $NL$  e  $L_i$  e entre  $L_i$  e  $D_i$  são ambas iguais à distância focal  $f_i$  de  $L_i$ , de modo que essa lente projeta o espectro angular do campo em  $NL$  sobre o plano de detecção de  $D_i$ , conforme a Subseção 2.4.2.

O objeto  $O_2$  é posicionado imediatamente sobre  $D_i$ , bloqueando a detecção de algumas componentes do espectro angular de  $NL$ . Por efeito de  $L_i$ , cada ponto no plano de detecção de  $D_i$  corresponderá a uma direção de propagação do feixe *idler* emergindo de  $NL$ . Por causa da sombra de  $O_2$ , alguns pontos desse plano não serão iluminados. Isso significa que os fótons *idler* que se propagam ao longo das direções associadas a esses pontos não serão transmitidos por  $O_2$ , tampouco detectados por  $D_i$ . Em outras palavras, o objeto  $O_2$  filtra quais componentes do espectro angular de  $NL$  são detectadas. Como veremos brevemente, é esse efeito que permitirá a recuperação de  $O_2$ .

Em algum ponto no caminho do feixe *signal* coloca-se um CCD  $D_s$ , e uma terceira lente é posicionada no meio desse caminho, a uma distância  $d$  tanto de  $NL$  quanto de  $D_s$ . Em nosso

cenário, essa lente é escolhida pelo(a) experimentalista dentre duas possibilidades: a lente  $L_A$ , com distância focal  $f_A = d/2$ , e a lente  $L_B$ , com distância focal  $f_B = d$ .

Dessa maneira, caso a lente escolhida seja  $L_A$ , a imagem do campo em  $NL$  será projetada sobre o plano de detecção de  $D_s$ . Como esse campo, por sua vez, é a imagem invertida de  $O_1$ , o efeito de  $L_A$  será o de projetar a imagem de  $O_1$  (com magnificação 1) sobre  $D_s$ . Assim, ao se coletarem muitos fótons no CCD, recupera-se  $O_1$  com perfeição.

Por outro lado, caso a lente escolhida seja  $L_B$ , o espectro angular do campo em  $NL$  é que será projetado sobre o plano de detecção de  $D_s$ . Como vimos, o caminho do feixe *idler* inclui um filtro de componentes de espectro angular. Se esse filtro for ativado (isto é, se forem considerados apenas eventos de coincidência entre  $D_i$  e  $D_s$ ), então as componentes do espectro angular que não correspondem a pontos de  $O_2$  serão descartadas do feixe *idler*.

Se a correlação entre os feixes convertidos for perfeita —  $v_p(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) \approx \delta(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i)$  na equação (3.36) — então as componentes do espectro angular de sinal oposto serão descartadas do feixe *signal*. Portanto, em eventos de coincidência, as únicas componentes do espectro angular de  $NL$  que serão detectadas em  $D_s$  conterão informação sobre  $O_2$ , a qual poderá ser perfeitamente recuperada após a coleta de muitos fótons.

Se a correlação entre os feixes convertidos for imperfeita, então a recuperação de  $O_2$  também será.

## 4.2 Cálculos das obtenções de imagens

Para mostrar que os efeitos de  $L_A$  e  $L_B$  serão como descrito acima, desejamos calcular a taxa de contagem em coincidência. Segundo a Seção 3.2, ela será proporcional à função de correlação de quarta ordem [16, 26]:

$$C(\boldsymbol{\rho}_s, \boldsymbol{\rho}_i) = \langle \psi | \mathbf{E}_s^{(-)}(\boldsymbol{\rho}_s) \mathbf{E}_i^{(-)}(\boldsymbol{\rho}_i) \mathbf{E}_s^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_s) \mathbf{E}_i^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_i) | \psi \rangle \quad (4.2)$$

$$= \left\| \mathbf{E}_s^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_s) \mathbf{E}_i^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_i) | \psi \rangle \right\|^2, \quad (4.3)$$

em que  $|\psi\rangle$  é o estado quântico do bifóton gerado na CPDE,  $\boldsymbol{\rho}_\alpha$  é a coordenada no plano de detecção de  $D_\alpha$  ( $\alpha \in \{s, i\}$ ), e  $\mathbf{E}_\alpha^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_\alpha)$  é o operador de campo elétrico nessa posição. No experimento proposto, as polarizações dos fótons *signal* e *idler* permanecem indeterminadas depois da detecção. Dessa forma, o segundo termo da equação (3.36), correspondente ao estado quântico dos fótons gêmeos, reescreve-se:

$$|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}_s \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}_i v_p(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) |1\rangle_{\mathbf{q}_s} |1\rangle_{\mathbf{q}_i}, \quad (4.4)$$

em que o espectro angular do feixe de bombeio [9, 16] é (compare com a equação (2.42)):

$$v_p(\mathbf{q}) \propto e^{ik_z L} \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{\rho} e^{-i\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}} O_1(-\boldsymbol{\rho}). \quad (4.5)$$

Chamando de  $\rho_c$  a coordenada transversal na face posterior de  $NL$ , o operador de campo elétrico ali pode ser escrito em termos do operador de aniquilação  $\mathbf{a}(\mathbf{q})$  do modo  $\mathbf{q}$  (compare com a equação (3.20)):

$$\mathbf{E}_c^{(+)}(\rho_c) = \int_{A_c} d\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\cdot\rho_c} \mathbf{a}(\mathbf{q}), \quad (4.6)$$

em que  $A_c$  é a área dessa face, e escolhemos localizar o cristal em  $z = 0$ . Conforme as Subseções 2.4.1 e 2.4.2, os operadores de campo elétrico nos planos de detecção de  $D_i$  e  $D_s$  podem ser expressos em termos do campo acima graças à ação das lentes  $L_i$  e  $L_s \in \{L_A, L_B\}$ :

$$\mathbf{E}_i^{(+)}(\rho_i) \propto O_2(\rho_i) \tilde{\mathbf{E}}_c^{(+)}\left(\frac{\rho_i}{\lambda f_i}\right), \quad (4.7)$$

$$\mathbf{E}_s^{(+)}(\rho_s) \propto \begin{cases} \mathbf{E}_c^{+}(-\rho_s), & \text{se } L_A \text{ for escolhida,} \\ \tilde{\mathbf{E}}_c^{+}\left(\frac{\rho_s}{\lambda d}\right), & \text{se } L_B \text{ for escolhida.} \end{cases} \quad (4.8)$$

A seguir, combinamos as equações (4.3) a (4.8) para encontrar, ao final, a expressão para a taxa de detecção em  $D_s$  nas duas situações experimentais que esta proposta permite: a situação A, em que se escolhe a lente  $L_A$  no braço *signal*, e a situação B, em que se escolhe  $L_B$ . Os resultados finais serão repetidos na Seção 4.3.

Também usaremos as seguintes identidades:

$$\mathbf{a}(\mathbf{q}_m) |1\rangle_{\mathbf{q}'_m} = |0\rangle_{\mathbf{q}_m} \delta(\mathbf{q}_m - \mathbf{q}'_m), \quad (4.9)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\cdot\rho} = (2\pi)^2 \delta(\rho). \quad (4.10)$$

#### 4.2.1 Situação A

A colocação da lente  $L_A$  no braço *signal* da montagem proposta leva a que:

$$\mathbf{E}_s^{(+)}(\rho_s) \mathbf{E}_i^{(+)}(\rho_i) |\psi\rangle \propto O_2(\rho_i) \mathbf{E}_c^{+}(-\rho_s) \tilde{\mathbf{E}}_c^{+}\left(\frac{\rho_i}{\lambda f_i}\right) |\psi\rangle, \quad (4.11)$$

em que o operador  $\mathbf{E}_s^{(+)}$  corresponde à primeira linha da equação (4.8), o operador  $\mathbf{E}_i^{(+)}$  é dado pela equação (4.7), o estado  $|\psi\rangle$  dos fótons gêmeos é de acordo com as equações (4.4) e (4.5), e o operador  $\mathbf{E}_c^{(+)}$  é definido pela equação (4.6).

Invocando a definição (2.42), podemos expandir o termo de  $\tilde{\mathbf{E}}_c^{(+)}$  na equação acima:

$$\tilde{\mathbf{E}}_c^{+}\left(\frac{\rho_i}{\lambda f_i}\right) = \int_{A_c} d\rho_c e^{-2\pi i \rho_c \cdot (\rho_i / \lambda f_i)} \mathbf{E}_c^{+}(\rho_c) \quad (4.12)$$

$$= \int_{A_c} d\rho_c e^{-2\pi i \rho_c \cdot (\rho_i / \lambda f_i)} \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}_i e^{i\mathbf{q}_i \cdot \rho_c} \mathbf{a}(\mathbf{q}_i). \quad (4.13)$$

Assim, substituindo as equações (4.4) a (4.8) e a expressão (4.13) acima na equação (4.11),

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_s) \mathbf{E}_i^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_i) |\psi\rangle &\propto O_2(\boldsymbol{\rho}_i) \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}_s e^{-i\mathbf{q}_s \cdot \boldsymbol{\rho}_s} \mathbf{a}(\mathbf{q}_s) \times \\ &\times \int_{A_c} d\boldsymbol{\rho}_c e^{-2\pi i \boldsymbol{\rho}_c \cdot (\boldsymbol{\rho}_i / \lambda f_i)} \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}_i e^{i\mathbf{q}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_c} \mathbf{a}(\mathbf{q}_i) \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}'_s \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}'_i \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{\rho} e^{-i(\mathbf{q}'_s + \mathbf{q}'_i) \cdot \boldsymbol{\rho}} O_1(-\boldsymbol{\rho}) |1\rangle_{\mathbf{q}'_s} |1\rangle_{\mathbf{q}'_i}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Deixamos de lado o termo de fase global  $e^{ik_z L}$  oriundo da equação (4.5), já que ele será cancelado quando calcularmos a norma da equação (4.3). Adicionalmente, a fim de claridade, desloquemos os operadores de aniquilação na equação (4.14) para que fiquem próximos dos *kets* sobre os quais atuam:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_s) \mathbf{E}_i^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_i) |\psi\rangle &\propto O_2(\boldsymbol{\rho}_i) \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}_s e^{-i\mathbf{q}_s \cdot \boldsymbol{\rho}_s} \int_{A_c} d\boldsymbol{\rho}_c e^{-2\pi i \boldsymbol{\rho}_c \cdot (\boldsymbol{\rho}_i / \lambda f_i)} \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}_i e^{i\mathbf{q}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_c} \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}'_s \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}'_i \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{\rho} e^{-i(\mathbf{q}'_s + \mathbf{q}'_i) \cdot \boldsymbol{\rho}} O_1(-\boldsymbol{\rho}) \mathbf{a}(\mathbf{q}_s) |1\rangle_{\mathbf{q}'_s} \mathbf{a}(\mathbf{q}_i) |1\rangle_{\mathbf{q}'_i}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Usando a identidade (4.9), a expressão acima torna-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_s) \mathbf{E}_i^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_i) |\psi\rangle &\propto O_2(\boldsymbol{\rho}_i) \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}_s e^{-i\mathbf{q}_s \cdot \boldsymbol{\rho}_s} \int_{A_c} d\boldsymbol{\rho}_c e^{-2\pi i \boldsymbol{\rho}_c \cdot (\boldsymbol{\rho}_i / \lambda f_i)} \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}_i e^{i\mathbf{q}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_c} \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}'_s \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}'_i \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{\rho} e^{-i(\mathbf{q}'_s + \mathbf{q}'_i) \cdot \boldsymbol{\rho}} O_1(-\boldsymbol{\rho}) \delta(\mathbf{q}_s - \mathbf{q}'_s) \delta(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}'_i) |\text{vác.}\rangle. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Então, podemos integrar sobre  $\mathbf{q}'_s$  e  $\mathbf{q}'_i$  para obter:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_s) \mathbf{E}_i^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_i) |\psi\rangle &\propto O_2(\boldsymbol{\rho}_i) \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}_s e^{-i\mathbf{q}_s \cdot \boldsymbol{\rho}_s} \int_{A_c} d\boldsymbol{\rho}_c e^{-2\pi i \boldsymbol{\rho}_c \cdot (\boldsymbol{\rho}_i / \lambda f_i)} \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}_i e^{i\mathbf{q}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_c} \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{\rho} e^{-i(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) \cdot \boldsymbol{\rho}} O_1(-\boldsymbol{\rho}) |\text{vác.}\rangle. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Rearranjando alguns termos,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_s) \mathbf{E}_i^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_i) |\psi\rangle &\propto O_2(\boldsymbol{\rho}_i) \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}_s e^{-i\mathbf{q}_s \cdot \boldsymbol{\rho}_s} \int_{A_c} d\boldsymbol{\rho}_c e^{-(2\pi i / \lambda f_i) \boldsymbol{\rho}_c \cdot \boldsymbol{\rho}_i} \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{\rho} O_1(-\boldsymbol{\rho}) e^{-i\mathbf{q}_s \cdot \boldsymbol{\rho}} \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}_i e^{i\mathbf{q}_i \cdot (\boldsymbol{\rho}_c - \boldsymbol{\rho})} |\text{vác.}\rangle, \end{aligned} \quad (4.18)$$

podemos agora usar a identidade (4.10) na integral em  $\mathbf{q}_i$ , substituindo-a por  $\delta(\boldsymbol{\rho}_c - \boldsymbol{\rho})$ . Depois, integrando sobre  $\boldsymbol{\rho}$ , ficamos com:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_s) \mathbf{E}_i^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_i) |\psi\rangle &\propto O_2(\boldsymbol{\rho}_i) \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}_s e^{-i\mathbf{q}_s \cdot \boldsymbol{\rho}_s} \times \\ &\times \int_{A_c} d\boldsymbol{\rho}_c e^{-(2\pi i / \lambda f_i) \boldsymbol{\rho}_c \cdot \boldsymbol{\rho}_i} O_1(-\boldsymbol{\rho}_c) e^{-i\mathbf{q}_s \cdot \boldsymbol{\rho}_c} |\text{vác.}\rangle. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Rearranjando os termos novamente,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_s) \mathbf{E}_i^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_i) |\psi\rangle &\propto O_2(\boldsymbol{\rho}_i) \int_{A_c} d\boldsymbol{\rho}_c e^{-(2\pi i/\lambda f_i)\boldsymbol{\rho}_c \cdot \boldsymbol{\rho}_i} O_1(-\boldsymbol{\rho}_c) \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}_s e^{-i\mathbf{q}_s \cdot (\boldsymbol{\rho}_s + \boldsymbol{\rho}_c)} |\text{vác.}\rangle. \end{aligned} \quad (4.20)$$

vemos que podemos aplicar a identidade (4.10) à integração em  $\mathbf{q}_s$ , substituindo-a por  $\delta(\boldsymbol{\rho}_s + \boldsymbol{\rho}_c)$ . Depois, integrando sobre  $\boldsymbol{\rho}_c$ , chegamos a:

$$\mathbf{E}_s^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_s) \mathbf{E}_i^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_i) |\psi\rangle \propto e^{(2\pi i/\lambda f_i)\boldsymbol{\rho}_s \cdot \boldsymbol{\rho}_i} O_1(\boldsymbol{\rho}_s) O_2(\boldsymbol{\rho}_i) |\text{vác.}\rangle. \quad (4.21)$$

Substituindo a equação (4.21) na equação (4.3):

$$C^A(\boldsymbol{\rho}_s, \boldsymbol{\rho}_i) \propto |O_1(\boldsymbol{\rho}_s)|^2 |O_2(\boldsymbol{\rho}_i)|^2. \quad (4.22)$$

Para obtermos a taxa de de detecção em  $D_s$  na situação A, precisamos integrar a equação (4.22) acima sobre a posição  $\boldsymbol{\rho}_i$  no plano de detecção de  $D_i$ . No entanto, apenas o termo relativo a  $O_2$  depende de  $\boldsymbol{\rho}_i$ , de modo que o termo relativo a  $O_1$  pode ser retirado da integral. A integração sobre o termo relativo a  $O_2$  resultará em uma constante, pelo que podemos afirmar que o perfil de intensidade observado ao longo de  $D_s$  será

$$C_s^A(\boldsymbol{\rho}_s) \propto |O_1(\boldsymbol{\rho}_s)|^2, \quad (4.23)$$

indicando uma recuperação perfeita de  $O_1$ .

#### 4.2.2 Situação B

Por outro lado, a colocação da lente  $L_B$  no braço *signal* implicará que, na equação (4.11), o operador  $\mathbf{E}_s^{(+)}$  corresponderá à *segunda* linha da equação (4.8), e não à primeira:

$$\mathbf{E}_s^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_s) \mathbf{E}_i^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_i) |\psi\rangle \propto O_2(\boldsymbol{\rho}_i) \tilde{\mathbf{E}}_c^{(+)}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_s}{\lambda d}\right) \tilde{\mathbf{E}}_c^{(+)}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_i}{\lambda f_i}\right) |\psi\rangle, \quad (4.24)$$

em que  $|\psi\rangle$ ,  $\mathbf{E}_c^{(+)}$  e  $\mathbf{E}_i^{(+)}$  ainda são dados pelas equações (4.4) a (4.7).

Invocando novamente a definição (2.42), podemos expandir o primeiro termo de  $\tilde{\mathbf{E}}_c^{(+)}$  na equação acima:

$$\tilde{\mathbf{E}}_c^{(+)}\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_s}{\lambda d}\right) = \int_{A_c} d\boldsymbol{\rho}_c e^{-2\pi i\boldsymbol{\rho}_c \cdot (\boldsymbol{\rho}_s/\lambda d)} \mathbf{E}_c^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_c) \quad (4.25)$$

$$= \int_{A_c} d\boldsymbol{\rho}_c e^{-2\pi i\boldsymbol{\rho}_c \cdot (\boldsymbol{\rho}_s/\lambda d)} \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}_s e^{i\mathbf{q}_s \cdot \boldsymbol{\rho}_c} \mathbf{a}(\mathbf{q}_s). \quad (4.26)$$

O segundo termo de  $\tilde{\mathbf{E}}_c^{(+)}$  na equação (4.24) terá a forma dada pela expressão (4.13). Substituindo as equações (4.4) a (4.8) e as expressões (4.13) e (4.26) na equação (4.24),

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_s) \mathbf{E}_i^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_i) |\psi\rangle &\propto O_2(\boldsymbol{\rho}_i) \int_{A_c} d\boldsymbol{\rho}_c e^{-2\pi i \boldsymbol{\rho}_c \cdot (\boldsymbol{\rho}_s / \lambda d)} \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}_s e^{i\mathbf{q}_s \cdot \boldsymbol{\rho}_c} \mathbf{a}(\mathbf{q}_s) \times \\ &\times \int_{A_c} d\boldsymbol{\rho}'_c e^{-2\pi i \boldsymbol{\rho}'_c \cdot (\boldsymbol{\rho}_i / \lambda f_i)} \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}_i e^{i\mathbf{q}_i \cdot \boldsymbol{\rho}'_c} \mathbf{a}(\mathbf{q}_i) \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}'_s \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}'_i \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{\rho} e^{-i(\mathbf{q}'_s + \mathbf{q}'_i) \cdot \boldsymbol{\rho}} O_1(-\boldsymbol{\rho}) |1\rangle_{\mathbf{q}'_s} |1\rangle_{\mathbf{q}'_i}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

em que novamente deixamos de lado o termo de fase global  $e^{ik_z L}$ . Como fizemos na Subseção 4.2.1, podemos deslocar os operadores de aniquilação na equação (4.27) para que fiquem próximos dos *kets* sobre os quais atuam e usar a identidade (4.9) para obtermos:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_s) \mathbf{E}_i^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_i) |\psi\rangle &= O_2(\boldsymbol{\rho}_i) \int_{A_c} d\boldsymbol{\rho}_c e^{-2\pi i \boldsymbol{\rho}_c \cdot (\boldsymbol{\rho}_s / \lambda d)} \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}_s e^{i\mathbf{q}_s \cdot \boldsymbol{\rho}_c} \times \\ &\times \int_{A_c} d\boldsymbol{\rho}'_c e^{-2\pi i \boldsymbol{\rho}'_c \cdot (\boldsymbol{\rho}_i / \lambda f_i)} \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}_i e^{i\mathbf{q}_i \cdot \boldsymbol{\rho}'_c} \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}'_s \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}'_i \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{\rho} e^{-i(\mathbf{q}'_s + \mathbf{q}'_i) \cdot \boldsymbol{\rho}} O_1(-\boldsymbol{\rho}) \delta(\mathbf{q}_s - \mathbf{q}'_s) \delta(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}'_i) |v\u00e1c.\rangle. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Integrando sobre  $\mathbf{q}'_s$  e  $\mathbf{q}'_i$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_s) \mathbf{E}_i^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_i) |\psi\rangle &= O_2(\boldsymbol{\rho}_i) \int_{A_c} d\boldsymbol{\rho}_c e^{-2\pi i \boldsymbol{\rho}_c \cdot (\boldsymbol{\rho}_s / \lambda d)} \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}_s e^{i\mathbf{q}_s \cdot \boldsymbol{\rho}_c} \times \\ &\times \int_{A_c} d\boldsymbol{\rho}'_c e^{-2\pi i \boldsymbol{\rho}'_c \cdot (\boldsymbol{\rho}_i / \lambda f_i)} \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}_i e^{i\mathbf{q}_i \cdot \boldsymbol{\rho}'_c} \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{\rho} e^{-i(\mathbf{q}_s + \mathbf{q}_i) \cdot \boldsymbol{\rho}} O_1(-\boldsymbol{\rho}) |v\u00e1c.\rangle. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Remanejando alguns termos,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_s) \mathbf{E}_i^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_i) |\psi\rangle &\propto O_2(\boldsymbol{\rho}_i) \int_{A_c} d\boldsymbol{\rho}_c e^{-(2\pi i / \lambda d) \boldsymbol{\rho}_c \cdot \boldsymbol{\rho}_s} \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}_s e^{i\mathbf{q}_s \cdot \boldsymbol{\rho}_c} \times \\ &\times \int_{A_c} d\boldsymbol{\rho}'_c e^{-(2\pi i / \lambda f_i) \boldsymbol{\rho}'_c \cdot \boldsymbol{\rho}_i} \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{\rho} e^{-i\mathbf{q}_s \cdot \boldsymbol{\rho}} O_1(-\boldsymbol{\rho}) \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}_i e^{i\mathbf{q}_i \cdot (\boldsymbol{\rho}'_c - \boldsymbol{\rho})} |v\u00e1c.\rangle, \end{aligned} \quad (4.30)$$

podemos aplicar a identidade (4.10) à integração em  $\mathbf{q}_i$ , substituindo-a por  $\delta(\boldsymbol{\rho}'_c - \boldsymbol{\rho})$ . Depois, integrando sobre  $\boldsymbol{\rho}$ , ficamos com:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_s) \mathbf{E}_i^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_i) |\psi\rangle &\propto O_2(\boldsymbol{\rho}_i) \int_{A_c} d\boldsymbol{\rho}_c e^{-(2\pi i / \lambda d) \boldsymbol{\rho}_c \cdot \boldsymbol{\rho}_s} \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}_s e^{i\mathbf{q}_s \cdot \boldsymbol{\rho}_c} \times \\ &\times \int_{A_c} d\boldsymbol{\rho}'_c e^{-(2\pi i / \lambda f_i) \boldsymbol{\rho}'_c \cdot \boldsymbol{\rho}_i} e^{-i\mathbf{q}_s \cdot \boldsymbol{\rho}'_c} O_1(-\boldsymbol{\rho}'_c) |v\u00e1c.\rangle. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Novamente rearranjando os termos,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_s) \mathbf{E}_i^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_i) |\psi\rangle &\propto O_2(\boldsymbol{\rho}_i) \int_{A_c} d\boldsymbol{\rho}_c e^{-(2\pi i / \lambda d) \boldsymbol{\rho}_c \cdot \boldsymbol{\rho}_s} \times \\ &\times \int_{A_c} d\boldsymbol{\rho}'_c e^{-(2\pi i / \lambda f_i) \boldsymbol{\rho}'_c \cdot \boldsymbol{\rho}_i} O_1(-\boldsymbol{\rho}'_c) \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{q}_s e^{i\mathbf{q}_s \cdot (\boldsymbol{\rho}_c - \boldsymbol{\rho}'_c)} |v\u00e1c.\rangle, \end{aligned} \quad (4.32)$$

notamos que podemos aplicar a identidade (4.10) à integração em  $\mathbf{q}_s$ , substituindo-a por  $\delta(\boldsymbol{\rho}_c - \boldsymbol{\rho}'_c)$ . Depois de integrar sobre  $\boldsymbol{\rho}'_c$ , chegamos a:

$$\mathbf{E}_s^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_s) \mathbf{E}_i^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_i) |\psi\rangle \propto O_2(\boldsymbol{\rho}_i) \int_{A_c} d\boldsymbol{\rho}_c e^{-(2\pi i/\lambda d)\boldsymbol{\rho}_c \cdot \boldsymbol{\rho}_s} e^{-(2\pi i/\lambda f_i)\boldsymbol{\rho}_c \cdot \boldsymbol{\rho}_i} O_1(-\boldsymbol{\rho}_c) |\text{vác.}\rangle \quad (4.33)$$

$$= O_2(\boldsymbol{\rho}_i) \int_{A_c} d\boldsymbol{\rho}_c e^{-2\pi i \boldsymbol{\rho}_c \cdot (\boldsymbol{\rho}_s/\lambda d + \boldsymbol{\rho}_i/\lambda f_i)} O_1(-\boldsymbol{\rho}_c) |\text{vác.}\rangle. \quad (4.34)$$

Introduzindo a variável de integração  $\boldsymbol{\rho}''_c = -\boldsymbol{\rho}_c$  e usando novamente a definição (2.42):

$$\mathbf{E}_s^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_s) \mathbf{E}_i^{(+)}(\boldsymbol{\rho}_i) |\psi\rangle \propto O_2(\boldsymbol{\rho}_i) \int_{A_c} d\boldsymbol{\rho}''_c e^{-2\pi i \boldsymbol{\rho}''_c \cdot (-\boldsymbol{\rho}_s/\lambda d - \boldsymbol{\rho}_i/\lambda f_i)} O_1(\boldsymbol{\rho}''_c) |\text{vác.}\rangle \quad (4.35)$$

$$= \tilde{O}_1\left(-\frac{\boldsymbol{\rho}_s}{\lambda d} - \frac{\boldsymbol{\rho}_i}{\lambda f_i}\right) O_2(\boldsymbol{\rho}_i) |\text{vác.}\rangle. \quad (4.36)$$

Assim, substituindo a equação (4.36) na equação (4.3),

$$C^B(\boldsymbol{\rho}_s, \boldsymbol{\rho}_i) \propto \left| \tilde{O}_1\left(-\frac{\boldsymbol{\rho}_s}{\lambda d} - \frac{\boldsymbol{\rho}_i}{\lambda f_i}\right) \right|^2 |O_2(\boldsymbol{\rho}_i)|^2. \quad (4.37)$$

Para obtermos a taxa de detecção em  $D_s$  na situação B, precisamos integrar a equação (4.37) acima sobre a posição  $\boldsymbol{\rho}_i$  no plano de detecção de  $D_i$ :

$$C_s^B(\boldsymbol{\rho}_s) \propto \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{\rho}_i \left| \tilde{O}_1\left(-\frac{\boldsymbol{\rho}_s}{\lambda d} - \frac{\boldsymbol{\rho}_i}{\lambda f_i}\right) \right|^2 |O_2(\boldsymbol{\rho}_i)|^2. \quad (4.38)$$

A expressão (4.38) acima é uma convolução de duas funções; uma dependente de  $O_1$ , a outra de  $O_2$ . Por causa disso, a resolução de  $C_s^B$  será limitada pelo tamanho de  $|\tilde{O}_1|^2$  em relação a  $|O_2|^2$ . Ela será máxima quando essa convolução ocorrer com uma função delta de Dirac,

$$|\tilde{O}_1(\boldsymbol{\rho})|^2 \approx \delta(\boldsymbol{\rho}). \quad (4.39)$$

Isso levaria a

$$C_s^B(\boldsymbol{\rho}_s) \propto \left| O_2\left(-\frac{f_i}{d} \boldsymbol{\rho}_s\right) \right|^2, \quad (4.40)$$

indicando uma recuperação perfeita de  $O_2$  se  $d = f_i$ , com magnificação  $-1$ .<sup>1</sup> Assim, esta parte do protocolo depende de a aproximação (4.39) ser verdadeira.

### 4.3 Simulação

Condensando as equações (4.23) e (4.38) em uma só, ficamos com:

$$C_s(\boldsymbol{\rho}_s) \propto \begin{cases} |O_1(\boldsymbol{\rho}_s)|^2, & \text{se } L_A \text{ for escolhida,} \\ \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{\rho}_i \left| \tilde{O}_1\left(-\frac{\boldsymbol{\rho}_s}{\lambda d} - \frac{\boldsymbol{\rho}_i}{\lambda f_i}\right) \right|^2 |O_2(\boldsymbol{\rho}_i)|^2, & \text{se } L_B \text{ for escolhida.} \end{cases} \quad (4.41)$$

<sup>1</sup> Ou, se  $d \neq f_i$ , uma recuperação de  $O_2$  com outra magnificação.

Ademais, se a condição (4.39) for válida e se  $d = f_i$ , a relação acima simplifica-se e revela a simetria do experimento proposto:

$$C_s(\boldsymbol{\rho}_s) \propto \begin{cases} |O_1(\boldsymbol{\rho}_s)|^2, & \text{se } L_A \text{ for escolhida,} \\ |O_2(-\boldsymbol{\rho}_s)|^2, & \text{se } L_B \text{ for escolhida.} \end{cases} \quad (4.42)$$

Nós realizamos uma simulação computacional no programa *Mathematica*<sup>2</sup> para testar as previsões da equação (4.41). Os parâmetros usados foram  $\lambda = 800$  nm (o comprimento de onda dos fótons gêmeos) e  $d = f_i = 500$  mm. As intensidades luminosas de  $O_1$  e  $O_2$  estão retratadas na Figura 9, e as taxas de contagem em  $D_s$  previstas para os casos A e B estão representadas na Figura 10.

Comparando as duas Figuras, notamos que a recuperação de  $O_1$  é perfeita, e que a única falha na recuperação de  $O_2$  é uma queda na intensidade luminosa da Figura 9 para a Figura 10. Essa é uma falha tolerável, que não afeta a reconstrução do objeto  $O_2$ .

Nessa demonstração, a escolha de  $O_1$  foi judiciosa. Como se vê nas Figuras 9 e 11,  $|\tilde{O}_1|^2$  é quase uma função delta de Dirac quando comparado com  $O_2$ . Desse modo, a condição (4.39) é aproximadamente obedecida dentro da equação (4.41), de modo que a simplificação (4.42) era esperada.

## 4.4 Discussão

É possível recuperar qualquer uma das duas imagens em seguida à detecção do fóton *signal* porque ele carrega informação sobre ambas: a informação sobre  $O_1$ , localizado no feixe de bombeio, é devida à CPDE nos regimes paraxial e monocromático (Seção 3.3), enquanto a detecção do fóton *idler* por  $D_i$  prepara o fóton *signal* em um estado que carrega a informação de  $O_2$ , de maneira semelhante ao que acontece no processo de *ghost imaging* (Seção 3.4).

Em outras palavras, o experimento proposto pode ser visto como um imageamento fantasma (*ghost imaging*) do espectro angular do objeto  $O_2$  em que os fótons gêmeos também carregam informação sobre o objeto  $O_1$  [26], acrescida da habilidade de selecionar qual dos dois objetos se deseja reconstruir mediante a escolha de uma lente e a detecção do fóton *signal*.

Com os parâmetros usados na simulação ( $\lambda = 800$  nm e  $d = f_i = 500$  mm), e usando objetos de  $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$ , acreditamos que o experimento possa ser realizado dentro do próprio Departamento de Física da Universidade Federal de Minas Gerais, cujos laboratórios de óptica quântica já realizaram experimentos similares [24, 26–30], indicando que dispõem do espaço necessário e dos demais instrumentos e dispositivos (lentes, cristal não linear, divisor de feixes polarizante, espelho dicróico, detectores de fótons e *laser*) requeridos pela montagem (Figura 8).

<sup>2</sup> Disponível para compra ou demonstração em <<https://www.wolfram.com/mathematica/>>.

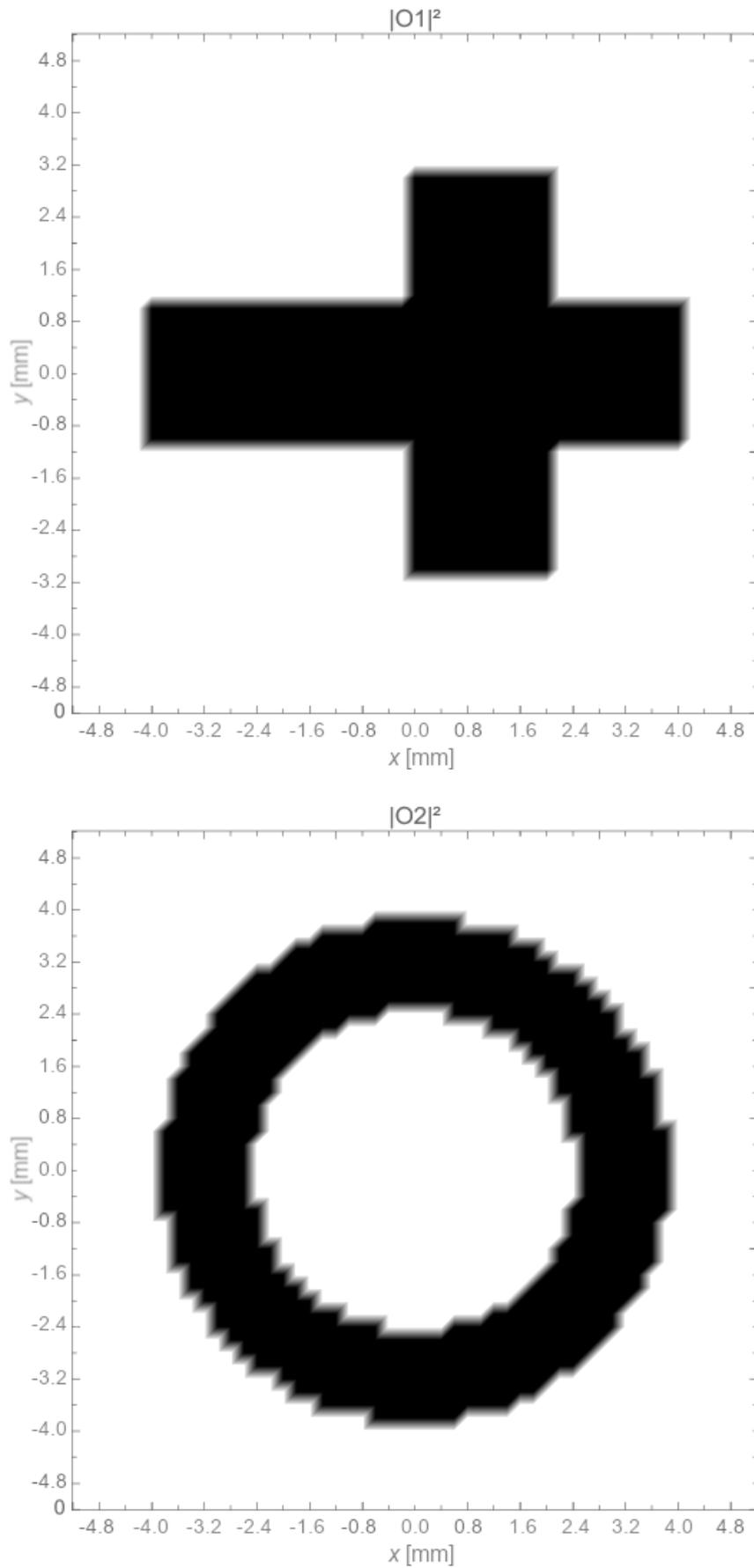
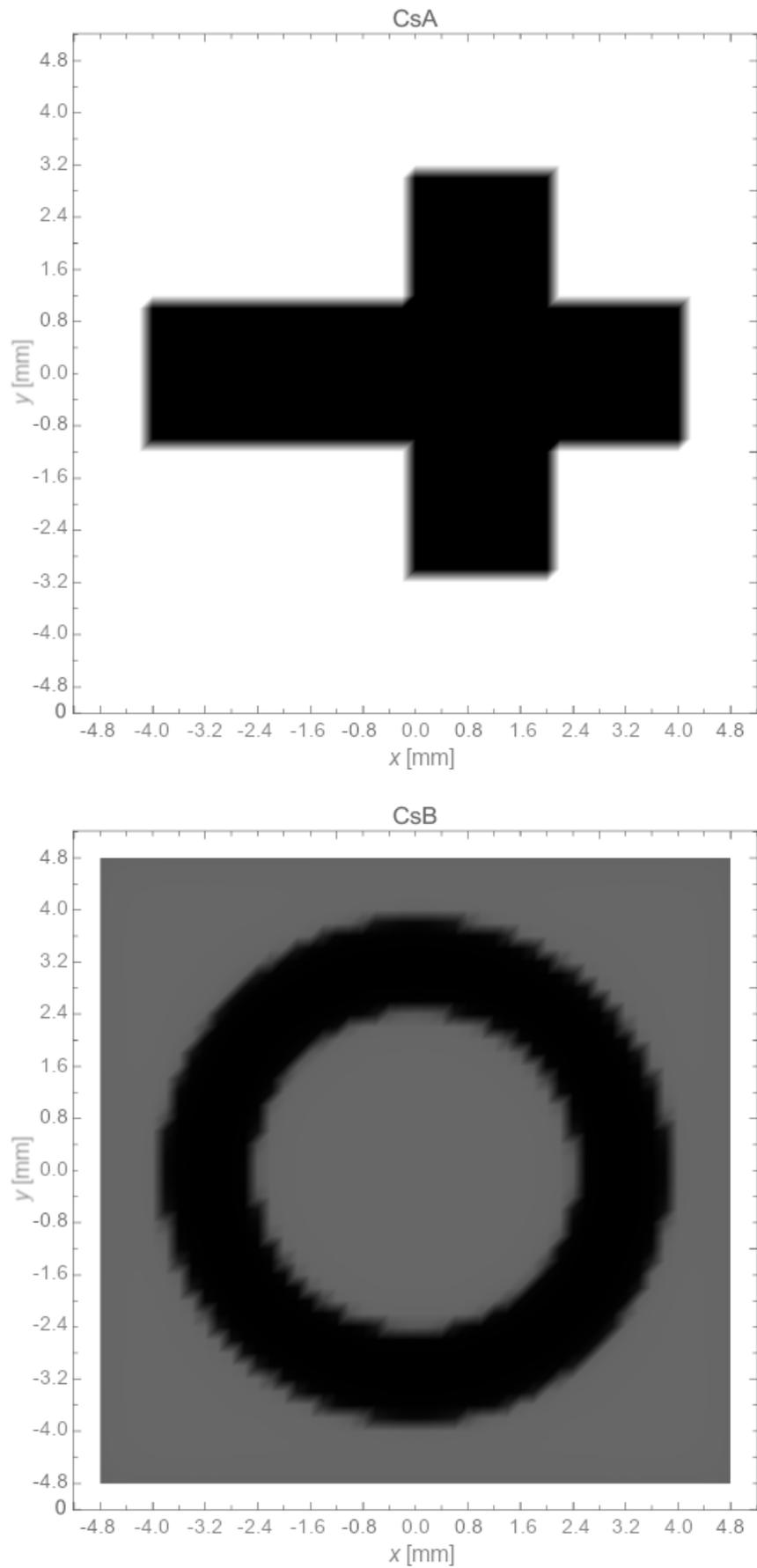


Figura 9 – Gráficos das intensidades luminosas de  $O_1$  e  $O_2$ .

Figura 10 – Gráficos de  $C_s$  nas situações A e B.

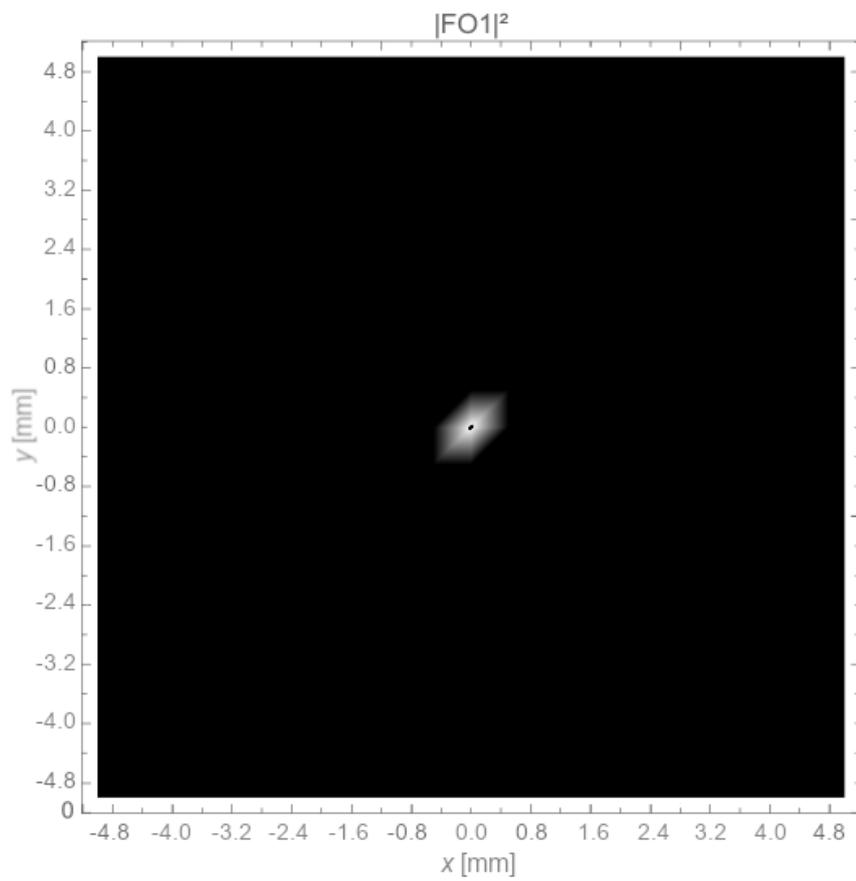


Figura 11 – Intensidade luminosa de  $\tilde{O}_1$ .

## 5 Conclusão

Experimentos de *ghost imaging* usam CPDE para fazer a imagem de um objeto ao se combinarem as detecções de pares de fótons emaranhados, enquanto protocolos de *superdense coding* valem-se de emaranhamento para comunicar dois *bits* clássicos de informação com a transmissão de apenas um *bit* quântico. A proposta experimental apresentada neste trabalho combina essas duas ideias: adaptamos o esquema de *ghost imaging* para que uma única partícula quântica (um fóton) carregue dois conjuntos distintos de informação (dois objetos, um colocado no caminho do feixe de bombeio, e o outro, no do feixe *idler*).

No Capítulo 3, mostramos que os fótons gêmeos gerados no processo de conversão paramétrica descendente espontânea (CPDE) carregam informação sobre o feixe de bombeio, contidas num termo que representa a distribuição de amplitudes de seus vetores de onda [cf. equação (3.35), na página 39] ou, sob as aproximações paraxial e monocromática, seu espectro angular. Também mostramos que o estado quântico desse par é emaranhado [cf. equação (3.36) e discussão subsequente, na página 40].

No Capítulo 4, usamos as técnicas matemáticas desenvolvidas nos Capítulos 2 e 3 para mostrar que uma montagem experimental como a da Figura 8, na página 46, seria capaz de preparar um fóton (o *signal*, como convencionamos chamá-lo) num estado que contém informação sobre dois objetos com os quais ele não interagiu diretamente. O(A) experimentalista teria à sua disposição dois aparatos de medição, representados pelas lentes  $L_A$  e  $L_B$  e pelo CCD  $D_S$ . Cada um deles lhe permitiria reconstruir a imagem de um dos objetos, contanto que esses obedeçam a uma condição — a intensidade do espectro angular de um deles ( $O_1$ ), quando comparada à intensidade luminosa do outro objeto ( $O_2$ ), deve ser bem aproximada por uma função delta de Dirac [cf. equação (4.39), na página 52].

No mesmo capítulo, relatamos uma simulação computacional do experimento proposto com parâmetros razoáveis de se reproduzirem em laboratório, usando como objetos os ilustrados na Figura 9. Esses objetos obedecem à condição (4.39). A fim de rigorosidade, pretende-se realizar uma outra simulação usando objetos que não lhe obedeçam, esperando-se descobrir que, nesse caso, a reconstrução da imagem do novo  $O_2$  seja tão imperfeita quanto o novo  $O_1$  falhe em obedecer à condição.

Exceto pelas duas possibilidades de detecção do fóton *signal*, a proposta ilustrada pela Figura 8 difere da realização típica de *ghost imaging* (Figura 7, na página 42) em apenas dois pontos. Primeiro, o arranjo de lentes de nossa proposta projeta sobre o detector  $D_i$  o espectro angular do objeto  $O_2$ . Segundo, sobre o cristal não linear usado na CPDE de nossa proposta projeta-se a imagem de um objeto adicional,  $O_1$ . Com essas modificações, o fóton *signal* passa a conter informações sobre os dois objetos.

Dessa forma, o fóton *signal* assume um papel análogo ao do *qubit* usado em *superdense coding*. Nesse reverso do teleporte quântico, um único *bit* quântico é usado para transportar dois *bits* clássicos; na nossa proposta, uma única partícula quântica (o fóton *signal*) é preparada de maneira a transportar duas imagens. No entanto, ao contrário de *superdense coding*, não é possível recuperar as duas imagens simultaneamente, visto que cada uma necessita que uma operação diferente seja realizada no fóton *signal*.

Sem embargo, a técnica proposta mantém as vantagens de *ghost imaging*, podendo até estendê-las, em virtude de codificar uma imagem adicional. Por exemplo, embora a proposta detalhada no Capítulo 4 considere que os fótons gêmeos têm o mesmo comprimento de onda, pode-se realizar CPDE em que os fótons convertidos têm comprimentos de onda diferentes. Assim, o experimento envolveria três comprimentos de onda:  $\lambda_p$  para o feixe de bombeio,  $\lambda_i$  para o feixe *idler* e  $\lambda_s$  para o feixe *signal*. Uma generalização da nossa proposta permitiria que o(a) experimentalista tivesse a liberdade de escolher imagear um objeto  $O_1$ , opaco apenas ao comprimento de onda  $\lambda_p$ , ou um objeto  $O_2$ , opaco apenas a  $\lambda_i$ , mesmo se o único detector disponível dotado de resolução espacial for sensível apenas ao comprimento  $\lambda_s$  — contanto que também se disponha de um detector sem resolução espacial mas sensível a  $\lambda_i$ .

Caso esse último detector não esteja disponível, resta a questão de se a técnica proposta pode ser alterada de modo que os fótons que interagem com  $O_2$  não precisem ser detectados, de maneira similar ao imageamento quântico com fótons não detectados [19, 23].

Ademais, à moda de *ghost imaging*, a técnica proposta está sujeita a admitir uma versão que use apenas correlações clássicas. Um possível estudo futuro, portanto, consistiria em estabelecer se a nossa proposta de fato teria vantagens sobre essa versão clássica, especificamente quanto à visibilidade e à relação entre sinal e ruído (que são os aspectos em que a versão quântica de *ghost imaging* tradicional é superior à clássica).

# Bibliografia

- [1] M. A. Nielsen e I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2011.
- [2] C. H. Bennett et al. “Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 70.13 (1993), pp. 1895–1899.
- [3] C. H. Bennett e S. J. Wiesner. “Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states”. Em: *Phys. Rev. Lett.* 69.20 (1992), pp. 2881–2884.
- [4] W. H. Zurek. “Decoherence and the transition from quantum to classical”. Em: *Physics Today* 44 (1991), pp. 36–44.
- [5] T. B. Pittman et al. “Optical imaging by means of two-photon quantum entanglement”. Em: *Physical Review A* 52.5 (1995), R3429–R3432.
- [6] L. A. Lugiato, A. Gatti e E. Brambilla. “Quantum imaging”. Em: *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* 4.3 (2002), S176–S183.
- [7] Y. Shih. “Quantum Imaging”. Em: *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics* 13.4 (2007), pp. 1016–1030.
- [8] D. S. Simon, G. Jaeger e A. V. Sergienko. *Quantum Metrology, Imaging, and Communication*. Springer, 2017.
- [9] J. W. Goodman. *Introduction to Fourier optics*. Roberts and Company Publishers, 2005.
- [10] J. C. Maxwell. “VIII. A dynamical theory of the electromagnetic field”. Em: *Philosophical transactions of the Royal Society of London* 155 (1865), pp. 459–512.
- [11] C. Huygens. *Treatise on Light*. Trad. por Silvanus P. Thompson (1912). Project Gutenberg, 2005. URL: <http://www.gutenberg.org/files/14725/14725-h/14725-h.htm>.
- [12] L. Mandel e E. Wolf. *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge university press, 1995.
- [13] D. A. Tichenor e J. W. Goodman. “Coherent transfer function”. Em: *JOSA* 62.2 (1972), pp. 293–295.
- [14] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloë. *Quantum Mechanics*. Quantum Mechanics v. 1. Wiley, 1991.
- [15] P. L. Saldanha e C. H. Monken. “Energy and momentum entanglement in parametric downconversion”. Em: *American Journal of Physics* 81.1 (2013), pp. 28–32.
- [16] S. P. Walborn et al. “Spatial correlations in parametric down-conversion”. Em: *Physics Reports* 495.4-5 (2010), pp. 87–139.

- [17] C. K. Hong e L. Mandel. “Theory of parametric frequency down conversion of light”. Em: *Physical Review A* 31.4 (1985), pp. 2409–2418.
- [18] M. H. Rubin et al. “Theory of two-photon entanglement in type-II optical parametric down-conversion”. Em: *Physical Review A* 50.6 (1994), pp. 5122–5133.
- [19] P.-A. Moreau et al. “Imaging with quantum states of light”. Em: *Nature Reviews Physics* 1 (2019), pp. 367–380.
- [20] J. S. Bell. “On the Einstein Podolsky Rosen paradox”. Em: *Physics Physique Fizika* 1.3 (1964), pp. 195–200.
- [21] R. Meyers, K. S. Deacon e Y. Shih. “Ghost-imaging experiment by measuring reflected photons”. Em: *Physical Review A* 77.4 (2008), p. 041801.
- [22] R. E. Meyers e K. S. Deacon. “System and method for image enhancement and improvement”. Pat. americana US 8,594,455 B2. 26 de nov. de 2013.
- [23] G. B. Lemos et al. “Quantum imaging with undetected photons”. Em: *Nature* 512.7515 (2014), p. 409.
- [24] A. C. Cardoso et al. “Classical imaging with undetected light”. Em: *Phys. Rev. A* 97.3 (2018), p. 033827.
- [25] S. Lloyd. “Enhanced Sensitivity of Photodetection via Quantum Illumination”. Em: *Science* 321.5895 (2008), pp. 1463–1465.
- [26] C. H. Monken, P. H. S. Ribeiro e S. Pádua. “Transfer of angular spectrum and image formation in spontaneous parametric down-conversion”. Em: *Physical Review A* 57.4 (1998), pp. 3123–3126.
- [27] P. Machado et al. “Engineering quantum correlations for  $m \times n$  spatially encoded two-photon states”. Em: *Phys. Rev. A* 99.6 (2019), p. 063839.
- [28] J. Ferraz et al. “Diffraction of Einstein–Podolski–Rosen states with one- and two-copies”. Em: *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 47.24 (2014), p. 245504.
- [29] L. Neves et al. “Generation of entangled states of qudits using twin photons”. Em: *Physical Review Letters* 94.10 (2005), p. 100501.
- [30] P. H. S. Ribeiro et al. “Controlling the degree of visibility of Young’s fringes with photon coincidence measurements”. Em: *Physical Review A* 49.5 (1994), pp. 4176–4180.