

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
Instituto de Ciências Exatas  
Programa de Pós-graduação em Matemática

Carlos Alberto Cjanahuri Aroquipa

Uma caracterização espectral para os  $H(r)$ -toros na  
esfera

Belo Horizonte - MG

2020

Carlos Alberto Cjanahuirí Aroquipa

**Uma caracterização espectral para os  $H(r)$ -toros na  
esfera**

**Versão Final**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Ezequiel Rodrigues  
Barbosa

Belo Horizonte - MG

2020

Cjanahuiri Aroquipa, Carlos Alberto

C582c Uma caracterização espectral para os  $H(r)$ -toros na esfera /  
Carlos Alberto Cjanahuiri Aroquipa.– 2020.  
84 f. il.

Orientador: Ezequiel Rodrigues Barbosa.  
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais,  
Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.  
Referências: f. 82-84.

1. Matemática – Teses. 2. Superfícies de curvatura constante  
– Teses. 3. Autovalores – Teses. 4. Morse, Teoria de – Teses. 5.  
Jacobi, Métodos de. I. Barbosa, Ezequiel Rodrigues. II.  
Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências  
Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51 (043)

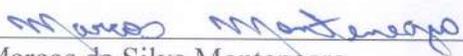


FOLHA DE APROVAÇÃO

*Uma Caracterização Espectral para os  $H(r)$ -Toros  
na Esfera*

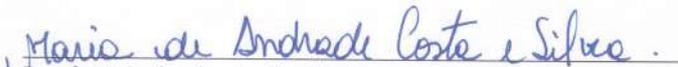
**CARLOS ALBERTO CJANAHUIRI AROQUIPA**

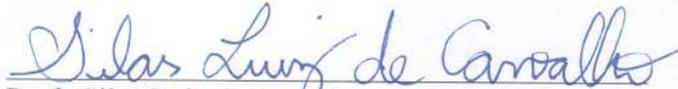
Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

  
Prof. Marcos da Silva Montenegro  
UFMG

  
Prof. Emerson Alves Mendonça de Abreu  
UFMG

  
Prof. Luiz Fernando de Oliveira Faria  
UFJF

  
Profa. Maria de Andrade Costa e Silva  
UFS

  
Prof. Silas Luiz de Carvalho  
UFMG

Belo Horizonte, 07 de fevereiro de 2020.

*A Lourdes, porque yo soy de donde tú estés.*

# Agradecimentos

A Deus, por sempre me guiar em todo momento e colocar pessoas maravilhosas em meu caminho as quais me fazem encorajar a prosseguir.

Ao meu orientador, Professor Ezequiel Rodrigues Barbosa, pela oportunidade de realizar este trabalho. Obrigado pela confiança, disponibilidade, pelos ensinamentos compartilhados de forma admirável e por me guiar no meu mestrado e doutorado. Muito obrigado sempre.

A minha família e principalmente a minha mãe e irmão, que sempre me motivaram e acreditaram em mim.

As famílias Dias e Mariano, principalmente a Lourdes, Janine, Joana e Dinho, pelo amor, querer e carinho que sempre tiveram por mim. Vocês são como minha família neste país. Amo todos vocês.

Aos professores da banca examinadora, professores Marcos da Silva Montenegro, Emerson Alves Mendonça de Abreu, Silas Luiz de Carvalho, Luiz Fernando de Oliveira Faria e Maria de Andrade Costa e Silva, por seus conselhos, conversas e sugestões na correção deste trabalho.

Aos meus velhos amigos, Jhon, José, Julio Leo, Eduardo, Herbert, Ever, Kaherine e Simeona, aqueles que conheci na época da graduação e levarei para o resto da vida.

Aos meus novos amigos, Jimmy, Elard, Antônio, Roy, Alexander, Julio, Joel, Manuel, Victor, Moacir, Daniel, Karina, Fiorella, Nelcy, Débora, Karol e Letícia.

A Andréa e a Kelli, secretarias da pós-graduação, muito obrigado por toda atenção e paciência.

A CAPES pelo apoio financeiro.

A todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho, o meu muito obrigado.

# Resumo

Nesta tese obtemos algumas estimativas espectrais para caracterizar as hipersuperfícies de Clifford ou  $H(r)$ -toros na esfera  $\mathbb{S}^{n+1}$ . O trabalho foi dividido em duas partes. Na primeira parte consideramos hipersuperfícies fechadas em  $\mathbb{S}^{n+p}$  com  $p \geq 1$ . Inicialmente, provamos que as únicas superfícies que maximizam o segundo autovalor forte do operador de Jacobi em  $\mathbb{S}^{p+2}$  são os toros mínimos de Clifford, para isso usamos uma técnica baseada no uso de aplicações conformes. Em seguida usamos a mesma técnica para provar que a estimativa é verdadeira para o caso geral, supondo uma hipótese sobre a curvatura escalar. Finalizando a primeira parte, estudamos uma conjectura de classificação de hipersuperfícies não totalmente geodésicas em  $\mathbb{S}^{n+1}$ . Na segunda parte estudamos o caso de hipersuperfícies com curvatura média constante ( $H \neq 0$ ). Começamos provando um resultado de comparação entre os autovalores do operador de Jacobi e os autovalores do Laplaciano de Hodge, agindo em 1-formas, em seguida usamos essa mesma técnica agindo desta vez em formas harmônicas para provar que o índice de Morse para hipersuperfícies com curvatura média constante fechadas em  $\mathbb{S}^{n+1}$  é limitado inferiormente por uma função linear do primeiro número de Betti. Finalizamos mostrando uma caracterização para os  $H(r)$ -toros via o primeiro autovalor fraco do operador de Jacobi.

**Palavras-chave:** Superfície de curvatura média constante. Índice de Morse. Estabilidade. Autovalor forte e fraco. Operador de Jacobi.  $H(r)$ -toros.

# Abstract

In this thesis we obtain some spectral estimates to characterize the Clifford hypersurfaces or  $H(r)$ -torus in the sphere  $\mathbb{S}^{n+1}$ . The work was divided into two parts. In the first part we consider hypersurfaces closed in  $\mathbb{S}^{n+p}$  with  $p \geq 1$ . Initially, we proved that the only surfaces that maximize the second strong eigenvalue of the Jacobi operator in  $\mathbb{S}^{p+2}$  are the minimal Clifford torus, for this we use a technique based on the use of conformal applications. Then we use the same technique to prove that the estimate is true for the general case, assuming a hypothesis about the scalar curvature. Finishing the first part, we study a conjecture of classification of hypersurfaces not totally geodesic in  $\mathbb{S}^{n+1}$ . In the second part we study the case of hypersurfaces with constant mean curvature ( $H \neq 0$ ). We start by proving a result of comparison between the eigenvalues of the Jacobi operator and the eigenvalue of the Hodge Laplacian, acting in 1-forms, then we use this same technique acting this time in harmonic forms to prove that the Morse index for hypersurfaces with curvature constant mean closed at  $\mathbb{S}^{n+1}$  is bounded inferiorly by a linear function of the first Betti number. We conclude by showing a characterization for the  $H(r)$ -torus via the first weak eigenvalue of the Jacobi operator.

**Keywords:** Surface of constant mean curvature. Morse index. Stability. Strong and weak eigenvalue. Jacobi Operator.  $H(r)$ -torus.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>15</b>
1.1 Alguns Preliminares . . . . .	15
1.1.1 Notações e convenções . . . . .	15
1.1.2 Subvariedades Riemannianas . . . . .	16
1.1.3 Subvariedades Mínimas . . . . .	18
1.2 Operadores em variedades Riemannianas . . . . .	20
1.2.1 Operadores diferenciáveis básicos em variedades Riemannianas . . . . .	20
1.2.2 O operador de Jacobi e o Índice de Morse . . . . .	21
1.2.3 Teoria Espectral de Operadores fortemente elípticos . . . . .	23
1.3 Operadores definidos sobre formas diferenciais . . . . .	24
<b>2 Uma caracterização espectral do operador de Jacobi em superfícies mínimas</b>	<b>30</b>
2.1 Estabilidade e caracterização espectral de hipersuperfícies fechadas em $\mathbb{S}^{n+1}$	30
2.1.1 Toros mínimos de Clifford . . . . .	33
2.1.2 Uma caracterização espectral do toro mínimo de Clifford pelo primeiro autovalor de estabilidade . . . . .	35
2.2 Funções testes baseadas em aplicações conformes de $\mathbb{S}^{n+1}$ em $\mathbb{S}^{n+1}$ . . . . .	36
2.3 Uma caracterização de hipersuperfícies via o segundo autovalor do operador de Jacobi . . . . .	39
2.4 Uma conjectura de classificação . . . . .	49
<b>3 Uma caracterização espectral dos <math>H(r)</math>-toros</b>	<b>52</b>

3.1	Estabilidade, índice e caracterização espectral das hipersuperfícies com curvatura média constante em $\mathbb{S}^{n+1}$ . . . . .	52
3.1.1	Esferas totalmente umbílicas e hipersuperfícies de Clifford . . . . .	55
3.1.2	Uma caracterização espectral dos $H(r)$ -toros pelo primeiro autovalor de estabilidade forte . . . . .	58
3.2	Funções testes baseadas em coordenadas de 1-formas . . . . .	60
3.3	Comparação entre os autovalores do operador de Jacobi e o Laplaciano de Hodge . . . . .	66
3.4	Uma caracterização dos $H(r)$ -toros pelo primeiro autovalor fraco do operador de Jacobi . . . . .	74
3.4.1	Casos particulares de $H(r)$ -toros . . . . .	75

**Referências Bibliográficas** **82**

# Introdução

A investigação sobre o comportamento do espectro dos operadores Schrödinger, ou seja, operadores da forma  $\Delta + q$ , onde  $\Delta$  representa o operador Laplaciano em uma variedade Riemanniana  $M^n$  e  $q$  é qualquer função contínua em  $M^n$ , constitui um tópico de pesquisa interessante e frutífero em análise geométrica.

No caso de  $M^n$  ser uma subvariedade fechada imersa na esfera Euclidiana unitária  $\mathbb{S}^{n+p}$  com curvatura média constante, um importante operador Schrödinger é o chamado operador de estabilidade, o qual é definido por

$$J = \Delta + \|A\|^2 + n,$$

onde  $\|A\|$  denota a norma do operador forma e  $n$  é a curvatura de Ricci da esfera. Notamos que, quando  $p = 1$ ,  $J$  é apenas o operador de Jacobi estabelecido por Barbosa, do Carmo e Eschenburg [6] para estudar o problema de minimização do funcional área para variações que preservam volume. O operador de Jacobi induz a forma quadrática  $\mathcal{Q} : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$\mathcal{Q}(f) = - \int_M f J f dM.$$

Existem dois problemas de autovalores diferentes: o problema usual de Dirichlet, associado com a forma quadrática  $\mathcal{Q}$  agindo no espaço de funções diferenciáveis em  $M^n$ , e o problema twisted Dirichlet, associado com a mesma forma quadrática  $\mathcal{Q}$ , mas restrito ao subespaço de funções diferenciáveis  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  satisfazendo a condição adicional  $\int_M f dM = 0$ . Então existem duas diferentes noções de estabilidade e índice: estabilidade e índice forte, denotado por  $\text{Ind}(M)$  e associado ao problema usual de Dirichlet, e estabilidade e índice fraco, denotado por  $\text{Ind}_T(M)$  e associado com o problema twisted Dirichlet. Conhecemos por índice o número de autovalores negativos de  $J$  e por uma variedade estável se  $\mathcal{Q}(f) \geq 0$ , para qualquer  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ .

Assim, o primeiro autovalor de estabilidade forte  $\lambda_1^J$  de  $M^n$  é definido como o menor

número real negativo  $\lambda$  para o qual existe solução não-nula da equação  $Jf + \lambda f = 0$ , em que  $f \in C^\infty(M)$ .

Em seu célebre trabalho [30], Simons estudou o primeiro autovalor de estabilidade forte de uma hipersuperfície mínima fechada  $M^n$  imersa em  $\mathbb{S}^{n+1}$ . Nesse cenário, ele provou que se  $\lambda_1^J = -n$ , então  $M^n$  é uma esfera totalmente geodésica, e para o caso contrario mostrou que  $\lambda_1^J \leq -2n$ . Mais tarde, Wu [33] caracterizou a igualdade  $\lambda_1^J = -2n$ , mostrando que ela é válida apenas para os toros mínimos de Clifford. Em seguida, Perdomo [27] deu uma nova prova dessa caracterização espectral para o valor de  $\lambda_1^J$ . Recentemente, Chen e Cheng [11] obtiveram um limite superior para  $\lambda_1^J$  associado a hipersuperfícies compactas não totalmente umbílicas com curvatura média constante, limitante este apenas da curvatura média  $H$  e da dimensão  $n$ . Pouco depois, Cunha, de Lima e dos Santos [14] inspirados em uma técnica desenvolvida por Li [21], estenderam a estimativa de  $\lambda_1^J$  em codimensão alta.

Por outro lado, El Soufi e Ilías [16] derivaram um limite superior para o segundo autovalor de um operador Schrödinger  $\Delta + q$  de uma subvariedade compacta  $M^n$  de um espaço forma Riemanniano, em termos da curvatura média de  $M$  e da média do potencial  $q$ . Em particular, para o operador de Jacobi de uma hipersuperfície com curvatura média constante em  $\mathbb{S}^{n+1}$ , eles estimaram que  $\lambda_2^J \leq -\frac{1}{|M|} \int_M \|\phi\|^2 \leq 0$ , onde  $\|\phi\|$  denota o comprimento do operador de umbilicidade, com igualdade se  $M$  é totalmente umbílico. Recentemente, A. Mendes [24] provou que  $\lambda_2^J \leq -2$  para uma superfície com gênero maior ou igual a 1, mostrando que a igualdade é válida somente para os toros mínimos de Clifford.

Inspirados em uma técnica de Li e Yau [22] no **Capítulo 2** estendemos o resultado de A. Mendes para codimensão alta. Mais precisamente, obtemos o seguinte resultado:

**Teorema 0.0.1.** *Seja  $M$  uma superfície fechada e orientável imersa na esfera Euclidiana unitária  $\mathbb{S}^{2+p}$ ,  $p \geq 1$ , com gênero  $g(M)$  maior ou igual a 1. Então, o segundo autovalor do operador  $J = \Delta + \|A\|^2 + 2$  satisfaz  $\lambda_2^J \leq -2$ , com igualdade se, e somente se,  $M$  é o toro mínimo de Clifford  $\mathbb{S}^1(\sqrt{1/2}) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1/2})$ .*

Também mostramos que o resultado continua sendo válido para dimensão maior ( $n \geq 3$ ), adicionando uma hipótese sobre a curvatura escalar.

**Teorema 0.0.2.** *Seja  $M^n$  uma subvariedade não totalmente geodésica e fechada imersa em  $\mathbb{S}^{n+p}$  com curvatura escalar satisfazendo  $\mathcal{S}_M \leq n(n-2)$ . Então, o segundo autovalor*

do operador  $J = \Delta + \|A\|^2 + n$  satisfaz  $\lambda_2^J \leq -n$ , com igualdade  $\lambda_2^J = -n$  se, e somente se,  $M$  é o toro mínimo de Clifford  $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n})$ , para um inteiro  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ .

Outro assunto a ser tratado no **Capítulo 2** será estudar uma conjectura de classificação referente ao índice de hipersuperfícies mínimas e não totalmente geodésicas na esfera  $\mathbb{S}^{n+1}$ . Esta conjectura afirma que as únicas hipersuperfícies mínimas, compactas e orientáveis imersas em  $\mathbb{S}^{n+1}$  com  $\text{Ind}(M) = n + 3$  são os toros mínimos de Clifford  $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n}) \subset \mathbb{S}^{n+1}$ . Urbano [32] mostrou que a conjectura é verdadeira quando  $n = 2$ . Mais tarde, Guadalupe, Brasil Jr. e Delgado [18] mostraram que a conjectura também é verdadeira para o caso geral  $n$ , sob a hipótese adicional que  $M$  tenha curvatura escalar constante. E mais recentemente, Perdomo [26] mostrou que a conjectura é também verdadeira para qualquer dimensão  $n$  com a suposição adicional sobre as simetrias de  $M$ . Inspirados por estes resultados, mostramos como resultado final deste capítulo uma prova mais simples ao resultado de Guadalupe, Brasil Jr. e Delgado. Mais precisamente temos o seguinte resultado:

**Teorema 0.0.3.** *Seja  $M^n$  uma hipersuperfície mínima, compacta e orientável imersa em  $\mathbb{S}^{n+1}$  com curvatura escalar constante. Se  $\text{Ind}(M) = n + 3$ , então  $M$  é um toro mínimo de Clifford  $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n}) \subset \mathbb{S}^{n+1}$ .*

O **Capítulo 3** é dedicado a estudar a estabilidade, índice e caracterizações espectrais de hipersuperfícies com curvatura média constante ( $H \neq 0$ ) em particular para os toros de Clifford com curvatura média constante ou também conhecidos como  $H(r)$ -toros. Começamos este capítulo com um breve estudo sobre estabilidade fraca e algumas caracterizações espectrais. Barbosa, do Carmo e Eschenburg [6] caracterizaram as esferas totalmente umbílicas  $\mathbb{S}^n(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$  como as únicas hipersuperfícies compactas com curvatura média constante fracamente estáveis, ou seja  $\text{Ind}_T(M) = 0$ . Em seguida, Alías, Brasil e Perdomo [2] obtiveram que  $\text{Ind}_T(M) \geq n + 2$ , onde a igualdade é satisfeita apenas pelos toros de curvatura média constante  $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$  com raio  $\sqrt{k/(n+2)} \leq r \leq \sqrt{(k+2)/(n+2)}$ .

Depois disto, nosso primeiro tópico a ser estudado será uma comparação entre os espectros do operador de Jacobi de  $M^n$  e do Laplaciano de Hodge agindo em 1-formas em  $M^n$ . A. Savo [30] comparou os autovalores do operador de Jacobi com os autovalores do

Laplaciano de Hodge de hipersuperfícies mínimas em  $\mathbb{S}^{n+1}$ . Em seguida, Ma e Huang [23] obtiveram um resultado similar para hipersuperfícies com curvatura média constante em  $\mathbb{S}^{n+1}$ , porém envolvendo a norma da segunda forma fundamental de  $M$ . Recentemente, Cavalcante e de Oliveira [9] conseguiram melhorar a estimativa de Ma e Huang para o caso onde  $M$  é uma superfície. Inspirados por esses resultados, neste capítulo estendemos o resultado de Cavalcante e de Oliveira para caso de dimensão alta sob a hipótese adicional de que  $M^n$  tenha duas curvaturas principais. Mais precisamente, obtivemos o seguinte resultado:

**Teorema 0.0.4.** *Seja  $M$  uma hipersuperfície fechada imersa em  $\mathbb{S}^{n+1}$  com curvatura média constante  $H$ . Suponha também que  $M$  tenha duas curvaturas principais com multiplicidades  $n/2$ , para  $n$  par. Então para todo inteiro positivo  $k$ ,*

$$\lambda_k^J \leq -2(n-1) - nH^2 + \left(\frac{2-n}{n}\right) \max\|A\|^2 + \lambda_{m(k)}^{\Delta_1},$$

onde  $m(k) > 2(n+2)(k-1)$ .

O segundo assunto a ser estudado neste capítulo será uma estimativa para o índice fraco  $\text{Ind}_T(M)$ . Inspirados na técnica usada na demonstração do Teorema 0.0.4, aplicada a campos harmônicos, obtemos um limite inferior para este índice. Assim conseguimos o seguinte resultado:

**Corolário 0.0.5.** *Seja  $M$  uma hipersuperfície fechada imersa em  $\mathbb{S}^{n+1}$  com curvatura média constante não nula  $H$ . Suponha também que  $M$  tenha duas curvaturas principais com multiplicidades  $n/2$ , para  $n$  par. Então,*

$$\text{Ind}_T(M) \geq \frac{b_1(M)}{2(n+2)}$$

Concluimos a tese estudando uma caracterização espectral para os toros de Clifford com curvatura média constante ou também chamados  $H(r)$ -toros. Mostramos uma estimativa para o primeiro autovalor fraco  $\lambda_1^T$  das hipersuperfícies com curvatura média constante na esfera Euclidiana  $\mathbb{S}^{n+1}$ . Explicitamente, obtemos o seguinte resultado:

**Teorema 0.0.6.** *Seja  $M^n$  uma hipersuperfície compacta, orientável e imersa em  $\mathbb{S}^{n+1}$  com curvatura média constante não nula, e seja  $\lambda_1^{JT}$  o primeiro autovalor fraco do operador de Jacobi  $J = \Delta + \|A\|^2 + n$ . Além disso, suponha que  $M$  tem duas curvaturas principais  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  com multiplicidades 1 e  $n-1$  ou  $n-1$  e 1, respectivamente.*

(i) Se  $n \leq 3$ , então

$$\lambda_1^{J_T} \leq -2(n-1) - \frac{n^2 H^2}{n-1} + n \left( \frac{3-n}{n-1} \right) |H| \max_M \kappa_i + \left( \frac{n-2}{n-1} \right) \max_M \kappa_i^2$$

(ii) Se  $n \geq 4$ , então

$$\lambda_1^{J_T} \leq -2(n-1) - \frac{n^2 H^2}{n-1} + n \left( \frac{3-n}{n-1} \right) |H| \min_M \kappa_i + \left( \frac{n-2}{n-1} \right) \max_M \kappa_i^2.$$

Além disso, a igualdade ocorre em ambos casos se, e somente se:

- (a)  $M$  é um toro de Clifford  $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{1-r^2})$  de curvatura média constante, com  $H > 0$  e  $\sqrt{1/n} < r < \sqrt{3/(n+2)}$ ; ou
- (b)  $M$  é um toro de Clifford  $\mathbb{S}^{n-1}(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2})$  de curvatura média constante, com  $H < 0$  e  $\sqrt{1/(n+2)} < r < \sqrt{1/n}$ .

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 Alguns Preliminares

O objetivo deste capítulo é desenvolver brevemente algumas definições, notações e convenções da teoria básica de subvariedades Riemannianas, formas diferenciáveis, assim como também introduzir o conceito de estabilidade e índice de uma subvariedade.

#### 1.1.1 Notações e convenções

Sejam  $(M, g)$ ,  $(\bar{M}, \bar{g})$  duas variedades Riemannianas com conexões de Levi-Civita  $\nabla, \bar{\nabla}$ , respectivamente. Denota-se por  $C^\infty(M, \bar{M})$  o conjunto das funções diferenciáveis  $f : M \rightarrow \bar{M}$ , e  $C^k(M, \bar{M})$ , o conjunto das funções  $f : M \rightarrow \bar{M}$  as quais são  $k$ -vezes continuamente diferenciáveis. No caso especial  $\bar{M} = \mathbb{R}$ , escreve-se simplesmente como  $C^\infty(M)$  ou  $C^k(M)$ . Indicaremos por  $\mathfrak{X}(M)$  o conjunto dos campos de vetores de classe  $C^\infty$  em  $M$ . Entenda-se por  $(p, q)$ -tensor como sendo covariante em suas primeiras  $p$  entradas e contravariante em suas últimas  $q$  entradas, logo podemos definir o endomorfismo curvatura Riemanniana em  $M$ ,  $\mathcal{R} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  como

$$\mathcal{R}(X, Y)Z = \nabla^2 Z(Y, X) - \nabla^2 Z(X, Y)$$

onde  $\nabla^2 Z$  denota a segunda derivada covariante do campo  $Z$  e é definida por:

$$\nabla^2 Z(X, Y) := \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_{\nabla_X Y} Z,$$

para todos  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ . Podemos definir também o tensor de curvatura Riemanniana,  $R_M : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ , por:

$$R_M(X, Y, Z, W) = g(\mathcal{R}(X, Y)Z, W).$$

O tensor de curvatura Riemanniana tem as seguintes simetrias:

$$R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W) = -R(X, Y, W, Z) \text{ e } R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$$

e satisfaz a identidade de Bianchi

$$R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0.$$

Tomando o traço do endomorfismo curvatura, define-se o tensor de Ricci, o qual é o traço do endomorfismo curvatura em relação à segunda entrada covariante e sua entrada contravariante. Para isto, vamos tomar um referencial ortonormal local em  $M$ ,  $\{e_i\}_{i=1}^n$ , e definir antes o operador de Ricci,  $\mathcal{R}ic : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ , por

$$\mathcal{R}ic(X) = \mathcal{R}(e_k, X)e_k;$$

assim o tensor de Ricci é definido por

$$Ric(X, Y) = g(\mathcal{R}ic(X), Y).$$

### 1.1.2 Subvariedades Riemannianas

Seja  $\psi : M^k \rightarrow \bar{M}^n$ ,  $n \geq k$ , uma imersão. Então, para qualquer  $p \in M$ , tem-se as projeções tangencial e normal  $(\cdot)^T : T_p\bar{M} \rightarrow T_pM$ ,  $(\cdot)^N : T_p\bar{M} \rightarrow N_pM$  que naturalmente decompõem o espaço tangente de  $\bar{M}$ :

$$T_p\bar{M} = T_pM \oplus N_pM \quad \text{onde } p \in M.$$

Uma variedade imersa  $\psi : M \rightarrow \bar{M}$  em uma variedade Riemanniana  $\bar{M}$  naturalmente herda uma estrutura de variedade Riemanniana do espaço ambiente: se  $\bar{M}$  tem uma métrica Riemanniana  $\bar{g}$  e uma conexão de Levi-Civita  $\bar{\nabla}$ , então  $g = \psi^*\bar{g}$  é uma métrica Riemanniana em  $M$  com conexão de Levi-Civita dada por:

$$\nabla_X Y = d\psi^{-1} \left( (\bar{\nabla}_{d\psi(X)} d\psi(Y))^T \right).$$

Pensando em  $M \subset \bar{M}$ , simplesmente podemos escrever  $g = \bar{g}|_M$  e  $\nabla = (\bar{\nabla})^T$ . Então

$$\bar{\nabla} = (\bar{\nabla})^T + (\bar{\nabla})^N = \nabla + \nabla^N,$$

com  $\nabla^N := (\bar{\nabla})^N$ .

**Definição 1.1.** A segunda forma fundamental de  $M$  induzida por  $\bar{\nabla}$  é a forma bilinear  $B$  definida por:

$$B(X, Y) = (\bar{\nabla}_X Y)^N \quad X, Y \in T_p M.$$

É fácil ver que  $B$  é simétrica, isto é,  $B(X, Y) = B(Y, X)$ , já que

$$\begin{aligned} B(X, Y) &= (\bar{\nabla}_Y X)^N = (\bar{\nabla}_Y X + [X, Y])^N \\ &= B(Y, X) + 0. \end{aligned}$$

A forma fundamental  $B$  fica associada uma aplicação linear auto-adjunta  $A_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$  definida por:

$$\langle A_\eta(X), Y \rangle = \langle B(X, Y), \eta \rangle,$$

onde  $\eta \in N_p M$ . A aplicação  $A_\eta$  é chamada o operador forma. Dizer que  $A_\eta$  é auto-adjunta é equivalente a dizer que  $B$  é simétrica. Segue-se da definição da segunda forma fundamental  $B$  que o operador forma é dado por:

$$A_\eta(X) = -(\bar{\nabla}_X N)^T,$$

onde  $X \in T_p M$  e  $N$  é uma extensão local de  $\eta$  normal a  $M$ .

Seja  $p \in M$  e escolhendo um referencial ortonormal  $\{E_i\}_{i=1}^{n-k}$  em  $N_p M$ , podemos definir, em  $p$ , o vetor curvatura média, que é dado na definição a seguir.

**Definição 1.2.** O vetor de curvatura média  $h$  em  $p \in M$  é dado por:

$$h = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-k} (\text{tr} A_i) E_i$$

onde  $A_i = A_{E_i}$  não depende do referencial  $E_i$  escolhido. Define-se também  $H = \|h\|$  como a função de curvatura média de  $M$ .

*Observação 1.1.1.* No caso particular em que a codimensão da imersão é 1, i.e.,  $\psi : M^k \rightarrow \bar{M}^{k+1}$ ;  $\psi(M) \subset \bar{M}$  é então denominada uma **hipersuperfície**. Seja  $p \in M$  e  $\eta \in N_p M$ ,  $\|\eta\| = 1$  Como  $A_\eta : T_p M \rightarrow T_p M$  é simétrica, existe uma base ortonormal de vetores próprios  $\{e_1, \dots, e_k\}$  de  $T_p M$  com valores próprios reais  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , i.e.,  $A_\eta(e_i) = \lambda_i e_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Se  $M$  e  $\bar{M}$  são ambas orientáveis e estão orientadas (i.e., escolhemos orientações para  $M$  e  $\bar{M}$ ), então o vetor  $\eta$  fica univocamente determinado se exigirmos que sendo  $\{e_1, \dots, e_k\}$  uma base na orientação de  $M$ ,  $\{e_1, \dots, e_k, \eta\}$  seja uma base na

orientação de  $\bar{M}$ . Neste caso, denominamos os  $e_i$  **direções principais** e os  $\lambda_i = \kappa_i$  **curvaturas principais** de  $\psi$ . As funções simétricas de  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  são invariantes da imersão. Por exemplo:  $\det(A) = \lambda_1 \dots \lambda_k$  é denominada a curvatura de Gauss-Kronecker de  $\psi$  e  $\frac{1}{k}(\kappa_1 + \dots + \kappa_k)$  é denominada a **curvatura média** de  $\psi$ . Quando trabalhamos neste caso, vamos simplesmente denotar o operador forma de  $A$ .

**Definição 1.3.** O quadrado da norma do operador de forma é definido por:

$$\|A\|^2 = \text{tr}(A^2)$$

**Definição 1.4.** Uma subvariedade Riemanniana  $M \subset \bar{M}$  diz-se totalmente geodésica se satisfaz uma das seguintes condições equivalentes:

- (i) Qualquer  $g$ -geodésica em  $M$  é também uma  $\bar{g}$ -geodésica em  $\bar{M}$ .
- (ii) A segunda forma fundamental de  $M$  é identicamente nula.

As duas proposições seguintes relacionam a segunda forma fundamental de  $M$  às curvaturas de  $M$  e  $\bar{M}$ . A primeira nos mostra como a diferença na curvatura da subvariedade e a curvatura da variedade ambiente está relacionada com a segunda forma fundamental. A segunda nos diz como a derivada covariante da segunda forma fundamental também nos dá informação sobre o endomorfismo curvatura de  $M$ .

**Proposição 1.1.2.** (Equação de Gauss) *Para quaisquer  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$*

$$\begin{aligned} R_{\bar{M}}(X, Y, Z, W) &= R_M(X, Y, Z, W) \\ &\quad - \langle B(X, W), B(Y, Z) \rangle + \langle B(X, Z), B(Y, W) \rangle, \end{aligned}$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota a métrica em  $\bar{M}$ .

**Proposição 1.1.3.** (Equação de Codazzi) *Para quaisquer  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ ,*

$$(R_M(X, Y)Z)^N = (\nabla_X B)(Y, Z) - (\nabla_Y B)(X, Z),$$

onde  $(\nabla_X B)(Y, Z) = \nabla_X^N B(Y, Z) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X Z)$ .

### 1.1.3 Subvariedades Mínimas

Sejam  $\bar{M}$  uma  $n$ -variedade Riemanniana e  $\psi : M \rightarrow \bar{M}$  uma imersão, onde  $M$  é uma  $k$ -variedade compacta e orientável com bordo  $\partial M$  (possivelmente vazio). Seja

$F : I \times M \rightarrow M$ ,  $I = (-1, 1)$ , uma variação diferenciável de  $\psi$ , isto é,  $F$  é uma aplicação diferenciável tal que:

(i) Para cada  $t \in I$ , a aplicação  $\psi_t := F(t, \cdot) : M \rightarrow \bar{M}$  é uma imersão.

(ii)  $\psi_0 := F(0, \cdot) = \psi$ .

(iii) Para cada  $t \in I$ ,  $\psi_t|_{\partial M} = \psi|_{\partial M}$ .

Seja  $t$  a coordenada em  $I$  e seja  $E$  a seção de  $T(M) \oplus N(M)$ , dada por  $E = dF \left( \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \right)$ . Vamos suprimir a dependência do tempo e denotar  $dV$  como o elemento volume da métrica induzida por  $\psi_t$  de modo que o volume de  $M$  no tempo  $t$ ,  $\text{Área}(t)$ , é dado por:

$$\text{Área}(t) = \int_M dV.$$

Consideramos  $M$  uma variedade compacta. Logo, a partir do funcional Área temos:

**Teorema 1.1.4** (A primeira fórmula de variação).

$$\frac{d\text{Área}}{dt} \Big|_{t=0} = \int_M \text{div}_M E \, dV = - \int_M \langle h, E \rangle \, dV. \quad (1.1)$$

Para mais detalhes, ver [13].

**Teorema 1.1.5** (A segunda fórmula de variação).

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \text{Área}}{dt^2} \Big|_{t=0} &= - \int_M |\langle B(\cdot, \cdot), E \rangle|^2 \, dV \\ &+ \int_M |\nabla_M^N E|^2 \, dV - \int_M \text{Tr}_M \langle R_M(\cdot, E) \cdot, E \rangle \, dV. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Para mais detalhes, ver [13].

**Definição 1.5.** Seja  $\psi : M \rightarrow \bar{M}$  uma imersão. Dizemos que uma variedade  $M$  é uma subvariedade mínima de  $\bar{M}$  se  $\frac{d\text{Área}}{dt} \Big|_{t=0} = 0$  para qualquer variação diferenciável de  $\psi$ .

**Definição 1.6** (função bump). Uma função bump é uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  a qual é diferenciável (no sentido de ter derivadas contínuas de todas as ordens) e com suporte compacto.

**Lema 1.1.6.**  $M$  é uma subvariedade mínima de  $\bar{M}$  se, e somente se, o vetor de curvatura média é identicamente nulo.

*Demonstração.* Isto é claro a partir da primeira fórmula de variação (1.1), já que se  $h \equiv 0$ , então  $M$  é uma subvariedade mínima de  $\bar{M}$ .

Agora, suponha que  $M$  é uma subvariedade mínima de  $\bar{M}$  e que  $h(p) \neq 0$  para algum  $p \in M$ . Então, pela continuidade,  $\|h\| > \frac{1}{2} \|h(p)\|$  em alguma vizinhança  $U \subset M$  de  $p$ . Seja  $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função bump diferenciável tal que  $\phi|_U \equiv 1$ , e seja  $F$  uma variação diferenciável de  $\psi$  com o campo de variação  $\phi h$ , por exemplo  $F(t, q) = \exp_q(t\phi(q)h(q))$ . Então, temos que

$$0 = \frac{d\text{Área}}{dt}\Big|_{t=0} = - \int_M \langle h, \phi h \rangle dV_0 \leq -\frac{1}{2} \|h(p)\|^2 \int_U dV_0.$$

Desde que  $\int_U dV_0 > 0$ , obtemos que  $\|h(p)\| \leq 0$ , o que é uma contradição. ■

## 1.2 Operadores em variedades Riemannianas

Nesta seção, discutiremos alguns operadores específicos em variedades Riemannianas. Começamos com as definições de alguns operadores diferenciais ordinários e com alguns resultados que vamos fazer uso mais tarde nos Capítulos 2 e 3.

Então, prosseguimos com a discussão de um operador elíptico específico sobre subvariedades mínimas que vem da segunda fórmula de variação: o operador de Jacobi. Vamos introduzir os resultados do índice e estabilidade das subvariedades mínimas e delinear a teoria espectral dos operadores elípticos sobre variedades Riemannianas compactas.

### 1.2.1 Operadores diferenciáveis básicos em variedades Riemannianas

**Definição 1.7.** Seja  $f \in C^\infty(M)$ . Vamos definir:

(i) O gradiente de  $f$ ,  $\text{grad} f$  é o campo de vetores caracterizado pela equação

$$df(X) = \langle \text{grad} f, X \rangle.$$

(ii) O Hessiano de  $f$ ,  $\text{Hess} f$ , é o tensor (0,2) simétrico tal que, para  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$\text{Hess} f(X, Y) = \langle \nabla_X \text{grad} f, Y \rangle = XYf - (\nabla_X Y)f.$$

(iii) O Laplaciano de  $f$ ,  $\Delta f \in C^\infty(M)$  é a função dada por:

$$\Delta f = \text{Tr}(\text{Hess } f) = \sum_{i=1}^k \nabla_{E_i}(\nabla_{E_i} f) - (\nabla_{E_i} E_i) f,$$

onde  $\{E_i\}_{i=1}^k$  é uma base ortonormal para  $TM$ .

Um simples cálculo mostra que o Laplaciano satisfaz um tipo de regra do produto:

$$\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2 \langle \text{grad } f, \text{grad } g \rangle. \quad (1.3)$$

**Lema 1.2.1.** *Sejam  $f \in \mathcal{C}^2(M)$ ,  $g \in \mathcal{C}^1(M)$  funções tais que  $h(\text{grad } f)$  tem suporte compacto. Então,*

$$\int_M (h\Delta f + \langle \text{grad } h, \text{grad } f \rangle) dV = 0.$$

Para mais detalhes, ver [9]. Note que (1.3) junto ao Lema 1.2.1. mostram que, se o  $\text{grad } f$  tem suporte compacto, então

$$0 = \int_M 1 \cdot \Delta f + \langle \text{grad } f, \text{grad } 1 \rangle dV = \int_M \Delta f dV. \quad (1.4)$$

Em particular, se  $M$  é compacta, então (1.4) verifica-se para qualquer  $f \in \mathcal{C}^2(M)$ .

## 1.2.2 O operador de Jacobi e o Índice de Morse

Podemos alternativamente escrever a segunda fórmula de variação (1.2) da seguinte forma:

$$\frac{d^2 \text{Área}}{dt^2} \Big|_{t=0} = - \int_M \langle E, JE \rangle dV. \quad (1.5)$$

onde  $J$  é o operador autoadjunto de Jacobi da segunda variação, o qual age em campos de vetores normais  $X$  a  $M$ ; assim,

$$JX = \Delta_M^N X - \mathfrak{R}(X) + \tilde{A}(X). \quad (1.6)$$

Aqui, se  $\{E_i\}_{i=1}^k$  é uma base ortonormal para  $TM$ ,  $\tilde{A}$  é o operador de Simons definido por

$$\tilde{A}(X) = \sum_{i,j=1}^k g(B(E_i, E_j), X) B(E_i, E_j), \quad (1.7)$$

$\Delta_M^N$  é o Laplaciano no fibrado normal

$$\Delta_M^N X = \sum_{i=1}^k \nabla_{E_i}^N \nabla_{E_i}^N X - \sum_{i=1}^k \nabla_{(\nabla_{E_i} E_i)^T}^N X, \quad (1.8)$$

e

$$\mathfrak{R}(X) := \text{Tr}[R_{\bar{M}}(\cdot, X)\cdot] = \sum_{i=1}^k R_{\bar{M}}(E_i, X)E_i.$$

Se  $M$  for uma hipersuperfície orientável de  $\bar{M}$ , então  $M$  tem um fibrado normal trivial, ou seja, o fibrado normal tem uma base ortonormal global e o operador de Jacobi se simplifica como um operador sobre funções : com efeito, podemos neste caso escrever qualquer campo vetorial normal como um produto de uma função e o campo vetorial normal unitário, podemos então identificar os campos de vetores normais com funções, isto é, se  $X = fN$ , então podemos identificar  $X$  com  $f$ . Assim,

$$Jf = \Delta_M f + \|A\|^2 f + \text{Ric}_{\bar{M}}(N, N)f. \quad (1.9)$$

Diremos que  $\lambda$  é um autovalor (Dirichlet) para  $J$  em  $\Omega \subset M$  se existe um campo de vetores normal não trivial  $X \in \mathcal{X}(NM)$  tal que  $X|_{\partial\Omega} = 0$  e

$$JX + \lambda X = 0. \quad (1.10)$$

**Definição 1.8.** O índice de Morse (ou somente índice) de uma subvariedade mínima compacta  $M$ , denotada por  $\text{Ind}(M)$ , é o número de autovalores negativos (contando multiplicidades) do operador de Jacobi  $J$  agindo no espaço das funções diferenciáveis no fibrado normal, o qual é identicamente nulo na fronteira.

Existe uma forma quadrática,  $\mathcal{Q}$ , associada ao operador de Jacobi, dada por:

$$\mathcal{Q}(X, X) = - \int_M \langle X, JX \rangle dV = - \int_M \langle X, \Delta_M^N X - \mathfrak{R}(X) + \tilde{A}(X) \rangle dV, \quad (1.11)$$

e  $\text{Ind}(M)$  é o índice de  $\mathcal{Q}$ . No caso em que  $M$  é uma hipersuperfície, isso pode ser simplificado:

$$\mathcal{Q}(f, f) = \int_M |\nabla f|^2 - (\|A\|^2 + \text{Ric}(N, N))f^2 dV. \quad (1.12)$$

As vezes é útil trabalhar com esta forma quadrática em vez do operador Jacobi.

Segue da segunda fórmula de variação (1.2) que podemos definir alternativamente  $\text{Ind}(M)$ , como um ponto crítico para o funcional Área, e então o índice de Morse, em algum sentido, descreve quão *estável* é a subvariedade mínima; isso fornece o número de direções independentes em que a subvariedade mínima pode ser deformada para diminuir o seu volume. Assim, uma subvariedade mínima *estável*, que realmente minimiza (localmente) o funcional volume, tem índice zero. Se o índice é positivo, então  $M$  é dito não estável. Veremos mais tarde que não há subvariedades mínimas estáveis na esfera  $\mathbb{S}^n$ .

### 1.2.3 Teoria Espectral de Operadores fortemente elípticos

Iniciaremos esta seção com uma breve descrição de alguns resultados sobre a teoria geral dos operadores fortemente elípticos. Lembremos que um operador diferencial elíptico de ordem  $m$  em uma variedade  $m$ -dimensional  $M$  é um operador  $P$  que em coordenadas locais tem a forma:

$$P(x, D)u = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha u,$$

cujos símbolo principal

$$P_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$$

é inversível para  $\xi \in \mathbb{R}^n$  diferente de zero. Aqui  $D = (D_1, \dots, D_n)$ ,  $D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x^j}$  e  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  é um multi-índice tal que  $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ . Um operador fortemente elíptico é um operador diferencial elíptico com

$$\frac{1}{2}(P_m(x, \xi) + P_m(x, \xi)^*) \geq C \|\xi\|^m,$$

onde  $P_m(x, \xi)^* = \overline{P_m(x, \xi)^T}$ .

O operador Jacobi é conhecido por ser fortemente elíptico (ver [31], pag.65) e desde que  $M$  é compacta, então o espectro de  $J$  é composto inteiramente de autovalores  $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$ . Se organizamos os autovalores de acordo ao tamanho

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < \dots$$

então  $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$  é um conjunto discreto e  $\lambda_k \rightarrow \infty$ . Além disso, a multiplicidade de cada autovalor é finita. De fato, o primeiro autovalor tem multiplicidade um e existe uma autofunção associada ao primeiro autovalor que é estritamente positiva.

Os autoespaços  $E_i$  correspondentes a  $\lambda_i$  são mutuamente ortogonais com respeito ao produto interno em  $L^2(M)$ , e  $\bigoplus_{i=1}^\infty E_i$  é denso em  $L^2(M)$  e no completamento de  $C^\infty(M)$  em  $L^2(M)$ .

Se  $f_i$  é uma autofunção correspondente a  $\lambda_i$ , então para qualquer função  $u \in W^{1,2}(M, \mathbb{R})$ , espaço de Sobolev, com  $\|u\|_{L^2} = 1$  e  $\langle u, f_i \rangle_{L^2} = 0$  para  $i = 1, 2, 3, \dots, j-1$ , temos que

$$\mathcal{Q}(u, u) \geq \lambda_j, \tag{1.13}$$

tendo a igualdade se e somente se  $Ju + \lambda_j u = 0$ .

As vezes, a delimitação sobre o índice de uma subvariedade mínima pode ser obtida diretamente a partir da obtenção de limitantes para o número de valores próprios negativos de  $J$ , embora isto seja mais viável em certas situações do que em outras. Se a curvatura de Ricci e o quadrado da segunda forma fundamental são constantes, então em seguida, encontrar os valores próprios do operador de Jacobi se transforma no problema de encontrar os valores próprios do Laplaciano em  $M$ , um operador mais profundamente estudado. Em alguns casos especiais, como quando temos  $(M, g) = (\mathbb{S}^k, g_0)$  com  $g_0$  a métrica induzida por  $\mathbb{R}^{k+1}$ , os valores próprios do Laplaciano e suas multiplicidades são conhecidas e o índice pode ser calculado.

**Teorema 1.2.2.** *Os autovalores do Laplaciano em  $(\mathbb{S}^k(r), g_0)$  são dados por*

$$\lambda_j := \frac{(j-1)(k+j-2)}{r^2}, \quad j = 1, 2, 3, \dots,$$

com multiplicidades

$$m_{\lambda_1} = 1, \quad m_{\lambda_2} = k + 1,$$

e

$$m_{\lambda_j} = \dim \mathcal{P}_{j-1} - \dim \mathcal{P}_{j-3} = \binom{k+j-1}{j-1} - \binom{k+j-3}{j-3}, \quad j = 3, 4, \dots,$$

onde  $\mathcal{P}_j$  é o espaço dos polinômios homogêneos de grau  $j$  em  $\mathbb{R}^{k+1}$ .

A prova pode ser encontrada em Sakai [29].

O seguinte teorema mostra que o espectro do Laplaciano sobre uma variedade produto (dotado com a métrica produto) é completamente determinado pelo espectro do Laplaciano em cada uma das variedades componentes.

Aqui,  $\text{Spec}(M, g)$  denota o espectro do Laplaciano em uma variedade Riemanniana  $(M, g)$ .

**Teorema 1.2.3.** *Sejam  $(M, g)$  e  $(N, h)$  duas variedades Riemannianas. Na variedade produto, temos*

$$\text{Spec}(M \times N, g \times h) = \{\lambda + \mu \mid \lambda \in \text{Spec}(M, g), \mu \in \text{Spec}(N, h)\}.$$

Os detalhes são dados por Berger [7].

### 1.3 Operadores definidos sobre formas diferenciais

Nesta seção, apresentamos alguns operadores definidos sobre formas diferenciais que serão de uso fundamental nas provas dos resultados do Capítulo 3.

Denotamos por  $\Omega^p(M)$  o espaço das  $p$ -formas diferenciais sobre uma variedade Riemanniana  $M$ . Assim, uma 0-forma em  $M$  é simplesmente uma função em  $M$ , e  $\Omega^0(M) = \mathcal{C}^\infty(M)$ . Destacamos os isomorfismos existentes entre os espaços  $\Omega^1(M)$  e  $\mathfrak{X}(M)$ , os quais são induzidos pela métrica de  $M$ .

**Definição 1.9.** Seja  $(M, g)$  uma variedade Riemanniana. Definimos o isomorfismo **bemol**

$$\begin{aligned} \flat & : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Omega^1(M) \\ X & \mapsto X^\flat \end{aligned}$$

que leva  $X$  no covetor  $X^\flat$  definido por:

$$X^\flat(Y) = g(X, Y) = \langle X, Y \rangle$$

para todo  $Y$ . Seu inverso é o isomorfismo **sustenido**

$$\begin{aligned} \sharp & : \Omega^1(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M) \\ \omega & \mapsto \omega^\sharp \end{aligned}$$

que leva o covetor  $\omega$  no vetor  $\omega^\sharp$  definido por:

$$g(\omega^\sharp, Y) = \langle \omega^\sharp, Y \rangle = \omega(Y)$$

para todo  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ .

Os operadores  $\flat$  e  $\sharp$  são conhecidos como *isomorfismos musicais*.

**Definição 1.10.** Seja  $\omega \in \Omega^p(M^n)$ . A expressão local de  $\omega$  é

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p},$$

definimos sua diferencial exterior  $d\omega \in \Omega^{p+1}(M)$  por

$$d\omega = \frac{\partial \omega_I}{\partial x_k} dx^k \wedge dx^I$$

onde  $\omega_I = \omega_{i_1 i_2 \dots i_p}$  e  $dx^I = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ .

**Definição 1.11.** Fixada uma forma de volume  $dM$  sobre  $M$  definimos o operador estrela de Hodge

$$\star : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{n-p}(M)$$

por

$$\alpha \wedge (\star \beta) = \langle \alpha, \beta \rangle dM$$

para todo  $\alpha, \beta \in \Omega^p(M)$ .

O operador estrela de Hodge é uma das operações básicas em formas diferenciais. As outras duas operações são o produto cunha  $\wedge$  e a diferenciação externa  $d$ . No entanto, a maioria dos tratamentos considera apenas produtos internos com definição positiva e existem pelo menos duas maneiras padrão de generalizar isso em produtos internos de assinatura arbitrária.

Como o operador é linear, vamos calculá-lo em uma base. Usaremos uma base ortonormal  $\{dx^I\}$  para  $\Omega^n$ , onde

$$dx^I = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

se assume que os índices satisfazem  $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ . Logo, para uma métrica definida positiva, vemos que

$$\star(e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) = e_{i_{k+1}} \wedge e_{i_{k+2}} \wedge \dots \wedge e_{i_n},$$

onde  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  é uma permutação par de  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Usando notação tensorial, o dual Hodge de um produto de cunha arbitrário de 1-formas é dado por:

$$\star(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = \frac{\sqrt{|\det[g_{ab}]|}}{(n-k)!} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_k j_k} \varepsilon_{j_1 \dots j_n} dx^{i_{k+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}$$

onde  $\varepsilon_{j_1 \dots j_n}$  é o símbolo Levi-Civita definido para que  $\varepsilon_{1 \dots n} = 1$ , e  $g_{ab}$  é a métrica e  $g^{ij}$  é sua inversa.

A modo de exemplo, consideremos primeiro o caso do espaço  $\mathbb{R}^2$  com um produto interno definido positivo. Consideremos como base  $\{dx, dy\}$ . Logo, o produto interno pode-se expressar em termos da métrica

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Como estamos no caso Euclidiano, todos os vetores base tem norma +1. Portanto, obtemos

$$\star 1 = dx \wedge dy,$$

$$\star dx = dy,$$

$$\star dy = -dx,$$

$$\star(dx \wedge dy) = 1.$$

Outro exemplo é o caso  $\mathbb{R}^3$ , onde a métrica é

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 - dt^2$$

correspondente à base ortonormal  $\{dx, dy, dt\}$ . Lembremos que  $g(dt, dt) = -1$ . Assim, obtemos o seguinte

$$\begin{aligned}\star 1 &= dx \wedge dy \wedge dt, \\ \star dx &= dy \wedge dt, \\ \star dy &= dt \wedge dx, \\ \star dt &= -dx \wedge dy, \\ \star(dx \wedge dy \wedge dt) &= -1.\end{aligned}$$

A seguinte proposição mostra duas importantes propriedades do operador estrela de Hodge.

**Proposição 1.3.1.** *Para quaisquer  $\omega, \eta \in \Omega^p(M)$ , tem-se  $\star\star\omega = (-1)^{p(n-p)}\omega$  e também  $\langle\star\omega, \star\eta\rangle$  (isometria linear).*

*Demonstração.* Uma  $p$ -forma diferencial arbitrária pode ser expandida em seus componentes da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{1}{p!} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\ \star\omega &= \frac{\sqrt{g}}{p!(n-p)!} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_p}_{i_{p+1} i_{p+2} \dots i_n} dx^{i_{p+1}} \wedge dx^{i_{p+2}} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}\end{aligned}$$

já que  $\star\omega$  é uma  $(n-p)$ -forma, podemos escrever

$$\star\omega = \frac{1}{(n-p)!} \bar{\omega}_{i_{p+1} i_{p+2} \dots i_n} dx^{i_{p+1}} \wedge dx^{i_{p+2}} \wedge \dots \wedge dx^{i_n}$$

onde  $\bar{\omega}_{i_{p+1} i_{p+2} \dots i_n} = \frac{\sqrt{g}}{p!} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_p}_{i_{p+1} i_{p+2} \dots i_n}$ , então

$$\begin{aligned}\star\star\omega &= \frac{\sqrt{g}}{p!(n-p)!} \bar{\omega}_{i_{p+1} i_{p+2} \dots i_n} \epsilon^{i_{p+1} i_{p+2} \dots i_n}_{i_1 i_2 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\ &= \frac{\sqrt{g}}{p!(n-p)!} \frac{\sqrt{g}}{p!} \omega_{i_1 i_2 \dots i_p} \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_p}_{i_{p+1} i_{p+2} \dots i_n} \epsilon^{i_{p+1} i_{p+2} \dots i_n}_{i_1 i_2 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \\ &= \frac{|g|}{p!(n-p)!} \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_p}_{i_{p+1} i_{p+2} \dots i_n} \epsilon^{i_{p+1} i_{p+2} \dots i_n}_{i_1 i_2 \dots i_p} \omega \\ &= (-1)^{p(n-p)} \omega\end{aligned}$$

onde foi usado a contração de  $\epsilon$ .

Como consequência, vemos que  $\star$  é de fato uma isometria linear.

$$\langle\star\omega, \star\eta\rangle dM = (\star\omega) \wedge \star(\star\eta) = (-1)^{p(n-p)} (\star\omega) \wedge \eta = \eta \wedge \star\omega = \langle\eta, \omega\rangle dM.$$

Assim,

$$\langle \star\omega, \star\eta \rangle = \langle \eta, \omega \rangle = \langle \omega, \eta \rangle$$

■

Usando o operador estrela de Hodge, vamos definir o  $L^2$ -produto sobre uma variedade fechada  $M$  por:

$$(\alpha, \beta) := \int_M \langle \alpha, \beta \rangle dM,$$

para todos  $\alpha, \beta \in \Omega^p(M)$ . A partir desta definição, podemos definir o adjunto formal

$$\delta_p : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^{p-1}(M),$$

do operador diferencial exterior

$$d_{p-1} : \Omega^{p-1}(M) \rightarrow \Omega^p(M)$$

por

$$(d_{p-1}\omega_1, \omega_2) = (\omega_1, \delta_p\omega_2),$$

para todos  $\omega_1 \in \Omega^{p-1}(M)$  e  $\omega_2 \in \Omega^p(M)$ .

**Proposição 1.3.2.** *Sobre uma variedade compacta sem bordo o adjunto formal do operador  $d$  é dado por*

$$\delta_p = (-1)^{n(p+1)+1} \star d \star.$$

*Demonstração.* Ver [19].

■

**Definição 1.12.** Seja  $\omega \in \Omega^p(M)$ . O Laplaciano de Hodge de  $\omega$ , denotado por  $\Delta_p\omega$ , é uma  $p$ -forma diferencial sobre  $M$  definida por:

$$\Delta_p\omega = \delta_{p+1}d_p\omega + d_{p-1}\delta_p\omega.$$

**Proposição 1.3.3.** *O operador de estrela de Hodge definido sobre uma variedade fechada comuta com o operador Laplaciano de Hodge.*

*Demonstração.* Por simplicidade, vamos representar os operadores  $\Delta_p, d_p$  e  $\delta_p$  apenas por  $\Delta, d$  e  $\delta$ , respectivamente.

$$\begin{aligned} \Delta\star &= d\delta\star + \delta d\star \\ &= (-1)^{n(n-p+1)+1} d\star d\star\star + (-1)^{n(n-p)+1} \star d\star d\star \\ &= \star((-1)^{n(n-p+1)+1} \star d\star)d + \star d((-1)^{n(p+1)+1} \star d\star) \\ &= \star\delta d + \star d\delta \\ &= \star\Delta. \end{aligned}$$



**Definição 1.13.** Seja  $\omega \in \Omega^p(M)$ . O Laplaciano de Bôchner de  $\omega$ , denotado por  $\nabla^*\nabla\omega$ , é uma  $p$ -forma diferencial sobre  $M$  definida por:

$$\nabla^*\nabla\omega = -\text{tr}\nabla^2\omega.$$

Seja  $\{e_i\}_{i=1}^n$  um referencial ortonormal sobre  $M$ ; podemos escrever o Laplaciano de Bôchner de  $\omega$  da seguinte forma:

$$\nabla^*\nabla\omega = -\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\omega + \nabla_{\nabla_{e_i}e_i}\omega.$$

**Definição 1.14.** O operador de Weitzenböck,  $\mathcal{W} : \Omega^p(M) \rightarrow \Omega^p(M)$ , é definido para uma  $p$ -forma diferencial  $\omega$  por:

$$(\mathcal{W}\omega)(X_1, \dots, X_p) = (\mathcal{R}(X_k, e_j)\omega)(X_1, \dots, X_{k-1}, e_j, X_{k+1}, \dots, X_p)$$

para todos  $X_1, \dots, X_p \in \mathfrak{X}(M)$ .

Em particular, se  $\omega \in \Omega^1(M)$ , então o operador Weitzenböck se torna o operador de Ricci. Os operadores Laplaciano de Hodge, Laplaciano de Bôchner e Weitzenböck estão relacionados pela fórmula de Bôchner

$$\Delta\omega = \nabla^*\nabla\omega + \mathcal{W}\omega. \tag{1.14}$$

## Capítulo 2

# Uma caracterização espectral do operador de Jacobi em superfícies mínimas

Neste capítulo, caracterizamos o toro de Clifford como a superfície que maximiza o segundo autovalor do operador de Jacobi entre todas as superfícies orientáveis imersas e fechadas de  $\mathbb{S}^{2+p}$ ,  $p \geq 1$ , com gênero maior que zero. Na Seção 2.1 introduzimos alguma teoria sobre estabilidade e caracterização espectral de hipersuperfícies mínimas em  $\mathbb{S}^{n+1}$ . Em seguida, na seção 2.2, apresentamos uma técnica introduzida por Li e Yau [22] baseada no uso do grupo de aplicações conformes, assim como as ferramentas que serão utilizadas para a prova dos nossos resultados. Finalizamos com a Seção 2.3, na qual mostramos nossos primeiros resultados os quais envolvem uma caracterização dos toros de Clifford via o segundo autovalor forte do operador de Jacobi e também damos uma nova prova para uma conjectura de classificação de hipersuperfícies mínimas não totalmente geodésicas em  $\mathbb{S}^{n+1}$ .

### 2.1 Estabilidade e caracterização espectral de hipersuperfícies fechadas em $\mathbb{S}^{n+1}$

Considera-se a imersão  $\psi : M^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$  de uma hipersuperfície orientável na esfera Euclidiana unitária  $\mathbb{S}^{n+1}$ . Denota-se por  $A$  o operador forma de  $M$  com relação a um campo vetorial normal unitário definido globalmente  $N$ . Isto é,  $A : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  é o

endomorfismo determinado por:

$$AX = -\tilde{\nabla}_X N = -\bar{\nabla}_X N, \quad X \in \mathfrak{X}(M),$$

onde  $\tilde{\nabla}$  e  $\bar{\nabla}$  denotam, respectivamente, as conexões de Levi-Civita em  $\mathbb{R}^{n+2}$  e  $\mathbb{S}^{n+1}$ . Como vimos no Capítulo 1,  $A$  define um endomorfismo simétrico em  $\mathfrak{X}(M)$  cujos autovalores  $\kappa_1, \dots, \kappa_n$  são geralmente referidos como curvaturas principais da hipersuperfície.

Como foi definido no Capítulo 1, a curvatura média de  $M$  é dada por:

$$H = \frac{1}{n} \text{tr} A = \frac{1}{n} (\kappa_1 + \dots + \kappa_n).$$

Neste trabalho, assumiremos que  $M^n$  seja compacta. Qualquer função diferenciável  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  induz uma variação normal  $\psi_t : M \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$  da imersão original  $\psi$ , a qual é dada por:

$$\psi_t(p) = \text{Exp}_{\psi(p)}(tf(p)N(p)) = \cos(tf(p))\psi(p) + \text{sen}(tf(p))\psi(p)$$

onde  $\text{Exp}$  denota a aplicação exponencial em  $\mathbb{S}^{n+1}$ . Como  $M$  é compacta e  $\psi_0 = \psi$  é uma imersão, então existe  $\epsilon > 0$  tal que qualquer  $\psi_t$  é também uma imersão, para qualquer  $|t| < \epsilon$ .

A partir disso, consideramos o funcional área  $\mathcal{A} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  o qual designa para cada  $t$  a área  $n$ -dimensional de  $M$  com relação à métrica induzida em  $M$  pela imersão  $\psi_t$ . Ou seja,

$$\mathcal{A}(t) = \text{Área}(M_t) = \int_M dM_t,$$

onde  $M_t$  representa a variedade  $M$  dotada da métrica induzida por  $\psi_t$  da métrica Euclidiana em  $\mathbb{S}^{n+1}$ , e  $dM_t$  é o elemento área  $n$ -dimensional dessa métrica em  $M$ .

Como foi visto no Capítulo 1, para nosso caso de estudo, a primeira fórmula de variação da área estabelece que:

$$\delta_f \mathcal{A} = \frac{d\mathcal{A}}{dt}(0) = -n \int_M f H dM.$$

Como consequência direta,  $M$  é uma hipersuperfície mínima (isto é  $H = 0$  em  $M$ , pelo Lema 1.1.6) se, e somente se,  $\delta_f \mathcal{A} = 0$ , para qualquer função diferenciável  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ . Em outras palavras, hipersuperfícies mínimas são caracterizadas como pontos críticos do funcional área.

O operador de estabilidade do problema variacional para este trabalho é dada pela segunda fórmula de variação para a área, estabelecida da seguinte forma:

$$\delta_f^2 \mathcal{A} = \frac{d^2 \mathcal{A}}{dt^2}(0) = - \int_M (f \Delta f + (\|A\|^2 + n) f^2) d\Sigma = - \int_M f J f dM.$$

Aqui,  $J = \Delta + \|A\|^2 + n$ , onde  $\Delta$  representa o operador Laplaciano de  $M$  e  $\|A\|^2 = \text{tr}(A^2)$  é o quadrado da norma do operador forma. O operador  $J : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$  é chamado de operador de Jacobi (ou de estabilidade) para a hipersuperfície  $M$ . O operador de Jacobi  $J$  pertence a uma classe de operadores os quais são usualmente conhecidos como operadores Schrödinger, isto é, operadores da forma  $\Delta + q$ , onde  $q$  é qualquer função contínua em  $M$ .

Como é de conhecimento geral, o espectro de  $J$  consiste de uma sequência crescente de autovalores  $\lambda_k$  com multiplicidades finitas  $m_k$ , tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = +\infty$ .

$$\text{Spec}(J) = \{\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots\}.$$

Além disso, o primeiro autovalor é simples ( $m_1 = 1$ ) e satisfaz a seguinte caracterização espectral (ver [21]):

$$\lambda_1 = \min \left\{ \frac{-\int_M f J f dM}{\int_M f^2 dM} : f \in \mathcal{C}^\infty(M), f \neq 0 \right\}.$$

Neste trabalho, dizemos que um número real  $\lambda$  é um **autovalor** de  $J$  se, e somente se,  $Jf + \lambda f = 0$  para alguma função diferenciável  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ,  $f \neq 0$ .

O operador de Jacobi induz a **forma quadrática**  $\mathcal{Q} : \mathcal{C}^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  agindo sobre o espaço de funções diferenciáveis em  $M$ , a qual é definida por:

$$\mathcal{Q}(f) = - \int_M f J f dM.$$

Como foi definido no Capítulo 1, o **índice** de uma hipersuperfície mínima  $M$  que se denota por  $\text{Ind}(M)$ , é o número de autovalores negativos de  $J$  (contando multiplicidades), o qual é necessariamente finito e é dado por

$$\text{Ind}(M) = \sum_{\lambda_k < 0} m_k < \infty.$$

Equivalentemente,  $\text{Ind}(M)$  é a dimensão máxima de qualquer subespaço  $V$  de  $\mathcal{C}^\infty(M)$  no qual  $\mathcal{Q}$  é definida negativa, ou seja

$$\text{Ind}(M) = \{\dim V : V \leq \mathcal{C}^\infty(M), \quad \mathcal{Q}(f) < 0 \text{ para qualquer } f \in V\}.$$

Uma hipersuperfície mínima se diz **estável** se para qualquer  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  temos que  $\mathcal{Q}(f) \geq 0$ . Em termos de índice, estabilidade significaria que  $\text{Ind}(M) = 0$ . Intuitivamente,  $\text{Ind}(M)$  mede o número de direções independentes em que a hipersuperfície falha ao

minimizar área. Para ver isto, observe que se  $\mathcal{Q}(f) < 0$  para alguma função  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ , então  $\delta_f^2 \mathcal{A} < 0$  e portanto  $\text{Área}(M) > \text{Área}(M_t)$  para pequenos valores de  $t \neq 0$  na variação normal de  $M$  induzida por  $f$ .

Isto significa que a hipersuperfície mínima  $M$ , embora seja um ponto crítico do funcional área, não é um mínimo local. No caso de hipersuperfícies mínimas na esfera  $\mathbb{S}^{n+1}$  isto é sempre verdade, só basta usar a função constante  $f = 1$  para obter:

$$\mathcal{Q}(1) = - \int_M (\|A\|^2 + n) dM = -n|M| - \int_M \|A\|^2 dM \leq -n|M| < 0.$$

Em particular, qualquer hipersuperfície mínima compacta em  $\mathbb{S}^{n+1}$  é instável, o que é equivalente a dizer que  $\text{Ind}(M) \geq 1$ .

Simons [31] caracterizou os equadores totalmente geodésicos  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$  como as únicas hipersuperfícies mínimas na esfera  $\mathbb{S}^{n+1}$  com  $\text{Ind}(M) = 1$ . Mais tarde, Urbano [32] e El Soufi [15] provaram para o caso  $n = 2$  e para o caso geral  $n$ , respectivamente, que se  $M$  não for um equador totalmente geodésico, então  $\text{Ind}(M) \geq n + 3$ .

Segue o seguinte resultado:

**Teorema 2.1.1** ([15],[31],[32]). *Seja  $M$  uma hipersuperfície mínima, compacta e orientável na esfera Euclideana  $\mathbb{S}^{n+1}$ . Então*

- (i)  $\text{Ind}(M) = 1$  ( $M$  é um equador totalmente geodésico  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$ ), ou
- (ii)  $\text{Ind}(M) \geq n + 3$ .

### 2.1.1 Toros mínimos de Clifford

Além dos equadores totalmente geodésicos, os quais são obtidos como interseções de  $\mathbb{S}^{n+1}$  com hiperplanos lineares de  $\mathbb{R}^{n+2}$ , existem outros tipos de hipersuperfícies em  $\mathbb{S}^{n+1}$ , os chamados de toros de Clifford, os quais são obtidos considerando-se imersões canônicas  $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \hookrightarrow \mathbb{R}^{k+1}$  e  $\mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n}) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n-k+1}$ , para um determinado inteiro  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ , tomando o produto de imersões  $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n}) \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ .

Dado um ponto  $(x, y) \in \mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n})$ , o campo vetorial normal unitário é definido por:

$$N(x, y) = \left( \sqrt{\frac{n-k}{n}} x, -\sqrt{\frac{k}{n-k}} y \right).$$

Com respeito a sua orientação, suas curvaturas principais são dadas por:

$$\kappa_1 = \dots = \kappa_k = -\sqrt{\frac{n-k}{n}}, \quad \kappa_{k+1} = \dots = \kappa_n = \sqrt{\frac{k}{n-k}}.$$

Então, qualquer toro de Clifford tem  $\|A\|^2 = n$ . Em particular, o operador de Jacobi se reduz a  $J = \Delta + 2n$ , onde  $\Delta$  é o Laplaciano sobre a variedade produto  $M = \mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n})$ , e seus autovalores de  $J$  são dadas por  $\lambda_i = \mu_i - 2n$ , onde  $\mu_i$  são os autovalores de  $\Delta$ . Portanto, o índice de  $M$  reduz ao número de autovalores de  $\Delta$  (contados com multiplicidade) estritamente menores que  $2n$ .

Para calcular o índice, simplesmente basta lembrar que se  $\alpha$  é um autovalor do Laplaciano sobre a variedade Riemanniana  $M$  com multiplicidade  $m_\alpha$  e se  $\beta$  for um autovalor do Laplaciano sobre a variedade  $N$  com multiplicidade  $m_\beta$ , então  $\mu = \alpha + \beta$  é um autovalor do Laplaciano sobre a variedade produto  $M \times N$ , e a multiplicidade de  $\mu$  é a soma dos produtos  $m_\alpha m_\beta$  para todos os possíveis valores de  $\alpha$  e  $\beta$  que satisfaçam  $\mu = \alpha + \beta$ , para mais detalhes ver [7]. Segue do Teorema 1.2.2 que os autovalores do Laplaciano sobre  $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n})$  são dados por:

$$\alpha_i = \frac{n(i-1)(k+i-2)}{k}, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

com multiplicidades

$$m_{\alpha_1} = 1, \quad m_{\alpha_2} = k + 1,$$

e

$$m_{\alpha_i} = \binom{k+i-1}{i-1} - \binom{k+i-3}{i-3}, \quad i = 3, 4, \dots,$$

e os autovalores do Laplaciano sobre  $\mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n})$  são dados por:

$$\beta_j = \frac{n(j-1)(n-k+j-2)}{n-k}, \quad j = 1, 2, 3, \dots,$$

com multiplicidades

$$m_{\beta_1} = 1, \quad m_{\beta_2} = n - k + 1,$$

e

$$m_{\beta_i} = \binom{n-k+j-1}{j-1} - \binom{n-k+j-3}{j-3}, \quad i = 3, 4, \dots$$

Segue-se facilmente daqui que  $\mu_1 = 0$  com multiplicidade 1,  $\mu_2 = \alpha_1 + \beta_2 = \alpha_2 + \beta_1 = n$  com multiplicidade  $n + 2$  e  $\mu_3 = \alpha_2 + \beta_2 = 2n$ . Portanto, todos os toros mínimos de Clifford em  $\mathbb{S}^{n+1}$  têm  $\text{Ind}(M) = n + 3$ .

Veremos na Seção 2.4 uma conjectura de classificação das hipersuperfícies não totalmente geodésicas que envolve os toros mínimos de Clifford. Nas duas seções seguintes, caracterizaremos estas hipersuperfícies via o primeiro e o segundo autovalores do operador de Jacobi.

### 2.1.2 Uma caracterização espectral do toro mínimo de Clifford pelo primeiro autovalor de estabilidade

Na seção anterior mencionamos que o operador de Jacobi ou de estabilidade  $J = \Delta + \|A\|^2 + n$  é um operador tipo Schrödinger, ou seja um operador da forma  $\Delta + q$ . Considera-se o operador tipo Schrödinger  $L = \Delta + \|A\|^2$ , e seja  $\lambda_1^L$  seu primeiro autovalor. Simons [31] provou que  $\lambda_1^L \leq -n$  se  $M$  é não totalmente geodésico. Recentemente, Wu [33] obteve a seguinte caracterização do toro de Clifford através do primeiro autovalor de  $L$ .

**Teorema 2.1.2** ([33]). *Seja  $M^n$  uma hipersuperfície mínima, compacta e orientável imersa na esfera Euclideana  $\mathbb{S}^{n+1}$ , e seja  $\lambda_1^L$  o primeiro autovalor do operador Schrödinger  $L = \Delta + \|A\|^2$ . Então,*

- (i)  $\lambda_1^L = 0$  ( $M$  é um equador totalmente geodésico  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$ ), ou
- (ii)  $\lambda_1^L \leq -n$ .

Além disso,  $\lambda_1^L = -n$  se, e somente se,  $M$  é um toro de Clifford  $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n})$ .

Observa-se que o operador  $L$  está relacionado ao operador de Jacobi  $J$  associado à caracterização de hipersuperfícies mínimas em  $\mathbb{S}^{n+1}$ , o qual é dado por  $J = \Delta + \|A\|^2 + n = L + n$ . Em particular, seus espectros estão relacionados pelo fato que se  $\lambda \in \text{Spec}(J)$  se, e somente se,  $\lambda + n \in \text{Spec}(L)$  e  $\lambda_1^J = \lambda_1^L - n$ . Portanto, uma consequência do resultado anterior é a seguinte caracterização do toro de Clifford via o primeiro autovalor do operador de Jacobi dado por Wu [33].

**Teorema 2.1.3** ([33]). *Seja  $M^n$  uma hipersuperfície mínima, compacta e orientável imersa na esfera Euclideana  $\mathbb{S}^{n+1}$ , e seja  $\lambda_1^J$  o primeiro autovalor do operador de estabilidade  $J = \Delta + \|A\|^2 + n$ . Então*

- (i)  $\lambda_1^J = -n$  ( $M$  é um equador totalmente geodésico  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$ ), ou

(ii)  $\lambda_1^J \leq -2n$ .

Além disso,  $\lambda_1^J = -2n$  se, e somente se,  $M$  é um toro de Clifford  $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n})$ .

Este teorema foi obtido também por Perdomo [27] usando um novo método o qual é completamente diferente do método usado por Wu no Teorema 2.1.3.

Pode-se também ressaltar que na prova do Teorema 2.1.3 foi utilizada uma fórmula famosa para o Laplaciano da função  $\|A\|^2$  em  $M$ , a qual foi estabelecida por Simon [31]. Especificamente, para o caso mínimo em  $\mathbb{S}^{n+1}$ , a fórmula de Simons é como segue:

$$\frac{1}{2}\Delta\|A\|^2 = |\nabla A|^2 + (n - \|A\|^2)\|A\|^2.$$

Como uma aplicação da fórmula de Simons, temos o seguinte resultado.

**Teorema 2.1.4** ([12],[20],[30]). *Seja  $M$  uma hipersuperfície mínima, compacta e orientável imersa na esfera Euclideana  $\mathbb{S}^{n+1}$ , e assumamos que  $\|A\|^2 \leq n$  em  $M$ . Então*

(i)  $\|A\|^2 = 0$  ( $M$  é um equador totalmente geodésico  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$ ), ou

(ii)  $\|A\|^2 = n$  e  $M$  é um toro mínimo de Clifford.

A parte (i) e o limite dado em (ii) foram dados por Simons [30, Corolário 5.3.2]. Por outro lado, a caracterização do toro mínimo dado em (ii), a qual é local, foi obtida independente e simultaneamente por Chern, do Carmo e Kobayashi [12] e Lawson [20].

## 2.2 Funções testes baseadas em aplicações conformes de $\mathbb{S}^{n+1}$ em $\mathbb{S}^{n+1}$

Nesta seção, apresentamos duas ferramentas fundamentais para as demonstrações dos nossos primeiros resultados. Começamos definindo duas famílias de funções geométricas sobre hipersuperfícies nas esferas.

Seja  $\psi : M^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$  uma imersão de uma variedade  $n$ -dimensional na esfera unitária. Para qualquer  $m \in M$  denotamos por  $T_m M$  o espaço tangente de  $M$  em  $m$ , o qual é um subespaço de  $\mathbb{R}^{n+2}$ . Isso implica que existe um único vetor  $N(m)$  no complemento ortogonal de  $T_m M$ , tal que  $\langle N(m), m \rangle = 0$ . Quando  $M$  é orientável, podemos escolher  $N(m)$  tal que defina uma aplicação  $N : M \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ . Esta aplicação é conhecida como aplicação de Gauss.

Em particular, quando tratarmos com aspectos locais de  $M$ , identificamos  $M$  com o conjunto  $\psi(M) \subset \mathbb{R}^{n+2}$ , e o espaço  $T_m M$  com o subespaço  $d\psi_m(T_m M)$  de  $\mathbb{R}^{n+2}$ .

Fixado  $w \in \mathbb{R}^{n+2}$ , defina-se as funções  $\ell_w : M \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f_w : M \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$\ell_w(m) = \langle \psi(m), w \rangle \quad e \quad f_w(m) = \langle N(m), w \rangle,$$

para todo  $m \in M$ .

Observe que  $\ell_w$  e  $f_w$  são, respectivamente, as coordenadas da imersão  $\psi$  e da aplicação de Gauss.

Estas duas famílias de funções geométricas em hipersuperfícies são muito úteis no estudo do espectro de operadores elípticos definidos em  $M$  como o Laplaciano e o operador de Jacobi.

Fixado  $w \in \mathbb{R}^{n+2}$ , defina-se o campo vetorial tangente  $w^\top : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$  por:

$$w^\top(m) = w - \ell_w(m)\psi(m) - f_w(m)N(m)$$

para todo  $m \in M$ .

Claramente,  $w^\top$  é um campo vetorial tangente em  $M$  porque  $\langle w^\top(m), \psi(m) \rangle = 0$  e  $\langle w^\top(m), N(m) \rangle = 0$  para qualquer  $m \in M$ . De modo preciso,  $w^\top(m)$  é a projeção ortogonal do vetor  $w$  em  $T_m M$ .

**Proposição 2.2.1.** *Sejam  $M^n$  é uma hipersuperfície diferenciável com curvatura média constante de  $\mathbb{S}^{n+1}$  e  $A$  o operador forma com respeito ao campo vetorial unitário  $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$  então, o gradiente e o Laplaciano das funções  $\ell_w$  e  $f_w$  são dadas por:*

$$\nabla \ell_w = w^\top, \quad \nabla f_w = -A(w^\top), \quad (2.1)$$

$$\Delta \ell_w = -n\ell_w + nHf_w, \quad \Delta f_w = -\|A\|^2 f_w + nH\ell_w. \quad (2.2)$$

*Demonstração.* Para qualquer vetor  $w \in T_x M$ , seja  $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  uma curva tal que  $\alpha(0) = x$  e  $\alpha'(0) = w$ . Note que

$$d\ell_v(w) = \left. \frac{d\ell_v(\alpha(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d\langle \alpha(t), v \rangle}{dt} \right|_{t=0} = \langle \alpha'(0), v \rangle = \langle w, v^\top(x) \rangle.$$

Desde que a igualdade anterior é verdadeira para qualquer  $w \in T_x M$ , então,  $\nabla \ell_v(x) = v^\top$ .

Para a função  $f_v$  tem-se

$$\begin{aligned} df_v(w) &= \left. \frac{df_v(\alpha(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d\langle N(\alpha(t)), v \rangle}{dt} \right|_{t=0} = \langle dN(\alpha'(0)), v \rangle \\ &= -\langle A(w), v^\top(x) \rangle = \langle w, -A(v^\top(x)) \rangle. \end{aligned}$$

Para calcular os Laplacianos das funções  $\ell_v$  e  $f_v$  utilizamos os gradientes encontrados no passo anterior, isto é

$$\nabla_w \nabla \ell_v = \nabla_w v^\top = -\ell_v(x)w + f_v(x)A_x(w),$$

onde  $\nabla$  denota a derivada intrínseca em  $M$ . Seja  $\{e_1, \dots, e_n\}$  uma base ortonormal de  $T_m M$ . Então, o Laplaciano de  $\ell_v$  no ponto  $m$  é dado por

$$\Delta \ell_v(m) = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} \nabla \ell_v, e_i \rangle = -n\ell_v(m) + \text{tr}(A_m)f_v(m) = -n\ell_v(m) + nH_v(m).$$

Por outro lado, usando a equação de Codazzi tem-se também

$$\begin{aligned} \nabla_w \nabla f_v &= -\nabla_w(A(v^\top)) = -(\nabla_w A)(v^\top(m)) - A_m(\nabla_w v^\top) \\ &= -(\nabla_{v^\top} A)(w) + \ell_v(m)A_m(w) - f_v(x)A_m^2(w). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Delta f_v(m) &= \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{e_i} \nabla f_v, e_i \rangle \\ &= -\sum_{i=1}^n \langle (\nabla_{v^\top(m)} A)(e_i)e_i \rangle + nH\ell_v(m) - \|A\|^2(m)f_v(m) \\ &= -n\langle v^\top(m), \nabla H(m) \rangle + nH\ell_v(m) - \|A\|^2(m)f_v(m) \\ &= nH\ell_v(m) - \|A\|^2(m)f_v(m), \end{aligned}$$

desde que a curvatura media  $H$  seja constante. ■

Finalmente, mostramos uma técnica introduzida por Li e Yau [22], a qual faz uso do grupo de aplicações conformes de  $\mathbb{S}^{n+1}$  em  $\mathbb{S}^{n+1}$ .

Seja  $\mathbb{D}^{n+2}$  a bola aberta unitária delimitada por  $\mathbb{S}^{n+1}$  em  $\mathbb{R}^{n+2}$  e  $G$  o grupo conforme de  $\mathbb{S}^{n+1}$ . Para cada  $\bar{g} \in \mathbb{D}^{n+2}$ , considera-se a aplicação  $F_{\bar{g}} : \mathbb{S}^{n+1} \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$  dada por

$$F_{\bar{g}}(p) = \frac{p + (\mu\langle p, \bar{g} \rangle + \lambda)\bar{g}}{\lambda(\langle p, \bar{g} \rangle + 1)^2} \quad (2.3)$$

para todo  $p \in \mathbb{S}^{n+1}$ , onde  $\lambda = (1 - |\bar{g}|^2)^{-\frac{1}{2}}$ ,  $\mu = (\lambda - 1)|\bar{g}|^{-2}$  e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o produto interno usual em  $\mathbb{R}^{n+2}$ . Uma verificação direta mostra que  $F_{\bar{g}}$  é uma transformação conforme de  $\mathbb{S}^{n+1}$  em  $\mathbb{S}^{n+1}$  a qual pode ser estendida para uma isometria de  $\mathbb{D}^{n+2}$  dotada com a métrica hiperbólica, que transporta a origem de  $\mathbb{D}^{n+2}$  no ponto  $\bar{g}$ . Além disso, cada transformação de  $G$  pode ser expressa por  $T \circ F_{\bar{g}}$ , onde  $T$  é uma transformação ortogonal de  $\mathbb{S}^{n+1}$  e  $F_{\bar{g}}$

é dada por (2.3), para algum  $\bar{g} \in \mathbb{D}^{n+2}$ .

A aplicação diferencial  $dF_{\bar{g}}$  é dada por:

$$dF_{\bar{g}}(v) = \lambda^{-2}(\langle p, \bar{g} \rangle + 1)^{-2} \{ \lambda(\langle p, \bar{g} \rangle + 1)v - \lambda \langle v, \bar{g} \rangle p + \langle v, \bar{g} \rangle (1 - \lambda) |\bar{g}|^{-2} \bar{g} \},$$

onde  $v$  é um vetor tangente a  $\mathbb{S}^{n+1}$  em  $p$ . Assim, para dois vetores  $v, w$  tem-se:

$$\langle dF_{\bar{g}}(v), dF_{\bar{g}}(w) \rangle = \frac{1 - |\bar{g}|^2}{(\langle p, \bar{g} \rangle + 1)^2} \langle v, w \rangle.$$

Em [22], Li e Yau provaram o seguinte lema:

**Lema 2.2.2** ([22]). *Se  $h$  é uma métrica Riemanniana em  $M$  e  $\psi : (M, h) \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$  é uma imersão conforme, então existe  $\bar{g} \in \mathbb{D}^{n+2}$  tal que*

$$\int_M (F_{\bar{g}} \circ \psi) dv = (0, \dots, 0).$$

Aqui o diferencial de volume  $dv$  é tomado com respeito à métrica  $h$ .

## 2.3 Uma caracterização de hipersuperfícies via o segundo autovalor do operador de Jacobi

Nesta seção, apresentamos nossos primeiros resultados os quais são inspirados nos trabalhos de A. Mendes [24] e El Soufi e Ilias [16]. Mendes caracterizou os toros de Clifford como as superfícies que maximizam o segundo autovalor do operador de Jacobi entre todas as superfícies fechadas, orientáveis e imersas em  $\mathbb{S}^3$ .

Ele provou o seguinte:

**Teorema 2.3.1** ([24]). *Seja  $M$  uma superfície fechada, orientável e imersa em  $\mathbb{S}^3$  de gênero  $g(M)$  maior ou igual a 1. Então o segundo autovalor de  $J = \Delta + \|A\|^2 + 2$  satisfaz  $\lambda_2^J(M) \leq -2$  e a igualdade ocorre se, e somente se,  $M$  é congruente ao toro de Clifford.*

El Soufi e Ilias [16] derivaram um limite superior para o segundo autovalor de um operador Schrödinger da forma  $\Delta + q$  de uma subvariedade compacta  $(M^n, g)$  de um espaço forma Riemanniano, em termos da curvatura média total de  $M$  e do valor médio do potencial  $q$ .

Eles provaram o seguinte:

**Teorema 2.3.2** ([16]). *Seja  $\psi : M^m \rightarrow N^n(c)$  uma imersão de uma subvariedade compacta, conexa com  $m \geq 2$  em um espaço forma  $N^n(c)$ . Para qualquer potencial contínuo  $q$  em  $M^m$ , tem-se*

$$\lambda_2^{\Delta+q}(M) \leq \frac{1}{|M|} \int_M \{m(|H|^2 + c) + q\} v_g.$$

*Se  $m \geq 3$ , então a igualdade ocorre se, e somente se,  $q$  é constante e  $\psi(M)$  é uma subvariedade mínima de uma esfera geodésica de raio  $r_c$  de  $N(c)$ , com  $r_0 = \left(\frac{m}{\lambda_2^{\Delta}}\right)^{1/2}$ ,  $r_1 = \arcsin r_0$  e  $r_{-1} = \sinh^{-1} r_0$ .*

Neste último resultado,  $N(c)$  representa o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$  para  $c = 0$ , a esfera Euclidiana unitária  $\mathbb{S}^n$  para  $c = 1$  e o espaço hiperbólico  $\mathbb{H}^n$  para  $c = -1$ .

Nesta direção, conseguimos estender o resultado de A. Mendes para codimensão alta no caso de superfícies e também provamos que o resultado se cumpre para dimensão alta com uma hipótese adicional sob a curvatura escalar. Portanto, nosso primeiro resultado se enuncia como:

**Teorema 2.3.3.** *Seja  $M$  uma superfície fechada e orientável imersa na esfera Euclidiana unitária  $\mathbb{S}^{2+p}$ ,  $p \geq 1$ , com gênero  $g(M)$  maior ou igual a 1. Então, o segundo autovalor do operador  $J = \Delta + \|A\|^2 + 2$  satisfaz  $\lambda_2^J \leq -2$ , com igualdade se, e somente se,  $M$  é o toro mínimo de Clifford  $\mathbb{S}^1\left(\sqrt{1/2}\right) \times \mathbb{S}^1\left(\sqrt{1/2}\right)$ .*

Para provar o Teorema 2.3.3 precisaremos do seguinte resultado:

**Teorema 2.3.4.** *Seja  $M$  uma superfície mínima fechada e orientável imersa na esfera Euclidiana unitária  $\mathbb{S}^{2+p}$ ,  $p \geq 1$ , com gênero  $(M) \geq 1$ . Então, o segundo autovalor do operador Jacobi  $J = \Delta + \|A\|^2 + 2$  satisfaz  $\lambda_2^J \leq -2$ , com igualdade se, e somente se,  $M$  é o toro mínimo de Clifford  $\mathbb{S}^1\left(\sqrt{1/2}\right) \times \mathbb{S}^1\left(\sqrt{1/2}\right)$ .*

A demonstração do Teorema 2.3.4 segue de uma sequência de lemas:

**Lema 2.3.5.** *Seja  $\psi : M^k \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ ,  $k \leq n$ , uma aplicação diferenciável,  $g \in \mathbb{D}^{n+2}$  e  $\{e_i\}_{i=1}^{n+2}$  uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^{n+2}$ . Se definimos  $h_i : M \rightarrow \mathbb{R}$  por  $h_i(m) = \langle F_g(\psi(m)), e_i \rangle$  e  $s_i : M \rightarrow \mathbb{R}$  por  $s_i(m) = \langle \psi(m), e_i \rangle$ , então*

$$\sum_{i=1}^{n+2} |\nabla h_i|^2(m) = \frac{1 - |g|^2}{(1 + \langle \psi(m), g \rangle)^2} \sum_{i=1}^{n+2} |\nabla s_i|^2(m).$$

*Demonstração.* Seja  $\{v_i\}_{i=1}^k$  uma base ortonormal de  $T_m M$ . Tem-se

$$\begin{aligned} |\nabla h_i|^2(m) &= \sum_{j=1}^k (v_j(h_i))^2 \\ &= \sum_{j=1}^k (\langle (dF_g)_{\psi(m)}(d\psi(v_j)), e_i \rangle)^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+2} |\nabla h_i|^2(m) &= \sum_{i=1}^{n+2} \sum_{j=1}^k (\langle (dF_g)_{\psi(m)}(d\psi(v_j)), e_i \rangle)^2 \\ &= \sum_{j=1}^k \|(dF_g)_{\psi(m)}(d\psi(v_j))\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^k \frac{1 - |g|^2}{(1 + \langle \psi(m), g \rangle)^2} \|d\psi(v_j)\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^k \frac{1 - |g|^2}{(1 + \langle \psi(m), g \rangle)^2} \sum_{i=1}^{n+2} (v_j(s_i))^2 \\ &= \frac{1 - |g|^2}{(1 + \langle \psi(m), g \rangle)^2} \sum_{i=1}^{n+2} |\nabla s_i|^2(m). \end{aligned}$$

■

O seguinte lema dá uma expressão que relaciona volume de  $M$ ,  $|M|$ , em termos de uma das funções coordenadas.

**Lema 2.3.6.** *Seja  $\psi : M^k \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$  uma imersão isométrica de uma variedade com curvatura média constante em uma esfera unitária. Para um vetor fixo  $w \in \mathbb{D}^{n+2}$  defina a função  $f = 1 + \ell_w(m)$ . Então*

$$\int_M \frac{1 - |w|^2}{(1 + \ell_w)^2} = |M| - \int_M \frac{|w|^2 - \ell_w^2 - \frac{2}{k} |\nabla \ell_w|^2}{(1 + \ell_w)^2} - \int_M \frac{2H f_w}{1 + \ell_w}.$$

*Demonstração.* Segue da Proposição 2.2.1 e de uma verificação direta que

$$\begin{aligned}
\Delta \log f &= \operatorname{div} \nabla (\log(\ell_w + 1)) \\
&= \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \ell_w}{1 + \ell_w} \right) \\
&= \frac{\Delta \ell_w}{1 + \ell_w} - \frac{|\nabla \ell_w|^2}{(1 + \ell_w)^2} \\
&= \frac{-k\ell_w + kHf_w}{1 + \ell_w} - \frac{|\nabla \ell_w|^2}{(1 + \ell_w)^2} \\
&= -\frac{k}{2} \left( \frac{2\ell_w(1 + \ell_w) - 2Hf_w(1 + \ell_w) + \frac{2}{k}|w^\top|^2}{(1 + \ell_w)^2} \right) \\
&= -\frac{k}{2} \left( \frac{2\ell_w + \ell_w^2 + \ell_w^2 + 1 - 1 - 2Hf_w(1 + \ell_w) + \frac{2}{k}|w^\top|^2}{(1 + \ell_w)^2} \right) \\
&= -\frac{k}{2} \left( 1 + \frac{-1 + \ell_w^2 + |w|^2 - |w|^2 + \frac{2}{k}|w^\top|^2}{(1 + \ell_w)^2} - \frac{2Hf_w}{1 + \ell_w} \right) \\
&= -\frac{k}{2} \left( 1 - \frac{1 - |w|^2}{(1 + \ell_w)^2} - \frac{|w|^2 - \ell_w^2 - \frac{2}{k}|w^\top|^2}{(1 + \ell_w)^2} - \frac{2Hf_w}{1 + \ell_w} \right).
\end{aligned}$$

Integrando esta última equação, segue o lema. ■

***Demonstração do Teorema 2.3.4.*** Sabe-se que o primeiro autoespaço de  $\Delta + \|A\|^2 + 2$  é gerado por uma autofunção positiva  $\rho$ . Consideremos a variedade Riemanniana  $(M, h)$ , onde  $h$  é a métrica  $\rho$ -vezes a métrica induzida por  $\psi$ . Desde que  $\psi : (M, h) \rightarrow \mathbb{S}^{p+2}$  é uma aplicação conforme, pelo Lema 2.2.2 podemos encontrar  $\bar{g} \in \mathbb{D}^{p+3}$  tal que

$$\int_{(M, h)} F_{\bar{g}} \circ \psi = \int_M \rho(F_{\bar{g}} \circ \psi) = (0, \dots, 0),$$

onde a primeira igualdade obtém-se pela fórmula de mudança de variáveis em integrais múltiplas. Fazendo  $\phi = F_{\bar{g}} \circ \psi = (\phi_1, \dots, \phi_{p+3})$ , concluímos que as funções  $\phi_i = \langle F_{\bar{g}}(\psi(m)), e_i \rangle$ , com  $\{e_i\}_{i=1}^{p+3}$  base ortonormal de  $\mathbb{R}^{p+3}$ , são perpendiculares à função  $\rho$ , ou seja

$$\int_M \rho \phi_i = 0.$$

Pelo princípio min-max, temos que para todo  $i \leq p + 3$

$$\begin{aligned}
\lambda_2^J \int_M \phi_i^2 &\leq \int_M -J(\phi_i) \phi_i \\
&= \int_M |\nabla \phi_i|^2 - \int_M (\|A\|^2 + 2) \phi_i^2.
\end{aligned}$$

Somando em  $i = 1, \dots, p + 3$  e usando o fato que  $\sum_{i=1}^{p+3} \phi_i^2 = 1$  e  $|\nabla \phi|^2 = \sum_{i=1}^{p+3} |\nabla \phi_i|^2$  obtemos:

$$\lambda_2^J \leq \frac{1}{|M|} \int_M |\nabla \phi|^2 - \frac{1}{|M|} \int_M (\|A\|^2 + 2). \quad (2.4)$$

Por outro lado, do Lema 2.3.5 podemos ver que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{p+3} |\nabla \phi_i|^2 &= \frac{1 - |\bar{g}|^2}{(1 + \langle \psi(x), \bar{g} \rangle)^2} \sum_{i=1}^{p+3} |\nabla l_{e_i}|^2 = \frac{1 - |\bar{g}|^2}{(1 + \langle \psi(x), \bar{g} \rangle)^2} \sum_{i=1}^{p+3} |e_i^\top|^2 \\ &= 2 \left( \frac{1 - |\bar{g}|^2}{(1 + \langle \psi(x), \bar{g} \rangle)^2} \right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Lembrando que para nosso caso, dado qualquer vetor fixo  $v$  em  $\mathbb{R}^{p+3}$ , pode-se definir o campo vetorial tangente  $v^\top : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^{p+3}$  por:

$$v^\top(m) = v - l_v(m)\psi(m) - \sum_{j=1}^p f_v^j N_j(m),$$

onde  $N_j$  são os vetores unitarios no complemento ortogonal de  $T_m M$  tal que  $\langle N_j(m), m \rangle = 0$  para  $j = 1, \dots, p$ ,  $f_v^j = \langle v, N_j \rangle$ , para algum  $j = 1, \dots, p$  e  $v^\top$  é um campo vetorial tangente em  $M$ , pois  $\langle v^\top(m), \psi(m) \rangle = 0$  e  $\langle v^\top(m), N_j(m) \rangle = 0$  para qualquer  $m \in M$  e  $j = 1, \dots, p$ . Integrando (2.5), usando o Lema 2.3.6 (no caso mínimo  $H = 0$ ) e substituindo em (2.4) obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_2^J &\leq \frac{2}{|M|} \int_M \frac{1 - |\bar{g}|^2}{(1 + \langle \psi(x), \bar{g} \rangle)^2} - \frac{1}{|M|} \int_M (\|A\|^2 + 2) \\ &= 2 - \frac{2}{|M|} \int_M \frac{|\bar{g}|^2 - \ell_{\bar{g}}^2 - |\bar{g}^\top|^2}{(1 + \ell_{\bar{g}})^2} - \frac{1}{|M|} \int_M (\|A\|^2 + 2) \\ &= -\frac{1}{|M|} \int_M \|A\|^2 - \frac{2}{|M|} \int_M \frac{|\bar{g}|^2 - \ell_{\bar{g}}^2 - |\bar{g}^\top|^2}{(1 + \ell_{\bar{g}})^2}. \end{aligned}$$

Já que a expressão

$$\int_M \frac{|\bar{g}|^2 - \ell_{\bar{g}}^2 - |\bar{g}^\top|^2}{(1 + \ell_{\bar{g}})^2}$$

é positiva, a menos que  $\bar{g} = 0$ , obtemos

$$\lambda_2^J \leq -\frac{1}{|M|} \int_M \|A\|^2. \quad (2.6)$$

Usando a equação de Gauss e o teorema de Gauss-Bonnet,

$$\begin{aligned} \lambda_2^J &\leq -\frac{1}{|M|} \int_M (2 - 2K_M) \\ &= -2 + \frac{2}{|M|} \int_M K_M \\ &= -2 + \frac{4\pi}{|M|} \mathcal{X}(M). \end{aligned}$$

Portanto, desde que assumimos que o gênero  $g(M) \geq 1$ , então  $\mathcal{X}(M) = 2 - 2g(M) \leq 0$ , assim obtemos que  $\lambda_2^J \leq -2$ .

Se  $\lambda_2^J = -2$ , então  $\bar{g} = 0$ . Portanto, para  $i \leq p+3$  temos  $h_i = \ell_{e_i}$  e todas as desigualdades anteriores serão igualdades. Logo,  $J\ell_{e_i} = \lambda_2^J \ell_{e_i}$  e pela Proposição 2.2.1 obtemos :

$$-\|A\|^2 \ell_{e_i} = (-\Delta - \|A\|^2 - 2)\ell_{e_i} = -2\ell_{e_i}.$$

A igualdade anterior implica que  $\|A\|^2 \equiv 2$ , logo,  $\|A\|^2 + 2$  é constante, então a igualdade em (2.6) é equivalente à igualdade  $\lambda_2^\Delta = 2$ . Em [17], El Soufi e Ilias provaram que esta igualdade ocorre se e somente se  $\psi(M)$  é uma subvariedade mínima imersa de uma esfera geodésica de raio  $r = \arcsin(1)$ , portanto  $M^2$  será uma subvariedade de  $\mathbb{S}^{1+p}$ . Aplicando recursivamente este fato, já que  $\|A\|^2 + 2$  é constante, concluimos, que  $M$  será uma subvariedade de  $\mathbb{S}^3$ , assim, pelo Teorema 2.1.4, temos que  $M$  é isométrico a um toro mínimo de Clifford. ■

Finalmente, para a prova do Teorema 2.3.3 precisaremos também do seguinte lema (para mais detalhes ver [16]):

**Lema 2.3.7** ([16]). *Seja  $\psi : M^m \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$  uma imersão de uma subvariedade compacta e conexa numa esfera unitária. Para qualquer aplicação conforme  $F : \mathbb{S}^{n+1} \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$  tem-se*

$$\int_M |\nabla(F \circ \psi)|^2 \leq m \int_M (|H|^2 + 1).$$

*Além disso, para  $m \geq 3$  a igualdade implica que  $|\nabla(F \circ \psi)|^2$  é constante em  $M$ .*

*Demonstração.* Sejam  $\bar{B}$  e  $\bar{H}$  respectivamente a segunda forma fundamental e curvatura média de  $F(\psi(M))$  vista como uma subvariedade imersa de  $\mathbb{S}^{n+1}$ . Da invariância conforme da segunda forma fundamental, podemos deduzir a seguinte fórmula [16]:

$$|B|^2 - m|H|^2 = \frac{|\nabla(F \circ \psi)|^2}{m} (|\bar{B}|^2 - m|\bar{H}|^2).$$

Usando a equação de Gauss, obtém-se

$$|B|^2 - m|H|^2 = m(m-1)|H|^2 + m(m-1) - \mathcal{S}_g,$$

onde  $\mathcal{S}_g$  é a curvatura escalar de  $(M, g)$ . Da mesma forma

$$|\bar{B}|^2 - m|\bar{H}|^2 = m(m-1)|\bar{H}|^2 + m(m-1) - \mathcal{S}_{\bar{g}},$$

onde  $\bar{g} = (F \circ \psi)^*h$  é a métrica induzida em  $M$  da métrica canônica de  $\mathbb{S}^{n+1}$ . Portanto

$$|\nabla(F \circ \psi)|^2 = m(|H|^2 + 1) - |\nabla(F \circ \psi)|^2 |\bar{H}|^2 - \frac{1}{m-1} \left( \mathcal{S}_g - \frac{|\nabla(F \circ \psi)|^2}{m} \mathcal{S}_{\bar{g}} \right). \quad (2.7)$$

Como  $F \circ \psi$  é uma aplicação conforme de  $(M, g) \rightarrow (\mathbb{S}^{n+1}, h)$  tem-se  $\bar{g} = \frac{|\nabla(F \circ \psi)|^2}{m} g$ . Portanto, usando a fórmula de mudança conforme para a curvatura escalar obtemos

$$\mathcal{S}_g - \frac{|\nabla F \circ \psi|^2}{m} \mathcal{S}_{\bar{g}} = (m-1) \left( (m-2) |\nabla |\nabla F \circ \psi||^2 + \Delta (\ln |\nabla F \circ \psi|^2) \right).$$

Substituindo em (2.7) e logo integrando obtemos:

$$\int_M |\nabla(F \circ \psi)|^2 = \int_M m(|H|^2 + 1) - \int_M |\nabla(F \circ \psi)|^2 |\bar{H}|^2 - (m-2) \int_M |\nabla |\nabla(F \circ \psi)||^2.$$

Isto prova a afirmação do lema. ■

**Demonstração do Teorema 2.3.3.** Com as mesmas condições usadas na demonstração do teorema anterior, temos a existência de uma aplicação conforme  $\psi : (M, h) \rightarrow \mathbb{S}^{p+2}$  e pelo Lema 2.2.2 podemos encontrar  $\bar{g} \in \mathbb{D}^{p+3}$  tal que

$$\int_{(M, h)} F_{\bar{g}} \circ \psi = \int_M \rho(F_g \circ \psi) = (0, \dots, 0).$$

Fazendo  $\phi = F_{\bar{g}} \circ \psi = (\phi_1, \dots, \phi_{p+3})$ , concluímos que as funções  $\phi_i = \langle F_{\bar{g}}(\psi(m)), e_i \rangle$ , com  $\{e_i\}_{i=1}^{p+3}$  base ortonormal de  $\mathbb{R}^{p+3}$ , são perpendiculares à função  $\rho$ , ou seja

$$\int_M \rho \phi_i = 0.$$

Pelo princípio min-max, temos que para todo  $i \leq p+3$

$$\begin{aligned} \lambda_2^J \int_M \phi_i^2 &\leq \int_M -J(\phi_i) \phi_i \\ &= \int_M |\nabla \phi_i|^2 - \int_M (\|A\|^2 + 2) \phi_i^2. \end{aligned}$$

Somando em  $i = 1, \dots, p+3$  e usando o fato que  $\sum_{i=1}^{p+3} \phi_i^2 = 1$  e  $|\nabla \phi|^2 = \sum_{i=1}^{p+3} |\nabla \phi_i|^2$  obtemos

$$\lambda_2^J \leq \frac{1}{|M|} \int_M |\nabla \phi|^2 - \frac{1}{|M|} \int_M (\|A\|^2 + 2). \quad (2.8)$$

Usando o Lema 2.3.7 e a equação de Gauss, obtêm-se

$$\begin{aligned} \lambda_2^J &\leq \frac{2}{|M|} \int_M (|H|^2 + 1) - \frac{1}{|M|} \int_M (2 + 4H^2 - 2K_M + 2) \\ &= \frac{2}{|M|} \int_M (|H|^2 + 1) - \frac{4}{|M|} \int_M H^2 - 4 + \frac{2}{|M|} \int_M K_M \\ &= \frac{2}{|M|} \int_M (|H|^2 + 1) - \frac{4}{|M|} \int_M H^2 - 4 + \frac{4\pi}{|M|} \mathcal{X}(M), \\ &= -2 - \frac{2}{|M|} \int_M H^2 + \frac{4\pi}{|M|} \mathcal{X}(M) \\ &\leq -2 + \frac{4\pi}{|M|} \mathcal{X}(M). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Portanto, desde que assumimos a hipótese sobre o gênero, temos que  $\mathcal{X}(M) = 2 - 2g(M) \leq 0$ , assim  $\lambda_2^J \leq -2$ .

Se  $\lambda_2^J = -2$ , então  $M$  será mínima e  $g(M) = 1$ . Logo, aplicando o Teorema 2.3.4, obtemos que  $M$  é um toro de Clifford. ■

Nosso segundo resultado é uma versão do Teorema 2.3.3 para o caso geral  $n \geq 3$ , o qual se enuncia como:

**Teorema 2.3.8.** *Seja  $M^n$  uma subvariedade não totalmente geodésica e fechada imersa em  $\mathbb{S}^{n+p}$  com curvatura escalar satisfazendo  $\mathcal{S}_M \leq n(n-2)$ . Então, o segundo autovalor do operador de Jacobi  $J = \Delta + \|A\|^2 + n$  satisfaz  $\lambda_2^J \leq -n$ , com igualdade  $\lambda_2^J = -n$  se, e somente se,  $M$  é o toro mínimo de Clifford  $\mathbb{S}^k \left( \sqrt{k/n} \right) \times \mathbb{S}^{n-k} \left( \sqrt{(n-k)/n} \right)$ , para um inteiro  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ .*

Para provar o Teorema 2.3.9 precisaremos do seguinte resultado:

**Teorema 2.3.9.** *Seja  $M^n$  uma subvariedade mínima não totalmente geodésica e fechada imersa em  $\mathbb{S}^{n+p}$  com curvatura escalar satisfazendo  $\mathcal{S}_M \leq n(n-2)$ . Então, o segundo autovalor do operador  $J = \Delta + \|A\|^2 + n$  satisfaz  $\lambda_2^J \leq -n$ , com igualdade  $\lambda_2^J = -n$  se, e somente se,  $M$  é o toro mínimo de Clifford  $\mathbb{S}^k \left( \sqrt{k/n} \right) \times \mathbb{S}^{n-k} \left( \sqrt{(n-k)/n} \right)$ , para um inteiro  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ .*

**Demonstração do Teorema 2.3.9.** Com as mesmas condições usadas na demonstração do teorema anterior, temos a existência de uma aplicação conforme  $\psi : (M, h) \rightarrow \mathbb{S}^{n+p}$  e pelo Lema 2.2.2 podemos encontrar  $\bar{g} \in \mathbb{D}^{n+p+1}$  tal que

$$\int_{(M,h)} F_{\bar{g}} \circ \psi = \int_M \rho(F_{\bar{g}} \circ \psi) = (0, \dots, 0).$$

Fazendo  $\phi = F_{\bar{g}} \circ \psi = (\phi_1, \dots, \phi_{n+p+1})$ , concluímos que as funções  $\phi_i = \langle F_{\bar{g}}(\psi(m)), e_i \rangle$ , com  $\{e_i\}_{i=1}^{n+p+1}$  base ortonormal de  $\mathbb{R}^{n+p+1}$ , são perpendiculares à função  $\rho$ , ou seja,

$$\int_M \rho \phi_i = 0.$$

Pelo princípio min-max, temos que para todo  $i \leq n+p+1$

$$\begin{aligned} \lambda_2^J \int_M \phi_i^2 &\leq \int_M -J(\phi_i)\phi_i \\ &= \int_M |\nabla \phi_i|^2 - \int_M (\|A\|^2 + n)\phi_i^2. \end{aligned}$$

Somando em  $i = 1, \dots, n + p + 1$  e usando o fato que  $\sum_{i=1}^{n+p+1} \phi_i^2 = 1$  e  $|\nabla\phi|^2 = \sum_{i=1}^{n+p+1} |\nabla\phi_i|^2$ , obtemos

$$\lambda_2^J \leq \frac{1}{|M|} \int_M |\nabla\phi|^2 - \frac{1}{|M|} \int_M (\|A\|^2 + n). \quad (2.10)$$

Pela equação de Gauss

$$\mathcal{S}_M = n(n-1)r = n(n-1) + n^2H^2 - \|A\|^2,$$

e pelas nossas hipóteses obtemos

$$\mathcal{S}_M = n(n-1) - \|A\|^2. \quad (2.11)$$

Substituindo (2.11) em (2.10) e aplicando os Lemas 2.3.5 e 2.3.6, obtemos:

$$\begin{aligned} \lambda_2^J &\leq -n - \frac{1}{|M|} \int_M (n(n-1) - \mathcal{S}_M) + \frac{n}{|M|} \int_M \frac{1 - |\bar{g}|^2}{(1 + \langle \psi(x), \bar{g} \rangle)^2} \\ &= -\frac{n}{|M|} \int_M \frac{|\bar{g}|^2 - \ell_{\bar{g}}^2 - 2|\nabla\ell_{\bar{g}}|^2}{(1 + \ell_{\bar{g}})^2} - \frac{1}{|M|} \int_M n(n-1) + \frac{1}{|M|} \int_M \mathcal{S}_M; \end{aligned}$$

desde que a expressão

$$\int_M \frac{|\bar{g}|^2 - \ell_{\bar{g}}^2 - \frac{2}{n}|\bar{g}^\top|^2}{(1 + \ell_{\bar{g}})^2}$$

é positiva a menos que  $\bar{g} = 0$ , obtemos:

$$\lambda_2^J \leq -\frac{1}{|M|} \int_M n(n-1) + \frac{1}{|M|} \int_M \mathcal{S}_M, \quad (2.12)$$

assumindo a hipótese sobre a curvatura escalar, obtemos que  $\lambda_2^J \leq -n$ .

Se  $\lambda_2^J = -n$ , então  $\bar{g} = 0$ . Portanto, para  $i \leq n + p + 1$  temos  $\phi_i = \ell_{e_i}$  e todas as desigualdades anteriores serão igualdades. Logo,  $J\ell_{e_i} = \lambda_2^J \ell_{e_i}$  e pela Proposição 2.2.1 obtemos:

$$-\|A\|^2 \ell_{e_i} = (-\Delta - \|A\|^2 - n)\ell_{e_i} = -n\ell_{e_i}.$$

A igualdade anterior implica que  $\|A\|^2 \equiv n$ , logo,  $\|A\|^2 + 2$  é constante, então a igualdade em (2.12) é equivalente à igualdade  $\lambda_2^\Delta = n$ . Em [17], El Soufi e Ilias provaram que esta igualdade ocorre se e somente se  $\psi(M)$  é uma subvariedade mínima imersa de uma esfera geodésica de raio  $r = \arcsin(1)$ , portanto  $M^n$  será uma subvariedade de  $\mathbb{S}^{n-1+p}$ . Aplicando recursivamente este fato, já que  $\|A\|^2 + 2$  é constante, concluímos, que  $M$  será uma subvariedade de  $\mathbb{S}^{n+1}$ , assim, pelo Teorema 2.1.4, temos que  $M$  é isométrico a um toro mínimo de Clifford. ■

**Demonstração do Teorema 2.3.8.** Com as mesmas condições usadas na demonstração do teorema anterior, temos a existência de uma aplicação conforme  $\psi : (M, h) \rightarrow \mathbb{S}^{n+p}$  e pelo Lema 2.2.2 podemos encontrar  $\bar{g} \in \mathbb{D}^{n+p+1}$  tal que

$$\int_{(M,h)} F_{\bar{g}} \circ \psi = \int_M \rho(F_{\bar{g}} \circ \psi) = (0, \dots, 0).$$

Fazemos  $\phi = F_{\bar{g}} \circ \psi = (\phi_1, \dots, \phi_{n+p+1})$ , concluimos que as funções  $\phi_i = \langle F_{\bar{g}}(\psi(m)), e_i \rangle$ , com  $\{e_i\}_{i=1}^{n+p+1}$  base ortonormal de  $\mathbb{R}^{n+p+1}$ , são perpendiculares à função  $\rho$ , ou seja,

$$\int_M \rho \phi_i = 0.$$

Pelo princípio min-max  $i \leq n + p + 1$ ,

$$\begin{aligned} \lambda_2^J \int_M \phi_i^2 &\leq \int_M -J(\phi_i)\phi_i \\ &= \int_M |\nabla \phi_i|^2 - \int_M (\|A\|^2 + n)\phi_i^2. \end{aligned}$$

Somando em  $i = 1, \dots, n + p + 1$  e usando o fato que  $\sum_{i=1}^{n+p+1} \phi_i^2 = 1$  e  $|\nabla \phi|^2 = \sum_{i=1}^{n+p+1} |\nabla \phi_i|^2$  obtemos

$$\lambda_2^J \leq \frac{1}{|M|} \int_M |\nabla \phi|^2 - \frac{1}{|M|} \int_M (\|A\|^2 + n).$$

Usando o Lema 2.3.7 obtêm-se

$$\lambda_2^J \leq \frac{n}{|M|} \int_M (|H|^2 + 1) - \frac{1}{|M|} \int_M (\|A\|^2 + n),$$

pela equação de Gauss

$$\|A\|^2 = n^2 H^2 + n(n-1) - \mathcal{S}_M$$

obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_2^J &\leq -n - \frac{1}{|M|} \int_M (n^2 H^2 + n(n-1) - \mathcal{S}_M) + \frac{n}{|M|} \int_M (|H|^2 + 1) \\ &= -n - \frac{1}{|M|} \int_M (n|H|^2(n-1) + n^2 - 2n - \mathcal{S}_M) \\ &= -\frac{1}{|M|} \int_M (n(n-1)) - \frac{1}{|M|} \int_M (n|H|^2(n-1)) + \frac{1}{|M|} \int_M \mathcal{S}_M \\ &\leq -\frac{1}{|M|} \int_M (n(n-1)) + \frac{1}{|M|} \int_M \mathcal{S}_M, \end{aligned} \tag{2.13}$$

assumindo a hipótese sobre a curvatura escalar, obtemos que  $\lambda_2^J \leq -n$ .

Se  $\lambda_2^J = -n$ , então  $M$  será mínima, pois  $H = 0$ . Logo, aplicando o Teorema 2.3.10, obtemos que  $M$  é um toro de Clifford. ■

## 2.4 Uma conjectura de classificação

Como foi mencionado na Subseção 2.1.1, os toros mínimos de Clifford tem  $\text{Ind}(M) = n + 3$ , por esse motivo foi conjecturado há muito tempo que os toros de Clifford são as únicas hipersuperfícies não totalmente geodésicas em  $\mathbb{S}^{n+1}$  com  $\text{Ind}(M) = n + 3$ , mudando o Teorema 2.1.1 para a seguinte conjectura:

**Conjectura 1.** *Seja  $M^n$  uma hipersuperfície mínima, compacta e orientável na esfera Euclídeana  $\mathbb{S}^{n+1}$ . Então*

- (i)  $\text{Ind}(M) = 1$  ( $M$  é um equador totalmente geodésico  $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{S}^{n+1}$ ), ou
- (ii)  $\text{Ind}(M) \geq n + 3$ , com igualdade se, e somente se,  $M$  é um toro mínimo de Clifford  $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n}) \subset \mathbb{S}^{n+1}$ , para um inteiro  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ .

Urbano [32] mostrou que a conjectura é verdadeira para o caso  $n = 2$ . O mesmo Urbano obteve a seguinte caracterização dos toros mínimos de Clifford em  $\mathbb{S}^3$ :

**Teorema 2.4.1** ([32]). *Seja  $M^2$  uma superfície mínima, compacta, orientável imersa em  $\mathbb{S}^3$ , que não é um equador totalmente geodésico. Então  $\text{Ind}(M) \geq 5$ , com igualdade se e somente se  $M^2$  é um toro mínimo de Clifford  $\mathbb{S}^1(\sqrt{1/2}) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1/2}) \subset \mathbb{S}^3$ .*

Posteriormente, Guadalupe, Brasil Jr. e Delgado [18] mostraram que a conjectura é verdadeira para qualquer dimensão  $n$ , sob a hipótese adicional de que  $M$  tem curvatura escalar constante, obtendo o seguinte resultado.

**Teorema 2.4.2** ([18]). *Seja  $M^n$  uma superfície mínima, compacta, orientável imersa em  $\mathbb{S}^{n+1}$ , que não é um equador totalmente geodésico. Assuma que  $M$  tem curvatura escalar constante. Então  $\text{Ind}(M) \geq n + 3$ , com igualdade se e somente se  $M^n$  é um toro mínimo de Clifford  $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n}) \subset \mathbb{S}^{n+1}$ , para um inteiro  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ .*

Pouco depois, Perdomo [26] mostrou que a conjectura também é verdadeira para toda dimensão  $n$  com uma suposição adicional sobre as simetrias de  $M$ , e, em particular, a conjectura é verdadeira para hipersuperfícies mínimas com simetria antipodal.

Para ver essa condição sobre simetrias de  $M$  defina-se o grupo

$$\mathcal{O}_M(n+1) = \{\gamma \in \mathcal{O}(n+1) : \gamma(M) = M\}.$$

A aplicação antipodal,  $\tau(m) = -m$ , pode ou não ser um elemento de  $\mathcal{O}_M(n+1)$ . Quando isto acontece, dizemos que “ $M$  tem simetria antipodal”. A partir disso, Perdomo mostrou o seguinte resultado:

**Teorema 2.4.3** ([26]). *Seja  $M$  uma hipersuperfície mínima compacta, orientável imersa em  $\mathbb{S}^{n+1}$ , que não é um equador totalmente geodésico. Assuma que  $\mathcal{O}_M(n+1)$  fixa unicamente a origem em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Então:*

- (i)  $\text{Ind}(M) \geq n+3$ , com igualdade se e somente se  $M$  é um toro de Clifford.
- (ii)  $\lambda_2^J - \lambda_1^J \leq n$ , com igualdade somente se  $\|A\|^2 \equiv |\lambda_2^J|$ .

Portanto, se desprende o seguinte resultado:

**Corolário 2.4.4** ([26]). *Seja  $M$  uma hipersuperfície mínima, compacta, orientável imersa em  $\mathbb{S}^{n+1}$ , que não é um equador totalmente geodésico. Assuma que  $M$  tem simetria antipodal. Então  $\text{Ind}(M) \geq n+3$ , com igualdade se e somente se  $M$  é um toro de Clifford.*

Recentemente, Perdomo [28] obteve um prova mais simples para a conjectura no caso  $n=2$ . Para isso precisou do seguinte teorema:

**Teorema 2.4.5** ([28]). *Seja  $M^n$  uma variedade compacta e orientável e seja  $\psi : M \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$  uma imersão mínima de  $M$  em  $\mathbb{S}^{n+1}$ . Se  $\text{Ind}(M) = n+3$ , então  $\int_M \|A\|^2 \leq \int_M n$ . Além disso, se  $\int_M \|A\|^2 = \int_M n$ , então  $M$  será isométrico ao toro mínimo de Clifford.*

A partir desse último teorema, obteve o seguinte corolário:

**Corolário 2.4.6** ([28]). *Se  $M \subset \mathbb{S}^3$  é uma superfície com  $\text{Ind}(M) = 5$ , então  $M$  é um toro de Clifford.*

O seguinte resultado faz uso do Teorema 2.1.6 e da suposição que a curvatura escalar de  $M$  seja constante, ou seja, obtivemos uma nova prova ao resultado de Guadalupe, Brasil Jr. e Delgado (Teorema 2.4.2).

**Teorema 2.4.7.** *Seja  $M^n$  uma hipersuperfície mínima, compacta e orientável imersa em  $\mathbb{S}^{n+1}$  com curvatura escalar constante. Se  $\text{Ind}(M) = n+3$ , então  $M$  é um toro mínimo de Clifford  $\mathbb{S}^k(\sqrt{k/n}) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{(n-k)/n}) \subset \mathbb{S}^{n+1}$ .*

*Demonstração.* Pela Proposição 2.2.1 vemos que para cada  $v \in \mathbb{R}^{n+2}$ , as funções  $f_v$  satisfazem  $J(f_v) = -nf_v$ . Essas funções geram um espaço  $n + 2$ -dimensional porque  $M$  é não totalmente geodésico. Portanto,  $-n$  é um autovalor de  $J$  com multiplicidade  $n + 2$ . Então, pela hipótese de  $\text{Ind}(M) = n + 3$ , implica que  $-n$  é o segundo autovalor de  $J$ . Agora, usando as condições das provas dos teoremas da seção anterior, podemos obter a seguinte estimativa

$$\lambda_2^J \leq \frac{1}{|M|} \int_M |\nabla \phi|^2 - \frac{1}{|M|} \int_M \|A\|^2 - n.$$

Usando novamente o Lemas 2.3.5 e 2.3.6, obtemos

$$\lambda_2^J \leq n - \frac{n}{|M|} \int_M \frac{|g|^2 - \ell_g^2 - \frac{2}{n}|g^\top|^2}{(1 + \ell_g)^2} - \frac{1}{|M|} \int_M \|A\|^2 - n,$$

desde que a expressão

$$\int_M \frac{|g|^2 - \ell_g^2 - \frac{2}{n}|g^\top|^2}{(1 + \ell_g)^2}$$

é positiva a menos que  $g = 0$ , obtemos

$$\lambda_2^J \leq -\frac{1}{|M|} \int_M \|A\|^2.$$

Desde que a curvatura escalar é constante, temos que  $\|A\|^2$  é constante e dado que  $\lambda_2^J = -n$ , aplicando o Teorema 2.4.5 obtemos que  $\|A\|^2 = n$ , o que implica pelo Teorema 2.1.4 que  $M$  será um toro de Clifford. ■

**Observação:** As diferenças com a prova do resultado de Guadalupe, Brasil Jr. e Delgado estão na parte da rigidez, esta é uma prova por contradição. A suposição da curvatura escalar seja constante é necessária para provar que  $f_v$  seja autofunção de  $-\|A\|^2$ .

## Capítulo 3

# Uma caracterização espectral dos $H(r)$ -toros

Neste capítulo caracterizamos os  $H(r)$ -toros via o primeiro autovalor fraco do operador de Jacobi ou de estabilidade  $J = \Delta + \|A\|^2 + n$ , além disso mostraremos que eles tem  $\text{Ind}_T(M) = n + 4$ . Na Seção 3.1 introduzimos alguma teoria sobre estabilidade e caracterizações espectrais de hipersuperfícies com curvatura média constante em  $\mathbb{S}^{n+1}$ . Logo, na Seção 3.2 apresentamos algumas ferramentas e funções testes para as provas dos nossos resultados. Na Seção 3.3 mostramos nossos primeiros resultados do capítulo, os quais envolvem uma comparação dos espectros dos operadores de Jacobi e do Laplaciano e uma delimitação inferior para o índice fraco por uma função linear do primeiro número de Betti. Finalizamos com a Seção 3.4, na qual mostramos uma caracterização espectral dos toros com curvatura média constante ou  $H(r)$ -toros através de uma estimativa para o primeiro autovalor fraco do operador de Jacobi, sob a hipóteses de ter duas curvaturas principais.

### 3.1 Estabilidade, índice e caracterização espectral das hipersuperfícies com curvatura média constante em $\mathbb{S}^{n+1}$

Seja  $\psi : M^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$  um hipersuperfície compacta, orientável imersa na esfera Euclidiana. Como outra consequência da primeira fórmula de variação de área, temos que  $M$

tem curvatura média constante (não necessariamente nula) se e somente se  $\delta_f \mathcal{A} = 0$  para qualquer função diferenciável  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  satisfazendo a condição adicional  $\int_M f dM = 0$ . Para ver isso, vamos assumir que  $\delta_f \mathcal{A} = 0$  para qualquer  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  satisfazendo  $\int_M f dM = 0$ , e escrevemos  $H = H_0 + (H - H_0)$ , onde

$$H_0 = \frac{1}{|M|} \int_M H dM.$$

Desde que  $\int_M (H - H_0) dM = 0$ , então, por hipótese,

$$0 = \delta_{H-H_0} \mathcal{A} = -n \int_M (H - H_0) H dM = -n \int_M (H - H_0)^2 dM,$$

mas isso implica que  $H = H_0$  é constante em  $M$ .

Geometricamente, a condição adicional  $\int_M f dM = 0$  significa que as variações em consideração preservam uma certa função de volume. De fato, se  $\psi_t$  é uma variação normal induzida por uma função diferenciável  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ , então a função volume é a função  $\mathcal{V} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$\mathcal{V}(t) = \int_{[0,t] \times M} \Psi^*(dV)$$

onde  $dV$  denota o elemento volume  $(n+1)$ -dimensional de  $\mathbb{S}^{n+1}$  e  $\Psi : (-\epsilon, \epsilon) \times M \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$  é uma variação de  $\psi$ ,  $\Psi(t, m) = \psi_t(m)$ . Então, a primeira variação de  $\mathcal{V}$  é dada por:

$$\delta_f \mathcal{V} = \frac{d\mathcal{V}}{dt}(0) = \int_M f dM.$$

Para mais detalhes, veja [5, 6]. Uma variação se diz que preserva volume se  $\mathcal{V}(t) = \mathcal{V}(0) = 0$  para todo  $t$ . Como foi mostrado por Barbosa, do Carmo e Eschenburg [6, Lema 2.2], dada uma função diferenciável  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  com  $\int_M f dM = 0$ , existe uma variação normal que preserva volume cujo campo vetorial variacional é  $fN$ . Como uma consequência,  $M$  tem curvatura média constante (não necessariamente nula) se, e somente se,  $\delta_f \mathcal{A} = 0$  para qualquer variação que preserva volume de  $M$ . Em outras palavras, umas hipersuperfícies com curvatura média constante são caracterizadas como pontos críticos do funcional área quando for restrito a variações que preservam volume.

Como no caso de hipersuperfícies mínimas, o operador de estabilidade deste problema variacional é dado pela segunda fórmula de variação da área (1.2), e similarmente a forma quadrática correspondente é dada por

$$\mathcal{Q}(f) = - \int_M f J f dM,$$

com operador de Jacobi  $J = \Delta + \|A\|^2 + n$ . No entanto, em contraste com o caso mínimo, no caso de hipersuperfícies com curvatura média constante podemos considerar dois problemas diferentes de autovalores:

- **Problema Dirichlet:** associado à forma quadrática  $\mathcal{Q}$  atuando em todo o espaço da função diferenciáveis em  $M$ .
- **Problema *twisted* Dirichlet:** associado à mesma forma quadrática  $\mathcal{Q}$ , mas restrito ao subespaço de funções diferenciáveis  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  satisfazendo a condição adicional  $\int_M f dM = 0$ .

Similarmente, existem duas diferentes noções de estabilidade e índice, estabilidade forte e índice forte, denotado por  $\text{Ind}(M)$  associado ao problema usual de Dirichlet, e estabilidade fraca e índice fraco, denotado por  $\text{Ind}_T(M)$  associado ao problema *twisted* Dirichlet. Assim, o índice forte é dado por:

$$\text{Ind}(M) = \max\{\dim V : V \subseteq \mathcal{C}^\infty(M), \mathcal{Q}(f) < 0 \text{ para qualquer } f \in V\},$$

e  $M$  é chamada fortemente estável se, e somente se,  $\text{Ind}(M) = 0$ . Por outro lado, o índice fraco é dado por:

$$\text{Ind}_T(M) = \max\{\dim V : V \subseteq \mathcal{C}_T^\infty(M), \mathcal{Q}(f) < 0 \text{ para qualquer } f \in V\},$$

onde

$$\mathcal{C}_T^\infty(M) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(M) : \int_M f dM = 0\},$$

e  $M$  é chamada fracamente estável se, e somente se,  $\text{Ind}_T(M) = 0$ .

Do ponto de vista geométrico, o índice fraco é mais natural que o índice forte para o caso em que  $H = \text{constante}$ . No entanto, do ponto de vista analítico, o índice forte é mais natural e mais fácil de usar.

Barbosa e Bérard [4] estudaram em profundidade o problema *twisted* Dirichlet, comparando os autovalores deste problema com os autovalores do problema usual de Dirichlet. Por exemplo, segue facilmente do princípio min-max que ambos espectros estão entrelaçados (ver [4])

$$\lambda_1^J < \lambda_1^{J_T} \leq \lambda_2^J \leq \lambda_2^{J_T} \leq \dots,$$

onde

$$\text{Spec}(J) = \{\lambda_1^J < \lambda_2^J < \lambda_3^J < \dots\}$$

é o espectro usual de  $J$ , e

$$\text{Spec}_T(J) = \{\lambda_1^{J_T} < \lambda_2^{J_T} < \lambda_3^{J_T} < \dots\}$$

é o espectro twisted.

Quando trabalhamos com hipersuperfícies com curvatura média constante, em vez da segunda forma fundamental  $A$ , é mais conveniente trabalhar com o tensor de umbilicidade total  $\phi$  de  $M$ , que é dado por  $\phi = A - HI$ , onde  $I$  denota o operador identidade em  $\mathfrak{X}(M)$ . Observe que

$$\text{tr}(\phi) = 0 \quad e \quad \|\phi\|^2 = \|A\|^2 - nH^2 \geq 0,$$

tendo a igualdade se, e somente se,  $M$  é totalmente umbílica ( $\|\phi\| = 0$ ), o qual é equivalente a que satisfaça  $A(X, Y) = g(X, Y)\frac{1}{n}$ , para quaisquer  $X, Y$  tangentes a  $N$ . Em termos de  $\phi$ , o operador de Jacobi é dado por:

$$J = \Delta + \|\phi\|^2 + n(1 + H^2).$$

Como o caso mínimo, podemos usar novamente a função constante  $f = 1$  como uma função teste para estimar o  $\text{Ind}(M)$ , assim obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(1) &= - \int_M (\|\phi\|^2 + n(1 + H^2)) dM = -n(1 + H^2)|M| - \int_M \|\phi\|^2 dM \\ &\leq -n(1 + H^2)|M| < 0. \end{aligned}$$

Portanto, o  $\text{Ind}(M) \geq 1$  para qualquer hipersuperfície com curvatura média constante em  $\mathbb{S}^{n+1}$ , o qual significa que não existe hipersuperfície fortemente estável em  $\mathbb{S}^{n+1}$ .

### 3.1.1 Esferas totalmente umbílicas e hipersuperfícies de Clifford

Nesta seção descrevemos duas famílias de exemplos de hipersuperfícies em  $\mathbb{S}^{n+1}$  que são relacionadas com nosso resultado principal do capítulo.

- a) **Esferas totalmente umbílicas:** Seja  $v \in \mathbb{R}^{n+2}$  um vetor unitário fixo e  $c$  um número real com  $|c| < 1$ . Definimos

$$\mathbb{S}^n(v, c) = \{x \in \mathbb{S}^{n+1} : \langle x, v \rangle = c\}.$$

Claramente,  $\mathbb{S}^n(n, c)$  é uma hipersuperfície de  $\mathbb{S}^{n+1}$ . Neste caso a aplicação  $\nu : \mathbb{S}^n(v, c) \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$  dada por:

$$\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - c^2}}(v - cx)$$

é um vetor normal unitário ao longo de  $\mathbb{S}^{n+1}$ . Portanto, para qualquer  $x \in \mathbb{S}^n(v, c)$  o operador forma  $A_x$  é uma aplicação  $c(1 - c^2)^{-\frac{1}{2}}I$ , onde  $I$  é a aplicação identidade, e

$$\kappa_1(x) = \cdots = \kappa_n(x) = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}}$$

para todo  $x \in \mathbb{S}^n(v, c)$ . Não é difícil mostrar que esses exemplos são as únicas hipersuperfícies totalmente umbílicas de  $\mathbb{S}^{n+1}$ . Neste caso temos

$$H = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} \quad e \quad \|A\|^2 = \frac{nc^2}{1 - c^2}$$

ambos são constantes em  $\mathbb{S}^n(v, c)$ .

b) **Hipersuperfícies de Clifford:** Dado qualquer inteiro  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  e qualquer número real  $r \in (0, 1)$ , definimos  $\ell = n - k$  e

$$\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1 - r^2}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^{\ell+1} : \|x\|^2 = r^2 \text{ e } \|y\|^2 = 1 - r^2\} \subset \mathbb{S}^{n+1}.$$

Não é difícil mostrar que para qualquer  $(x, y) \in \mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1 - r^2})$  temos

$$T_{(x,y)}[\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1 - r^2})] = \{(v, w) \in \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^{\ell+1} : \langle x, v \rangle = 0 \text{ e } \langle w, y \rangle = 0.\}$$

Portanto, a aplicação  $\nu : \mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1 - r^2}) \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$  dada por:

$$\nu(x, y) = \left( \frac{\sqrt{1 - r^2}}{r}x, -\frac{r}{\sqrt{1 - r^2}}y \right)$$

define um campo vetorial normal unitário ao longo de  $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1 - r^2})$ , ou seja, é uma aplicação de Gauss em  $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1 - r^2})$ . Note-se que os vetores em  $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1 - r^2})$  da forma  $(v, 0)$  definem um espaço  $k$ -dimensional. Um cálculo direto, usando a expressão para  $\nu$ , nos dá que se  $(v, 0) \in T(x, y) (\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1 - r^2}))$ , então

$$A_{(x,y)}(v, 0) = -\frac{\sqrt{1 - r^2}}{r}(v, 0).$$

Portanto  $-\sqrt{1 - r^2}/r$  é um autovalor  $A_{(x,y)}$  com multiplicidade  $k$ . Do mesmo modo mostramos que  $r/\sqrt{1 - r^2}$  é um autovalor de  $A_{(x,y)}$  com multiplicidade  $\ell$ . Portanto, as curvaturas principais de  $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1 - r^2})$  são dadas por:

$$\kappa_1(x, y) = \cdots = \kappa_k(x, y) = -\frac{\sqrt{1 - r^2}}{r}, \quad \kappa_{k+1}(x, y) = \cdots = \kappa_n(x, y) = \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}},$$

e também temos que

$$H = \frac{nr^2 - k}{nr\sqrt{1 - r^2}} \quad e \quad \|A\|^2 = \frac{k}{r^2} + \frac{n - k}{1 - r^2} - n$$

são constantes.

Na subseção anterior foi mostrado que não existe hipersuperfície com curvatura média constante e compacta que seja fortemente estável em  $\mathbb{S}^{n+1}$ . Em contraste a isto, Barbosa, do Carmo e Eschenburg [6] caracterizaram as esferas totalmente umbílicas  $\mathbb{S}^n(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$  como as únicas hipersuperfícies com curvatura média constante e compactas que são fracamente estáveis em  $\mathbb{S}^{n+1}$ .

**Teorema 3.1.1** ([6]). *Seja  $M^n$  uma hipersuperfície com curvatura média constante, compacta e orientável imersa na esfera Euclidiana  $\mathbb{S}^{n+1}$ . Então  $M$  é fracamente estável se, e somente se,  $M$  é uma esfera totalmente umbílica  $\mathbb{S}^n(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$ .*

Para o caso das hipersuperfícies de Clifford ou toros de curvatura média constante ou  $H(r)$ -toros, temos que o operador de Jacobi pode ser expresso por:

$$J = \Delta + \left( \frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2} \right).$$

Em particular, o espectro de  $J$  esta diretamente relacionado ao espectro de  $\Delta$ , especificamente, eles compartilham as mesmas autofunções, e seus autovalores são relacionados por:

$$\lambda_i^J = \lambda_i^\Delta - \left( \frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2} \right), \quad i = 1, 2, \dots$$

Como uma consequência, usando  $\lambda_1^\Delta = 0$  e que suas correspondentes autofunções são funções constantes, obtemos que  $\lambda_1^J = -\left(\frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}\right)$  com multiplicidade 1 e suas correspondentes autofunções são funções constantes. Observe-se que  $\lambda_1^J = -\left(\frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}\right) < 0$ , ele contribui ao  $\text{Ind}(M)$  mas não para o  $\text{Ind}_T(M)$ , isto devido a que as autofunções não satisfazem a condição  $\int_M u dv = 0$ . Ainda mais, já que todo o resto das autofunções de  $J$  são ortogonais às funções constantes, eles satisfazem a condição  $\int_M u dv = 0$  e contribuem com o  $\text{Ind}_T(M)$ . Portanto, neste caso temos que  $\text{Ind}(M) = \text{Ind}_T(M) + 1$ .

Para calcular os autovalores, só basta lembrar o que foi feito no caso mínimo, assim no nosso caso, os autovalores do Laplaciano em  $\mathbb{S}^k(r)$  são:

$$\lambda_i = \frac{(i-1)(k+i-2)}{r^2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

com multiplicidades

$$m_{\lambda_1} = 1, \quad m_{\lambda_2} = k + 1,$$

e

$$m_{\lambda_i} = \binom{k+i-1}{i-1} - \binom{k+i-3}{i-3}, \quad i = 3, 4, \dots,$$

e os autovalores do Laplaciano em  $\mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$  são

$$\mu_j = \frac{(j-1)(n-k+j-2)}{1-r^2}, \quad j = 1, 2, 3, \dots,$$

com multiplicidades

$$m_{\mu_1} = 1, \quad m_{\mu_2} = n - k + 1,$$

e

$$m_{\mu_i} = \binom{n-k+j-1}{j-1} - \binom{n-k+j-3}{j-3}, \quad i = 3, 4, \dots,$$

então, a partir de tudo isto, o problema se reduz a contar quando  $\lambda_i + \mu_j < \frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2} = \lambda_2 + \mu_2$ , com  $i = 1, j > 1$ , e  $i > 1, j = 1$ .

Observe que sempre vamos ter que  $\lambda_1 + \mu_2 = \frac{n-k}{1-r^2} < \frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}$  com multiplicidade  $n-k+1$  e  $\lambda_2 + \mu_1 = \frac{k}{r^2} < \frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}$  com multiplicidade  $k+1$ . Portanto,  $\text{Ind}_T(M) \geq n+2$  para qualquer toro de Clifford com curvatura média constante. Além disso,  $\text{Ind}_T(M) = n+2$  quando

$$\lambda_1 + \mu_3 = \mu_3 \geq \frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2} \quad e \quad \lambda_3 + \mu_1 = \lambda_3 \geq \frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2},$$

se, e somente se,

$$\frac{k}{n+2} \leq r^2 \leq \frac{k+2}{n+2}.$$

Claramente o toro mínimo de Clifford satisfaz  $\text{Ind}_T(M) = n+2$ , pois  $r^2 = k/n$ .

Motivados pelo valor do  $\text{Ind}_T(M)$  para um toro de Clifford com curvatura média constante, Alías, Brasil e Perdomo [2] provaram o seguinte resultado:

**Teorema 3.1.2** ([2]). *Seja  $M^n$  uma hipersuperfície compacta, orientável e imersa em uma esfera Euclidiana  $\mathbb{S}^{n+1}$  com curvatura média constante  $H$ , e seja  $\text{Ind}_T(M)$  o índice fraco de estabilidade. Assumimos que  $M$  tem curvatura escalar constante. Então  $\text{Ind}_T(M) \geq n+2$ , com igualdade se, e somente se,  $M$  é um toro de Clifford com curvatura média constante  $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$  com raio  $\sqrt{k/(n+2)} \leq r \leq \sqrt{(k+2)/(n+2)}$ .*

### 3.1.2 Uma caracterização espectral dos $H(r)$ -toros pelo primeiro autovalor de estabilidade forte

Um caso particular dos toros de Clifford com curvatura média constante é aquele obtido considerando as imersões canônicas  $\mathbb{S}^{n-1}(r) \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ , para um

raio  $0 < r < 1$ , e tomando o produto de imersões  $\mathbb{S}^{n-1}(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2}) \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ .

A partir disso, as curvaturas principais são

$$\kappa_1 = \cdots = \kappa_{n-1} = \frac{1-r^2}{r}, \quad \kappa_n = -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}},$$

o qual implica que a curvatura média é

$$H = H(r) = \frac{n-1-nr^2}{nr\sqrt{1-r^2}}.$$

Em particular,  $H(r) = 0$  se, e somente se,  $r^2 = (n-1)/n$ , que corresponde ao toro mínimo de Clifford. Daqui resulta que

$$r^2 = \frac{2(n-1) + nH^2 \pm |H|\sqrt{n^2H^2 + 4(n-1)}}{2n(1+H^2)},$$

onde escolhemos o sinal como  $-$  ou  $+$  de acordo a  $r^2 \leq (n-1)/n$  ou  $r^2 \geq (n-1)/n$ , respectivamente. Além disso,  $\|\phi\|^2$  é dado por

$$\|\phi\|^2 = \frac{n-1}{nr^2(1-r^2)} = \frac{n}{4(n-1)} \left( (n-2)|H| \pm \sqrt{n^2H^2 + 4(n-1)} \right)^2,$$

onde usamos o mesmo critério para o sinal. Em particular,  $\|\phi\|^2 = \|\phi\|_0^2$  é também constante e  $\lambda_1^J = -\|\phi\|_0^2 - n(1+H^2)$ . Portanto, se  $r^2 \leq (n-1)/n$ , temos que

$$\lambda_1^J = -2n(1+H^2) + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H|\|\phi\|_0,$$

onde

$$\|\phi\|_0^2 = \frac{n}{4(n-1)} \left( (n-2)|H| - \sqrt{n^2H^2 + 4(n-1)} \right)^2,$$

e se  $r^2 \geq (n-1)/n$  temos

$$\lambda_1^J = -2n(1+H^2) - \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H|\|\phi\|_0,$$

onde

$$\|\phi\|_0^2 = \frac{n}{4(n-1)} \left( (n-2)|H| + \sqrt{n^2H^2 + 4(n-1)} \right)^2.$$

Motivados pelo valor de  $\lambda_1^J$  para esses  $H(r)$ -toros, Alías, Barros e Brasil [1] provaram o seguinte resultado que vem a ser uma extensão do Teorema 2.1.3.

**Teorema 3.1.3** ([1]). *Seja  $M^n$  uma hipersuperfície compacta, orientável e imersa em uma esfera Euclidiana  $\mathbb{S}^{n+1}$  com curvatura média constante  $H$ , e seja  $\lambda_1^J$  o primeiro autovalor do seu operador de estabilidade  $J = \Delta + \|\phi\|^2 + n(1+H^2)$ . Então,*

(i)  $\lambda_1^J = -n(1 + H^2)$  ( $M$  é totalmente umbilica), ou

(ii)  $\lambda_1^J \leq -2n(1 + H^2) + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H|\max\|\phi\|$ .

Além disso,  $\lambda_1^J = -2n(1 + H^2) + \frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}|H|\max\|\phi\|$  se, e somente se,

(a)  $n = 2$  e  $M$  é um  $H(r)$ -toro  $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1 - r^2})$ , com  $r^2 \neq 1/2$

(b)  $n \geq 3$  e  $M$  é um  $H(r)$ -toro  $\mathbb{S}^{n-1}(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1 - r^2})$ , com  $r^2 \leq (n - 1)/n$ .

## 3.2 Funções testes baseadas em coordenadas de 1-formas

Seja  $\psi : M^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$  uma imersão isométrica de uma hipersuperfície compacta, orientável, conexão de Levi-Civita  $\nabla$  e com curvatura média constante. Escolhemos um campo vetorial normal  $N$  ao longo de  $M^n$ . Seja  $\tilde{\nabla}$  a conexão de Levi-Civita em  $\mathbb{S}^{n+1}$ , então a segunda forma fundamental  $B$  e o operador forma  $A$  de  $\psi$  são dados, respectivamente, por:

$$B(X, Y) = \langle \tilde{\nabla}_X Y, N \rangle, \quad A(X) = -\tilde{\nabla}_X N \quad e \quad B(X, Y) = \langle A(X), Y \rangle$$

para todos os vetores tangentes  $X, Y \in TM$ .

Escolhemos um campo vetorial normal unitário  $\nu$  para  $\mathbb{S}^{n+1}$  em  $\mathbb{R}^{n+2}$  para que a segunda forma fundamental da imersão canônica  $\phi : \mathbb{S}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$  seja a identidade.

Denotando por  $\bar{\nabla}$  a conexão de Levi-Civita em  $\mathbb{R}^{n+2}$ , então temos  $\bar{\nabla}_X \nu = -X$  para todos os vetores tangentes a  $\mathbb{S}^{n+1}$ . Assim, obtemos uma base ortonormal  $(N, \nu)$  do fibrado normal da imersão composta  $\bar{\psi} : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ , e para quaisquer  $X, Y \in TM$ :

$$\bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = \langle X, Y \rangle \nu + B(X, Y)N. \quad (3.1)$$

Fixamos uma base ortonormal  $\mathcal{E} = \{\bar{E}_1, \dots, \bar{E}_{n+2}\}$  de campos paralelos sobre  $\mathbb{R}^{n+2}$ , denotamos por

$$E_i := \bar{E}_i - \langle \bar{E}_i, N \rangle N - \langle \bar{E}_i, \nu \rangle \nu$$

a projeção ortogonal de  $\bar{E}_i$  sobre  $M$ .

Da mesma forma que foi definido no Capítulo 2, definimos as funções suporte  $\ell_i, f_i \in \mathcal{C}^\infty(M)$  respeito à base  $\mathcal{E}$ , as quais são dadas por:

$$\ell_i = \langle \psi, \bar{E}_i \rangle \quad e \quad f_i = \langle N, \bar{E}_i \rangle$$

para todo  $1 \leq i \leq n + 2$ .

Os gradientes e Laplacianos das funções suporte são dadas por:

**Lema 3.2.1.** *Seja  $A$  o operador forma da imersão  $\psi : M^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ . Para as funções suporte  $\ell_i, f_i$  e os campos componentes da base  $\mathcal{E}$  valem as seguintes identidades:*

$$(i) \quad \text{grad} \ell_i = E_i \quad \text{grad} f_i = -A(E_i),$$

$$(ii) \quad \Delta \ell_i = n \ell_i - nH f_i, \quad \Delta f_i = \|A\|^2 f_i - nH \ell_i.$$

*Demonstração.* (i) Para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  vale

$$\langle \text{grad} \ell_i, X \rangle = X(\ell_i) = \langle \bar{E}_i, D_X \psi \rangle = \langle E_i, X \rangle$$

$$\langle \text{grad} f_i, X \rangle = \langle \bar{E}_i, D_X N \rangle = -\langle E_i, AX \rangle = -\langle AE_i, X \rangle.$$

(ii) Seja  $\{e_j\}_{j=1}^n$  um referencial ortonormal local geodésico em  $m \in M$ , então

$$\begin{aligned} \Delta \ell_i &= \text{div}(E_i) \\ &= -\langle \nabla_{e_j} E_i, e_j \rangle \\ &= -\langle f_i A e_j - \ell_i e_j, e_j \rangle \\ &= n \ell_i - nH f_i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta f_i &= \text{div}(-AE_i) \\ &= \langle \nabla_{e_j} (AE_i), e_j \rangle \\ &= \langle (\nabla_{e_j} A) e_i, e_j \rangle + \langle A \nabla_{e_j} E_i, e_j \rangle. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Sabemos que para todo  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X E_i, Y \rangle &= X \langle E_i, Y \rangle - \langle E_i, \nabla_X Y \rangle \\ &= X \langle \bar{E}_i, Y \rangle - \langle \bar{E}_i, \nabla_X Y \rangle \\ &= \langle \bar{E}_i, D_X Y - \nabla_X Y \rangle. \end{aligned}$$

Logo, pela decomposição (3.1) obtemos

$$\langle \nabla_X E_i, Y \rangle = f_i AX - \ell_i X. \tag{3.3}$$

Portanto, usando a equação (3.3) e a equação de Codazzi na equação (3.2), obtemos

$$\begin{aligned} \Delta f_i &= \langle (\nabla_{E_i} A) e_j, e_j \rangle + \langle A(f_i A e_j - \ell_i e_j), e_j \rangle \\ &= \text{tr}(\nabla_{E_i} A) + f_i \text{tr}(A^2) - \ell_i \text{tr}(A) \\ &= \|A\|^2 f_i - nH \ell_i. \end{aligned}$$

■

**Lema 3.2.2.** *Seja  $A$  o operador forma da imersão  $\psi : M^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ . Para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  e qualquer campo paralelo  $\bar{E}^i$  sobre  $\mathbb{R}^{n+2}$  com projeção ortogonal  $E_i$  sobre  $M$  temos*

$$(i) \quad \mathcal{R}ic(X) = (n-1)X + nHAX - A^2X;$$

$$(ii) \quad \nabla^* \nabla E_i = A^2 E_i + E_i.$$

*Demonstração.* Seja  $\{e_j\}_{j=1}^n$  um referencial ortonormal local em  $m \in M$ .

(i) Usando a equação de Gauss, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{R}ic(X) &= \langle R(e_j, X)e_j, e_k \rangle e_k \\ &= \langle (\langle e_j, e_j \rangle X - \langle X, e_j \rangle e_j) + \langle Ae_j, e_j \rangle AX - \langle AX, e_j \rangle Ae_j, e_k \rangle e_k \\ &= (n-1)X + nHAX - A^2X. \end{aligned}$$

(ii) Usando a definição do Laplaciano de Böchner obtemos

$$\begin{aligned} \nabla^* \nabla E_i &= -\nabla_{e_j} \nabla_{e_j} E_i \\ &= -\nabla_{e_j} (f_i Ae_j - \ell_i e_j) \\ &= \langle AE_i, e_j \rangle Ae_j - f_i (\nabla_{e_j} A) e_j + \langle E_i, e_j \rangle e_j \\ &= A^2 E_i + E_i. \end{aligned}$$

■

Seja  $\xi \in TM$  um campo vetorial diferenciável em  $M$  e seja  $\theta$  seu dual 1-forma, ou seja  $\xi = \theta^\#$ . Denotamos por  $\mathcal{E}^* = \{\bar{E}^1, \dots, \bar{E}^{n+2}\}$  o dual da base  $\mathcal{E}$ . Assim, as coordenadas de  $\theta$  na base  $\mathcal{E}^*$  são dadas por

$$w_i = \langle \theta, E^i \rangle \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq n+2,$$

onde  $E^i$  representa a projeção ortogonal da 1-forma  $\bar{E}^i$  sobre  $M$ .

Inspirados nos trabalhos de Ros e Savo, usaremos as coordenadas de  $\xi \in TM$  como funções-teste. Para tal fim, escrevemos  $w_i$  como um produto de campos duais, ou seja,

$$w_i = \langle \xi, E_i \rangle.$$

Os Laplacianos de Hodge e Böchner do campo  $\xi$  são definidos, respectivamente, por:

$$\Delta \xi = (\Delta_1 \theta)^\# \quad e \quad \nabla^* \nabla \xi = (\nabla^* \nabla \theta)^\#.$$

**Lema 3.2.3.** *Seja  $A$  o operador forma da imersão  $\psi : M \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ . Para os campos duais  $\xi = \theta^\#$  e  $\bar{\xi} = (\star\bar{\theta})^\#$ , onde  $\theta \in \Omega^1(M)$  e  $\bar{\theta} \in \Omega^{n-1}(M)$ , defina as funções  $w_i = \langle \xi, E_i \rangle$  e  $\bar{w}_i = \langle \bar{\xi}, E_i \rangle$ . Então*

$$\begin{aligned} \Delta w_i &= -(n-2)w_i - nH\langle A\xi, E_i \rangle + 2\langle A^2\xi, E_i \rangle \\ &\quad + \langle \Delta\xi, E_i \rangle - 2g_i\langle \nabla\xi, A \rangle - 2f_i\text{div}\xi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \bar{w}_i &= -(n-2)\bar{w}_i - nH\langle A\bar{\xi}, E_i \rangle + 2\langle A^2\bar{\xi}, E_i \rangle \\ &\quad + \langle \Delta\bar{\xi}, E_i \rangle - 2g_i\langle \nabla\bar{\xi}, A \rangle - 2f_i\text{div}\bar{\xi}. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Pela definição do Laplaciano de Böchner obtemos

$$\Delta\langle \xi, E_i \rangle = \langle \nabla^*\nabla\xi, E_i \rangle + \langle \xi, \nabla^*\nabla E_i \rangle - 2\langle \nabla\xi, \nabla E_i \rangle$$

pelos Lemas 3.2.1 e 3.2.2 obtemos

$$\Delta\langle \xi, E_i \rangle = \langle \nabla^*\nabla\xi, E_i \rangle + \langle \xi, A^2 E_i \rangle + \langle \xi, E_i \rangle - 2f_i\langle \nabla\xi, A \rangle - 2l_i\text{div}\xi.$$

Lembrando que  $\nabla^*\nabla\xi = (\nabla^*\nabla\theta)^\#$  e usando a relação do Laplaciano de Hodge, Laplaciano de Böchner e Weitzenböck (1.14) obtemos:

$$\Delta\langle \xi, E_i \rangle = -(n-2)\langle \xi, E_i \rangle - nH\langle A\xi, E_i \rangle + 2\langle A^2\xi, E_i \rangle - 2f_i\langle \nabla\xi, A \rangle - 2l_i\text{div}\xi + \langle \Delta\xi, E_i \rangle.$$

■

**Lema 3.2.4.** *Seja  $M^n$  uma hipersuperfície de  $\mathbb{S}^{n+1}$  com duas curvaturas principais de multiplicidade  $n/2$ , para  $n$  par. Então, o quadrado do operador forma se escreve como*

$$nA^2 = (\|A\|^2 - 2nH^2) Id + 4HA,$$

onde  $Id$  é o operador identidade.

*Demonstração.* Desde que  $M$  tem duas curvaturas principais  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  de multiplicidade  $n/2$ , então a curvatura média e a norma ao quadrado do operador forma se escrevem respectivamente como

$$\begin{aligned} H &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \\ \|A\|^2 &= \frac{n}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2). \end{aligned}$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned}
4H^2 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2 \\
&= \frac{2}{n}\|A\|^2 + 2\lambda_1\lambda_2 \\
&= \frac{2}{n}\|A\|^2 + 2\lambda_i(2H - \lambda_i), \quad i \in \{1, 2\} \\
&= \frac{2}{n}\|A\|^2 + 4H\lambda_i - 2\lambda_i^2.
\end{aligned}$$

Assim,  $n\lambda_i^2 = \|A\|^2 - 2nH^2 + 2nH\lambda_i$  e o resultado segue. ■

**Lema 3.2.5.** *Sejam  $M$  uma hipersuperfície de  $\mathbb{S}^{n+1}$  com duas curvaturas principais de multiplicidade  $n/2$ , para  $n$  par, e  $\xi, \bar{\xi}$  os campos duais, os quais satisfazem a seguinte relação:*

$$\langle A\xi, \xi \rangle + \langle A\bar{\xi}, \bar{\xi} \rangle = 2H\|\xi\|^2$$

*Demonstração.* A prova do lema será feita por construção com relação à dimensão, para isso vamos supor que  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$  seja uma base de  $TM$  e seja  $\{dx^1, dx^2, \dots, dx^n\}$  a sua base dual.

(i) Se  $n = 2$

Dado  $\theta \in \Omega^1(M)$ , pode ser escrita como

$$\theta = a_1 dx^1 + a_2 dx^2$$

e devido às propriedades do operador estrela de Hodge, temos que,

$$\star\theta = a_1 dx^2 - a_2 dx^1$$

Agora, aplicamos sem perda de generalidade o isomorfismo  $\#$ , obtemos

$$\begin{aligned}
\theta^\# &= a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \\
(\star\theta)^\# &= a_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - a_2 \frac{\partial}{\partial x_1}.
\end{aligned}$$

Pela definição de  $\xi$  e  $\bar{\xi}$  e pela hipótese sobre as curvaturas principais e já que  $A$  é um operador auto adjunto, temos que

$$\begin{aligned}
A\xi &= a_1\lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2\lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \\
A\bar{\xi} &= -a_2\lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_1\lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_2}
\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}\langle A\xi, \xi \rangle &= a_1^2 \lambda_1 + a_2^2 \lambda_2 \\ \langle A\bar{\xi}, \bar{\xi} \rangle &= a_2^2 \lambda_1 + a_1^2 \lambda_2;\end{aligned}$$

portanto

$$\langle A\xi, \xi \rangle + \langle A\bar{\xi}, \bar{\xi} \rangle = (a_1^2 + a_2^2) (\lambda_1 + \lambda_2) = 2H \|\xi\|^2$$

(ii) Se  $n = 4$

Dado  $\theta \in \Omega^1(M)$ , pode ser escrita como

$$\theta = a_1 dx^1 + a_2 dx^2 + a_3 dx^3 + a_4 dx^4$$

e, seja  $\bar{\theta} \in \Omega^3(M)$  da forma

$$\bar{\theta} = a_1 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + a_2 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^4 + a_3 dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^4 + a_4 dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^4$$

devido às propriedades do operador estrela de Hodge, temos:

$$\star \bar{\theta} = a_1 dx^4 + a_2 dx^3 + a_3 dx^2 + a_4 dx^1$$

Agora, aplicamos sem perda de generalidade o isomorfismo  $\#$ , e obtemos

$$\begin{aligned}\theta^\# &= a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + a_4 \frac{\partial}{\partial x_4} \\ (\star \bar{\theta})^\# &= a_1 \frac{\partial}{\partial x_4} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + a_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_4 \frac{\partial}{\partial x_1}.\end{aligned}$$

Pela definição de  $\xi$  e  $\bar{\xi}$  e pela hipótese sobre as curvaturas principais, já que  $A$  é um operador auto adjunto, temos

$$\begin{aligned}A\xi &= a_1 \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_3 \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + a_4 \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_4} \\ A\bar{\xi} &= a_1 \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_4} + a_2 \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_3} + a_3 \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_4 \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned}\langle A\xi, \xi \rangle &= a_1^2 \lambda_1 + a_2^2 \lambda_1 + a_3^2 \lambda_2 + a_4^2 \lambda_2 \\ \langle A\bar{\xi}, \bar{\xi} \rangle &= a_3^2 \lambda_1 + a_4^2 \lambda_1 + a_1^2 \lambda_2 + a_2^2 \lambda_2;\end{aligned}$$

portanto

$$\langle A\xi, \xi \rangle + \langle A\bar{\xi}, \bar{\xi} \rangle = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) (\lambda_1 + \lambda_2) = 2H \|\xi\|^2$$

(iii) caso geral

Dado  $\theta \in \Omega^1(M)$ , pode ser escrita como

$$\theta = a_1 dx^1 + a_2 dx^2 + \cdots + a_n dx^n$$

e seja  $\bar{\theta} \in \Omega^{n-1}(M)$  da forma

$$\bar{\theta} = a_1 dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1} + a_2 dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n + \cdots + a_n dx^2 \wedge dx^3 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

devido às propriedades do operador estrela de Hodge, temos:

$$\star\bar{\theta} = a_1 dx^n + a_2 dx^{n-1} + \cdots + a_n dx^1.$$

Agora, aplicando sem perda de generalidade o isomorfismo  $\#$ , obtemos

$$\begin{aligned} \theta^\# &= a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n} \\ (\star\bar{\theta})^\# &= a_1 \frac{\partial}{\partial x_n} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} + \cdots + a_n \frac{\partial}{\partial x_1} \end{aligned}$$

Pela definição de  $\xi$  e  $\bar{\xi}$  e pela hipótese sobre as curvaturas principais, já que  $A$  é um operador auto adjunto, obtemos:

$$\begin{aligned} A\xi &= a_1 \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + a_{n/2} \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_{n/2}} + a_{n/2+1} \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_{n/2+1}} + \cdots + a_n \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_n} \\ A\bar{\xi} &= a_1 \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_n} + a_2 \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} + \cdots + a_{n/2} \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x_{n/2+1}} + a_{n/2+1} \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_{n/2}} + \cdots + a_n \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \langle A\xi, \xi \rangle &= a_1^2 \lambda_1 + \cdots + a_{n/2}^2 \lambda_1 + a_{n/2+1}^2 \lambda_2 + \cdots + a_n^2 \lambda_2 \\ \langle A\bar{\xi}, \bar{\xi} \rangle &= a_{n/2+1}^2 \lambda_1 + \cdots + a_n^2 \lambda_1 + a_1^2 \lambda_2 + \cdots + a_{n/2}^2 \lambda_2 \end{aligned}$$

portanto

$$\langle A\xi, \xi \rangle + \langle A\bar{\xi}, \bar{\xi} \rangle = (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) (\lambda_1 + \lambda_2) = 2H \|\xi\|^2$$

■

### 3.3 Comparação entre os autovalores do operador de Jacobi e o Laplaciano de Hodge

Nesta seção apresentamos nossos primeiros resultados do capítulo os quais são inspirados nos trabalhos de A. Savo, Ma-Huang e Calvancate-de Oliveira.

A. Savo [30] mostrou um teorema de comparação entre o espectro do operador de Jacobi e do Laplaciano Hodge em 1-formas.

**Teorema 3.3.1** ([30]). *Seja  $M^n$  uma hipersuperfície mínima de  $\mathbb{S}^{n+1}$  com operador de Jacobi  $J$ . Então, para todo inteiro positivo  $k$ , temos*

$$\lambda_k^J \leq -2(n-1) + \lambda_k^{\Delta_1},$$

onde  $m(k) = \binom{n+2}{2}(k-1) + 1$ .

Ma e Huang [23] mostraram um teorema de comparação entre os autovalores do operador de Jacobi e o Laplaciano Hodge em 1-formas.

**Teorema 3.3.2** ([23]). *Seja  $\psi : M^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$  uma hipersuperfície compacta com curvatura média constante  $H$ . Denotamos o quadrado da norma da segunda forma fundamental por  $\|A\|^2$ . Então,*

$$\lambda_k^J \leq -2(n-1) + \lambda_k^{\Delta_1} + n|H|\max_M \|A\|^2$$

onde  $\lambda_k^J$  é o  $k$ -ésimo autovalor de  $J$ ,  $\lambda_k^{\Delta_1}$  é o  $m(k)$ -ésimo autovalor do Laplaciano Hodge  $\Delta_1$  com respeito a 1-formas. Aqui  $m(k) = \binom{n+2}{2}(k-1) + 1$ .

Por último, Cavalcante e de Oliveira [9] estenderam o resultado de A. Savo para superfícies CMC e melhoraram a estimativa de Ma e Huang para o caso de superfícies.

**Teorema 3.3.3** ([9]). *Seja  $M^2$  uma superfície compacta com curvatura média constante em  $\mathbb{S}^3$ . Então, para todo inteiro positivo  $k$ ,*

$$\lambda_k^J \leq -2(1+H^2) + \lambda_{m(k)}^{\Delta_1}$$

onde  $m(k) > 8(k-1)$ .

Nesta direção nosso resultado se enuncia da seguinte forma:

**Teorema 3.3.4.** *Seja  $M$  uma hipersuperfície fechada imersa em  $\mathbb{S}^{n+1}$  com curvatura média constante não nula  $H$ . Suponha também que  $M$  tenha duas curvaturas principais com multiplicidades  $n/2$ , para  $n$  par. Então, para todo inteiro positivo  $k$ ,*

$$\lambda_k^J \leq -2(n-1) - nH^2 + \left(\frac{2-n}{n}\right) \max \|A\|^2 + \lambda_{m(k)}^{\Delta_1}$$

onde  $m(k) > 2(n+2)(k-1)$ .

*Demonstração.* Seja  $\{\theta_i\}_{i=1}^{+\infty}$  uma base  $L^2$ -ortonormal de  $\Omega^1(M)$  constituída por 1-formas que satisfazem  $\Delta_1\theta_k = \lambda_k^{\Delta_1}\theta_k$ . Denota-se por  $V_m^{\Delta_1}$  o espaço vetorial dado pela soma direta dos autoespaços gerados por  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ , as primeiras  $m$  autofunções do Laplaciano Hodge  $\Delta_1$ , onde  $\xi_k = \theta_k^\#$  e seja uma base  $L^2$ -ortonormal  $\{\phi_i\}_{i=1}^{+\infty}$  dada pelas autofunções do operador de Jacobi, onde  $\phi_k$  esta associada a  $\lambda_k^J$ . Dado um vetor  $\xi \in V_m^{\Delta_1}$  tal que satisfaça as seguintes relações de ortogonalidade:

$$\int_M \omega_i \phi_j = \int_M \bar{\omega}_i \phi_j = 0, \quad 1 \leq i \leq n+2, \quad 1 \leq j \leq k-1$$

onde as funções  $\omega_i$  e  $\bar{\omega}_i$  são como foram definidas no Lema 3.2.3. Temos então, um sistema de  $2(n+2)(k-1)$  equações lineares homogêneas em  $\xi \in V_m^{\Delta_1}$ .

Se  $m(k) = \dim V_m^{\Delta_1} > 2(n+2)(k-1)$ , então podemos encontrar um campo vetorial  $\xi \in V_m^{\Delta_1}$  não-nulo.

Devido às definições apresentadas no Capítulo 1, Seção 1.3, o operador de Jacobi da imersão  $M \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$  é dado por  $J = \Delta - \|A\|^2 - n$ . Tendo em vista essa definição, segue da caracterização dos autovalores de  $J$ , que

$$\lambda_k^J \leq \frac{\int_M \omega_i J \omega_i}{\int_M \omega_i^2} \quad e \quad \lambda_k^J \leq \frac{\int_M \bar{\omega}_i J \bar{\omega}_i}{\int_M \bar{\omega}_i^2}.$$

Logo, segue do Lema 3.2.3 que:

$$\begin{aligned} \lambda_k^J \int_M \omega_i^2 \leq & - \int_M (n-2)\omega_i^2 - nH \int_M \langle A\xi, E_i \rangle \omega_i + 2 \int_M \langle A^2\xi, E_i \rangle \omega_i + \int_M \langle \Delta\xi, E_i \rangle \omega_i \\ & - 2 \int_M g_i \omega_i \langle \nabla\xi, A \rangle - 2 \int_M f_i \omega_i \operatorname{div}\xi - \int_M (\|A\|^2 + n)\omega_i^2. \end{aligned}$$

Somando em  $i = 1 \dots n+2$  obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_k^J \int_M \|\xi\|^2 \leq & -(n-2) \int_M \|\xi\|^2 - nH \int_M \langle A\xi, \xi \rangle + 2 \int_M \langle A^2\xi, \xi \rangle + \int_M \langle \Delta\xi, \xi \rangle \\ & - \int_M (\|A\|^2 + n)\|\xi\|^2. \end{aligned}$$

Agora, pelo Lema 3.2.4 é conhecido que o quadrado do operador forma, com a hipótese sobre as curvaturas principais, se escreve como:

$$nA^2 = (\|A\|^2 - 2nH^2)\operatorname{Id} + 2nHA.$$

Substituindo na desigualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda_k^J \int_M \|\xi\|^2 &\leq -(n-2) \int_M \|\xi\|^2 - nH \int_M \langle A\xi, \xi \rangle + \int_M \left\langle \frac{2}{n} (\|A\|^2 - 2nH^2) \xi, \xi \right\rangle + 4H \int_M \langle A\xi, \xi \rangle \\
&\quad + \int_M \langle \Delta\xi, \xi \rangle - \int_M (\|A\|^2 + n) \|\xi\|^2, \\
&= -2(n-1) \int_M \|\xi\|^2 - (n-4)H \int_M \langle A\xi, \xi \rangle + \left(\frac{2}{n} - 1\right) \int_M \|A\|^2 \|\xi\|^2 \\
&\quad - 4H^2 \int_M \|\xi\|^2 + \int_M \langle \Delta\xi, \xi \rangle.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Analogamente, obtemos com as funções teste  $\bar{w}_i$ ,

$$\begin{aligned}
\lambda_k^J \int_M \|\xi\|^2 &\leq -2(n-1) \int_M \|\xi\|^2 - (n-4)H \int_M \langle A\bar{\xi}, \bar{\xi} \rangle + \left(\frac{2}{n} - 1\right) \int_M \|A\|^2 \|\xi\|^2 \\
&\quad - 4H^2 \int_M \|\xi\|^2 + \int_M \langle \Delta\bar{\xi}, \bar{\xi} \rangle.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Como  $\xi$  é uma combinação linear das primeiras  $m(k)$  autofunções de  $\Delta_1$ , verifica-se facilmente que:

$$\int_M \langle \Delta\bar{\xi}, \bar{\xi} \rangle = \int_M \langle \Delta\xi, \xi \rangle \leq \lambda_{m(k)}^{\Delta_1} \int_M \|\xi\|^2$$

e já que  $M$  tem duas curvaturas principais com multiplicidades  $n/2$ , pelo Lema 3.2.5 temos:

$$\langle A\xi, \xi \rangle + \langle A\bar{\xi}, \bar{\xi} \rangle = 2H \|\xi\|^2.$$

Somando as equações (3.4) e (3.5) e considerando as duas observações acima encontramos

$$\begin{aligned}
2\lambda_k^J \int_M \|\xi\|^2 &\leq -4(n-1) \int_M \|\xi\|^2 - 2nH^2 \int_M \|\xi\|^2 + 2\left(\frac{2}{n} - 1\right) \int_M \|A\|^2 \|\xi\|^2 \\
&\quad + 2\lambda_{m(k)}^{\Delta_1} \int_M \|\xi\|^2.
\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que

$$\lambda_k^J \leq -2(n-1) - nH^2 + \left(\frac{2}{n} - 1\right) \max\|A\|^2 + \lambda_{m(k)}^{\Delta_1}.$$

■

Com respeito ao índice de hipersuperfícies com curvatura média constante, no caso mínimo, A. Savo [30] mostrou que o índice de Morse é limitado por baixo por uma função linear do primeiro número de Betti; que em particular, se o primeiro número de Betti for grande, então a imersão será altamente instável. Com tudo isto, ele mostrou os seguintes resultados.

**Teorema 3.3.5** ([30]). *Seja  $M^n$  uma hipersuperfície de  $\mathbb{S}^{n+1}$ . Assuma que  $b_1(M) \geq 1$  e  $n \geq 3$ . Então:*

$$\text{Ind}(M) \geq \frac{b_1(M)}{\binom{n+2}{2}} + n + 2,$$

onde a igualdade ocorre unicamente para o toro de Clifford com  $b_1(M) = 1$ .

Em dimensão 2 tem-se a seguinte estimativa.

**Teorema 3.3.6** ([30]). *Seja  $M^2$  uma superfície mínima em  $\mathbb{S}^3$  com gênero  $g \geq 1$ . Então,*

$$\text{Ind}(M) \geq \frac{g}{2} + 4.$$

Esses resultados foram generalizados por Ambrosio, Carlotto e Sharp [3] e Mendes e Radeschi [25] para uma grande classe de variedades ambientes com curvatura seccional positiva. Nesta direção, Cavalcante e de Oliveira [9] obtiveram a seguinte estimativa para o índice de Morse de superfícies CMC fechadas:

**Teorema 3.3.7** ([9]). *Seja  $M^2$  uma superfície fechada imersa em  $\mathbb{S}^3$  de curvatura média constante não nula  $H$  e com gênero  $g$ . Então,*

$$\text{Ind}_T(M) \geq \frac{g}{4}.$$

O Teorema 3.3.4 mostra que, se existirem muitos autovalores pequenos do Laplaciano em 1-formas, o índice fraco será grande. Inspirados nos resultados anteriores temos o seguinte resultado:

**Corolário 3.3.8.** *Seja  $M$  uma hipersuperfície fechada imersa em  $\mathbb{S}^{n+1}$  com curvatura média constante não nula  $H$ . Suponha também que  $M$  tenha duas curvaturas principais com multiplicidades  $n/2$ , para  $n$  par. Então,*

$$\text{Ind}_T(M) \geq \frac{b_1(M)}{2(n+2)}$$

Para a prova deste resultado, precisaremos definir antes o que é uma forma harmônica e dar alguns preliminares sobre cohomologia de De Rham.

**Definição 3.1.** Uma  $p$ -forma diferenciável  $\theta$  é dita ser harmônica se

$$\theta \in \mathcal{H}^p(M) := \{\omega \in \Omega^p(M) \mid \Delta\omega = 0\}.$$

Seja  $k \geq 0$ . Definimos os seguintes subespaços de  $\Omega^k(M)$ :

$$\mathcal{Z}^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) \mid d\omega = 0\}$$

$$\mathcal{B}^k(M) = \{\omega \in \Omega^k(M) \mid \exists \eta \in \Omega^{k-1}(M) \text{ com } d\eta = \omega\}$$

Os elementos de  $\mathcal{Z}^k(M)$  são chamados de  $k$ -formas *fechadas* e os elementos de  $\mathcal{B}^k(M)$  são chamados de  $k$ -formas *exatas*. Assim, definimos o  $k$ -ésimo grupo de cohomologia de De Rham de  $M$  como sendo

$$\mathcal{H}_{dR}^k(M) = \frac{\mathcal{Z}^k(M)}{\mathcal{B}^k(M)}.$$

Para cada  $k$ -forma fechada  $\omega$  em  $M$ , denotamos por  $[\omega]$  a classe de equivalência de  $\omega$  em  $\mathcal{H}_{dR}^k(M)$ .

Se  $k < 0$  ou  $k > \dim(M)$ , então  $\mathcal{H}_{dR}^k(M) = [0]$ . Se  $[\omega] = [\omega']$  (ou seja, se  $\omega$  e  $\omega'$  diferem apenas por uma forma exata), dizemos que  $\omega$  e  $\omega'$  são cohomólogas. Quando  $M$  é fechada, os grupos de cohomologias de De Rham tem dimensão finita, denotada por

$$b_k(M) := \dim \mathcal{H}_{dR}^k(M),$$

onde o número  $b_k(M)$  é chamado o  $k$ -ésimo número de Betti de  $M$ . Uma propriedade importante dos números de Betti é que satisfazem  $b_k(M) = b_{n-k}(M)$  e também definem a característica de Euler de uma variedade fechada:

$$\mathcal{X}(M) := \sum_{i=0}^n (-1)^i b_i(M).$$

Devido ao fato que toda função harmônica sobre superfícies fechadas é constante, temos que  $b_0(M) = 1$ . Além disso, temos que  $\mathcal{X}(M) = 2 - 2g$  onde  $g$  é o gênero da superfície. Portanto, segue que

$$2 - 2g = b_0(M) - b_1(M) + b_2(M) = 2 - b_1(M),$$

onde  $b_1(M) = 2g$  no caso particular de superfícies fechadas.

**Teorema 3.3.9** (Hodge). *Seja  $M$  uma variedade Riemanniana fechada. Então toda classe de cohomologia no  $k$ -ésimo grupo de cohomologia de De Rham possui exatamente uma  $k$ -forma harmônica, isto é,*

$$\mathcal{H}_{dR}^k(M) \simeq \mathcal{H}^k(M).$$

Portanto, segue do teorema de Hodge que  $b_k(M) = \dim \mathcal{H}^k(M)$ .

E para finalizar, mostramos que as funções testes  $\omega_i = \langle \xi, E_i \rangle$  e  $\bar{\omega}_i = \langle \bar{\xi}, E_i \rangle$  satisfazem a condição de ter média nula, o que implica que contribuem com o  $\text{Ind}_T(M)$ .

**Lema 3.3.10.** *Seja  $M$  uma variedade fechada e  $\theta \in \mathcal{H}^1(M)$ . Se  $\xi = \theta^\#$  e  $\bar{\xi} = (\star\theta)^\#$  então*

$$\int_M \langle \xi, E_i \rangle dM = 0 \quad e \quad \int_M \langle \bar{\xi}, E_i \rangle dM = 0.$$

*Demonstração.* Desde que  $\theta$  é harmônica, temos que  $\delta\theta = 0$ . Pelo Lema 3.2.1, segue que

$$\begin{aligned} \int_M \langle \xi, E_i \rangle dM &= \int_M \langle \xi, \text{grad} \ell_i \rangle dM \\ &= \int_M \langle \theta, df \ell_i \rangle dM \\ &= \int_M \langle \delta\theta, \ell_i \rangle dM \\ &= 0. \end{aligned}$$

A segunda integral é satisfeita pois  $\star\theta$  é harmônica. ■

**Demonstração do Corolário 3.3.8.** Como foi feito na prova do Teorema 3.3.4, mas agora escolhemos uma base ortonormal  $\{\phi_i\}_{i=1}^{+\infty}$  do espaço  $\mathcal{F} = \{u \in C^\infty(M); \int_M u = 0\}$  dado pelas autofunções do operador de Jacobi.

Pelo Lema 3.3.10, sabemos que para qualquer  $\xi = \theta^\#$  onde  $\theta \in \mathcal{H}^1(M)$ , as funções  $\omega_i, \bar{\omega}_i \in \mathcal{F}$ . Então, consideramos campos vetoriais  $\xi \in \mathcal{H}^1(M)$  que satisfaçam as seguintes relações de ortogonalidade:

$$\int_M \omega_i \phi_j = \int_M \bar{\omega}_i \phi_j = 0, \quad 1 \leq i \leq n+2 \quad 1 \leq j \leq k-1.$$

Então temos um sistema de  $2(n+2)(k-1)$  equações lineares homogêneas em  $\xi \in \mathcal{H}^1(M)$ . Se  $\dim \mathcal{H}^1(M) > 2(n+2)(k-1)$ , então podemos encontrar um campo vetorial  $\xi \in \mathcal{H}^1(M)$  não-nulo.

Segue da caracterização dos autovalores de  $J$ , que

$$\lambda_k^J \leq \frac{\int_M \omega_i J \omega_i}{\int_M \omega_i^2} \quad e \quad \lambda_k^J \leq \frac{\int_M \bar{\omega}_i J \bar{\omega}_i}{\int_M \bar{\omega}_i^2}.$$

Pelo Lema 3.2.3 aplicado a campos harmônicos temos:

$$\begin{aligned} \lambda_k^J \int_M \omega_i^2 &\leq - \int_M 2(n-1)\omega_i^2 - \int_M \|A\|^2 \omega_i^2 - nH \int_M \omega_i \langle A\xi, E_i \rangle + 2 \int_M \omega_i \langle A^2 \xi, E_i \rangle \\ &\quad - \int_M \omega_i f_i \langle A, \nabla \xi \rangle. \end{aligned}$$

Somando em  $i = 1 \dots n + 2$  obtemos

$$\lambda_k^J \int_M \|\xi\|^2 \leq -2(n-1) \int_M \|\xi\|^2 - nH \int_M \langle A\xi, \xi \rangle + 2 \int_M \langle A^2\xi, \xi \rangle - \int_M \|A\|^2 \|\xi\|^2,$$

Agora, pelo Lema 3.2.4 é conhecido que o quadrado do operador forma, com a hipótese sobre as curvaturas principais, se escreve como:

$$nA^2 = (\|A\|^2 - 2nH^2)\text{Id} + 2nHA.$$

Substituindo na desigualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \lambda_k^J \int_M \|\xi\|^2 &\leq -2(n-1) \int_M \|\xi\|^2 - (n-4)H \int_M \langle A\xi, \xi \rangle + \left(\frac{2}{n} - 1\right) \int_M \|A\|^2 \|\xi\|^2 \\ &\quad - 4H^2 \int_M \|\xi\|^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Analogamente, fazemos os mesmos cálculos para as funções  $\bar{w}_i$ ,

$$\begin{aligned} \lambda_k^J \int_M \|\xi\|^2 &\leq -2(n-1) \int_M \|\xi\|^2 - (n-4)H \int_M \langle A\bar{\xi}, \bar{\xi} \rangle + \left(\frac{2}{n} - 1\right) \int_M \|A\|^2 \|\xi\|^2 \\ &\quad - 4H^2 \int_M \|\xi\|^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Como  $M$  tem duas curvaturas principais com multiplicidades  $n/2$ , pelo Lema 3.2.5 temos:

$$\langle A\xi, \xi \rangle + \langle A\bar{\xi}, \bar{\xi} \rangle = 2H\|\xi\|^2.$$

Somando as equações 3.6 e 3.7 e considerando a observação anterior obtemos:

$$2\lambda_k^J \int_M \|\xi\|^2 \leq -4(n-1) \int_M \|\xi\|^2 - 2nH^2 \int_M \|\xi\|^2 + 2\left(\frac{2}{n} - 1\right) \int_M \|A\|^2 \|\xi\|^2.$$

Portanto, concluímos que

$$\lambda_k^J \leq -2(n-1) - nH^2 + \left(\frac{2}{n} - 1\right) \max\|A\|^2.$$

O anterior implica que o  $k$ -ésimo autovalor fraco de  $J$  é negativo, então  $\text{Ind}_T(M) \geq k$ .

Além disso,  $k$  é o maior número inteiro que satisfaz  $\dim \mathcal{H}^1(M) > 2(n+2)(k-1)$ , logo:

$$k \geq \frac{b_1(M)}{2(n+2)},$$

e finalmente obtemos:

$$\text{Ind}_T(M) \geq \frac{b_1(M)}{2(n+2)}.$$

■

### 3.4 Uma caracterização dos $H(r)$ -toros pelo primeiro autovalor fraco do operador de Jacobi

Na Seção 3.1 mostramos o resultado de Barbosa, do Carmo e Eschenburg que caracteriza as esferas totalmente umbílicas  $\mathbb{S}^n(r) \subset \mathbb{S}^{n+1}$  como as únicas hipersuperfícies compactas com curvatura média constante que são fracamente estáveis. Equivalentemente,  $\text{Ind}_T(M) \geq 1$  para o resto de hipersuperfícies compactas de  $\mathbb{S}^{n+1}$ . Aliás, Brasil e Perdomo [2], mostraram que se  $M$  for uma hipersuperfície compacta, orientável e com curvatura média constante, então  $\text{Ind}_T(M) \geq n + 2$  sob a hipótese adicional da curvatura escalar ser constante. Além disso, se  $M$  for uma hipersuperfície com  $\text{Ind}_T(M) = n + 2$ , então  $M$  será um toro com curvatura média constante ou  $H(r)$ -toro  $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2}) \hookrightarrow \mathbb{S}^{n+1} \in \mathbb{R}^{n+2}$  com raio  $\sqrt{k/(n+2)} \leq r \leq \sqrt{(k+2)/(n+2)}$ . Cabe dizer que o valor do índice dos toros de Clifford com curvatura média constante  $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$  converge a infinito quando  $r$  converge para 0 ou 1. Lembrando o exposto na Seção 3.1, onde vimos que  $\lambda_i$  e  $\mu_j$  são os autovalores do Laplaciano em  $\mathbb{S}^k(r)$  e  $\mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$ , respectivamente, então pode-se ver facilmente para qualquer  $i, j \geq 3$ ,

$$\lambda_1 + \mu_j < \frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}$$

se, e somente se,

$$r^2 < a_j = \frac{k}{n + (j-3)(n-k) + (j-1)(j-2)},$$

e

$$\lambda_i + \mu_1 < \frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2}$$

se, e somente se,

$$r^2 > b_i = 1 - \frac{(n-k)}{(n-k) + (i-2)(k+i-1)},$$

onde  $\{a_j\} \searrow 0$  e  $\{b_i\} \nearrow 1$ . Como consequência, se  $\text{Ind}_T(r)$  representa o índice de estabilidade fraco de  $\mathbb{S}^k(r) \times \mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$ , obtemos que  $\text{Ind}_T(r) = n + 2$  quando  $a_3 = k/(n+2) \leq r^2 \leq (k+2)/(n+2) = b_3$ ,

$$\text{Ind}_T(r) = n + 2 + \sum_{l=3}^j m_{\mu_l} = k + \binom{n-k+j-1}{j-1} + \binom{n-k+j-2}{j-2}$$

quando  $a_{j+1} \leq r^2 < a_j$ , com  $j \geq 3$ , e

$$\text{Ind}_T(r) = n + 2 + \sum_{l=3}^i m_{\lambda_l} = n - k + 1 + \binom{k+i-1}{i-1} + \binom{k+i-1}{i-2}$$

quando  $b_i < r^2 \leq b_{i+1}$ , com  $i \geq 3$ .

Por esse motivo, em contraste com o caso do toro mínimo de Clifford, não é possível, em geral, encontrar uma caracterização de todos os toros de Clifford de curvatura média constantes ou  $H(r)$ -toros em termos do seu índice.

### 3.4.1 Casos particulares de $H(r)$ -toros

A partir das definições dos autovalores do Laplaciano em  $\mathbb{S}^k(r)$  e  $\mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$ , obtemos:

- Em  $\mathbb{S}^k(r)$ :

$$\lambda_1^\Delta = 0, \lambda_2^\Delta = \frac{k}{r^2}, \lambda_3^\Delta = \frac{2(k+1)}{1-r^2}, \lambda_4^\Delta = \frac{3(k+2)}{r^2}, \lambda_5^\Delta = \frac{4(k+3)}{r^2}, \dots$$

- Em  $\mathbb{S}^{n-k}(\sqrt{1-r^2})$ :

$$\mu_1^\Delta = 0, \mu_2^\Delta = \frac{(n-k)}{1-r^2}, \mu_3^\Delta = \frac{2(n-k+1)}{1-r^2}, \mu_4^\Delta = \frac{3(n-k+2)}{1-r^2}, \mu_5^\Delta = \frac{4(n-k+3)}{1-r^2}, \dots$$

Pelo anterior podemos calcular os autovalores do operador de Jacobi para certo tipo de toro com curvatura média constante.

- **Autovalores em  $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{1-r^2})$**

Se  $H > 0$  e  $\sqrt{1/n} < r < \sqrt{3/(n+2)}$  temos

$$Spec(J) = \{\lambda_1^J = -\frac{1+(n-2)r^2}{r^2(1-r^2)}, \lambda_2^J = -\frac{(n-1)}{1-r^2}, \lambda_3^J = -\frac{1}{r^2}, \dots\}.$$

- **Autovalores em  $\mathbb{S}^{n-1}(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2})$**

Se  $H < 0$  e  $\sqrt{1/(n+2)} < r < \sqrt{1/n}$  temos

$$Spec(J) = \{\lambda_1^J = -\frac{n-1-(n-2)r^2}{r^2(1-r^2)}, \lambda_2^J = -\frac{(n-1)}{r^2}, \lambda_3^J = -\frac{1}{1-r^2}, \dots\}.$$

Como uma consequência, se sabe que  $\lambda_1^J = -(\frac{k}{r^2} + \frac{n-k}{1-r^2})$  com multiplicidade 1 e suas correspondentes autofunções são funções constantes que contribuem para o  $\text{Ind}(M)$  mas não para o  $\text{Ind}_T(M)$ , pois as autofunções não satisfazem a condição  $\int_M u dv = 0$ . Ainda mais, já que todo o resto das autofunções de  $J$  são ortogonais às funções constantes e elas satisfazem a condição  $\int_M u dv = 0$  e contribuem para o  $\text{Ind}_T(M)$ . Portanto, neste caso tem-se que  $\text{Ind}(M) = \text{Ind}_T(M) + 1$ .

Pelo exposto anteriormente, podemos dizer que o primeiro autovalor fraco do operador de Jacobi é:

(a) se  $H > 0$  e  $\sqrt{1/n} < r < \sqrt{3/n+2}$ , então:

$$\lambda_1^{J_T} = -\frac{n-1}{1-r^2};$$

(b) se  $H < 0$  e  $\sqrt{1/(n+2)} < r < \sqrt{1/n}$  então:

$$\lambda_1^{J_T} = -\frac{n-1}{r^2}.$$

Por outro lado, através de um cálculo tedioso, mas direto, segue das igualdades anteriores e de

$$H = \frac{nr^2 - k}{nr\sqrt{1-r^2}}, \quad \kappa_1 = -\frac{\sqrt{1-r^2}}{r} \quad e \quad \kappa_2 = \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}$$

que o primeiro autovalor fraco pode-se expressar da seguinte forma:

(a) se  $H > 0$  e  $\sqrt{1/n} < r < \sqrt{3/n+2}$ , então:

$$\lambda_1^{J_T} = -2(n-1) - \frac{n^2 H^2}{n-1} + n \left( \frac{3-n}{n-1} \right) H \kappa_1 + \left( \frac{n-2}{n-1} \right) \kappa_1^2,$$

(b) se  $H < 0$  e  $\sqrt{1/(n+2)} < r < \sqrt{1/n}$ , então:

$$\lambda_1^{J_T} = -2(n-1) - \frac{n^2 H^2}{n-1} + n \left( \frac{3-n}{n-1} \right) H \kappa_2 + \left( \frac{n-2}{n-1} \right) \kappa_2^2,$$

onde  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  representam as curvaturas principais.

Nesta última seção mostraremos nosso resultado principal do capítulo o qual esta baseado nos trabalhos de Ros e Savo, devido a isto usamos novamente as coordenadas de  $\xi \in TM$  como funções testes. Elas são dadas por

$$\omega_i := \langle E_i, \xi \rangle, \quad 1 \leq i \leq n+2$$

onde  $\xi = \theta^\#$  com  $\theta \in \Omega^1(M)$ . Além disso, vamos supor que  $M$  tem duas curvaturas principais com multiplicidades  $k$  e  $n-k$ , respectivamente.

O seguinte lema mostra expressões para  $\langle A\xi, \xi \rangle$  e  $\langle A^2\xi, \xi \rangle$  para hipersuperfícies  $M^n$  com duas curvaturas principais.

**Lema 3.4.1.** *Seja  $A$  o operador forma da imersão  $\psi : M^n \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$  de uma hipersuperfície compacta, orientável e imersa em  $\mathbb{S}^{n+1}$  com curvatura média constante e com duas curvaturas principais  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  de multiplicidades  $k$  e  $n-k$ , respectivamente. Então,*

$$\begin{aligned} \langle A\xi, \xi \rangle &= \kappa_1 \|\xi\|^2 - \frac{n}{n-k} \kappa_1 \sum_{i=k+1}^n \langle \xi, \xi_i \rangle^2 + \frac{nH}{n-k} \sum_{i=k+1}^n \langle \xi, \xi_i \rangle^2, \\ \langle A\xi, \xi \rangle &= \kappa_2 \|\xi\|^2 - \frac{n}{k} \kappa_2 \sum_{i=1}^k \langle \xi, \xi_i \rangle^2 + \frac{nH}{k} \sum_{i=1}^k \langle \xi, \xi_i \rangle^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\langle A^2\xi, \xi \rangle &= \kappa_1^2 \|\xi\|^2 - \frac{n}{n-k} \kappa_1^2 \sum_{i=k+1}^n \langle \xi, \xi_i \rangle^2 + \frac{\|A\|^2}{n-k} \sum_{i=k+1}^n \langle \xi, \xi_i \rangle^2, \\ \langle A^2\xi, \xi \rangle &= \kappa_2^2 \|\xi\|^2 - \frac{n}{k} \kappa_2^2 \sum_{i=1}^k \langle \xi, \xi_i \rangle^2 + \frac{\|A\|^2}{k} \sum_{i=1}^k \langle \xi, \xi_i \rangle^2,\end{aligned}$$

onde  $\{\xi_i\}_{i=1}^n$  é uma base ortonormal em  $TM$ .

*Demonstração.* Suponha que  $M$  tenha duas curvaturas principais  $k_1$  e  $k_2$  com multiplicidades  $k$  e  $n - k$ , respectivamente. Seja  $\{\xi_i\}$  uma base ortonormal em  $TM$ . Então

$$H = \frac{k\kappa_1 + (n-k)\kappa_2}{n} \quad e \quad \|A\|^2 = k\kappa_1^2 + (n-k)\kappa_2^2.$$

A partir do anterior, pode-se isolar  $\kappa_2$  em função de  $H$  e  $\kappa_1$ , obtendo-se

$$\begin{aligned}\langle A\xi, \xi \rangle &= \langle A(\sum_{i=1}^n \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i), \sum_{j=1}^n \langle \xi, \xi_j \rangle \xi_j \rangle \\ &= \langle A(\sum_{i=1}^k \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i + \sum_{i=k+1}^n \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i), \sum_{j=1}^n \langle \xi, \xi_j \rangle \xi_j \rangle \\ &= \langle \kappa_1 \sum_{i=1}^k \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i + \kappa_2 \sum_{i=k+1}^n \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i, \sum_{j=1}^n \langle \xi, \xi_j \rangle \xi_j \rangle \\ &= \langle \kappa_1 \sum_{i=1}^k \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i + \left(\frac{nH-k\kappa_1}{n-k}\right) \sum_{i=k+1}^n \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i, \sum_{j=1}^n \langle \xi, \xi_j \rangle \xi_j \rangle \\ &= \langle \kappa_1 \sum_{i=1}^k \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i + \kappa_1 \sum_{i=k+1}^n \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i - \kappa_1 \frac{n}{n-k} \sum_{i=k+1}^n \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i + \frac{nH}{n-k} \sum_{i=k+1}^n \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i, \sum_{j=1}^n \langle \xi, \xi_j \rangle \xi_j \rangle \\ &= \kappa_1 \|\xi\|^2 - \kappa_1 \frac{n}{n-k} \langle \sum_{i=k+1}^n \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i, \xi \rangle + \frac{nH}{n-k} \langle \sum_{i=k+1}^n \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i, \xi \rangle \\ &= \kappa_1 \|\xi\|^2 - \kappa_1 \frac{n}{n-k} \sum_{i=k+1}^n \langle \xi, \xi_i \rangle^2 + \frac{nH}{n-k} \sum_{i=k+1}^n \langle \xi, \xi_i \rangle^2.\end{aligned}$$

Do mesmo modo, pode-se isolar  $\kappa_1$

$$\begin{aligned}\langle A\xi, \xi \rangle &= \langle A(\sum_{i=1}^n \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i), \sum_{j=1}^n \langle \xi, \xi_j \rangle \xi_j \rangle \\ &= \langle A(\sum_{i=1}^k \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i + \sum_{i=k+1}^n \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i), \sum_{j=1}^n \langle \xi, \xi_j \rangle \xi_j \rangle \\ &= \langle \kappa_1 \sum_{i=1}^k \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i + \kappa_2 \sum_{i=k+1}^n \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i, \sum_{j=1}^n \langle \xi, \xi_j \rangle \xi_j \rangle \\ &= \langle \left(\frac{nH-(n-k)\kappa_2}{k}\right) \sum_{i=1}^k \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i + \kappa_2 \sum_{i=k+1}^n \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i, \sum_{j=1}^n \langle \xi, \xi_j \rangle \xi_j \rangle \\ &= \langle \kappa_2 \sum_{i=k+1}^n \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i + \kappa_2 \sum_{i=1}^k \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i - \kappa_2 \frac{n}{k} \sum_{i=1}^k \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i + \frac{nH}{k} \sum_{i=1}^k \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i, \sum_{j=1}^n \langle \xi, \xi_j \rangle \xi_j \rangle \\ &= \kappa_2 \|\xi\|^2 - \kappa_2 \frac{n}{k} \langle \sum_{i=1}^k \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i, \xi \rangle + \frac{nH}{k} \langle \sum_{i=1}^k \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i, \xi \rangle \\ &= \kappa_2 \|\xi\|^2 - \kappa_2 \frac{n}{k} \sum_{i=1}^k \langle \xi, \xi_i \rangle^2 + \frac{nH}{k} \sum_{i=1}^k \langle \xi, \xi_i \rangle^2.\end{aligned}$$

Assim também pode-se isolar  $\kappa_2$  em função de  $\|A\|^2$  e  $\kappa_1$

$$\begin{aligned}
\langle A^2\xi, \xi \rangle &= \langle A^2(\sum_{i=1}^n \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i), \sum_{j=1}^n \langle \xi, \xi_j \rangle \xi_j \rangle \\
&= \langle A^2(\sum_{i=1}^k \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i + \sum_{i=k+1}^n \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i), \sum_{j=1}^n \langle \xi, \xi_j \rangle \xi_j \rangle \\
&= \langle \kappa_1^2 \sum_{i=1}^k \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i + \kappa_2^2 \sum_{i=k+1}^n \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i, \sum_{j=1}^n \langle \xi, \xi_j \rangle \xi_j \rangle \\
&= \langle \kappa_1^2 \sum_{i=1}^k \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i + \left( \frac{\|A\|^2 - k\kappa_1^2}{n-k} \right) \sum_{i=k+1}^n \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i, \sum_{j=1}^n \langle \xi, \xi_j \rangle \xi_j \rangle \\
&= \langle \kappa_1^2 \sum_{i=1}^k \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i + \kappa_1^2 \sum_{i=k+1}^n \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i - \kappa_1^2 \frac{n}{n-k} \sum_{i=k+1}^n \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i + \frac{\|A\|^2}{n-k} \sum_{i=k+1}^n \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i, \sum_{j=1}^n \langle \xi, \xi_j \rangle \xi_j \rangle \\
&= \kappa_1^2 \|\xi\|^2 - \kappa_1^2 \frac{n}{n-k} \sum_{i=k+1}^n \langle \xi, \xi_i \rangle^2 + \frac{\|A\|^2}{n-k} \sum_{i=k+1}^n \langle \xi, \xi_i \rangle^2.
\end{aligned}$$

Do mesmo modo, pode-se isolar  $\kappa_1$

$$\begin{aligned}
\langle A^2\xi, \xi \rangle &= \langle A^2(\sum_{i=1}^n \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i), \sum_{j=1}^n \langle \xi, \xi_j \rangle \xi_j \rangle \\
&= \langle A^2(\sum_{i=1}^k \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i + \sum_{i=k+1}^n \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i), \sum_{j=1}^n \langle \xi, \xi_j \rangle \xi_j \rangle \\
&= \langle \kappa_1^2 \sum_{i=1}^k \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i + \kappa_2^2 \sum_{i=k+1}^n \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i, \sum_{j=1}^n \langle \xi, \xi_j \rangle \xi_j \rangle \\
&= \langle \left( \frac{\|A\|^2 - (n-k)\kappa_2^2}{k} \right) \sum_{i=1}^k \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i + \kappa_2^2 \sum_{i=k+1}^n \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i, \sum_{j=1}^n \langle \xi, \xi_j \rangle \xi_j \rangle \\
&= \langle \kappa_2^2 \sum_{i=1}^k \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i + \kappa_2^2 \sum_{i=k+1}^n \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i - \kappa_2^2 \frac{n}{k} \sum_{i=1}^k \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i + \frac{\|A\|^2}{k} \sum_{i=1}^k \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i, \sum_{j=1}^n \langle \xi, \xi_j \rangle \xi_j \rangle \\
&= \kappa_2^2 \|\xi\|^2 - \kappa_2^2 \frac{n}{k} \sum_{i=1}^k \langle \xi, \xi_i \rangle^2 + \frac{\|A\|^2}{k} \sum_{i=1}^k \langle \xi, \xi_i \rangle^2
\end{aligned}$$

■

Devido ao fato de não podermos caracterizar todos  $H(r)$ -toros, o seguinte resultado mostra uma caracterização espectral para um caso particular deles.

**Teorema 3.4.2.** *Seja  $M^n$  uma hipersuperfície compacta, orientável e imersa em  $\mathbb{S}^{n+1}$  com curvatura média constante não nula, e seja  $\lambda_1^{JT}$  o primeiro autovalor fraco do operador de Jacobi  $J = \Delta + \|A\|^2 + n$ . Além disso, suponha que  $M$  tem duas curvaturas principais  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  com multiplicidades 1 e  $n-1$  ou  $n-1$  e 1, respectivamente.*

(i) *Se  $n \leq 3$ , então*

$$\lambda_1^{JT} \leq -2(n-1) - \frac{n^2 H^2}{n-1} + n \left( \frac{3-n}{n-1} \right) |H| \max_M \kappa_i + \left( \frac{n-2}{n-1} \right) \max_M \kappa_i^2$$

(ii) Se  $n \geq 4$ , então

$$\lambda_1^{J_T} \leq -2(n-1) - \frac{n^2 H^2}{n-1} + n \left( \frac{3-n}{n-1} \right) |H| \min_M \kappa_i + \left( \frac{n-2}{n-1} \right) \max_M \kappa_i^2.$$

Além disso, a igualdade ocorre em ambos casos se, e somente se:

- (a)  $M$  é um toro de Clifford  $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{1-r^2})$  de curvatura média constante, com  $H > 0$  e  $\sqrt{1/n} < r < \sqrt{3/(n+2)}$ ; ou
- (b)  $M$  é um toro de Clifford  $\mathbb{S}^{n-1}(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2})$  de curvatura média constante, com  $H < 0$  e  $\sqrt{1/(n+2)} < r < \sqrt{1/n}$ .

*Demonstração.* Denota-se por  $V_m^{\Delta_1}$  o espaço vetorial dado pela soma direta dos autoespaços gerados por  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ , as primeiras  $m$  autofunções do Laplaciano Hodge  $\Delta_1$  e denota-se também por  $\mathcal{H}^1(M)$  o espaço vetorial de campos vetoriais harmônicos em  $M$ . Considera-se campos vetoriais  $\xi \in V_m^{\Delta_1}$  tais que as funções  $\omega_i$ , como foram definidas anteriormente, sejam ortogonais à primeira autofunção  $\phi_1$  do operador de Jacobi. Em outras palavras, tem-se o seguinte sistema

$$\int_M \omega_i \phi_1 = 0, \quad 1 \leq i \leq n+2$$

com  $n+2$  equações lineares homogêneas na variável  $\xi$ . Portanto, se  $\dim \mathcal{H}^1(M) > n+2$ , o sistema terá pelo menos uma solução não-trivial  $\xi \in \mathcal{H}^1(M)$ . Pelo princípio min-max tem-se:

$$\lambda_1^{J_T} \leq \frac{\int_M \omega_i J \omega_i}{\int_M \omega_i^2}.$$

Pelo Lema 3.2.3 aplicado a campos harmônicos, tem-se

$$\begin{aligned} \lambda_1^{J_T} \int_M \omega_i^2 &\leq -2(n-1) \int_M \omega_i^2 - \int_M \|A\|^2 \omega_i^2 - n \int_M H \omega_i \langle A \xi, E_i \rangle + 2 \int_M \omega_i \langle A^2 \xi, E_i \rangle \\ &\quad - 2 \int_M \omega_i f_i \langle A, \nabla \xi \rangle. \end{aligned}$$

Somando em  $i = 1, \dots, n+2$  obtém-se:

$$\lambda_1^{J_T} \int_M \|\xi\|^2 \leq -2(n-1) \int_M \|\xi\|^2 - \int_M \|A\|^2 \|\xi\|^2 - n \int_M H \langle A \xi, \xi \rangle + 2 \int_M \langle A^2 \xi, \xi \rangle.$$

Seja  $\xi$  da forma  $(\tilde{\xi}_1, 0, \dots, 0)$  e aplicando o Lema 3.4.1, obtém-se:

$$\lambda_1^{J_T} \int_M \|\tilde{\xi}\|^2 \leq -2(n-1) \int_M \|\tilde{\xi}\|^2 - \int_M \|A\|^2 \|\tilde{\xi}\|^2 - n \int_M H \kappa_1 \|\tilde{\xi}\|^2 + 2 \int_M \kappa_1^2 \|\tilde{\xi}\|^2. \quad (3.8)$$

A desigualdade (3.8) pode-se expressar em termos da primeira curvatura principal, então:

$$\begin{aligned} \lambda_1^{J_T} \int_M \|\tilde{\xi}\|^2 &\leq -2(n-1) \int_M \|\tilde{\xi}\|^2 - \frac{n^2 H^2}{n-1} \int_M \|\tilde{\xi}\|^2 + n \left( \frac{3-n}{n-1} \right) \int_M H \kappa_1 \|\tilde{\xi}\|^2 \\ &\quad + \frac{n-2}{n-1} \int_M \kappa_1^2 \|\tilde{\xi}\|^2. \end{aligned}$$

A partir da desigualdade anterior temos os seguintes dois casos:

Se  $n \leq 3$ , então:

$$\begin{aligned} \lambda_1^{J_T} \int_M \|\tilde{\xi}\|^2 &\leq -2(n-1) \int_M \|\tilde{\xi}\|^2 - \frac{n^2 H^2}{n-1} \int_M \|\tilde{\xi}\|^2 + n \left( \frac{3-n}{n-1} \right) |H|_{\max_M \kappa_1} \int_M \|\tilde{\xi}\|^2 \\ &\quad + \frac{n-2}{n-1} \max_M \kappa_1^2 \int_M \|\tilde{\xi}\|^2. \end{aligned}$$

Portanto

$$\lambda_1^{J_T} \leq -2(n-1) - \frac{n^2 H^2}{n-1} + n \left( \frac{3-n}{n-1} \right) |H|_{\max_M \kappa_1} + \frac{n-2}{n-1} \max_M \kappa_1^2.$$

Se  $n \geq 4$ , então:

$$\begin{aligned} \lambda_1^{J_T} \int_M \|\tilde{\xi}\|^2 &\leq -2(n-1) \int_M \|\tilde{\xi}\|^2 - \frac{n^2 H^2}{n-1} \int_M \|\tilde{\xi}\|^2 + n \left( \frac{3-n}{n-1} \right) |H|_{\min_M \kappa_1} \int_M \|\tilde{\xi}\|^2 \\ &\quad + \frac{n-2}{n-1} \max_M \kappa_1^2 \int_M \|\tilde{\xi}\|^2. \end{aligned}$$

Portanto

$$\lambda_1^{J_T} \leq -2(n-1) - \frac{n^2 H^2}{n-1} + n \left( \frac{3-n}{n-1} \right) |H|_{\min_M \kappa_1} + \frac{n-2}{n-1} \max_M \kappa_1^2.$$

Nestas últimas duas desigualdades estamos supondo que  $\kappa_1 < 0$ , pois assim não descartamos o caso onde  $H < 0$ .

Agora, se  $\xi$  é da forma  $(0, \dots, 0, \tilde{\xi}_n)$  e usando o Lema 3.4.1, obtêm-se:

$$\lambda_1^{J_T} \int_M \|\tilde{\xi}\|^2 \leq -2(n-1) \int_M \|\tilde{\xi}\|^2 - \int_M \|A\|^2 \|\tilde{\xi}\|^2 - n \int_M H \kappa_2 \|\tilde{\xi}\|^2 + 2 \int_M \kappa_2^2 \|\tilde{\xi}\|^2. \quad (3.9)$$

A desigualdade (3.9) pode-se expressar em termos da segunda curvatura principal, então:

$$\begin{aligned} \lambda_1^{J_T} \int_M \|\tilde{\xi}\|^2 &\leq -2(n-1) \int_M \|\tilde{\xi}\|^2 - \frac{n^2 H^2}{n-1} \int_M \|\tilde{\xi}\|^2 + n \left( \frac{3-n}{n-1} \right) \int_M H \kappa_2 \|\tilde{\xi}\|^2 \\ &\quad + \frac{n-2}{n-1} \int_M \kappa_2^2 \|\tilde{\xi}\|^2. \end{aligned}$$

Do mesmo modo que o caso anterior, obtemos os seguintes dois casos:

Se  $n \leq 3$ , então:

$$\lambda_1^{J_T} \leq -2(n-1) - \frac{n^2 H^2}{n-1} + n \left( \frac{3-n}{n-1} \right) |H| \max_M \kappa_2 + \frac{n-2}{n-1} \max_M \kappa_2^2.$$

Se  $n \geq 4$ , então:

$$\lambda_1^{J_T} \leq -2(n-1) - \frac{n^2 H^2}{n-1} + n \left( \frac{3-n}{n-1} \right) |H| \min_M \kappa_2 + \frac{n-2}{n-1} \max_M \kappa_2^2.$$

Nestas últimas duas desigualdades estamos supondo que  $\kappa_2 > 0$ , pois assim não descartamos o caso onde  $H > 0$ .

Portanto, isto prova as desigualdades procuradas. Além disso, se

$$\lambda_1^{J_T} = -2(n-1) - \frac{n^2 H^2}{n-1} + n \left( \frac{3-n}{n-1} \right) |H| \max_M \kappa_i + \left( \frac{n-2}{n-1} \right) \max_M \kappa_i^2, \quad \text{para } i = 1, 2,$$

implicará que as curvaturas principais de  $M$  são constantes de multiplicidades 1 e  $(n-1)$  ou  $(n-1)$  e 1. Então, pelo resultado de Cartan [7] sobre hipersuperfícies isoparamétricas da esfera, conclui-se que  $M$  será um toro de Clifford com curvatura média constante da forma  $\mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{1-r^2})$  ou  $\mathbb{S}^{n-1}(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2})$  com  $0 < r < 1$  e  $r \neq \sqrt{1/n}$ , pois  $H \neq 0$ . Finalmente, para identificar qual toro de Clifford com curvatura média constante aparece, um cálculo direto na Subseção 3.4.1 mostrou que:

- a) se  $H > 0$ , então teremos que  $M = \mathbb{S}^1(r) \times \mathbb{S}^{n-1}(\sqrt{1-r^2})$  com  $\sqrt{1/n} < r < \sqrt{3/(n+2)}$ , ou
- b) se  $H < 0$ , então teremos que  $M = \mathbb{S}^{n-1}(r) \times \mathbb{S}^1(\sqrt{1-r^2})$  com  $\sqrt{1/(n+2)} < r < \sqrt{1/n}$ .

■

**Observação:** Devido ao Teorema 3.1.2 podemos ver que se  $M$  é uma hipersuperfície compacta, orientável e imersa em  $\mathbb{S}^{n+1}$  com curvatura média constante e com duas curvaturas principais, então o índice fraco será  $n+2$ .

## Referências Bibliográficas

- [1] L.J. Alías, A. Barros, and A. Brasil Jr., A spectral characterization of the  $H(r)$ -torus by the first stability eigenvalue, *Proc. Amer. Math. Soc.* **133** (2005), no. 3, 875 – 884.
- [2] L.J. Alías, A. Brasil Jr. and O. Perdomo, On the stability index of hypersurfaces with constant mean curvature in spheres, to appear in *Proc. Amer. Math. Soc.*
- [3] L. Ambrozio, A. Carlotto and B. Sharp, Comparing the Morse index and the first Betti number of minimal hypersurfaces, *J. Differential Geom.* **108** (2018), no. 3, 379-410. MR 3770846
- [4] J.L. Barbosa and P. Bérard, Eigenvalue and 'twisted' eigenvalue problems. Applications to CMC surfaces, *J. Math. Pures Appl.* (9) **79** (2000), 417-450.
- [5] J.L. Barbosa and M. do Carmo, Stability of hypersurfaces with constant mean curvature, *Math. Z.* **185** (1984), 339-353.
- [6] J.L. Barbosa, M. do Carmo and J. Eschenburg, Stability of hypersurfaces with constant mean curvature in Riemannian manifolds, *Math. Z.* **197** (1988), 123-138.
- [7] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet, Le Spectre d'une Variété Riemannienne, *Lectures Notes in Mathematics vol. 194* , Springer-Verlag, Berlin (197), 144.
- [8] E. Cartan, Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constante, *Annali di Mat.* **17** (1938), 177-191.
- [9] M. Cavalcante and D. Oliveira, Lower bounds for the index of compact constant mean curvature surfaces in  $\mathbb{R}^3$  and  $\mathbb{S}^3$  (2018). arXiv:1711.07233v2.
- [10] I. Chavel, Eigenvalues in Riemannian Geometry, *Academic Press Inc. Orlando, FL* (1984), 1-10.

- [11] D. Chen and Q.-M. Cheng, Estimates for the first eigenvalue of Jacobi operator on hypersurfaces (2016), [arXiv.org/pdf/1610.00374](https://arxiv.org/pdf/1610.00374).
- [12] S.S. Chern, M. do Carmo, and S. Kobayashi, Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length. 1970 *Functional Analysis and Related Fields* (Proc. Conf. for M. Stone, Univ. Chicago, Chicago, Ill., 1968) pp. 59-75 Springer, New York.
- [13] T. H. Colding e W. P. Minicozzi, A course in minimal surfaces, Graduate studies in mathematics, American Mathematical Society, 2011
- [14] A. Cunha, H. de Lima and F. dos Santos, On the first strong stability eigenvalue of closed submanifolds in the unit sphere, *J Geom Anal* (2017) 27:2557-2569.
- [15] A. El Soufi, Applications harmoniques, immersions minimales et transformations conformes de la sphère, *Compositio Math.* **85** (1993), 281-298.
- [16] A. El Soufi and S. Ilias, Second eigenvalue of Schrödinger operators and mean curvature, *Comm. Math. Phys.* **208** (2000), 761-770.
- [17] A. El Soufi and S. Ilias, Une inégalité du type "Reilly" pour les sous-variétés de l'espace hyperbolique, *Comment. Math. Helvetici* **67** (1992) 167-181.
- [18] I. Guadalupe, A. Brasil Jr., and J.A. Delgado, A characterization of the Clifford torus. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)* **48** (1999), 537-540.
- [19] J. Jost, Riemannian geometry and geometric analysis. Universitext, Springer.
- [20] H.B. Lawson Jr., Lectures on minimal submanifolds. Vol. I. Second edition. Mathematics Lecture Series, 9. Publish or Perish, Inc., Wilmington, Del., 1980.
- [21] H. Li, Willmore submanifolds in a sphere. *Math. Res. Lett.* **9**, 771-790 (2002).
- [22] P. Li and S.T. Yau, A new conformal invariant and its applications to the Willmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces, *Invent. Math.* **69** (1982), 269-291. MR **84f**:53049
- [23] B. Ma and G. Huang, Eigenvalue relationships between Laplacians of constant mean curvature hypersurfaces in  $\mathbb{S}^{n+1}$ , *Commun. Math.* **21** (2013), no. 1, 31-38. MR 3067120

- [24] A. Mendes, Characterization of hypersurfaces via the second eigenvalue of the Jacobi operator, *Proc. Amer. Math. Soc.* 147 (2019), 3515-3521.
- [25] R. Mendes and M. Radeschi, Generalized immersions and minimal hypersurfaces in compact symmetric spaces, arXiv:1708.05881 [math.DG] (2017)
- [26] O. Perdomo, Low index minimal hypersurfaces of spheres, *Asian J. Math.* 5 (2001), 741-749.
- [27] O. Perdomo, First stability eigenvalue characterization of Clifford hypersurfaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* 130 (2002), 3379-3384
- [28] O. Perdomo, On the average of the scalar curvature of minimal hypersurfaces of spheres with low stability index, *Illinois Journal of Mathematics*, Volume 48, Number 2, Summer 2004, Pages 559-565.
- [29] T. Sakai, Riemannian Geometry. Translations of Mathematical Monographs vol. 149, American Mathematical Society, Providence, RI (1996), 262-272.
- [30] A. Savo, Index bounds for minimal hypersurfaces of the sphere, *Indiana Univ. Math. J.* **59** (2010), no. 3, 823-837. MR 2779062
- [31] J. Simons, Minimal varieties in Riemannian manifolds, *Ann. of Math. (2)*, 88 (1968) 62-105.
- [32] F. Urbano, Minimal surfaces with low index in the three-dimensional sphere, *Proc. Amer. Math. Soc.* **108** (1990), 989-992.
- [33] C. Wu, New characterizations of the Clifford tori and the Veronese surface, *Arch. Math. (Basel)*, **61** (1993), 277-284.