

**Universidade Federal de Minas Gerais
Faculdade de Ciências Econômicas
Departamento de Administração
Centro de Pós-Graduação e Pesquisas em Administração**

Daniel Pereira Alves de Abreu

**A (IN)EFICIÊNCIA DE MERCADOS EMERGENTES E
DESENVOLVIDOS: UMA ANÁLISE A PARTIR DA TEORIA DE
FRACTAIS**

Belo Horizonte

2021

Daniel Pereira Alves de Abreu

**A (IN)EFICIÊNCIA DE MERCADOS EMERGENTES E
DESENVOLVIDOS: UMA ANÁLISE A PARTIR DA TEORIA DE
FRACTAIS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Centro de Pós-Graduação e Pesquisas em Administração do Departamento de Administração da Universidade Federal de Minas Gerais como critério parcial para obtenção de titulação de Mestre.

Linha de Pesquisa: Finanças

Orientador: Prof. Dr. Marcos Antônio de Camargos

Belo Horizonte

2021

Ficha catalográfica

A162i Abreu, Daniel Pereira Alves de.
2021 A (in)eficiência de mercados emergentes e desenvolvidos
[manuscrito]: uma análise a partir da teoria de fractais / Daniel
Pereira Alves de Abreu. – 2021.
110f.: il., gráfs. e tabs.

Orientador: Marcos Antônio de Camargos.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Minas
Gerais, Centro de Pós-Graduação e Pesquisas em Administração.
Inclui bibliografia (f. 80-91).

1. Mercado financeiro – Teses. 2. Finanças – Teses. 3.
Economia – Teses. I. Camargos, Marcos Antônio de. II.
Universidade Federal de Minas Gerais. Centro de Pós-Graduação
e Pesquisas em Administração. III. Título.

CDD: 332

Elaborado por Rosilene Santos CRB6/2527
Biblioteca da FACE/UFMG. – RSS 215/2021



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
FACULDADE DE CIÊNCIAS ECONÔMICAS
CENTRO DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISAS EM ADMINISTRAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO

ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO

ATA DA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE Mestrado em Administração do Senhor DANIEL PEREIRA ALVES DE ABREU, REGISTRO Nº 739/2021. No dia 13 de dezembro de 2021, às 14:30 horas, reuniu-se na Faculdade de Ciências Econômicas da Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG, a Comissão Examinadora de Dissertação, indicada pelo Colegiado do Centro de Pós-Graduação e Pesquisas em Administração do CEPEAD, em 30 de novembro de 2021, para julgar o trabalho final intitulado "A (IN)EFICIÊNCIA DE MERCADOS EMERGENTES E DESENVOLVIDOS: UMA ANÁLISE A PARTIR DA TEORIA DE FRACTAIS", requisito para a obtenção do Grau de Mestre em Administração, linha de pesquisa: Finanças. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Dr. Marcos Antônio de Camargos, após dar conhecimento aos presentes o teor das Normas Regulamentares do Trabalho Final, passou a palavra ao candidato para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa do candidato. Logo após, a Comissão se reuniu sem a presença do candidato e do público, para julgamento e expedição do seguinte resultado final:

APROVAÇÃO

REPROVAÇÃO

O resultado final foi comunicado publicamente ao candidato pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Senhor Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ATA, que será assinada por todos os membros participantes da Comissão Examinadora. Belo Horizonte, 13 de dezembro de 2021.

Prof. Dr. Marcos Antônio de Camargos
ORIENTADOR - CEPEAD/UFMG

Prof. Dr. Aureliano Angel Bressan
CEPEAD/UFMG

Prof. Dr. Robert Aldo Iquiapaza Coaguila
CEPEAD/UFMG

Prof. Dr. Leandro dos Santos Maciel
FEA/USP

Documento assinado eletronicamente por **Marcos Antonio de Camargos, Professor do Magistério**

14/12/2021 13:33

SEIUFMG - 1133662 - Ata



Superior, em 13/12/2021, às 17:48, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Leandro dos Santos Maciel, Usuário Externo**, em 13/12/2021, às 19:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Robert Aldo Iquiapaza Coaguila, Professor do Magistério Superior**, em 13/12/2021, às 20:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Aureliano Angel Bressan, Professor do Magistério Superior**, em 14/12/2021, às 10:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1133662** e o código CRC **C0BE3734**.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer a todos os professores do CEPEAD pela oportunidade de participar o curso nestes dois últimos anos e pela disponibilidade e comprometimento com o ensino, sobretudo considerando o advento da pandemia da COVID-19 e com o Ensino Remoto Emergencial, o que potencializou os desafios do mestrado.

Deixo também um agradecimento especial para meu orientador, Marcos Antônio de Camargos, por ter me aconselhado mesmo durante períodos em que as aulas foram suspensas e por sempre estar a disposição para me ajudar com o projeto. Agradeço minha família e minha namorada, Fabíola, por estarem ao meu lado me prestando suporte e me apoiando sempre.

Por fim, deixo um agradecimento especial a três grandes amigos, Dumith, Gustavo e Lucas, por terem me ajudado a manter minha saúde mental durante este período de pandemia.

RESUMO

Embora um dos pilares da moderna teoria de finanças seja a Hipótese de Eficiência de Mercado, diversos estudos recentes têm identificado anomalias nos mercados que não poderiam ocorrer caso estes fossem eficientes, o que abriu espaço para que novas teorias surgissem e passassem a analisar o mercado sob uma perspectiva que desconsidera sua plena eficiência. O presente trabalho teve como objetivo principal estudar o comportamento do mercado acionário dos países emergentes, utilizando para isso os mercados dos países integrantes dos BRICS, e de países desenvolvidos, representados por EUA, Inglaterra, Alemanha e Japão, com o enfoque em identificar a evolução do grau de eficiência destes mercados ao longo do tempo, a partir da Hipótese de Mercado Fractal. Para isso, foram utilizadas métricas da econofísica para identificação de memória de longo prazo, memória de curto prazo e complexidade das séries temporais, através do expoente de Hurst, dimensão fractal e aproximação de entropia, para em seguida construir um índice que reflete a distância dos mercados analisados com o esperado de um mercado eficiente. Entre os principais resultados, foi identificada a inconstância dos índices de eficiência ao longo do tempo, o que condiz com estudos anteriores dentro do campo da econofísica. Além disso, foi constatado que a maior parte da ineficiência se deve à presença de elementos determinísticos nas variações dos preços dos ativos, o que indica oportunidades para arbitragens. Por fim, foi possível identificar uma potencial ligação entre os resultados empíricos e as teorias comportamentais, tais como existência de assimetria de informação, racionalidade limitada, *frame dependence* e heurísticas comportamentais. Desse modo, destaca-se que é possível realizar um paralelo entre as duas correntes, sendo que a econofísica poderia ser utilizada para a modelagem dos dados, enquanto as finanças comportamentais forneceriam o arcabouço teórico para explicar os resultados.

Palavras-chave: Econofísica; Hipótese de Mercados Fractais; Eficiência de Mercado; Mercados Emergentes e Desenvolvidos.

ABSTRACT

Although one of the pillars of modern finance theory is the Market Efficiency Hypothesis, several recent studies have identified anomalies in markets that could not occur if they were efficient, which opened space for new theories to emerge and begin to analyze the market from a perspective that disregards its full efficiency. The main objective of this study was to study the behavior of the stock market in emerging countries, using the markets of the BRICS countries and developed countries, represented by the US, UK, Germany and Japan, focusing on identifying the evolution of the degree of efficiency of these markets over time, based on the Fractal Market Hypothesis. To this end, Econophysics metrics were used to identify long term memory, short term memory and time series complexity, through Hurst exponent, fractal dimension and entropy approximation, to then build an index that reflects the distance of the analyzed markets with what is expected from an efficient market. Among the main results, the inconstancy of the efficiency indexes over time was identified, which matches both previous studies within the field of econophysics. Furthermore, it was found that most of the inefficiency is due to the presence of deterministic elements in the variations of asset prices, which indicates opportunities for arbitrage. Finally, it was possible to identify a potential link between the empirical results and behavioral theories, such as the existence of information asymmetry, bounded rationality, frame dependence, and behavioral heuristics. Thus, it is possible to draw a parallel between the two currents, and econophysics could be used for modeling the data, while behavioral finance would provide the theoretical framework to explain the results.

Keywords: *Econophysics; Fractal Markets Hypothesis; Market Efficiency; Emerging and Developed Markets.*

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Mapa da Dissertação	18
Figura 2 - Triângulo de Sierpinsky	32
Figura 3 - Eficiência de Mercado Segundo as Correntes teóricas Financeiras.....	37
Figura 4 - Movimento Cíclico Descrito por Elliott.....	38
Figura 5 - Simulação de Efeitos Fractais no Mercado Acionário.....	39
Figura 6 - Efeitos da Memória de Longo Prazo em Séries Temporal	45
Figura 7- Efeitos da Memória de Curto Prazo em Séries Temporal.....	47
Figura 8- Efeitos da Entropia em Séries Temporal.....	49
Figura 9 - Percurso Metodológico da Pesquisa Empírica	50
Figura 10 – Evolução dos Pontos dos Índices de Mercado	52
Figura 11 - Desvio Padrão dos Pontos dos Índices de Mercado	54
Figura 12 - Coeficiente de Variação dos Pontos dos Índices de Mercado	54
Figura 13 - Retorno dos Pontos dos Índices de Mercado	55
Figura 14 – Média dos Expoentes de Hurst dos Índices de Mercado	58
Figura 15 - Histograma dos Expoentes de Hurst.....	59
Figura 16 – Média das Dimensões Fractais dos Índices de Mercado	62
Figura 17 - Histograma das Dimensões Fractais.....	64
Figura 18 - Aproximações de Entropia dos Índices de Mercado	66
Figura 19 - Histograma das Aproximações de Entropia	67
Figura 20 - Índices de Eficiência dos Índices de Mercado	69
Figura 21 - Distribuição dos Índices de Eficiência	71
Figura 22 - Composição dos Índices de Eficiência com Base na Mediana	73
Figura 23 - Análise de Cluster dos Índices de Eficiência	74
Figura 24 - Síntese das Principais Conclusões do Estudo	76

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Exemplos de Anomalias de Mercado Estudadas pelas Finanças Comportamentais	25
Quadro 2 - Principais Heurísticas Comportamentais.....	27
Quadro 3 - Fatores Analisados Sobre a Eficiência de Mercado	50
Quadro 4 – Potenciais Relações entre Finanças Comportamentais e Análises Fractais Realizadas	78

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Estatísticas Descritivas dos Retornos dos Índices de Mercado	56
Tabela 2 - Matriz de Correlações dos Componentes do IE.....	70

LISTA DE APÊNDICES

Apêndice 1 - Estatísticas Descritivas dos Expoentes de Hurst.....	93
Apêndice 2 - Mapa da Distribuição dos Expoentes de Hurst.....	96
Apêndice 3 - Estatísticas Descritivas das Dimensões Fractais.....	97
Apêndice 4 - Mapa da Distribuição das Dimensões Fractais.....	100
Apêndice 5 - Estatísticas Descritivas das Aproximações de Entropia	101
Apêndice 6 - Mapa da Distribuição das Aproximações de Entropia	104
Apêndice 7 - Estatísticas Descritivas dos Índices de Eficiência	105
Apêndice 8 - Mapa da Distribuição dos Índices de Eficiência	108
Apêndice 9 - Teste de Diferença de Variância e Média dos Índices de Eficiência.....	109

Lista de Abreviações

AE - Aproximação de Entropia de Pincus (1991),
D - Dimensão fractal
DAX - Deutsche Börse
DFA - Detrended Fluctuation Analysis
DJI - Down Jones Index
DMA - Detrended Moving Average
EI - Efficiency Index
FTSE - The Financial Times e do London Stock Exchange
G - Genton
GPH - Geweke E Porter-Hudak
H - Expoente de Hurst
HEM - Hipótese de Eficiência de Mercado
HHCA - Height-Height Correlation Analysis
HMF - Hipótese de Mercados Fractais
HW - Hall-Wood
IBRX- Índice Brasil 100
JTOPI - South Africa 40
LW - Local Whittle Estimator
MICEX - Moscow Interbank Currency Exchange
N225 - Nikkei Stock Average
NSE - National Stock Exchange of India
P - Periodograma
R/S - Range/Standard Deviation
SSEC - Shanghai Composite Index
W - Wavelet

Sumário

1 INTRODUÇÃO	15
1.1 Objetivos	19
1.1.1 Objetivo Geral	19
1.1.2 Objetivos Específicos	19
1.2 Justificativa	19
1.3 Estrutura do trabalho	21
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	21
2.1 Moderna Teoria de Finanças	21
2.1.1 Hipótese de Eficiência de Mercado	22
2.2 Teoria das Finanças Comportamentais	24
2.2.1 Heurísticas e Vieses Comportamentais.....	26
2.3 Econofísica	28
2.3.1 Teoria Fractal	31
2.3.2 Hipótese de Mercado Fractal	36
2.3.3 Revisão da Literatura Empírica.....	40
3 METODOLOGIA	43
3.1 Tipologia da Pesquisa	43
3.2 Amostra	43
3.3 Índice de Eficiência Proposto	43
3.4.1 Expoente de Hurst.....	45
3.4.2 Dimensão Fractal.....	47
3.4.3 Aproximação de Entropia	48
3.4.4 Indicador Final.....	49
4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	51
4.1 Análises das Estatísticas Descritivas	52
4.2 Análises dos Expoentes de Hurst.....	57
4.3 Análises das Dimensões Fractais.....	61
4.4 Análises da Aproximação de Entropia	65
4.5 Análises dos Índices de Eficiência (EI)	68
5 CONCLUSÃO	79
REFERÊNCIAS	81
APÊNDICES	93

1 INTRODUÇÃO

Desde a década de 60, um tema que vem sendo bastante discutido em finanças é o comportamento do mercado e de seus agentes (MCGOUN, 1992). Nesse aspecto, a teoria moderna de finanças traz a premissa de racionalidade dos agentes, a qual se fundamenta em paradigmas da economia neoclássica. Uma evolução dessa premissa foi o desenvolvimento da ideia de mercado eficiente, que deu origem à Hipótese de Eficiência de Mercado (HEM), segundo a qual o comportamento dos preços dos ativos é aleatório, impedindo implantação de estratégias de arbitragem de forma sistêmica (FAMA, 1970).

Sob tal hipótese, os investidores teriam acesso às informações dos ativos, de forma que suas expectativas para seus preços futuros seriam homogêneas. Desse modo, a arbitragem e o conseqüente ganho acima da média do mercado não seriam possíveis (FAMA, 1970). Tais premissas são a base para elaboração dos primeiros modelos de precificação em finanças. Entretanto, os dados empíricos do mercado têm mostrado que os preços dos ativos não se comportam de forma puramente aleatória, além de que existem assimetria informacional e divergência de expectativas dos investidores (SHILLER, 2003; TVERSKY; KAHNEMAN, 1979). Nesse contexto, novas correntes teóricas foram sendo desenvolvidas para explicar o comportamento do mercado, fazendo um contraponto às premissas defendidas pela moderna teoria de finanças.

Partindo de um ponto de vista mais empírico e funcionalista, a econofísica surge como uma vertente de análise baseada em características fractais do mercado e da teoria do caos (PETERS, 1994). Com base na Hipótese de Mercado Fractal (HMF), o mercado possui movimentos aleatórios no curto prazo, devido às novas informações, porém, padrões de comportamento poderiam ser identificados nos mesmos (KARP; VAN VUUREN, 2019). Dessa forma, pode-se verificar que movimentos dos preços dos ativos basear-se-iam em momentos de manutenção ou de reversão de média local.

Os modelos que se baseiam nessa hipótese possuem um caráter mais flexível em comparação com os que se baseiam na HEM de Fama (1970), visto que não possuem como pressuposto nenhuma teoria econômica *a priori* para a elaboração de suas análises. Dessa forma, as teorias são elaboradas *a posteriori*, tendo sempre como base os dados reais analisados, o que faz com que tal paradigma tenha um

potencial de complementar a literatura econômica em aspectos que ainda não foram investigados (JOVANOVIC; SCHINCKUS, 2013).

A discussão sobre a eficiência ou não do mercado ainda não se esgotou na literatura. Trabalhos como o de Miloš *et al.* (2018), Karp e Van Vuuren (2019), Delgado-Bonal (2019) e Lahmiri e Bekiros (2020) são exemplos de estudos recentes sobre a temática cujo enfoque foi analisar o pressuposto de eficiência de mercado em países desenvolvidos e emergentes e discorrer sobre as consequências desse pressuposto, isto é, a possibilidade de arbitragem nos mercados de capitais nos dois grupos analisados, verificando se o fato de o país ser desenvolvido ou não impactaria no seu grau de eficiência.

Assim, percebe-se que identificar o comportamento dos mercados acionários é relevante, tanto do ponto de vista prático, para elaboração de estratégias de investimento, quanto do ponto de vista teórico, no sentido de ampliar o entendimento dos movimentos dos mercados e avançar no desenvolvimento de novas teorias, além de contribuir para o aumento de um corpo empírico de evidências sobre o tema. Desse modo, caso seja identificada a existência de padrões nas flutuações de preços de ativos, seria possível traçar estratégias para aproveitar tais tendências, assim como ocorre na análise técnica.

Neste trabalho, optou-se pela utilização de métricas da econofísica para analisar o comportamento dos mercados acionários de países emergentes e compará-los com o comportamento dos mercados de países desenvolvidos. A opção pelo uso dessas métricas se fundamenta em duas razões. Primeiramente, cita-se o consenso das características fractais dos mercados (ver, por exemplo, NEKRASOVA; KARNAUKHOVA; CHRISTIANSE, 2018; CAPORALE *et al.*, 2016), o que torna coerente a utilização da HMF. Já a segunda razão diz respeito ao fato de que tais métricas permitem verificar a variabilidade do grau de eficiência de mercados de forma comparativa ao longo do tempo.

Com base em métricas fractais para identificar tendências de curto e de longo prazo, seguindo a metodologia proposta por Kristoufek e Vovsdra (2014), foi construído um índice de eficiência com base em janelas móveis, de forma que não apenas fosse possível verificar o grau de eficiência de mercados, mas também verificar a evolução dessa eficiência.

Para o estudo, foram considerados os países desenvolvidos e aqueles pertencentes ao grupo denominado BRICS, acrônimo para se referir ao conjunto de

cinco países, sendo eles Brasil, Rússia, Índia, China e África do Sul, que se destacam dentre os demais países emergentes devido à sua demografia e perspectiva econômica (O'NEILL, 2001). Conforme Mensi, Hammoudeh, Nguyen e Kang (2016), tanto em termos de mercado como em termos econômicos, os BRICS necessitam de estudos específicos, considerando o seu papel na economia mundial e suas peculiaridades.

De acordo com Cheng *et al.* (2007), os países integrantes do grupo não são homogêneos do ponto de vista econômico. A China e a Índia apresentam uma economia relativamente fechada com presença de controle estatal. O Brasil e a Rússia apresentam economias baseadas em exportações de recursos naturais e com presença do estado diluída. Por fim, a África do Sul é o país que menos se desenvolveu dentro do grupo, embora seu potencial seja reconhecido.

Estudos como os de Mensi *et al.* (2016), Syriopoulos, Makran e Boubaker (2015), Bhuyan, Robbani e Talukdar (2016), McIver e Kang (2020) e Lubys e Panda (2021) são exemplos de trabalhos em finanças que focaram suas análises nestes países, devido tanto ao potencial de crescimento quanto o interesse crescente de investidores e a falta de estudos empíricos sobre esse grupo. Para o presente estudo, foram analisados os principais índices das bolsas desses países: IBRX (Brasil), MICEX (Rússia), NSEI (China), SSEC (Índia) e JTOPI (África do Sul).

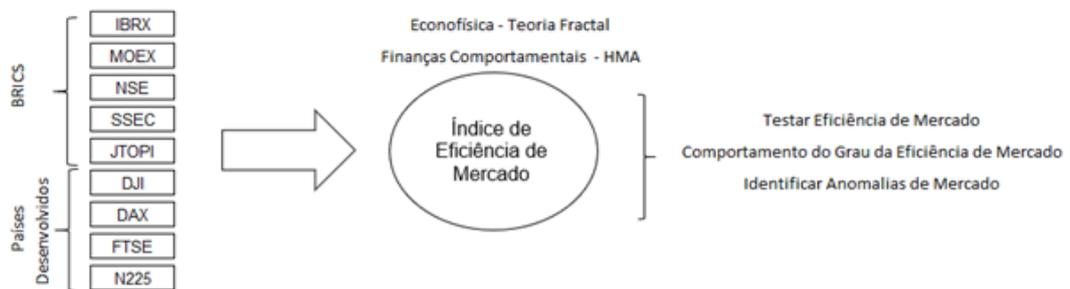
Adicionalmente, para verificar se existem diferenças no comportamento do grau de eficiência entre os mercados emergentes, representados pelos países dos BRICS, e os países desenvolvidos, foram analisados os mercados dos Estados Unidos da América (EUA), da Alemanha, Inglaterra e do Japão. Dessa forma, foram selecionados os índices Dow Jones (DJI), DAX, Reino Unido 100 (FTSE) e Nikkei 225 (N225), respectivamente para os países citados anteriormente. A escolha destes países para as análises se deve ao fato de que, segundo o *The Global Wealth Report* de 2021, as riquezas destes países possuem uma representatividade superior a 3,5% da riqueza mundial (29,93% no caso dos EUA, 6,96% no caso do Japão, 4,07% no caso da Alemanha e 3,98% no caso da Inglaterra) , além dos seus mercados de capitais terem as 10 maiores capitalizações de acordo com *The World Data Bank*.

Esse conjunto de países também já foi analisado anteriormente em estudos como os de Al Nasser e Hajlee (2016) e Mitra (2004), que consideraram tais índices de mercado como relevantes e representativos entre os países desenvolvidos. Assim sendo, o escopo deste trabalho não se restringe a apenas analisar países

emergentes; ao contrário, propõe-se a verificar se as propriedades acerca da eficiência de mercados constatados neste grupo vão ao encontro ou não com as propriedades de países desenvolvidos, sendo este também um diferencial deste estudo.

A Figura 1 traz uma ilustração da investigação empírica que foi feita neste trabalho. Dentre os diferenciais deste trabalho, pode-se destacar a realização de uma análise comparativa do comportamento de um grupo de países emergentes e países desenvolvidos. Além disso, foi realizada uma análise longitudinal em uma amostra de dados superior a 10 anos, tanto para o índice de eficiência gerado quanto para os elementos que o compõem, o que permitiu compreender melhor como o grau de eficiência se comportou ao longo dos anos e identificar o comportamento e as relações das métricas que o compõem durante o período analisado. Por fim, foi realizada uma tentativa identificar potenciais causas para os padrões detectados nas análises feitas a partir das métricas fractais com base em estudos comportamentais.

Figura 1 - Mapa da Dissertação



Fonte: Elaboração própria.

Assim, através de estudos que se baseiam na HMF, busca-se analisar os movimentos dos mercados emergentes de junho de 2007 a julho de 2021, visando, assim, verificar como a eficiência de mercado de tais países se comportou e comparar os resultados com os de mercados desenvolvidos. A escolha desse período se deu por ele contemplar três momentos de estresse para o mercado: o da crise do *subprime* em 2008, a queda dos preços das *commodities* entre 2013 e 2016, e a pandemia da COVID-19 entre 2019 e 2021. Desse modo, foi proposto verificar o comportamento dos índices em momentos de estresse, a fim de verificar a possibilidade de aumento

nas oportunidades de arbitragem nesses períodos, o que é esperado tanto segundo a HEM quanto pela HMF.

Nesse contexto, o presente trabalho é norteado pela seguinte pergunta: *como se deu a evolução do grau de eficiência de mercado, segundo a vertente de análise fractal, dos países emergentes e desenvolvidos no período analisado?* Dessa forma, o escopo do estudo é entender como o mercado financeiro de países emergentes se comportou de um ponto de vista empírico, tendo como enfoque a análise das propriedades fractais presentes nas séries históricas dos índices de mercado selecionados e comparar tal comportamento com o dos mercados desenvolvidos. Portanto, o estudo tem suas análises em torno de testar a HEM em sua forma fraca (passeio aleatório) em concomitância com análises de propriedades fractais propostas pela HMF.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Estudar o comportamento do mercado acionário dos países integrantes dos BRICS e de países desenvolvidos visando identificar a evolução do grau de sua eficiência de mercado e convergências ou divergências de seus padrões ao longo do tempo, tendo como base a HMF.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Testar a aleatoriedade dos retornos dos índices de eficiência dos países emergentes e desenvolvidos;
- Analisar as propriedades fractais dos índices de mercado, tais como memória de curto prazo, memória de longo prazo e entropia;
- Identificar padrões de comportamento da eficiência do ponto de vista fractal nos países analisados.

1.2 Justificativa

Tendo em vista as vultosas somas de recursos transacionadas diariamente no mercado acionário, a realização do presente trabalho se justifica pela necessidade de se compreender de forma mais aprofundada o comportamento do mercado acionário. A identificação do comportamento do mercado é importante na medida em que a implicação de eficiência ou não dos mercados impacta as possíveis estratégias de investimento e na seleção de teorias para compreender tais movimentações (KARP; VAN VUUREN, 2019).

Segundo Bernstein (1997), a capacidade de prever possíveis movimentações futuras e optar pelas alternativas mais viáveis constituem temáticas centrais de interesses dos estudos contemporâneos e para a sociedade moderna. Além disso, por embasar as análises em dados empíricos, o presente estudo não se limita a teorias e pressupostos econômicos para suas conclusões. Assim, do ponto de vista teórico, o presente trabalho contribui para a identificação de propriedades fractais para estudos do mercado, bem como complementa o corpo de evidências empíricas dos estudos anteriores acerca da eficiência do mercado nos mercados analisados.

Além disso, no presente trabalho, foram analisados os mercados de países emergentes pertencentes ao grupo dos BRICS. A escolha dos mercados emergentes selecionados se deu em função do potencial que estes possuem para se tornarem potências globais nos próximos 50 anos, mas que atualmente ainda são fortemente impactados pelo cenário internacional. Já a inclusão de EUA, Alemanha, Inglaterra e Japão na amostra permite comparar os resultados de mercados emergentes com os de grandes potências mundiais.

Destacam-se também outros dois diferenciais do trabalho proposto, em relação aos demais estudos. Em primeiro lugar, este estudo visa realizar uma análise longitudinal da eficiência de mercado, o que permite verificar a evolução dos resultados identificados ao longo do tempo. Outrossim, enquanto demais estudos que utilizaram métricas semelhantes para o cálculo do índice de eficiência tiveram o enfoque apenas nestes, o presente trabalho analisa as métricas que compõem o índice para ter uma visão mais clara do que ocasionou variações no grau de eficiência, destacando possíveis causas para os efeitos observados. Assim, é proposta uma discussão mais aprofundada sobre diferentes efeitos fractais nos mercados analisados e como estes impactam o nível de eficiência no curto e no longo prazo.

Do ponto de vista prático, este presente estudo possibilita a identificação de mercados menos eficientes na perspectiva da teoria de Fama (1970). Nesse contexto,

ele auxiliaria tanto na seleção do mercado a se investir dada a maior chance de arbitragem. Já de um ponto de vista teórico, o estudo visa validar as análises de estudos anteriores bem com aprofundar suas discussões acerca do comportamento de mercados emergentes e desenvolvidos. Além disso, o estudo visa também contribuir para a literatura metodologicamente ao explorar a vertente fractal de análise de séries temporais.

1.3 Estrutura do trabalho

O presente trabalho é dividido em cinco partes. A primeira delas é a Introdução, que apresenta o estudo, sua problemática, objetivos e justificativas. A segunda parte é a Fundamentação Teórica, que discorre sobre os estudos teóricos sobre finanças modernas e comportamentais, com ênfase nas ideias de eficiência de mercado de cada corrente. Além disso, apresenta o campo da econofísica e como esta pode ser utilizada para complementar análises no campo de finanças. A terceira parte trata da Metodologia, na qual é exposto o modelo estatístico e é apresentada sucintamente a base de dados. A quarta parte diz respeito à Análise e Discussão dos Resultados, seção na qual consta o relatório final do estudo. Por fim, a última parte apresenta a conclusão do estudo e faz as considerações finais, sintetizando os principais pontos discutidos no trabalho, além de apresentar suas limitações e sugestões para trabalhos posteriores.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A seguir é apresentada a revisão da literatura, englobando as três principais correntes de estudo de finanças: a moderna teoria de finanças; finanças comportamentais e econofísica. São abordados tópicos das principais teorias financeiras nas primeiras subseções, com ênfase nas teorias sobre mercados eficientes, e, por fim, faz-se uma revisão bibliográfica de estudos com base na última corrente teórica, que, por sua vez, é o foco metodológico do estudo.

2.1 Moderna Teoria de Finanças

As finanças modernas tiveram origem entre 1950 e 1960 e mudaram a perspectiva de avaliação, tanto dos investimentos quanto dos financiamentos das empresas. Até então, na perspectiva das teorias de finanças tradicionais, a avaliação financeira era realizada com base na análise de demonstrativos contábeis. Com o advento das finanças modernas, a análise passou a focar no comportamento do investidor, tido como racional e econômico (HAUGEN, 2004).

A partir dos trabalhos de Von Neumann e Morgenstern (1953) e Bernoulli (1954) sobre o conceito de Utilidade, as teorias financeiras passaram a incorporar elementos da teoria econômica neoclássica. Desse modo, uma vez que os agentes tomam ações racionais, as informações seriam processadas de forma objetiva com base no paradigma da relação risco/retorno (BERNSTEIN, 1997; MULLAINATHAN; THALER, 2000). Assim, passou a ser possível não só compreender o processo de tomada de decisão como também identificar quais seriam as opções mais viáveis em cada caso dadas as preferências e restrições individuais.

A partir dessas ideias, teorias e modelos foram desenvolvidos tendo como fundamentação o paradigma da racionalidade dos agentes financeiros. Entre os principais trabalhos desse ramo de finanças quatro foram seminais para o avanço da área: a Teoria do Portfólio desenvolvida por Markowitz (1952), na qual o autor demonstrou como realizar combinações de ações para a formação de carteiras eficientes considerando a relação entre risco e retorno de seus componentes; o estudo de Modigliani e Miller (1958), analisando os efeitos da alavancagem no custo de capital das empresas; *Capital Asset Pricing Model (CAPM)*, desenvolvido a partir de estudos de Treynor (1961), Sharpe (1964), Lintner (1965) e Mossin (1966), o qual considerou uma relação linear entre o retorno esperado de um ativo e o prêmio de risco do mercado; e, por fim, o trabalho de Fama (1970), que, por sua vez, formalizou a concepção de um mercado eficiente. Entre tais trabalhos, o último é o que possui maior relevância para o presente estudo, sendo abordado de forma mais detalhada a seguir.

2.1.1 Hipótese de Eficiência de Mercado

A teoria da HEM é derivada da Teoria da Especulação de Bachelier (1900), a qual utiliza um modelo de passeio aleatório para a precificação de ativos. Assim, os preços seriam calculados de forma a refletir todas as informações disponíveis somados a um efeito aleatório de diversos fatores externos. Além disso, tal hipótese

defende que as expectativas acerca do valor econômico e geração de fluxo de caixa das empresas são refletidas em seus preços no mercado. De forma geral, a HEM pode ser definida como a coerência entre preço de ativos e informações obtidas acerca do mercado, sendo, assim, impossível a obtenção de lucros anormais de forma consistente (JENSEN, 1978).

Podem-se definir três condições principais para a existência de um mercado eficiente, sendo elas: a inexistência de custos de transação; disponibilidade, de forma igualitária, de todas as informações para os agentes; e consenso sobre os efeitos dessas informações na precificação de ativos. Nesse sentido, o valor dos ativos refletiria todas as informações passadas e as expectativas futuras, que seriam homogêneas, de forma que as estimativas refletiriam a melhor aproximação do real valor das ações no mercado (FAMA, 1970).

Assim, os preços dos ativos do mercado assumiriam um modelo de passeio aleatório, de forma que a função de frequência do retorno de um ativo j no momento $t+1$ independeria da informação Φ_t , tal como se percebe na expectativa de retornos em $t+1$, visto que, em t , todas as informações já foram absorvidas pelo preço. Em outras palavras, tanto a distribuição de probabilidade dos retornos como suas médias futuras não são afetadas por informações defasadas (FAMA, 1970). As Equações 1 e 2 ilustram, respectivamente, a função probabilística condicional do retorno e a esperança do retorno em passeio aleatório. Nelas, f e E indicam respectivamente a função de probabilidade e o aplicador de esperança matemática, ao passo que Φ_t indica uma nova informação no período t e $R_{j,t}$ indica o retorno do j -ésimo ativo em t .

$$f(R_{j,t+1}|\Phi_t) = f(R_{j,t+1}) \quad (1)$$

$$E(R_{j,t+1}|\Phi_t) = E(R_{j,t+1}) \quad (2)$$

Em seu trabalho, Fama (1970) apresentou três formas de eficiência de mercado. A HEM na forma fraca ocorre quando as informações passadas dos preços de um ativo são incorporadas aos preços do mercado, não existindo margens para previsões de preços futuros, pois o preço de ativos se baseia em um modelo de passeio aleatório. Assim, em um mercado sob HEM fraca, análises técnicas não seriam relevantes para traçar estratégias de arbitragem.

Sua forma semiforte pressupõe a incorporação de informações públicas nos preços dos ativos. Dessa forma, os estudos realizados via análise fundamentalista tornar-se-iam irrelevantes, pois todos os impactos contábeis, bem como a divulgação de fatos relevantes, já estariam absorvidos no preço do ativo. Por fim, a HEM em forma forte pressupõe a inclusão de informações privadas e sigilosas nos preços dos ativos, sendo que nem mesmo os *insiders traders* poderiam obter retornos anormais, impossibilitando, assim, a arbitragem no mercado.

Posteriormente, Fama (1991) revisou estudos que foram feitos para analisar a HEM e que conduziram críticas à sua teoria. Dessa forma, o autor afirmou que, dada a realidade do mercado, existem, de fato, algumas imperfeições nele, porém, a HEM pode considerar a assimetria de informação e os custos de transação em níveis razoáveis para calibrar seus modelos e análises, tornando, assim, seus pressupostos válidos, pelo menos para a versão fraca de eficiência.

2.2 Teoria das Finanças Comportamentais

Alguns eventos históricos como a Tulipamania da Holanda do século XVII e a crise de 1929 são exemplos de situações as quais modelos de finanças modernas não conseguiram explicar. Dessa forma, as especulações ocorridas nesses casos só poderiam ser explicadas considerando que ações irracionais estavam sendo tomadas pelos agentes. Shiller (2003) defendeu que estes comportamentos especulativos são inerentes aos momentos de mudanças drásticas da realidade.

Em seu trabalho, Tversky e Kahneman (1979) investigaram o processo de tomada de decisões dos investidores. Ao final de suas análises, os autores criaram a Teoria do Prospecto, na qual foram incorporados efeitos heurísticos à tomada de decisão.

Segundo esta teoria, existe uma assimetria entre a percepção de resultados. Nesse sentido, atribuindo pesos de decisões aos ganhos e perdas, chega-se a uma função de valor côncava para resultados negativos e convexas para os positivos. Além disso, a inclinação para o primeiro caso tende a ser superior à do segundo (TVERSKY; KAHNEMAN, 1979). Nesse sentido, os autores refutam as ideias de Von Neumann e Morgenstern (1944) de que as preferências individuais atenderiam aos critérios de completude, transitividade, continuidade e independência, podendo ser expressas por uma função de utilidade esperada.

Em uma perspectiva empírica, os autores propõem um modelo de utilidade esperada para tomada de decisão levando em consideração o risco. Agregando a teoria clássica de função utilidade, os autores incorporam três elementos. O primeiro deles é o Efeito Certeza, que expressa a tendência de os investidores darem maiores pesos às possibilidades com alta probabilidade de acontecer. O segundo seria o Efeito Reflexão, segundo o qual agentes expostos a riscos tendem a serem avessos ao risco em situações de ganho e propensos ao risco em situações de perda. Por fim, o Efeito Isolamento ocorre quando agentes simplificam as informações das opções de investimento e centralizam suas análises em componentes que as diferenciam.

As finanças comportamentais permitiram aperfeiçoar o modelo de finanças modernas, ao incorporar situações nas quais os agentes do mercado não agem segundo uma racionalidade (HALFELD; TORRES, 2001). Assim, essa nova perspectiva visa explicar os padrões de raciocínio dos investidores, considerando processos emocionais e fatores sociais e psicológicos, que interferem nas tomadas de decisões do indivíduo, de um grupo ou mesmo de uma entidade (RICCIARDI; SIMON, 2000). O Quadro 1 traz as principais anomalias de mercado captadas e estudadas pelo ramo comportamental de finanças.

No início, pesquisadores das teorias de finanças modernas não aprovavam as ideias dos trabalhos voltados para finanças comportamentais. Isso se devia ao fato, sobretudo, de que estas consideravam que as decisões dos agentes eram guiadas por fatores irracionais, o que ia de encontro direto com um dos principais pilares da HEM. Entretanto, vários estudos na área apontavam veracidade nas teorias comportamentais emergentes, de forma que a mesma não só passou a ser amadurecida, como também foi conciliada em alguns estudos com a teoria moderna (IQUIPAZA; AMARAL; BRESSAN, 2013).

Ressalta-se ainda que, enquanto existe uma teoria bem definida de mercados eficientes, não existe equivalente para teorias das finanças comportamentais. Nesse campo, o que existe são inúmeras ideias acerca do comportamento humano influenciado por fatores irracionais e seus impactos no mercado financeiro.

Quadro 1 – Exemplos de Anomalias de Mercado Estudadas pelas Finanças Comportamentais

Efeitos Observados	Principais Trabalhos	Principais Pontos
Heurísticas Comportamentais	Tversky e Kahneman, 1976 Tversky e Kahneman, 1979	Questiona a racionalidade dos agentes e defende a existência de viés nas tomadas de decisões, como o de

		disponibilidade de informação, ancoragem, excesso de confiança, entre outros.
Efeito Manada	Banerjee, 1992 Bikhchandani, Hirshleifer e Welch, 1992 Welch, 1992	Trata do efeito comportamental em que o indivíduo renuncia às suas análises particulares e segue as tendências do mercado, mesmo que tenha evidências que vão contra essas movimentações.
<i>Frame Dependence</i>	Tversky e Kahneman, 1981 Thaler, 1985	Defende que a forma como os problemas e as informações são apresentadas para os agentes interfere em sua interpretação e, por consequência, em sua tomada de decisão.

Fonte: Elaboração própria.

Assim, se por um lado existe uma dificuldade ainda presente para entender o comportamento de um mercado irracional, por outro existe um leque de possibilidades para ser explorado (BIRD; DU; WILLETT, 2017). Segundo os mesmos autores, cada mercado não necessariamente comportar-se-ia de forma semelhante, sendo necessário investigar os gatilhos que poderiam influenciar a tomada de decisão uniforme.

2.2.1 Heurísticas e Vieses Comportamentais

Um ponto desta corrente diz respeito ao processo de tomada de decisão de investimento. Enquanto o modelo de finanças modernas segue o processo da economia neoclássica, do qual deriva uma tomada de decisão racional, os autores de finanças comportamentais mostraram que as falhas de raciocínio nas tomadas de decisões ocorrem de forma sistemática e têm bases heurísticas para processar dados e identificar decisões satisfatórias (SHEFRIN; STATMAN, 2000). Essas heurísticas não só podem levar os agentes a tomar pressupostos incorretos como certos, como também acarretam vícios no processo e tomada de decisão (BARBERIS; THALER, 2003; BAZERMAN; MOORE, 1994). O Quadro 2 ilustra as definições das principais heurísticas defendidas pela corrente comportamental.

Outra questão que se destaca é o chamado efeito manada que se refere ao comportamento assumido por alguns investidores no sentido de ignorar informações pessoais para seguir padrões dos demais investidores. Desse modo, o comportamento de um grupo tende a ser homogêneo, mesmo quando informações

individuais indicariam decisões divergentes, sendo esta conduta impulsionada por emoções e por uma pressão social de conformidade, bem como pela crença de ser improvável que um volume grande de pessoas esteja errado (SCHARSTEIN; STEIN, 1990).

Os primeiros trabalhos na área financeira que utilizaram este princípio foram os de Banerjee (1992), Bikhchandani, Hirshleifer e Welch (1992) e Welch (1992). Esses autores recolheram informações sobre o comportamento dos agentes financeiros e destacaram que, após um número relevante de investidores tomarem uma decisão, vários outros optavam por seguir essa tendência, mesmo que isso significasse ignorar suas crenças pessoais. Dessa forma, os movimentos dos preços dos ativos assumem formas irracionais e não podem ser justificados por fatores fundamentais (BABALOS; BALCILAR; GUPTA, 2015).

Quadro 2 - Principais Heurísticas Comportamentais

Heurística	Descrição
Excesso de Confiança	Crença de que suas habilidades e estimativas são superiores às dos demais, bem como a crença de que eventos passados irão se repetir no futuro.
Ancoragem	Os agentes têm suas estimativas originais como âncoras, as quais realizam pequenos e insuficientes ajustes ao longo dos períodos, acreditando que tais expectativas iniciais sejam suficientemente exatas.
Otimismo	Investidores tendem a idealizar cenários que beneficiem seus modelos e suas estimativas, mesmo que as probabilidades de tais cenários ocorrerem não sejam estatisticamente mais prováveis.
Representatividade	Indivíduos tomam decisões com base em estereótipos acerca dos eventos atuais previamente formados, descartam informações específicas de um evento por este ser semelhante a um evento ocorrido no passado.
Perseverança	Os agentes do mercado buscam informações confirmatórias a um determinado evento. Dessa forma, a análise não se torna imparcial, uma vez que informações sobre a não confirmação de eventos não são consideradas.

Disponibilidade	Investidores projetam os lucros e prejuízos de ativos com base na expectativa de que os resultados futuros repetirão a tendência dos últimos resultados passados, visto que eventos recentes possuem maior impacto no presente e são mais fáceis de serem lembrados.
-----------------	--

Fonte: Elaboração própria com base nos trabalhos de Shleifer (2000), Bazerman e Moore (1994), Tversky e Kahneman (1979), Tversky e Kahneman (1976) e Slovic e Lichtenstein (1971).

A tomada de decisão via efeito manada ocorre, em resumo, quando as informações disponíveis e mesmo privadas são ignoradas, sendo, portanto, baseada em decisões tomadas por demais agentes do mercado. Dessa forma, pode-se perceber a presença do viés da representatividade juntamente ao viés do otimismo, ao acreditar que o comportamento de grandes volumes de investidores não pode estar equivocado. Dessa forma, não apenas prejuízos financeiros individuais podem ocorrer, como também reações errôneas dos fomentadores de políticas, o que gera, por sua vez, redução do bem-estar da sociedade (WERMERS, 1999).

Bikhchandani e Sharma (2000) apresentaram três razões que podem levar a um padrão de movimentos dos investidores. A primeira delas seria a crença de que os demais agentes podem possuir mais informações sobre o comportamento dos retornos do investimento. A segunda seria a busca por incentivos de remuneração por parte de gestores de carteiras de terceiros. Por fim, o último motivo seria a presença de uma preferência pela conformidade por parte do indivíduo, isto é, intrinsecamente o indivíduo se sente melhor ao realizar ações validadas por outros.

Um ponto que merece destaque é exposto por Lobão e Serra (2002). Uma definição fraca do efeito manada resultaria na crença de que ele poderia ser captado pelo estudo de correlações nos movimentos financeiros de diversos investidores. Entretanto, essa caracterização de estratégias semelhantes não significa a presença do efeito manada. Na verdade, ela poderia indicar a presença do pressuposto de expectativas homogêneas presentes na teoria moderna. Dessa forma, a presença do efeito manada seria observada apenas quando fosse percebida a desconsideração de informações e preferências pessoais em prol de seguir uma tendência do mercado.

2.3 Econofísica

De acordo com Mantegna e Kertész (2011), a aproximação entre o campo da física e o de finanças não é algo recente, com diversas analogias já feitas em estudos anteriores, tais como o modelo de passeio aleatório de Bachelier e o modelo de precificação de Black e Scholes. Os autores destacaram que, antes da década de 1990, estas associações ainda eram esporádicas, porém, trabalhos atuais já reconhecem a aplicabilidade de elementos originalmente das ciências naturais na área financeira.

Com a evolução dos sistemas financeiros, houve um incremento da sua complexidade. Tal mudança impactou as modelagens utilizadas na área, que passaram a exigir a incorporação de correlações e dinamicidade de probabilidades. Tais especificidades já eram comuns nos modelos utilizados na física. Dessa forma, muitos físicos passaram a se interessar pela área financeira, dando origem, por conseguinte, ao campo da denominada econofísica (MANTEGNA; KERTÉSZ, 2011).

A origem desta área de acordo com Kutner e Grech (2008) se deu com o estudo de Mantegna (1991) sobre a aplicabilidade dos processos de Lévy (1924). Entretanto, Jovanovic e Schinckus (2013) apontaram que suas raízes estão com os estudos de Mandelbrot (1963). De acordo com Stanley *et al.* (1996), este campo se define metodologicamente como um conjunto de abordagens quantitativas utilizando como base modelos, conceitos e métodos computacionais da física para análise de fenômenos econômicos, em especial, os financeiros.

De acordo com Schinckus (2011), a econofísica tem como principal objetivo a análise de sistemas socioeconômicos complexos, podendo ser subdividida em duas vertentes: a econofísica baseada em agentes e a econofísica estatística. Dessa forma simplificada, a econofísica baseada em agentes tem uma ligação com abordagem microeconômica e com a física computacional, relacionando-se com modelos de mercados orientados por ordem ou modelos de teoria dos jogos. Entretanto, diferentemente da economia, nestas abordagens a racionalidade não é condição necessária para um agente ser analisado. Já a econofísica estatística se relaciona com a física estatística, tendo como objetivos modelos de previsão com base em séries históricas financeiras ou econômicas (SCHINCKUS, 2011).

De acordo com Jovanovic e Schinckus (2013), a econofísica possui o potencial de complementar a literatura econômica, ao passo que, distintamente desta última, que se limita por pressupostos e teorias, ela parte da utilização de dados reais e através de modelagens físicas, realizando análises de previsões. Dessa forma, seus

estudos geram resultados primeiros para depois serem identificadas as melhores teorias e validades de pressupostos econômicos.

Além disso, conforme Rickles (2007), a econofísica se concentra em estruturar modelos com base em dados empíricos, e não com base em um mercado ideal com pressupostos afastados da realidade, tal como ocorre na literatura clássica de finanças. Um exemplo desta análise pode ser feito sob a ótica das caudas das distribuições de frequência. Na economia financeira tradicional, é recorrente a utilização do Teorema Central do Limite (TCL) para justificar que, assintoticamente, as médias dos dados vão convergir para uma distribuição gaussiana. Porém, esta convergência ocorre apenas em seu centro, e não em suas caudas, isto é, seus valores extremos. Assim, as leptocurticidades das distribuições devem ser consideradas em conjunto com a probabilidade de eventos extremos ocorrerem (MANDELBROT; HUSDON, 2004).

Tal ressalva é importante ao se verificar, por exemplo, o que ocorreu na crise de 1929, em que as perdas potenciais foram subestimadas, sobretudo por causa da aplicação do TCL (KAHANA, 2005, MANDELBROT; HUSDON, 2004). Nesse aspecto, os econofísicos levam em consideração, em seus modelos, uma probabilidade alternativa da ocorrência de eventos extremos através de processos que não assumem a convergência para nenhum tipo de distribuição específica, adotando os processos estáveis de Lévy (MANTEGNA; STANLEY, 1994). Tal processo é uma generalização do TCL para soma de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, sem nenhuma restrição quanto ao segundo momento. Em geral, tais distribuições não possuem fórmulas fixas, sendo expressas mais comumente como transformações de Fourier ou funções características (RIBEIRO; LEAL, 2002).

Além disso, Backhouse e Morgan (2000) afirmaram que os econofísicos rejeitam também a ideia de assumir uma distribuição e mineração de dados, técnicas que têm em comum o foco na eliminação de dados anormais com baixa frequência observada. Assim, os econofísicos consideram que não existem dados anormais, mas sim dados com baixa frequência, os quais não devem ser descartados, visto que podem se apresentar como peças-chave para compreensão de um fenômeno (HOOVER; PEREZ, 2000). Dessa forma, de acordo com Schinckus (2011), os econofísicos seriam mais empiristas que os economistas.

Outra divergência entre os econofísicos e os economistas tradicionais está no enfoque das análises. Os estudos de finanças tradicionais têm como foco metodologias individualistas, tais como funções de utilidade e aversão ao risco. Desse modo, as análises consideram que a tomada de decisão ocorre de forma estática, isto é, não implica interações (KIRMAN, 1989). A corrente comportamental de finanças já realizou avanços sob esta perspectiva, desconsiderando o pressuposto de racionalidade dos agentes e levando em conta as interações dos mesmos.

Nesse sentido, a corrente comportamental se aproxima da vertente das análises econofísicas. Sob esta ótica, apenas o mercado financeiro macro poderia ser analisado, visto que reflete todas as interações dos agentes em nível micro. Brandouy (2005) destacou que estas interações não se limitam à racionalidade e muito menos são simétricas entre si, sendo inversamente proporcionais às distâncias entre os agentes e os tipos de estratégias adotadas (*traders, hedgers, especuladores...*).

Por fim, outro ponto de destaque para divergência dos econofísicos e dos economistas está na ideia de equilíbrio. Dentro do escopo da econofísica, equilíbrio se relaciona com o ideal neoclássico de homogeneidade do mercado (SHARPE, 1964). Nesse sentido, tal vertente desconsidera o potencial endógeno de heterogeneidade de expectativas em decorrência das interações entre distintos grupos de agentes (SCHINCKUS, 2011).

Em contrapartida, para a econofísica, o equilíbrio não se trata de um pressuposto, mas sim de um possível estado do mercado, não sendo um fator-chave para suas modelagens. Isso se deve, sobretudo, ao fato de que físicos já possuem experiência em modelagem estocástica dinâmica em cenários de desequilíbrio (MCCAULEY, 2006). Nessa direção, Schinckus (2011) reforçou a ideia de que a heterogeneidade é importante para compreender os diferentes tipos de interações entre os agentes e seus impactos no mercado.

2.3.1 Teoria Fractal

A geometria euclidiana é aquela que é composta por polígonos regulares e é a base para as criações humanas. Estudos acerca deste tema tiveram origens com o trabalho de Euclides, o qual conseguiu provar matematicamente que todas as formas da natureza poderiam ser reduzidas às formas geométricas básicas. Embora essa aproximação seja válida para alguns casos, essa abordagem desconsidera em suas

análises o elemento da dimensão, sendo esta uma característica importante, sobretudo, para avaliar as formas da natureza que são irregulares, desarmônicas e complexas (FALCONER, 2004).

Ao final do século XX, Mandelbrot realizou um estudo para determinar o tamanho do litoral da Grã-Bretanha, chegando à conclusão de que o resultado dependeria da escala utilizada. Nesse sentido, o autor ressaltou que a melhor escala seria aquela que tenderia zero. A partir desse estudo, surgiu a geometria fractal, a qual permite a representação de elementos com características irregulares (MANDELBROT, 1983). De acordo com as análises de Kimura (2005), fractais constituem padrões cujas partes ressoam no todo, isto é, são objetos geométricos que podem ser divisíveis infinitamente em partes menores, porém, ainda semelhantes ao todo. A Figura 2 exemplifica geometricamente o que seria um fractal através do Triângulo de Sierpinsky. Nesta figura, parte-se de um triângulo equilátero, e a cada etapa é retirado um triângulo equilátero central para cada triângulo existente.

Mandelbrot (1983) afirmou que fractais possuem características incomuns e até mesmo paradoxais. No caso exemplificado, o perímetro da figura tende ao infinito, ao passo que sua área tende a zero. Nesse sentido, a lógica da geometria euclidiana unidimensional e bidimensional não é a mais adequada para analisar tais figuras, visto que seu perímetro não é finito enquanto que sua área tende a zero. Desse modo, é necessário considerar uma dimensão fracionada entre 1 e 2 para analisar a figura. Essa seria a dimensão fractal (D).

Figura 2 - Triângulo de Sierpinsky



Fonte: Adaptada de Barbosa e Da Silva (2019, p. 545).

A partir desta vertente da geometria e com os avanços tecnológicos de programação e modelagem, elementos que antes não eram perfeitamente representados pela geometria euclidiana passaram a ser modelados a partir da ideia

de fractais em campos como a biologia, física, astronomia, matemática e mesmo no mercado financeiro (MANDELBROT; HUDSON, 2004). A modelagem fractal usa princípios de invariância para descrever de forma parcimoniosa objetos em múltiplas escalas, o que já se mostrou como importante para o ramo da matemática e das ciências naturais. Entretanto, essa métrica pode ser aplicada também no campo de finanças, sobretudo na modelagem de séries de preços de ativos, identificação de risco de portfólios e gestão de exposição ao risco de instituições (CALVET; FISHER, 2013).

Mandelbrot e Hudson (2004) destacaram que, em mercados financeiros, a variação dos preços é um fator-chave para as análises, visto que ela se relaciona tanto com o nível de exposição ao risco quanto com o potencial de ganhos, o que torna necessárias as análises de séries históricas de ativos financeiros para compreender estes dois pontos. Entretanto, conforme expõem os autores, o tempo não é uniforme para os investidores. Nesse sentido, a variabilidade da frequência das séries históricas (Δt) é relevante para a modelagem correta do risco.

Essa dependência do intervalo de variação temporal foi observada no trabalho de Regnault (1863) e, posteriormente, inspirou o trabalho de Bachelier (1900) sobre a formalização do movimento browniano e o modelo de passeio aleatório dos preços. Nesse sentido, os retornos aqui definidos como $p(t + \Delta t) - p(t)$ seguiriam uma distribuição gaussiana com média $\mu\Delta t$ e variância $\sigma^2 \Delta t$. Tal modelo ainda é assumido na moderna teoria de finanças, visto que ele corrobora premissas para um mercado eficiente e sem condições de arbitragem (CALVET; FISHER, 2013).

Com avanços tecnológicos e computacionais, os estudos de Mandelbrot (1963) e Mandelbrot (1967) analisaram testes das hipóteses de Bachelier (1900). Como conclusão, foram destacados desvios da distribuição das séries dos preços de ativos, *commodities* e câmbio com a distribuição browniana, sobretudo quanto à cauda da distribuição. Assim, o autor identificou que preços extremos eram a chave para a compreensão da totalidade das séries temporais analisadas que a distribuição browniana não conseguia captar, o que enviesava as análises sobre o risco das operações. Assim, o autor destacou que as séries financeiras precisavam ser modeladas por um processo estocástico mais específico tendo em mente a hipótese de autossimilaridade.

Uma função de preços em função do tempo $p(t), t \in R_+$ é tido como autossimilar com índice H se, para todo parâmetro $c > 0, n > 0$ e $t_1, \dots, t_n \in R$, o vetor

$p(ct)_1, \dots, p(ct)_n$ tiver a distribuição igual a $c^H p(t_1), \dots, c^H p(t_n)$. Para o processo browniano, a autossimilaridade ocorre com $H = \frac{1}{2}$. O processo estável de Lévy (1924) também possui características de autossimilaridades, com incrementos independentes e caudas parentianas descritas pela probabilidade $P\{|p(t + \Delta t) - p(t)| > x\} \sim K_{1/H} \Delta t x^{-1/H}$, com $x \rightarrow +\infty, 1/H \in (0; 2)$ e K_a uma constante positiva (CALVET; FISHER, 2013).

Os estudos de Mandelbrot (1963, 1967) identificaram que os preços não seguiriam o processo browniano, mas sim o processo de Lévy (1924). Neste processo, $p(t)$ seria o logaritmo do preço de um ativo ou taxa de câmbio. Entretanto, conforme expuseram Akgiray e Booth (1988) e Blattberg e Gonedes (2010), uma dificuldade desse processo está na sua variabilidade infinita, o que não apenas inviabiliza análises para verificar a magnitude do risco, como também vai contra a evidência empírica para séries temporais longas. Nesse aspecto, uma adaptação da física de processos da termodinâmica consegue ser aplicada para solucionar o problema da variância (JOVANOVIC; SCHINCKUS, 2013).

Entretanto, tais processos assumem a independência das mudanças de preço, sendo que estudos como os de Dacorogna *et al.* (1993) e Ding, Granger e Engle (1993) demonstraram a existência de autocorrelações nas séries temporais. Assim, conforme defenderam Calvet e Fisher (2013), as séries temporais financeiras não são exatamente autossimilares, mas apresentam distribuição com caudas mais grossas e são mais pontiagudas na média em horizontes temporais curtos. Tais conclusões corroboram hipóteses econômicas de que os preços dos ativos variam de acordo com o volume de novas informações. Assim, os processos de autossimilaridade não são aplicados perfeitamente para modelagens de retornos de ativos financeiros.

Com base em estudos que comprovam a existência de caudas grossas nas distribuições dos preços e na existência de memória de longo prazo, trabalhos como os de Mandelbrot, Fisher e Calvet (1997) e Calvet e Fisher (2002) passaram a analisar as propriedades multifractais das séries temporais financeiras. Como conclusões, foram detectadas evidências de que os momentos da mudança absoluta dos preços $p(t)$, isto é, $E\{|p(t + \Delta t) - p(t)|^q\} = c_q \Delta t^{\tau(q)+1}$, sendo $\tau(q)$ a função de escalonamento em função de um parâmetro q , poderiam ser escalonados como potências de Δt , dando origem posteriormente à criação de famílias de difusões multifractais em finanças (BACRY; DELOUR; MUSY, 2001). Em geral, tem-se que

caso $p(t)$ seja multifractal, então $\tau(q)$ será uma função estritamente côncava e se igualará a $Hq - 1$, caso seja autossimilar, sendo H o índice de autossimilaridade (GHASHGHAIE et. al., 1996; VANDEWALLE; AUSLOOS, 1998).

Com base nestas características, o Multifractal Model of Assets Return (MMAR) foi desenvolvido, sendo este um modelo que leva em consideração a difusão multifractal (MANDELBROT; FISHER; CALVET, 1997). Neste modelo, são construídas medidas multifractais com base em um processo iterativo de realocação aleatória dos dados dentro de um intervalo de tempo. Assim, o preço do ativo passa a ser modelado como uma combinação do movimento browniano B com uma deformação temporal aleatória e independente, $p(t) = p(0) + B[\theta(t)]$, sendo $\theta(t)$ a distribuição acumulada da medida multifractal da média μ (CALVIN; FISHER, 2002).

Entretanto, tal modelagem possui duas principais desvantagens: a realocação iterativa e recursiva dos dados não é usual em ferramentas padrões de séries temporais; e o processo gera um conjunto de erros não estacionário. Nesse contexto, surge o Markov-Switching Multifractal (MSM) como alternativa para o MMAR (CALVET; FISHER, 2008). Nesta abordagem, é gerado um declínio hiperbólico para a autocorrelação dos preços e modela mudanças abruptas na volatilidade, o que descreve movimentos compatíveis com os do mercado financeiro (MANDELBROT; VAN NESS, 1968). Além disso, o MSM mantém as propriedades do escalonamento de momentos do MMAR, o que fez com que Calvet e Fisher (2008) o caracterizassem como sendo uma versão aleatória do MMAR.

Uma abordagem comum em finanças para descrever ativos é a consideração destes como sendo a soma de uma difusão de Itô, isto é, flutuações comuns, com processos de saltos, que seriam a captura de eventos raros e específicos. Entretanto, como estes saltos são espontâneos e imprevisíveis, sua modelagem e previsão acabam sendo um desafio a ser discutido na literatura teórica e empírica. Nesse aspecto, a modelagem fractal pode ser utilizada para gerar expectativas para os preços com base em um sistema parcimonioso e testado para as suposições de invariância de escala, captando com eficiência até mesmo eventos mais raros e extremos (CALVET; FISHER, 2013).

Outra alternativa de tratamento é a adaptação de modelos tradicionais de finanças tendo em vista as propriedades fractais. O trabalho de Ribeiro e Leal (2002), por exemplo, demonstrou que as distribuições alfa-estáveis de Lévy possuem o poder de acomodar melhor flutuações nos preços dos ativos de mercados. Desse modo, os

autores indicaram que os modelos utilizados em finanças, tais como o CAPM e seus derivados, podem ser adaptados para considerarem tais distribuições ao invés de terem como base a distribuição gaussiana. Dessa forma, a volatilidade extrema não seria subestimada, bem como a distribuição seria mensurada considerando os dados empíricos e não pressupostos teóricos que destoam da realidade.

Por fim, o estudo de Lima e Oliveira (2020) construiu uma ponte entre os modelos da econofísica e os modelos modernos de finanças. Através de análises via expoente de Hurst e duas equações diferenciais estocásticas, seguindo o modelo de processos estáveis de Lévy, os autores derivaram o modelo de Black-Scholes para opções *call*. Desse modo, podem-se verificar novamente não apenas a validação da utilização da econofísica como também sua coerência com os modelos tradicionais, caso o mercado assuma uma série de propriedades voltadas para equilíbrio de suas dinâmicas.

2.3.2 Hipótese de Mercado Fractal

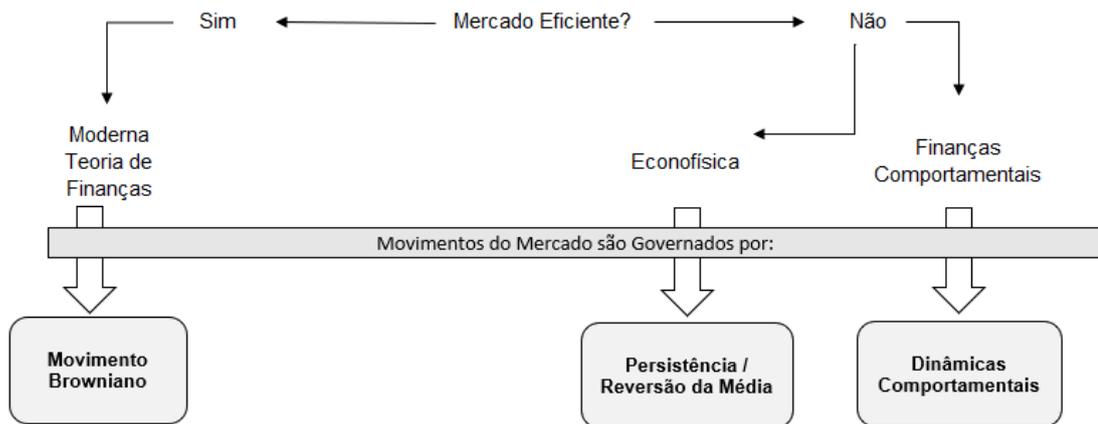
Segundo Peters (1994), a teoria dos fractais remete a uma relação de aleatoriedade local com um determinismo global. Aplicando essa teoria para o mercado acionário, pode-se considerar a informação como um elemento aleatório que irá afetar o mercado, enquanto a forma como o mercado irá interpretar essa informação seguirá um padrão determinístico, sendo esta considerada como Hipótese de Mercado Fractal (HMF).

Sob esta hipótese, o mercado assume movimentos aleatórios no curto prazo, mas mantém uma estrutura geral semelhante ao se expandir no horizonte temporal. Além disso, a teoria afirma também que o mercado assume padrões de longo prazo similares aos de médio prazo que, por sua vez, também assumem padrões similares aos de curto prazo, existindo momentos de persistência ou de reversão a médias que ocasionam as variações nas cotações. A Figura 3 sintetiza as relações entre as três correntes financeiras.

Com base na Figura 3, pode-se verificar que tanto a econofísica como as finanças comportamentais assumem *a priori* a não eficiência de mercado. Entretanto, elas se diferem em sua perspectiva de análise, na qual a primeira tem como foco tanto as propriedades da série temporal quanto a manutenção ou reversão de tendências com base nas propriedades fractais das séries temporais, enquanto a segunda

assume uma perspectiva pautada em análises comportamentais dos agentes (KARP; VAN VUUREN, 2019). Entretanto, não existe uma incoerência entre as duas, pelo contrário, uma pode ser utilizada para complementar a outra.

Figura 3 - Eficiência de Mercado Segundo as Correntes teóricas Financeiras

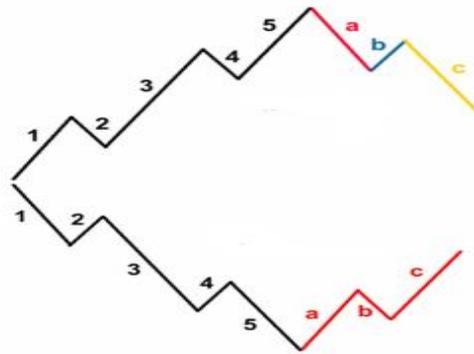


Fonte: Adaptada de Karp e Van Vuuren (2019, p. 3).

Nesse aspecto, enquanto a HMF traria uma análise empírica do comportamento das variações em uma série temporal financeira, a corrente comportamental poderia justificar a razão para tal comportamento. Essa análise combinada pode ser vista em trabalhos como, por exemplo, o de Kristoufek e Vosvrda (2014), o qual norteia a metodologia do presente trabalho.

Um dos estudos pioneiros para a concepção HMF foi o de Elliot (1938), que analisou o comportamento do mercado de capitais utilizando a teoria dos fractais. Ao final, o autor identificou um ciclo de cinco ondas, as quais apresentavam padrões de autossimilaridade típicos de um fractal. A Figura 4 ilustra as denominadas Ondas de Elliot. Com base nesse trabalho, observa-se um padrão fractal nas cotações do mercado, sendo identificada primeiramente um movimento de tendência (pontos 1 a 5) e posteriormente movimentos de correção (pontos a, b, c). A partir desse trabalho, diversos outros passaram a analisar o mercado financeiro sob a ótica um fractal (KOTYRBA *et al.*, 2013).

Figura 4 - Movimento Cíclico Descrito por Elliott



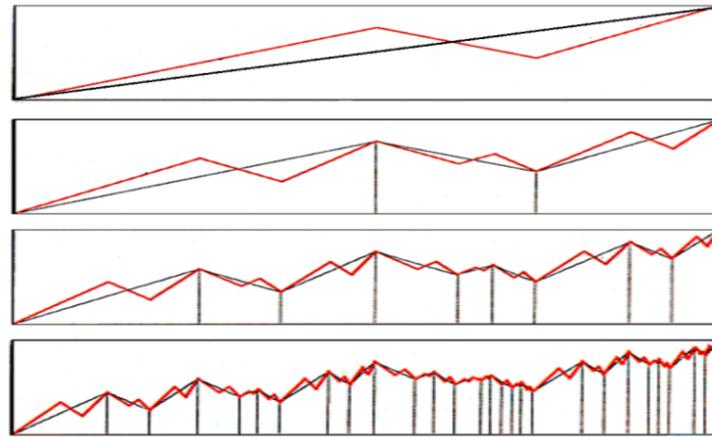
Fonte: Kotyrba *et al.* (2013, p. 2).

De forma geral, a HMF relaciona os ciclos de altas e de baixas existentes em diferentes períodos para realizar uma estimativa de ciclos de preços futuros. A Figura 5 exemplifica os efeitos fractais para os preços de um ativo no mercado financeiro. Nela, a linha vermelha indica as variações dos preços de um ativo e a linha preta, sua tendência. Pode-se imaginar essa análise começando com uma linha de tendência reta considerando uma pequena amostragem composta por quatro observações de preços.

Ampliando a amostra a partir de mudanças das escalas de captação dos preços, há um aumento nas oscilações da linha vermelha, ao passo que a linha de tendência é ajustada para refletir esses momentos, assumindo um comportamento de ondas locais, seguindo uma tendência global descrita pela linha de tendência reta original. Dessa forma, embora ocorram uma série de variações nos preços em curtos espaços de tempos, estas podem ser simplificadas por uma linha de tendência, que, contudo, ainda segue a tendência da linha preta original presente no primeiro componente da figura.

Peters (1994) definiu que, em momento de eficiência de mercado, há uma diferenciação entre investidores de curto e de longo prazo. Os investidores de curto prazo assumem maior risco devido à menor variação de espaço temporal, enquanto os investidores de longo prazo não são impactados por oscilações isoladas, mas sim pelo conjunto delas, de forma a reduzirem seu risco a partir de possíveis correções de oscilações abruptas.

Figura 5 - Simulação de Efeitos Fractais no Mercado Acionário



Fonte: Adaptada de Mandelbrot (1999, p. 71).

Assim, podem-se identificar técnicas de análises gráficas, de tendências e de liquidez como principais ferramentas para analistas de curto prazo e análises macroeconômicas e fundamentalistas para os de longo prazo. Entretanto, em momentos de crise e histeria, os investidores de longo prazo passam a atuar no curto prazo, o que aumenta a necessidade de liquidez de mercado e, como consequência, quebra o equilíbrio do mesmo (PETERS, 1994).

Além do ponto de vista teórico, a aplicabilidade da HMF em trabalhos empíricos vem sendo utilizada, sobretudo, para verificar níveis de eficiência de mercado. Estudos que aplicaram essa teoria no mercado acionário, como os de Nekrasova, Karnaukhova e Christianse (2018), Caporale *et. al.* (2016), Kristoufek e Vosvrda (2014), Kristoufek e Vosvrda (2013) e Dubovikov, Starchenko e Dubovikov (2004), utilizaram, principalmente, duas métricas para mensurar a eficiência do mercado. A primeira delas é o expoente de Hurst (H), um parâmetro capaz de captar a autossimilaridade de longo prazo, isto é, o nível da autocorrelação e de persistência no longo prazo. Seu valor varia entre 0 e 1 em que: valores inferiores a 0,5 indicam uma memória negativa de longo prazo; valores superiores a 0,5, uma memória positiva de longo prazo; e com $H = 0$, tem-se a ausência de memória de longo prazo, isto é, trata-se de um processo aleatório, que é esperado de ocorrer em mercado eficientes.

Já uma segunda métrica de análise é a D , métrica capaz de mensurar o efeito de persistência local. Em um mercado perfeito, isto é, em um mercado eficiente, seu valor

seria de 1,5, indicando ausência de correlações de curto prazo. Com valores inferiores a 1,5, observa-se um movimento de persistência local; já com $D > 1,5$, percebe-se um efeito de antipersistência local. Por fim, em um mercado eficiente, os preços seguem um passeio aleatório, de forma que ρ_1 seria próximo de 0. Esta medida se associa também com a captação do efeito manada local em mercados financeiros (KRISTOUFECK; VOSVRDA, 2013).

2.3.3 Revisão da Literatura Empírica

Comparando os mercados de 13 países emergentes com o mercado japonês e norte-americano, Cajueiro e Tabak (2004) utilizaram estimadores para H via *range/standard deviation* (R/S) e R/S modificado para mensurar memória de longo e curto prazo nesses mercados. Os resultados indicam que, no caso dos EUA e no do Japão, seus mercados eram mais eficientes que os dos países emergentes, os quais apresentavam dependência de longo prazo, sobretudo nos de países asiáticos. Além disso, tal estudo identificou relação positiva entre a eficiência de mercado com a capitalização deste mercado, bem como uma relação negativa dessa eficiência com os custos de transação.

Mitra (2012) avaliou 12 mercados de capitais de países desenvolvidos a partir da análise R/S e da *detrended fluctuation analysis* (DFA). Os resultados das análises indicam que o comportamento dos mercados analisados segue o esperado de um mercado eficiente. Além disso, nesse estudo, o autor verificou que a combinação do H com análises técnicas podem ser uma ferramenta útil para verificar possíveis movimentações futuras, sobretudo em momentos em que não há sinais de reversão de tendências. Esse estudo corrobora as conclusões destacadas por Greech e Mazur (2004).

Também utilizando a metodologia de R/S, Oprean e Tanasescu (2013) aplicaram uma análise fractal para verificar a existência de dependência de longo prazo na volatilidade dos retornos do mercado de capitais do Brasil, da Rússia, Índia, China, România, República Checa, Estônia e Hungria. Como resultado, os autores destacam dois pontos relevantes: o primeiro deles é que a distribuição dos H ao longo dos anos não apresentou distribuição normal ou simetria, indicando que a mediana seria uma medida mais adequada para análise; já o segundo ponto é que foi constatada a dependência de longo prazo para os mercados emergentes, sendo verificado,

inclusive, que essa dependência se relaciona com a persistência de preços, e não com mudanças de tendência.

A partir da análise da memória de curto e de longo prazo, Kristoufek e Vovsdra (2013) criaram um *ranking* para a eficiência de mercado de 41 países. Foi constatado que, entre os países estudados, o Japão foi o que apresentou maior eficiência. Além disso, os países europeus apresentaram maior concentração de mercados eficientes, enquanto os latinos, asiáticos e os da Oceania mostraram os piores índices. Por fim, foi constatado que a memória de curto prazo foi a maior causa da ineficiência dos índices analisados.

De forma semelhante, Kapecka (2013) também teve seu enfoque tanto no longo quanto no curto prazo. Analisando as cotações diárias e mensais de cinco índices de mercados desenvolvidos e seis emergentes, o autor verificou que, ao utilizar dados mensais, foram observados maiores efeitos determinísticos em comparação com o emprego de dados diários. Dessa forma, foi validado um dos principais pressupostos da HMF. Além disso, em suas análises, constataram-se valores de expoente de Hurst e dimensões fractais sinalizando que, em momentos de desaceleração econômica, havia uma tendência para incremento da eficiência dos mercados.

As análises de Ikeda (2017) consideraram 137 índices de mercado de relevância global através de análises do expoente de Hurst e de simulações via *bootstrap*. Suas conclusões destacam as oscilações da métrica ao longo dos anos analisados, verificando alterações com relação à memória de longo prazo das séries temporais. Além disso, as análises das séries permitiram verificar comportamentos coerentes com o de autossimilaridade, permitindo, assim, que o autor verificasse a adequabilidade da HMF para os índices de mercados estudados.

Miloš *et al.* (2018) analisaram os retornos de sete mercados da Europa Central e do Leste integrantes da União Europeia via DFA. Os resultados indicam a existência de ineficiências nesses mercados, entretanto, é levantado como hipótese pelos autores que o nível de desenvolvimento dos países pode impactar o comportamento dos expoentes de Hurst, sobretudo no que tange à sua autocorrelação, que, quando negativa, implica movimentos cíclicos quanto à eficiência do mercado.

O estudo de Karp e Van Vuuren (2019), além de fazer uma revisão bibliográfica da evolução da HMF comparando-a com a HEM, analisa o expoente de Hurst e dimensões fractais dos mercados americano, inglês e sul-africano. Dentre os pontos mais importantes do trabalho, destaca-se que foi identificado que as magnitudes de

variações das dimensões fractais impactavam as magnitudes das variações dos preços dos mercados. Além disso, pôde-se perceber que as dimensões fractais tendem a apresentar maiores alterações em momentos de manutenção da tendência de longo prazo.

Mais recentemente, Lahmiri e Bekiros (2020) estudaram a entropia e a volatilidade de diversos mercados, entre eles o financeiro e o de bitcoins, em períodos antes e após o pico da pandemia de 2020. Entre os resultados, pode-se verificar um aumento da aleatoriedade destes mercados em momentos posteriores ao pico da pandemia e que as volatilidades do mercado de ações, captadas via análise do S&P500, e o de criptomoedas apresentam interdependência tanto antes quanto depois da crise. Desse modo, verifica-se que momentos de *stress* podem levar a movimentos mais aleatórios e voláteis, o que se aproxima de um estado de mercado eficiente.

Além disso, com foco em analisar o mercado acionário chinês, Meg, Fang e Yu (2020) utilizaram as análises do expoente de Hurst para compreender as características fractais da série temporal do CSI 300. Primeiramente, foram detectadas anomalias e bolha no mercado que possuem tendências diferentes se comparados com o mercado americano e inglês. Assim, os autores concluem a não maturidade do mercado estudado, embora possam ser observadas também diferenças no grau de eficiência ao longo da amostra.

Patil e Rastogi (2020) analisaram preço, retorno, volume e variação de volume do mercado indiano em cinco subperíodos, tendo como base o expoente de Hurst. Foi constatada a presença de memória de longo prazo para os preços, sobretudo em momentos mais voláteis, o que permite a realização de arbitragem de forma mais expressiva devido à pluralidade de estratégias, o que condiz com as ideias da HMF simultaneamente.

Na mesma direção, Dima, Dima e Ioan (2021) analisaram o *Chicago Board Option Exchange Volatility Index's* (VIX) para investigar os efeitos comportamentais durante a crise da COVID-19 a partir de uma adaptação do índice de Kristoufek e Vovsdra (2013). Os autores identificaram que a eficiência de mercado é variante ao longo do tempo e que tanto a análise fundamentalista quanto a técnica poderiam ser empregadas para fins de arbitragem, sendo que a eficiência dessas técnicas depende do nível de ineficiências presentes no mercado. Dessa forma, analisar e prever a eficiência do mercado é relevante para a seleção das melhores estratégias.

3 METODOLOGIA

3.1 Tipologia da Pesquisa

O presente trabalho é caracterizado como sendo descritivo quanto aos objetivos, uma vez que visa descrever e interpretar um fenômeno e sua relação com variáveis determinadas (MARTINS, 2010). Quanto à abordagem, as análises realizadas possuem um caráter quantitativo ao utilizar modelos de séries temporais e regressões multivariadas em dados secundários para construção do modelo de análise (DENZIN; LINCOLN, 2006). Por fim, sobre os procedimentos, o trabalho possui um caráter bibliográfico, ao recorrer a diversos trabalhos para a construção teórica e do modelo selecionado (GIL, 2010), e *ex-post-facto*, pois visa investigar eventos já ocorridos e suas relações de causa e evento com variáveis (ZANELLA; TITON, 2005).

3.2 Amostra

Para este trabalho, foram utilizados dados diários do IBRX, MICEX, NSEI, SSEC, JTOPI, DJI, DAX, FTSE e N225 contando informações de junho de 2007 até julho de 2021. Devido aos feriados diferentes em cada um dos nove países analisados, a base de dados não possui um mesmo número de informações no total, apresentando cerca de 3.500 por índice de mercado. Os dados dos preços de fechamento foram coletados via *Yahoo Finance*. A escolha de dados diários foi feita com base na facilidade da coleta bem como na capacidade computacional disponível.

Cada índice de eficiência (*EI*) foi calculado considerando 756 dias úteis, aproximadamente três anos, com uma janela móvel diária, totalizando, assim, cerca de 2.743 *EI's* por mercado estudado. Com base na série histórica dos índices e dos elementos que o compõem, foram feitas análises para verificar padrões de comportamento do grau de eficiência e anomalias nos mercados durante o período selecionado. Os dados coletados foram organizados em uma Planilha MS-Excel, sendo posteriormente utilizados para a construção do índice no *software* R utilizando os pacotes *pracma*, *fractaldim* e *LongMemoryTS*.

3.3 Índice de Eficiência Proposto

O índice proposto se baseia no trabalho de Kristoufek e Vosvrda (2014), uma adaptação do índice proposto em Kristoufek e Vosvrda (2013), no qual os autores o construíram com base em efeitos fractais, isto é, formas geométricas que podem ser reduzidas em elementos menores com mesma forma. O modelo utiliza três métricas, sendo elas a correlação de primeira ordem (ρ_1), o H e a D para mensuração da memória de longo prazo e memória de curto prazo.

O índice desenvolvido pelos autores tem como base a soma das diferenças dessas métricas com seus valores observados em mercados eficientes. A fórmula do índice de eficiência (EI) proposto por Kristoufek e Vosvrda (2013) está disposta na Equação 3. Em seu estudo, os autores utilizaram três metodologias para o cálculo do H , sendo elas o *detrended fluctuation analysis* (H_{DFA}), *detrended moving average* (H_{DMA}) e *height-height correlation analysis* (H_{HHCA}), e quatro para o cálculo do D , sendo elas o método do Periodograma (D_P), Wavelet (D_W), Genton (D_G) e Hall-Wood (D_{HW}).

$$EI = \left[(H_{DFA} - 0,5)^2 + (H_{DMA} - 0,5)^2 + (H_{HHCA} - 0,5)^2 + (D_P - 1,5)^2 + (D_W - 1,5)^2 + (D_G - 1,5)^2 + (D_{HW} - 1,5)^2 + \left(\rho_1/2\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

Entretanto, em seu trabalho, os autores ressaltaram que a ideia do índice pode ser modificada para captação de demais efeitos a partir de uma lógica semelhante. Assim, a fórmula genérica para o EI está expressa na Equação 4, na qual M_i é o i -ésimo indicador de eficiência estimado, M_i^* é o valor esperado para M_i em um mercado eficiente, e R_i é a alcance de M_i . Dessa forma, EI assume valores de 0 a $\sqrt{n}/2$, em que n são as métricas utilizadas para construção do índice. Assim, $EI = 0$ indica um mercado em plena eficiência, e $EI = \sqrt{n}/2$ aponta que o mercado é totalmente ineficiente.

$$EI = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{M_i - M_i^*}{R_i}} \quad (4)$$

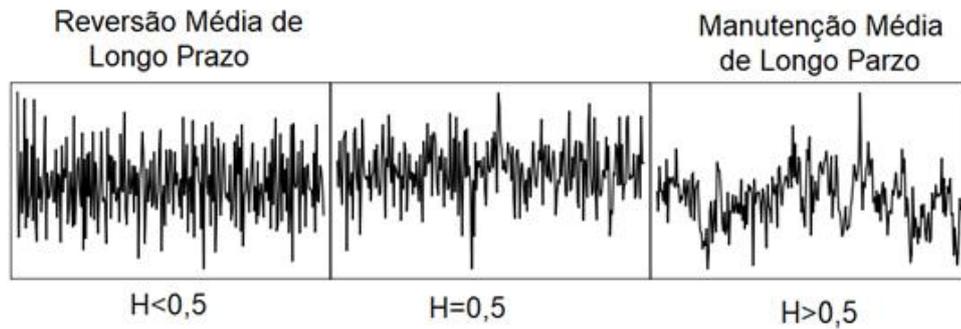
A partir desse modelo, Kristoufek e Vosvrda (2014) realizaram algumas adaptações na métrica. Primeiramente, os autores identificaram a correlação de primeira ordem como sendo redundante para captar efeitos de curto prazo, ao passo que já se estava sendo considerada a dimensão fractal. Em seguida, os autores selecionaram métricas de cálculo para H 's e D 's que se adequassem melhor para amostras pequenas de séries temporais. Por fim, foi incluída a aproximação da entropia proposta por Pincus (1991), visando captar os efeitos da magnitude da aleatoriedade presente nas séries de retornos. As próximas seções contêm a descrição destas métricas e suas formulas de cálculo, e, por fim, é apresentado o modelo final do índice proposto.

3.4.1 Expoente de Hurst

A memória de longo prazo ou dependência de longo prazo é caracterizada, no domínio do tempo, como sendo a lei que rege o decaimento da função de autocorrelação; já no domínio da frequência, é a lei que rege a divergência espectral da série com seu ponto de origem (KISTOUFEK; VOSVRDA, 2014). Conforme destacaram Mandelbrot e Van Ness (1968), a função de autocorrelação de k -ésima ordem ($\rho[k]$) de uma série temporal pode ser expressa pela função $\rho(k) = E[(X_t - E[X_t])(X_{t-k} - E[X_{t-k}])]/E[(E[X_t - E(X_t)]^2)$, na qual X_t é uma série estacionária que, com $k \rightarrow \infty$, tem-se que $\rho(k) \propto k^{2H-2}$, em que k é uma constante e H seria o coeficiente de Hurst.

Conforme exposto anteriormente, com um $H = 0$, tem-se uma série sem memória de longo prazo, característica típica de mercados eficientes. Com $H > 0,5$, a série temporal é caracterizada como memória positiva de longo prazo ou série persistente, na qual incrementos futuros tendem a ocorrer à medida que incrementos passados ocorreram. Já com $H < 0,5$, a série é do tipo antipersistente, o que permite verificar um efeito de reversão da média. Assim, percebe-se que, com $H \neq 0,5$ podem-se observar ineficiências de mercado, o que permite a arbitragem (MANDELBROT; VAN NESS, 1968). A Figura 6 ilustra o comportamento de uma série de acordo com seu H .

Figura 6 - Efeitos da Memória de Longo Prazo em Séries Temporal



Fonte: Elaboração própria.

Existe uma grande variedade de metodologias para o cálculo do H , tanto para o domínio do tempo quanto para o domínio da frequência. Entretanto, alguns autores destacaram metodologias mais adequadas em comparação com outras devido à existência de viés de memória de curto prazo, propriedades distributivas e efeitos de amostras finitas, o que acaba por enviesar o resultado do H (TEVEROVSKII; TAQQU; WILLINGER, 1999; COUILLARD; DAVIDSON, 2005; BARUNIK; KRISTOUFEK, 2010). Tendo em mente esta preocupação, para a construção do EI , Kristoufek e Vosvrda (2013) optaram por três metodologias para o cálculo do H : a *detrended fluctuation analysis* (DFA¹), a *detrended moving average* (DMA²) e a *height-height correlation analysis* (HHCA³).

Entretanto, conforme reforçaram Kristoufek e Vosvrda (2014), tais metodologias sofrem distorções com séries temporais curtas, como é o caso das janelas temporais propostas. Nesse sentido, os autores propuseram a utilização de duas abordagens alternativas, o via Local Whittle Estimator (LW) e via método de Geweke e Porter-Hudak (GPH).

O LW consiste em um estimador semiparamétrico calculado via Máxima Verossimilhança (ROBINSON, 1995). O primeiro passo para o cálculo é identificar o espectro da série X_t , o qual pode ser aproximado pelo periodograma $I(\lambda_j) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \exp(-2\pi i t \lambda_j) X_t$, T com sendo o tamanho da amostra, j sendo diferentes subamostras, de forma que $j = 1, 2, \dots, m$ com $m < T/2$ e $\lambda_j = 2\pi i t/T$. Dessa forma, H_{LW} será a minimização de $R(H) = \log\left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \lambda_j^{2H-1}\right) - \frac{2H-1}{m} \sum_{j=1}^m \log \lambda_j$, com $0 \leq H < 1$.

¹ Ver por exemplo Kantelhardt *et al.* (2002) para cálculo da métrica.

² Ver por exemplo Alessio *et al.* (2002) para cálculo da métrica.

³ Ver por exemplo Barabási, Szépfalussy e Vicsek (1991) para cálculo da métrica.

Adicionalmente, H_{LW} tem propriedades de consistência e é normalmente distribuído assintoticamente.

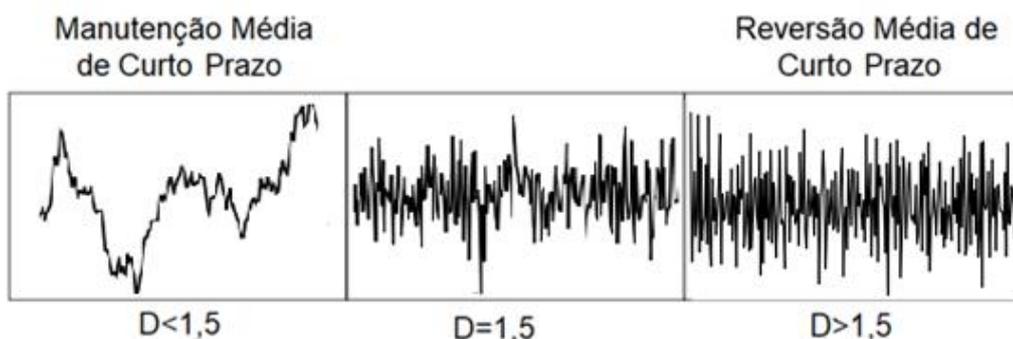
Já a modelagem do H_{GPH} se baseia no fracionamento do ruído gaussiano, assumindo uma função espectral $\log f(\lambda)$ do tipo $\log f(\lambda) \propto (H - 0,5) \log \left[4 \operatorname{seno}^2 \left(\frac{\lambda}{2} \right) \right]$. Nesse aspecto, H_{GPH} será também normalmente distribuído assintoticamente (GEWEKI; PORTER-HUDAK, 1983; BERAN, 1994).

3.4.2 Dimensão Fractal

Quanto às dimensões fractais, estas indicam a irregularidade de séries temporais. Em uma série aleatória, $D = 1,5$. Com $D \neq 1,5$, podem-se observar tendências de curto prazo, as quais se relacionam com momentos de negatividade e baixa do mercado (*bear*) e momentos de euforia e incremento do mercado (*bull*). Com $D < 1,5$, o mercado é caracterizado como possuindo persistência local e apresentando menores episódios de volatilidade, enquanto $D > 1,5$ indica a presença de altas volatilidades e uma tendência de antipersistência local (MANDELBROT, 1982). A Figura 7 ilustra os efeitos da memória de curto prazo em séries temporais.

Pelo processo de autossimilaridade, $H+D=2$, ou seja, pode-se descrever D em função da memória de longo prazo. Entretanto, esta igualdade só é válida quando há uma reflexão perfeita entre a memória de longo prazo e a de curto prazo. Essa premissa não é observada nas séries temporais financeiras, de modo que os efeitos de curto e longo prazo afetam de forma não homogênea a série temporal (KRISTOUFEK; VOSVRDA, 2014).

Figura 7- Efeitos da Memória de Curto Prazo em Séries Temporal



Fonte: Elaboração própria.

Além disso, as métricas originais, que se baseiam em análises de textura e irregularidades multidimensionais, não podem ser calculadas para séries unidimensionais, como é o caso de séries financeiras. Dessa forma, técnicas alternativas foram desenvolvidas para estes cálculos (GNEITING; ŠEVČÍKOVÁ; PERCIVAL, 2012), sendo mais comumente utilizadas as técnicas de estimação via Periodograma⁴, Wavelet⁵, Genton e Hall-Wood em trabalhos na área de finanças, sendo estas também as métricas selecionadas para o índice original. Não obstante, Kristoufek e Vosvrda (2014) apontam apenas as metodologias do D_G e D_{HW} como adequadas para séries temporais financeiras curtas. Assim, no presente estudo, apenas estas métricas foram utilizadas na construção do índice.

A metodologia do D_G se baseia no estimador robusto do variograma de Genton (GENTON, 1998), o qual pode ser definido como $(V_2(l/n) = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{i=1}^n (\frac{X_i}{n} - \frac{X_{(i-l)}}{n})^2$, no qual n indica o tamanho de subséries de X e l o tamanho das *boxes* utilizadas no agrupamento. Com base nesses cálculos, é possível a construção do D_G , que, por sua vez, é expresso por $D_G = \frac{\sum_{l=1}^L (s_l - \bar{s}) \log(V_2(l/n))}{2 \sum_{l=1}^L (s_l - \bar{s})^2}$, com $s_l = \log(l/n)$ e \bar{s} a média de s_l , sendo que, segundo Davies e Hall (1999), fazendo $L=2$, há uma redução do viés da métrica.

Por fim, o D_{HW} se baseia no processo de *box-counting* e na utilização de escalonamento de desvios absolutos entre passos, proposto originalmente por Hall e Wood (1993). Os desvios absolutos de uma série temporal X são calculados via $A(l/n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\lfloor n/l \rfloor} |X_{il/n} - X_{(i-1)l/n}|$, o que representa os desvios absolutos da série X de tamanho n e agrupado em *boxes* de tamanho l . Dessa forma, o estimador é mensurado via $D_{HW} = 2 - \frac{\sum_{l=1}^L (s_l - \bar{s}) \log(A(l/n))}{2 \sum_{l=1}^L (s_l - \bar{s})^2}$, com $s_l = \log(l/n)$ e \bar{s} a média de s_l , sendo que, assim como no caso anterior, com $L=2$, há uma redução do viés da métrica.

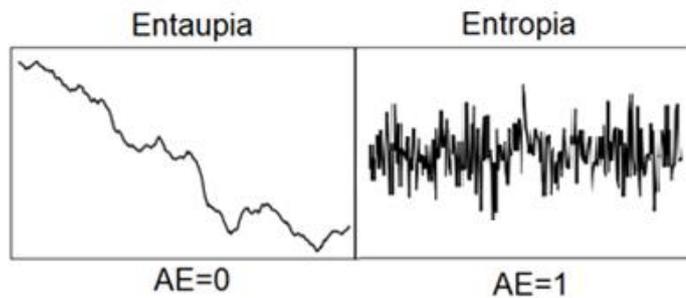
3.4.3 Aproximação de Entropia

⁴ Ver por exemplo Chan, Hall e Poskitt (1995) para cálculo da métrica.

⁵ Ver por exemplo Serroukh, Walden e Percival (2000) para cálculo da métrica.

Conforme explicou Pincus e Kalmon (2004), a entropia é uma medida que capta a complexidade de um sistema. Em um sistema aleatório, a entropia do sistema será elevada, já em um sistema determinístico, ela será baixa. Nesse aspecto, um mercado financeiro completamente eficiente terá o máximo de entropia, enquanto um mercado completamente ineficiente não terá entropia alguma. A Figura 8 ilustra o impacto da entropia em uma série temporal.

Figura 8- Efeitos da Entropia em Séries Temporal



Fonte: Elaboração própria.

Neste estudo, assim como no trabalho Kristoufek e Vosvrda (2014), optou-se por utilizar a aproximação de entropia de Pincus (1991), o qual definiu que, para $1 \leq i \leq T - m + 1$, pode-se desenvolver uma medida de autocorrelação baseada nos lags

de uma série temporal do tipo $C_i^m(r) = \frac{\sum_{i=1}^{T-m+1} 1_{d(i,j) \leq r}}{T-m+1}$, tal que $1_{d(i,j)}$ é uma medida binária que equivale a 1 caso $d(i,j) = \max_{k=1,2,\dots,m} (|X_{i+k-1} - X_{j+k-1}|) \leq r$ e 0 caso contrário, sendo assim uma medida que mensura a distância entre lags diferentes de uma série temporal X em função de um parâmetro $r \in R$.

Dessa forma, pode-se definir $C^m(r) = \frac{1}{T-m+1} \sum_{i=1}^{T-m+1} C_i^m(r)$ como a média de $C_i^m(r)$. Essa média é utilizada como aproximação da entropia através da dimensão de correlação $AE = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\log[C^m(r)]}{\log(r)}$. Assim, com $AE = 1$, o mercado seria completamente eficiente; já com $AE = 0$, completamente ineficiente.

3.4.4 Indicador Final

Nas três seções anteriores foram ilustradas modelagens para captação de efeitos de comportamento do mercado com base na HMF. Com base no exposto e considerando o objetivo de analisar o comportamento de mercados emergentes e desenvolvidos, optou-se pela adaptação do *EI* proposta por Kristoufek e Vosvrda (2014). O Quadro 3 sintetiza os efeitos que foram analisados e discutidos para se atingir o objetivo proposto.

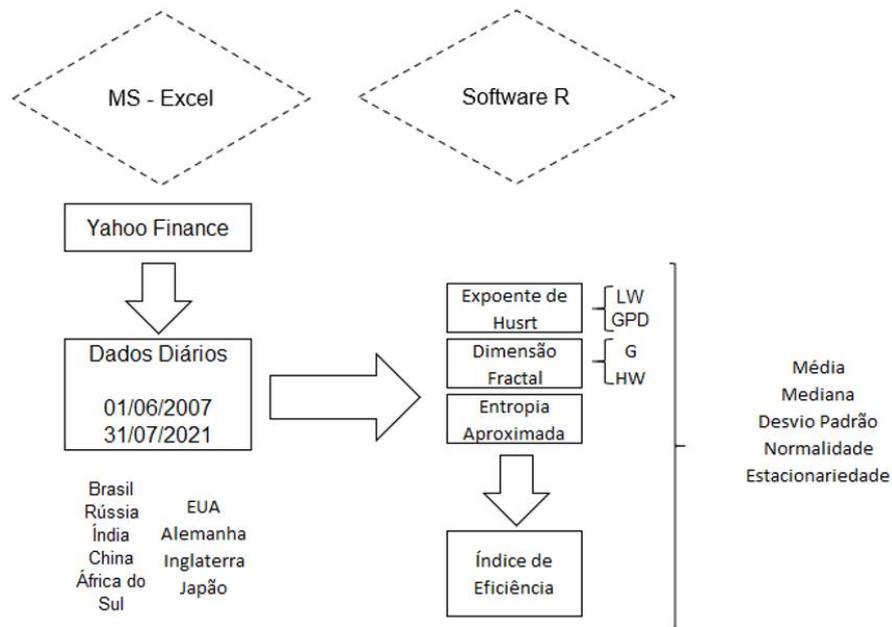
Quadro 3 - Fatores Analisados Sobre a Eficiência de Mercado

Mercado Eficiente	Fator do Modelo	Mercado Ineficiente
<i>H</i> próximo de 0,5 – Independência de longo prazo	Memória de Longo Prazo	<i>H</i> diferente de 0,5 – Reversão ou manutenção da média de longo prazo
<i>D</i> próximo a 1,5 - Efeito manada inexistente	Efeito Manada de Curto Prazo	<i>D</i> diferente 1,5 - Efeito manada existente
<i>AE</i> próximo de 1 - Completamente Aleatório	Complexidade do Sistema	<i>AE</i> próximo de 0 - Completamente Determinístico

Fonte: Elaboração própria.

Já a Figura 9 apresenta uma síntese do percurso metodológico proposto para a investigação empírica deste trabalho. Primeiramente, foram realizadas análises de média, mediana e desvio padrão para identificação complementar do padrão das amostras.

Figura 9 - Percurso Metodológico da Pesquisa Empírica



Fonte: Elaboração própria.

Posteriormente, foram calculados os H , D e AE selecionados, e foi feita uma análise estatística de tais indicadores. Em seguida, conforme a Equação 5, o EI foi calculado em uma janela móvel para os mercados emergentes e desenvolvidos.

$$EI = \left[(H_{GPH} - 0,5)^2 + (H_{LW} - 0,5)^2 + (D_G - 1,5)^2 + (D_{HW} - 1,5)^2 + \left(\frac{AE-1}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

Com base nos EIs calculados, foi possível verificar o comportamento e a evolução da eficiência dos mercados acionários selecionados. Além disso, foram realizadas também análises para as métricas componentes do índice, com o objetivo de verificar as causas das variações do grau de eficiência ao longo da amostra. Para mensurar a normalidade da distribuição das métricas, o trabalho conta com a estatística de Shapiro e, para analisar a estacionariedade das séries, empregou-se a raiz unitária de Dickey-Fuller.

4 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

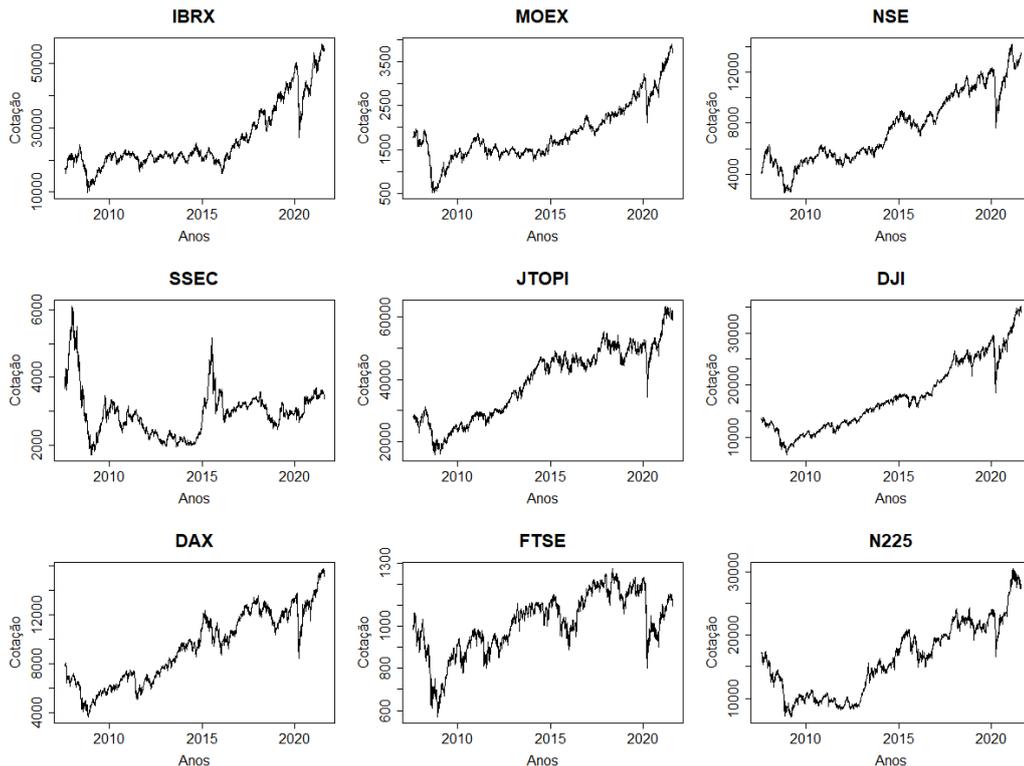
4.1 Análises das Estatísticas Descritivas

Conforme exposto na metodologia, foram selecionados nove índices de mercado, sendo cinco deles referentes aos países do BRICS e os demais referentes a EUA, Alemanha, Inglaterra e Japão. Antes de realizar as análises dos índices de eficiência de mercado e de suas parcelas compositoras, foi realizada uma análise das estatísticas descritivas básicas das séries temporais de tais índices. A primeira análise diz respeito à evolução dos índices construídos. A Figura 10 ilustra os gráficos gerados ao longo do período de análise.

Conforme a Figura 10, pode-se verificar um comportamento semelhante dos índices selecionados. Nesse aspecto, havia uma estabilidade em 2007, uma queda em decorrência da crise do *subprime* em 2008 e uma retomada do patamar dos pontos no ano seguinte. O IBRX e MOEX apresentaram uma estabilidade até meados de 2016 e, logo em seguida, começaram a iniciar um movimento de crescimento novamente, no qual os índices NSE, JTOPI, DJI, DAX e FTSE já estavam inseridos logo após a crise de 2008. Em geral o crescimento foi mantido até o início de 2020, com a crise da COVID-19, sendo que, ao final desse ano, os índices voltaram a valores próximos aos que apresentaram no início do ano, voltando a uma tendência crescente em 2021.

Um caso particular seria o da SEEC e N225, os quais apresentaram movimentos diferenciados se comparados com os demais. Observa-se um grande impacto da crise 2008 no valor dos índices, ao passo que as recuperações iniciadas em 2009 foram interrompidas, dando início a novos períodos de queda até meados de 2014. Esse fenômeno é reflexo dos efeitos da crise de 2008 nas economias asiáticas, podendo citar inflação e redução de exportações.

Figura 10 – Evolução dos Pontos dos Índices de Mercado

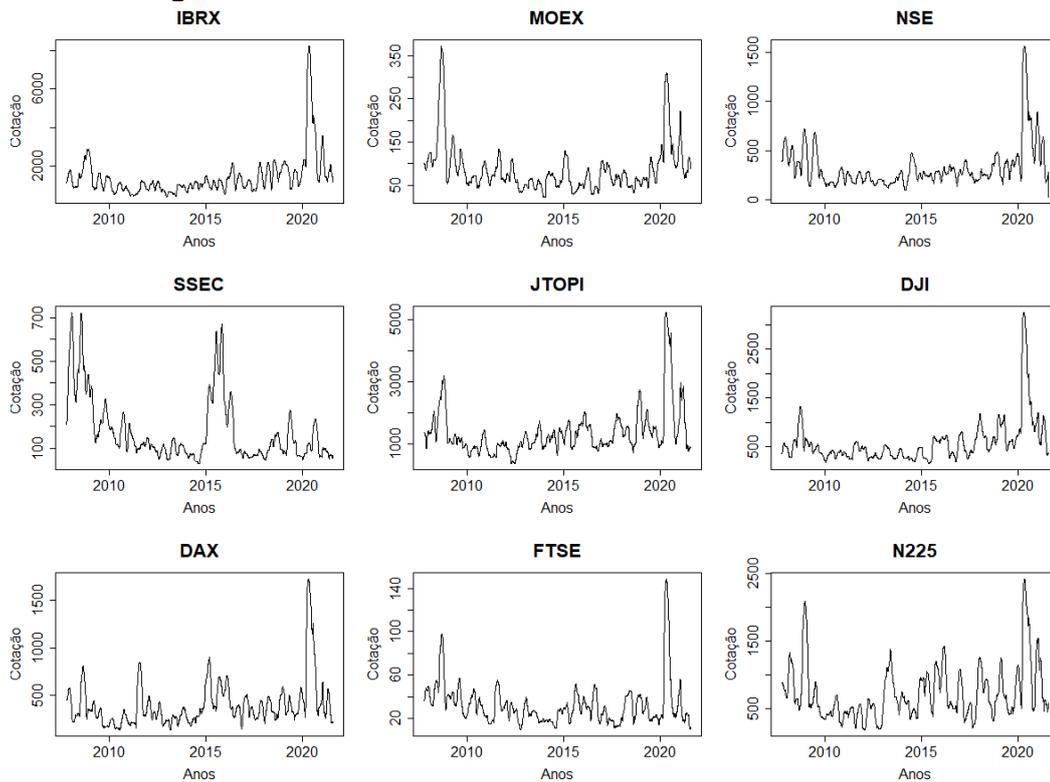


Fonte: Elaboração própria.

Com o *boom* das *commodities*, a China e o Japão começaram a recuperação de suas economias, o que se refletiu em seus índices de mercado, mas com nova desaceleração com o final do ciclo das *commodities*. Ressalta-se que tais efeitos impactaram os demais países, sobretudo o Brasil, a Rússia e Alemanha, mas em menor grau neste período. Em 2019, os dois mercados asiáticos citados sofreram com os impactos da COVID antes do resto do mundo, o que é sinalizado pela redução do índice neste ano. Entretanto, como consequência, tiveram uma recuperação prévia em comparação aos demais países, também sendo este fato verificado na Figura 10.

Outra estatística analisada diz respeito à variação dos dados. Para isso, foram calculados os desvios padrões amostrais dos índices através de uma janela móvel de 90 dias. Os resultados estão dispostos na Figura 11. Em resumo, pode-se destacar que a crise da COVID-19 ocasionou a maior variação dos dados para os índices, com exceção do MOEX e da SSEC, cujos dados apresentaram maior variação respectivamente devido à crise de 2008 e ao final do ciclo das *commodities* em meados de 2016.

Figura 11 - Desvio Padrão dos Pontos dos Índices de Mercado

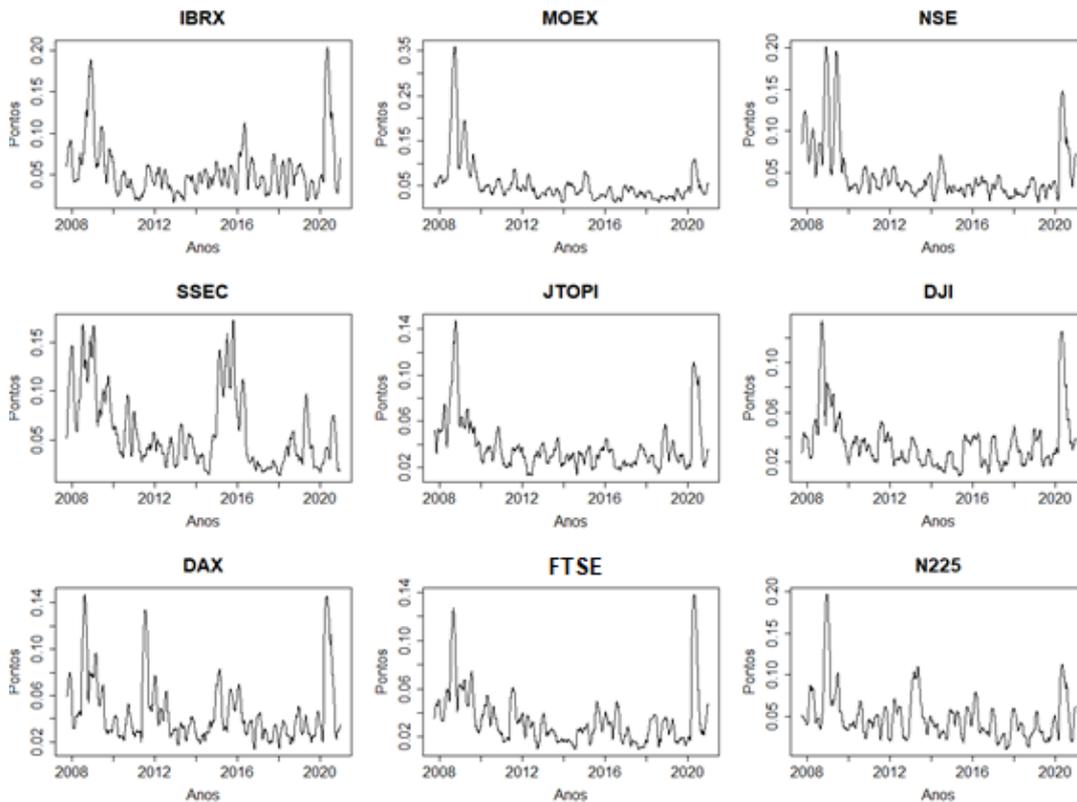


Fonte: Elaboração própria.

Além disso, pode-se destacar que, em 2008, todos os índices refletem os impactos na economia derivada da crise do *Subprime*, mesmo que em graus diferentes. Destaca-se também que, ao longo da amostra, houve picos de volatilidade, porém, não se comparam com os picos ocasionados pelas crises citadas. Por fim, pode-se verificar que a recessão econômica entre 2014 e 2016 afetou o mercado alemão e o japonês, embora em grau menor que o chinês.

Para se ter uma análise de variação por unidade de retorno, foram calculados os coeficientes de variação dos índices, isto é, a razão entre o desvio padrão e da média de 90 dias, sendo estes apresentados na Figura 12. Com base nos resultados, é possível verificar que houve uma maior dispersão relativa dos dados em 2008 para os índices, com exceção do SSEC, IBRX e FTSE, cujos valores dos coeficientes se equiparam aos períodos relativos à crise do final do ciclo das *commodities* para o primeiro índice e à crise da COVID para os dois últimos.

Figura 12 - Coeficiente de Variação dos Pontos dos Índices de Mercado

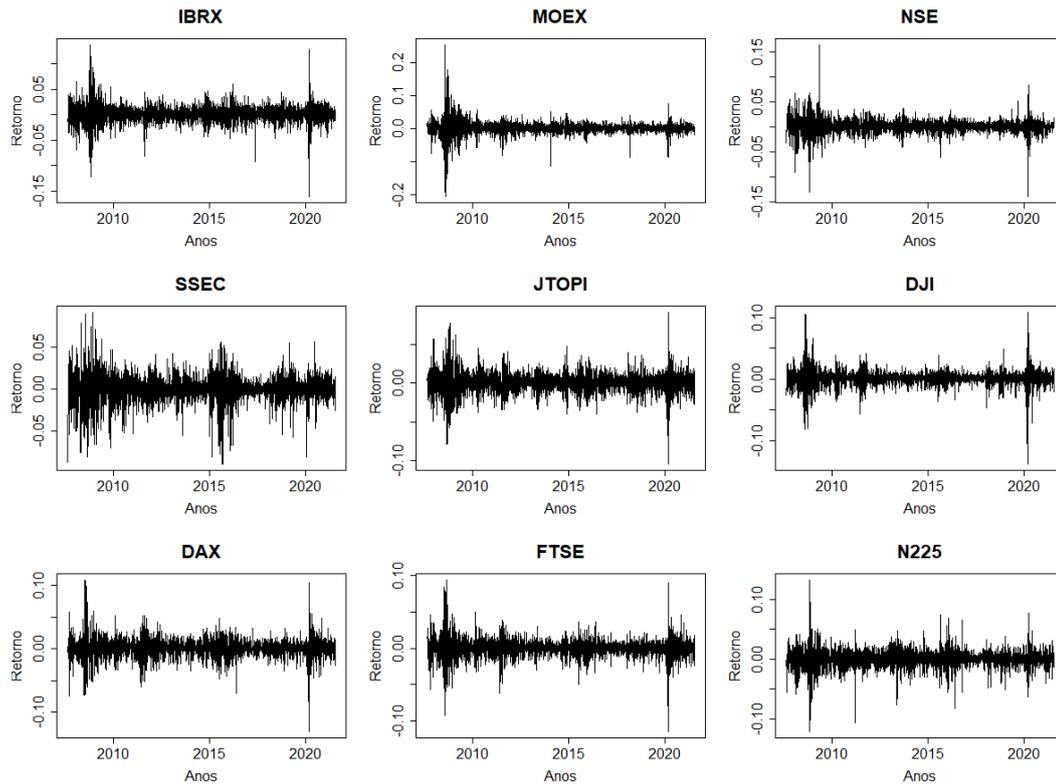


Fonte: Elaboração própria.

Além disso, pode-se verificar que, embora em menor grau, a crise da COVID também alterou a dispersão relativa dos demais índices, sobretudo do NSE, JTOPI e DJI. Por fim, é possível apontar que o mercado alemão foi o que apresentou maiores picos de oscilações nos seus coeficientes de variação, sinalizando sua possível maior sensibilidade às mudanças no cenário macroeconômico.

Por fim, a Figura 13 ilustra os retornos dos índices ao longo do período analisado, enquanto a Tabela 1 traz as estatísticas descritivas dos retornos. Primeiramente, pode-se destacar que os retornos assumem uma média e uma mediana próxima de zero. Além disso, pode-se verificar pelo teste de raiz unitária que as séries são categorizadas como sendo estacionárias. Entretanto, atesta-se verificar também que as séries não assumem uma distribuição normal. Além disso, a análise gráfica permite identificar momentos de maior oscilação de retornos.

Figura 13 - Retorno dos Pontos dos Índices de Mercado



Fonte: Elaboração própria.

Com base nos dados, pode-se verificar que tanto em 2008 quanto em 2020 os eventos macroeconômicos refletiram no retorno e risco dos índices de mercado, reforçando assim a ideia de que momentos de estresse global afetam tanto países desenvolvidos quanto os emergentes, o que corrobora o trabalho de Delgado-Bonal (2019) e o de Caporale *et al.* (2016). Além disso, destaca-se o mercado chinês como sendo o mais volátil e sensível às mudanças macroeconômicas, ao passo que os demais países do BRICS apresentam consistência em suas variações.

Pode-se perceber que, embora o DJI, FTSE se comportem como os demais índices, seus coeficientes de variação são menores, o que indica menor nível de dispersão, o que pode ser justificado pelo fato de serem índices de países desenvolvidos. Para o caso do N225, embora o índice assuma comportamento semelhante ao outro índice asiático, após a crise 2008, seu coeficiente de variação passa a se comportar de forma mais semelhante aos dos índices norte-americano e inglês.

Tabela 1 - Estatísticas Descritivas dos Retornos dos Índices de Mercado

Índice	Média	Média Anualizada	Mediana	Mediana Anualizada	Desvio Padrão	Desvio Padrão Anualizado	Teste Dickey-Fuller	Teste Shapiro
IBRX	0,0003	0,0776	0,0007	0,1796	0,0174	0,2757	-31,3591***	0,9036***
MOEX	0,0002	0,0564	0,0004	0,0979	0,0185	0,2937	-30,8311***	0,8001***
NSE	0,0004	0,0820	0,0006	0,1517	0,0140	0,2224	-30,1042***	0,8873***
SSEC	0,0000	-0,0102	0,0006	0,1567	0,0159	0,2521	-27,3895***	0,9249***
JTOPI	0,0002	0,0576	0,0007	0,1705	0,0135	0,2142	-31,2831***	0,9431***
DJI	0,0003	0,0649	0,0006	0,1445	0,0126	0,2001	-30,8192***	0,8515***
DAX	0,0002	0,0447	0,0007	0,1740	0,0142	0,2259	-29,5788***	0,9201***
FTSE	0,0000	0,0080	0,0004	0,0970	0,0123	0,1956	-29,886***	0,9053***
N225	0,0001	0,0280	0,0006	0,1376	0,0152	0,2417	-30,5577***	0,9223***

***, ** e * denotam significância estatística a 0,01, 0,05 e 0,1.

Fonte: Elaboração própria.

Por fim, no caso do DAX, podem-se verificar maiores picos de volatilidade e flutuações de cotações, o que o faz destoar dos demais índices de países desenvolvidos. Para poder validar as análises prévias feitas, bem como compreender os efeitos comportamentais que mais impactam as oscilações e eficiência dos mercados, a seção seguinte apresenta uma discussão dos índices da econofísica para análise mais aprofundada da série temporal e do *EI* construído na seção de metodologia.

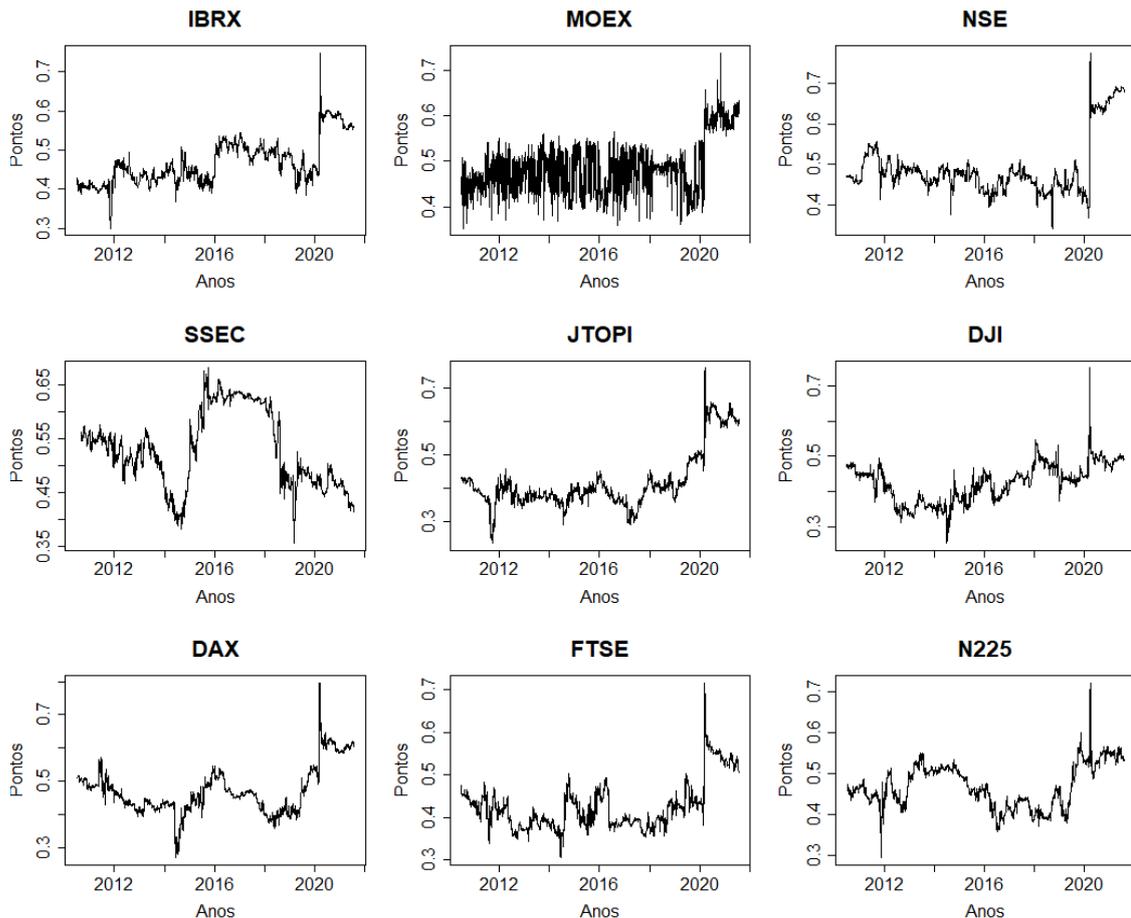
4.2 Análises dos Expoentes de Hurst

Com o objetivo de captar os efeitos de memória de longo prazo, foram calculados os H 's via metodologia LW e GPH. A Figura 14 ilustra as variações da média dos expoentes calculados. A partir dos resultados gráficos, podem-se verificar oscilações da métrica ao longo do tempo, o que corrobora as ideias da HMF sobre o grau de eficiência de um mercado não ser estático.

A partir dos dados das séries temporais da métrica, verifica-se que seus valores oscilaram em média entre 0,7430 e 0,3010, com valores médios em torno de 0,4647. Assim, para os índices analisados, em geral há momentos de manutenção e de reversão de média, porém, tendo em média valores próximos de 0,5, indicando ausência de efeitos expressivos relativos à memória de longo prazo. Esse achado também foi observado em estudos anteriores, tais como Kristoufek e Vosvrda (2014) e Karp e Van Vuuren (2019). Além disso, destaca-se ainda que, salvo o caso Chinês,

os demais índices de mercado apresentam uma similaridade quanto ao comportamento deste índice, sendo esta observação coerente com o padrão único de evolução dos pontos do SSEC conforme observado na Figura 10.

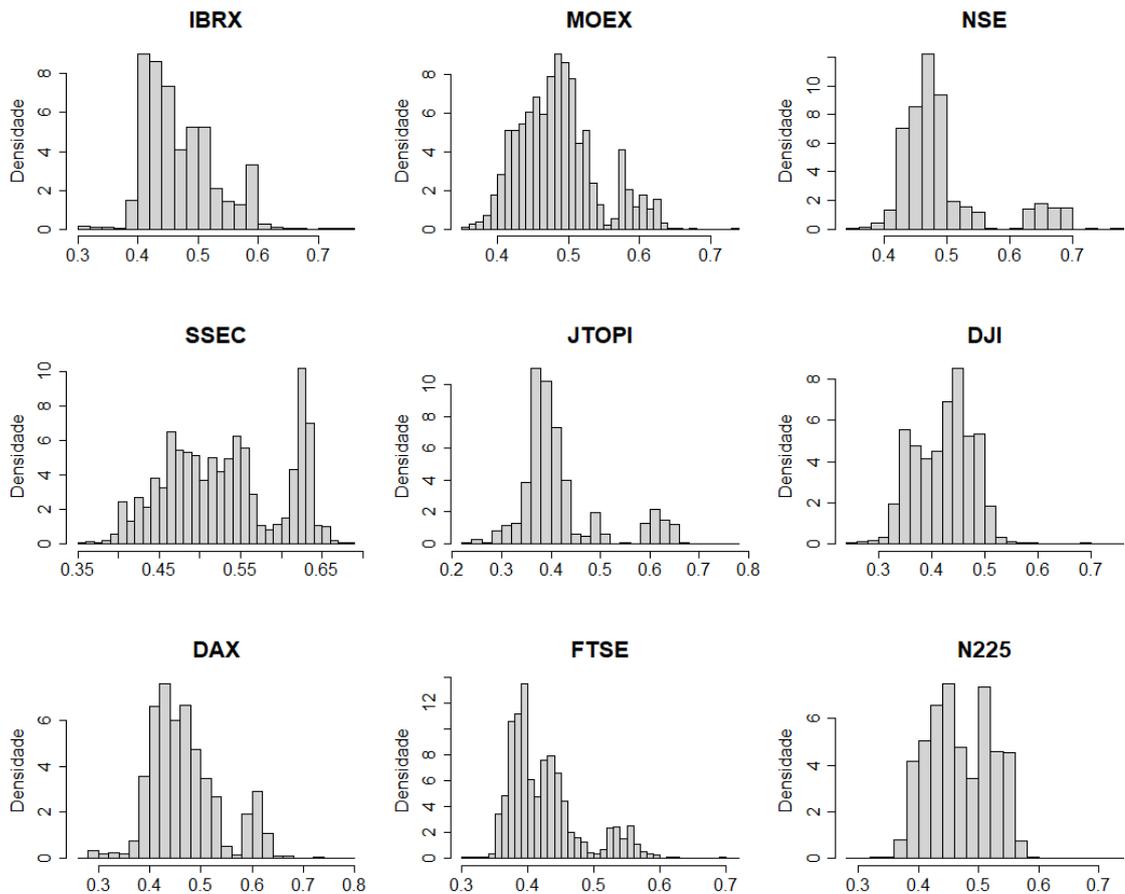
Figura 14 – Média dos Expoentes de Hurst dos Índices de Mercado



Fonte: Elaboração própria.

Para complementar as análises, o Apêndice 1 sintetiza os resultados da média, mediana, desvio padrão e resultados dos testes de raiz unitária de Dickey-Fuller e de normalidade. Além disso, o Apêndice 2 traz o mapa da composição dos $H's$, ao passo que a Figura 15, seus histogramas. Com base nas análises de média e mediana, pode-se verificar uma proximidade entre as duas métricas, o que indica certa simetria na distribuição dos $H's$, embora estas não sigam uma distribuição gaussiana, sendo esta conclusão constatada pelo teste de Shapiro, mas também podendo ser verificada graficamente pela Figura 15.

Figura 15 - Histograma dos Expoentes de Hurst



Fonte: Elaboração própria.

Ademais, os testes de raiz unitária revelaram que, as séries dos H' s do IBRX, MOEX, DJI, DAX, FTSE e N225 são estacionária à significância de 10%, sendo que apenas no caso dos mercados Indiano e Chines que os resultados dos testes apontam para séries não estacionárias. Entretanto, é visível graficamente que em momentos de oscilações bruscas do mercado, como ocorreu devido à pandemia entre 2019 e 2020, há um incremento médio de 25% do valor do H . Além disso, para o caso particular da SSEC, entre 2014 e 2015 houve um aumento do efeito da memória de longo prazo em 38,80% em decorrência da recessão econômica que afetou o mercado chinês e por consequência, seu mercado financeiro. Desse modo, verifica-se que em momentos de crise os mercados tendem a aumentar o grau da manutenção de média de longo prazo, isto é, apresentam tendências positivas quanto à memória de longo prazo.

É possível identificar também que, em média, 77,47% dos expoentes calculados estão entre 0,4 e 0,6, o que corrobora as análises anteriores sobre mediana e média

das distribuições. Porém, no mercado chinês, pode-se verificar que tal porcentagem equivale a penas a cerca de 39,12% dos resultados, apontando assim predominâncias de ineficiências neste mercado quanto á memória de longo prazo. Em geral, salvo caso chinês e americano, cujas porcentagens de $H > 0,6$ é de respectivamente 60,88% e 5,07%, os demais mercados também apresentam maior tendência de manutenção de média de longo, porém a porcentagens de $H > 0,6$ está em próxima de 24,47%. Assim, conclui-se que, salvo o caso do SSEC, que apresentam maior grau de ineficiência, os demais mercados possuem um baixo viés de memória de longo prazo, sobretudo o mercado americano, e quando o viés está presente, há uma tendência para manutenção da média de longo prazo, sendo esta conclusão condizente com o estudo de Karp e Van Vuuren (2019).

Quanto à volatilidade, primeiramente pode-se verificar também a existência de oscilações da sua variação, o que permite categorizar a série como sendo heterocedástica. Além disso, os desvios padrões médios foram 0,0639 aproximadamente. Os índices com volatilidade superior esta média foram o NSE, SSEC, JTOPI e DAX, o que permite concluir estes mercados como os que apresentam maior oscilações quanto á memória de longo prazo, o que os torna atrativos para investidores em busca de arbitragem dada a maior variação do grau de eficiência de mercado nestes países do ponto de vista da HMF.

Sob uma perspectiva comportamental, pode-se relacionar a memória de longo prazo com algumas heurísticas comportamentais. Quando $H > 0,5$, os investidores acreditam que os preços vão seguir os movimentos passados, independentemente do momento *bull* ou *bear* do mercado, similar a uma tendência de *underreaction* às novas informações (BIANCHI; PANTANELLA; PIANSE, 2015).

Por sua vez, com $H < 0,5$, os agentes tendem a crer na reversão dos preços atuais do mercado, havendo relação, por exemplo, com notícias negativas que desestabilizam um ou mais setores da economia, ou ao menos uma empresa específica. Desse modo, de acordo Bianchi *et al.* (2015), pode ocorrer um processo de *overreaction* dos investidores, cuja principal consequência é a de dar mais importância para novas informações e ignorar informações passadas. Essa análise corrobora o estudo de DeBond e Thaler (1985), o qual associa movimentos de *overreaction* com reversões de média de longo prazo.

Em suma, quanto aos efeitos captados pelos $H's$ dos mercados analisados, ressalta-se que em geral estes apresentam um comportamento oscilatório e

estacionário com média próxima de 0,5, indicando ausência de memória de longo prazo nos retornos, o que também foi destacado em estudos anteriores, como o caso de Kristoufek e Vosvrda (2013), o de Kristoufek e Vosvrda (2014) e o de Caporale *et al.* (2016). Nesse sentido, também se pode averiguar que, no curto prazo, as oscilações dos índices contêm efeitos determinísticos de reversão ou tendência da média, mas que, no longo prazo, há uma aleatoriedade nas oscilações dos índices, assim como destacado por Mitra (2012) e Oprean e Tanasescu (2013).

Com base nas considerações feitas por Fama (1992), tendências esporádicas podem ocorrer em um mercado eficiente, porém, estas não se sustentam no longo prazo. Tal afirmação é corroborada pelas análises feitas, de modo que não é possível rejeitar a HEM em sua forma fraca com base nos resultados dos $H's$.

Entretanto, ressalva-se essas análises para o caso do SSEC, cuja métrica de memória de longo prazo não apenas se comportou de forma não estacionária como também mais de 50% dos $H's$ são superiores a 0,6, indicando maior grau de ineficiência na aleatoriedade das variações dos preços neste mercado. Por fim, destacam-se o mercado indiano, sul-africano e alemão para investidores devido ao seu potencial de arbitragem dado o maior grau de oscilação quanto aos efeitos da memória de longo prazo neste países.

4.3 Análises das Dimensões Fractais

Complementando as análises anteriores, foram calculadas as $D's$ a partir das métricas de Genton e Hall-Wood com o objetivo de analisar os efeitos da memória de curto prazo. Tal medida se associa com a percepção dos investidores de que os preços atuais vão seguir a tendência, de alta ou de baixa, existente no mercado no curto prazo. Em um mercado eficiente, espera-se que os investidores não realizem análises tendenciosas, de forma que os preços reflitam a totalidade das informações acerca do ativo, sendo tal fato perceptível quando $D = 1,5$. Quando há presença do efeito tendência de curto prazo sendo incorporada nas precificações, segundo Kristoufek e Vosvrda (2013), pode-se perceber a presença do efeito manada nos agentes, seguindo a tendência caso $D < 1,5$ e indo contra a tendência local, caso contrário.

De acordo com o modelo proposto por Daniel, Hirshleifer e Subramanyam (1997), a presença do viés de *overconficende* e auto atribuição pode ocasionar um

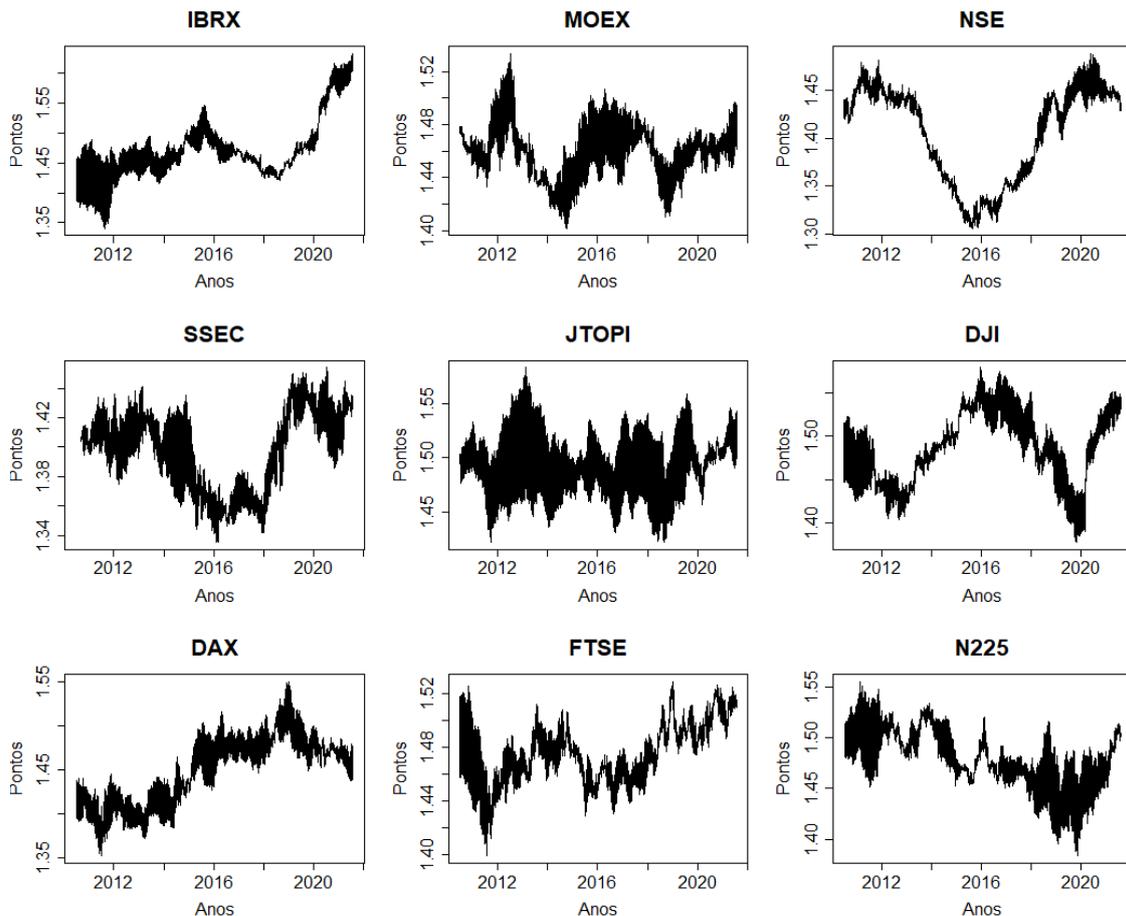
padrão de supervalorização das informações privadas individuais em relação às novas informações públicas, o que ocasiona a manutenção da tendência local dos preços de ativos. Ademais, Chan, Hameed e Tong (2000) destaca que a reversão da média de curto prazo pode ser associada a *overreaction* de novas informação públicas que, porém, não se sustentam no médio e longo prazo.

A Figura 16 ilustra as variações da média das duas métricas ao longo de 2010 até 2021. De forma geral, verifica-se que os resultados das $D's$ variam 1,3306 e 1,6327, com uma mediana em torno de 1,2406. Além disso, de acordo com a Figura 16 e os testes realizados e disponibilizados no Apêndice 3, é possível observar mais uma vez uma aproximação entre a média com a mediana, concluindo, assim, a existência de uma simetria das distribuições das $D's$, embora estas não sejam normalmente distribuídas.

Além disso, de acordo com o teste de raiz unitária, pode-se rejeitar que as séries temporais analisadas são estacionárias, fato este que pode ser observado graficamente também, de modo que uma tendência de redução deste viés é observada a partir de momentos de crise, dada sua aproximação ao valor de 1,5. Na Figura 17 estão dispostos os histogramas das $D's$ calculadas e no Apêndice 4, um mapeamento da concentração das métricas.

Sobre estes pontos, destaca-se que, em média, os resultados entre 1,4 e 1,6 compõem cerca de 86,86% das séries temporais, o que significa que em geral as séries analisadas apresentam baixo viés de efeito manada de curto prazo. Quanto os mercados mais ineficientes de acordo com esta métrica, destacam-se NSE e SSEC, com respectivamente 40,90% e 48,03% das observações com D com desvios maiores de 0,1 do valor esperado de um mercado eficiente pela HMF.

Figura 16 – Média das Dimensões Fractais dos Índices de Mercado

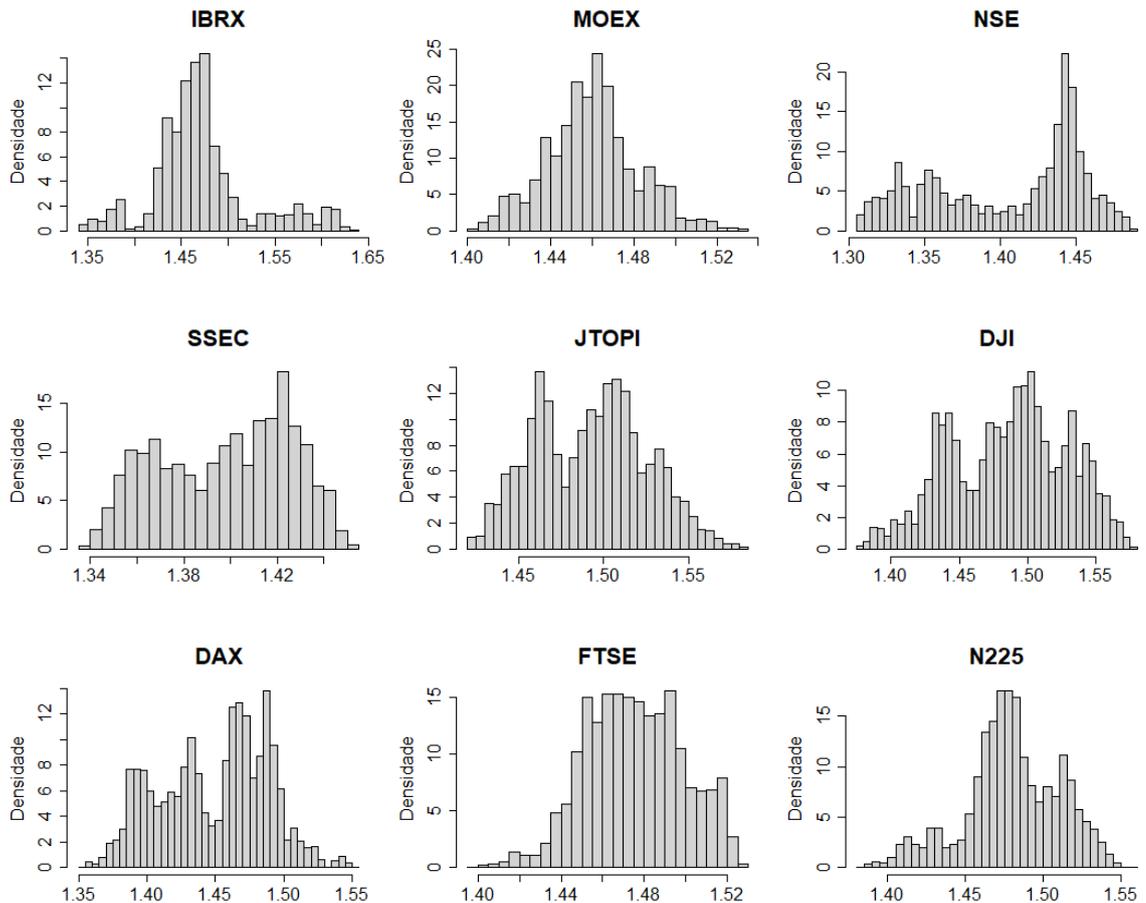


Fonte: Elaboração própria.

Por fim, destaca-se que em geral os desvios estão mais concentrados em valores abaixo de 1,5, indicando que os efeitos de memória de curto prazo se associam com a manutenção de média. Essa conclusão é condizente com estudos anteriores como, por exemplo, os de Kristoufek e Vosvrda (2013) e Karp e Van Vuuren (2019).

Como foi dito anteriormente, é observado que, além de as séries possuírem valores próximos ao esperado em um mercado eficiente, pode-se verificar graficamente que elas em geral apresentam uma tendência de redução destes desvios ao longo dos anos analisados. Assim, embora existam momentos de persistência e antipersistência, a análise da série temporal mostra que existe uma tendência de convergência para o esperado em um mercado eficiente, de forma a corroborar a discussão feita por Fama (1992).

Figura 17 - Histograma das Dimensões Fractais



Fonte: Elaboração própria.

Do ponto de vista de volatilidade, os desvios padrões oscilaram entre 0,0474 e 0,0051, com um valor mediano de 0,0198. Quanto a média dos desvios padrões, pode-se verificar que os índices com menor volatilidade foram NSE, SSEC e FTSE, com desvios de 0,0127, 0,0140 e 0,0145, ao passo que os índices mais voláteis foram o JTOPI, IBRX e DJI, com desvios de 0,0280, 0,0229 e 0,0221. Porém, ao analisar as volatilidades da série temporal como um todo, os índices menos voláteis foram o MOEX, FTSE e SSEC, com desvios de 0,0220, 0,0235 e 0,0281, enquanto que os mais voláteis passam a ser os índices IBRX, NSE e JTOPI, com desvios de 0,0524, 0,0499 e 0,0328.

Além disso, foi possível apurar que as variações desta métrica são menos expressivas que, no caso dos $H's$. Entretanto, as séries temporais das $D's$ forma estatisticamente verificadas como não estacionárias, de forma que, embora possuam desvios padrões menores do que os dos $H's$, estas últimas possuem valores que evoluem no tempo ao invés de oscilarem em torno de uma média

Nesse aspecto, conclui-se sobre esta métrica primeiramente que há uma tendência para valores de $D's < 1,5$, sendo tais conclusões também encontradas por Kristoufek e Vosvrda (2013) e Kristoufek e Vosvrda (2014). Entretanto, a divergência entre os valores das $D's$ com o esperado em um mercado eficiente diminuem o longo do tempo, de forma que os resultados apontam para conclusões que não permitem rejeitar a HEM de Fama (1970) em sua forma fraca, visto que as tendências de curto prazo não se mantêm expressivas ao longo do tempo, corroborando assim o exposto por Fama (1992).

4.4 Análises da Aproximação de Entropia

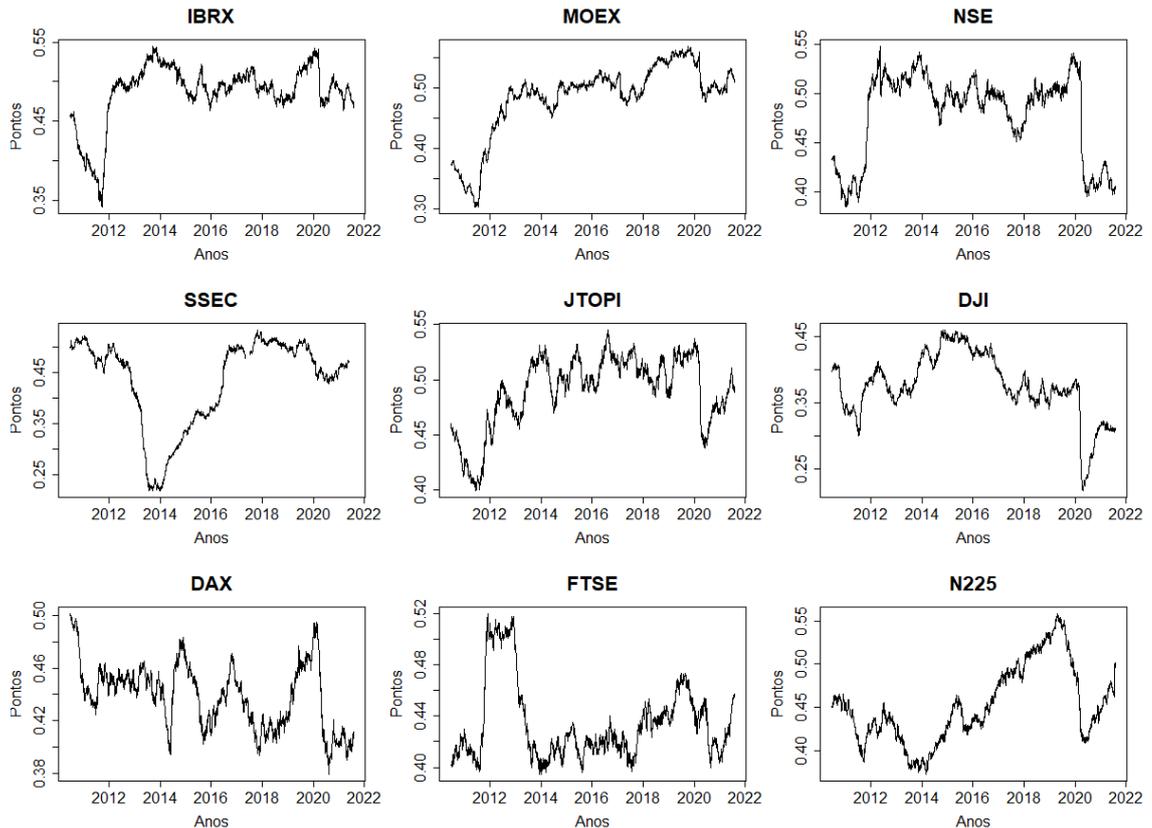
Por fim, o último elemento calculado para a construção do EI foi a AE , métrica que mensura a complexidade do sistema dos mercados financeiros. Do ponto de vista teórico, Hong e Stein (1999), por exemplo, argumentaram que a existência de informações privilegiadas entre *traders* pode comprometer a aleatoriedade dos preços de ativos. Além disso, conforme Hvidkjaer (2006), a heterogeneidade dos agentes impacta a forma de incorporação das informações em modelos de precificação, seja por seus objetivos, padrões de comportamento ou mesmo limitações de recursos. Assim, percebe-se que tal métrica pode também ser associada tanto com a ideia de racionalidade limitada como com o conceito de *frame dependence* utilizado em finanças comportamentais.

A Figura 18 traz os resultados gráficos das métricas calculadas. Conforme se pode observar nos gráficos, os valores das métricas se encontram em média entre os intervalos de 0,05686 e 0,2175, com uma média e mediana global de cerca de 0,4527 e 0,4599. Dessa forma, constata-se a existência de efeitos determinísticos nas séries dos retornos dos índices, o que fere o modelo de passeio aleatório proposto pela HEM. Esse desvio foi detectado em estudos como os de Lahmiri e Bekiros (2020) e Kristoufek e Vosvrda (2014).

Assim como o caso das $D's$, percebe-se um comportamento não estacionário das séries, apresentando momentos de crescimento e decréscimos ao longo dos anos, corroborando o estudo de Delgado-Bonal (2019). Além disso, em momentos de mudanças abrupta nas cotações dos índices, percebe-se uma redução da aleatoriedade das séries que em seguida é corrigida. Assim, conclui-se que o modelo de passeio aleatório proposto pela HEM não é observado nas variações das cotações

dos índices, visto que existem tendências determinísticas relevantes que podem ser utilizados para arbitragem, embora existam momentos em que estes sejam mais ou menos expressivos.

Figura 18 - Aproximações de Entropia dos Índices de Mercado



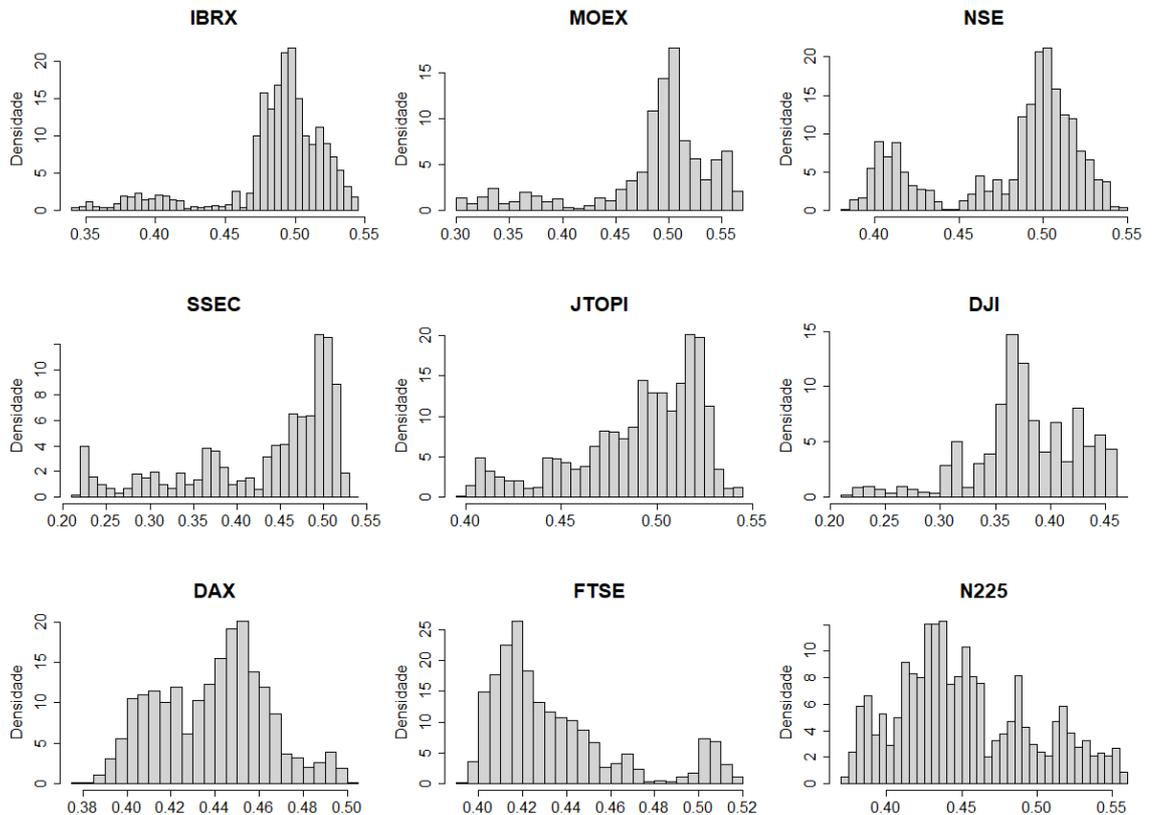
Fonte: Elaboração própria.

Os dados disponíveis no Apêndice 5 e os gráficos da Figura 19 e do Apêndice 6 permitem identificar as mudanças da métrica dentro da janela temporal analisada. Assim como na métrica anterior, esta também apresenta características de não estacionárias de não normalidade de distribuição. Ademais, pode-se verificar que a totalidade da amostra se encontra abaixo do patamar de 0,8, sendo que cerca de 93% da amostra possui concentração dos dados em torno de 0,4 e 0,6, salvo o caso do SSEC e DJI, cujas concentrações se encontram em valores menores ou iguais a 0,5

Assim, destaca-se que este é o indicador que mais se distancia dos valores esperados de um mercado eficiente, o que condiz com o estudo de Kristoufek e Vosvrda (2014). De forma geral, 84,32% dos resultados indicam valores em torno de

0,5, o que reforça a análise de que existe um equilíbrio entre fatores determinísticos e aleatórios nos mercados.

Figura 19 - Histograma das Aproximações de Entropia



Fonte: Elaboração própria.

A análise da volatilidade permite verificar dois pontos importantes. O primeiro deles é que a média dos desvios padrões das $AE's$ foi de 0,0155, sendo o mercado indiano, chinês e americano os que apresentaram desvios superiores à média, sendo estes de 0,0165, 0,0216 e 0,0172, respectivamente. Quanto aos mercados que possuem menores desvios, destacam-se os índices IBRX, com desvio médio de 0,0139, o N225, com desvio médio de 0,0131 e o FTSE, com desvio médio de 0,0127.

Desse modo, pode-se verificar que os mercados estudados apresentam um equilíbrio entre efeitos aleatórios e determinísticos em suas movimentações, o que não é compatível com o esperado em mercados eficientes, no qual seria esperado movimentos de passeio aleatório. Percebe-se que, em momentos de *stress* do mercado, há uma tendência para a redução da aleatoriedade dos retornos, o que implica na redução de eficiência dos mercados, a qual acaba sendo restaurada

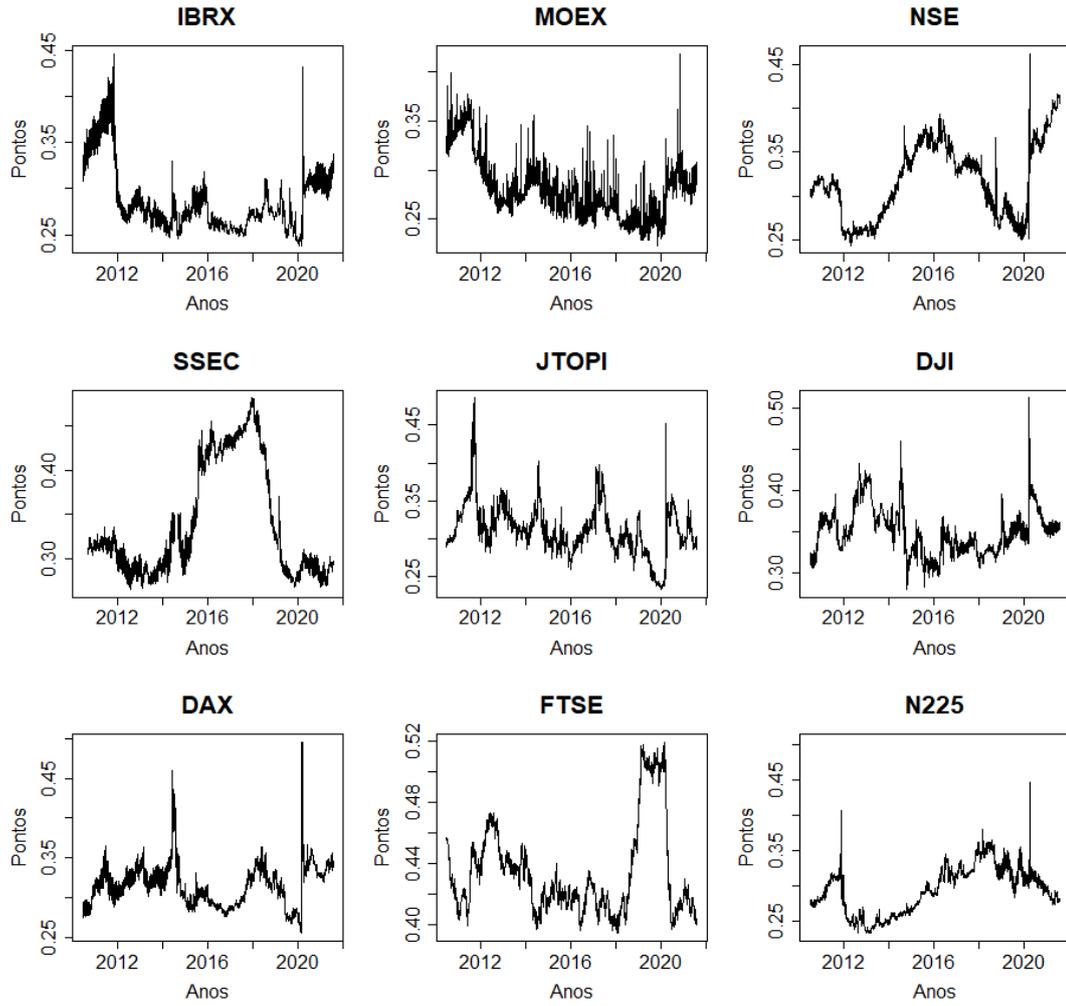
posteriormente. Esta constatação é coerente com estudos passados, tal como o de Lahmiri e Bekiros (2020) e Kapecka (2013).

4.5 Análises dos Índices de Eficiência (EI)

Para finalizar as análises sobre os elementos que compõem o *EI*, foram calculadas as matrizes de correlações dos *H's*, *D's* e *AE's* dos nove mercados analisados. Os resultados estão dispostos na Tabela 2. Com base nos resultados, pode-se verificar a significância das correlações calculadas, porém, no caso do MOEX, JTOPI e DAX, o módulo das correlações foram inferiores a 0,30, indicando baixa relação entre os efeitos fractais nestes mercados. Para os demais casos, ao menos uma das três métricas apresentou correlações superiores, sendo que no caso do NSE e N225 tais correlações superiores a 0,30 foram identificadas mais de uma vez. Desse modo, é possível verificar uma relação entre a memória de curto prazo, memória de longo prazo e entropia, de forma que a entropia e a memória de curto prazo em geral se correlacionam positivamente ao passo que a relação entre entropia e memória de curto prazo, bem como memória de curto e longo prazo tendem a apresentar correlações negativas.

A partir dos indicadores analisados anteriormente, foi possível calcular os *EI's* dos mercados selecionados. A Figura 20 traz os resultados dos índices. A partir dos gráficos, pode-se verificar que os *EI's* oscilaram entre 0,5124 e 0,2228, com uma média de 0,3127 e mediana de 0,3071. Assim, ficam evidentes as oscilações no comportamento da eficiência dos mercados, sendo que em momento nenhum foi constatada plena eficiência de mercado, o que corrobora as análises anteriores da econofísica e da HMF sobre este fenômeno, tais como apresentados em estudos como os de Meg, Fang e Yu (2020), Patil e Rastogi (2020) e Dima, Dima e Ioan (2021).

Com base nestas informações, bem como no gráfico disposto na Figura 21 e no Apêndice 8, pode-se sublinhar que a maior concentração dos *EI's* está entre valores de 0,2 e 0,4, cerca de 98,40% dos índices. Considerando que tal índice oscila entre 0 e 1,1180, percebe-se que existe a predominância de ineficiências de magnitudes entre 17,86% e 35,78%.

Figura 20 - Índices de Eficiência dos Índices de Mercado

Fonte: Elaboração própria.

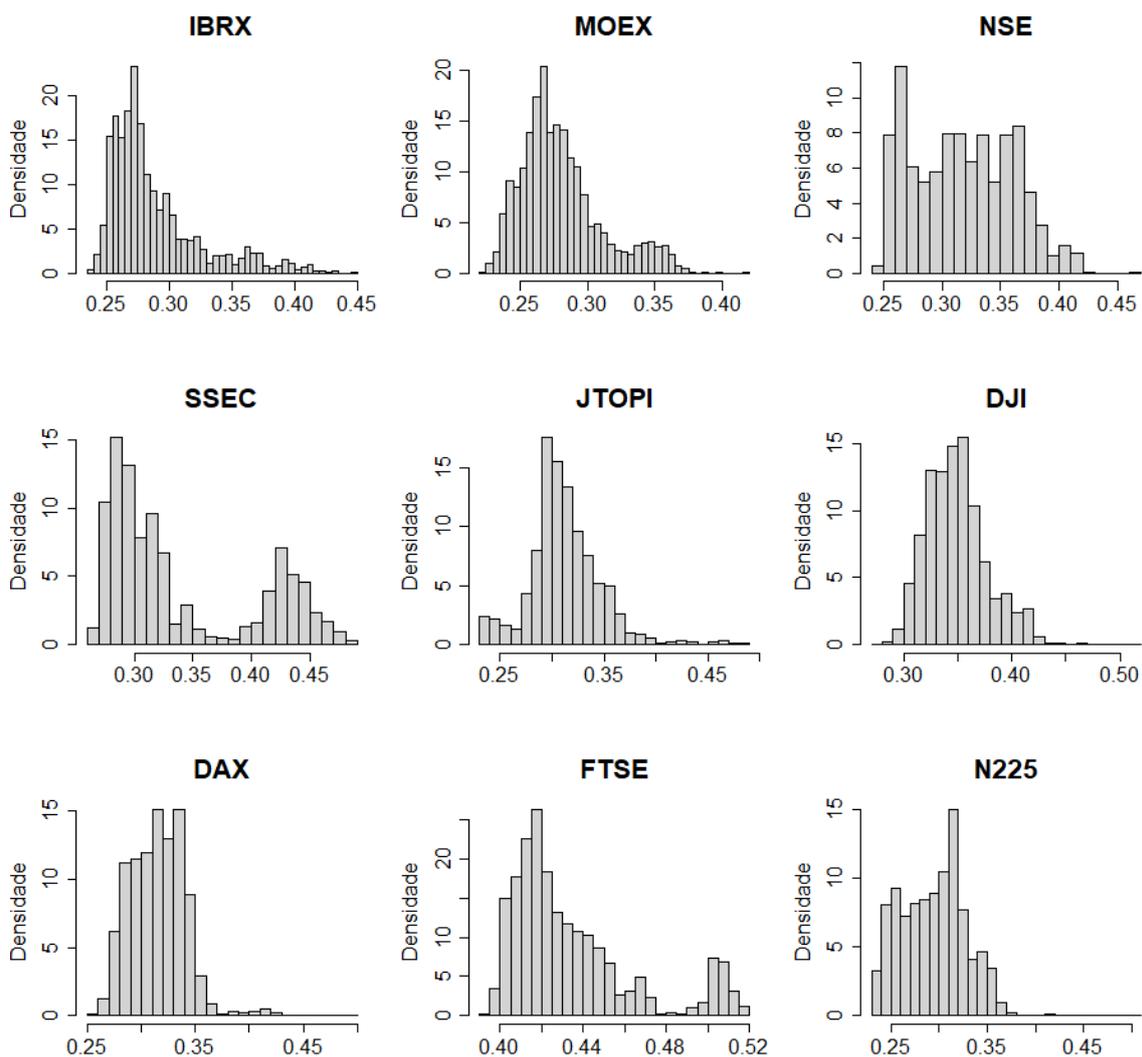
Tabela 2 - Matriz de Correlações dos Componentes do IE

IBRX				MOEX				NSE			
	Exp, Hurst	Dim, Fractal	Aprox, Entropia		Exp, Hurst	Dim, Fractal	Aprox, Entropia		Exp, Hurst	Dim, Fractal	Aprox, Entropia
Exp, Hurst	1			Exp, Hurst	1			Exp, Hurst	1		
Dim, Fractal	0,6207 (41,4513***)	1		Dim, Fractal	0,0336 (1,7612***)	1		Dim, Fractal	0,3947 (22,4907***)	1	
Aprox, Entropia	0,2411 (12,6646***)	0,2932 (15,6331***)	1	Aprox, Entropia	0,1161 (5,9569***)	-0,1175 (-6,0304***)	1	Aprox, Entropia	-0,6384 (-42,2866***)	-0,3252 (-17,5331***)	1
SSEC				JTOPI				DJI			
	Exp, Hurst	Dim, Fractal	Aprox, Entropia		Exp, Hurst	Dim, Fractal	Aprox, Entropia		Exp, Hurst	Dim, Fractal	Aprox, Entropia
Exp, Hurst	1			Exp, Hurst	1			Exp, Hurst	1		
Dim, Fractal	-0,6727 (-47,1772***)	1		Dim, Fractal	0,188 (10,0221***)	1		Dim, Fractal	0,123 (6,4868***)	1	
Aprox, Entropia	0,258 (13,6147***)	0,0534 (2,7286***)	1	Aprox, Entropia	-0,0981 (-5,0243***)	-0,0593 (-3,0274***)	1	Aprox, Entropia	-0,5761 (-35,9343***)	0,2372 (12,4478***)	1
DAX				FTSE				N225			
	Exp, Hurst	Dim, Fractal	Aprox, Entropia		Exp, Hurst	Dim, Fractal	Aprox, Entropia		Exp, Hurst	Dim, Fractal	Aprox, Entropia
Exp, Hurst	1			Exp, Hurst	1			Exp, Hurst	1		
Dim, Fractal	0,0968 (5,0916***)	1		Dim, Fractal	0,4705 (27,9136***)	1		Dim, Fractal	0,1025 (5,387***)	1	
Aprox, Entropia	-0,1951 (-10,1386***)	-0,292 (-15,5641***)	1	Aprox, Entropia	-0,1114 (-5,7145***)	-0,0485 (-2,4779***)	1	Aprox, Entropia	-0,3744 (-20,5871***)	-0,578 (-36,112***)	1

Fonte: Elaboração própria.

Entretanto, é necessário destacar mais uma vez o caso chinês. Para a série de *EI* do SSEC, seus valores se concentram cerca de 39,92% no intervalo 0,2 e 0,3, 32,53% entre 0,3 e 0,4 e 27,55% entre 0,4 e 0,5, sendo este o índice de mercado com menor grau de eficiência. Quanto aos demais índices, o IBRX, MOEX e N225 apresentam maior concentração de *EI's* < 0,3.

Figura 21 - Distribuição dos Índices de Eficiência



Fonte: Elaboração própria.

Ademais, ressalta-se que nenhum dos mercados estudados se comportou plenamente eficiente ao longo dos anos, como também sensibilidade desta métrica para mudanças abruptas nas cotações dos índices, de forma que em

momentos, como por exemplo, na crise do COVID-19, é visível um comportamento de incremento do *EI*, sinalizando perda de eficiência. O comportamento oscilatório e os valores dos índices que indicam ineficiência do mercado também foram encontrados em estudos passados, tais como os de Kristoufek e Vosvrda (2014) e Kapecka (2013).

Além disso, embora não muito expressivo, é possível identificar que, em geral, os países do BRICS uma maior concentração de valores de $EI < 0,2$. Dessa forma, pode-se considerar que os países emergentes possuem menores desvios do esperado de um mercado eficiente que os mercados desenvolvidos. Esta conclusão vai de encontro com estudos anteriores, como por exemplo o de Kristoufek e Vosvrda (2013) e Kristoufek e Vosvrda (2014). Entretanto, ressaltam-se dois pontos: primeiramente, estudos anteriores têm tido pouco enfoque em análises longitudinais; em segundo lugar, um maior grau de ineficiência em países desenvolvidos pode estar relacionado ao fato de estes serem alvos de investidores do mundo todo, o que aumenta a probabilidade tanto da existência de assimetria informacional como também de estratégias especulativas e mal elaboradas existirem nestes mercados.

Ademais, é interessante ressaltar que para MOEX, JTOPI, DJI, DAX e N225 as séries temporais dos *EI's* foram caracterizadas como estacionárias. Desse modo, para estes países, pode-se verificar que o grau de eficiência, apesar de oscilar, apresenta uma tendência ao redor de um valor próximo de 0,3. Já para os demais mercados, a não estacionariedade das séries permite concluir mudanças mais acentuadas quanto ao grau de eficiência ao longo dos anos.

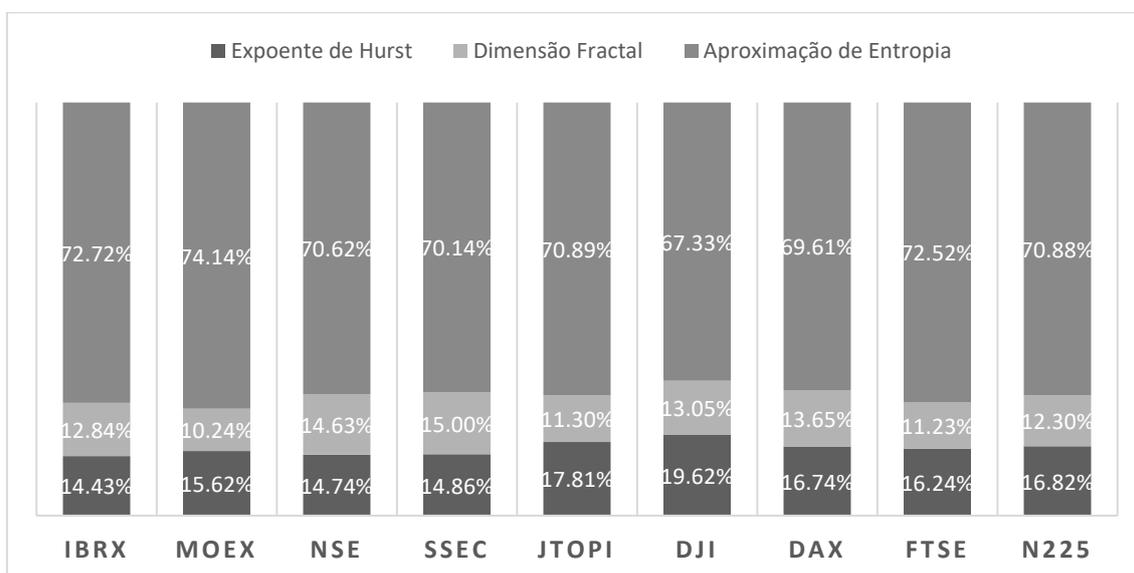
Tendo como referência as análises anteriores, observa-se que, entre os elementos que compõem o *EI*, a *AE* é o indicador que apresenta maior distorção ao esperado de um mercado eficiente. Nesse sentido, este seria o principal responsável pelo valor do *EI*, assim como foi observado no estudo de Kristoufek e Vosvrda (2014). Para ilustrar esse fato, tendo como base as medianas das diferenças dos valores reais e valores em eficiência dos *H's*, *D's* e *AE's*, está disposto na Figura 22 a composição da mediana dos *EI's*.

A partir do gráfico, atesta-se que cerca de 70% da ineficiência de mercado é ocasionada devido à presença de elementos determinísticos nas variações dos preços. Desse modo, não apenas é possível questionar a HEM de Fama (1970)

em sua forma fraca, como também destacar a validação de análises cujo enfoque é modelar preços e retornos de ativos para fins de arbitragem. Ademais, percebe-se que não há discrepância na composição do índice para países do BRICS e países desenvolvidos, indicando que os efeitos analisados são encontrados aproximadamente em mesmo grau em ambos os grupos analisados.

Com base nas informações sobre as estatísticas descritivas básicas das séries temporais e testes de normalidade e raiz unitária disponíveis no Apêndice 7, verifica-se a estacionariedade das séries, simetria entre as distribuições e não normalidade das mesmas. Além disso, a análise das volatilidades das séries permite verificar que a média dos desvios padrões oscilou entre cerca de 0,1097 e 0,0816, com uma mediana de 0,00853. Nesse sentido, o SSEC é o índice de mercado com menor variação de $EI's$, ao passo que JTOPI é o índice com maior variação.

Figura 22 - Composição dos Índices de Eficiência com Base na Mediana

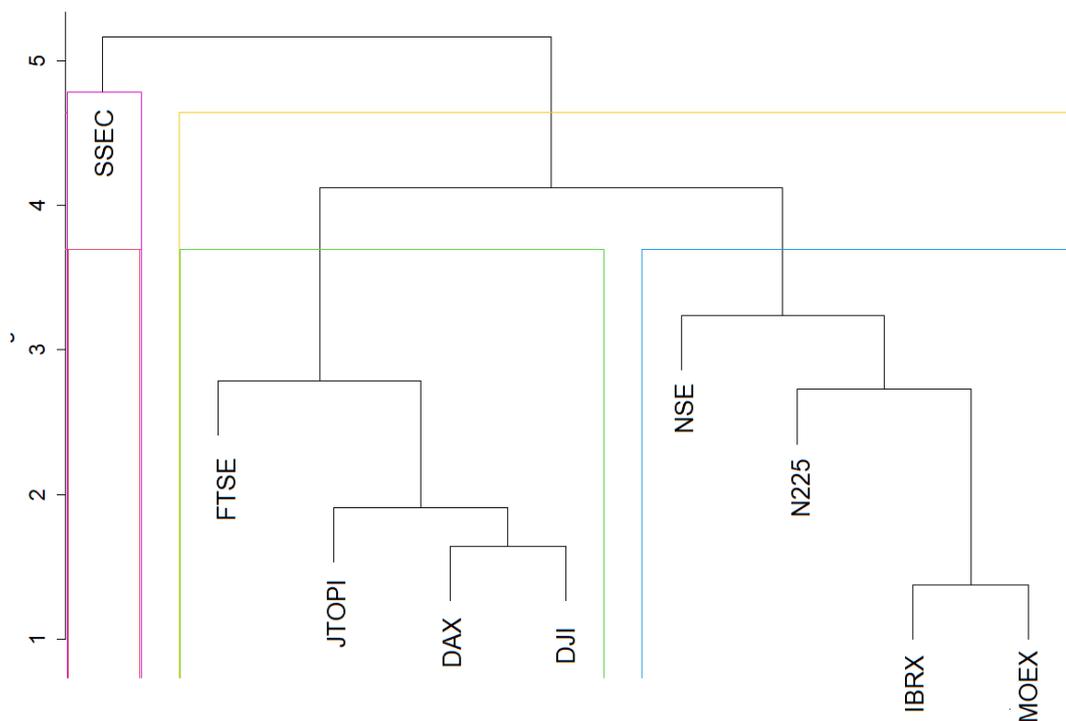


Fonte: Elaboração própria.

Para verificar a significância das variações dos $EI's$ obtidos para cada mercado, foram realizados testes para avaliar a significância de diferenças de variâncias e médias dos índices Teste F e Teste de Wilcoxon, sendo os resultados disponíveis no Apêndice 9. A partir dos testes, é possível comprovar que, a um nível de significância de 10%, tanto as médias quanto as variâncias

de cada distribuições são distintas de forma geral, de modo que não se pode identificar similaridades na distribuição dos $EI's$. Para complementar esta análise, foi gerada uma análise de *cluster* via distância euclidiana, a qual é disposta na Figura 23.

Figura 23 - Análise de Cluster dos Índices de Eficiência



Fonte: Elaboração própria.

A partir desta análise, verifica-se primeiramente uma similaridade quanto à eficiência de mercado analisada via HMF entre o mercado brasileiro, russo, indiano e japonês. Quanto aos três primeiros integrantes, por pertencerem ao grupo BRICS, a semelhança quanto ao comportamento da eficiência já era esperada. Porém a inclusão do N225 neste grupo indica que, mesmo este sendo um país desenvolvido, a maturidade e eficiência de seu mercado financeiro ainda não é semelhante o bastante dos demais países desenvolvidos analisados.

Esta conclusão vai contra as análises de Kristoufek e Vosvrda (2013) e Kristoufek e Vosvrda (2013), porém, tais trabalhos realiza uma análise fractal para um único período e a partir de janelas temporais, o que reforça mais uma vez a necessidade de estudos que consideram análises longitudinais sobre a

temática. Além disso, estudos como o de Rizvi e Arshad (2017) destaca que existe uma forte dependência da economia japonesa com os países ocidentais, sobretudo o americano. Dessa forma, essa dependência econômica acaba por impactar no mercado de captais, sendo este efeito similar ao que pode ser observado em países emergentes.

Quanto ao segundo cluster é formado basicamente pelos demais países desenvolvidos, isto é, EUA, Alemanha e Inglaterra, com a inclusão do índice de mercado da África do Sul. O agrupamento dos três primeiros mercados é condizente ao esperado, visto que correspondem ao grupo de países desenvolvidos. Quanto à inclusão do JTOPI, de acordo com o trabalho de Doorasamy e Sarpong (2018), o mercado de capitais da África do Sul teria um comportamento próximo ao do americano, em concomitância em ser menos arriscado que o de países emergentes. Dessa forma, pode-se verificar que os resultados do agrupamento confirmam essa aproximação com mercados desenvolvidos.

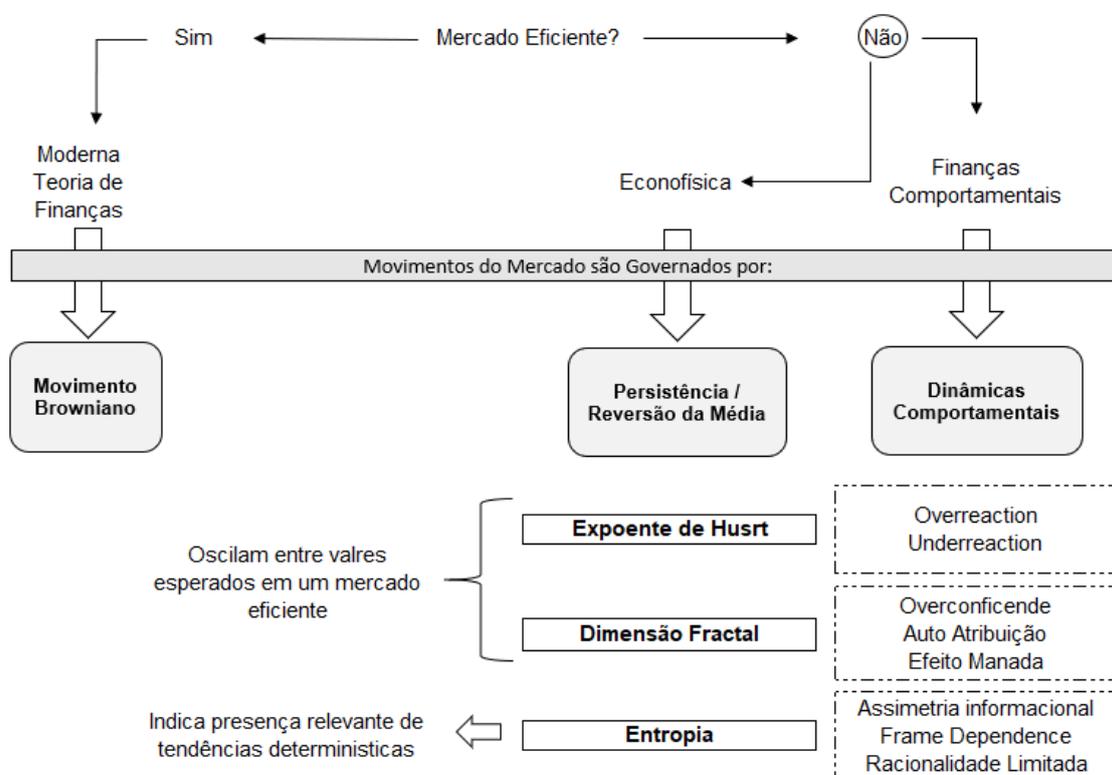
Por fim, é possível verificar que o mercado chinês apresentaria um comportamento único dentre os índices de mercado analisados. Essa constatação corrobora as análises anteriores sobre H , D e AE relativo ao SSEC. Inclusive, reduzindo o número de grupos formados de dois para três, a falta de similaridade do comportamento do EI chinês é mantido. Dessa forma, é constatada a validade de estudos que tenham seu enfoque na China, tais como o Meg, Fang e Yu (2020).

Para ilustrar e sintetizar as principais conclusões das análises realizadas, a Figura 24 retoma a Figura 3 introduzindo as principais conclusões. Inicialmente, foram identificadas ineficiências no comportamento dos mercados analisados quanto á memória de curto e longo prazo, porém, estes estavam em geral não muito expressivas, o que corroboraria com a HEM segundo Fama (1992). Entretanto, devido à presença de elementos não aleatórios nas séries temporais dos retornos dos índices, a HEM em sua forma fraca não pode ser corroborada de acordo com as análises feitas, ao passo que a HMF se revelou útil para descrever os movimentos dos índices de mercado, atingindo assim, o primeiro objetivo específico de pesquisa proposto.

No que tange ao segundo objetivo específico, destaca-se que, entre as métricas que compunham o EI , a AE foi a principal responsável por essa

ineficiência. Dessa forma, efeitos determinísticos nos retornos dos índices analisados acabam por corroer a eficiência. Quanto à memória de curto e de longo prazo, estas corroem em cerca de 16% e 12% em média a eficiência dos mercados. Além disso, pode-se verificar que os desvios dessas métricas tendem a se acentuar no curto prazo, mas não no longo prazo, refletindo que o efeito manada, local ou global, não se mantém no longo prazo, sendo tal fato observado anteriormente por Mitra (2012), Oprean e Tanasescu (2013), Kristoufek e Vosvrda (2014), Delgado-Bonal (2019).

Figura 24 - Síntese das Principais Conclusões do Estudo



Fonte: Elaboração própria.

Além disso, o grau de eficiência se mostrou como sendo uma série temporal que se altera ao longo dos anos. Essa constatação é esperada pela HMF, o que reforça mais uma vez sua validação para explicar os movimentos dos mercados acionários analisados. Não obstante, tais oscilações quanto ao grau de eficiência também são esperadas de acordo com a corrente comportamental, em que os agentes e, por consequência, o mercado são tidos

como sendo naturalmente ineficientes, uma vez que, ao longo do tempo, o grau de eficiência dos mercados aumenta ou diminui de acordo com a magnitude dos vieses comportamentais que os agentes possuem. Tal perspectiva é condizente com as conclusões do estudo de Patil e Rastogi (2020) e Delgad-Bonal (2019).

Por fim, quanto ao terceiro objetivo específico, as análises revelam que, pode-se agrupar as séries temporais dos *EI's* em três *clusters*: um composto pelo Brasil, Rússia, Índia e Japão, sendo este o grupo de países cujas economias dependem da economia global, sobretudo da americana, e essa dependência pode ser refletida no mercado financeiro; um segundo composto por EUA, Alemanha, Inglaterra e África do Sul, países cujos mercados apresentam em geral menor risco; e por fim, o terceiro grupo formado apenas pela China, país em que tanto o índice de mercado quanto as séries temporais das métricas fractais analisadas apresentam características distintas dos outros dois *clusters*.

De acordo com as teorias financeiras de arbitragem, essas ineficiências acabam por gerar janelas de oportunidades para ganhos anormais, que, à medida que são detectadas e aproveitadas por diversos agentes do mercado acionário, acabam por deixarem de serem relevantes, o que implica redução de movimentos no mercado voltado para aquela estratégia, que, por sua vez, acaba por aumentar a aleatoriedade do mercado. Tal conclusão é corroborada pelas análises de Dima, Dima e Ioan (2021), Balladares et al. (2021) e Sánchez-Granero et al. (2020), apontando que a existência de maior grau de ineficiência possibilita o uso de análises técnicas e fundamentalistas para obtenção de retornos anormais.

Na análise empírica realizada, a existência de elementos determinísticos é responsável pelo maior grau de ineficiência, de forma que tais tendências possam ser modeladas de forma a se obter uma previsão mais precisa para os preços futuros dos ativos. Para isso, podem-se incorporar elementos fractais em modelos autorregressivos (ARMA-GARCH), por exemplo, para previsões mais precisas dos retornos com base em momentos do mercado e seu grau de ineficiência, o que possibilitaria ganhos por arbitragem via diferença do preço esperado pelo mercado e o esperado pelo agente. Ressalta-se ainda que tal ideia já é aplicada em alguns modelos financeiros, como, por exemplo, o desenvolvido por Black e Litterman (1990), o que reforça a validade dessa estratégia de investimento e alocação de ativos.

Além disso, a teoria comportamental se mostrou potencialmente coerente para explicar parte dos resultados obtidos no presente estudo. No Quadro 4 são sumarizados estudos que alinham os efeitos fractais com a vertente comportamental. Assim sendo, sublinha-se o potencial apontando que o uso complementar das duas correntes teóricas não só é possível como também pode abrir espaço para trabalhos mais robustos e que consigam traduzir e expressar melhor a realidade do mercado financeiro.

Quadro 4 – Potenciais Relações entre Finanças Comportamentais e Análises Fractais Realizadas

Expoente de Hurst		
H<0,5	H=0,5	H>0,5
Processo de reversão da média de longo prazo, a qual pode ser associada com processo de <i>overreaction</i> de novas informações, conforme Bianchi <i>et al.</i> (2015) e De Bond e Thaler (1985)	Comportamento aleatório segundo a HEM de Fama (1970) em sua forma fraca	Processo de manutenção da média de longo prazo, a qual pode ser associada com processo de <i>underreaction</i> de novas informações, conforme Bianchi <i>et al.</i> (2015) e De Bond e Thaler (1985)
Dimensão Fractal		
D<1,5	D=1,5	D>1,5
Processo de manutenção de tendência de curto prazo, que segundo Daniel <i>et al.</i> (1997) pode ser associada à presença do viés de <i>overconficende</i> e auto atribuição.	Comportamento aleatório segundo a HEM de Fama (1970) em sua forma fraca	Processo de reversão de tendência de curto prazo, que segundo Chan <i>et al.</i> (2000), pode ser associada à <i>overreaction</i> de novas informação públicas que, porém, não se sustentam no médio e longo prazo.
Entropia		
AE=0	AE=1	
Existência de assimetria informacional informações privilegiadas e frame dependente segundo estudos como os de Hong e Stein (1999) e Hvidkjaer (2006)	Comportamento aleatório segundo a HEM de Fama (1970) em sua forma fraca	

Fonte: Elaboração própria.

Destaca-se, por fim, que este estudo corrobora as análises de Schinckus (2011) acerca da validação da aplicabilidade das modelagens físicas para a complementação da teoria financeira. Desse modo, a não observância da HEM em sua forma fraca em concomitância com a adequação dos princípios da HMF ressalta a necessidade de estudos e trabalhos práticos levarem em consideração a realidade das propriedades das séries temporais em suas elaborações, sobretudo abandonando o pressuposto de equilíbrio.

5 CONCLUSÃO

Desde meados do século XX, os estudos em finanças passaram a ter um enfoque positivista mais voltado para a construção de uma teoria robusta para explicar os fenômenos no mercado financeiro. Nesse contexto, surge a moderna teoria de finanças, que tem como pilar principal para muitas de suas modelagens a existência de um mercado eficiente, a qual foi sistematizada e formalizada por Fama (1970).

Entretanto, estudos mais recentes verificaram que muitos fenômenos do mercado violavam os pressupostos da HEM, o que abriu espaço para teorias concorrentes surgirem e passarem a analisar o mercado sob uma perspectiva que desconsidera a eficiência, entre elas as finanças comportamentais, cujas análises se baseiam na existência de falhas e limitação acerca da racionalidade dos agentes; e a econofísica, corrente que utiliza modelagens da física para analisar empiricamente os dados financeiros e identificar conclusões sem uma teoria *a priori*.

O presente trabalho teve como objetivo principal analisar a eficiência de mercado de países emergentes e comparar os resultados com os mercados de países desenvolvidos. Para isso, foram utilizadas métricas da econofísica para identificação de memória de longo prazo, memória de curto prazo e complexidade das séries temporais.

Primeiramente, foi identificada a existência de divergências entre os valores das três métricas analisadas com o esperado de mercados eficientes, sobretudo no que tange à aleatoriedade dos preços. Dessa forma, a utilização de uma distribuição puramente aleatória se mostrou inadequada para explicar o comportamento dos retornos dos mercados analisados. Tal constatação reforçou a validade da utilização da HMF como alternativa para analisar o comportamento dos mercados.

Além disso, através de resultados de trabalhos anteriores, é possível identificar potenciais conexões entre os resultados do estudo e as teorias comportamentais, tais como existência de assimetria de informação, racionalidade limitada, *frame dependence* e heurísticas comportamentais. Portanto, o presente trabalho identifica a capacidade potencial de explicação teórica a partir das vertentes comportamentais para complementar ou mesmo

fundamentar as análises empíricas realizadas a partir das métricas da econofísica.

Primeiramente, foi identificada a presença de ineficiência de mercado em todos os nove índices analisados. Embora a presença de memória de longo e curto prazo não mantivessem a longo do tempo, o que resulta na impossibilidade de rejeitar a HEM em sua forma fraca, a presença de efeitos não aleatórios nos preços de forma expressiva permite rejeitar o pressuposto de aleatoriedade plena dos retornos defendida por esta teoria.

Além disso, foi identificado que os resultados quanto ao comportamento da eficiência de mercado de acordo com as análises fractais poderiam ser divididos em dois grupos. O primeiro é composto pelo IBRX, NSE, MOEX e N225, índices de mercados de países fortemente impactados pelo contexto internacional, sobretudo o americano. O segundo, composto pelo DJI, DAX, FTSE e JTPI, isto é, índices de países cujas economias são mais estáveis. E por fim, o último grupo formado apenas pelo índice de mercado Chinês, o qual apresenta um padrão de comportamento único dentre os nove índices analisados.

Dessa forma, o presente estudo conclui que a existência de ineficiências de mercado, sobretudo no que tange à aleatoriedade dos retornos, não se restringe ao grupo de países emergentes, o que reforça a necessidade de estudos e trabalhos empíricos não se limitarem apenas na adoção da HEM em suas análises, para que seus resultados possuam menor distorção com a realidade. Não obstante, a existência das ineficiências detectadas a partir das propriedades fractais indica também a existência de oportunidades de arbitragem, o que reforça, assim, estudos que tangenciam tal temática e a validação da HMF.

Assim como qualquer estudo, este trabalho apresenta algumas limitações. Primeiramente, foram utilizados dados diários, o que limita a potencial captação de efeitos da ineficiência de forma intradiária. Além disso, foram utilizados índices de mercados como *proxies* dos mercados acionários dos países emergentes e desenvolvidos, de forma que apenas uma série temporal foi utilizada para sinalizar a eficiência de cada um dos mercados. Por fim, foram apontados alguns efeitos comportamentais como potenciais justificativas teóricas para os resultados empíricos obtidos. Todavia, nenhum teste formal foi

realizado para comprovar as hipóteses levantadas, o que abre margem para novas discussões sobre a temática em estudos futuros.

Como sugestão para estudos posteriores, sugere-se, portanto, realizar uma replicação do estudo utilizando tanto dados intradiários para a identificação de suas propriedades fractais, como também analisar conjuntos de ativos de diversos países ao invés de utilizar índices de mercado para evitar distorções quanto ao real nível de ineficiência dos mercados. Além disso, são necessários testes e análises formais entre os resultados das métricas fractais e as métricas comportamentais para que se possam formalizar as relações entre ambas. Portanto, é interessante que estudos posteriores realizem tais análises para que seja possível realizar avanços nas teorias financeiras e que as finanças comportamentais possam ser vistas como complementação teórica *a posteriori* para as análises da econofísica.

REFERÊNCIAS

AKGIRAY, V.; BOOTH, G. G. The stable-law model of stock returns. **Journal of Business & Economic Statistics**, v. 6, n. 1, p. 51–57, 1988.

AL NASSER, O. M.; HAJILEE, M. Integration of emerging stock markets with global stock markets. **Research in International Business and Finance**, v. 36, p. 1–12, 2016.

ALCANTARA, J. C. G. O modelo de avaliação de ativos (capital asset pricing model): aplicações. **Revista Administração de Empresas**, v. 20, n. 3, p. 31–41, Set. 1980.

ALESSIO, E.; CARBONE, A.; CASTELLI, G.; FRAPPIETRO, V. Second-order moving average and scaling of stochastic time series. **The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems**, v. 27, n. 2, p. 197–200, 2002.

BABALOS, V.; BALCILAR, M.; GUPTA, R. Herding behavior in real estate markets: novel evidence from a Markov-switching model. **Journal of Behavioral and Experimental Finance**, v. 8, n. 1, p. 40–43, 2015.

BACHELIER, L. Théorie de la spéculation. In: **Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure**. 1900. p. 21–86.

BACKHOUSE, R. E.; MORGAN, M. S. Introduction: is data mining a methodological problem? **Journal of Economic Methodology**, v. 7, n. 2, p. 171–181, 2000.

BACRY, E.; DELOUR, J.; MUZY, J. F. Multifractal random walk. **Physical Review E**, v. 64, n. 2, p. 026103, 2001.

BALLADARES, K. RAMOS-REQUENA, J. P.; TRINIDAD-SEGOVIA, J. E.; SÁNCHEZ-GRANERO, M. A. Statistical Arbitrage in Emerging Markets: A Global Test of Efficiency. **Mathematics**, v. 9, n. 2, p. 179, 2021.

BANERJEE, A. V. A simple model of herd behavior. **The Quarterly Journal of Economics**, v. 107, n. 3, p. 797–817, 1992.

BARABÁSI, A. L.; SZÉPFALUSY, P.; VICSEK, T. (1991). Multifractal spectra of multi-affine functions. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 178, n. 1, p. 17–28, 1991.

BARBERIS, N.; THALER, R. A survey of behavioral finance. **Handbook of the Economics of Finance**, v. 1, p. 1053–1128, 2003.

BARBOSA, L. M.; DA SILVA, R. S. R. Sobre pensamento computacional na construção de um Triângulo de Sierpinski com o GeoGebra. **Revista Pesquisa e Debate em Educação**, v. 9, n. 1, p. 537–559, 2019.

BARUNIK, J.; KRISTOUFEK, L. On Hurst exponent estimation under heavy-tailed distributions. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 389, n. 18, p. 3844–3855, 2010.

BAZERMAN, M. H.; MOORE, D. A. **Judgment in managerial decision making**. New York: Wiley, 1994.

BERAN, Jan. **Statistics for long-memory processes**. New York: Chapman & Hall/CRC, 1994.

BERNOULLI, D. Exposition of a new theory on the measurement of risk. **Econometrica**, v. 22, n. 1, p. 22–36, 1954.

BERNSTEIN, P. L. **Desafio aos deuses: a fascinante história do risco**. Gulf Professional Publishing, 1997.

BHUYAN, R.; ROBBANI, M. G.; TALUKDAR, B.; JAIN, A. Information transmission and dynamics of stock price movements: An empirical analysis of BRICS and US stock markets. **International Review of Economics & Finance**, v. 46, p. 180–195, 2016.

BIANCHI, S.; PANTANELLA, A.; PIANESE, A. Efficient markets and behavioral finance: A comprehensive multifractional model. **Advances in Complex Systems**, v. 18, n. 01n02, p. 1550001, 2015.

BIKHCHANDANI, S.; HIRSHLEIFER, D.; WELCH, I. A theory of fads, fashion, custom, and cultural change as informational cascades. **Journal of Political Economy**, v. 100, n. 5, p. 992–1026, 1992.

BIKHCHANDANI, S.; SHARMA, S. Herd behavior in financial markets. **IMF Staff Papers**, v. 47, n. 3, p. 279–310, 2000.

BIRD, G.; DU, W.; WILLETT, T. Behavioral finance and efficient markets: what does the Euro crisis tell us? **Open Economies Review**, v. 28, n. 2, p. 273–295, 2017.

BLACK, F.; LITTERMAN, R. Asset allocation: combining investor views with market equilibrium. **Goldman Sachs Fixed Income Research**, v. 115, 1990.

BLATTBERG, R. C.; GONEDES, N. J. A comparison of the stable and student distributions as statistical models for stock prices. In: ALLENBY, G. M. **Perspectives on promotion and database marketing: The collected works of Robert C Blattberg**. World Scientific: Singapore, 2010. p. 25–61.

BRANDOUY, O. **Complexité et phénomènes critiques en finance**. 2005. In: BOURGHELLE, D.; BRANDOUY, O.; GILLET, R.; ORLÉAN, A. *Croyances, représentations collectives et conventions en finance* Paris: Recherche en Gestion. 2005.

CAJUEIRO, D. O.; TABAK, B. M. Ranking efficiency for emerging markets. **Chaos, Solitons & Fractals**, v. 22, n. 2, p. 349–352, 2004.

CALVET, L. E.; FISHER, A. J. Extreme risk and fractal regularity in finance. **Contemporary Mathematics**, v. 601, p. 65–94, 2013.

CALVET, L.; FISHER, A. Multifractality in asset returns: theory and evidence. **Review of Economics and Statistics**, v. 84, n. 3, p. 381–406, 2002.

CALVET, L.E.; FISHER, A. **Multifractal volatility: theory, forecasting, and pricing**. Amsterdam: Academic Press, 2008

CAPORALE, G. M.; GIL-ALANA, L.; PLASTUN, A.; MAKARENKO, I. Long memory in the Ukrainian stock market and financial crises. **Journal of Economics and Finance**, v. 40, n. 2, p. 235–257, 2016.

CHAN, G.; HALL, P.; POSKITT, D. S. Periodogram-based estimators of fractal properties. **The Annals of Statistics**, p. 1684–1711, 1995.

CHAN, K.; HAMEED, A.; TONG, W. Profitability of momentum strategies in the international equity markets. *Journal of financial and quantitative analysis*, v. 35, n. 2, p. 153-172, 2000.

CHANG, E. C.; CHENG, J. W.; KHORANA, A. An examination of herd behavior in equity markets: An international perspective. **Journal of Banking & Finance**, v. 24, n. 10, p. 1651–1679, 2000.

COUILLARD, M.; DAVISON, M. A comment on measuring the Hurst exponent of financial time series. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 348, p. 404–418, 2005.

DACOROGNA, M. M.; MÜLLER, U. A.; NAGLER, R. J.; OLSEN, R. B.; PICTET, O. V. A geographical model for the daily and weekly seasonal volatility in the foreign exchange market. **Journal of International Money and Finance**, v. 12, n. 4, p. 413–438, 1993.

DANIEL, K.; HIRSHLEIFER, D.; SUBRAHMANYAM, A. A theory of overconfidence, self-attribution, and security market under- and over-reactions. **Unpublished working paper**. University of Michigan, p. 1-48, 1997.

DAVIES, S.; HALL, P. Fractal analysis of surface roughness by using spatial data. **Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)**, v. 61, n. 1, p. 3–37, 1999.

DE BONDT, W. F.M.; THALER, R. Does the stock market overreact?. **The Journal of finance**, v. 40, n. 3, p. 793-805, 1985.

DELGADO-BONAL, A. Quantifying the randomness of the stock markets. **Scientific reports**, v. 9, n. 1, p. 1–11, 2019.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S.; GIARDINA, M. D. Disciplining qualitative research. **International Journal of Qualitative Studies in Education**, v. 19, n. 6, p. 769–782, 2006.

DI MATTEO, T.; ASTE, T.; DACOROGNA, M. M. Long-term memories of developed and emerging markets: Using the scaling analysis to characterize their stage of development. **Journal of Banking & Finance**, v. 29, n. 4, p. 827–851, 2005.

DIMA, B. I. M. A.; DIMA, Ş. M.; ROXANA, I. O. A. N. Remarks on the behaviour of financial market efficiency during the COVID-19 pandemic. The case of VIX. **Finance Research Letters**, p. 101967, 2021.

DING, Z; GRANGER, C. W. J; ENGLE, R. F. A long memory property of stock market returns and a new model. **Journal of Empirical Finance**, v. 1, n. 1, p. 83–106, 1993.

DOORASAMY, Mi.; SARPONG, P. Fractal market hypothesis and markov regime switching model: a possible synthesis and integration. **International Journal of Economics and Financial Issues**, v. 8, n. 1, p. 93-100, 2018.

DUBOVIKOV, M. M.; STARCHENKO, N. V.; DUBOVIKOV, M. S. Dimension of the minimal cover and fractal analysis of time series. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 339, n. 3–4, p. 591–608, 2004.

ELLIOT, R. N. **The wave principle**. In: PRECHTER JR, R. RN Elliot's Masterworks. Gainesville, GA: New Classics Library. p. 83–150. 1938.

FALCONER, K. Fractal geometry: mathematical foundations and applications. 3 ed. John Wiley & Sons, 2004.

FAMA, E. F. Efficient capital markets: a review of theory and empirical work. **The Journal of Finance**, v. 25, n. 2, p. 383–417, 1970.

FAMA, E. F. Efficient Capital Markets: II. **The Journal of Finance**, v. 46, n. 5, p. 1575–1617, 1991.

FAMA, E. F. Market efficiency, long-term returns, and behavioral finance. **Journal of Financial Economics**, v. 49, p. 283-306, 1998.

FAMA, E. F.; FRENCH, K. R. Common factors in the serial correlation of stock returns. **Working Paper**, Graduate School of Business, University of Chicago, October 1986.

GALBRAITH, J. K. **A short history of financial euphoria**. London: Penguin Books, 1994.

GENTON, M. G. Highly robust variogram estimation. **Mathematical Geology**, v. 30, n. 2, p. 213–221, 1998.

GEWEKE, J.; PORTER-HUDAK, S. The estimation and application of long memory time series models. **Journal of Time Series Analysis**, v. 4, n. 4, p. 221–238, 1983.

GHASHGHAIE, S.; BREYMAN, W.; PEINKE, J.; TALKNER, P.; DODGE, Y. Turbulent cascades in foreign exchange markets. **Nature**, v. 381, n. 6585, p. 767–770, 1996.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2002.

GNEITING, T.; ŠEVČÍKOVÁ, H.; PERCIVAL, D. B. Estimators of fractal dimension: assessing the roughness of time series and spatial data. **Statistical Science**, v. 27, n. 2, p. 247–277, 2012.

GRECH D.; MAZUR Z. Can one make any crash prediction in finance using the local Hurst exponent idea?. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**. v. 336, n. 1, p. 133–145. 2004

HALFELD, M.; TORRES, F. L. Finanças comportamentais: a aplicações no contexto brasileiro. **Revista de Administração de Empresas**, v. 41, n. 2, p. 64–71, 2001.

HALL, P.; WOOD, A. On the performance of box-counting estimators of fractal dimension. **Biometrika**, v. 80, n. 1, p. 246–251, 1993.

HAUGEN, R. A. **The new finance**: overreaction, complexity, and uniqueness. Pearson College Division, 2004.

HONG, H.; STEIN, J. C. A unified theory of underreaction, momentum trading, and overreaction in asset markets. **The Journal of Finance**, v. 54, n. 6, p. 2143–2184, 1999.

HOOVER, K. D.; PEREZ, S. J. Three attitudes towards data mining. **Journal of Economic Methodology**, v. 7, n. 2, p. 195–210, 2000.

HVIDKJAER, S. A trade-based analysis of momentum. **The Review of Financial Studies**, v. 19, n. 2, p. 457–491, 2006.

IKEDA, T. A fractal analysis of world stock markets. **Economics Bulletin**, v. 37, n. 3, p. 1514–1532, 2017.

IQUIAPAZA, R. A.; AMARAL, H. F.; BRESSAN, A. A. Evolução da pesquisa em finanças: epistemologia, paradigma e críticas. **Organizações & Sociedade**, v. 16, p. 351–370, 2009.

JENSEN, M. C. Some anomalous evidence regarding market efficiency. **Journal of Financial Economics**, v. 6, n. 2/3, p. 95–101, 1978.

JOVANOVIĆ, F.; SCHINCKUS, C. The emergence of econophysics: a new approach in modern financial theory. **History of Political Economy**, v. 45, n. 3, p. 443–474, 2013.

KAHANA, E. The history of the global financial crisis in the 20th century. In: **Working paper of the International Studies Association**. 2005.

KAHNEMAN, D.; TVERSKY, A. Choices, values, and frames. In: MACLEAN, L. C.; ZIEMBA, W. T. **Handbook of the Fundamentals of Financial Decision Making: Part I**. Singapore: World Scientific 2013. p. 269–278.

KANTELHARDT, J. W.; ZSCHIEGNER, S. A.; KOSCIELNY-BUNDE, E.; HAVLIN, S.; BUNDE, A.; STANLEY, H. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 316, n. 1–4, p. 87–114, 2002.

KAPECKA, A. Fractal analysis of financial time series using fractal dimension and pointwise hölder exponents. **Dynamic Econometric Models**, v. 13, p. 107–126, 2013.

KARP, A.; VAN VUUREN, G. Investment implications of the fractal market hypothesis. **Annals of Financial Economics**, v. 14, n. 01, p. 1–27, 2019.

KIMURA, H. The financial market from the fractal optics perspective. **Revista de Administração de Empresas**, v. 45, n. 4, p. 124–125, 2005.

KIRMAN, A. The intrinsic limits of modern economic theory: the emperor has no clothes. **The Economic Journal**, v. 99, n. 395, p. 126–139, 1989.

KOTYRBA, M.; VOLNA, E.; JANOSEK, M.; HABIBALLA, H.; BRAZINA, D. Methodology for Elliott waves pattern recognition. **Ratio**, v. 34, n. 55, p. 1–6, 2013.

KRISTOUFEK, L.; VOSVRDA, M. Measuring capital market efficiency: global and local correlations structure. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 392, n. 1, p. 184–193, 2013.

KRISTOUFEK, L.; VOSVRDA, M. Measuring capital market efficiency: long-term memory, fractal dimension and approximate entropy. **The European Physical Journal B**, v. 87, n. 7, p. 1–9, 2014.

KUTNER, R.; GRECH, D. Report on foundation and organization of econophysics graduate courses at Faculty of Physics of University of Warsaw and Department of Physics and Astronomy of the Wrocław University. **Acta Physica Polonica-Series A General Physics**, v. 114, n. 3, p. 637, 2008.

LAHMIRI, S.; BEKIROU, S. Randomness, informational entropy, and volatility interdependencies among the major world markets: the role of the COVID-19 pandemic. **Entropy**, v. 22, n. 8, p. 833, 2020.

LÉVY, P. Théorie des erreurs. La loi de Gauss et les lois exceptionnelles. **Bulletin de la Société mathématique de France**, v. 52, p. 49–85, 1924.

LIMA, L. S.; OLIVEIRA, S. C. Two-dimensional stochastic dynamics as model for time evolution of the financial market. **Chaos, Solitons & Fractals**, v. 136, p. 109792, 2020.

LINTNER, J. Security prices, risk, and maximal gains from diversification. **The Journal of Finance**, v. 20, n. 4, p. 587–615, 1965.

LOBÃO, J.; SERRA, A. P. Herding behavior—evidence from Portuguese mutual funds. **Instituto de Estudos Financeiros e Fiscais, Portugal**, 2002.

LUBYS, J.; PANDA, P. US and EU unconventional monetary policy spillover on BRICS financial markets: an event study. **Empirica**, v. 48, n. 2, p. 353–371, 2021.

MANDELBROT, B. B. A multifractal walk down Wall Street. **Scientific American**, v. 280, n. 2, p. 70–73, 1999.

MANDELBROT, B. B. **The fractal geometry of nature**. New York: WH Freeman and Company, 1983.

MANDELBROT, B. B.; FISHER, A.J.; CALVET, L.E. **A multifractal model of asset returns**. Cowles Foundation Discussion Papers, Yale University, p. 1164–1166.1997.

MANDELBROT, B. B.; VAN NESS, J. W. Fractional brownian motions, fractional noises and applications. **SIAM Review**, v. 10, n. 4, p. 422–437, 1968.

MANDELBROT, B. New methods in statistical economics. **Journal of Political Economy**, v. 71, n. 5, p. 421–440, 1963.

MANDELBROT, B. The variation of some other speculative prices. **The Journal of Business**, v. 40, n. 4, p. 393–413, 1967.

MANDELBROT, B.; HUDSON, R. L. **The (mis)behaviour of markets: a fractal view of risk, ruin & reward**. London: Basic Books, 2004.

MANTEGNA, R. N. Lévy walks and enhanced diffusion in Milan stock exchange. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 179, n. 2, p. 232–242, 1991.

MANTEGNA, R. N.; KERTÉSZ, J. Focus on statistical physics modeling in economics and finance. **New Journal of Physics**, v. 13, n. 2, p. 025011, 2011.

MARKOWITZ, H. Portfolio selection **The Journal of Finance**, v. 7, n. 1., p. 77–91, 1952.

MARTINS, G. A. Metodologias convencionais e não-convencionais e a pesquisa em administração. **REGE Revista de Gestão**, v. 1, n. 1, 2010.

MCCAULEY, J. L. Response to “worrying trends in econophysics”. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 371, n. 2, p. 601–609, 2006.

MCGOUN, E. G. On knowledge of finance. **International Review of Financial Analysis**, v. 1, n. 3, p. 161–177, 1992.

MCIVER, R. P.; KANG, S. H. Financial crises and the dynamics of the spillovers between the US and BRICS stock markets. **Research in International Business and Finance**, v. 54, p. 101276, 2020.

MENG, S.; FANG, H.; YU, D. Fractal Characteristics, Multiple Bubbles, and Jump Anomalies in the Chinese Stock Market. **Complexity**, v. 2020, 2020.

MENSI, W. ; HAMMOUDEH, S. ; NGUYEN, D. K. ; KANG, S. H. Global financial crisis and spillover effects among the US and BRICS stock markets. **International Review of Economics & Finance**, v. 42, p. 257–276, 2016

MILOȘ, L. R.; HAȚIEGAN, C.; MILOȘ, M. C.; BARNA, F. M.; BOȚOC, C. Multifractal detrended fluctuation analysis (MF-DFA) of stock market indexes. Empirical evidence from seven central and eastern European markets. **Sustainability**, v. 12, n. 2, p. 535, 2020.

MITRA, S. K. Is Hurst exponent value useful in forecasting financial time series. **Asian Social Science**, v. 8, n. 8, p. 111–120, 2012.

MODIGLIANI, F.; MILLER, M. H. The cost of capital, corporation finance and the theory of investment. **The American Economic Review**, v. 48, n. 3, p. 261–297, 1958.

MOSSIN, J. Equilibrium in a capital asset market. **Econometrica: Journal of the Econometric Society**, v. 34, n. 4, p. 768–783, 1966.

MULLAINATHAN, S.; THALER, R. H. Behavioral economics. **National Bureau of Economic Research**, n. 7948. 2000.

NEKRASOVA, I.; KARNAUKHOVA, O.; SVIRIDOV, O. **Fractal properties of financial assets and forecasting financial crisis**. In: NEKRASOVA, I.; KARNAUKHOVA, O.; CHRISTIANSEN, B. **Fractal approaches for modeling financial assets and predicting crises**. IGI Global, 2018. p. 23–41.

O'NEILL, J. **Building better global economic BRICs**. Global Economics Paper 66. New York: Goldman-Sachs. 2001.

OPREAN, C.; TANASESCU, C. Applications of chaos and fractal theory on emerging capital markets. **International Journal of Academic Research in Business and Social Sciences**, v. 3, n. 11, p. 633, 2013.

PATIL, A. C.; RASTOGI, S. Multifractal analysis of market efficiency across structural breaks: Implications for the adaptive market hypothesis. **Journal of Risk and Financial Management**, v. 13, n. 10, p. 248, 2020.

PETERS, E. E. **Fractal market analysis: applying chaos theory to investment and economics**. New York: Willey, 1994.

PINCUS, S. M. Approximate entropy as a measure of system complexity. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 88, n. 6, p. 2297–2301, 1991.

PINCUS, S. M.; KALMAN, R. E. Irregularity, volatility, risk, and financial market time series. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 101, n. 38, p. 13709–13714, 2004.

REGNAULT, J. **Calcul des chances et philosophie de la bourse**. librairie Castel, 1863.

RIBEIRO, T. S.; LEAL, R. P. C. Estrutura fractal em mercados emergentes. **Revista de Administração Contemporânea**, v. 6, n. 3, p. 97–108, 2002.

RICCIARDI, V.; SIMON, H. K. What is behavioral finance? **Business, Education & Technology Journal**, v. 2, n. 2, p. 1–9, 2000.

RICKLES, D. Econophysics for philosophers. **Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics**, v. 38, n. 4, p. 948–978, 2007.

RIZVI, S. A. R.; ARSHAD, S. Analysis of the efficiency–integration nexus of Japanese stock market. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 470, p. 296–308, 2017.

ROBINSON, P. M. Gaussian semiparametric estimation of long range dependence. **The Annals of Statistics**, p. 1630–1661, 1995.

SÁNCHEZ-GRANERO, M. A., ALLADARES, K. RAMOS-REQUENA, J. P.; TRINIDAD-SEGOVIA, J. E. Testing the efficient market hypothesis in Latin American stock markets. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 540, p. 123082, 2020.

SCHARFSTEIN, D. S.; STEIN, J. C. Herd behavior and investment. **The American Economic Review**, v. 80, n. 3, p. 465–479, 1990.

SCHINCKUS, C. What can econophysics contribute to financial economics? **International Review of Economics**, v. 58, n. 2, p. 147–163, 2011.

SERROUKH, A.; WALDEN, A. T.; PERCIVAL, D. B. Statistical properties and uses of the wavelet variance estimator for the scale analysis of time series. **Journal of the American Statistical Association**, v. 95, n. 449, p. 184–196, 2000.

SHARPE, W. F. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. **The Journal of Finance**, v. 19, n. 3, p. 425–442, 1964.

SHEFRIN, H.; STATMAN, M. Behavioral portfolio theory. **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, p. 127–151, 2000.

SHILLER, R. J. From efficient markets theory to behavioral finance. **Journal of Economic Perspectives**, v. 17, n. 1, p. 83–104, 2003.

SHLEIFER, A. **Inefficient markets: an introduction to behavioural finance**. OUP Oxford, 2000.

SLOVIC, P.; LICHTENSTEIN, S. Comparison of Bayesian and regression approaches to the study of information processing in judgment. **Organizational Behavior and Human Performance**, v. 6, n. 6, p. 649–744, 1971.

STANLEY, H. E, et al.. Anomalous fluctuations in the dynamics of complex systems: from DNA and physiology to econophysics. **Physica A**, V. 224, n.1, p 302–321, 1996.

SYRIOPOULOS, T.; MAKRAM, B.; BOUBAKER, A. Stock market volatility spillovers and portfolio hedging: BRICS and the financial crisis. **International Review of Financial Analysis**, v. 39, p. 7–18, 2015.

TEVEROVSKY, V; TAQQU, M S.; WILLINGER, W. A critical look at Lo's modified R/S statistic. **Journal of Statistical Planning and Inference**, v. 80, n. 1–2, p. 211–227, 1999.

THALER, R. Mental accounting and consumer choice. **Marketing Science**, v. 4, n. 3, p. 199–214, 1985.

TREYNOR, J. L. Market value, time, and risk. Unpublished manuscript. Rough draft dated 8/8/61, #95–209. 1961.

TVERSKY, A.; KAHNEMAN, D. Judgment under uncertainty: heuristics and biases. **Science**, v. 185, n. 4157, p. 1124–1131, 1974.

TVERSKY, A.; KAHNEMAN, D. Prospect theory: an analysis of decision under risk. **Econometrica**, v. 47, n. 2, p. 263–291, 1979.

TVERSKY, A.; KAHNEMAN, D. The framing of decisions and the psychology of choice. **Science**, v. 211, n. 4481, p. 453–458, 1981.

VANDEWALLE, N.; AUSLOOS, M. Multi-affine analysis of typical currency exchange rates. **The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems**, v. 4, n. 2, p. 257–261, 1998.

VON NEUMANN, J; MORGENSTERN, O. **Theory of games and economic behavior**. Princeton university press, 1953.

WELCH, I. Sequential sales, learning, and cascades. **The Journal of Finance**, v. 47, n. 2, p. 695–732, 1992.

WERMERS, R. Mutual fund herding and the impact on stock prices. **The Journal of Finance**, v. 54, n. 2, p. 581–622, 1999.

ZANELLA, A. V.; TITON, A. P. Análise da produção científica sobre criatividade em programas brasileiros de pós-graduação em psicologia (1994-2001). **Psicologia em Estudo**, v. 10, n. 2, p. 305–316, 2005.

APÊNDICES

Apêndice - Estatísticas Descritivas dos Expoentes de Hurst

	IBRX			MOEX			NSE		
	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO
2010	0,4084	0,4070	0,0071	0,4445	0,4492	0,0265	0,4648	0,4681	0,0066
2011	0,4011	0,4049	0,0238	0,4624	0,4604	0,0292	0,5128	0,5234	0,0322
2012	0,4442	0,4500	0,0210	0,4683	0,4655	0,0310	0,4854	0,4839	0,0185
2013	0,4302	0,4315	0,0114	0,4827	0,4861	0,0330	0,4721	0,4719	0,0170
2014	0,4484	0,4465	0,0235	0,4646	0,4600	0,0419	0,4720	0,4773	0,0200
2015	0,4284	0,4270	0,0162	0,4785	0,4990	0,0491	0,4701	0,4748	0,0195
2016	0,5127	0,5157	0,0153	0,4621	0,4579	0,0449	0,4395	0,4352	0,0193
2017	0,5025	0,5031	0,0181	0,4863	0,4898	0,0319	0,4754	0,4743	0,0129
2018	0,4883	0,4905	0,0174	0,4848	0,4876	0,0176	0,4378	0,4336	0,0221
2019	0,4433	0,4415	0,0260	0,4488	0,4454	0,0412	0,4492	0,4441	0,0234
2020	0,5688	0,5894	0,0600	0,5758	0,5801	0,0496	0,5983	0,6398	0,0949
2021	0,5647	0,5605	0,0109	0,5952	0,5965	0,0185	0,6792	0,6810	0,0094
TOTAL	0,4692	0,4551	0,0580	0,4856	0,4817	0,0557	0,4908	0,4724	0,0702
Teste Dickey-Fuller	-4,555***			-8,9031***			-2,7415		
Teste Shapiro	0,9363***			0,9662***			0,7855***		
	SSEC			JTOPI			DJI		

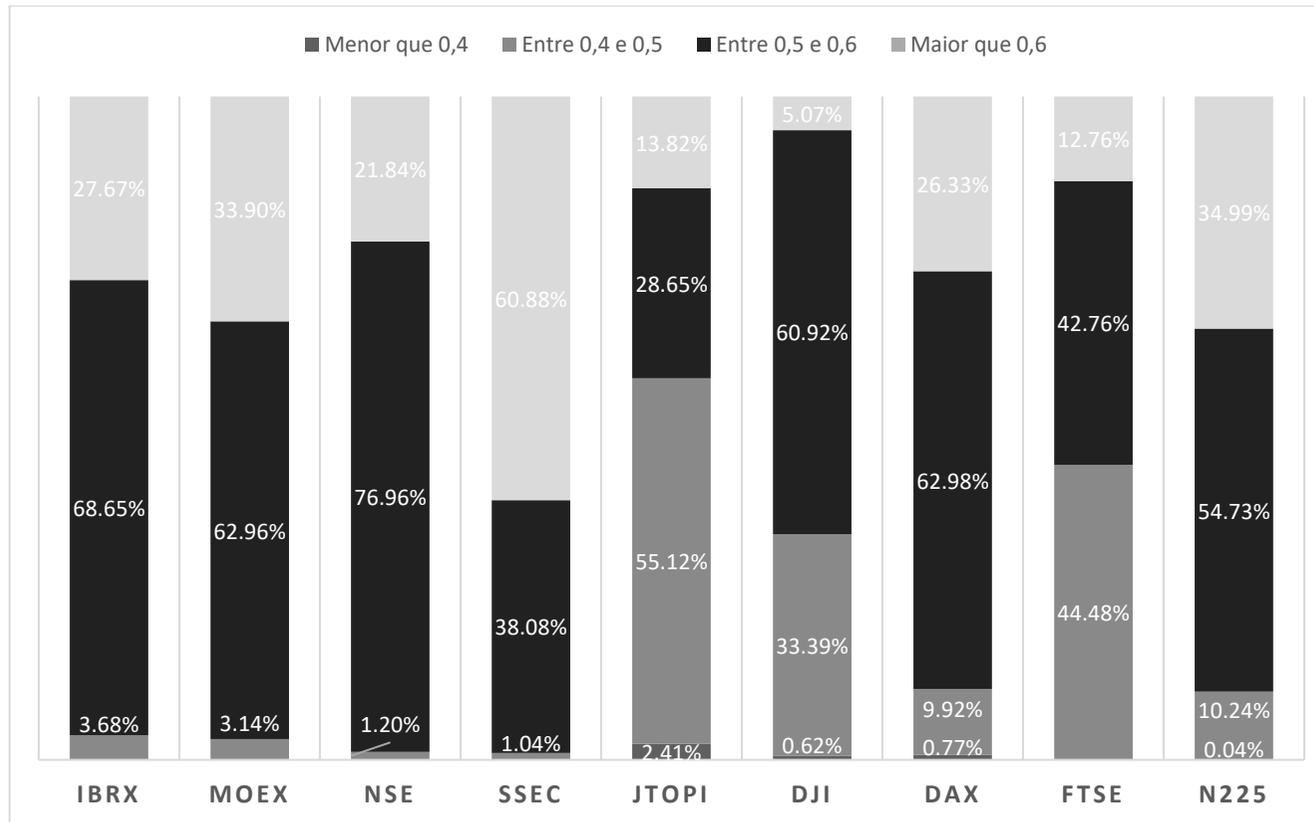
	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO
2010	0,5555	0,5553	0,0087	0,4218	0,4237	0,0093	0,4653	0,4705	0,0122
2011	0,5447	0,5471	0,0138	0,3584	0,3743	0,0440	0,4429	0,4475	0,0221
2012	0,5135	0,5146	0,0177	0,3874	0,3891	0,0268	0,3702	0,3551	0,0324
2013	0,5231	0,5250	0,0236	0,3751	0,3731	0,0092	0,3591	0,3590	0,0167
2014	0,4271	0,4275	0,0230	0,3640	0,3668	0,0235	0,3566	0,3569	0,0346
2015	0,5928	0,6015	0,0424	0,3943	0,3933	0,0187	0,3962	0,3951	0,0304
2016	0,6324	0,6313	0,0096	0,3810	0,3752	0,0243	0,4043	0,4012	0,0254
2017	0,6257	0,6253	0,0060	0,3507	0,3497	0,0385	0,4389	0,4384	0,0147
2018	0,5424	0,5471	0,0577	0,4077	0,4076	0,0167	0,4834	0,4832	0,0236
2019	0,4737	0,4817	0,0284	0,4476	0,4535	0,0442	0,4346	0,4360	0,0125
2020	0,4680	0,4654	0,0141	0,5986	0,6158	0,0568	0,4945	0,4922	0,0413
2021	0,4441	0,4474	0,0174	0,6119	0,6075	0,0165	0,4879	0,4909	0,0111
TOTAL	0,5301	0,5256	0,0707	0,4179	0,3924	0,0863	0,4239	0,4325	0,0542
Teste Dickey-Fuller	-1,9502			-3,0926			-4,5023***		
Teste Shapiro	0,9558***			0,812***			0,9727***		
	DAX			FTSE			N225		
	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO
2010	0,5006	0,5034	0,0110	0,4447	0,4485	0,0111	0,4578	0,4608	0,0085
2011	0,4915	0,4845	0,0236	0,4221	0,4248	0,0256	0,4410	0,4441	0,0303
2012	0,4380	0,4331	0,0185	0,3897	0,3822	0,0263	0,4520	0,4505	0,0304

2013	0,4245	0,4231	0,0124	0,3866	0,3883	0,0137	0,5144	0,5107	0,0165
2014	0,3943	0,4179	0,0475	0,4005	0,3867	0,0445	0,5116	0,5109	0,0074
2015	0,4669	0,4595	0,0335	0,4098	0,4064	0,0259	0,4669	0,4615	0,0159
2016	0,4841	0,4733	0,0291	0,4132	0,3884	0,0397	0,4127	0,4088	0,0269
2017	0,4510	0,4594	0,0204	0,3841	0,3895	0,0140	0,4215	0,4263	0,0174
2018	0,3980	0,3969	0,0168	0,3960	0,3951	0,0226	0,4140	0,4062	0,0268
2019	0,4599	0,4693	0,0542	0,4387	0,4325	0,0227	0,4760	0,4906	0,0625
2020	0,6040	0,6151	0,0462	0,5398	0,5514	0,0567	0,5396	0,5412	0,0313
2021	0,6015	0,6037	0,0103	0,5282	0,5279	0,0102	0,5454	0,5450	0,0107
TOTAL	0,4704	0,4592	0,0703	0,4251	0,4091	0,0572	0,4689	0,4616	0,0530
Teste Dickey-Fuller	-3,1811*			-3,9944***			-3,1805*		
Teste Shapiro	0,9416***			0,8829***			0,9731***		

***, ** e * denotam significância estatística a 0,01, 0,05 e 0,1.

Fonte: Elaboração própria.

Apêndice 1 - Mapa da Distribuição dos Expoentes de Hurst



Fonte: Elaboração própria.

Apêndice 2 - Estatísticas Descritivas das Dimensões Fractais

	IBRX			MOEX			NSE		
	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO
2010	1,4245	1,3896	0,0430	1,4658	1,4652	0,0064	1,4336	1,4343	0,0102
2011	1,4165	1,4369	0,0474	1,4636	1,4630	0,0164	1,4564	1,4574	0,0101
2012	1,4485	1,4426	0,0200	1,4826	1,4751	0,0240	1,4425	1,4424	0,0061
2013	1,4507	1,4530	0,0218	1,4467	1,4432	0,0106	1,4194	1,4252	0,0201
2014	1,4667	1,4682	0,0186	1,4297	1,4275	0,0150	1,3637	1,3612	0,0133
2015	1,4992	1,4983	0,0212	1,4602	1,4545	0,0242	1,3221	1,3214	0,0093
2016	1,4723	1,4724	0,0135	1,4697	1,4590	0,0239	1,3339	1,3339	0,0098
2017	1,4551	1,4568	0,0101	1,4734	1,4752	0,0117	1,3593	1,3575	0,0093
2018	1,4361	1,4357	0,0082	1,4471	1,4505	0,0183	1,4166	1,4197	0,0238
2019	1,4712	1,4721	0,0143	1,4546	1,4570	0,0126	1,4402	1,4421	0,0189
2020	1,5535	1,5573	0,0373	1,4616	1,4623	0,0079	1,4567	1,4526	0,0159
2021	1,5978	1,6036	0,0190	1,4701	1,4659	0,0149	1,4458	1,4466	0,0051
TOTAL	1,4718	1,4660	0,0524	1,4598	1,4599	0,0220	1,4050	1,4261	0,0499
Teste Dickey-Fuller	0,2195			-2,4091			-0,8479		
Teste Shapiro	0,9165***			0,9929***			0,8993***		
	SSEC			JTOPI			DJI		
	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO
2010	0,4639	0,4636	0,0039	1,5001	1,4947	0,0140	1,4760	1,4939	0,0345
2011	0,4449	0,4436	0,0088	1,4839	1,4887	0,0274	1,4636	1,4502	0,0277

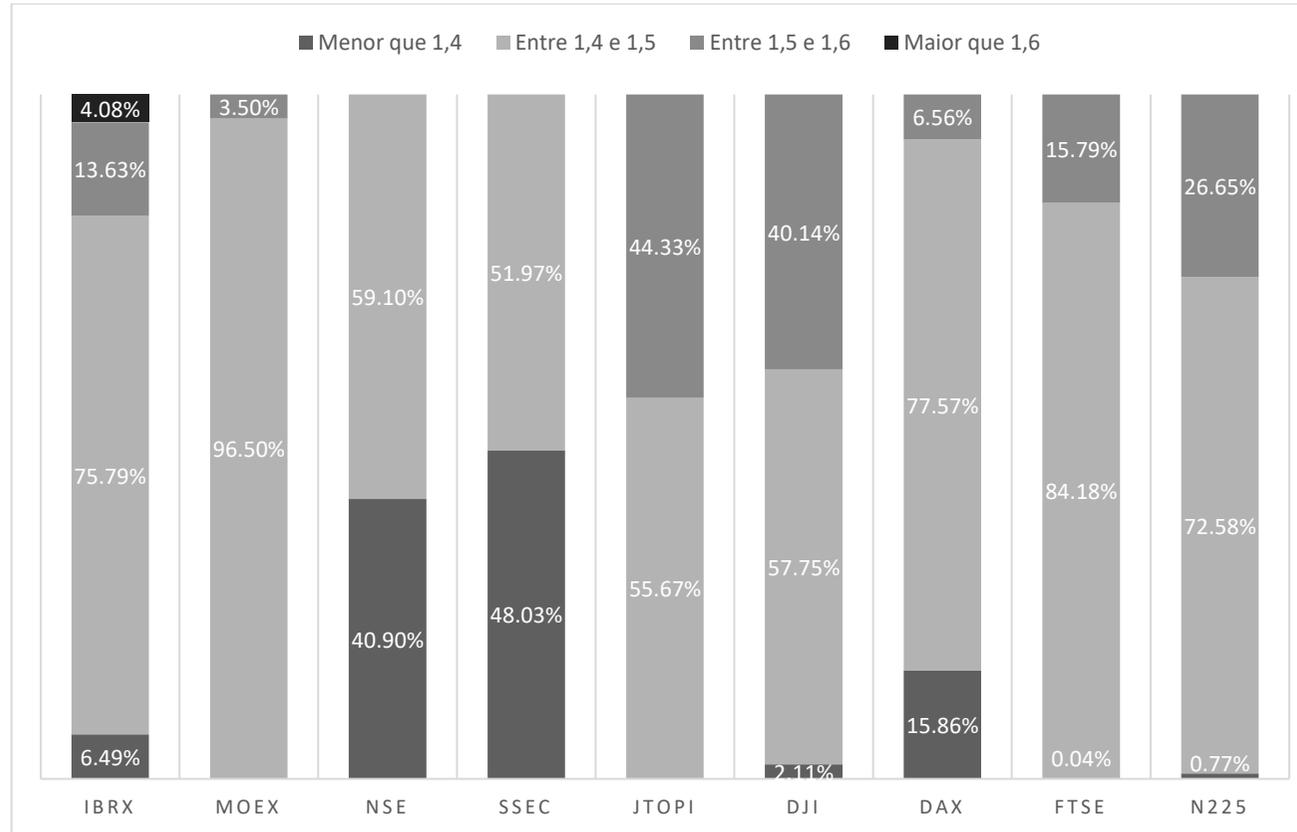
2012	0,4954	0,4970	0,0124	1,4992	1,4834	0,0433	1,4335	1,4351	0,0154
2013	0,5063	0,5067	0,0067	1,5047	1,4970	0,0446	1,4605	1,4660	0,0174
2014	0,5054	0,5017	0,0138	1,4830	1,4801	0,0264	1,4929	1,4917	0,0095
2015	0,4498	0,4717	0,0479	1,4912	1,4896	0,0203	1,5336	1,5333	0,0144
2016	0,3632	0,3666	0,0127	1,4789	1,4833	0,0269	1,5373	1,5440	0,0216
2017	0,2918	0,2958	0,0299	1,4953	1,4927	0,0342	1,5205	1,5203	0,0247
2018	0,2771	0,2374	0,0654	1,4722	1,4564	0,0368	1,4827	1,4809	0,0192
2019	0,4637	0,4696	0,0279	1,5030	1,4980	0,0333	1,4315	1,4309	0,0302
2020	0,4838	0,4821	0,0168	1,4969	1,5000	0,0127	1,4835	1,4943	0,0371
2021	0,5085	0,5097	0,0072	1,5168	1,5132	0,0156	1,5309	1,5321	0,0136
TOTAL	0,4324	0,4676	0,0859	1,4926	1,4947	0,0328	1,4860	1,4903	0,0428
Teste Dickey-Fuller	-0,2764			-2,6984			-1,3555		
Teste Shapiro	0,8404***			0,9853***			0,9821***		
	DAX			FTSE			N225		
	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO
2010	1,4145	1,4150	0,0167	0,4312	0,4282	0,0143	1,5008	1,4896	0,0210
2011	1,3987	1,3945	0,0218	0,4264	0,4218	0,0148	1,5041	1,5075	0,0320
2012	1,4048	1,4060	0,0141	0,4575	0,4610	0,0113	1,5043	1,5042	0,0113
2013	1,4073	1,4017	0,0197	0,4390	0,4381	0,0058	1,5082	1,5145	0,0147
2014	1,4213	1,4254	0,0191	0,4174	0,4153	0,0123	1,4962	1,4894	0,0184
2015	1,4604	1,4551	0,0237	0,4202	0,4196	0,0058	1,4698	1,4696	0,0113
2016	1,4765	1,4762	0,0164	0,4177	0,4185	0,0093	1,4760	1,4724	0,0135
2017	1,4754	1,4766	0,0152	0,4113	0,4114	0,0076	1,4658	1,4651	0,0104
2018	1,4965	1,4918	0,0206	0,4253	0,4177	0,0203	1,4565	1,4428	0,0324

2019	1,4872	1,4841	0,0223	0,5043	0,5053	0,0071	1,4383	1,4356	0,0304
2020	1,4721	1,4715	0,0086	0,4355	0,4139	0,0403	1,4584	1,4666	0,0206
2021	1,4623	1,4640	0,0124	0,4142	0,4134	0,0072	1,4911	1,4959	0,0121
TOTAL	1,4490	1,4576	0,0394	0,4342	0,4238	0,0302	1,4795	1,4790	0,0308
Teste Dickey-Fuller	-1,7468			-1,7255			-1,559		
Teste Shapiro	0,9722***			0,8455***			0,9804***		

***, ** e * denotam significância estatística a 0,01, 0,05 e 0,1.

Fonte: Elaboração própria.

Apêndice 3 - Mapa da Distribuição das Dimensões Fractais



Fonte: Elaboração própria.

Apêndice 4 - Estatísticas Descritivas das Aproximações de Entropia

	IBRX			MOEX			NSE		
	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO
2010	0,4326	0,4299	0,0206	0,3608	0,3625	0,0121	0,4156	0,4170	0,0138
2011	0,3900	0,3871	0,0284	0,3461	0,3352	0,0320	0,4196	0,4115	0,0324
2012	0,4935	0,4944	0,0077	0,4604	0,4582	0,0251	0,5153	0,5140	0,0097
2013	0,5215	0,5265	0,0142	0,4933	0,4920	0,0080	0,5194	0,5178	0,0106
2014	0,5151	0,5189	0,0096	0,4818	0,4784	0,0169	0,4996	0,4983	0,0162
2015	0,4887	0,4852	0,0124	0,5034	0,5041	0,0046	0,4983	0,4975	0,0089
2016	0,4918	0,4927	0,0076	0,5137	0,5146	0,0077	0,4990	0,4987	0,0101
2017	0,5032	0,5041	0,0092	0,4911	0,4875	0,0130	0,4744	0,4719	0,0154
2018	0,4842	0,4840	0,0088	0,5347	0,5394	0,0140	0,4954	0,4969	0,0092
2019	0,5064	0,5124	0,0184	0,5560	0,5562	0,0055	0,5111	0,5059	0,0130
2020	0,4970	0,4937	0,0221	0,5068	0,5012	0,0195	0,4368	0,4099	0,0489
2021	0,4828	0,4846	0,0082	0,5112	0,5139	0,0141	0,4146	0,4132	0,0102
TOTAL	0,4862	0,4937	0,0385	0,4839	0,4989	0,0605	0,4798	0,4969	0,0425
Teste Dickey-Fuller	-1,4145			-1,4223			-1,359		
Teste Shapiro	0,8213***			0,8351***			0,8581***		
	SSEC			JTOPI			DJI		
	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO

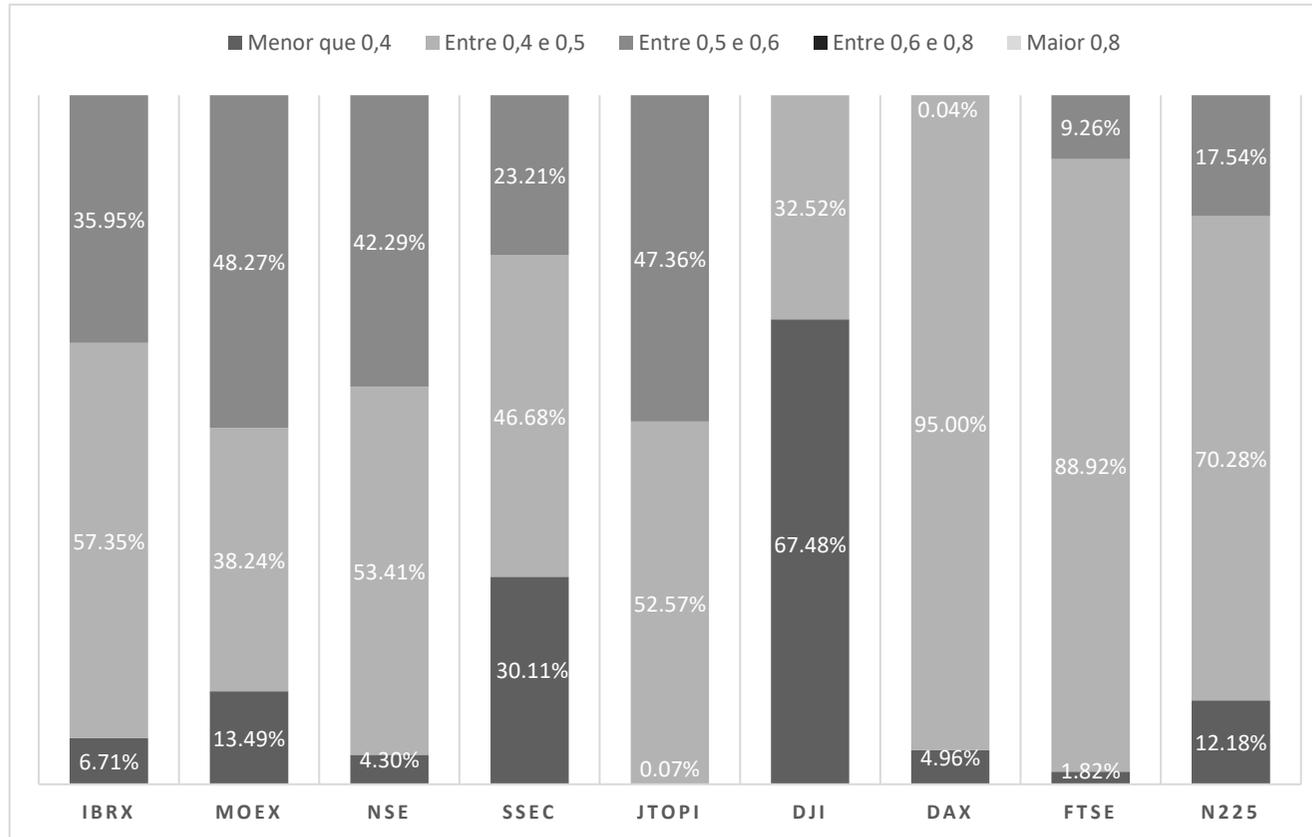
2010	0,5075	0,5091	0,0069	0,4406	0,4453	0,0129	0,3838	0,4007	0,0259
2011	0,4849	0,4821	0,0182	0,4226	0,4149	0,0197	0,3463	0,3416	0,0238
2012	0,4698	0,4713	0,0243	0,4757	0,4792	0,0150	0,3822	0,3857	0,0178
2013	0,2889	0,2472	0,0712	0,4955	0,4997	0,0227	0,3773	0,3718	0,0176
2014	0,2859	0,2912	0,0319	0,5017	0,5019	0,0154	0,4306	0,4286	0,0165
2015	0,3609	0,3659	0,0134	0,5069	0,5029	0,0122	0,4455	0,4472	0,0080
2016	0,4430	0,4611	0,0490	0,5159	0,5182	0,0152	0,4231	0,4243	0,0096
2017	0,5047	0,5008	0,0137	0,5168	0,5164	0,0075	0,3720	0,3699	0,0136
2018	0,5076	0,5072	0,0058	0,5029	0,5022	0,0101	0,3630	0,3584	0,0127
2019	0,4968	0,4970	0,0106	0,5177	0,5221	0,0114	0,3685	0,3686	0,0062
2020	0,4455	0,4436	0,0100	0,4753	0,4713	0,0285	0,2876	0,2728	0,0505
2021	0,4634	0,4631	0,0039	0,4876	0,4867	0,0106	0,3138	0,3125	0,0045
TOTAL	0,4324	0,4676	0,0859	0,4903	0,4982	0,0329	0,3763	0,3740	0,0486
Teste Dickey-Fuller	-1,2458			-1,8371			-1,4915		
Teste Shapiro	0,8404***			0,91***			0,9546***		
	DAX			FTSE			N225		
	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO
2010	0,4808	0,4897	0,0174	0,4129	0,4125	0,0065	0,4574	0,4578	0,0050
2011	0,4447	0,4425	0,0100	0,4306	0,4139	0,0363	0,4228	0,4212	0,0188
2012	0,4504	0,4509	0,0044	0,5056	0,5056	0,0051	0,4324	0,4325	0,0092
2013	0,4494	0,4492	0,0084	0,4309	0,4201	0,0244	0,3949	0,3884	0,0130

2014	0,4462	0,4469	0,0262	0,4101	0,4095	0,0074	0,4008	0,4058	0,0151
2015	0,4355	0,4397	0,0198	0,4182	0,4192	0,0094	0,4392	0,4372	0,0124
2016	0,4418	0,4397	0,0148	0,4201	0,4196	0,0059	0,4472	0,4479	0,0155
2017	0,4240	0,4240	0,0160	0,4159	0,4147	0,0109	0,4886	0,4891	0,0074
2018	0,4153	0,4159	0,0058	0,4394	0,4387	0,0058	0,5187	0,5189	0,0078
2019	0,4567	0,4611	0,0146	0,4572	0,4607	0,0116	0,5313	0,5362	0,0230
2020	0,4258	0,4064	0,0368	0,4281	0,4295	0,0143	0,4365	0,4339	0,0195
2021	0,4036	0,4039	0,0058	0,4289	0,4267	0,0151	0,4666	0,4676	0,0107
TOTAL	0,4391	0,4419	0,0247	0,4342	0,4238	0,0302	0,4522	0,4442	0,0446
Teste Dickey-Fuller	-2,7364			-1,9186			-1,7278		
Teste Shapiro	0,9818***			0,8455***			0,9619***		

***, ** e * denotam significância estatística a 0,01, 0,05 e 0,1.

Fonte: Elaboração própria.

Apêndice 5 - Mapa da Distribuição das Aproximações de Entropia



Fonte: Elaboração própria.

Apêndice 6 - Estatísticas Descritivas dos Índices de Eficiência

	IBRX			MOEX			NSE		
	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO
2010	0,3437	0,3434	0,0166	0,3372	0,3357	0,0140	0,3123	0,3143	0,0066
2011	0,3720	0,3706	0,0294	0,3398	0,3451	0,0196	0,3034	0,3079	0,0178
2012	0,2815	0,2803	0,0110	0,2826	0,2805	0,0158	0,2590	0,2595	0,0049
2013	0,2734	0,2740	0,0095	0,2723	0,2704	0,0097	0,2723	0,2704	0,0117
2014	0,2634	0,2616	0,0114	0,2917	0,2910	0,0128	0,3223	0,3241	0,0179
2015	0,2833	0,2833	0,0108	0,2705	0,2689	0,0121	0,3615	0,3624	0,0097
2016	0,2607	0,2604	0,0053	0,2665	0,2634	0,0170	0,3587	0,3592	0,0150
2017	0,2592	0,2563	0,0077	0,2642	0,2634	0,0108	0,3350	0,3353	0,0056
2018	0,2772	0,2744	0,0102	0,2492	0,2472	0,0101	0,2962	0,2958	0,0207
2019	0,2672	0,2676	0,0147	0,2511	0,2493	0,0158	0,2739	0,2711	0,0125
2020	0,2980	0,3039	0,0309	0,2842	0,2865	0,0237	0,3485	0,3605	0,0372
2021	0,3103	0,3137	0,0129	0,2863	0,2850	0,0104	0,3984	0,4003	0,0119
TOTAL	0,2878	0,2757	0,0368	0,2805	0,2742	0,0306	0,3175	0,3160	0,0424
Teste Dickey-Fuller	-2,9757			-5,211***			-2,005		
Teste Shapiro	0,8393***			0,929***			0,9606***		
	SSEC			JTOPI			DJI		
	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO
2010	0,3127	0,3124	0,0049	0,3035	0,2997	0,0109	0,3310	0,3226	0,0203

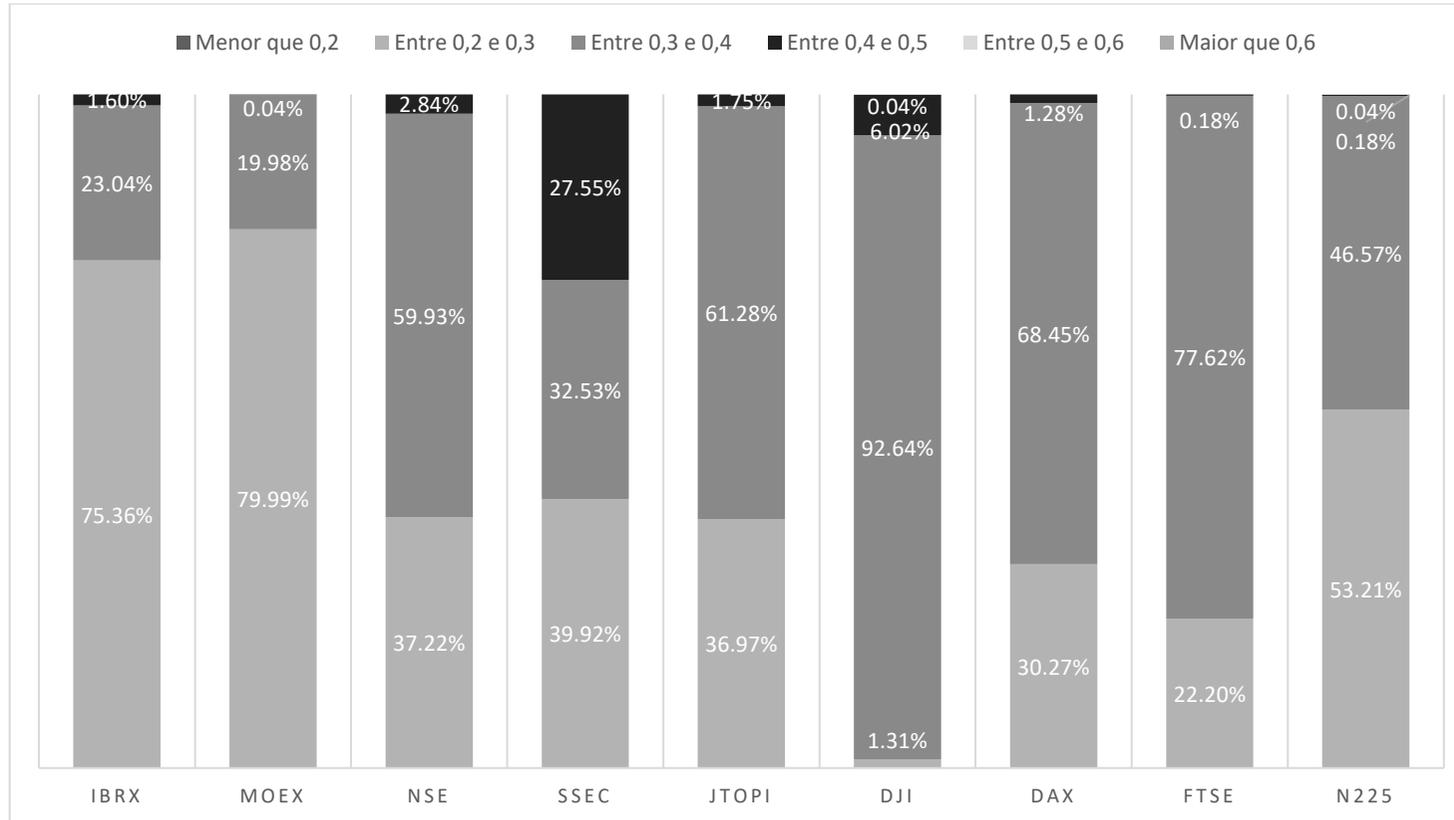
2011	0,3165	0,3160	0,0072	0,3619	0,3509	0,0421	0,3557	0,3595	0,0155
2012	0,2901	0,2911	0,0114	0,3212	0,3177	0,0207	0,3786	0,3857	0,0278
2013	0,2836	0,2829	0,0079	0,3210	0,3181	0,0146	0,3779	0,3725	0,0198
2014	0,3103	0,3084	0,0206	0,3217	0,3161	0,0234	0,3531	0,3536	0,0342
2015	0,3637	0,3553	0,0437	0,2943	0,2937	0,0129	0,3214	0,3173	0,0158
2016	0,4271	0,4272	0,0092	0,3034	0,3037	0,0158	0,3308	0,3345	0,0179
2017	0,4468	0,4448	0,0133	0,3335	0,3310	0,0338	0,3316	0,3324	0,0087
2018	0,4098	0,4213	0,0457	0,2952	0,2960	0,0142	0,3255	0,3254	0,0096
2019	0,2930	0,2854	0,0216	0,2675	0,2658	0,0249	0,3495	0,3490	0,0112
2020	0,2910	0,2913	0,0090	0,3082	0,3159	0,0388	0,3743	0,3726	0,0251
2021	0,2837	0,2848	0,0090	0,3057	0,3006	0,0153	0,3539	0,3544	0,0055
TOTAL	0,3395	0,3117	0,0637	0,3120	0,3084	0,0343	0,3492	0,3473	0,0282
Teste Dickey-Fuller	-0,7862			-4,9873***			-4,097***		
Teste Shapiro	0,8287***			0,9426***			0,9721***		
	DAX			FTSE			N225		
	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO	MÉDIA	MEDIANA	DESVIO PADRÃO
2010	0,2911	0,2922	0,0113	0,3054	0,3056	0,0124	0,2792	0,2774	0,0193
2011	0,3194	0,3187	0,0156	0,3247	0,3236	0,0154	0,3057	0,3073	0,0203
2012	0,3214	0,3186	0,0122	0,3208	0,3234	0,0173	0,2516	0,2501	0,0087
2013	0,3261	0,3266	0,0121	0,3272	0,3259	0,0095	0,2450	0,2464	0,0062
2014	0,3418	0,3344	0,0350	0,3305	0,3285	0,0271	0,2599	0,2609	0,0041
2015	0,3004	0,3011	0,0095	0,3295	0,3304	0,0178	0,2850	0,2891	0,0100
2016	0,2883	0,2884	0,0061	0,3280	0,3333	0,0187	0,3125	0,3132	0,0126

2017	0,3017	0,2965	0,0149	0,3430	0,3396	0,0125	0,3254	0,3210	0,0132
2018	0,3309	0,3307	0,0120	0,3268	0,3302	0,0221	0,3421	0,3463	0,0162
2019	0,2923	0,2835	0,0197	0,2662	0,2655	0,0099	0,3211	0,3197	0,0167
2020	0,3317	0,3376	0,0363	0,3005	0,3051	0,0197	0,3092	0,3057	0,0190
2021	0,3366	0,3378	0,0092	0,2976	0,2974	0,0037	0,2836	0,2822	0,0052
TOTAL	0,3154	0,3148	0,0264	0,3179	0,3195	0,0265	0,2943	0,2960	0,0335
Teste Dickey-Fuller	-5,0915***			-1,7255			-3,5318**		
Teste Shapiro	0,9452***			0,8455***			0,974***		

***, ** e * denotam significância estatística a 0,01, 0,05 e 0,1.

Fonte: Elaboração própria.

Apêndice 7 - Mapa da Distribuição dos Índices de Eficiência



Fonte: Elaboração própria.

Apêndice 8 - Teste de Diferença de Variância e Média dos Índices de Eficiência

Teste F									
	IBRX	MOEX	NSE	SSEC	JTOPI	DJI	DAX	FTSE	N225
IBRX									
MOEX	1,4503***								
NSE	0,7538***	0,5197***							
SSEC	0,3341	0,2303***	2,2565***						
JTOPI	1,1535***	0,7953***	0,6535***	0,2896***					
DJI	1,6997***	1,172***	0,4435***	0,1965***	1,4736***				
DAX	1,9473***	1,3427***	0,3871***	0,1715***	1,6882***	1,1457***			
FTSE	1,4891***	1,0267	0,5062***	0,2243***	1,2909***	0,876***	1,3078***		
N225	1,2054***	0,8311***	0,6253***	0,2771***	1,0450	0,7092***	1,6155***	1,2353***	
Teste de Wilcoxon									
	IBRX	MOEX	NSE	SSEC	JTOPI	DJI	DAX	FTSE	N225
IBRX									
MOEX	4107803***								
NSE	2212668***	1894394***							
SSEC	1501380***	1310159***	3124785***						
JTOPI	1955831***	1655521***	4053934***	4031561***					
DJI	752937***	459914***	2155182***	2531887***	1316790***				
DAX	1621699***	1347095***	3842860	3800699***	3455551***	6175397***			
FTSE	34198***	1111***	36413***	1185950***	79471***	118893***	37738***		
N225	3138056***	2804540***	4939601***	4963161***	4766025***	6754174***	5115897***	7513706***	

***, ** e * denotam significância estatística a 0,01, 0,05 e 0,1.

Fonte: Elaboração própria.