

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ALICE MARQUES AREDES RODRIGUES

**Relação entre paradoxos envolvendo valores fracos
e uma interpretação realista de medições quânticas**

BELO HORIZONTE
2021

Alice Marques Aredes Rodrigues

**Relação entre paradoxos envolvendo valores fracos e uma
interpretação realista de medições quânticas**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestra em Ciências

Orientador: Pablo Lima Saldanha

Belo Horizonte

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

R696r Rodrigues, Alice Marques Aredes.
Relação entre paradoxos envolvendo medições fracas e uma interpretação realista de medições quânticas / Alice Marques Aredes Rodrigues. – 2021.
66f., enc. : il.

Orientador: Pablo Lima Saldanha.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais,
Departamento de Física.
Bibliografia: f. 49-51.

1. Medição. 2. Mecânica quântica. 3. Paradoxos. I. Título. II. Saldanha, Pablo Lima. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Física.

CDU – 530.145 (043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ATA DA SESSÃO DE ARGUIÇÃO DA 667ª DISSERTAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA DEFENDIDA POR ALICE MARQUES AREDES RODRIGUES, orientada pelo professor Pablo Lima Saldanha para obtenção do grau de **MESTRE EM FÍSICA**. Às 09:00 horas de dezoito de novembro de 2021, por videoconferência, reuniu-se a Comissão Examinadora, composta pelos professores **Pablo Lima Saldanha** (Orientador - Departamento de Física/UFMG), **Leonardo Teixeira Neves** (Departamento de Física/UFMG), **Raphael Campos Drumond** (Departamento de Matemática/UFMG) e **Gabriela Barreto Lemos** (Instituto de Física/UFRJ) para dar cumprimento ao Artigo 37 do Regimento Geral da UFMG, submetendo a bacharela **ALICE MARQUES AREDES RODRIGUES** à arguição de seu trabalho de dissertação, que recebeu o título de **“Relação entre paradoxos envolvendo valores fracos e uma interpretação realista de medições quânticas”**. A candidata fez uma exposição oral de seu trabalho durante aproximadamente 50 minutos. Após esta, os membros da comissão prosseguiram com a sua arguição e apresentaram seus pareceres individuais sobre o trabalho, concluindo pela aprovação da candidata.

Belo Horizonte, 18 de Novembro de 2021.

Prof. Pablo Lima Saldanha

Orientador da estudante

Departamento de Física/UFMG

Prof. Leonardo Teixeira Neves

Departamento de Física/UFMG

Prof. Raphael Campos Drumond

Departamento de Matemática/UFMG

Profa. Gabriela Barreto Lemos

Instituto de Física/UFRJ

Candidata: Alice Marques Aredes Rodrigues



Documento assinado eletronicamente por **Leonardo Teixeira Neves, Professor do Magistério Superior**, em 18/11/2021, às 14:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

Documento assinado eletronicamente por **Pablo Lima Saldanha, Servidor(a)**, em 18/11/2021, às



14:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Raphael Campos Drumond, Professor do Magistério Superior**, em 18/11/2021, às 15:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Alice Marques Aredes Rodrigues, Usuário Externo**, em 18/11/2021, às 16:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gabriela Barreto Lemos, Usuário Externo**, em 19/11/2021, às 14:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site

[https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?](https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0)

[acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0](https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **1088041** e o código CRC **9938F47A**.

Agradecimentos

Meu primeiro agradecimento é ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro que me forneceu durante o mestrado.

Agradeço também a secretaria de pós-graduação do departamento de física da UFMG, bem como à coordenação da pós-graduação, pois foram extremamente prestativos e delicados comigo nesses últimos dois anos.

É difícil colocar em palavras o quão grata sou aos meus pais, Lucia e Reginaldo, por tudo o que fazem por mim e por todo o amor que derramam sobre mim. Obrigada por me apoiarem sempre, eu sou a garota mais afortunada do mundo por ser a filha de vocês dois. Amo vocês.

Eu jamais conseguiria terminar este trabalho se eu estivesse sozinha... Mas que sorte a minha por ter amigos que seguraram a minha mão o tempo todo, mesmo de longe. Então agradeço e dedico esse trabalho ao Alfredo, ao Bruno, ao Dhimy e ao Lucas por todas as conversas, todas as risadas, todos os momentos que estivemos juntos e por tudo o que não dá pra colocar no papel. E às mulheres incríveis que tenho ao meu lado: a Marie que é a pessoa mais gentil do mundo inteiro, uma parceira pra toda hora, e a melhor astrofísica computacional da UFMG. A Holly que é a definição de diligência e maturidade, e uma das pessoas mais espirituosas que conheço. E é claro, a Laís, que além de ser uma das físicas mais brilhantes desse país, é a melhor amiga que eu poderia ter e me acompanhou bem de perto (apesar de longe) desde o primeiro dia no mestrado. Obrigada, amigos, vocês são a melhor parte da minha vida.

Devo agradecer principalmente ao meu professor orientador, Pablo, por ter sido incrível o tempo todo. Todo o aprendizado, a paciência e o tempo dedicado a mim foram cruciais para que eu conseguisse finalizar esse trabalho. O Pablo é pra mim um exemplo de profissionalismo e humanidade. Obrigada por tudo!

Por fim, mas não menos importante, agradeço a todas as mulheres e pessoas pretas que vieram antes de mim e lutaram para que eu pudesse ocupar o espaço que eu ocupo hoje.

Resumo

Medição fraca é um protocolo de medição para sistemas quânticos que consiste em um acoplamento fraco entre o sistema quântico e o aparato de medição para conjuntos de sistemas pré-selecionados e pós-selecionados, tal que os resultados das medições, denominados valores fracos, podem estar fora do espectro de autovalores permitidos ou esperados, e dos quais muitos paradoxos surgiram. O artigo que introduz o conceito de medição fraca e valor fraco [1] já demonstra esse caráter paradoxal do procedimento, uma vez que é intitulado “como o resultado de uma medição de uma componente do spin de uma partícula de spin-1/2 pode ser $100\hbar$ ”. Desde então, muitos outros paradoxos quânticos foram propostos tendo como base valores fracos. No paradoxo das três caixas, por exemplo, afirma-se que uma partícula pode ser encontrada com certeza em duas posições diferentes. No paradoxo do gato de Cheshire quântico, afirma-se que um fóton pode ser separado de sua polarização. No princípio da casa de pombos para sistemas quânticos, afirma-se que é possível dispor três partículas em duas caixas sem que duas partículas estejam na mesma caixa. Entre outros exemplos. O objetivo deste trabalho é mostrar como a interpretação realista do valor fraco, que está na origem de todos os paradoxos quânticos citados, é equivalente a uma interpretação realista do próprio processo de medição quântica, que revelaria uma realidade subjacente do sistema que continua a mesma depois que a medição é realizada. Demonstramos que, ao atribuir realidade aos autovalores dos estados pré- e pós-selecionados ao mesmo tempo, sempre se chega às mesmas conclusões que com a suposição de uma realidade nos paradoxos citados, bem como em outros. Desta forma, uma maneira simples de evitar os paradoxos citados, além de outros paradoxos com valor fraco, é negar uma interpretação realista para o processo de medição quântica.

Palavras-chave: Medição Fraca, Valor Fraco, Medições Quânticas, Paradoxos Quânticos

Abstract

Weak measurements are a measurement protocol for quantum systems that consists in a weak coupling between the quantum system and the measurement device for preselected and post selected ensembles, such that the results of the measurements, called weak values, may lay far from the range of allowed or expected values, and from which many paradoxes have arisen. In fact, the original weak measurements paper already shows a paradox, since it is entitled “How the Result of a Measurement of a Component of the Spin of a spin- $\frac{1}{2}$ Particle Can Turn Out to be $100\hbar$ ”. Since then many other quantum paradoxes were proposed based on the weak values. In the three-boxes paradox, for instance, it is stated that one particle can be found with certainty in two different boxes. In the quantum Cheshire cat paradox, it stated that a photon can be separated from its polarization. In the quantum pigeonhole principle, it is stated that we can put three particles into two boxes without two particles being in the same box. And there are many other examples. The aim of this work is to show how the realistic interpretation of the weak value, which is at the origin of all cited quantum paradoxes, is equivalent to a realistic interpretation of quantum measurements, that would reveal an underlying reality of the system that continues the same after the measurement is performed. We demonstrate that, by attributing reality to the preselect and postselected states at the same time, one always finds the same conclusions as with the assumption of a reality in the cited paradoxes, as in others. In this way, a simple way to avoid all cited paradoxes is to deny a realistic interpretation for the weak value.

Keywords: Weak Measurements, Weak Values, Quantum Measurements, Quantum Paradoxes.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	10
2	MEDIÇÃO FRACA E VALOR FRACO	13
2.1	Medição de von Neumann	13
2.2	Medição Fraca	17
2.3	Algumas interpretações do valor fraco	20
3	PARADOXOS COM VALORES FRACOS	23
3.1	O valor fraco de uma componente do spin de partículas de spin 1/2	23
3.2	O problema das três caixas	25
3.3	Gato de Cheshire Quântico	27
3.4	Violação do princípio da casa de pombos para sistemas quânticos	30
3.5	Partículas de spin 2	32
3.6	Os paradoxos de valor fraco como efeitos de interferência	34
4	VALORES FRACOS ANÔMALOS E INTERPRETAÇÕES REALIS- TAS DE MEDIÇÕES QUÂNTICAS	38
4.1	Proposta Geral	38
4.2	Valor fraco de uma componente do spin de uma partícula de spin 1/2	40
4.3	Paradoxo das caixas	41
4.4	Gato de Cheshire Quântico	43
4.5	Violação do princípio da casa dos pombos para sistemas quânticos	45
4.6	Partículas de spin-2	46
5	CONCLUSÃO	48
	REFERÊNCIAS	49
	APÊNDICES	52
	APÊNDICE A – OPERADORES DO PROBLEMA DAS TRÊS CAI- XAS	53
	APÊNDICE B – OPERADORES GATO DE CHESHIRE QUÂNTICO	55

APÊNDICE C – OPERADORES DO PROBLEMA DA VIOLAÇÃO DO PRINCÍPIO DA CASA DE POMBOS PARA SISTEMAS QUÂNTICOS	58
APÊNDICE D – CÓDIGO FONTE PARA A OBTENÇÃO DOS NOVOS OPERADORES	59

1 Introdução

Medição é um tópico muito importante em mecânica quântica. Por vezes, a simples observação de um fenômeno descrito pela mecânica quântica o afeta de maneira que ele já não pode mais ser descrito da mesma forma que era antes da observação (ou antes da medição). E para além desse caráter tão singular da medição, ela também desempenha o papel de caracterização de uma variável quântica, quaisquer propriedades que se possam atribuir ao estado de um sistema devem, a priori, serem mensuráveis e conseqüentemente podem ser descritas como um *observável* [2].

Em 1988, Yakir Aharonov, David Albert e Lev Vaidman apresentaram um procedimento de medição que, em suas próprias palavras, introduzia um novo valor para uma variável quântica: o valor fraco, produto de uma medição fraca [1]. No capítulo 2 deste trabalho discorremos sobre o procedimento de medição fraca, que surge como um processo de medição derivado da medição de von Neumann (também discutida no capítulo 2) considerando sistemas pré- e pós-selecionados.

Desde a sua origem, a medição fraca se mostrou uma ferramenta experimental bastante interessante. Em metrologia quântica, por exemplo, a medição fraca pode oferecer um efeito de amplificação que permite a medição de alguns parâmetros que seriam muito difíceis de se obter se feitos de outra forma, um exemplo disso é a observação do efeito spin Hall para a luz através da medição fraca [3]. Efeito Hall é como se denomina o efeito da aplicação de um campo em partículas provocando nelas um deslocamento perpendicular a esse campo; quando esse deslocamento depende também do spin das partículas o efeito recebe o nome efeito spin Hall. Já o efeito spin Hall para a luz é a proposição de que ao submeter a luz a passar por um material com um dado gradiente de índice de refração seria provocado nesse feixe de luz um deslocamento perpendicular ao índice de refração e proporcional ao spin dos fótons. A estimativa é a de que este deslocamento seja da ordem de 1\AA , para alcançar esse nível de sensibilidade os autores de [3] utilizam a medição fraca como técnica de amplificação. Uma escolha apropriada dos estados de pré- e pós-seleção possibilitou um deslocamento 10^4 vezes maior que o deslocamento esperado para o efeito spin Hall para a luz.

A medição fraca já foi utilizada também na determinação de variáveis complexas, como por exemplo no artigo de 2011 [4] que sugere um método para a “medição direta” da função de onda de um fóton. A função de onda utilizada para descrever um sistema quântico qualquer é, em geral, uma distribuição complexa e determinações experimentais dessa função de onda são geralmente realizadas por métodos de tomografia, que são métodos indiretos e o ponto central do artigo [4] é utilizar do fato de que o valor fraco

de uma medição pode ser um número complexo, cuja parte real é dada pelo desvio do ponteiro do medidor e a parte imaginária corresponde a um deslocamento no momento da função de onda do medidor. Em suma, a proposta é reduzir a perturbação induzida pela medição da posição do fóton, isto é, realizando uma medição fraca da posição do fóton, e então medir o momento normalmente (pós-seleção), seria então possível “medir diretamente” a função de onda transversal. Um feixe de fótons idênticos com função de onda $\psi(x)$ é preparado e em uma dada posição x , onde se deseja medir fracamente a posição $\Pi_x = |x\rangle\langle x|$, a polarização linear do fóton é rotacionada por um ângulo α , uma rotação sutil o suficiente para que não seja possível distinguir quais fótons tinham $X = x$ e então, através de lentes de transformada de Fourier e uma fenda são pós-selecionados aqueles fótons com $p = 0$. A rotação média do ponteiro, a polarização linear, é proporcional à parte real do valor fraco. Sua variável de ponteiro complementar, a rotação na base de polarização circular, é proporcional à parte imaginária do valor fraco. É possível então se reconstruir a função de onda dos fótons com as medições de momento no processo de pós-seleção combinadas com medições de polarização.

Uma outra aplicação interessante de medições fracas em propostas experimentais é de um experimento mais recente, em que um grupo de pesquisadores [5] utilizou de uma sequência de medições fracas para determinar a relação entre o surgimento de uma fase geométrica e os efeitos de uma série de medições quânticas generalizadas em um sistema quântico. Quando sistemas quânticos passam por processos adiabáticos ao longo de uma trajetória fechada no espaço de fase, o vetor de estado que descreve o sistema adquire uma fase, denominada fase geométrica ou fase de Berry. E no experimento de 2019 uma sequência de medições fracas com a intensidade da medição variável revelou que quanto mais forte a medição, maior é a fase geométrica acumulada. Uma análise mais minuciosa das aplicações de medições fracas podem ser encontradas na referência [6].

Mas apesar da medição fraca ter se mostrado um procedimento proveitoso para técnicas experimentais, a interpretação do valor fraco é bastante controversa. Enquanto os autores do artigo original encaram o valor fraco com um olhar realista [7, 8], há alguns outros pesquisadores que não compartilham desta visão [9, 10]. E veremos que é justamente essa interpretação realista que dá origem a paradoxos no contexto da medição fraca. Muitos artigos já foram publicados com títulos que despertam interesse em razão do seu caráter paradoxal fantástico e cuja origem pode ser justificada simplesmente com a leitura do valor fraco como um resultado que pode de fato descrever o observável, e aqui atrelamos essa leitura a atribuição de realidade ao próprio processo de medição. Como abordaremos no capítulo 3, é possível através de uma interpretação realista do valor fraco em uma medição fraca afirmar que o valor de um observável está muito além dos seus autovalores possíveis, como é o caso do experimento proposto no artigo original sobre medições fracas [1], em que o valor fraco de uma componente de spin de partículas de spin 1/2 resulta em um valor muito maior que $\pm\hbar/2$, que são os autovalores esperados. É possível ainda propor

que uma propriedade intrínseca de um fóton pode ser separado dele, como é o caso do paradoxo do gato de Cheshire quântico [11], em que resultados de medições fracas sugerem que a polarização de um fóton pode se encontrar em um braço de um interferômetro onde não foi identificado fóton algum. Ou ainda sugerir que uma única partícula pode ser encontrado com certeza em mais de uma posição ao mesmo tempo [12].

Muitos desses paradoxos com valores fracos já foram explicados separadamente como um efeito de interferência quântica [13–15], o que é uma maneira de eliminar o caráter paradoxal desses resultados. O objetivo deste trabalho é associar esses paradoxos envolvendo valores fracos com interpretações realistas do processo de medição quântica, que sabemos que pode ser controverso, e assim evitar de vez esses resultados paradoxais.

2 Medição fraca e valor fraco

A fim de obter informações sobre uma grandeza relacionada a um sistema físico, se faz necessária uma medição desta grandeza no sistema. Uma das principais e mais intrigantes diferenças entre um sistema quântico e um sistema clássico é o efeito que uma medição tem no sistema, visto que uma medição pode, em geral, alterar completamente o estado de um sistema quântico e o seu resultado está limitado pelo espectro de autovalores do observável em questão.

Neste capítulo abordaremos um protocolo de medição quântica, denominado medição fraca, que advém de uma ligeira mudança no protocolo de medição de von Neumann. Na seção (2.1) abordamos a construção da medição projetiva de von Neumann e na seção (2.2) falamos da medição fraca. Por fim, na seção (2.3), discutimos brevemente a interpretação do valor fraco.

2.1 Medição de von Neumann

A ideia de medição quântica é, em geral, apresentada pela primeira vez nos cursos básicos, bem como nas bibliografias mais populares de mecânica quântica, na qualidade da intitulada **medição projetiva** [16]. Essa denominação decorre da condição de que o resultado de uma medição quântica é sempre um autovalor do observável medido.

O físico e matemático John von Neumann descreveu em seu livro “*Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*” [17] uma proposta para tratar deste processo de medição quântica levando em conta a interação entre o sistema que se mede e o aparato utilizado para realizar a medição. Em síntese, a medição de von Neumann busca obter informações sobre uma variável dinâmica \mathcal{A} do sistema quântico \mathcal{S} observando a interação deste sistema com um medidor \mathcal{M} ¹, que também é tratado como um sistema quântico e esta proposta de von Neumann pode ser simplificada da seguinte maneira:

A princípio, considera-se que o sistema e o aparato de medição não estão conectados e que ambos, \mathcal{S} e \mathcal{M} , podem ser descritos por seus respectivos estados quânticos. Se a grandeza física \mathcal{A} que se quer medir é representada por um observável A , pode-se considerar, por exemplo, que o sistema quântico a ser medido está em um estado inicial $|\psi_{in}^{(S)}\rangle$ que pode ser expandido em termos dos autoestados $|a_n\rangle$ do observável A :

$$|\psi_{in}^{(S)}\rangle = \sum_n \alpha_n |a_n\rangle. \quad (2.1)$$

¹ Que algumas vezes pode ser um grau de liberdade do próprio sistema.

Já o aparato de medição pode ser associado a uma função de onda $\phi_0(q)$ própria a ele. Aqui iremos assumir por simplicidade que essa função de onda é unidimensional e que sua posição e momento são representados por meio dos observáveis canônicos Q e P , respectivamente. Na representação no espaço de posição, $|q\rangle$, por exemplo, o estado do medidor é dado por:

$$|\phi_{in}^{(M)}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dq \phi_0(q) |q\rangle \quad (2.2)$$

e, conseqüentemente, a representação desta função no espaço de momento é a transformada de Fourier de $\phi_0(q)$.

Para os fins de interesse deste trabalho, uma função de onda em especial será considerada para a descrição do medidor: a função Gaussiana. Consideremos então que a função de onda inicial do medidor é uma distribuição Gaussiana do tipo:

$$\phi_0(q) = \frac{1}{(2\pi\Delta^2)^{1/4}} \exp\left(-\frac{q^2}{4\Delta^2}\right), \quad (2.3)$$

onde Δ corresponde à dispersão da função.

No início do processo, o sistema conjunto composto pelo sistema quântico e o aparato pode, portanto, ser representado por:

$$\begin{aligned} |\Psi_{in}^{(S+M)}\rangle &= |\psi_{in}^{(S)}\rangle \otimes |\phi_{in}^{(M)}\rangle \\ &= \left(\sum_n \alpha_n |a_n\rangle\right) \otimes \left(\int_{-\infty}^{\infty} dq \phi_0(q) |q\rangle\right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Sistema e medidor devem estar correlacionados para que uma leitura do medidor revele informações sobre o sistema e para isso \mathcal{S} e \mathcal{M} são levados a interagir por um certo intervalo de tempo $\Delta t = T - t_0$. Assumimos que nesse intervalo há um termo do Hamiltoniano do sistema composto que prevalece sob os outros termos do Hamiltoniano que atuam apenas no sistema ou no medidor. Esse Hamiltoniano de interação é geralmente do tipo:

$$H = g(t)A \otimes P = g(t)AP, \quad (2.5)$$

onde A é o observável que se quer medir, P é a variável canônica de momento associada ao medidor, com posição conjugada Q , e $g(t)$ é uma função com suporte compacto² no intervalo em que a interação ocorre, sendo $\int_{t_0}^T g(t)dt = g_0$.

² O suporte de uma função é o subconjunto do domínio desta função que contém os elementos diferentes de zero. Então, quando dizemos que a função $g(t)$ tem um suporte no intervalo em que a interação ocorre, isso significa que ela é diferente de zero apenas no intervalo da medição.

Por conseguinte, dado o Hamiltoniano (2.5), o operador de evolução temporal associado a ele é:

$$\begin{aligned} U(t) &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^T H dt\right) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} AP \int_{t_0}^T g(t) dt\right) \\ &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} g_0 AP\right), \end{aligned} \quad (2.6)$$

de modo que a evolução do sistema conjunto seja:

$$\begin{aligned} U(t) |\Psi_{in}^{(S+M)}\rangle &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} g_0 AP\right) \left(\sum_n \alpha_n |a_n\rangle \int_{-\infty}^{\infty} dq \phi_0(q) |q\rangle\right) \\ &= \sum_n \alpha_n \int_{-\infty}^{\infty} dq \exp\left(-\frac{i}{\hbar} g_0 a_n P\right) \phi_0(q) |a_n\rangle |q\rangle. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ao fazer uma expansão da exponencial em (2.7) em uma série de potências, identifica-se a expansão em série de Taylor de $\phi_0(q)$:

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} g_0 a_n P\right) \phi_0(q) &= \exp\left[-\frac{i}{\hbar} g_0 a_n \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q}\right)\right] \phi_0(q) \\ &= \exp\left(-g_0 a_n \frac{\partial}{\partial q}\right) \phi_0(q) \\ &= \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{K!} (-g_0 a_n)^K \frac{\partial^K}{\partial q^K} \phi_0(q) \\ &= \phi_0(q - g_0 a_n), \end{aligned} \quad (2.8)$$

resultado já esperado pois $\exp\left(-\frac{i}{\hbar} g_0 a_n P\right)$ deve atuar em $\phi_0(q)$ como um gerador de translação [18].

Após a evolução, o estado do sistema conjunto é, portanto:

$$|\Psi^{(S+M)}\rangle = \sum_n \alpha_n |a_n\rangle \int_{-\infty}^{\infty} dq \phi_0(q - g_0 a_n) |q\rangle. \quad (2.9)$$

A equação (2.9) representa uma combinação de estados do medidor e do sistema que agora estão correlacionados, note que a função de onda que descreve o medidor está deslocada por uma quantidade proporcional a a_n se comparada a sua forma inicial. Se a largura da função for sempre muito menor que a diferença $a_m - a_n$ para qualquer m e n , é possível distinguir cada uma das funções do valor obtido para um dado q com um particular valor de a_n . Então, cada estado $|a_n\rangle$ do sistema é igual à função de onda original

do medidor deslocada por uma quantidade proporcional ao seu autovalor correspondente a_n . Esse desvio na função de onda do medidor pode ser entendido como o deslocamento de uma agulha em um instrumento de medição e um medidor que apresenta essa característica pode ser rotulado como um medidor do tipo ponteiro.

Em síntese, para um sistema cujo estado inicial é uma superposição dos autoestados do observável A que se quer medir, $|\psi_{in}\rangle = \sum_n \alpha_n |a_n\rangle$, o efeito do Hamiltoniano de interação (2.5) é conectar os estados do medidor com os estados do sistema quântico, equação (2.9), que para a Gaussiana (2.3) é:

$$|\Psi^{(S+M)}\rangle = \frac{1}{(2\pi\Delta^2)^{1/4}} \sum_n \alpha_n |a_n\rangle \int_{-\infty}^{\infty} dq \exp\left(-\frac{(q - g_0 a_n)^2}{4\Delta^2}\right) |q\rangle. \quad (2.10)$$

Utilizando o software *Wolfram Mathematica* elaboramos um exemplo ilustrativo da função de onda do medidor antes e depois da interação com o sistema.

Para a construção da figura (1) supomos um observável A fictício que possui 3 autovalores a_n distintos, sendo eles 2, 4 e 6, com autoestados correspondes $|a_1\rangle$, $|a_2\rangle$ e $|a_3\rangle$. Supomos também que o sistema onde a medição será realizada é preparado em um estado inicial $|\psi_{in}\rangle = (|a_1\rangle + |a_2\rangle + |a_3\rangle)/\sqrt{3}$ e que a função de onda do medidor é uma Gaussiana como na equação (2.3), com dispersão $\Delta = 0.3$, muito menor que a diferença entre os autovalores, e a intensidade de interação $g_0 = 1$.

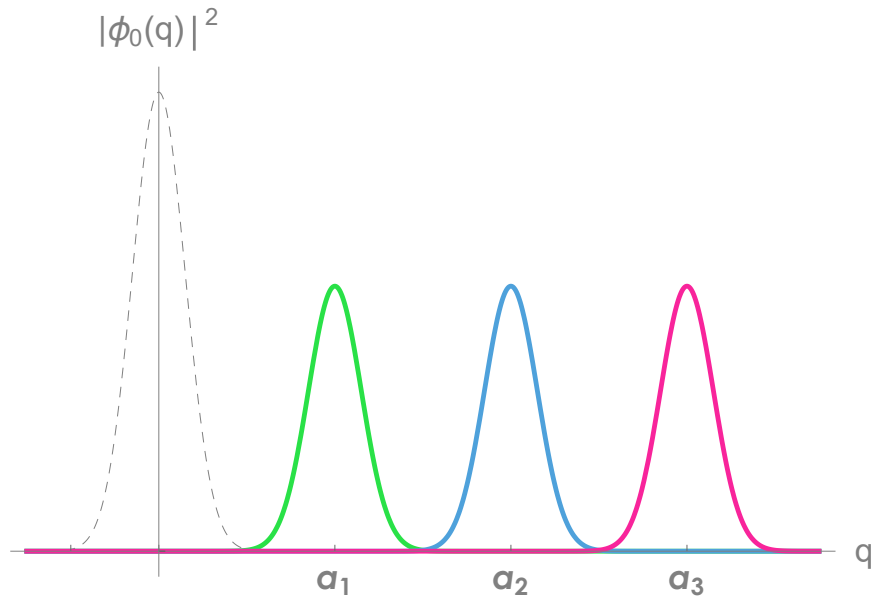


Figura 1 – Representação do módulo quadrado de uma função de onda Gaussiana de um medidor, descrito inicialmente pela equação (2.3), após interagir com um sistema quântico no estado inicial $|\psi_{in}\rangle = (|a_1\rangle + |a_2\rangle + |a_3\rangle)/\sqrt{3}$. A imagem foi obtida considerando a dispersão $\Delta = 0.3$ e $g_0 = 1$.

Na figura, a linha cinza tracejada representa o módulo quadrado da função de onda do medidor antes da medição e as linhas laranjadas representam o módulo quadrado da

função de onda após a interação com um sistema no estado inicial $|\psi_{in}\rangle = (|a_1\rangle + |a_2\rangle + |a_3\rangle)/\sqrt{3}$. Note que após a interação, o módulo quadrado da função de onda do medidor passa a ser um conjunto de Gaussianas bem separadas, onde cada uma está centrada em um valor corresponde a um dos autovalores do observável medido.

Ao medirmos então a variável q do medidor, se o valor obtido for próximo de 2 sabemos que o valor de a_n é 2, se for próximo de 4 sabemos que $a_n = 4$ e assim por diante. E o estado final do sistema corresponderá ao autovetor correspondente ao autovalor obtido (considerando sistemas não-degenerados).

2.2 Medição Fraca

Em um artigo publicado em 1988 [1], Yakir Aharonov, David Albert e Lev Vaidman propõem que “*sob algumas condições naturais de fraqueza no processo de medição, o seu resultado pode, consistentemente, definir um novo tipo de valor para uma variável quântica, denominado **valor fraco***”³ e apresentam o conceito de **medição fraca**, um novo protocolo de medição derivado do protocolo de von Neumann.

Até o momento da interação entre o sistema quântico e o medidor, a descrição do procedimento de uma medição fraca é similar ao de von Neumann descrito na seção anterior. Primeiramente, o sistema quântico a ser medido é preparado em um estado conhecido, denominado *estado de pré-seleção*, que pode ser expandido em uma combinação linear dos autoestados $|a_n\rangle$ do observável A a ser medido:

$$|\psi_{in}\rangle = \sum_n \alpha_n |a_n\rangle. \quad (2.11)$$

A medição será realizada por intermédio de um medidor, que também é um sistema quântico e pode ser descrito pelo estado inicial $|\phi_{in}\rangle$, podendo ser representado no espaço de posições pela função de onda $\phi_0(q)$, ou no espaço de momentos, sendo então representada pela transformada de Fourier da função de onda no espaço de posições, $\tilde{\phi}_{in}(p)$:

$$|\phi_{in}\rangle = \int dq \phi_0(q) |q\rangle \quad (2.12)$$

O sistema composto pelo sistema quântico a ser medido e medidor é então:

$$|\Psi_{in}\rangle = |\psi_{in}\rangle \otimes |\phi_{in}\rangle. \quad (2.13)$$

Na sequência, o sistema quântico é acoplado ao medidor através de um Hamiltoniano de interação, como o da equação (2.5):

³ Ref. [1], Abstract, Página 1351, Tradução livre

$$H = -g(t)AP, \quad (2.14)$$

no entanto, a diferença crucial entre a proposta do artigo [1] e o protocolo de von Neumann é que agora o acoplamento entre o sistema e o medidor não é tão intenso, é um acoplamento fraco e este é um dos motivos deste novo protocolo ser denominado “medição fraca”.

A fraqueza na interação pode aparecer na função $g(t)$, que como vimos na seção 2.1 possui um suporte compacto no intervalo da medição, tal que $\int_{t_0}^T g(t)dt = g_0$. No caso de uma medição fraca, a fraqueza na interação se deve a g_0 muito pequeno.

O estado do sistema composto após a interação é $|\Psi\rangle = U(t) |\Psi_{in}\rangle$, sendo $U(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int H dt\right)$ o operador de evolução temporal, que para um Hamiltoniano como o da equação (2.14) vimos na seção (2.1) resultar em:

$$|\Psi\rangle = \sum_n \alpha_n |a_n\rangle \int_{-\infty}^{\infty} dq \phi_{in}(q - g_0 a_n) |q\rangle. \quad (2.15)$$

Um ponto de destaque na proposta de Aharonov, Albert e Vaidman (AAV, daqui em diante) é que resultados interessantes podem surgir quando se faz uma *pós-seleção*. A pós-seleção é a projeção de um estado $|\psi_f\rangle$ conhecido no sistema quântico, contanto que $\langle\psi_f|\psi_{in}\rangle \neq 0$.

Fazendo a pós-seleção de um estado $|\psi_f\rangle$ no sistema composto $|\Psi\rangle$ obtém-se:

$$\begin{aligned} \langle\psi_f|\Psi\rangle &= \langle\psi_f|\left[\sum_n \alpha_n |a_n\rangle \int_{-\infty}^{\infty} dq \phi_{in}(q - g_0 a_n) |q\rangle\right] \\ \langle\psi_f|\Psi\rangle &= \sum_n \alpha_n \langle\psi_f|a_n\rangle \int_{-\infty}^{\infty} dq \phi_{in}(q - g_0 a_n) |q\rangle \\ &= \sum_n \langle a_n|\psi_{in}\rangle \langle\psi_f|a_n\rangle \int_{-\infty}^{\infty} dq \phi_{in}(q - g_0 a_n) |q\rangle, \end{aligned} \quad (2.16)$$

pois $\alpha_n = \langle a_n|\psi_{in}\rangle$.

É possível fazer uma expansão da função $\phi(q - g_0 a_n)$ em torno de q :

$$\phi(q - g_0 a_n) \simeq \phi(q) + \frac{d\phi(q)}{dq}(-g_0 a_n) + \frac{d^2\phi(q)}{dq^2} \frac{(-g_0 a_n)^2}{2!} + \dots \quad (2.17)$$

e substituí-la em (2.16):

$$\begin{aligned} \langle\psi_f|\Psi\rangle &= \sum_n \langle\psi_f|a_n\rangle \langle a_n|\psi_{in}\rangle \int_{-\infty}^{\infty} dq \left[\phi(q) + \frac{d\phi(q)}{dq}(-g_0 a_n) + \dots \right] |q\rangle \\ &= \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} dq \left[\langle\psi_f|a_n\rangle \langle a_n|\psi_{in}\rangle \phi(q) - \frac{d\phi(q)}{dq} g_0 a_n \langle\psi_f|a_n\rangle \langle a_n|\psi_{in}\rangle + \dots \right] |q\rangle, \end{aligned}$$

como g_0 muito pequeno, os termos de ordem $\mathcal{O}(g^2)$ podem ser desprezados. E uma vez que $\mathbb{I} = \sum_n |a_n\rangle \langle a_n|$ e $A = \sum_n a_n |a_n\rangle \langle a_n|$, temos então

$$\begin{aligned}
 \langle \psi_f | \Psi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dq \left[\langle \psi_f | \psi_{in} \rangle \phi(q) - \frac{d\phi(q)}{dq} g_0 a_n \langle \psi_f | A | \psi_{in} \rangle + \dots \right] |q\rangle \\
 &= \langle \psi_f | \psi_{in} \rangle \int_{-\infty}^{\infty} dq \left[\phi(q) - \frac{d\phi(q)}{dq} g_0 \frac{\langle \psi_f | A | \psi_{in} \rangle}{\langle \psi_f | \psi_{in} \rangle} + \dots \right] |q\rangle \\
 &= \langle \psi_f | \psi_{in} \rangle \int_{-\infty}^{\infty} dq \left[\phi(q) - \frac{d\phi(q)}{dq} g_0 A_w + \dots \right] |q\rangle \\
 &\approx \langle \psi_f | \psi_{in} \rangle \int_{-\infty}^{\infty} dq \phi(q - g_0 A_w) |q\rangle,
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

onde se identifica A_w como o valor fraco do observável A definido como:

$$A_w = \frac{\langle \psi_f | A | \psi_{in} \rangle}{\langle \psi_f | \psi_{in} \rangle}. \tag{2.19}$$

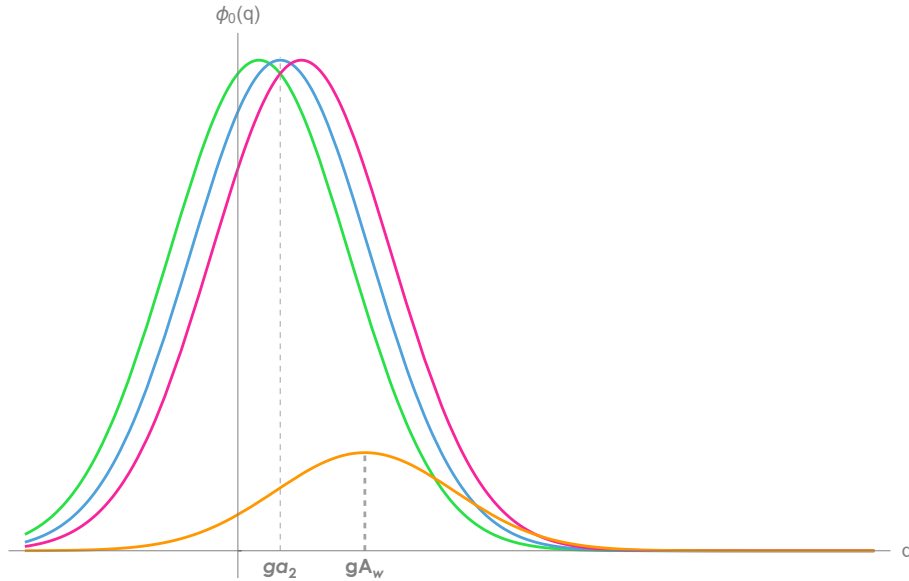


Figura 2 – Representação do deslocamento da função de onda para sistemas pré-selecionados e pós-selecionados considerando uma medição fraca.

A equação (2.18) equivale a função de onda original do medidor deslocada por um dado valor, neste caso o valor fraco A_w , definido em (2.19). Por se tratar de um desvio na função de onda do medidor, o que para um medidor tipo ponteiro representa o resultado da medição, AAV interpretam o valor fraco como o resultado da medição do observável A . A menor amplitude da função de onda deslocada reflete o fato de que há uma probabilidade menor que 1 para que a pós-seleção considerada aconteça.

A figura (2) retrata o deslocamento da função de onda do medidor para a proposta de AAV. A curva laranja representa o deslocamento da função de onda para sistemas

pré-selecionados e pós-selecionados considerando uma medição fraca, segundo a equação (2.18). As curvas verde, azul e rosa representam o deslocamento correspondente a cada um dos autovalores do observável e devido a intensidade da interação, essas curvas acabam se sobrepondo. A imagem foi desenvolvida considerando o mesmo observável e o mesmo estado inicial considerado na elaboração da figura (1), $|\psi_{in}\rangle = (|a_1\rangle + |a_2\rangle + |a_3\rangle)/\sqrt{3}$. Como o valor fraco é fruto de uma pós-seleção, o estado de pós-seleção proposto para a imagem (2) foi $|\psi_f\rangle = -\frac{3}{5}|a_2\rangle + \frac{4}{5}|a_3\rangle$. Já para a função de onda do medidor, consideramos $\Delta = 0.3$ e $g_0 = 0.05$. Perceba como a curva roxa está centrada em um valor maior que 6, o maior autovalor de A .

Vale ressaltar que a nossa dedução do valor fraco foi realizada tendo como pressuposto que g_0 é muito pequeno e que isso caracteriza a fraqueza da medição. No entanto uma característica indispensável na medição fraca é que a razão entre $g_0 A_w$ e Δ deve ser muito menor que 1, $g_0 A_w/\Delta \ll 1$.

2.3 Algumas interpretações do valor fraco

Desde a publicação do artigo precursor dos conceitos de medição fraca e valor fraco em 1988, há ainda alguns conflitos sobre o que realmente significa o valor fraco. Dedicamos esse seção a uma brevíssima revisão de diferentes pontos de vista quanto ao significado do valor fraco.

No artigo original [1], os autores transmitem a ideia de que o desvio da função de onda do medidor para um conjunto pré- e pós-selecionado como descrito na seção (2.2) é um resultado legítimo da medição do observável. Não só o próprio título do artigo, “*Como o resultado de uma medição de uma componente de spin de partículas de spin 1/2 pode ser igual a $100\hbar$* ”⁴, já denota essa ideia e outros excertos do artigo como:

“O valor medido da componente do spin correspondente a essa função de onda é $\tan(\alpha/2)$ ”.⁵

reforçam esse posicionamento. É claro que gera curiosidade o apontamento de que a medição de um observável pode resultar em um valor diferente dos seus autovalores, mas como veremos adiante essa alegação que parece paradoxal só ocorre devido ao atributo realista que se dá para o valor fraco.

No ano seguinte a publicação do artigo original, 1989, três comentários foram publicados na mesma revista em que o artigo de AVV foi publicado um ano antes. Os dois primeiros comentários [9,10] tinham um olhar mais crítico sobre a ideia do valor, enquanto

⁴ *How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-1/2 particle can turn out to be 100*, em inglês

⁵ Ref. [1], Página 1353, Tradução livre

o terceiro comentário [19] é de dois dos autores do artigo de 1988, Yakir Aharonov e Lev Vaidman e fazia as vezes de uma réplica aos comentários anteriores.

Vale a pena abordar aqui a análise do primeiro dos comentários, de A. J. Leggett [9], que desaprova a semântica utilizada por AAV, expressando que as palavras “valor” e “medição” não são apropriadas para o que AAV propunha e que a medição fraca em pouco contribui para a teoria de medição quântica pois enquanto AAV assumem que a interação descrita pelo Hamiltoniano (2.5) define um procedimento padrão de medição e que por isso o resultado dessa mesma interação, com um critério de fraqueza, definira um novo valor pro observável, Legget discorda dessa afirmação.

Ainda no ano de 1989, um dos artigos mais relevantes sobre o tema foi publicado. No artigo, I. M. Duck et. al. [13] não apenas revisam a teoria de AAV consertando alguns erros, como também propõem um análogo óptico ao experimento proposto em [1] e sugerem que o valor fraco para o exemplo em específico proposto no artigo pode ser apenas um efeito de interferência. Desde então, tratar valores fracos como um efeito de interferência tem sido a forma mais comum e adequada para abordar os problemas de valores fracos anômalos principalmente porque a abordagem dos problemas de valor fraco como um efeito de interferência não permite que os resultados sejam interpretados de uma maneira que permita conclusões inconsistentes com a mecânica quântica, ou seja, os valores fracos não são valores reais para a variável em questão, são apenas efeitos de interferência. Um trecho do artigo de Duck et. al. sintetiza muito bem isso:

“Foi mostrado que o efeito surpreendente apontado por AAV é uma consequência de interferência construtiva e destrutiva entre duas amplitudes complexas. Apesar de surpreendente, o efeito não é paradoxal de forma alguma e não envolve mais nada além da mecânica quântica tradicional”⁶

Abordaremos brevemente o tópico de valores fracos como um efeito de interferência na última seção do próximo capítulo.

De 1989 em diante, Yakir Aharonov e Lev Vaidman, principalmente, têm publicado um pequeno número de artigos em que revisitam a sua definição de valor fraco, nunca deixando de reiterar o que já haviam deixado claro em 1988: para eles o valor fraco define uma nova descrição para um observável. Em todos esses artigos fica clara a visão realista que os autores tem da teoria que propuseram. Ainda em janeiro de 1990, por exemplo, em um artigo intitulado “*Propriedades de um sistema quântico durante o intervalo de tempo entre duas medições*”⁷ [7], no qual além do valor fraco eles exploram o formalismo de vetor de dois-estados⁸ eles concluem:

⁶ Ref. [13], Seção V, Página 2117, Tradução livre

⁷ “*Properties of a quantum system during the time interval between two measurements*”, em inglês

⁸ Uma proposta de que é possível descrever um sistema quântico entre dois eventos considerando um estado que evolui “para frente no tempo” e um estado que evolui “para trás no tempo”

“O valor efetivo de A para qualquer interação (fraca o suficiente) com os sistemas pertencentes a conjuntos pré-selecionados e pós-selecionados é, de fato, o valor fraco A_w . Este resultado não contradiz a teoria, mas sua explicação na abordagem padrão é bastante sutil e se deve a interferências quânticas peculiares. Medições fracas desse tipo são uma promessa para importantes aplicações. Quando executado em um conjunto de sistemas que são pré-selecionados e pós-selecionados, elas podem amplificar efetivamente ou "ajustar" qualquer variável física para um certo valor (mesmo que proibido).”⁹

Outro exemplo é o artigo bastante emblemático “*Weak Measurements Elements of Reality*” [8] publicado por Lev Vaidman em 1996, onde ele adota a ideia de que “para qualquer resultado definitivo de uma medição há ali um elemento de realidade correspondente” e na sequência já desenvolve a ideia de que o desvio do ponteiro em um medidor tipo ponteiro definiria o resultado de uma medição e, portanto, um elemento de realidade. Para ele, portanto, uma vez que o valor fraco surge de um desvio na função de onda do medidor, o valor fraco de uma medição pode ser definido como um elemento de realidade

Por fim, uma citação que sintetiza toda essa ideia por parte dos autores originais de que o valor fraco é de fato um valor do observável no contexto em que se apresenta é de um artigo do Vaidman publicado em 2017 [20]:

“Nossa descoberta de que o valor fraco é mais parecido com um autovalor do que com um valor esperado e que é uma propriedade de um único sistema e não de um conjunto está longe de ser aceita, de modo que a revolução ainda está em andamento.”¹⁰

E de fato o valor fraco gera controvérsias quando se trata de sua interpretação, mas o panorama que temos hoje é de um lado aqueles que defendem o valor fraco como uma característica que define o observável e aqueles que sustentam a noção de que o valor fraco nada mais é do que um efeito de interferência e que por isso não definiria o observável medido.

⁹ Ref. [7], Seção X, Página 19, Tradução Livre

¹⁰ Ref. [20], Seção 6, Página 7, Tradução livre.

3 Paradoxos com valores fracos

A definição do valor fraco de um observável, equação (2.19), possibilita resultados e interpretações que parecem contraditórios com as próprias leis da mecânica quântica dependendo da escolha dos estados de pré- e pós-seleção. Estes resultados de medições fracas podem, por vezes, serem absurdos, o que acaba por promover paradoxos ou, como forma de evitar a expressão “paradoxos”, alguns preferem se referir a esses resultados como valores fracos anômalos. Neste capítulo abordaremos alguns desses resultados atípicos.

3.1 O valor fraco de uma componente do spin de partículas de spin $1/2$

O artigo [1] que introduz o conceito de medições fracas e valores fracos é intitulado “*Como o resultado de uma medida de uma componente de spin de partículas de spin $1/2$ pode ser igual a $100\hbar$?*”¹ e já demonstra pelo título ser ele próprio um paradoxo com valor fraco, pois é de se esperar, pela teoria da mecânica quântica, que a medição de um observável resulte em um de seus auto-valores, então como poderia uma medida da componente do spin de uma partícula de spin $1/2$ resultar em $100\hbar$, uma vez que os autovalores do observável são $\pm\hbar/2$?

Como forma de ilustrar o conceito de valor fraco então introduzido, é proposto pelo autores em [1] um experimento que faça a medida do valor fraco da componente z do spin de uma partícula de spin $1/2$. Este processo se dá da seguinte forma: um feixe de partículas de spin $1/2$ é preparado de maneira que as partículas estejam inicialmente bem localizadas e com o spin orientado na direção $\hat{\alpha}$, direção que faz um ângulo α com o eixo x , no plano xz e que se movam na direção y com velocidade bem definida. Esta etapa da preparação das partículas é qualificada como a pré-seleção, sendo, portanto, o estado de pré-seleção das partículas o spin orientado na direção $\hat{\alpha}$.

Os estados que caracterizam as componentes de spin das partículas em cada direção são representados pelos kets $|\uparrow_i\rangle$ e $|\downarrow_i\rangle$, onde i indica a direção correspondente (x, y, z, α, \dots) . Esses kets são autovetores dos observáveis de spin, S_i , naquela direção com autovalores correspondentes $\hbar/2$ e $-\hbar/2$, respectivamente, e portanto $|\uparrow_i\rangle$ e $|\downarrow_i\rangle$ geram um espaço vetorial bidimensional e podem ser usados como kets de base. Deste modo, o estado de pré-seleção é dado por

¹ Em tradução livre do título original em inglês “*How the result of a measurement of the spin of spin $1/2$ particles can turn out to be $100\hbar$?*”

$$\begin{aligned}
 |\psi_{in}\rangle &= |\uparrow_\alpha\rangle = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) |\uparrow_x\rangle + \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) |\downarrow_x\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \text{sen}\frac{\alpha}{2} \right) |\uparrow_z\rangle + \left(\cos\frac{\alpha}{2} - \text{sen}\frac{\alpha}{2} \right) |\downarrow_z\rangle \right]. \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

O feixe previamente preparado é direcionado a um aparato de Stern-Gerlach orientado na direção z . Contudo, se o gradiente do campo magnético deste aparato for suficientemente pequeno o deslocamento do feixe não é bruscamente alterado, pelo menos não de modo que seja possível distinguir entre os autoestados do observável². A passagem do feixe pelo Stern-Gerlach pode ser descrita pelo Hamiltoniano de acoplamento:

$$H(t) = -\lambda g(t) z S_z, \quad (3.2)$$

onde λ é proporcional ao momento magnético das partículas e ao gradiente do campo e para um gradiente pequeno, a condição de fraqueza da medição é cumprida, a função $g(t)$ é normalizada de modo que $\int g(t) dt = 1$ no intervalo da interação. Essa interação gera um acoplamento entre o observável S_z e a componente z da direção do feixe.

Em seguida o feixe é submetido a um segundo experimento de Stern-Gerlach, agora orientado na direção x . Mas dessa vez a medida é feita da maneira tradicional. O feixe é, portanto, dividido em dois, cada um correspondente a um dos dois autovalores de S_x . Apenas aqueles resultados em que $S_x = \frac{\hbar}{2}$ são selecionados, e continuam a se mover livremente em direção ao anteparo, como ilustra a imagem a seguir:

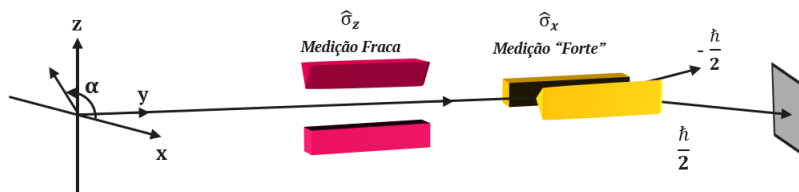


Figura 3 – Esquema experimental para a medição fraca de S_z . Reprodução da figura 1 em [13].

Deste modo, o estado de pós-seleção é então:

$$|\psi_f\rangle = |\uparrow_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_z\rangle + |\downarrow_z\rangle) \quad (3.3)$$

Dados os estados $|\psi_{in}\rangle$ e $|\psi_f\rangle$, o valor fraco do operador S_z é, portanto:

² Neste ponto fica claro como tanto a fraqueza da interação como a dispersão da função de onda do medidor ser muito maior que a diferença entre os autovalores do observável são fatores importantes para a medição fraca.

$$S_{z,w} = \frac{\langle \uparrow_x | S_z | \uparrow_\alpha \rangle}{\langle \uparrow_x | \uparrow_\alpha \rangle} = \frac{\hbar}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) . \quad (3.4)$$

Perceba que o valor fraco é proporcional à tangente de metade do ângulo α . A função tangente tem valor igual a 1 quando o ângulo é igual a $\pi/4$ e tende à infinito quando o ângulo tende a $\pi/2$. Então, conforme α se aproxima de π , maior é o valor fraco da medição fraca. Na realidade, para que o resultado da equação (3.4) seja $100\hbar$, α deve ser aproximadamente igual a 179° .

Ainda no artigo original [1], é proposto que o perfil espacial do feixe de partículas pode ser descrito por uma função de onda gaussiana, como a que abordamos na seção (2.1), e o desvio da função de onda após a pós-seleção é correspondente ao desvio que se observaria se fosse possível medir $100\hbar$ em um experimento tradicional e este é o principal argumento para que os autores considerem que “o valor fraco descreve um novo valor para a variável quântica”. Mas ressalta-se que o desvio do feixe é muito menor que a sua dispersão inicial.

3.2 O problema das três caixas

O problema das três caixas é um caso especial do experimento mental proposto por Aharonov e Vaidman em 1991 [12] no qual sugerem que uma medida fraca da posição de uma partícula poderia encontrar a partícula em mais de uma posição distinta, com probabilidade igual à 1 para cada uma delas.

No caso particular das três caixas, uma partícula é preparada inicialmente em um estado de superposição de três possíveis posições ortogonais, que são entendidas como “caixas”, representadas aqui pelas letras A , B e C . Quando a partícula se encontra na caixa i , representamos esse estado com o ket $|i\rangle$.

Para entender o problema, suponha que o sistema é preparado em um estado de superposição entre as três possíveis caixas. Este é o estado de pré-seleção:

$$|\psi_{in}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|A\rangle + |B\rangle + |C\rangle) \quad (3.5)$$

A abertura de uma caixa i é uma medida com dois resultados possíveis, ou a partícula está na caixa ou não está. Isso corresponde ao resultado de uma medição do operador de projeção da caixa i , isto é, $\Pi_i = |i\rangle \langle i|$, cujos autovalores são 0 e 1. Então, quando o estado de pós-seleção é:

$$|\psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|A\rangle + |B\rangle - |C\rangle), \quad (3.6)$$

o resultado de uma medição fraca da abertura de uma das caixas é:

$$\Pi_{i,w} = \frac{\langle \psi_f | \Pi_i | \psi_{in} \rangle}{\langle \psi_f | \psi_{in} \rangle}, \quad (3.7)$$

o que para Π_A , Π_B e Π_C é:

$$\Pi_{A,w} = 1, \quad \Pi_{B,w} = 1, \quad \Pi_{C,w} = -1. \quad (3.8)$$

Isto é, para esse conjunto de partículas pré- e pós-selecionadas, o valor fraco da posição da partícula indica que está na caixa A e também na caixa B . Já o resultado Π_C parece indicar mais do que a ausência da partícula na caixa.

Este mesmo paradoxo é apresentado no livro *Quantum Paradoxes* [21], co-autoria de Aharonov, com uma partícula carregada que é escondida em uma caixa quântica e para detectar a presença da partícula em alguma das caixas um elétron é encaminhado para uma dessas caixas e se houver deflexão da trajetória do elétron, então é possível inferir que a partícula está naquela caixa. O Hamiltoniano de interação sugerido para esse problema é:

$$H = -g(t)X\Pi_i, \quad (3.9)$$

onde X é a posição transversal do elétron, Π_i indica a caixa para o onde o elétron foi direcionado e $\int g(t)dt = 1$. Esse Hamiltoniano gera um acoplamento entre a posição do elétron e a caixa que se pretende “abrir” e no caso da presença de uma partícula na caixa i , a trajetória do elétron será desviada, como mostra a figura a seguir:

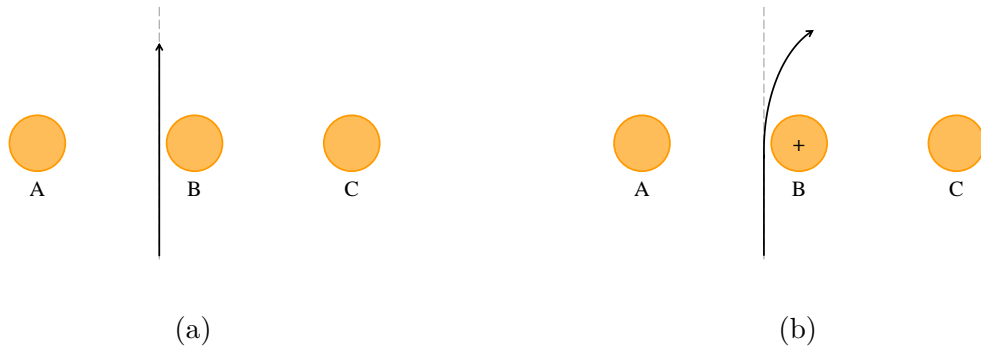


Figura 4 – Reprodução da figura 16.4 da referência [21]. A figura (a) representa a trajetória do elétron sem a influência de qualquer partícula carregada, enquanto a figura (b) representa a trajetória do elétron desviado devido a presença de uma partícula carregada na caixa B .

Para os estados de pré-seleção (3.5) e de pós-seleção (3.6), os resultados dos valores fracos são os mesmos daquelas na equação (3.8) e a sugestão de interpretação em [21] do valor fraco de Π_C é que o elétron enviado para a caixa C deflete para a esquerda e não para a direita, como se a partícula tivesse carga negativa, o que sabemos não ser verdadeiro. Também é proposto na referência [21] que um outro estado de pós-seleção, sendo ele

$$|\psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (i|A\rangle - |B\rangle - i|C\rangle) \quad (3.10)$$

resultaria em $\Pi_{A,w} = -i$ e $\Pi_{C,w} = i$, isto é, que a partícula teria carga imaginária.

O problema das três caixas é comumente utilizado para demonstrar tanto como uma medição fraca pode proporcionar resultados excêntricos para um observável como também para ilustrar como as escolhas dos estados de pré-seleção e pós-seleção são cruciais para esses resultados anômalos.

O problema das três caixas é um experimento mental, mas em 2004 um grupo de pesquisadores publicou o resultado de um experimento óptico análogo ao problema das caixas, cujo objetivo era verificar as previsões do paradoxo das caixas [22]. Utilizando um interferômetro tipo Mach-Zehnder com 3 caminhos, rotulados como caminhos A , B e C , os autores empregaram placas de meia-onda e divisores de feixe por polarização para preparar fótons em uma superposição dos três caminhos possíveis no interferômetro (pré-seleção) e utilizaram dois divisores de feixe 50:50 para pós-selecionar os fótons. As medidas são realizadas por meio de placas de vidro que permitem o controle do deslocamento transversal do feixe, uma placa no caminho A , por exemplo, provocaria um deslocamento do feixe ao longo da direção X quando ele passasse por aquele caminho. A detecção desse deslocamento implicaria em dizer que o fóton passou pelo caminho A . Se o deslocamento transversal é muito menor que o tamanho do feixe, então a medida é fraca. Considera-se também que o deslocamento espacial médio de um conjunto de fótons pode ser vista como uma medida da probabilidade de cada fóton estar no trilho A .

Medindo o tamanho do deslocamento de apenas um dos caminhos enquanto mantêm os outros dois bloqueados é possível caracterizar a grandeza K_i entre o sistema e o medidor. Uma vez determinado K_A , K_B e K_C , os três feixes são recombinados e pós-selecionados e o deslocamento total x é mensurado. A razão entre x e K_i constitui o valor fraco da presença do fóton em cada caminho. Os resultados obtidos são compatíveis com os valores fracos da equação (3.8), enquanto $P_{A,w} = P_{B,w} = 1$ no experimento de 2004, $P_{C,w} = -0.6$, que não é exatamente o mesmo resultado que a proposta teórico, mas o resultado negativo já é o suficiente para o que os autores se propuseram de mostrar.

3.3 Gato de Cheshire Quântico

O paradoxo do gato de Cheshire quântico [11] recebe esse nome em razão do gato de Cheshire do livro infantil “Alice no país das maravilhas”. No livro, Alice observa um gato desaparecer enquanto seu sorriso, uma característica inerente ao gato, permanece. No experimento proposto, os autores afirmam que por meio de uma medição fraca é possível observar um fóton separado de uma propriedade intrínseca à ele: sua polarização circular.

Na proposta experimental, os fótons são preparados (pré-selecionados) em um estado conhecido $|\psi_{in}\rangle \equiv |\Psi\rangle$ e são submetidos a um interferômetro idealizado para que a detecção em um dos detectores seja certa se o estado dos fótons for $|\psi_f\rangle \equiv |\Phi\rangle$, ou seja, os fótons são pós-selecionados em um estado também conhecido.

A figura a seguir ilustra a preparação experimental do Gato de Cheshire Quântico:

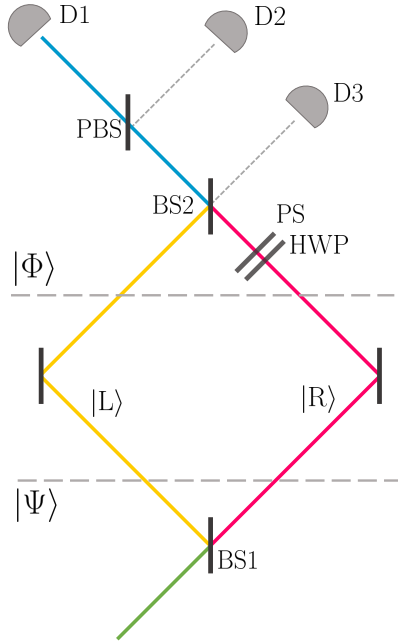


Figura 5 – Reprodução da figura 1 da referência [11]. Um fóton no estado $|R\rangle|H\rangle$ passa pelo BS1 e o fóton se encontra no estado de pré-seleção, indicado na figura que o fóton se encontra no bloco de pré-seleção sinalizado pela linha cinza tracejada. O interferômetro é construído de modo que os fótons que estão no estado $|\Phi\rangle$ no bloco de pós-seleção com certeza clicarão no detector D1.

O estado de pré-seleção $|\Psi\rangle$ sugerido é:

$$|\psi_{in}\rangle = |\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (i|L\rangle + |R\rangle)|H\rangle, \quad (3.11)$$

onde $|L\rangle$ e $|R\rangle$ representam possíveis estados de posição para o fóton no interferômetro, sendo eles o braço esquerdo ou direito do interferômetro, respectivamente. Enquanto $|H\rangle$ e $|V\rangle$ representam, nessa ordem, os estados de polarização linear horizontal e vertical do fóton.

Uma maneira de pré-selecionar um estado como (3.11) é enviar um fóton com polarização horizontal e orientado na direção que corresponde a extensão do braço direito do interferômetro (ou seja, um fóton no estado $|R\rangle|H\rangle$) a um divisor de feixes 50:50, como mostra a imagem (5). O operador que descreve o divisor de feixes BS1 da figura é [14]:

$$U_{BS1} = \frac{1}{\sqrt{2}} [|L\rangle\langle L| + |R\rangle\langle R| + i(|L\rangle\langle R| + |R\rangle\langle L|)], \quad (3.12)$$

de modo que

$$U_{BS1}(|R\rangle|H\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (i|L\rangle + |R\rangle)|H\rangle = |\Psi\rangle. \quad (3.13)$$

As linhas tracejadas na figura (5) indicam a separação entre o que chamaremos de bloco da pré-seleção e o bloco da pós-seleção. Como é possível observar pela equação (3.13), o estado dos fótons após a passagem pelo primeiro beam splitter é o estado de pré-seleção.

O interferômetro é projetado de forma a detecção de um fóton no detector $D1$ seja certa se o estado do fóton antes da passagem pelo bloco da pós-seleção seja:

$$|\psi\rangle_f = |\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|L\rangle |H\rangle + |R\rangle |V\rangle). \quad (3.14)$$

Para que esta detecção seja feita, uma placa de meia-onda (HWP) que inverte polarizações lineares $|H\rangle \leftrightarrow |V\rangle$ e um *phase shifter* que acrescenta uma fase i são colocados no braço direito do interferômetro. De modo que se o estado do fóton é (3.14), então o efeito da placa de meia onda, no braço direito, é

$$U_{HWP} |\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|L\rangle |H\rangle + |R\rangle |H\rangle),$$

seguido da ação do *phase shifter*:

$$U_{PS} U_{HWP} |\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|L\rangle |H\rangle + i |R\rangle |H\rangle).$$

O feixe passa então por um segundo divisor de feixes $BS2$, que é construído de modo que se um fóton está no estado $\frac{1}{\sqrt{2}} (|L\rangle + i |R\rangle)$ ele sai pelo lado esquerdo, o que pela figura (5) indica que o detector $D3$ não clicará. Então esses fótons com saída pela direita do divisor são detectados em $D3$ e descartados. Aqueles que tem saída pela esquerda passam por um divisor de feixes por polarização (PBS, polarizing beam splitter), que reflete polarização vertical e transmite polarização horizontal, ou seja, os fótons no estado (3.3) são transmitidos e detectados pelo detector $D1$. Dessa forma, a detecção pelo detector $D1$ implica na pós-seleção do estado da equação (3.14) no interferômetro. Uma descrição ainda mais detalhada do esquema proposto pode ser encontrado na seção 3.1.1 da referência [14].

A proposta do experimento em [11] é determinar a posição do fóton e sua polarização circular no intervalo entre a pré-seleção e a pós-seleção. Os observáveis de interesse são, portanto, posição e polarização circular do fóton. Uma maneira de detectar a posição do fóton é dispor de um operador de projeção naquela direção, $\Pi_L = |L\rangle \langle L|$ e $\Pi_R = |R\rangle \langle R|$. Formalmente, um detector de polarização circular é: $\sigma_z = |+\rangle \langle +| - |-\rangle \langle -|$, sendo $|+\rangle = (|H\rangle + i |V\rangle)/\sqrt{2}$ e $|-\rangle = (|H\rangle - i |V\rangle)/\sqrt{2}$. Para a medição da polarização de um fóton no braço direito do interferômetro, por exemplo, o observável de interesse é associado com um projetor naquela direção: $\sigma_z^{(R)} = \Pi_R \sigma_z$.

Então, dados os estados de pré-seleção e de pós-seleção, os valores fracos de Π_L , Π_R , $\sigma_z^{(L)}$ e $\sigma_z^{(R)}$ são:

$$\Pi_{L,w} = \frac{\langle \psi_f | \Pi_L | \psi_{in} \rangle}{\langle \psi_f | \psi_{in} \rangle} = \frac{\langle \Phi | \Pi_L | \Psi \rangle}{\langle \Phi | \Psi \rangle} = 1, \quad (3.15)$$

$$\Pi_{R,w} = \frac{\langle \psi_f | \Pi_R | \psi_{in} \rangle}{\langle \psi_f | \psi_{in} \rangle} = \frac{\langle \Phi | \Pi_R | \Psi \rangle}{\langle \Phi | \Psi \rangle} = 0, \quad (3.16)$$

$$\sigma_{z,w}^{(L)} = \frac{\langle \psi_f | \sigma_z^{(L)} | \psi_{in} \rangle}{\langle \psi_f | \psi_{in} \rangle} = \frac{\langle \Phi | \sigma_z^{(L)} | \Psi \rangle}{\langle \Phi | \Psi \rangle} = 0, \quad (3.17)$$

$$\sigma_{z,w}^{(R)} = \frac{\langle \psi_f | \sigma_z^{(R)} | \psi_{in} \rangle}{\langle \psi_f | \psi_{in} \rangle} = \frac{\langle \Phi | \sigma_z^{(R)} | \Psi \rangle}{\langle \Phi | \Psi \rangle} = 1. \quad (3.18)$$

Enquanto as medidas de posição indicam a presença do fóton apenas no braço esquerdo do interferômetro, a medida de polarização indica polarização circular positiva no braço direito, onde não há qualquer fóton segundo as medidas, e ausência de qualquer polarização no braço esquerdo, onde há fóton. Os autores argumentam que, uma vez que a medição fraca não altera o sistema, todos esses resultados se aplicam simultaneamente e dessa maneira, um fóton estaria separado de sua polarização.

Um experimento com interferência de nêutrons foi realizado, onde os autores concluem que os nêutrons foram separados de seus spins [23]. Vale ressaltar que no experimento os autores utilizaram métodos diferentes do de uma medição fraca tradicional para obterem os valores fracos, que não descreveremos aqui.

3.4 Violação do princípio da casa de pombos para sistemas quânticos

O paradoxo do princípio casa de pombos quântico é uma proposta embasada na violação do princípio da casa de pombos, sendo o princípio da casa de pombos (*pigeonhole principle*, em inglês) a ideia de que “se três pombos são acomodados em duas gaiolas, pelo menos dois pombos estão na mesma gaiola”. Em um artigo de 2016 [24], intitulado “*Violação quântica do princípio da casa de pombos e a natureza das correlações quânticas*”³, os autores (entre eles, Yakir Aharonov) propõem que três partículas quânticas podem ser dispostas em duas caixas sem que quaisquer duas partículas estejam em uma mesma caixa.

Essa proposta é um experimento mental que se dá da seguinte forma: considere, a princípio, três partículas quânticas idênticas e duas posições ortogonais que elas podem assumir, essas posições são identificadas como “caixas quânticas”. As caixas são identificadas como caixa à esquerda, $|L\rangle$, e caixa à direita, $|R\rangle$ e cada uma das partículas é preparada em uma superposição das duas caixas:

³ “*Quantum violation of the pigeonhole principle and the nature of quantum correlations*” em inglês

$$|\psi_+\rangle_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(|L\rangle + |R\rangle), \quad (3.19)$$

aqui o índice i identifica a partícula $i = 1, 2, 3$.

O estado geral do sistema composto por as três partículas preparadas no estado (3.19) é o estado de pré-seleção:

$$|\psi_{in}\rangle \equiv |\Psi\rangle = |\psi_+\rangle_1 |\psi_+\rangle_2 |\psi_+\rangle_3, \quad (3.20)$$

que em termos dos estados de posição das partículas é:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}[|LLL\rangle + |LLR\rangle + |LRL\rangle + |LRR\rangle + |RLL\rangle + |RLR\rangle + |RRL\rangle + |RRR\rangle],$$

sendo $|LLL\rangle = |L\rangle_1 |L\rangle_2 |L\rangle_3$ e assim por diante.

Encontrar duas partículas i e j em uma mesma caixa é encontrar o sistema no subespaço $|L\rangle_i |L\rangle_j$ ou $|R\rangle_i |R\rangle_j$, ($i \neq j$). Caso elas estejam em caixas diferentes, então encontra-se o subsistema $|L\rangle_i |R\rangle_j$ ou $|R\rangle_i |L\rangle_j$. Os operadores correspondentes a esses subespaços são os operadores de projeção $\Pi_{i,j}^{same}$, que quando resulta em 1 indica que i e j estão na mesma caixa e $\Pi_{i,j}^{diff}$, que quando resulta em 1 indica que i e j não estão na mesma caixa:

$$\begin{aligned} \Pi_{i,j}^{same} &= \Pi_{i,j}^{LL} + \Pi_{i,j}^{RR} \\ \Pi_{i,j}^{diff} &= \Pi_{i,j}^{LR} + \Pi_{i,j}^{RL}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

sendo

$$\begin{aligned} \Pi_{i,j}^{LL} &= |LL\rangle \langle LL|, \quad \Pi_{i,j}^{RR} = |RR\rangle \langle RR|, \\ \Pi_{i,j}^{LR} &= |LR\rangle \langle LR|, \quad \Pi_{i,j}^{RL} = |RL\rangle \langle RL|, \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde $|LL\rangle = |L\rangle_i |L\rangle_j$ e assim por diante.

O operador $\Pi_{i,j}^{same}$ em (3.21) é o operador medido fracamente na referência [24]. Uma medida dele indicaria se duas partículas i e j se encontram na mesma caixa.

Para um estado de pós-seleção do tipo

$$|\psi_f\rangle = |\Phi\rangle = |+\rangle_1 |+\rangle_2 |+\rangle_3, \quad (3.23)$$

onde $|+\rangle = (1/\sqrt{2})(|L\rangle + i|R\rangle)$:

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}[|LLL\rangle + i|LLR\rangle + i|LRL\rangle - |LRR\rangle + i|RLL\rangle - i|RLR\rangle - |RRL\rangle - i|RRR\rangle],$$

os valores fracos para a partícula 1 e 2 são:

$$\Pi_{1,2,w}^{same} = \frac{\langle \psi_f | \Pi_{1,2} | \psi_{in} \rangle}{\langle \psi_f | \psi_{in} \rangle} = \frac{\langle \Phi | \Pi_{1,2} | \Psi \rangle}{\langle \Phi | \Psi \rangle} = 0 \quad (3.24)$$

Essa igualdade se verifica para quaisquer outros dois pares de partículas, 2 e 3 ou 1 e 3. Ou seja, dados os estados de pré-seleção, o valor fraco dos operadores em (3.21) indica que, se o experimento pós-selecionou partículas no estado $|\psi_f\rangle$, a medida fraca da posição dessas partículas indica que nenhuma delas se encontrava na mesma caixa no intervalo entre a pré-seleção e a pós-seleção.

Experimentos com 3 fótons foram realizados para se mostrar o paradoxo, com a polarização de cada fóton fazendo o papel das caixas [25]. Os autores utilizaram um método diferente de uma medição fraca usual para se obter os valores fracos do sistema, e concluem o o princípio da casa dos pombos quântico é violado no sistema.

3.5 Partículas de spin 2

A partir de um exemplo simples envolvendo partículas de spin 2 é possível demonstrar [26] que uma interpretação realista do processo de medição quântica pode ser inconsistente com a própria teoria da mecânica quântica. A proposta do artigo de 2020 é fazer essa análise investigando o que se pode afirmar sobre um sistema no intervalo entre duas medições, uma sequência de experimentos de Stern-Gerlach em partículas de spin 2. O primeiro Stern-Gerlach faz uma medida da componente x do spin da partícula e as partículas que resultam em $2\hbar$ são direcionadas a um segundo Stern-Gerlach, agora orientado na direção z e dali selecionam-se as partículas de spin $2\hbar$.

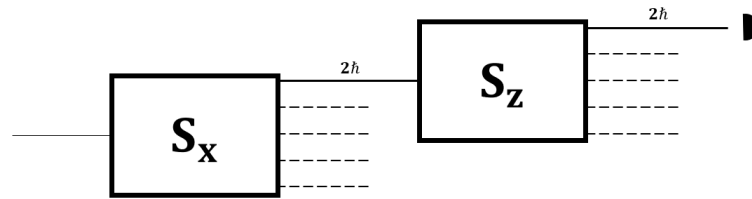


Figura 6 – Esquema proposto em [26]. Um feixe de partículas de spin 2 é submetido a um experimento do tipo Stern-Gerlach orientado na direção x e aquelas partículas com spin $2\hbar$ são direcionadas para um outro Stern-Gerlach orientado na direção z , onde são selecionadas as partículas com spin igual a $2\hbar$

Para um observador que considera que o processo de medição apenas revela uma característica do sistema que independe da medição, isto é, ela é a mesma antes e depois da medida e a medição apenas expõe essa característica, consideramos que este observador possui uma interpretação realista do processo de medição.

A questão em destaque na referência [26] é que no intervalo de tempo entre as duas medidas representadas na figura (6) as duas afirmações a seguir não podem ser simultaneamente verdadeiras: (i) a grandeza $\sigma_x = 2\hbar$ possui uma realidade objetiva para um sistema no estado $|\uparrow\rangle_x$ que permanece a mesma após a medição ou (ii) uma medida em σ_z revela um valor pré-existente para essa grandeza.

Para uma visão realista do procedimento de medida, ambas as afirmações deveriam ser verdadeiras. No entanto, se (i) e (ii) forem verdadeiras no intervalo entre as medições teríamos $S^2 = \sigma_x^2 + S_y^2 + \sigma_z^2 = 4\hbar^2 + S_y^2 + 4\hbar^2 \geq 8\hbar^2$. Mas da própria teoria de spins da mecânica quântica, é sabido que $S^2 = 6\hbar^2$ e $S_y^2 \geq 0$ para partículas de spin 2 e portanto pelo menos uma das afirmações não pode ser verdadeira. Então, ou se reformula a maneira que se trata o spin na mecânica quântica ou se abandona a visão realista do processo de medida.

A ideia dessa seção é averiguar qual é o valor fraco de S_y^2 no intervalo entre as medições. Como o feixe de partículas selecionados após o primeiro Stern-Gerlach corresponde àquelas com autovalor $2\hbar$, o estado de pré-seleção considerado é $|2\rangle_x$. Os kets que representam os autoestados dos operadores de spin S_i , para qualquer i , são representados por $|2\rangle_i$, $|1\rangle_i$, $|0\rangle_i$, $|-1\rangle_i$ e $|-2\rangle_i$, com autovalores correspondentes $2\hbar$, \hbar , 0 , $-\hbar$ e $-2\hbar$, respectivamente. Os autoestados do operador S_z são escritos sem o índice z , $|2\rangle_z \equiv |2\rangle$ e assim por diante.

Deste modo, o estado de pré-seleção é, portanto:

$$|\psi_{in}\rangle = |2\rangle_x = \frac{1}{4}|2\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle + \frac{\sqrt{6}}{4}|0\rangle + \frac{1}{2}|-1\rangle + \frac{1}{4}|-2\rangle . \quad (3.25)$$

Da mesma forma, o estado de pós-seleção são as partículas com spin igual a $2\hbar$ na direção z pois são estas as partículas correspondentes ao feixe selecionado após o segundo Stern-Gerlach:

$$|\psi_f\rangle = |2\rangle_z = |2\rangle . \quad (3.26)$$

O operador que representa a componente y do spin para partículas de spin 2 na base dos autovetores de S_z , $\{|2\rangle, |1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle, |-2\rangle\}$, é:

$$S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2i & 0 & 0 & 0 \\ 2i & 0 & -\sqrt{6}i & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6}i & 0 & -\sqrt{6}i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6}i & 0 & -2i \\ 0 & 0 & 0 & 2i & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

e S_y^2 na mesma base é dado por:

$$S_y^2 = \frac{\hbar^2}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -3 & 0 \\ -\sqrt{6} & 0 & 6 & 0 & -\sqrt{6} \\ 0 & -3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{6} & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Assim, dados (3.25) e (3.26) uma medida fraca de S_y^2 resultaria em:

$$S_{y,w}^2 = \frac{\langle \psi_f | S_y^2 | \psi_{in} \rangle}{\langle \psi_f | \psi_{in} \rangle} = -2\hbar^2, \quad (3.29)$$

um resultado fora do espectro de autovalores de S_y^2 , que deveria ser sempre positivo. Como $|\psi_{in}\rangle = |\uparrow_x\rangle$ é autoestado de S_x^2 e $|\psi_f\rangle = |\uparrow\rangle$ é autoestado de S_z^2 , o valor fraco destes observáveis no intervalo entre os experimentos SG na imagem (6) é $4\hbar^2$ para ambos. De modo que $S_w^2 = S_{x,w}^2 + S_{y,w}^2 + S_{z,w}^2 = 6\hbar^2$.

O resultado obtido nesta seção é o primeiro indício de que há uma relação entre o resultado anômalo de uma medição fraca com uma interpretação realista do próprio processo de medição. Como mencionado anteriormente, para uma visão realista do processo ambos S_x^2 e S_z^2 seriam iguais a $4\hbar^2$ no intervalo entre a pré-seleção e a pós-seleção, o que seria inconsistente com a mecânica quântica e verifica-se, no entanto, que uma medida fraca de S_y^2 permite que $S_x^2 = S_z^2 = 4\hbar^2$ mantendo $S^2 = 6\hbar^2$.

No próximo capítulo, buscamos demonstrar essa mesma relação entre a interpretação realista de processo de medição e os valores anômalos dos outros paradoxos apresentados neste capítulo.

3.6 Os paradoxos de valor fraco como efeitos de interferência

Como mencionado na seção (2.3) sobre interpretações do valor fraco, Duck, Stevenson e Sudarshan, propuseram [13] no ano seguinte a publicação do artigo original [1] que o valor fraco nada mais era do que um efeito de interferência. Aqui reproduziremos essa ideia seguindo os passos de Duck et al.

Regressando à equação (2.16) referente ao sistema após a pós-seleção mas antes de realizar a aproximação para medição fraca ($g_0/\Delta \gg 1/A_w$), tínhamos:

$$\langle \psi_f | \Psi \rangle \equiv |\phi_f\rangle = \sum_n \langle a_n | \psi_{in} \rangle \langle \psi_f | a_n \rangle \int_{-\infty}^{\infty} dq \phi_0(q - g_0 a_n) |q\rangle. \quad (3.30)$$

A função de onda final do medidor neste caso é $\phi_f(q) = \langle q | \phi_f \rangle$:

$$\phi_f(q) = \sum_n \langle a_n | \psi_{in} \rangle \langle \psi_f | a_n \rangle \phi_0(q - g_0 a_n). \quad (3.31)$$

Essa superposição de funções de onda já é um indício de que a função de onda final observada, cujo deslocamento corresponde ao valor fraco, é um padrão de interferência. Mas Duck et al. vão além e demonstram como as condições de fraqueza da medição fazem com que essa superposição de funções resulte em uma única função deslocada por um intervalo proporcional ao valor fraco. Para ilustrar tudo isso voltemos à medição de uma componente de spin de uma partícula de spin $1/2$, como descrita na seção (3.1).

Os estados de pré-seleção e pós-seleção são:

$$|\psi_{in}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\left(\cos \frac{\alpha}{2} + \text{sen} \frac{\alpha}{2} \right) |\uparrow_z\rangle + \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \text{sen} \frac{\alpha}{2} \right) |\downarrow_z\rangle \right],$$

$$|\psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_z\rangle + |\downarrow_z\rangle).$$

O observável medido fracamente é a componente do spin na direção z , S_z , cujo autoestados são $|a_1\rangle = |\uparrow_z\rangle$ e $|a_2\rangle = |\downarrow_z\rangle$ com autovalores correspondes $\hbar/2$ e $-\hbar/2$. Considerando que a função de onda do medidor é uma Gaussiana do tipo:

$$\phi_0(q) = \exp \left[-\frac{q^2}{4\Delta^2} \right], \quad (3.32)$$

encontramos, substituindo $\phi_0(q - g_0 a_n)$ na equação (3.31), a equação de onda final do medidor:

$$\phi_f(q) = \sum_n \langle a_n | \psi_{in} \rangle \langle \psi_f | a_n \rangle \exp \left[-\frac{(q - g_0 a_n)^2}{4\Delta^2} \right]. \quad (3.33)$$

Como o operador que representa o observável medido possui apenas dois autoestados, essa é uma soma de dois termos apenas. Para $n = 1$, temos:

$$\langle a_1 | \psi_{in} \rangle \langle \psi_f | a_1 \rangle = \langle \uparrow_z | \psi_{in} \rangle \langle \psi_f | \uparrow_z \rangle = \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) + \text{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right], \quad (3.34)$$

e para $n = 2$:

$$\langle a_2 | \psi_{in} \rangle \langle \psi_f | a_2 \rangle = \langle \downarrow_z | \psi_{in} \rangle \langle \psi_f | \downarrow_z \rangle = \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) - \text{sen} \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right] \quad (3.35)$$

e visto que $a_1 = \hbar/2$ e $a_2 = -\hbar/2$, a função de onda final é, portanto:

$$\begin{aligned} \phi_f(q) = & \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] \exp \left[-\frac{1}{4\Delta^2} \left(q - \frac{g_0\hbar}{2} \right)^2 \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] \exp \left[-\frac{1}{4\Delta^2} \left(q + \frac{g_0\hbar}{2} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Vimos na seção (3.1) que o valor fraco de S_z aumenta conforme $\alpha \rightarrow \pi$. Para completar a nossa análise, definiremos $\alpha \equiv \pi - 2\epsilon$, sendo $\epsilon \ll 1$. Como ϵ é muito pequeno, $\cos(\epsilon) \approx \cos(0) = 1$ e $\text{sen}(\epsilon) \approx \epsilon$ e então:

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos(\epsilon) + \text{sen}\frac{\pi}{2}\text{sen}(\epsilon) \approx \epsilon, \\ \text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right) = \text{sen}\frac{\pi}{2}\cos(\epsilon) + \cos\frac{\pi}{2}\text{sen}(\epsilon) \approx 1. \end{aligned}$$

e

$$S_{z,w} = \frac{\hbar}{2} \text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\hbar}{2} \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right) = \frac{\hbar}{2} \text{cotg}(\epsilon) = \frac{\hbar \cos(\epsilon)}{2 \text{sen}(\epsilon)} \approx \frac{\hbar}{2\epsilon}. \quad (3.37)$$

A função de onda final do medidor, (3.36), agora pode ser escrita como:

$$\phi_f(q) = \frac{1}{2} \left\{ (1 + \epsilon) \exp \left[-\frac{1}{4\Delta^2} \left(q - \frac{g_0\hbar}{2} \right)^2 \right] - (1 - \epsilon) \exp \left[-\frac{1}{4\Delta^2} \left(q + \frac{g_0\hbar}{2} \right)^2 \right] \right\} \quad (3.38)$$

A equação (3.38) é a soma de duas Gaussianas centradas em $\pm \frac{g_0\hbar}{2}$, correspondendo aos autovalores de S_z . No entanto, como ilustra a figura (7), no limite da medição fraca essa superposição resulta em uma curva que em muito se assemelha a uma Gaussiana centrada em um valor próximo a g_0A_w .

A a figura (7) representa a função de onda (3.38) considerando $\epsilon = 0,2$, $\Delta = 10$, $g_0 = 1$ e $\hbar = 1$, o que, segundo a equação (3.37), implica que $S_{z,w} \approx 2,5$. Note que, mesmo sendo a soma de duas Gaussianas centradas em $\pm 1/2$, as condições de fraqueza da medição impostas por ϵ pequeno e $g_0/\Delta \gg 1/A_w$ provoca na soma (7) um efeito de interferência que resulta em uma curva centrada em $q \approx 2,43$.

Essa observação de Duck, Stevenson e Sudarshan se tornou um argumento muito forte e muito sólido para os argumentos contra a interpretação do valor fraco como um novo valor para a variável medida. Pois, reiterando a posição de Duck et al. mencionada na seção (2.3), “foi mostrado que o efeito surpreendente apontado por AAV é uma consequência de interferência construtiva e destrutiva entre duas amplitudes complexas. Apesar de

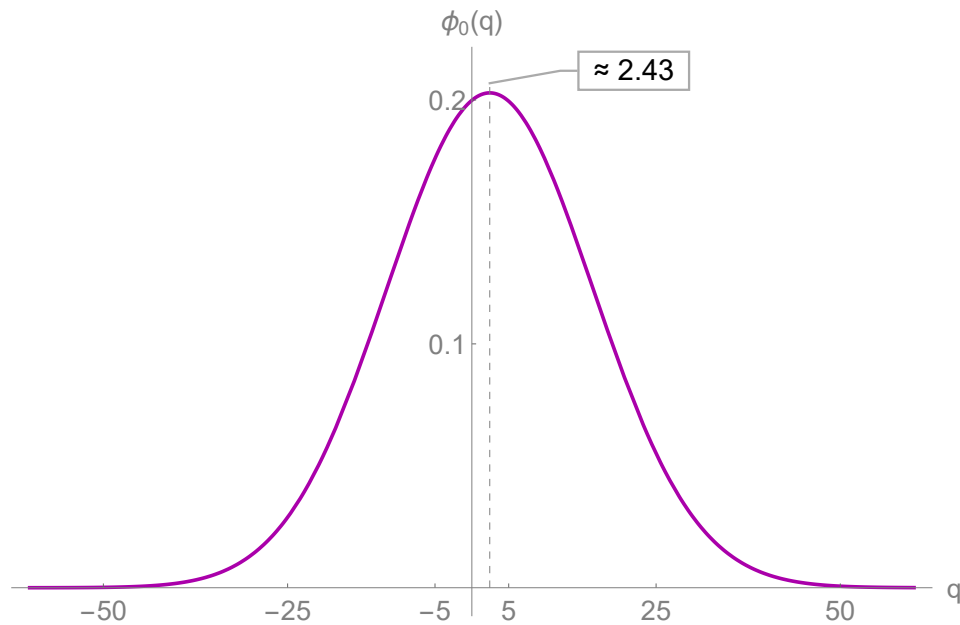


Figura 7 – Reprodução da figura 2a da referência [13] em que os autores demonstram que apesar das duas Gaussianas que compõem a sua equação (33), as imposições da medição fraca provocam um deslocamento muito maior na função composta pela superposição entre elas.

surpreendente, o efeito não é paradoxal de forma alguma e não envolve mais nada além da mecânica quântica tradicional”. Entender o valor fraco como um efeito de interferência é uma forma de eliminar os paradoxos listados nesse capítulo.

O experimento do gato de Cheshire, por exemplo, já foi explicado como um efeito de interferência quântica no artigo de 2015 [14]. Bem como a violação do princípio da casa de pássaros para sistemas quânticos também foi explicado como um efeito de interferência em um artigo recente [15]. Acreditamos ser válida também a menção do artigo [22] que faz a realização de um análogo óptico do problemas das caixas e comenta que os resultados obtidos podem ser explicados como um efeito de interferência, apesar de não elaborar sobre o tema.

4 Valores fracos anômalos e interpretações realistas de medições quânticas

No capítulo 2, compreendemos como uma condição de fraqueza no procedimento de medição de um observável para sistemas pré- e pós-selecionados pode resultar em um “novo valor” para o observável medido e em seguida vimos que interpretar o resultado de uma medição fraca como o resultado genuíno da medição é a origem dos paradoxos do capítulo 3. O objetivo deste capítulo é associar estes resultados anômalos com uma interpretação realista do processo de medição quântica.

4.1 Proposta Geral

A proposta para associar paradoxos envolvendo valores fracos com interpretações realistas de medições quânticas é bastante simples. O primeiro passo é tomar o observável de interesse, aquele que será medido fracamente, aqui representado por A , e reescrevê-lo como uma combinação de outros operadores hermitianos tais que os estados de pré-seleção e de pós-seleção sejam auto-estados.

Suponha, por exemplo, um operador hermitiano B tal que o estado de pré-seleção seja autoestado com autovalor b , isto é $B|\psi_{in}\rangle = b|\psi_{in}\rangle$ e um outro operador hermitiano C tal que o estado de pós-seleção seja autoestado com autovalor c , ou seja, $C|\psi_f\rangle = c|\psi_f\rangle$, que permitem que A seja reescrito como:

$$A = B + C. \quad (4.1)$$

Se são realizadas medições de B e C , os resultados dessas medições estariam revelando, segundo uma visão realista do processo, a realidade objetiva destas grandezas encontradas. O que consideramos aqui como uma interpretação realista do processo de medição, é a ideia de que uma medida de B que resulta em b e uma medida de C que resulta em c confere a estas quantidades b e c uma realidade física objetiva cuja existência precede a medição e que continuará a mesma após a medição. Estes resultados ligados a essa interpretação realista serão representados daqui em diante com um til (\sim) acima do observável medido. Assim, uma vez que a pré-seleção e a pós-seleção são autoestados de B e C e pode-se considerar que a sua preparação ocorre através de uma medição, temos:

$$\tilde{B} = b \quad \text{e} \quad \tilde{C} = c.$$

Conseqüentemente, de acordo com a equação (4.1), há também uma realidade objetiva associada a A no intervalo entre a pós-seleção e a pré-seleção:

$$\tilde{A} = \tilde{B} + \tilde{C} = b + c. \quad (4.2)$$

Como é possível escrever $A = B + C$, podemos substituir (4.1) na relação de valor fraco (2.19):

$$A_w = \frac{\langle \psi_f | A | \psi_{in} \rangle}{\langle \psi_f | \psi_{in} \rangle} = \frac{\langle \psi_f | (B + C) | \psi_{in} \rangle}{\langle \psi_f | \psi_{in} \rangle}, \quad (4.3)$$

que resulta em:

$$A_w = \frac{\langle \psi_f | B | \psi_{in} \rangle}{\langle \psi_f | \psi_{in} \rangle} + \frac{\langle \psi_f | C | \psi_{in} \rangle}{\langle \psi_f | \psi_{in} \rangle} = B_w + C_w. \quad (4.4)$$

Mas escrito da forma (4.3), fica evidente que os operadores B e C podem atuar em seus respectivos autoestados, resultando em:

$$A_w = \frac{\langle \psi_f | B | \psi_{in} \rangle}{\langle \psi_f | \psi_{in} \rangle} + \frac{\langle \psi_f | C | \psi_{in} \rangle}{\langle \psi_f | \psi_{in} \rangle} = b + c, \quad (4.5)$$

que comparando com (4.2), implica em:

$$A_w = \tilde{A}, \quad (4.6)$$

que podemos expandir para B e C :

$$B_w = \tilde{B}, \quad (4.7)$$

$$C_w = \tilde{C}. \quad (4.8)$$

É da igualdade na equação (4.6) que propomos a relação entre o valor fraco do observável A e uma interpretação realista do processo de medição, pois note que enquanto do lado esquerdo da igualdade temos o valor fraco do observável A obtido como descrito na seção (2.2) através da medição fraca, do lado direito temos um valor associado ao observável A para uma perspectiva realista do processo de medição regular (não fraca). No entanto, para que essa implicação possa ser feita é necessário que a hipótese (4.1) de que A pode ser reescrito como uma combinação de outros observáveis hermitianos que possuam o estado pré- ou pós-seleção como autoestado seja verdadeira.

Então, analisamos cada paradoxo do capítulo anterior individualmente e para cada operador um método diferente para reescrever os observáveis medidos foi implementado. Na sequência, apresentamos como a proposta foi verificada em cada um dos paradoxos apresentados no capítulo anterior.

4.2 Valor fraco de uma componente do spin de uma partícula de spin 1/2

Seguindo a ordem de paradoxos do capítulo anterior, o primeiro paradoxo para o qual investigamos a hipótese da seção (4.1) é o da medida de uma componente de spin de uma partícula de spin 1/2. Visto que a ideia é reescrever o operador medido fracamente, neste caso S_z , como uma combinação de operadores hermitianos dos quais os estados de pré- e pós-seleção, equações (3.1) e (3.3) respectivamente, sejam autovetores, utilizamos para esta finalidade os próprios observáveis que representam a componente de spin na direção correspondente aos estados de pré-seleção e pós-seleção. E deste modo, foi possível reescrever o operador S_z como:

$$S_z = \frac{S_\alpha - \cos(\alpha)S_x}{\text{sen}(\alpha)}, \quad (4.9)$$

visto que os estados de pré-seleção e pós-seleção estão relacionados com os operadores S_α e S_x conforme:

$$S_\alpha |\uparrow_\alpha\rangle = \frac{\hbar}{2} |\uparrow_\alpha\rangle; \quad S_x |\uparrow_x\rangle = \frac{\hbar}{2} |\uparrow_x\rangle.$$

A fim de associar o valor fraco do observável neste paradoxo com uma interpretação realista do processo de medição, lembremos que as medições de S_α e S_x foram feitas nos processos de pré-seleção e a pós-seleção, aos quais são atribuídos realidade de forma simultânea

$$\tilde{S}_\alpha = \frac{\hbar}{2}; \quad \tilde{S}_x = \frac{\hbar}{2}.$$

Pra uma visão realista do processo, decorre de (4.9) que

$$\tilde{S}_z = \frac{(\hbar/2) - (\hbar/2)\cos(\alpha)}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{\hbar}{2} \left(\frac{1 - \cos\alpha}{\text{sen}(\alpha)} \right) = \frac{\hbar}{2} \text{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right). \quad (4.10)$$

Comparando (4.10) com o valor fraco de S_z , equação (3.4), verificamos que

$$S_{z,w} = \tilde{S}_z. \quad (4.11)$$

A figura (8) ilustra como a atribuição de realidade para os resultados das medições de S_α e S_x estão relacionados com o valor anômalo $S_{z,w}$.

Como S_x pode ser visto como a projeção de \vec{S} , o vetor de spin, em x , então $S_x = |\vec{S}|\cos(\alpha/2)$ e:

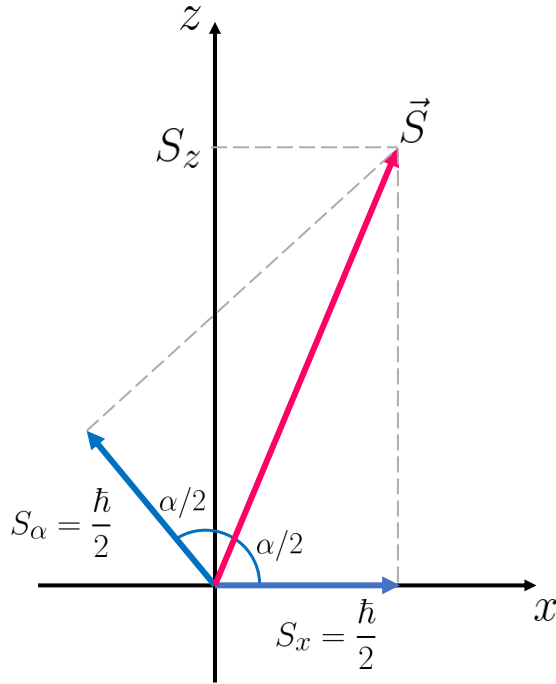


Figura 8 – Representação de como a atribuição de realidade aos estados de pré-seleção e pós-seleção, ou seja, ao processo de medição, resultam em um valor fraco anômalo.

$$S = \frac{S_x}{\cos(\alpha/2)} \longrightarrow \tilde{S} = \frac{\hbar}{2\cos(\alpha/2)}, \quad (4.12)$$

pois a interpretação realista do processo de medição implica em $\tilde{S}_x = \hbar/2$ para $|\psi_f\rangle$. E como $S_z = |\tilde{S}|\sin(\alpha/2)$, a interpretação realista acarreta em

$$\tilde{S}_z = \frac{\hbar}{2}\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

4.3 Paradoxo das caixas

No paradoxo das caixas, os observáveis medidos fracamente são os operadores de projeção referentes a cada uma das posições que a partícula pode assumir, $\Pi_A = |A\rangle\langle A|$, $\Pi_B = |B\rangle\langle B|$ e $\Pi_C = |C\rangle\langle C|$. O que queremos nessa seção é reescrevê-los como uma combinação de outros operadores hermitianos dos quais $|\psi_{in}\rangle$ (3.5) e $|\psi_f\rangle$ (3.6) são autoestados. Para tal, partimos dos operadores de projeção dos estados de pré-seleção $\Pi_{in} = |\psi_{in}\rangle\langle\psi_{in}|$ e de pós-seleção $\Pi_f = |\psi_f\rangle\langle\psi_f|$.

Todavia, não há quaisquer combinações do tipo $\alpha\Pi_{in} + \beta\Pi_f$ que possam reproduzir Π_i para qualquer i . Então, propusemos novos operadores hermitianos K tais que a sua relação com os estados de pré-seleção e de pós-seleção sejam do tipo $K_{in,i}|\psi_{in}\rangle =$

0 e $K_{f,i}|\psi_{in}\rangle = 0$. Cada um dos projetores que representam uma caixa no problema demandaram um operador K diferente quando reescritos, por isso cada um é representando com um índice subscrito diferente. A forma completa dos operadores $K_{in,i}$ e $K_{f,i}$ está relacionada no Apêndice A.

É possível reescrever o projetor que representa a caixa A como:

$$\Pi_A = \frac{1}{2}\Pi_{in} + \frac{1}{2}\Pi_f + K_{in,A} + K_{f,A}. \quad (4.13)$$

Dado que a relação de autovalor e autoestado destes operadores com os estados de pré-seleção e pós-seleção é $\Pi_{in}|\psi_{in}\rangle = |\psi_{in}\rangle$, $\Pi_f|\psi_f\rangle = |\psi_f\rangle$, $K_{in,A}|\psi_{in}\rangle = 0$ e $K_{f,A}|\psi_f\rangle = 0$, é possível pressupor que o estado de pré-seleção foi preparado por uma medição de Π_{in} e $K_{in,A}$ enquanto o de pós-seleção foi selecionado através de uma medição de Π_f e $K_{f,A}$. Para uma visão realista do processo, os estados de pré-seleção e pós-seleção, preparados e selecionados como descrito anteriormente, implicariam em:

$$\tilde{\Pi}_{in} = 1 \quad \tilde{\Pi}_f = 1 \quad \tilde{K}_{in,A} = 0 \quad \tilde{K}_{f,A} = 0,$$

e conseqüentemente

$$\tilde{\Pi}_A = \frac{1}{2}\tilde{\Pi}_{in} + \frac{1}{2}\tilde{\Pi}_f + \tilde{K}_{in,A} + \tilde{K}_{f,A} = 1, \quad (4.14)$$

comparando este resultado com o valor fraco de Π_A na equação (3.8), encontramos

$$\Pi_{A,w} = \tilde{\Pi}_A. \quad (4.15)$$

O procedimento acontece de maneira análoga para os operadores Π_B e Π_C , apenas com $K_{in,i}$ e $K_{f,i}$ diferentes.

Para o projetor que representa a caixa B , com $K_{in,B}$ e $K_{f,B}$ definidos no Apêndice A, obtemos que:

$$\Pi_B = \Pi_{in} + K_{in,B} + K_{f,B}, \quad (4.16)$$

o que, em uma visão realista do processo de medição que resultou em $|\psi_{in}\rangle$ e $|\psi_f\rangle$, implica em:

$$\tilde{\Pi}_B = \tilde{\Pi}_{in} + \tilde{K}_{in,A} + \tilde{K}_{f,A} = 1, \quad (4.17)$$

e obtemos novamente a equação (4.6) isto é

$$\Pi_{B,w} = \tilde{\Pi}_B. \quad (4.18)$$

Por fim, é possível reescrever o operador que representa a caixa C , com $K_{in,C}$ definido no Apêndice A, como:

$$\Pi_C = \frac{1}{2}\Pi_{in} - \frac{3}{2}\Pi_f + K_{in,C}. \quad (4.19)$$

o que implica que, para uma visão realista da medição, a preparação de $|\psi_{in}\rangle$ a partir da medição de Π_{in} e a seleção dos estados $|\psi_f\rangle$ através da medição de Π_f e $K_{f,C}$, teríamos

$$\tilde{\Pi}_C = \frac{1}{2}\tilde{\Pi}_{in} - \frac{3}{2}\tilde{\Pi}_f + \tilde{K}_{in} = -1, \quad (4.20)$$

e mais uma vez a equivalência da equação (4.6) é válida:

$$\Pi_{C,w} = \tilde{\Pi}_C. \quad (4.21)$$

Vemos então que a conclusão paradoxal de que uma partícula pode estar em duas caixas simultaneamente com probabilidade um, decorrente de uma interpretação realista para os valores fracos (3.8), está atrelada a uma interpretação realista para medições quânticas.

4.4 Gato de Cheshire Quântico

Na proposta do gato de Cheshire quântico, quatro operadores são medidos fracamente a partir dos estados de pré-seleção, $|\Psi\rangle$ (3.11), e pós-seleção, $|\Phi\rangle$ (3.14): os projetores Π_L e Π_R , que medem a posição do fóton no interferômetro e $\sigma_z^{(L)}$ e $\sigma_z^{(R)}$ que medem a polarização circular do fóton em cada braço do interferômetro.

O método utilizado para reescrever estes operadores é muito similar àquele usado para reescrever os operadores no paradoxo das três caixas, visto que também empregamos os projetores Π_{in} e Π_f dos estados de pré- e pós-seleção, e também outros operadores tais que $|\Psi\rangle$ e $|\Phi\rangle$ são autoestados com autovalor nulo. No entanto, enquanto no problema da medição da componente de spin da partícula de spin-1/2 e no problema das caixas o resultado obtido foi feito de maneira exclusivamente analítica, no paradoxo do gato de Cheshire utilizamos do software *Wolfram Mathematica* para reescrever os observáveis.

O observável que verifica a presença do fóton no braço esquerdo, Π_L , pôde ser redigido como:

$$\Pi_L = \Pi_{in} + \Delta_{in,L} + \Delta_{f,L}, \quad (4.22)$$

sendo que $\Delta_{in,L}|\psi_{in}\rangle = 0$ e $\Delta_{f,L}|\psi_f\rangle = 0$.

Da mesma forma que no problema das caixas, aqui cada observável de interesse foi reescrito com operadores de autovalor nulo próprios para ele, ou seja, $\Delta_{in,L}$ utilizado

aqui não será utilizado para reescrever Π_R , por exemplo, por isso o índice L aparece em $\Delta_{in,L}$. As definições de $\Delta_{in,L}$ e $\Delta_{f,L}$ na base definida pelo sistema, podem ser encontrada no apêndice B.

A pré-seleção do sistema pode ser feita com a medição de um operador $B = \Pi_{in} + \Delta_{in,L}$ e a pós-seleção com a medição de um operador $C = \Delta_{f,L}$. Atribuindo-se uma interpretação realista aos processos de medição, obtemos

$$\tilde{\Pi}_L = \tilde{\Pi}_{in} + \tilde{\Delta}_{in,L} + \tilde{\Delta}_{f,L} = 1 + 0 + 0 = 1, \quad (4.23)$$

que comparando com o valor fraco de Π_L , equação (3.15), encontramos a igualdade da proposta (4.6): $\Pi_{L,w} = \tilde{\Pi}_L$.

Já para o observável que confere a presença do fóton do braço direito, Π_R , temos:

$$\Pi_R = \Pi_{in} - \Pi_f + \Delta_{in,R} + \Delta_{f,R}, \quad (4.24)$$

onde $\Delta_{in,R} |\psi_{in}\rangle = 0$ e $\Delta_{f,R} |\psi_f\rangle = 0$. O que nos leva a:

$$\tilde{\Pi}_R = \tilde{\Pi}_{in} - \tilde{\Pi}_f + \tilde{\Delta}_{in,R} + \tilde{\Delta}_{f,R} = 0, \quad (4.25)$$

para uma visão realista de uma medida destes observáveis, o que pode ser feito na preparação de $|\Psi\rangle$ e $|\Phi\rangle$. E portanto, $\Pi_{R,w} = \tilde{\Pi}_R$.

A medida da polarização circular do fóton no braço esquerdo do interferômetro é feita pelo observável $\sigma_z^{(L)}$, que pode ser reescrito como:

$$\sigma_z^{(L)} = \Pi_{in} - \Pi_f + \eta_{in,L} + \eta_{f,L}, \quad (4.26)$$

em que $\eta_{in,L} |\psi_{in}\rangle = 0$ e $\eta_{f,L} |\psi_f\rangle = 0$. De maneira que a perspectiva realista da medição destes operadores no preparação de $|\Psi\rangle$ e na seleção de $|\Phi\rangle$ implicaria em:

$$\tilde{\sigma}_z^{(L)} = \tilde{\Pi}_{in} - \tilde{\Pi}_f + \tilde{\eta}_{in,L} + \tilde{\eta}_{f,L} = 0, \quad (4.27)$$

ou seja $\sigma_{z,w}^{(L)} = \tilde{\sigma}_z^{(L)}$.

E por fim, conseguimos reescrever $\sigma_z^{(R)}$, que mede a polarização do fóton no braço direito como:

$$\sigma_z^{(R)} = \Pi_{in} + \eta_{in,R} + \eta_{f,R}, \quad (4.28)$$

sendo que $\eta_{in,R} |\psi_{in}\rangle = 0$ e $\eta_{f,R} |\psi_f\rangle = 0$. E mais uma vez, da perspectiva realista do processo do medição, somos induzidos à igualdade (4.6)

$$\tilde{\sigma}_z^{(R)} = \tilde{\Pi}_{in} + \tilde{\eta}_{in,L} + \tilde{\eta}_{f,L} = 1, \quad (4.29)$$

isto é $\Pi_{z,w}^{(R)} = \tilde{\sigma}_z^{(R)}$.

Vemos então que a conclusão paradoxal de que um fóton pode ser separado de sua polarização ou um nêutron de seu spin, decorrentes de uma interpretação realista para os valores fracos (3.15), (3.16), (3.17) e (3.18) está atrelada a uma interpretação realista para medições quânticas.

4.5 Violação do princípio da casa dos pombos para sistemas quânticos

No paradoxo da casa dos pombos quântica, onde a disposição de três partículas em duas caixas distintas não resulta em mais de uma partícula na mesma caixa, o observável medido fracamente é aquele que apura se duas partículas estão na mesma posição, equação (3.22):

$$\Pi_{i,j}^{same} = |LL\rangle \langle LL| + |RR\rangle \langle RR|.$$

Da mesma forma que no paradoxo das caixas e no gato de Cheshire utilizamos do *Wolfram Mathematica* para fazer os cálculos e o operador de interesse é reescrito como uma combinação de projetores dos estados de pré-seleção e pós-seleção (Π_{in} e Π_f), além de operadores tais que esses estados sejam autoestados com autovalor igual a zero ($Z_{in}|\Psi\rangle = 0$ e $Z_f|\Phi\rangle = 0$), que estão relacionados no Apêndice C. Encontramos que é possível escrever Π_{same} como:

$$\Pi_{i,j}^{same} = \Pi_{in} - \Pi_f + Z_{in} + Z_f. \quad (4.30)$$

Então, a preparação de $|\Psi\rangle$ por meio de uma medição de Π_{in} e Z_{in} e uma seleção de $|\Phi\rangle$ através da medição de Π_f e Z_f nos leva à:

$$\tilde{\Pi}_{i,j}^{same} = \tilde{\Pi}_{in} - \tilde{\Pi}_f + \tilde{Z}_{in} + \tilde{Z}_f = 1 - 1 - 0 - 0 = 0 \quad (4.31)$$

do ponto de vista realista para a medição.

Então, a igualdade (4.6) é verificada também para o problema da violação do princípio da casa de pombos quântica.

$$\Pi_{(i,j)w}^{same} = \tilde{\Pi}^{same}. \quad (4.32)$$

Vemos então que a conclusão paradoxal da violação do princípio da casa dos pombos em um sistema quântico, decorrente de uma interpretação realista para os valores fracos [24], está atrelada a uma interpretação realista para medições quânticas.

4.6 Partículas de spin-2

Na seção (3.5) do capítulo anterior, apresentamos a proposta da referência [26] de como interpretações realistas dos processos de medição podem gerar inconsistências, enquanto neste capítulo estamos demonstrando como paradoxos (ou valores anômalos) estão ligados com as interpretações realistas do processo de medição. Ainda na seção (3.5) demonstramos como uma medida fraca da componente y do spin de partículas de spin 2, apesar do seu resultado absurdo, estaria de acordo com a interpretação realista do processo de medição. O que faremos aqui agora é o mesmo que fizemos para os outros paradoxos deste capítulo, procuramos reescrever o observável medido fracamente como uma combinação de outros operadores hermitianos tais que os estados de pré-seleção e pós-seleção sejam autoestados para verificar a igualdade (4.6).

Na seção (3.5) o observável medido fracamente é o operador S_y^2 , que podemos reescrever simplesmente como:

$$S_y^2 = S^2 - S_x^2 - S_z^2. \quad (4.33)$$

A relação desses observáveis com os estados de pré-seleção $|2\rangle_x$ e pós-seleção $|2\rangle$ é:

$$S_x^2 |2\rangle_x = 4\hbar^2 |2\rangle_x,$$

$$S_z^2 |2\rangle = 4\hbar^2 |2\rangle,$$

$$S^2 |2\rangle_x = 6\hbar^2 |2\rangle_x,$$

$$S^2 |2\rangle = 6\hbar^2 |2\rangle.$$

Então, dado S_y^2 como na equação (4.33), podemos fazer a associação entre a medição do valor fraco deste observável com uma interpretação realista do processo de medição, como nos casos anteriores, considerando que as medições de S_x^2 , S_z^2 e S^2 foram realizadas na preparação do estado de pré-seleção e na seleção do estado de pós-seleção. E então, dados $|\psi_{in}\rangle$ e $|\psi_f\rangle$, para uma visão realista do processo de medição tem-se que :

$$\begin{aligned} \tilde{S}_y^2 &= \tilde{S}^2 - \tilde{S}_x^2 - \tilde{S}_z^2 \\ &= 6\hbar^2 - 4\hbar^2 - 4\hbar^2 = -2\hbar^2. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Comparando este resultado com o valor fraco de S_y^2 , equação (3.29), verificamos novamente a igualdade (4.6)

$$S_{y,w}^2 = \tilde{S}_y^2, \quad (4.35)$$

que representa a equivalência entre o valor fraco e a interpretação realista do processo de medição.

5 Conclusão

Interpretações realistas do processo de medição quântica podem ser problemáticas e nesse trabalho buscamos demonstrar como a atribuição de uma realidade objetiva ao resultado de uma medição fraca para sistemas pós-selecionados dá a luz a paradoxos quânticos, mas que esses paradoxos podem ser evitados se a visão realista do próprio processo de medição quântica for dispensado, pois, como demonstrado no capítulo 4, há uma relação direta entre valores fracos anômalos e uma interpretação realista do processo de medição. Essa relação foi demonstrada partindo da hipótese de que o observável medido fracamente pode ser reescrito como uma combinação de operadores hermitianos que possuem o estado de pré-seleção ou o estado de pós-seleção como autoestados. Uma vez que essa hipótese se mostra verdadeira, a relação entre valores fracos e interpretações realista se estabelece. Esperamos para o futuro estender a verificação dessa hipótese para outros paradoxos envolvendo valores fracos como por exemplo a troca de sorrisos entre gatos de Cheshire quânticos [27] e o paradoxo do passado de uma partícula quântica [28].

A conclusão principal deste trabalho, portanto, é que podemos evitar todos os paradoxos quânticos baseados em medições fracas discutidos nessa dissertação simplesmente negando a interpretação realista de que uma medição quântica revela um valor objetivo para a quantidade medida existente antes da medição e que continua o mesmo após a medição ser efetuada.

Referências

- [1] Aharonov, Yakir, David Z Albert e Lev Vaidman: *How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-1/2 particle can turn out to be 100*. Physical review letters, 60(14):1351, 1988. Citado 10 vezes nas páginas 6, 10, 11, 17, 18, 20, 21, 23, 25 e 34.
- [2] Sakurai, J. J. e Napolitano, J: *Mecânica Quântica Moderna, 2ª edição*, 2013. Citado na página 10.
- [3] Hosten, Onur e Paul Kwiat: *Observation of the spin Hall effect of light via weak measurements*. Science, 319(5864):787–790, 2008. Citado na página 10.
- [4] Lundeen, Jeff S, Brandon Sutherland, Aabid Patel, Corey Stewart e Charles Bamber: *Direct measurement of the quantum wavefunction*. Nature, 474(7350):188–191, 2011. Citado na página 10.
- [5] Cho, Young Wook, Yosep Kim, Yeon Ho Choi, Yong Su Kim, Sang Wook Han, Sang Yun Lee, Sung Moon e Yoon Ho Kim: *Emergence of the geometric phase from quantum measurement back-action*. Nature Physics, 15(7):665–670, 2019. Citado na página 11.
- [6] Dressel, Justin, Mehul Malik, Filippo M Miatto, Andrew N Jordan e Robert W Boyd: *Colloquium: Understanding quantum weak values: Basics and applications*. Reviews of Modern Physics, 86(1):307, 2014. Citado na página 11.
- [7] Aharonov, Yakir e Lev Vaidman: *Properties of a quantum system during the time interval between two measurements*. Physical Review A, 41(1):11, 1990. Citado 3 vezes nas páginas 11, 21 e 22.
- [8] Vaidman, Lev: *Weak-measurement elements of reality*. Foundations of Physics, 26(7):895–906, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 22.
- [9] Legget, A. J.: *Comment on "How the Result of a Measurement of a Component of the Spin of a Spin-1/2 Particle Can Turn Out to be 100"*. Physical Review Letters, 62(19):2325, 1989. Citado 3 vezes nas páginas 11, 20 e 21.
- [10] Peres, A.: *Quantum Measurements with Postselection*. Physical Review Letters, 62(19):2326, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 20.
- [11] Aharonov, Yakir, Sandu Popescu, Daniel Rohrlich e Paul Skrzypczyk: *Quantum cheshire cats*. New Journal of Physics, 15(11):113015, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 12, 27, 28 e 29.

- [12] Aharonov, Yakir e Lev Vaidman: *Complete description of a quantum system at a given time*. Journal of Physics A: Mathematical and General, 24(10):2315, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 25.
- [13] Duck, IM, Paul M Stevenson e ECG Sudarshan: *The sense in which a "weak measurement" of a spin-1/2 particle's spin component yields a value 100*. Physical Review D, 40(6):2112, 1989. Citado 5 vezes nas páginas 12, 21, 24, 34 e 37.
- [14] Corrêa, Raul, Marcelo França Santos, CH Monken e Pablo L Saldanha: *'Quantum Cheshire Cat' as simple quantum interference*. New Journal of Physics, 17(5):053042, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 12, 28, 29 e 37.
- [15] Corrêa, Raul e Pablo L Saldanha: *Apparent quantum paradoxes as simple interference: Quantum violation of the pigeonhole principle and exchange of properties between quantum particles*. Physical Review A, 104(1):012212, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 37.
- [16] Cohen-Tannoudji, C.; Diu, B. e Laloë F.: *Quantum Mechanics, Volume 1, Basic Concepts, Tools, and Applications*. WILEY-VCH, 2020. Citado na página 13.
- [17] Neumann, J. von: *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Press, 2018. Citado na página 13.
- [18] E., Ballentine L.: *Quantum Mechanics - A Modern Development*. World Scientific Publishing, 1999. Citado na página 15.
- [19] L. Vaidman, Y. Aharonov e: *Aharonov and Vaidman Reply*. Physical Review Letters, 62(19):2327, 1989. Citado na página 21.
- [20] Vaidman, Lev: *Weak value controversy*. Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 375(2106):20160395, 2017. Citado na página 22.
- [21] Y., Aharonov e Rohrlich D.: *Quantum Paradoxes - Quantum Theory for the Perplexed*. WILEY-VCH Verlag, 2005. Citado na página 26.
- [22] Resch, Kevin J, Jeff S Lundeen e Aephraim M Steinberg: *Experimental realization of the quantum box problem*. Physics Letters A, 324(2-3):125–131, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 37.
- [23] Denkmayr, Tobias, Hermann Geppert, Stephan Sponar, Hartmut Lemmel, Alexandre Matzkin, Jeff Tollaksen e Yuji Hasegawa: *Observation of a quantum Cheshire Cat in a matter-wave interferometer experiment*. Nature communications, 5(1):1–7, 2014. Citado na página 30.

- [24] Aharonov, Yakir, Fabrizio Colombo, Sandu Popescu, Irene Sabadini, Daniele C Struppa e Jeff Tollaksen: *Quantum violation of the pigeonhole principle and the nature of quantum correlations*. Proceedings of the National Academy of Sciences, 113(3):532–535, 2016. Citado 3 vezes nas páginas 30, 31 e 46.
- [25] Chen, Ming Cheng, Chang Liu, Yi Han Luo, He Liang Huang, Bi Ying Wang, Xi Lin Wang, Li Li, Nai Le Liu, Chao Yang Lu e Jian Wei Pan: *Experimental demonstration of quantum pigeonhole paradox*. Proceedings of the National Academy of Sciences, 116(5):1549–1552, 2019. Citado na página 32.
- [26] Saldanha, Pablo L.: *Inconsistency of a Realistic Interpretation of Quantum Measurements: a Simple Example*. Brazilian Journals of Physics, 3(10):73–91, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 32, 33 e 46.
- [27] Liu, Zheng Hao, Wei Wei Pan, Xiao Ye Xu, Mu Yang, Jie Zhou, Ze Yu Luo, Kai Sun, Jing Ling Chen, Jin Shi Xu, Chuan Feng Li *et al.*: *Experimental exchange of grins between quantum Cheshire cats*. Nature communications, 11(1):1–7, 2020. Citado na página 48.
- [28] Vaidman, Lev: *Past of a quantum particle*. Physical Review A, 87(5):052104, 2013. Citado na página 48.

Apêndices

APÊNDICE A – Operadores do problema das três caixas

A base utilizada para representar todos operadores aqui relacionados é a base formada pelos estados que representam as caixas, $\{|A\rangle, |B\rangle, |C\rangle\}$. Optamos aqui por reproduzi-los no formato matricial.

Os projetores dos estados de pré-seleção e de pós-seleção são, respectivamente:

$$\Pi_{in} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

e

$$\Pi_f = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Já os operadores do tipo $K_{in,i}$ e $K_{f,i}$ para os quais os estados de pré-seleção e pós-seleção são autoestados com autovalor nulo estão relacionados a seguir:

Para Π_A , que foi reescrito como (4.13):

$$\Pi_A = \frac{1}{2}\Pi_{in} + \frac{1}{2}\Pi_f + K_{in,A} + K_{f,A}, \quad (\text{A.3})$$

temos:

$$K_{in,A} = \begin{pmatrix} 3/2 & -4/3 & -1/6 \\ -4/3 & 1 & 1/3 \\ -1/6 & 1/3 & -1/6 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

e

$$K_{f,A} = \begin{pmatrix} -5/6 & 1 & 1/6 \\ 1 & -4/3 & -1/3 \\ 1/6 & -1/3 & -1/6 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Para Π_B , reescrito como (4.16):

$$\Pi_B = \Pi_{in} + K_{in,B} + K_{f,B}, \quad (\text{A.6})$$

temos:

$$K_{in,B} = \begin{pmatrix} -5/6 & 2/3 & 1/6 \\ 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/6 & -1/3 & 1/6 \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

e

$$K_{f,B} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & -1/2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Para Π_C reescrito como (4.19):

$$\Pi_C = \frac{1}{2}\Pi_{in} - \frac{3}{2}\Pi_f + K_{in,C}, \quad (\text{A.9})$$

onde

$$K_{in,C} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 4/3 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

APÊNDICE B – Operadores Gato de Cheshire Quântico

Neste apêndice, estão relacionados os operadores utilizados para reescrever os observáveis medidos fracamente na seção (4.4). Todos os operadores estão na base definida pelo produto tensorial entre o subespaço de posição e o de polarização linear do fóton. $\{|LH\rangle, |LV\rangle, |RH\rangle, |RV\rangle\}$.

Projektor do braço esquerdo do interferômetro

O observável que mede a presença de um fóton no braço esquerdo do interferômetro é Π_L , reescrito como:

$$\Pi_L = \Pi_L + \Delta_{in,L} + \Delta_{f,L} \quad (\text{B.1})$$

sendo

$$\Delta_{in,L} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & -3i/2 & -1 \\ 1 & 1 & -i & -1 \\ 3i/2 & i & 3/2 & -i \\ -1 & -1 & i & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

um operador hermitiano tal que $\Delta_{in,L} |\Psi\rangle = 0$.

Já o operador $\Delta_{f,L}$, tal que $\Delta_{f,L} |\Phi\rangle = 0$ é dado por:

$$\Delta_{f,L} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & i & 1 \\ -1 & 0 & i & 1 \\ -i & -i & -2 & i \\ 1 & 1 & -i & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

Projektor do braço direito do interferômetro

O projetor Π_R verifica a presença do fóton no braço direito do interferômetro e pode ser reescrito como:

$$\Pi_R = \Pi_{in} - \Pi_f + \Delta_{in,R} + \Delta_{f,R} \quad (\text{B.4})$$

onde

$$\Delta_{in,R} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & i/2 & 1 \\ 1 & 1 & -i & -1 \\ -i/2 & i & -1/2 & i \\ 1 & -1 & -i & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

é um operador que tem o estado de pré-seleção como autoestado com autovalor nulo, $\Delta_{in,R} |\Psi\rangle = 0$. Enquanto $\Delta_{f,R}$ é um operador que possui o estado de pós-seleção como autoestado com autovalor nulo. Sendo ele dado por

$$\Delta_{f,R} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & -i & -1/2 \\ -1 & -1 & i & 1 \\ i & -i & 1 & -i \\ -1/2 & 1 & i & 1/2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

Polarização circular no braço esquerdo do interferômetro

O operador que mede polarização no braço esquerdo do interferômetro foi reescrito como

$$\sigma_z^{(L)} = \Pi_{in} - \Pi_f + \eta_{in,L} + \eta_{f,L} \quad (\text{B.7})$$

sendo

$$\eta_{in,L} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -i/2 & 0 \\ 1 & 1 & -i & i-1 \\ i/2 & i & 1/2 & 0 \\ 0 & -i-1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

um operador hermitiano tal que $\eta_{in,L} |\Psi\rangle = 0$.

Enquanto

$$\eta_{f,L} = \begin{pmatrix} -1/2 & -i-1 & 0 & 1/2 \\ i-1 & -1 & i & 1-i \\ 0 & -i & -1 & 0 \\ 1/2 & i+1 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.9})$$

é um operador tal que o estado de pós-seleção é autoestado com autovalor nulo $\eta_{f,L} |\Phi\rangle = 0$.

Polarização circular no braço direito do interferômetro

Por fim, temos o operador $\sigma_z^{(R)}$ que mede a polarização circular no braço direito do interferômetro e foi reescrito como?

$$\sigma_z^{(R)} = \Pi_{in} + \eta_{in,R} + \eta_{f,R} \quad (\text{B.10})$$

sendo $\eta_{in,R} |\Psi\rangle = 0$ e $\eta_{f,R} |\Phi\rangle = 0$. E $\eta_{in,R}$ é dado por:

$$\eta_{in,R} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -i/2 & -1 \\ 1 & 1 & -i & -1 \\ i/2 & i & 1/2 & -i \\ -1 & -1 & i & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.11})$$

enquanto $\eta_{f,R}$ é dado por:

$$\eta_{f,R} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & i & 1 \\ 0 & -i & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.12})$$

APÊNDICE C – Operadores do problema da violação do princípio da casa de pombos para sistemas quânticos

Neste apêndice, estão relacionados os operadores utilizados para reescrever o observável medido fracamente na seção (4.5). Todos os operadores estão na base definida pelo produto tensorial entre o subespaço de posição da partícula i e de posição da partícula 2: $\{|LL\rangle, |LR\rangle, |RL\rangle, |RR\rangle\}$.

O operador $\Pi_{i,j}^{same}$, pode ser reescrito como, equação (4.30):

$$\Pi_{i,j}^{same} = \Pi_{in} - \Pi_f + Z_{in} + Z_f, \quad (\text{C.1})$$

onde $Z_{in} |\Psi\rangle = 0$ e $Z_f |\Phi\rangle = 0$, sendo que a forma de Z_{in} e Z_f na base definida anteriormente é:

$$Z_{in} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -(i+5)/4 & (i-3)/4 \\ 1 & 1 & (5i-7)/4 & -(5i+1)/4 \\ (i-5)/4 & -(5i-7)/4 & 3 & i \\ -(i+3)/4 & (5i-1)/4 & -i & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

e

$$Z_f = \begin{pmatrix} 0 & -(i+5)/4 & 1 & (1-i)/4 \\ (i-5)/4 & -1 & (7-5i)/4 & i \\ 1 & (5i+7)/4 & -3 & -(5i+1)/4 \\ (i+1)/4 & -i & (5i-1)/4 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.3})$$

APÊNDICE D – Código fonte para a obtenção dos novos operadores

Como mencionado no capítulo 4, uma maneira de reescrever os observáveis medidos fracamente nos paradoxos foi através do software *Wolfram Mathematica*. Neste apêndice, estão dispostas a sequência utilizada para a obtenção dos resultados, bem como um detalhamento do procedimento. Aqui detalhamos apenas o procedimento para a obtenção do observável X, como forma de ilustrar a técnica. O protocolo é o mesmo para todos.

A notação de Dirac para a mecânica quântica pode ser incorporada ao *Wolfram Mathematica* através do pacote *NeedsQuantumNotation* que deve ser adicionado no início do notebook, bem como sua extensão *QuantumAliases*

```
In[1]:= Needs [Quantum'Notation']
```

```
In[2]:= SetQuantumAliases []
```

Iniciamos o procedimento definindo os estados de pré-seleção e pós-seleção, tanto em notação de Dirac como em sua forma matricial.

```
In[3]:= |ψ⟩ = (1/Sqrt [3]) (|A⟩ + |B⟩ + |C⟩)
```

```
Out[3]= 
$$\frac{|A\rangle+|B\rangle+|C\rangle}{\sqrt{3}}$$

```

```
In[4]:= ψvec={1/Sqrt [3] , 1/Sqrt [3] , 1/Sqrt [3] }
```

```
Out[4]= 
$$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

```

```
In[5]:= |φ⟩ = (1/Sqrt [3]) (|A⟩ + |B⟩ - |C⟩)
```

```
Out[5]= 
$$\frac{|A\rangle+|B\rangle-|C\rangle}{\sqrt{3}}$$

```

```
In[6]:= φvec={1/Sqrt [3] , 1/Sqrt [3] , -1/Sqrt [3] }
```

```
Out[6]= 
$$\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

```

Em seguida, utilizamos o comando *Expand* para escrever o operador de projeção dos estados de pré-seleção e pós-seleção, representados por Π_{in} e Π_f respectivamente.

```
In[7]:=  $\Pi_{in} = \text{Expand}[|\psi\rangle \cdot \langle\psi|]$ 
```

```
Out[7]=  $\frac{1}{3}|A\rangle \cdot \langle A| + \frac{1}{3}|B\rangle \cdot \langle A| + \frac{1}{3}|C\rangle \cdot \langle A| + \frac{1}{3}|A\rangle \cdot \langle B| + \frac{1}{3}|B\rangle \cdot \langle B| +$   

 $\frac{1}{3}|C\rangle \cdot \langle B| + \frac{1}{3}|A\rangle \cdot \langle C| + \frac{1}{3}|B\rangle \cdot \langle C| + \frac{1}{3}|C\rangle \cdot \langle C|$ 
```

```
In[8]:=  $\Pi_f = \text{Expand}[|\phi\rangle \cdot \langle\phi|]$ 
```

```
Out[8]=  $\frac{1}{3}|A\rangle \cdot \langle A| + \frac{1}{3}|B\rangle \cdot \langle A| - \frac{1}{3}|C\rangle \cdot \langle A| + \frac{1}{3}|A\rangle \cdot \langle B| + \frac{1}{3}|B\rangle \cdot \langle B| -$   

 $\frac{1}{3}|C\rangle \cdot \langle B| - \frac{1}{3}|A\rangle \cdot \langle C| - \frac{1}{3}|B\rangle \cdot \langle C| + \frac{1}{3}|C\rangle \cdot \langle C|$ 
```

O operador de projeção é escrito também na forma matricial, utilizando o comando *DiracToMatrix*. Aqui, identificamos as matrizes que representam o projetor de $|\psi_{in}\rangle$ e $|\psi_f\rangle$ com P_{in} e P_f , respectivamente.

```
In[9]:=  $P_{in} = \text{DiracToMatrix}[\Pi_{in},\{\{A, B, C\}\}]$ 
```

```
Out[9]=  $\left\{ \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}, \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}, \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\} \right\}$ 
```

```
In[10]:=  $P_f = \text{DiracToMatrix}[\Pi_f,\{\{A, B, C\}\}]$ 
```

```
Out[10]=  $\left\{ \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right\}, \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right\}, \left\{ -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\} \right\}$ 
```

Em seguida, definimos o operador a ser medido fracamente que nesse caso é o projetor da caixa C do paradoxo das caixas. Em forma matricial, representada por P_C :

```
In[11]:=  $P_C = \{\{0,0,0\},\{0,0,0\},\{0,0,1\}\}$ 
```

```
Out[11]=  $\{\{0,0,0\},\{0,0,0\},\{0,0,1\}\}$ 
```

O comando *Reduce* a seguir foi utilizado para verificar se havia quaisquer combinações dos operadores de projeção que retornasse Π_C . O resultado foi negativo.

```
In[12]:=  $\text{Reduce}[(\alpha * P_{in}) + (\beta * P_f) + (\gamma * P_{in} * P_f) + (\eta * P_f * P_{in}) == \Pi_C]$ 
```

```
Out[12]= False
```

Como o resultado do comando [12] indica que não há combinações dos projetores de $|\psi_{in}\rangle$ e $|\psi_f\rangle$ que seja igual a Π_C , consideramos a existência de um operador Z qualquer que tivesse esses estados como autoestados. Consideramos primeiramente Z_{in} genérico, tal que $|\psi_{in}\rangle$ seja autoestado:

In[13]:= $Z_{in} = \{\{a_{11}, a_{12}, a_{13}\}, \{a_{21}, a_{22}, a_{23}\}, \{a_{31}, a_{32}, a_{33}\}\}$

Out[13]= $\{\{a_{11}, a_{12}, a_{13}\}, \{a_{21}, a_{22}, a_{23}\}, \{a_{31}, a_{32}, a_{33}\}\}$

Impomos uma condição de que Z_{in} é um operador hermitiano

In[14]:= $Z_{in} == Z_{in}^\dagger$

Out[14]= $\{\{a_{11}, a_{12}, a_{13}\}, \{a_{21}, a_{22}, a_{23}\}, \{a_{31}, a_{32}, a_{33}\}\} ==$
 $\{\{a_{11}^*, a_{21}^*, a_{31}^*\}, \{a_{12}^*, a_{22}^*, a_{32}^*\}, \{a_{13}^*, a_{23}^*, a_{33}^*\}\}$

e utilizamos o comando *Reduce* para estabelecer a relação entre os elementos da matriz para que ela seja hermitiana:

In[15]:= $\text{Reduce}[Z_{in} == Z_{in}^\dagger, \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}\}]$

Out[15]= $\text{Im}[a_{11}] == 0 \ \&\& \ a_{21} == a_{12}^* \ \&\& \ \text{Im}[a_{22}] == 0 \ \&\& \ a_{31} == a_{13}^* \ \&\& \ a_{32} == a_{23}^* \ \&\& \ \text{Im}[a_{33}] == 0$

uma vez estabelecidas essas relações, elas são impostas como condições no código

In[16]:= $a_{11} \in \text{Reals}$

Out[16]= $a_{11} \in \mathbb{R}$

In[17]:= $a_{22} \in \text{Reals}$

Out[17]= $a_{22} \in \mathbb{R}$

In[18]:= $a_{33} \in \text{Reals}$

Out[18]= $a_{33} \in \mathbb{R}$

In[19]:= $a_{21} = a_{12}^*$

Out[19]= a_{12}^*

```
In[20]:= a31 = a13*
```

```
Out[20]= a13*
```

```
In[21]:= a32 = a23*
```

```
Out[21]= a23*
```

Imprimimos a matriz para verificar que os termos estão corretos

```
In[22]:= Print[Zin]
```

```
{ {a11, a12, a13}, {a12*, a22, a23}, {a13*, a23*, a33}}
```

Da mesma forma que Z_{in} foi definida para que $|\psi_{in}\rangle$ fosse autoestados, definimos também Z_f tal que $|\psi_f\rangle$ seja autoestado. Repetimos todos os outros procedimentos realizados para Z_{in}

```
In[23]:= Zf = {{b11, b12, b13}, {b21, b22, b23}, {b31, b32, b33}}
```

```
Out[23]= {{b11, b12, b13}, {b21, b22, b23}, {b31, b32, b33}}
```

```
In[24]:= Zf == Zf†
```

```
Out[24]= {{b11, b12, b13}, {b21, b22, b23}, {b31, b32, b33}} ==
{{b11*, b21*, b31*, {b12*, b22*, b32*}, {b13*, b23*, b33*}}
```

```
In[25]:= Reduce[Zf==Zf†, {b11, b12, b13, b21, b22, b23, b31, b32, b33}]
```

```
Out[25]= Im[b11]==0 && b21==b12* && Im[b22]==0 &&
b31==b13* && b32==b23* && Im[b33]==0
```

```
In[26]:= b11 ∈ Reals
```

```
Out[26]= b11 ∈ R
```

```
In[27]:= b22 ∈ Reals
```

```
Out[27]= b22 ∈ R
```

```
In[28]:= b33 ∈ Reals
```

Out[28]= $b_{33} \in \mathbb{R}$

In[29]:= $b_{21} = b_{12}^*$

Out[29]= b_{12}^*

In[30]:= $b_{31} = b_{13}^*$

Out[30]= b_{13}^*

In[31]:= $b_{32} = b_{23}^*$

Out[31]= b_{23}^*

In[32]:= **Print**[Z_f]

$\{\{b_{11}, b_{12}, b_{13}\}, \{b_{12}^*, b_{22}, b_{23}\}, \{b_{13}^*, b_{23}^*, b_{33}\}\}$

Reescrevemos Z_{in} e Z_f , respectivamente, como Y_{in} e Y_f na notação de Dirac utilizando o comando *MatrixToDirac*

In[33]:= $Y_{in} = \text{MatrixToDirac}[Z_{in}, \{3\}, \{0 \rightarrow A, 1 \rightarrow B, 2 \rightarrow C\}]$

Out[33]= $a_{11} |A\rangle \cdot \langle A| + a_{12}^* |B\rangle \cdot \langle A| + a_{13}^* |C\rangle \cdot \langle A| + a_{12} |A\rangle \cdot \langle B| + a_{22} |B\rangle \cdot \langle B| + a_{23}^* |C\rangle \cdot \langle B| + a_{13} |A\rangle \cdot \langle C| + a_{23} |B\rangle \cdot \langle C| + a_{33} |C\rangle \cdot \langle C|$

In[34]:= $Y_f = \text{MatrixToDirac}[Z_f, \{3\}, \{0 \rightarrow A, 1 \rightarrow B, 2 \rightarrow C\}]$

Out[34]= $b_{11} |A\rangle \cdot \langle A| + b_{12}^* |B\rangle \cdot \langle A| + b_{13}^* |C\rangle \cdot \langle A| + b_{12} |A\rangle \cdot \langle B| + b_{22} |B\rangle \cdot \langle B| + b_{23}^* |C\rangle \cdot \langle B| + b_{13} |A\rangle \cdot \langle C| + b_{23} |B\rangle \cdot \langle C| + b_{33} |C\rangle \cdot \langle C|$

Impomos, por fim, que a relação entre Z_{in} e $|\psi_{in}\rangle$ é $Z_{in} |\psi_{in}\rangle = 0$.

In[35]:= $Z_{in} \cdot \psi_{vec} == 0$

Out[35]= $\left\{ \frac{a_{11}}{\sqrt{3}} + \frac{a_{12}}{\sqrt{3}} + \frac{a_{13}}{\sqrt{3}}, \frac{a_{12}^*}{\sqrt{3}} + \frac{a_{22}}{\sqrt{3}} + \frac{a_{23}}{\sqrt{3}}, \frac{a_{13}^*}{\sqrt{3}} + \frac{a_{23}^*}{\sqrt{3}} + \frac{a_{33}}{\sqrt{3}} \right\} == 0$

Encontramos quais relações entre os termos da matriz devem ser satisfeitas para que $Z_{in} |\psi_{in}\rangle = 0$:

In[36]:= **Reduce**[$Z_{in} \cdot \psi_{vec} == 0$, { $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}, a_{33}$ }]

Out[36]= $a_{13} == i(-\text{Im}[a_{11}] - \text{Im}[a_{12}]) - \text{Re}[a_{11}] - \text{Re}[a_{12}] \ \&\& \ a_{23} == -a_{12}^* - a_{22} \ \&\& \ a_{33} == -a_{13}^* - a_{23}^*$

In[37]:= $a_{13} = i(-\text{Im}[a_{11}] - \text{Im}[a_{12}]) - \text{Re}[a_{11}] - \text{Re}[a_{12}]$

Out[37]= $i(-\text{Im}[a_{11}] - \text{Im}[a_{12}]) - \text{Re}[a_{11}] - \text{Re}[a_{12}]$

In[38]:= $a_{23} = -a_{12}^* - a_{22}$

Out[38]= $-a_{12}^* - a_{22}$

In[39]:= $a_{33} = -a_{13}^* - a_{23}^*$

Out[39]= $a_{22}^* + i(-\text{Im}[a_{11}] - \text{Im}[a_{12}]) + \text{Re}[a_{11}] + \text{Re}[a_{12}] + a_{12}$

In[40]:= **Print**[Z_{in}]

$\{\{a_{11}, a_{12}, i(-\text{Im}[a_{11}] - \text{Im}[a_{12}]) - \text{Re}[a_{11}] - \text{Re}[a_{12}]\}, \{a_{12}^*, a_{22}, -a_{12}^* - a_{22}\}, \{-i(-\text{Im}[a_{11}] - \text{Im}[a_{12}]) + \text{Re}[a_{11}] + \text{Re}[a_{12}] + a_{12}\}\}$

E repetimos o mesmo procedimento para Z_f , considerando que a sua relação com o estado de pós-seleção é $Z_f |\psi_f\rangle = 0$

In[41]:= $Z_f \cdot \phi_{vec} == 0$

In[42]:= **Reduce**[$Z_f \cdot \phi_{vec} == 0$, { $b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{22}, b_{23}, b_{33}$ }]

In[43]:= $b_{13} = i(\text{Im}[b_{11}] + \text{Im}[b_{12}]) + \text{Re}[b_{11}] + \text{Re}[b_{12}]$

Out[43]= $i(\text{Im}[b_{11}] + \text{Im}[b_{12}]) + \text{Re}[b_{11}] + \text{Re}[b_{12}]$

In[44]:= $b_{23} = b_{12}^* + b_{22}$

Out[44]= $b_{12}^* + b_{22}$

In[45]:= $b_{33} = b_{13}^* + b_{23}^*$

Out[45]= $b_{22}^* - i(\text{Im}[b_{11}] + \text{Im}[b_{12}]) + \text{Re}[b_{11}] + \text{Re}[b_{12}] + b_{12}$

In[46]:= **Print** [**Z_f**]

Agora verificamos se uma combinação entre os projetores dos estados de pré-seleção e pós-seleção e o operador Z_{in} retoma Π_C

In[47]:= **($\alpha * P_{in}$) + ($\beta * P_f$) + Z_{in} == Π_C**

Out[47]= $\left\{ \left\{ \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{3} + a_{11}, \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{3} + a_{12}, \frac{\alpha}{3} - \frac{\beta}{3} + i(-\text{Im}[a_{11}] - \text{Im}[a_{12}]) - \text{Re}[a_{11}] - \text{Re}[a_{12}] \right\}, \right.$
 $\left. \left\{ \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{3} + a_{12}^*, \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{3} + a_{22}, \frac{\alpha}{3} - \frac{\beta}{3} - a_{12}^* - a_{22} \right\}, \right.$
 $\left. \left\{ \frac{\alpha}{3} - \frac{\beta}{3} - i(-\text{Im}[a_{11}] - \text{Im}[a_{12}]) - \text{Re}[a_{11}] - \text{Re}[a_{12}], \frac{\alpha}{3} - \frac{\beta}{3} - a_{22}^* - a_{12}, \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{3} + a_{22}^* + \right.$
 $\left. i(-\text{Im}[a_{11}] - \text{Im}[a_{12}]) + \text{Re}[a_{11}] + \text{Re}[a_{12}] + a_{12} \right\} == \{ \{0, 0, 0\}, \{0, 0, 0\}, \{0, 0, 1\} \}$

In[48]:= **Reduce** [**($\alpha * P_{in}$) + ($\beta * P_f$) + Z_{in} == Π_C**]

Out[48]= $a_{22} == \frac{1}{3} \ \&\& \ a_{12} == \frac{1}{3} \ \&\& \ a_{11} == a_{12} \ \&\&$
 $\beta == \frac{1}{2} (-3 \ i \ \text{Im}[a_{11}] - 3 \ i \ \text{Im}[a_{12}] - 3 \ \text{Re}[a_{11}] - 3 \ \text{Re}[a_{12}] - 3 \ a_{11}) \ \&\&$
 $\alpha == -\beta - 3 \ a_{11}$

Verificamos que é possível reescrever Π_C utilizando P_{in} , P_f e Z_{in} apenas. No entanto, mantemos a definição de Z_f no código, pois ele é necessário na reescrita de outros observáveis medidos fracamente neste trabalho. Se o comando em **In[48]** retornasse falso, o processo é repetido para $(\alpha * P_{in}) + (\beta * P_f) + Z_f == \Pi_C$ e se este também retorna falso, então propomos $(\alpha * P_{in}) + (\beta * P_f) + Z_{in} + Z_f == \Pi_C$.

Uma vez estabelecido que $(\alpha * P_{in}) + (\beta * P_f) + Z_{in} == \Pi_C$, determinamos os termos das matriz que define Π_C :

In[49]:= **a₂₂ = $\frac{1}{3}$**

Out[49]= $\frac{1}{3}$

In[50]:= **a₁₂ = $\frac{1}{3}$**

Out[50]= $\frac{1}{3}$

In[51]:= **a₁₁ = a₁₂**

$$\text{Out[51]} = \frac{1}{3}$$

$$\text{In[52]} := \beta = \frac{1}{2} (-3 \text{ i Im}[\mathbf{a}_{11}] - 3 \text{ i Im}[\mathbf{a}_{12}] - 3 \text{ Re}[\mathbf{a}_{11}] - 3 \text{ Re}[\mathbf{a}_{12}] - 3\mathbf{a}_{11})$$

$$\text{Out[52]} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{In[53]} := \alpha = -\beta - 3 \mathbf{a}_{11}$$

$$\text{Out[53]} = \frac{1}{2}$$

Agora que todos os termos estão definidos. Visualizamos a matriz Z_{in} que possibilitou reescrever P_C

$$\text{In[54]} := \mathbf{Z}_{in}$$

$$\text{Out[54]} = \left\{ \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right\}, \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right\}, \left\{ -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{4}{3} \right\} \right\}$$

Verificamos também a relação entre a matriz e o estado de pré-seleção se mantém

$$\text{In[55]} := \mathbf{Z}_{in} \cdot \psi_{vec}$$

$$\text{Out[55]} = \{0, 0, 0\}$$

E por fim, verificamos se $(\alpha * P_{in}) + (\beta * P_f) + Z_{in}$ realmente resulta em Π_C

$$\text{In[56]} := (\alpha * \mathbf{P}_{in}) + (\beta * \mathbf{P}_f) + \mathbf{Z}_{in}$$

$$\text{Out[56]} = \{\{0, 0, 0\}, \{0, 0, 0\}, \{0, 0, 1\}\}$$

$$\text{In[57]} := (\alpha * \mathbf{\Pi}_{in}) + (\beta * \mathbf{\Pi}_f) + \mathbf{Y}_{in} // \text{FullSimplify}$$

$$\text{Out[57]} = |\mathbf{C}\rangle \cdot \langle \mathbf{C}|$$

Essa “sequência lógica” foi utilizada na construção de todos os operadores medidos fracamente nos paradoxos do capítulo 3, exceto o problema da medição de uma componente de spin para partículas de spin-1/2.