

Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Ayane Adelina da Silva

Hipersuperfícies Levi-flat e Webs Holomorfas

Belo Horizonte - MG

2021

Ayane Adelina da Silva

Hipersuperfícies Levi-flat e Webs Holomorfas

Versão Final

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Doutora em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Arturo Ulises Fernández Pérez

Belo Horizonte - MG

2021

Silva, Ayane Adelina da.

S586h Hipersuperfícies Levi-flat e Webs holomorfas [manuscrito] /
Ayane Adelina da Silva. – 2021.
86 f. il.

Orientador: Arturo Ulises Fernández Pérez.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais,
Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.

Referências: f.84-86

1. Matemática – Teses. 2. Folheações Holomorfas – Teses.
3. Webs holomorfas – Teses. 4. Hipersuperfícies Levi-flat –
Teses. I. Fernández Pérez, Arturo Ulises. II. Universidade
Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas,
Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51 (043)



FOLHA DE APROVAÇÃO

HIPERSUPERFÍCIES LEVI-FLAT E WEBS HOLOMORFAS

AYANE ADELINA DA SILVA

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Prof. Arturo Ulises Fernandez Perez
UFMG

Prof. Alcides Lins Neto
IMPA

Prof. Luis Guillermo Martinez Maza
UFAL

Prof. Márcio Gomes Soares
UFMG

Profª. Maria Aparecida Soares Ruas
USP

Prof. Maurício Barros Correa Júnior
UFMG

Belo Horizonte, 11 de junho de 2021.

Resumo

Nesta tese, serão considerados aspectos da teoria local e global de Webs Holomorfas e Hipersuperfícies Levi-flat. Abordaremos três propostas. Na primeira proposta, vamos considerar uma hipersuperfície real analítica Levi-flat induzida por uma curva real analítica na Grassmaniana de hiperplanos complexos. Provaremos que a folheação de Levi associada a esta hipersuperfície se estende a uma web holomorfa. A segunda proposta é estudar condições suficientes para a existência de singularidades com integral primeira local para webs em superfícies complexas compactas, que deixam invariante uma hipersuperfície real analítica Levi-flat. Por último, a terceira proposta é o estudo de hipersuperfícies reais analíticas associadas a mapas reais analíticos que satisfazem as condições de fibração de Milnor. Veremos que, sob certas condições, tais hipersuperfícies não são Levi-flat.

Palavras-chave: Folheações Holomorfas; Webs Holomorfas; Hipersuperfícies Levi-flat.

Abstract

In this thesis, aspects of the local and global theory of Holomorphic Webs and Levi-flat Hypersurfaces will be considered. We will address three proposals. The first one, is to consider a real analytic Levi-flat hypersurface induced by a real analytic curve in the Grassmanian of complex hyperplanes. We will prove that Levi's foliation associated with this hypersurface extends to a holomorphic web. The second one is to study conditions sufficient for the existence of singularities with local first integral of a web on a compact complex surface which leave invariant a real analytic Levi-flat hypersurface. Finally, the third one is the study of real analytic hypersurfaces associated to real analytic maps that satisfy the conditions of Milnor fibration. We will see that under certain conditions that such hypersurfaces are not Levi-flat.

Keywords: Holomorphic Foliations; Holomorphic Webs; Levi-flat Hypersurfaces.

Notações

1. $\mathcal{A}_{n,\mathbb{R}}$: anel de germes em $0 \in \mathbb{C}^n$ de funções reais analíticas, tomando valores reais.
2. \mathcal{O}_n : anel de germes de funções holomorfas em $0 \in \mathbb{C}^n$.
3. $\mathcal{O}_n^* = \{f \in \mathcal{O}_n; f(0) \neq 0\}$.
4. \mathcal{O}_X : feixe de funções holomorfas em uma variedade complexa X .
5. \mathcal{O}_X^* : feixe de funções holomorfas que não anulam em X .
6. Ω_X^1 : feixe de 1-formas holomorfas em X .
7. \mathbb{P}^n : espaço projetivo complexo de dimensão n .
8. $\check{\mathbb{P}}^n \simeq G(n+1, n)$: espaço de hiperplanos complexos em \mathbb{P}^n .
9. $\underline{n} := \{1, \dots, n\}$.
10. S_n : permutações no conjunto \underline{n} .

Conteúdo

Introdução	9
1 Definições básicas	14
1.1 Folheações Holomorfas	14
1.2 Folheação de codimensão 1	17
1.2.1 Índices em dimensão 2	20
1.3 Webs Holomorfas	23
1.3.1 Germes de webs suave e quase-suave	24
1.3.2 Germes de webs singulares	25
1.3.3 Webs algébricas	28
1.3.4 Webs globais	29
1.3.5 Webs em superfícies	31
1.4 Hipersuperfícies Levi-flat	39
1.5 Complexificação	43
1.6 Variedades de Segre	44
2 Problema de extensão da Folheação de Levi	48
2.1 Teorema A	50
3 Webs em superfícies tangentes a hipersuperfícies Levi-flat	53
3.1 Teorema B	56
3.2 Teorema C	58

4	Hipersuperfícies associadas a mapas com fibração de Milnor	63
4.1	O caso dos campos $G = (z_1^{a_1}, \dots, z_n^{a_n})$ e $X = (z_1^{b_1}, \dots, z_n^{b_n})$	66
4.2	Teorema D	69
4.3	Teorema E	72
4.4	O caso dos campos $G = (z_1^{a_1}, z_2^{a_2})$ e $X = (z_{\sigma_1}^{b_{\sigma_1}}, z_{\sigma_2}^{b_{\sigma_2}})$	73
4.5	Teorema F	79
4.6	Teorema G	79
4.7	Teorema H	80
4.8	Exemplos	81

Introdução

Neste trabalho trataremos de alguns aspectos da teoria local e global de Webs Holomorfas e Hipersuperfícies Levi-flat. Ao todo, consideraremos três problemas: o primeiro deles é sobre extensão da folheação de Levi a webs holomorfas; o segundo trata da existência de singularidades dicríticas para webs que deixam invariante uma Levi-flat; e o terceiro é sobre hipersuperfícies associadas a mapas reais que satisfazem as condições de Milnor. Dividimos este trabalho em 4 capítulos.

O Capítulo 1 traz as definições dos principais objetos que trataremos ao longo do texto. Na primeira seção daremos algumas definições alternativas para folheações holomorfas. Dentre elas, definiremos uma folheação holomorfa em X como um objeto dado por uma k -forma ω com conjunto singular $\text{Sing}(\omega)$ de codimensão ≥ 2 , *localmente decomponível* em $X - \text{Sing}(\omega)$ e satisfazendo a *condição de integrabilidade de Frobenius*. Isso é equivalente a uma decomposição \mathcal{F} de X em subvariedades de codimensão k , de modo que por cada $p \in X - \text{Sing}(\omega)$ passa uma única subvariedade da decomposição. Na segunda seção, dentre outras definições alternativas, definiremos uma d -web holomorfa de codimensão 1 como uma seção global do feixe $\text{Sym}^d \Omega_X^1 \otimes E$, onde E é um fibrado vetorial de posto 1 sobre X . Em certo sentido, uma d -web generaliza o conceito de folheação. De fato, uma d -web de codimensão 1 é genericamente a sobreposição de d -folheações holomorfas de codimensão 1. Na terceira seção do primeiro capítulo, falaremos sobre hipersuperfícies Levi-flat, que são hipersuperfícies reais analíticas (em uma variedade complexa) cuja parte regular é folheada por subvariedades complexas. Se M é uma hipersuperfície Levi-flat e M^* sua parte regular, então a folheação em M^* é chamada *folheação de Levi*. As hipersuperfícies Levi-flat surgem naturalmente na teoria de folheações, como subconjuntos invariantes, ou seja, conjuntos que contém inteiramente folhas L_p de uma folheação para cada $p \in M^*$. Uma propriedade importante das folheações holomorfas que deixam uma Levi-flat invariante, é possuir integral primeira (ver [11]), que é uma função holomorfa ou meromorfa f cujas folhas da folheação são componentes conexas das curvas de nível de f .

No Capítulo 2, trataremos da extensão holomorfa da folheação de Levi. De modo mais específico, trataremos do seguinte problema:

Problema: Seja X uma variedade complexa. Dada uma hipersuperfície Levi-flat $M \subset X$, existe uma folheação holomorfa de codimensão 1 em X que estende a folheação de Levi em M^* ?

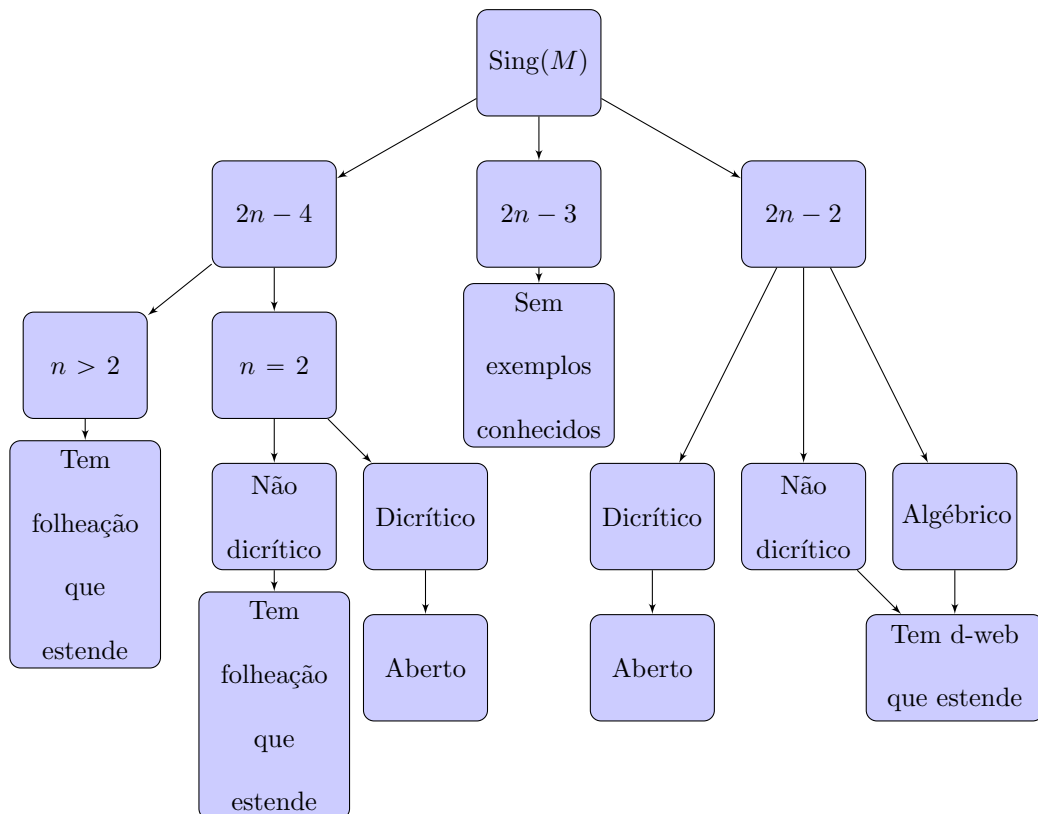
Sabemos que se M é lisa, é possível encontrar uma extensão holomorfa (consequência do Teorema de Cartan [9]), mas em geral isso é falso no caso em que M é singular. Por exemplo: tomando as coordenadas (z, w) em \mathbb{C}^2 tais que $z = x + iy$ e $w = s + it$, a hipersuperfície

$$M := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2; t^2 = 4(y^2 + s)y^2\}$$

é Levi-flat, com conjunto singular $\text{Sing}(M) = \{t = y = 0\}$ de dimensão real 2, mas não existe uma folheação holomorfa em \mathbb{C}^2 que estende a folheação de Levi em M^* . Neste caso, o objeto que estende a folheação de Levi será uma 2-web definida pela 1-forma 2-simétrica $\omega = (dw)^2 - 4w(dz)^2$.

O exemplo acima foi dado por Brunella em [4], e mostra que nem sempre é possível encontrar uma folheação holomorfa que estende a folheação de Levi. Mas em alguns casos a extensão pode ser dada por uma web holomorfa. No caso local, ou seja, tratando de germes de hipersuperfície Levi-flat, o problema foi abordado pela dimensão do conjunto singular de M , que pode ser $2n - 2$, $2n - 3$ ou $2n - 4$.

Temos o seguinte quadro de resultados já conhecidos no caso local:



Nesta tese, consideramos o caso global em \mathbb{P}^n , de hipersuperfícies induzidas por curvas na Grassmaniana de hiperplanos $G(n+1, n)$. Neste caso, J. Lebl em [21] mostrou que conjunto singular de M deve ter dimensão $2n-4$ ou $2n-2$; e ainda, se o conjunto singular é pequeno, isto é, tem dimensão $2n-4$, a folheação de Levi será estendida pela folheação holomorfa $z_2 dz_1 - z_1 dz_2$, com integral primeira meromorfa z_1/z_2 . Com isso, buscamos um resultado que contempla também o caso em que a dimensão do conjunto singular é $2n-2$. Utilizamos como principais referências os trabalhos de Lebl [21], Shafikov, Sukhov [32] e obtivemos o seguinte resultado:

Teorema A. *Seja $M \subset \mathbb{P}^n$ ($n \geq 2$) uma hipersuperfície real analítica induzida por uma curva real analítica $S \subset G(n+1, n)$. Suponha que existe uma função real analítica não trivial r definida em uma vizinhança V de M , tal que r anula em M . Então existe uma curva algébrica $C \subset G(n+1, n)$ tal que $S \subset C$ e a folheação de Levi \mathcal{L} em M^* é estendida pela web algébrica \mathcal{W}_C (web associada à C). Além disso, \mathcal{W}_C tem integral primeira meromorfa multivaluada da forma*

$$F(z, t) = A_0(z) + A_1(z)t + \cdots + t^d,$$

onde $\deg(A_0) = \cdots = \deg(A_d) = 1$.

No Capítulo 3 trataremos da existência de singularidades dicríticas e integrais primeiras, para webs em superfícies compactas tangentes (ou que deixam invariante) a hipersuperfícies Levi-flat. Nossa principal motivação foi o artigo de Beltrán, Fernández-Pérez, Neciosup [2], no qual foram dadas condições para que uma folheação holomorfa, que deixa invariante uma Levi-flat, possua uma singularidade dicrítica com integral primeira local. Estas condições estão em termos da primeira classe de Chern do fibrado normal da folheação.

Consideramos então, uma d -web holomorfa \mathcal{W} em uma superfície X complexa compacta, e M uma hipersuperfície Levi-flat em X invariante por \mathcal{W} . Queremos encontrar condições para que \mathcal{W} possua uma singularidade com integral primeira meromorfa local. Encontramos essas condições em termos da curva criminante $\Gamma_{\mathcal{W}}$ associada a \mathcal{W} no espaço $\mathbb{P}TX$, do fibrado L tautológico de X , e do fibrado normal da web. Uma das principais ferramentas que utilizamos é o artigo de Cavalier-Lehmann [10], onde foi introduzida a definição de *Web dicrítica e não dicrítica*. Devemos mencionar que esta definição não coincide, em geral, com a noção de folheação dicrítica e não dicrítica, (veja Definição 1.12).

Um dos resultados obtidos foi o seguinte teorema:

Teorema B. *Seja \mathcal{W} uma d -web holomorfa em uma superfície X complexa compacta definida por uma seção global $\omega \in H^0(X, \text{Sym}^d(\Omega_X^1) \otimes E)$. Suponhamos que se cumprem as seguintes condições:*

1. \mathcal{W} é tangente a uma hipersuperfície real analítica Levi-flat $M \subset X$,
2. a curva discriminante $\Delta \subset X$ está inteiramente contida em M ,
3. $(\pi^*(c_1(E)) \smile [\mathcal{R}_r] - c_1(\mathcal{V}) \smile [\mathcal{R}_r] - dc_1(L) \smile [\mathcal{R}_r]) \frown [W] > 0$, onde $\mathcal{W} = (W, \pi, \mathcal{F}_W)$, \mathcal{R}_r é o divisor da curva discriminante em W , \mathcal{V} é o subfibrado vetorial de TW de vetores tangentes as fibras de π e L é o fibrado tautológico de $\mathbb{P}TX$,
4. a curva discriminante Γ_W é invariante por \mathcal{F}_W .

Então \mathcal{W} é não-dicrítica (no sentido de Cavalier-Lehmann) em alguma componente irredutível de Γ_W .
Mais ainda, \mathcal{W} possui uma singularidade $p \in \Delta$ com integral primeira meromorfa local.

A seguir consideraremos uma d -web \mathcal{W} dicrítica, que seja tangente a uma hipersuperfície Levi-flat. Provaremos sob certas condições a existência de uma integral primeira multivaluada para \mathcal{W} . De modo mais específico, temos o seguinte resultado:

Teorema C. *Seja \mathcal{W} uma d -web holomorfa lisa e dicrítica em uma superfície complexa compacta X tangente a uma hipersuperfície real analítica Levi-flat $M \subset X$. Vamos supor as seguintes condições:*

1. a curva discriminante Δ de \mathcal{W} está contida em M ,
2. $X - \Delta$ é uma variedade Stein,
3. a curva discriminante Γ_W é não invariante por \mathcal{F}_W , onde \mathcal{F}_W é a folheação associada a \mathcal{W} .

Então \mathcal{W} admite uma integral primeira meromorfa global multivaluada.

Por fim, no Capítulo 4, estudamos famílias de hipersuperfícies reais analíticas associadas a mapas reais que satisfazem a condição de Milnor ou a condição forte de Milnor na origem. Um método para construir famílias de mapas $f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^2$ não triviais que satisfazem a condição forte de Milnor na origem, foi apresentado em [30] e [31] por J. Seade. Este método é o seguinte: consideramos campos vetoriais holomorfos $G = (G_1, \dots, G_n)$ e $X = (X_1, \dots, X_n)$ com singularidade isolada na origem, tomamos $\psi_{G,X}(z) := \langle G(z), X(z) \rangle$ o produto hermitiano usual de G e X , então buscamos condições sobre os campos G e X para que $\psi_{G,X}$ satisfaça condição de Milnor ou condição forte de Milnor na origem.

Em [30], J. Seade provou que, quando X é o campo radial e $G = (\lambda_1 z_1^{a_1}, \dots, \lambda_n z_n^{a_n})$, o mapa $\psi_{G,X}$ satisfaz a condição de Milnor, para quaisquer $\lambda_k \in \mathbb{C}^*$ e a_k inteiros > 1 . Já as famílias de campos vetoriais da forma $G = (\lambda_1 z_{\sigma_1}^{a_1}, \dots, \lambda_n z_{\sigma_n}^{a_n})$ e $X = (\beta_1 z_1^{b_1}, \dots, \beta_n z_n^{b_n})$, que satisfazem condição de Milnor ou condição forte de Milnor na origem, foram classificados por Ruas, Seade, Verjovsky em [29], onde $\sigma \in S_n$ uma permutação do conjunto \underline{n} .

Nesse contexto, o nosso problema consiste em tomar $M = \{\operatorname{Re} \langle G(z), X(z) \rangle = 0\}$ e verificar sob quais condições nos campos G e X a hipersuperfície M é Levi-flat. Especificamente, o problema é o seguinte:

Problema: Considere $F(z) := \operatorname{Re} \langle G(z), X(z) \rangle$ e a hipersuperfície real analítica definida por $M := \{F = 0\}$. Sob quais condições nos campos G e X a hipersuperfície M é Levi-flat?

É importante mencionar que este Problema foi proposto por *Maria Aparecida Soares Ruas*, nesse sentido pode ser chamado de *Soares Ruas's problem*.

O Capítulo 4 foi dividido em oito seções, nas quais estudamos algumas das famílias de campos que foram classificadas em [29], [30] e [31]. Os resultados obtidos foram os seguintes:

Teorema D. *Sejam $G = (z_1^{a_1}, z_2^{a_2})$ e $X = (z_1^{b_1}, z_2^{b_2})$, com $a_1 > b_1 \geq 1$ e $a_2 > b_2 \geq 1$ inteiros positivos. Defina $F(z) := 2\operatorname{Re} \langle G(z), X(z) \rangle$ e $M := \{F = 0\}$. Então a hipersuperfície M não é Levi-flat.*

Teorema E. *Sejam $G = (z_1^{a_1}, \dots, z_n^{a_n})$ e $X = (z_1^{b_1}, \dots, z_n^{b_n})$, com $a_k, b_k \geq 1$ inteiros, para $k = 1, \dots, n$ e $n \geq 3$. Defina $F(z) := 2\operatorname{Re} \langle G(z), X(z) \rangle$ e $M := \{F = 0\}$. Então M não é Levi-flat.*

Teorema F. *Considere os campos holomorfos $G = (z_1^a, z_2^b)$ e $X = (z_2^b, z_1^a)$ com a, b inteiros positivos e $M = \{F = 0\}$, onde $F = \langle G, X \rangle$. A hipersuperfície M é Levi-flat.*

Teorema G. *Considere os campos vetoriais $G = (z_1^{a_1}, z_2^{a_2})$ e $X = (z_2^{b_2}, z_1^{b_1})$, onde $a_1 \geq b_1$ e $a_2 \geq b_2$ são inteiros positivos satisfazendo $a_1 b_2 = a_2 b_1$. Vamos considerar a hipersuperfície $M := \{\operatorname{Re} \langle G, X \rangle = 0\}$. Então M é Levi-flat se, e somente se, $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$.*

Teorema H. *Considere os campos vetoriais $G = (z_1^{a_1}, \dots, z_n^{a_n})$ e $X = (z_{\sigma_1}^{b_{\sigma_1}}, \dots, z_{\sigma_n}^{b_{\sigma_n}})$, onde $a_k \geq b_k$ são inteiros positivos e $n \geq 3$. Vamos supor que para algum $\ell \in \underline{n}$, os inteiros $a_\ell, b_\ell, a_{\sigma_\ell}, b_{\sigma_\ell}$ satisfazem as seguintes condições: $a_\ell > b_\ell$ e $a_\ell b_{\sigma_\ell} = b_\ell a_{\sigma_\ell}$. Então, a hipersuperfície $M := \{\operatorname{Re} \langle G, X \rangle = 0\}$ não é Levi-flat.*

Capítulo 1

Definições básicas

Neste capítulo daremos as definições e algumas propriedades básicas dos elementos principais deste texto, a saber, as *folheações holomorfas*, as *webs holomorfas* e as *hipersuperfícies Levi-flat*. De modo simplificado, uma hipersuperfície real analítica $M \subset \mathbb{C}^n$ é Levi-flat se sua parte regular é folheada por hipersuperfícies complexas de \mathbb{C}^n . Por sua vez, uma d -web holomorfa é localmente a sobreposição de d -folheações holomorfas, genericamente.

1.1 Folheações Holomorfas

Uma folheação de dimensão k em uma superfície X de dimensão n é uma decomposição de X em subvariedades de dimensão k , $1 \leq k \leq n - 1$, que é localmente da forma $\mathbb{C}^{n-k} \times \mathbb{C}^k$ e tal que, por cada ponto de X , passa uma única subvariedade dessa decomposição. As folheações de dimensão 1 surgem naturalmente como curvas integrais de campos vetoriais holomorfos.

Ao longo do texto, utilizaremos algumas ferramentas usuais da teoria de folheações holomorfas. Começaremos definindo folheações holomorfas em variedades complexas.

Definição 1.1 (Folheação Holomorfa Regular). Seja X uma variedade complexa de dimensão complexa n . Uma *folheação holomorfa* de dimensão k , ou codimensão $n - k$, $1 \leq k \leq n - 1$, é uma decomposição \mathcal{F} de X em subvariedades complexas (chamadas *folhas* da folheação \mathcal{F}) de dimensão (complexa) k , imersas biunivocamente e satisfazendo as seguintes propriedades:

1. para todo $p \in X$ existe uma única subvariedade L_p da decomposição que passa por p . A subvariedade

L_p é dita *folha* de \mathcal{F} por p ;

2. para todo $p \in X$ existe $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{C}^n$ uma carta holomorfa de X , com $p \in U$, tal que $\varphi(U) = P \times Q$, onde P e Q são polidiscos abertos em \mathbb{C}^k e \mathbb{C}^{n-k} respectivamente. Tal carta é chamada de *carta distinguida de \mathcal{F}* ;
3. se L é uma folha de \mathcal{F} tal que $L \cap U \neq \emptyset$, então

$$L \cap U = \bigcup_{q \in D_{L,U}} \varphi^{-1}(P \times \{q\}),$$

onde $D_{L,U}$ é um subconjunto enumerável de Q . Os subconjuntos de U da forma $\varphi^{-1}(P \times \{q\})$ são chamados de *placas* da carta distinguida (φ, U) .

Uma folheação de dimensão 1 é também chamada de ***folheação por curvas***.

Observamos que uma folheação \mathcal{F} de dimensão k em X induz uma distribuição de planos de dimensão k definida por

$$T_p\mathcal{F} := T_p(L_p) = \text{plano tangente em } p, \text{ à folha de } \mathcal{F} \text{ que passa por } p.$$

Pelo item 3 da definição acima, esta distribuição é holomorfa. Então ela define um subfibrado vetorial do fibrado tangente TX , chamado ***fibrado tangente de \mathcal{F}*** e denotado por $T\mathcal{F}$.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.1. Em \mathbb{C}^n , considere uma decomposição $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k}$. Tal decomposição define uma folheação \mathcal{F} de dimensão k em \mathbb{C}^n , cujas folhas são os subespaços afins $\mathbb{C}^k \times \{q\}$, com $q \in \mathbb{C}^{n-k}$.

Exemplo 1.2 (Folheações definidas por submersões). Sejam X e Y variedades complexas de dimensão $n+k$ e k , respectivamente, e $f : X \rightarrow Y$ uma submersão holomorfa. Pela forma local de submersões, existem cartas locais $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ em X e $\psi : V \rightarrow \psi(V)$ em Y , tais que $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k$, $U_2 \subset \psi(V)$ e $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : U_1 \times U_2 \rightarrow U_2$ é a projeção na segunda coordenada $(x, y) \mapsto y$. Então f define uma folheação holomorfa em X de codimensão k , cujas folhas são componentes conexas das curvas de nível $f^{-1}(c)$, com $c \in Y$.

Exemplo 1.3 (Pull-back ou imagem inversa de uma folheação). Sejam X e Y variedades complexas, $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação holomorfa e \mathcal{F} uma folheação em Y de codimensão k . Dizemos que f é ***transversal*** à folheação \mathcal{F} , se para todo ponto $q \in X$, os subespaços $df_q(T_qX)$ e $T_p\mathcal{F}$ geram o espaço

tangente $T_p Y$, sendo $p = f(q)$. Neste caso, existe uma folheação em X também de codimensão k , denotada por $f^*(\mathcal{F})$, cujas folhas são componentes conexas das imagens inversas por f das folhas de \mathcal{F} em Y (ou seja, a folha $(f^*(\mathcal{F}))_q$ é uma componente conexa de $f^{-1}(L_p)$, onde $f(q) = p$). A folheação $f^*(\mathcal{F})$ é chamada de **pull-back ou imagem inversa** de \mathcal{F} por f . Também é comum utilizar a notação $f^{-1}(\mathcal{F})$ para a folheação pullback de \mathcal{F} por f .

Em alguns casos, uma decomposição de uma variedade X pode não satisfazer a propriedade 1 da Definição 1.1 em um subconjunto analítico de X . Neste caso, os pontos pelos quais passam mais de uma folha da folheação, geram os pontos que chamamos de *singularidades* da folheação. Isso motiva a definição a seguir.

Definição 1.2 (Folheação Holomorfa Singular). Uma *folheação holomorfa singular de dimensão k* (ou codimensão $n - k$), com $1 \leq k \leq n - 1$, em uma variedade complexa X é uma folheação holomorfa de dimensão k em $X - S$, onde $S \subset X$ é um subconjunto analítico de codimensão ≥ 2 . O conjunto S é chamado de *conjunto singular* da folheação e é denotado por $\text{Sing}(\mathcal{F})$. As folhas de \mathcal{F} são as folhas da folheação regular $\mathcal{F}|_{X - \text{Sing}(\mathcal{F})}$. Um *ponto regular de \mathcal{F}* é um ponto de X que não pertence a $\text{Sing}(\mathcal{F})$.

Existem várias definições equivalentes de folheações holomorfas singulares. A seguir damos uma versão que nos dá a folheação como um subfeixe de TX . Para fazer isso iremos utilizar as definições usuais de feixe *saturado* e feixe *involutivo* (ver Observação 1).

Definição 1.3. Uma folheação holomorfa singular \mathcal{F} em X é determinada por um subfeixe $T\mathcal{F} \subset TX$ que satisfaz:

1. $T\mathcal{F}$ é saturado;
2. $T\mathcal{F}$ é involutivo (ou integrável);
3. O *conjunto singular de \mathcal{F}* é o conjunto singular de $TX/T\mathcal{F}$.

O feixe $T\mathcal{F}$ é chamado **feixe tangente** da folheação e o feixe $TX/T\mathcal{F}$ é chamado **feixe conormal** da folheação. Definimos a **dimensão de \mathcal{F}** como sendo o posto de $T\mathcal{F}$ e a **codimensão de \mathcal{F}** é o posto de $TX/T\mathcal{F}$. O **conjunto singular de \mathcal{F}** é o conjunto singular de $TX/T\mathcal{F}$ e o denotamos por $\text{Sing}(\mathcal{F})$.

A condição (1) na definição acima implica em $\text{codim}(\text{Sing}(\mathcal{F})) \geq 2$. Por sua vez, a condição (2) implica em uma decomposição de $X - \text{Sing}(\mathcal{F})$ em subvariedades complexas de dimensão igual ao posto

de $T\mathcal{F}$, assim como nas definições 1.1 e 1.2. Em particular, fora do conjunto singular $\text{Sing}(\mathcal{F})$, $T\mathcal{F}$ é um subfibrado do fibrado TX . Mais ainda, uma folheação holomorfa é regular (ou seja, $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \emptyset$) se, e somente se, $T\mathcal{F}$ é um subfibrado do fibrado TX .

Observação 1. As definições de saturado e involutivo são dadas como segue.

- (a) Seja Z um módulo sobre um anel A . Dizemos que Z é **livre de torção** quando o elemento nulo 0 é o único que anula os elementos regulares de A (elementos regulares são aqueles que não são divisores de zero).
- (b) Seja \mathcal{G} um feixe holomorfo de \mathcal{O}_X -módulos. Dizemos que \mathcal{G} é **livre de torção** se para cada $U \subset X$, $\mathcal{G}(U)$ é um módulo livre de torção sobre $\mathcal{O}_X(U)$.
- (c) Seja $\mathcal{H} \subsetneq \mathcal{G}$ um subfeixe holomorfo de \mathcal{G} , $\mathcal{H} \neq 0$. Dizemos que \mathcal{H} é **saturado** se o feixe quociente \mathcal{G}/\mathcal{H} é livre de torção.
- (d) Seja \mathcal{G} um subfeixe feixe holomorfo $\mathcal{G} \hookrightarrow TX$. Dizemos que \mathcal{G} é **involutivo** (ou **integrável**) se para cada $U \subset X$ e $v_1, v_2 \in \mathcal{G}(U)$ então $[v_1, v_2] \in \mathcal{G}(U)$.

Observação 2. Observamos que $T\mathcal{F}$ está incluso na sequência exata

$$0 \rightarrow T\mathcal{F} \rightarrow TX \rightarrow TX/T\mathcal{F} \rightarrow 0,$$

com TX localmente livre e $TX/T\mathcal{F}$ livre de torção. Então segue que $T\mathcal{F}$ é reflexivo.

A definição acima nos permite caracterizar as folheações holomorfas por meio de formas diferenciais integráveis. Esta caracterização será feita na próxima seção para o caso de codimensão 1.

1.2 Folheação de codimensão 1

Uma folheação de codimensão 1 é dada por um subfeixe $T\mathcal{F} \subset TX$ de posto $n - 1$ saturado e involutivo. O **feixe canônico** de \mathcal{F} é o feixe definido por

$$T\mathcal{F}^* := \Omega_{\mathcal{F}}^1 = \text{Hom}(T\mathcal{F}, \mathcal{O}_X).$$

Observamos que

$$\Omega_{\mathcal{F}}^1(U) = \{\omega \in \Omega_X^1(U); i_v(\omega) \in \mathcal{O}_X(U) \text{ para todo } v \in T\mathcal{F}(U)\}.$$

Ou seja, $T\mathcal{F}^*$ é o feixe de 1-formas em X que são tangentes as folhas de \mathcal{F} . O *feixe conormal* de \mathcal{F} , denotado por $N\mathcal{F}^*$, é definido por

$$N\mathcal{F}^*(U) = \{\omega \in \Omega_X^1(U); i_v(\omega) = 0 \text{ para todo } v \in T\mathcal{F}(U)\}.$$

Temos então uma sequência exata

$$0 \rightarrow N\mathcal{F}^* \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow T\mathcal{F}^* \rightarrow 0. \quad (1.1)$$

Dualizando a sequência acima e usando o fato de que $T\mathcal{F}$ é reflexivo, obtemos a sequência exata

$$0 \rightarrow T\mathcal{F} \rightarrow TX \rightarrow I_Z N\mathcal{F} \rightarrow 0, \quad (1.2)$$

onde I_Z é um feixe de ideais com suporte em $\text{Sing}(\mathcal{F})$, Z é um subesquema de X e $N\mathcal{F}$ é um fibrado chamado de *fibrado normal* da folheação. Mais detalhes da sequência exata acima e do surgimento do feixe de ideais I_Z podem ser encontrados em [6].

Considerando a inclusão $i : N\mathcal{F}^* \hookrightarrow \Omega_X^1$, obtemos uma seção global $\varphi \in H^0(X, \Omega_X^1 \otimes N\mathcal{F})$. Desse modo, uma folheação \mathcal{F} de codimensão 1 é dada por um elemento $\omega \in H^0(X, \Omega_X^1 \otimes N\mathcal{F})$, tal que

1. $\text{Sing}(\omega) = \{p \in X; \omega(p) = 0\}$ tem codimensão ≥ 2 .
2. $\omega \wedge d\omega = 0$ (integrabilidade).

Dois elementos $\omega, \omega' \in H^0(X, \Omega_X^1 \otimes N\mathcal{F})$ determinam a mesma folheação se existe uma seção global $g \in H^0(X, \mathcal{O}_X^*)$ tal que $\omega = g \cdot \omega'$. Quando as seções globais de \mathcal{O}_X^* são funções constantes (por exemplo, quando X é compacta) uma folheação holomorfa de codimensão 1 é dada por um elemento $[\omega] \in \mathbb{P}H^0(X, \Omega_X^1 \otimes N\mathcal{F})$. Com isso, concluímos que uma folheação holomorfa também pode ser definida por uma 1-forma integrável.

Observação 3. Também é usual denotar o fibrado canônico de \mathcal{F} por $K_{\mathcal{F}}$. Assim como o fibrado canônico de uma variedade X é denotado por K_X ou Ω_X^1 .

No próximo exemplo, vamos determinar os fibrados tangente e normal de uma folheação em \mathbb{P}^2 . Isto será útil para construir alguns exemplos onde aplicamos alguns teoremas citados neste trabalho.

Exemplo 1.4. Vamos considerar $X = \mathbb{P}^2$. Os fibrados de uma folheação \mathcal{F} (são fibrados em $\mathbb{P}^2 - \text{Sing}(\mathcal{F})$) $N\mathcal{F}$ e $T\mathcal{F}$ serão fibrados lineares em \mathbb{P}^2 e, portanto, são da forma $N\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(\ell)$ e $T\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m)$ onde $\ell, m \in \mathbb{Z}$.

Vamos supor que em coordenadas locais $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, \mathcal{F} é definida por uma 1-forma $\omega = A(x, y)dx + B(x, y)dy$, com A e B polinômios homogêneos de grau $d \geq 1$. Fazendo a mudança de coordenadas $(x, y) = \phi(u, v) = \left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right)$ obtemos

$$\phi^*\omega = A\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right)\left(\frac{vdu - u dv}{v^2}\right) + B\left(\frac{u}{v}, \frac{1}{v}\right)\left(-\frac{dv}{u^2}\right) = \frac{1}{v^{d+2}}\tilde{\omega},$$

onde $\tilde{\omega}$ é uma 1-forma que define \mathcal{F} nas coordenadas locais (u, v) .

Segue que $N\mathcal{F}^* = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-d-2)$ e $N\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d+2)$. Agora, aplicando fórmula de adjunção na sequência exata (1.1), obtemos

$$\Omega_X^1 = T\mathcal{F}^* \otimes N\mathcal{F}^*.$$

Usando que o canônico de \mathbb{P}^2 é $\Omega_{\mathbb{P}^2}^1 = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3)$, obtemos

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3) = T\mathcal{F}^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-d-2),$$

portanto, $T\mathcal{F}^* = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d-1)$ e $T\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1-d)$. O inteiro d é chamado **grau da folheação** \mathcal{F} . O grau da folheação nós dá o número de tangências das folhas de \mathcal{F} (contando multiplicidades) com uma reta não invariante por \mathcal{F} .

De modo geral, definimos o **grau** de uma folheação \mathcal{F} de dimensão k em \mathbb{P}^n como sendo o número de tangências das folhas de \mathcal{F} , contando multiplicidades, com um k -plano em \mathbb{P}^n não invariante por \mathcal{F} .

De modo análogo ao caso de codimensão 1, uma folheação holomorfa singular de codimensão k também pode ser definida por uma k -forma integrável e localmente decomponível, como temos na definição abaixo.

Definição 1.4. Uma *folheação holomorfa singular* \mathcal{F} de codimensão k em uma variedade complexa X é um objeto dado por uma k -forma ω com conjunto singular $\text{Sing}(\mathcal{F}) := \text{Sing}(\omega)$ de codimensão ≥ 2 , *localmente decomponível* em $X - \text{Sing}(\mathcal{F})$ e satisfazendo a *condição de integrabilidade de Frobenius*. Localmente decomponível significa que localmente podemos escrever $\omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k$, onde ω_i é 1-forma holomorfa. Neste caso, a condição de integrabilidade de Frobenius é dada por

$$d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k = 0$$

para todo $i = 1, \dots, k$. No caso de folheação por curvas, a folheação é dada por um campo vetorial holomorfo. No caso de codimensão 1, a folheação é dada por uma 1-forma holomorfa integrável ω , como vimos anteriormente.

Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa de codimensão 1 na variedade complexa X . Uma **integral primeira meromorfa (resp. holomorfa)** para \mathcal{F} é uma função meromorfa f (resp. holomorfa) não constante em X e constante ao longo das folhas de \mathcal{F} , ou seja, as folhas de \mathcal{F} são dadas pelas curvas de nível de f . Se X é uma variedade projetiva, a integral primeira é dita **racional**. Quando a folheação \mathcal{F} é dada por uma 1-forma ω em X , uma função f é uma integral primeira de \mathcal{F} se, e somente se, $\omega \wedge df = 0$.

Um ponto singular $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ é dito **dicrítico** se existem infinitas folhas de \mathcal{F} que acumulam em p . Caso contrário, p é dito **não dicrítico**.

A seguir, veremos um exemplo clássico em dimensão 2 de uma folheação que possui singularidade dicrítica e integral primeira meromorfa. Veremos também um exemplo de singularidade não dicrítica.

Exemplo 1.5 (Folheação Radial). Em \mathbb{C}^2 considere a folheação \mathcal{F} definida pelo campo vetorial

$$Z = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y},$$

ou, de modo equivalente, definida pela 1-forma $\omega = ydx - xdy$ dual ao campo Z . A origem é a única singularidade de \mathcal{F} e a função $f = \frac{x}{y}$ é uma integral primeira meromorfa para \mathcal{F} . Além disso, $0 \in \mathbb{C}^2$ é uma singularidade dicrítica, pois todas as folhas de \mathcal{F} acumulam na origem.

Exemplo 1.6. Vamos considerar a folheação \mathcal{F} em \mathbb{C}^2 , dada por $\omega = \lambda_2 y dx - \lambda_1 x dy$, com $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$ distintos. A origem é singularidade não dicrítica de \mathcal{F} . De fato, as únicas folhas de \mathcal{F} que acumulam na origem são os eixos $\{y = 0\}$ e $\{x = 0\}$. Esta folheação não possui integral primeira.

Definição 1.5. Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa de codimensão 1 em uma variedade complexa X de dimensão $n \geq 2$. Considere $V \subset X$ um subconjunto analítico e, para cada $p \in V$, denotemos por L_p a folha de \mathcal{F} que passa por p . Dizemos que V é **invariante por \mathcal{F}** se $L_p \subset V$ para cada $p \in V$, isto é, a folha de \mathcal{F} que passa por um ponto $p \in V$ está inteiramente contida em V .

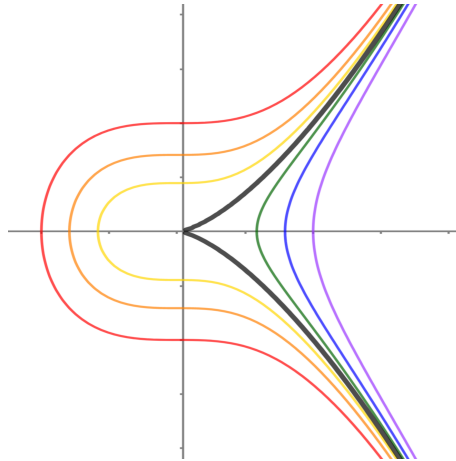
1.2.1 Índices em dimensão 2

Seja X uma variedade complexa de dimensão 2. Neste caso uma folheação holomorfa de codimensão 1 é uma folheação por curvas, e poderá ser definida tanto por uma 1-forma holomorfa quanto por um campo vetorial holomorfo.

Uma *separatriz* de \mathcal{F} em $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$, é uma curva C irredutível em uma de vizinhança U de p tal que $p \in C$ e $C - \{p\}$ é invariante pela folheação $\mathcal{F}|_U$. Isso significa que $C - \{p\}$ é uma folha de $\mathcal{F}|_U$. A separatriz é dita lisa se p não é singularidade de C , ou seja, C é uma curva complexa regular em U .

Quando \mathcal{F} é definida por uma 1-forma ω , uma curva $C = \{f = 0\}$ é separatriz de \mathcal{F} se, e somente se, $\omega \wedge df$ é um múltiplo de f . Ou ainda, quando \mathcal{F} é definida por um campo v , uma curva $C = \{f = 0\}$ é separatriz de \mathcal{F} se, e somente se, $v(f)|_C \equiv 0$. Se uma curva C é dada por uma parametrização γ , então C é separatriz de \mathcal{F} se, e somente se, $\gamma^*(v) \equiv 0$. A seguir veremos alguns exemplos.

Exemplo 1.7. Seja \mathcal{F} a folheação definida pela 1-forma $\omega = 2ydy - 3x^2dx$. Observamos que a origem $0 \in \mathbb{C}^2$ é a única singularidade de \mathcal{F} e a curva $C : \{y^2 - x^3 = 0\}$ é a única separatriz de \mathcal{F} na origem. Veja na figura abaixo, um esboço da curva C destacada em preto.



Exemplo 1.8. Vamos considerar a folheação \mathcal{F} dada por $\omega = \lambda_2 y dx - \lambda_1 x dy$, com $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$ distintos. A origem é a única singularidade de \mathcal{F} , e é não dicrítica. As curvas $C_1 : \{x = 0\}$ e $C_2 : \{y = 0\}$ são separatrizes em $0 \in \mathbb{C}^2$.

Pelo Teorema da Separatriz de Camacho-Sad, em dimensão 2, toda folheação admite separatriz em suas singularidades. Um enunciado preciso é o que segue.

Teorema 1 (Separatriz de Camacho-Sad). *Por toda singularidade de um campo holomorfo v em \mathbb{C}^2 passa pelo menos uma separatriz.*

Observação 4. Resultados análogos são falsos em dimensão maior que 2 e no caso de campos reais. De fato, Gómez-Mont, Luego provaram a existência de uma família de campos vetoriais holomorfos em \mathbb{C}^3 sem separatrizes (ver [16]).

Vamos considerar uma folheação definida por uma 1-forma holomorfa $\mathcal{F} : \{\omega = 0\}$ e $C : \{f = 0\}$ uma separatriz em $p \in X \cap \text{Sing}(\mathcal{F})$, onde f é holomorfa em uma vizinhança de p e reduzida (isto é, $df \neq 0$ fora de p). Pela decomposição de Saito-Lins-Neto, existem funções g, h e uma 1-forma η em uma vizinhança de p tais que

$$g\omega = hdf + f\eta.$$

O *índice de Camacho-Sad* de \mathcal{F} no ponto p com respeito a separatriz C é definido por

$$CS(\mathcal{F}, C, p) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial C} \frac{\eta}{h},$$

com $\partial C = C \cap S^3$ e S^3 uma pequena esfera em torno de p .

Vejamos um exemplo.

Exemplo 1.9. Vamos considerar a folheação \mathcal{F} dada por $\omega = \lambda_2 y dx - \lambda_1 x dy$, com $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$ distintos (como no Exemplo 1.4). Para a separatriz $C_1 : \{x = 0\}$, podemos escrever $\omega = h dx + x\eta$, onde $h = \lambda_2 y$, $\eta = -\lambda_1 dy$ e $g \equiv 1$. Assim

$$CS(\mathcal{F}, C_1, 0) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial C} \frac{-\lambda_1 dy}{\lambda_2 y} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

De modo análogo, temos $CS(\mathcal{F}, C_2, 0) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, para a separatriz $C_2 : \{y = 0\}$.

O teorema a seguir garante que a soma dos índices de Camacho-Sad ao longo de uma curva é igual a auto-interseção da curva.

Teorema 2 (Camacho-Sad [8]).

$$\sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap C} CS(\mathcal{F}, C, p) = C \cdot C.$$

Agora vamos considerar \mathcal{F} definida por um campo vetorial $v = F(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + G(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$ em uma vizinhança de $p \in X$ e seja $\mathcal{J}(x, y)$ a Jacobiana da função $(x, y) \mapsto (F(x, y), G(x, y))$.

O *índice de Baum-Bott* de \mathcal{F} em p é definido por

$$BB(\mathcal{F}, p) = \text{Res}_p \left(\frac{(\text{tr} \mathcal{J})^2}{F \cdot G} dx \wedge dy \right).$$

A seguir calcularemos o índice de Baum-Bott para a folheação do Exemplo 1.9.

Exemplo 1.10. A folheação \mathcal{F} do Exemplo 1.9 pode ser definida pelo campo vetorial

$$Z = \lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Neste caso, a jacobiana da função $(x, y) \mapsto (\lambda_1 x, \lambda_2 y)$ é a matriz

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

donde segue que

$$BB(\mathcal{F}, 0) = \text{Res}_0 \left(\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{\lambda_1 \lambda_2 xy} dx \wedge dy \right) = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2}{\lambda_1 \lambda_2}.$$

O próximo teorema garante que a soma dos índices de Baum-Bott resulta na auto-interseção da primeira classe de Chern do fibrado normal da folheação.

Teorema 3 (Fórmula de Baum-Bott [1]).

$$\sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} BB(\mathcal{F}, p) = c_1^2(N\mathcal{F}).$$

Lembremos que

$$c_1^2(N\mathcal{F}) := \int_X \Omega \wedge \Omega,$$

onde Ω é uma 2-forma que representa $c_1(N\mathcal{F})$ em $H^2(X, \mathbb{Z})$.

Concluiremos a seção com um resultado que relaciona os índices de Camacho-Sad e Baum-Bott para folheações *tipo curva generalizada*, ou seja, folheações que não apresentam singularidades do tipo sela-nós após uma resolução de singularidades.

Teorema 4 (Brunella [5]). *Sejam \mathcal{F} um germe de folheação holomorfa em $0 \in \mathbb{C}^2$ e S a união de todas as suas separatrizes. Se \mathcal{F} é do tipo curva generalizada então*

$$BB(\mathcal{F}, 0) = CS(\mathcal{F}, S, 0).$$

1.3 Webs Holomorfas

Uma web holomorfa é uma generalização do conceito de folheações. De fato, ela é a sobreposição de uma quantidade d de folheações em uma variedade X . Alguns problemas da área de folheações são resolvidos utilizando o conceito de webs holomorfas, como por exemplo, o problema de extensão da *folheação de Levi* em uma hipersuperfície real analítica. Na Seção 1.6 e no Capítulo 2, trataremos esse problema com mais detalhes. Nesta seção, daremos algumas propriedades de webs holomorfas, em particular, webs em superfícies.

1.3.1 Germes de webs suave e quase-suave

Um *germe de d -web* $\mathcal{W} = \mathcal{F}_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{F}_d$ *holomorfa suave de codimensão 1* em $(\mathbb{C}^n, 0)$ é a sobreposição de d germes de folheações $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_d$ holomorfas suaves de codimensão 1 em $(\mathbb{C}^n, 0)$, tais que os espaços tangentes na origem estão em posição geral, isto é, para $\ell = \min\{n, d\}$ a interseção $T_0\mathcal{F}_{i_1} \cap \cdots \cap T_0\mathcal{F}_{i_\ell}$ tem codimensão ℓ .

No caso em que cada folheação \mathcal{F}_i é definida por uma 1-forma ω_i holomorfa integrável, usamos as notações $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\omega_1, \dots, \omega_d)$ ou $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\omega_1 \cdots \omega_d)$. Neste caso, a condição de posição geral é dada por

$$(\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_\ell})(0) \neq 0$$

para cada $\ell = \min\{n, d\}$. Observe que a notação $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\omega_1 \cdots \omega_d)$ nos permite olhar para uma d -web como um objeto definido por um elemento de $\text{Sym}^d \Omega^1(\mathbb{C}^n, 0)$. No caso em que cada folheação \mathcal{F}_i é definida por uma submersão u_i , usamos a notação $\mathcal{W} = \mathcal{W}(u_1, \dots, u_d)$.

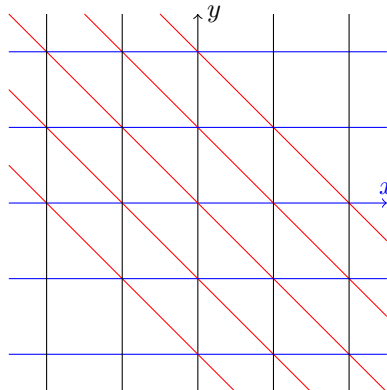
Quando trocamos a condição de posição geral pela condição de 2 a 2 distintos, ou seja, $T_0\mathcal{F}_i \neq T_0\mathcal{F}_j$ para $i \neq j$, obtemos um *germe de d -web holomorfa quase suave de codimensão 1*.

Vejamos um exemplo.

Exemplo 1.11. Em \mathbb{C}^2 com coordenadas (x, y) , considere as submersões dadas por :

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x \\ f_2(x, y) = y \\ f_3(x, y) = x + y \end{cases}$$

Temos uma 3-web suave $\omega(x, y, x + y)$ em $(\mathbb{C}^2, 0)$, chamada *3-web quase paralela*, esboçada abaixo.



Uma 3-web em $(\mathbb{C}^2, 0)$ que é *biholomorficamente equivalente* a 3-web quase paralela é dita *web plana hexagonal* (ver [28]).

1.3.2 Germes de webs singulares

De modo similar ao que ocorre com folheações, uma d -web pode perder a propriedade de ser sobreposição de d -folheações em alguns pontos (ou curvas). Isso motiva a definição de webs singulares. Inicialmente, vamos definir um germe de web singular como um subconjunto de $\mathbb{P}T^*\mathbb{C}^n$. Para isso, vamos estabelecer algumas notações em $\mathbb{P}T^*\mathbb{C}^n$.

Seja $\mathbb{P}T^*\mathbb{C}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}^n$ a projetivização do fibrado cotangente de \mathbb{C}^n . Dado um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{C}^n$, a trivialização local de $\mathbb{P}T^*\mathbb{C}^n$ é o isomorfismo de $\pi^{-1}(U)$ para $U \times \mathbb{P}^{n-1}$.

Sejam $z = (z_1, \dots, z_n)$ coordenadas em \mathbb{C}^n e $(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n)$ coordenadas na fibra $T_z^*\mathbb{C}^n$ com respeito a base de 1-formas diferenciais $\{dz_1, \dots, dz_n\}$. Tomando $[\tilde{p}_1 : \dots : \tilde{p}_n]$ coordenadas homogêneas em \mathbb{P}^{n-1} , consideremos coordenadas (p_1, \dots, p_{n-1}) na carta afim $\{\tilde{p}_n \neq 0\}$, onde $p_j = \frac{\tilde{p}_j}{\tilde{p}_n}$. A 1-forma

$$\eta = dz_n + \sum_{j=1}^{n-1} p_j dz_j$$

é uma forma contato local. Considerando as demais cartas afins, construímos uma forma contato global no fibrado $\mathbb{P}T^*\mathbb{C}^n$.

Definição 1.6. Uma d -web \mathcal{W} holomorfa singular de codimensão 1 em um domínio $U \subset \mathbb{C}^n$ é uma tripla $\mathcal{W} = (W, \pi, \mathcal{F}_W)$, onde W é um subconjunto analítico complexo de $\pi^{-1}(U)$ de dimensão pura n , satisfazendo as seguintes condições:

- (a) π projeta cada componente irredutível de W em um subconjunto de dimensão n .
- (b) uma fibra genérica de π intersecta W em d pontos suaves p_1, \dots, p_d , e $d\pi(p_j) : T_{p_j}W \rightarrow \mathbb{C}^n$ é sobrejetiva para cada $j = 1, \dots, d$.
- (c) a forma de contato η restrita a W é integrável, no sentido de Frobenius. Então, η define uma folheação \mathcal{F}_W na parte regular de W .

Uma *folha* da web \mathcal{W} é uma componente conexa da projeção de uma folha de \mathcal{F}_W sobre U .

Assim como para folheações, podemos definir integral primeira para webs. Neste caso, a integral primeira será uma aplicação multivaluada.

Definição 1.7. Uma *integral primeira* de uma d -web \mathcal{W} em U é uma correspondência meromorfa d -valuada $(Z; U, \mathbb{P}^1)$, tal que os conjuntos de nível $\pi_1 \circ \pi_2^{-1}(c)$ são folhas de \mathcal{W} , onde $c \in \mathbb{P}^1$. Aqui, π_1 e π_2 denotam as projeções de $U \times \mathbb{P}^1$ sobre U e \mathbb{P}^1 , respectivamente. Lembrando que uma correspondência meromorfa d -valuada entre variedades complexas X e Y consiste de um subconjunto analítico $Z \subset X \times Y$ tal que $\pi_X|_Z$ é uma aplicação própria sobrejetiva genericamente d para 1. Nesse caso, a aplicação $\pi_Y \circ \pi_X^{-1}$ está genericamente definida em X e pode ser vista como uma aplicação d -valuada.

Existe uma relação entre webs singulares e equações diferenciais parciais (EDP). Esta relação é dada pelo isomorfismo entre $\mathbb{P}T^*\mathbb{C}^n$ e o fibrado de 1-jatos de funções holomorfas $J^1(U, \mathbb{C})$, onde U é um domínio de \mathbb{C}^{n-1} . Para entender essa relação, vamos relembrar algumas informações sobre o fibrado $J^1(U, \mathbb{C})$.

Duas funções f_1 e f_2 tem o mesmo k -jato em torno de um ponto $x_0 \in \mathbb{C}^n$ se suas expansões de Taylor de ordem k no ponto x_0 coincidem. As classes de equivalência dessa relação são chamadas de k -jatos em x_0 .

Dado um domínio $U \subset \mathbb{C}^{n-1}$, nós podemos ver uma função holomorfa como uma seção do fibrado trivial $U \times \mathbb{C} \rightarrow U$. Assim, nós podemos considerar o espaço $J^1(U, \mathbb{C})$ de 1-jato de funções holomorfas como um fibrado vetorial

$$\tilde{\pi} : J^1(U, \mathbb{C}) \longrightarrow U \times \mathbb{C} \quad (1.3)$$

de posto $n - 1$.

Sejam $z = (z_1, \dots, z_n)$ coordenadas em U e z_n coordenada em \mathbb{C} . Tomando $p_j := \partial z_n / \partial z_j$, obtemos $(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n, p_1, \dots, p_{n-1})$ coordenadas no fibrado $J^1(U, \mathbb{C})$.

Em $J^1(U, \mathbb{C})$ temos uma forma contato definida por

$$\theta = dz_n - \sum_{j=1}^{n-1} p_j dz_j.$$

Deste modo, a aplicação

$$\begin{aligned} i : J^1(U, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{P}T^*\mathbb{C}^n \\ (z, p) &\longmapsto (z, -p) \end{aligned}$$

é um morfismo de contato, isto é, o pullback da forma contato η de $\mathbb{P}T^*\mathbb{C}^n$ é a forma contato θ de $J^1(U, \mathbb{C})$.

Uma **EDP holomorfa de primeira ordem** é uma equação da forma

$$\phi \left(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial z_n}{\partial z_{n-1}} \right) = 0, \quad (1.4)$$

onde ϕ é uma função holomorfa e $z_n = z_n(z_1, \dots, z_{n-1})$ é uma função desconhecida. Isto define uma hipersuperfície complexa $W_\phi \subset J^1(U, \mathbb{C})$ dada por $W_\phi := \{\phi(z, p) = 0\}$. Uma solução $z_n = f(z_1, \dots, z_{n-1})$ de (1.4) define uma subvariedade $(n-1)$ -dimensional

$$S_f := \left\{ z_n = f(z_1, \dots, z_{n-1}); p_j = \frac{\partial f}{\partial z_j}(z_1, \dots, z_n) \right\}.$$

Desse modo, soluções da equação diferencial (1.4) podem ser identificadas com seções holomorfas S_f de W_ϕ que anulam a forma contato θ .

Vamos supor que temos equações diferenciais da forma (1.4) tais que as interseções das hipersuperfícies W_ϕ é um subconjunto analítico complexo W de $J^1(U, \mathbb{C})$ de dimensão pura n . Vamos supor também que a compactificação de W no fibrado $\mathbb{P}T^*\mathbb{C}^n$ também é uma subvariedade complexa de dimensão pura n . Desse modo, W satisfaz as condições de web singular. As folhas da web serão dadas pelas soluções das equações diferenciais.

Uma d -web singular também pode ser dada por uma forma d -simétrica, como veremos a seguir.

Definição 1.8. Uma d -web holomorfa de codimensão 1 é uma seção ω de $\text{Sym}^d \Omega^1(\mathbb{C}^n, 0)$ módulo multiplicação por $\mathcal{O}^*(\mathbb{C}^n, 0)$ tal que um representante de ω , definido em um domínio U contendo a origem, satisfaz as condições:

1. o conjunto dos zeros de ω tem codimensão pelo menos 2,
2. ω como polinômio de grau d em $\mathcal{O}_n[dx_1, \dots, dx_n]$ é livre de quadrados,
3. (*Condição de Bill*) para um ponto genérico $p \in U$, $\omega(p)$ é produto de d tensores lineares,
4. (*Condição de Frobenius*) para um ponto genérico $p \in U$, o germe de ω no ponto p é produto de d germes de 1-formas lineares.

Assim, uma d -web é genericamente quase suave, ou seja, em uma vizinhança de um ponto genérico é a sobreposição de d folheações duas a duas transversais. O **discriminante** de uma d -web, denotado por Δ , é o conjunto dos pontos onde falha essa propriedade. Pensando uma d -web como objeto dado por uma equação diferencial $F(z, p) = 0$, onde $p_j := \partial z_n / \partial z_j$, o discriminante é o conjunto dos pontos $z \in \mathbb{C}^n$ em que a equação $F(z, p) = 0$ não tem d soluções distintas.

Dizemos que a d -web é **genericamente suave** se, além das condições acima, satisfaz:

5. (*Condição de posição geral*) para um ponto genérico $p \in U$, quaisquer $m \leq n$ germes distintos de 1-formas $\omega_1, \dots, \omega_m$ que dividem o germe de ω em p , satisfazem $(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_m)(p) \neq 0$. Esta condição significa que, em um ponto genérico $p \in U$, o germe de ω em p define uma d -web suave.

A seguir apresentaremos uma 2-web em \mathbb{C}^2 com integral primeira multivaluada e exibiremos sua curva discriminante.

Exemplo 1.12. Em \mathbb{C}^2 com coordenadas (x, y) considere a 2-web \mathcal{W} definida pela forma 2-simétrica

$$\omega = (dy)^2 - 4y(dx)^2.$$

Tomando $p = \frac{dy}{dx}$, temos (x, y, p) coordenadas em $J^1(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}) \cong \mathbb{P}T^*\mathbb{C}^2$.

Em $\mathbb{P}T^*\mathbb{C}^2$, a 2-web \mathcal{W} é a tripla $\mathcal{W} = (W, \pi, \mathcal{F}_W)$ onde W é o subconjunto

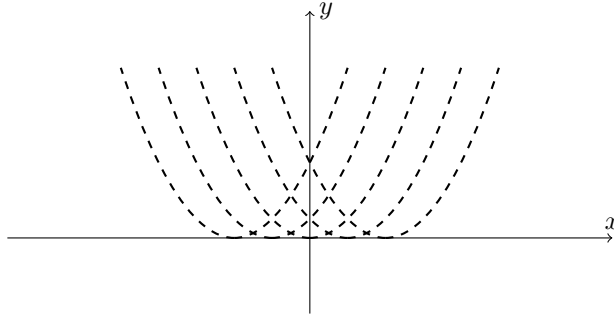
$$W := \{(x, y, p) \in J^1(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}); p^2 - 4y = 0\}.$$

As folhas de \mathcal{F}_W são dadas por

$$\mathcal{F}_c : \frac{p}{2} - x = c$$

com $c \in \mathbb{C}$. Observamos que a 2-web em \mathbb{C}^2 será dada pela equação diferencial $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4y$.

As folhas da 2-web são dadas pelas parábolas $L_c : y = (x + c)^2$, com $c \in \mathbb{C}$, esboçadas abaixo.



Além disso, a aplicação 2-valuada $f(x, y) = x \pm \sqrt{y}$ é uma integral primeira meromorfa para \mathcal{W} e o discriminante Δ é o eixo $y = 0$.

1.3.3 Webs algébricas

Consideremos uma curva projetiva $C \subset \mathbb{P}^n$ de grau d e um hiperplano genérico $H_0 \in \check{\mathbb{P}}^n$ que intersecta C transversalmente. Tomemos uma vizinhança $U \subset \check{\mathbb{P}}^n$ de H_0 tal que

$$U \cap C = C_1 \cup \dots \cup C_d,$$

onde C_1, \dots, C_d são curvas que não tem interseção duas a duas.

Para cada $i = 1, \dots, d$, a aplicação

$$\begin{aligned} p_i : U &\longrightarrow C \\ H &\longmapsto p_i(H) = H \cap C_i \end{aligned}$$

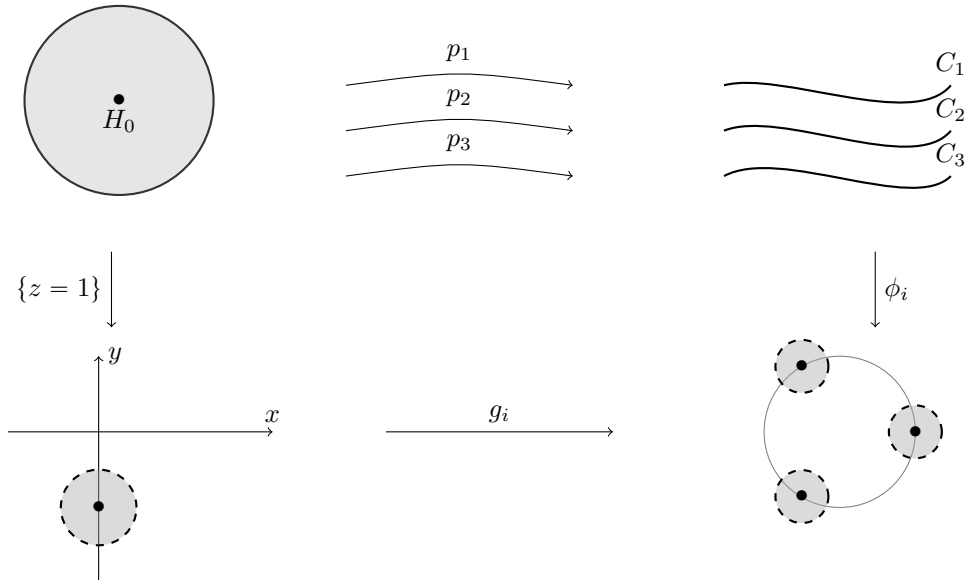
é uma submersão. Desse modo, cada p_i define uma folheação na vizinhança U de H_0 .

A *d-web algébrica* em $(\check{\mathbb{P}}^n, 0)$ definida por C é o germe de d -web holomorfa quase suave dado por $\mathcal{W}_C(H_0) := \mathcal{W}(p_1, \dots, p_d)$.

Exemplo 1.13. Em \mathbb{P}^2 , considere a curva $C = \{x^3 = zy^2\}$ de grau 3 e o hiperplano $H_0 = \{y = z\}$ que corresponde ao ponto $[0 : -1 : 1] \in \check{\mathbb{P}}^2$. Observamos que

$$H_0 \cap C = \{[1 : 1 : 1], [\xi : 1 : 1], [\xi^2 : 1 : 1] : \xi^3 = 1 \text{ e } \xi \neq 1\}.$$

No aberto $\{z = 1\} \subset \check{\mathbb{P}}^2$, com carta local $\psi : [x : y : 1] \mapsto (x, y)$, as aplicações $g_i = \psi \circ p_i \circ \phi_i$ são submersões locais, onde ϕ_i é biholomorfismo de uma vizinhança de $p_i(H_0) \in C_i$ em um aberto de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, (ver figura abaixo). Então temos uma 3-web algébrica $\mathcal{W}_C(H_0)$ definida em uma vizinhança $U \subset \check{\mathbb{P}}^2$ de H_0 .



1.3.4 Webs globais

Até aqui definimos apenas germes de webs, ou seja, webs em vizinhança da origem. O nosso próximo passo será definir webs globais.

Uma *d-web global* \mathcal{W} em uma variedade X é dada por uma cobertura aberta $\mathcal{U} = \{U_i\}$ e uma coleção de 1-formas d -simétricas $\omega_i \in \text{Sym}^d \Omega_X^1(U_i)$ satisfazendo as condições:

1. para $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, existe $g_{ij} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap U_j)$ tais que $\omega_i = g_{ij} \omega_j$ em $U_i \cap U_j$,
2. o germe de ω_i em um ponto $x \in U_i$ define um germe de d -web singular, ou seja, satisfaz as condições 1, 2, 3 e 4 da definição (1.8).

As funções $\{g_{ij}\}$ definem um fibrado linear sobre X , chamado **fibrado normal de \mathcal{W}** e denotado por E . As 1-formas d -simétricas ω_i junto com as funções de transição $\{g_{ij}\}$ determinam uma seção global do fibrado $\text{Sym}^d \Omega_X^1 \otimes E$. Desse modo, uma d -web global em X é uma seção de $\text{Sym}^d \Omega_X^1 \otimes E$, onde E é um fibrado linear em X . Dois elementos $\omega, \omega' \in H^0(\text{Sym}^d \Omega_X^1 \otimes E)$ determinam a mesma d -web se existe uma seção global $g \in H^0(X, \mathcal{O}_X^*)$ tal que $\omega = g \cdot \omega'$.

Quando as seções globais de \mathcal{O}_X^* são funções constantes (por exemplo, quando X é compacta) uma d -web global é um elemento de $\mathbb{P}H^0(\text{Sym}^d \Omega_X^1 \otimes E)$.

Anteriormente definimos o grau de uma folheação em \mathbb{P}^n . A seguir iremos definir, de modo análogo, o grau de uma web em \mathbb{P}^n .

Definição 1.9. Seja $\mathcal{W} = [\omega] \in \mathbb{P}H^0(\text{Sym}^d \Omega_{\mathbb{P}^n}^1 \otimes E)$ uma d -web global em \mathbb{P}^n . O *grau de \mathcal{W}* (denotado por $\text{deg}(\mathcal{W})$) é o número de tangências de \mathcal{W} , contando multiplicidades, com uma reta que não seja tangente a \mathcal{W} em todo ponto.

Em \mathbb{P}^n , o fibrado normal de uma d -web é da forma $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\ell)$, onde ℓ é um inteiro dito **grau de E** . Neste caso, o grau da d -web se relaciona com o grau do seu fibrado normal, por meio da expressão

$$\text{deg}(\mathcal{W}) = \ell - 2d.$$

A próxima proposição nos diz que toda web de grau 0 é uma web algébrica. Uma demonstração da proposição a seguir pode ser encontrada em [28].

Proposição 1.1. *Seja C uma curva projetiva de grau d . Então a d -web algébrica \mathcal{W}_C tem grau zero. Reciprocamente, se \mathcal{W} é uma d -web de grau zero em $\check{\mathbb{P}}^n$, então existe uma curva projetiva $C \subset \mathbb{P}^n$ de grau d tal que $\mathcal{W} = \mathcal{W}_C$.*

1.3.5 Webs em superfícies

Nesta seção falaremos especificamente sobre webs em superfícies. Falaremos sobre o levantamento ao projetivo tangente e alguns fibrados associados. Iniciaremos estabelecendo algumas notações e definindo alguns objetos que serão utilizadas ao longo do texto. Muito das definições, notações e resultados apresentados nesta seção pode ser encontrado no artigo de Cavalier-Lehmann [10].

Vamos considerar X superfície complexa, $\tilde{X} = \mathbb{P}TX$ a projetivização de TX e $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ a projeção natural. Em cada ponto $\tilde{m} \in \tilde{X}$, a fibra $\tilde{X}_{\tilde{m}}$ é o espaço projetivo $\mathbb{P}(T_m X)$, onde $m = \pi(\tilde{m})$. Um elemento $\tilde{m} \in \tilde{X}$ é chamado **elemento de contato** de X em m .

Para cada sistema de coordenadas (x, y) em $U \subset X$ determinamos dois sistemas de coordenadas em \tilde{X} da seguinte forma:

- definimos os abertos U_x e U_y complementares em $\pi^{-1}(U)$ dos pontos da forma $\left[b \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{(x,y)} \right]$ e $\left[a \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{(x,y)} \right]$, respectivamente;
- em U_x definimos coordenadas (x, y, p) por $\left[\frac{\partial}{\partial x} \Big|_{(x,y)} + p \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{(x,y)} \right] \mapsto (x, y, p)$;
- em U_y definimos coordenadas (x, y, q) por $\left[q \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{(x,y)} + \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{(x,y)} \right] \mapsto (x, y, q)$.

Observamos que em $U_x \cap U_y$ temos $q = 1/p$.

Agora vamos considerar (x', y') outro sistema de coordenadas em M e a aplicação mudança de coordenadas $(x'(x, y), y'(x, y))$. Então temos a seguinte relação :

$$p' = \frac{\gamma + p\delta}{\alpha + p\beta},$$

onde

$$\alpha = \frac{\partial x'}{\partial x}; \quad \beta = \frac{\partial x'}{\partial y}; \quad \gamma = \frac{\partial y'}{\partial x}; \quad \delta = \frac{\partial y'}{\partial y}.$$

De fato, pela regra da cadeia, temos

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} = \alpha \frac{\partial}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} = \beta \frac{\partial}{\partial x'} + \delta \frac{\partial}{\partial y'}, \end{cases}$$

donde segue que

$$\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} = \alpha \frac{\partial}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial}{\partial y'} + p\beta \frac{\partial}{\partial x'} + p\delta \frac{\partial}{\partial y'} = (\alpha + p\beta) \frac{\partial}{\partial x'} + (\gamma + p\delta) \frac{\partial}{\partial y'} \quad (1.5)$$

e, portanto,

$$p' = \frac{\gamma + p\delta}{\alpha + p\beta}.$$

Observação 5. Se $\beta \neq 0$ e $p = -\frac{\alpha}{\beta}$, entendemos que $q' = 0$. E quando $q = 0$, entendemos que $p' = \frac{\delta}{\beta}$.

Considerando $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$, lembremos que o **fibrado pullback de TX por π** é um fibrado sobre \tilde{X} denotado por $\pi^{-1}(TX)$ ou $\pi^*(TX)$, e definido do seguinte modo: para cada $\tilde{m} \in \tilde{X}$, a fibra de $\pi^{-1}(TX)$ em \tilde{m} é uma cópia da fibra $T_m X$, onde $\pi(\tilde{m}) = m$.

Definição 1.10. O **fibrado tautológico** de \tilde{X} é o subfibrado linear de $\pi^{-1}(TX)$ construído do seguinte modo: para cada $[v] \in \tilde{X}$ tal que $\pi([v]) = m$, a fibra de L em $[v]$ é o subespaço vetorial de $T_m X$ gerado por v .

Em coordenadas locais (x, y, p) , as aplicações

$$\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} : \tilde{m} \in \tilde{X} \mapsto \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{\pi(\tilde{m})} + p \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{\pi(\tilde{m})}$$

são trivializações locais de L . Já vimos na equação (1.5) que

$$\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} = (\alpha + p\beta) \frac{\partial}{\partial x'} + (\gamma + p\delta) \frac{\partial}{\partial y'},$$

assim segue que

$$\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} = (\alpha + p\beta) \left(\frac{\partial}{\partial x'} + p' \frac{\partial}{\partial y'} \right).$$

Isso prova o seguinte resultado:

Proposição 1.2. *As funções $(\alpha + p\beta)$ são funções de transição do fibrado tautológico L .*

O espaço dual de L é denotado por \check{L} e L^k denota o produto $L \otimes \cdots \otimes L$, k -vezes, cujas funções de transição são dadas por $\left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} \right)^k$. Analogamente, \check{L}^k denota produto $\check{L} \otimes \cdots \otimes \check{L}$, k -vezes, cujas funções de transição são dadas por $\left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} \right)^{-k}$.

Na proposição a seguir caracterizamos o subfibrado de vetores tangentes as fibras da projeção natural $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$.

Proposição 1.3. *O subfibrado \mathcal{V} de $T\tilde{X}$ de vetores tangente as fibras de π é isomorfo à $\pi^*(\wedge^2 TX) \otimes \check{L}^2$.*

Além disso, temos a seguinte sequência exata

$$0 \rightarrow \pi^*(\wedge^2 TX) \otimes \check{L}^2 \rightarrow T\tilde{X} \xrightarrow{\pi^*} \pi^*(TX) \rightarrow 0$$

Demonstração. Primeiro observe que as funções $\Theta = \alpha\delta - \gamma\beta$ são funções de transição de $\wedge^2 TX$. De fato, temos as seguintes relações em TX :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} = \alpha \frac{\partial}{\partial x'} + \gamma \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} = \beta \frac{\partial}{\partial x'} + \delta \frac{\partial}{\partial y'}. \end{aligned}$$

Donde segue que

$$\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} = \alpha\delta \frac{\partial}{\partial x'} \wedge \frac{\partial}{\partial y'} + \beta\gamma \frac{\partial}{\partial y'} \wedge \frac{\partial}{\partial x'} = \Theta \frac{\partial}{\partial x'} \wedge \frac{\partial}{\partial y'}.$$

Agora observamos que $\frac{\partial}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p'} \frac{\partial p'}{\partial p}$ e, como $p' = \frac{\gamma + p\delta}{\alpha + p\beta}$, segue que

$$\frac{\partial p'}{\partial p} = \frac{(\alpha + p\beta)\delta - (\gamma + p\delta)\beta}{(\alpha + p\beta)^2} = \frac{\Theta}{(\alpha + p\beta)^2},$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial p} = \frac{\Theta}{(\alpha + p\beta)^2} \frac{\partial}{\partial p'}.$$

Portanto, $\mathcal{V} \simeq \pi^*(\wedge^2 TX) \otimes \check{L}^2$. □

A proposição a seguir nos diz que a forma contato em \tilde{X} , dada em coordenadas locais (x, y, p) por $dy - p dx$, é uma forma com coeficientes em $L \otimes \mathcal{V}$.

Proposição 1.4. *Existe uma 1-forma $\omega : T\tilde{X} \rightarrow \mathcal{L}$ com coeficientes em $\mathcal{L} = L \otimes \mathcal{V}$ tal que, em coordenadas locais (x, y, p) , ω se escreve*

$$(dy - p dx) \otimes \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} \right) \otimes \frac{\partial}{\partial p} \right).$$

Demonstração. Em coordenadas (x, y, p) , definimos $\eta = dy - p dx$. Vamos considerar uma mudança de coordenadas $(x'(x, y), y'(x, y), p'(x, y, p))$ em \tilde{X} e $\eta' = dy' - p' dx'$. Então, temos as seguintes relações :

$$\begin{aligned} dx' &= \frac{\partial x'}{\partial x} dx + \frac{\partial x'}{\partial y} dy = \alpha dx + \beta dy, \\ dy' &= \frac{\partial y'}{\partial x} dx + \frac{\partial y'}{\partial y} dy = \gamma dx + \delta dy. \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned}
\eta' &= (\gamma dx + \delta dy) - \left(\frac{\gamma + p\beta}{\alpha + p\beta} \right) (\alpha dx + \beta dy) \\
&= \left(\delta - \left(\frac{\gamma + p\beta}{\alpha + p\beta} \right) \beta \right) dy - \left(\gamma - \left(\frac{\gamma + p\beta}{\alpha + p\beta} \right) \alpha \right) dx \\
&= \frac{\Theta}{\alpha + p\beta} dy - \frac{\Theta}{\alpha + p\beta} p dx \\
&= \frac{\Theta}{\alpha + p\beta} \eta.
\end{aligned}$$

Como $\frac{\Theta}{\alpha + p\beta}$ são funções de transição do fibrado $\mathcal{L} := L \otimes \mathcal{V}$, segue que η define uma 1-forma ω em \tilde{X} com coeficientes em \mathcal{L} . □

Observação 6. A forma ω , definida na demonstração acima é chamada de *forma contato tautológica* de \tilde{X} .

Como vimos anteriormente, uma d -web \mathcal{W} é dada por um elemento de $\text{Sym}^d(\Omega_X^1) \otimes E$, onde E é um fibrado linear sobre X . Ou seja, uma d -web é dada por um polinômio homogêneo $\omega : S^d(TX) \rightarrow E$ com coeficientes em E e, portanto, induz uma aplicação

$$\pi^{-1}(\omega) : \pi^{-1}(S^d(TX)) \rightarrow \pi^{-1}(E).$$

Além disso, a aplicação inclusão $L \hookrightarrow \pi^{-1}(TX)$ induz uma aplicação

$$L^d \rightarrow \pi^{-1}(S^d(TX))$$

e compondo esta com a anterior, obtemos uma aplicação $L^d \rightarrow \pi^{-1}(E)$. Desse modo, uma d -web em X define uma seção S_W do fibrado $\check{L}^d \otimes \pi^{-1}(E)$, não identicamente nula e verticalmente invariante.

A uma d -web podemos associar uma superfície em \tilde{X} dada pelos zeros da seção S_W , definida acima. Nesta superfície teremos uma folheação que será dada pela restrição da forma contato, como veremos adiante.

Definição 1.11. A *superfície associada* a \mathcal{W} é a superfície analítica complexa $W = S_W^{-1}(0)$ definida pelo conjunto dos zeros de S_W em \tilde{X} . A *parte regular* de W é o conjunto W' dos pontos em que W não é singular. A *parte singular* de W é $\Sigma_W := W - W'$.

Toda d -web em uma superfície é genericamente suave. Dizemos que \mathcal{W} é *lisa* se $W = W'$, ou seja, a superfície associada é lisa. Em [10] foi provado que se \mathcal{W} é lisa então W é necessariamente irreduzível.

Em um aberto U com coordenadas (x, y) , podemos escrever

$$\omega = \left(\sum_{i=0}^d a_i(x, y) (dx)^i (dy)^{d-i} \right) \otimes \sigma_E,$$

e a seção S_W é escrita por

$$F \left(\left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} \right)^{-d} \otimes \pi^{-1}(\sigma_E) \right),$$

onde $F(x, y, p) = \sum_{i=0}^d a_i(x, y) p^{d-i}$ e σ_E é trivialização local do fibrado E em U . Assim, em coordenadas locais, a superfície W é definida por $F(x, y, p) = 0$ (como vimos anteriormente no Exemplo 1.12).

Agora vamos considerar um outro sistema de coordenadas (x', y', p') , no qual W é definida por $G(x', y', p') = 0$. Sejam σ_E e σ'_E trivializações locais de E nas coordenadas (x, y, p) e (x', y', p') , respectivamente. Na interseção não vazia das cartas (x, y, p) e (x', y', p') , as funções F e G se relacionam por

$$G(x', y', p') = \mu(\alpha + p\beta)^{-d} F(x, y, p), \quad (1.6)$$

onde μ é uma função holomorfa ($\mu = \mu(x, y)$) que não se anula e satisfaz $\sigma_E = \mu \sigma'_E$.

Na construção acima, o discriminante da web é a imagem pela projeção natural do conjunto $\Gamma_W := W - W_0$, onde W_0 é o conjunto dos pontos da parte regular de W para os quais a diferencial da projeção é um isomorfismo. A curva Γ_W é chamada *curva criminante* ou *curva crítica* da d -web. Por definição, o conjunto singular de W está contido em Γ_W . Agora veremos a expressão local da curva criminante.

Proposição 1.5. *A curva criminante Γ_W é dada pelos zeros $(S_\Gamma)^{-1}(0)$ de uma seção global do fibrado $[\pi^{-1}(E) \otimes \mathcal{V}^* \otimes \check{L}^d]|_W$, definida localmente pelas equações $F = F_p = 0$.*

Demonstração. Derivando a equação (1.6) com relação a p , obtemos

$$F_p = \mu^{-1} d(\alpha + p\beta)^{d-1} \beta G + \mu^{-1} (\alpha + p\beta)^d G_{p'} \frac{\partial p'}{\partial p},$$

e usando que $\frac{\partial p'}{\partial p} = \frac{\Theta}{(\alpha + p\beta)^2}$, obtemos

$$F_p = \mu^{-1} d(\alpha + p\beta)^{d-1} \beta G + \mu^{-1} (\alpha + p\beta)^{d-2} \Theta G_{p'}.$$

Restringindo à superfície W (ou seja, restringindo à $G = 0$), obtemos

$$F_p = \mu^{-1} (\alpha + p\beta)^{d-2} \Theta G_{p'}. \quad (1.7)$$

Agora observamos que nos pontos em que $F_p \neq 0$, pelo Teorema da Função Implícita, a aplicação $\pi : W' \rightarrow X$ é um difeomorfismo local. Assim, a curva criminante é dada localmente por $F = F_p = 0$. \square

Observamos que a curva criminante pode ser vazia, mesmo quando X é uma superfície compacta, como veremos no próximo exemplo.

Exemplo 1.14. Vamos considerar $\mathbb{T} = \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ o toro complexo e vamos tomar $X = \mathbb{T}^2$. As coordenadas canônicas de \mathbb{C}^2 definem coordenadas locais (x, y) em \mathbb{T}^2 . O fibrado $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ é trivial (basicamente $\mathbb{P}T(\mathbb{T}^2) \cong \mathbb{T}^2 \times \mathbb{P}^1$). A d -web dada por

$$F(x, y, p) = \prod_{k=0}^d (p - k) = 0$$

é lisa e $\Gamma_W = \emptyset$, pois $F_p \neq 0$ quando $F = 0$.

Na proposição a seguir verificaremos que $F_x + pF_y$ define uma seção global de um fibrado sobre a curva criminante Γ_W .

Proposição 1.6. *Na interseção não vazia das cartas (x, y, p) e (x', y', p') , vale a seguinte relação:*

$$\begin{aligned} F_x + pF_y &= \mu^{-1}(\alpha + p\beta)^{d+1}(G_{x'} + pG_{y'}) + \mu^{-1}(\alpha + p\beta)^d \left(\frac{\partial p'}{\partial x} + p \frac{\partial p'}{\partial y} \right) G_{p'} \\ &+ [(\mu^{-1}(\alpha + p\beta)^d)_x + p(\mu^{-1}(\alpha + p\beta)^d)_y] G. \end{aligned}$$

Consequentemente, $F_x + pF_y$ e $G_{x'} + p'G_{y'}$ se colam longo da curva Γ_W e definem uma seção S_Σ do fibrado $[\pi^{-1}(E) \otimes \check{L}^{d+1}]|_{\Gamma_W}$.

Demonstração. Derivando a equação (1.6), obtemos

$$F_x = (\mu^{-1}(\alpha + p\beta)^d)_x G + \mu^{-1}(\alpha + p\beta)^d G_x.$$

Observe que

$$G_x = G_{x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + G_{y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + G_{p'} \frac{\partial p'}{\partial x},$$

ou seja,

$$G_x = \alpha G_{x'} + \gamma G_{y'} + \frac{\partial p'}{\partial x} G_{p'}.$$

Assim, segue que

$$F_x = (\mu^{-1}(\alpha + p\beta)^d)_x G + \mu^{-1}(\alpha + p\beta)^d \left(\alpha G_{x'} + \gamma G_{y'} + \frac{\partial p'}{\partial x} G_{p'} \right). \quad (1.8)$$

De modo análogo, obtemos

$$F_y = (\mu^{-1}(\alpha + p\beta)^d)_y G + \mu^{-1}(\alpha + p\beta)^d \left(\beta G_{x'} + \delta G_{y'} + \frac{\partial p'}{\partial y} G_{p'} \right). \quad (1.9)$$

De (1.8) e (1.9), obtemos

$$\begin{aligned} F_x + pF_y &= (\mu^{-1}(\alpha + p\beta)^d)_x G + p(\mu^{-1}(\alpha + p\beta)^d)_y G + \mu^{-1}(\alpha + p\beta)^d \left(\alpha G_{x'} + \gamma G_{y'} + \frac{\partial p'}{\partial x} G_{p'} \right) \\ &\quad + \mu^{-1}(\alpha + p\beta)^d \left(\beta G_{x'} + \delta G_{y'} + \frac{\partial p'}{\partial y} G_{p'} \right) \\ &= \mu^{-1}(\alpha + p\beta)^d [(\alpha + p\beta)G_{x'} + (\gamma + p\delta)G_{y'}] + \mu^{-1}(\alpha + p\beta)^d \left(\frac{\partial p'}{\partial x} + p \frac{\partial p'}{\partial y} \right) G_{p'} \\ &\quad + [(\mu^{-1}(\alpha + p\beta)^d)_x + p(\mu^{-1}(\alpha + p\beta)^d)_y] G. \end{aligned}$$

Usando que $p' = \frac{\gamma + p\delta}{\alpha + p\beta}$, podemos reescrever

$$\begin{aligned} F_x + pF_y &= \mu^{-1}(\alpha + p\beta)^{d+1} (G_{x'} + pG_{y'}) + \mu^{-1}(\alpha + p\beta)^d \left(\frac{\partial p'}{\partial x} + p \frac{\partial p'}{\partial y} \right) G_{p'} \\ &\quad + [(\mu^{-1}(\alpha + p\beta)^d)_x + p(\mu^{-1}(\alpha + p\beta)^d)_y] G. \end{aligned}$$

Restringindo à curva $\Gamma_W = \{G = G_{p'} = 0\}$, obtemos

$$F_x + pF_y = \mu^{-1}(\alpha + p\beta)^{d+1} (G_{x'} + pG_{y'}). \quad (1.10)$$

□

Observação 7. No caso de $X = \mathbb{P}^2$, temos

$$\frac{\partial p'}{\partial x} + p \frac{\partial p'}{\partial y} \equiv 0,$$

de modo que $F_x + pF_y$ determina uma seção global do fibrado $(\pi^{-1}(E) \otimes \check{L}^{d+1})|_W$.

Definição 1.12. Dizemos que a web \mathcal{W} é *dicrítica* (no sentido de Cavalier-Lehmann [10]) se a seção S_Σ do fibrado $(\pi^{-1}(E) \otimes \check{L}^{d+1})|_{\Gamma_W}$ é identicamente nula. Caso contrário, dizemos que \mathcal{W} é *não dicrítica*. Não devemos confundir a definição de web dicrítica com a definição de singularidade dicrítica de folheações (pontos em que acumulam uma infinidade de folhas).

A restrição da forma contato (definida na Observação 6) à parte regular W' é necessariamente integrável. Portanto, ela define uma folheação \mathcal{F}_W que será chamada de *folheação associada a \mathcal{W}* . Uma *folha de \mathcal{W}* é a projeção de uma folha de \mathcal{F}_W pela restrição π_W da projeção natural $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$

à superfície W . Em W_0 , a equação $F(x, y, p) = 0$ tem d soluções distintas, então \mathcal{F}_W é projetada em d folheações \mathcal{F}_i , duas a duas transversais.

A folheação \mathcal{F}_W também pode ser definida, em coordenadas (x, y, p) , pelo campo vetorial

$$Z_{(x,y,p)} = F_p \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} \right) - (F_x + pF_y) \frac{\partial}{\partial p}.$$

A seguir encontraremos o fibrado tangente da folheação associada \mathcal{F}_W nos casos de webs dicríticas e não dicríticas.

Proposição 1.7. *O fibrado $T\mathcal{F}_W$ tangente de \mathcal{F}_W é dado por*

1. $T\mathcal{F}_W = \check{L}|_{W'}$, se a web é dicrítica.
2. $T\mathcal{F}_W = (\pi^{-1}(E^*) \otimes \mathcal{V} \otimes L^{d+1})|_{W'}$, se a web é não dicrítica.

Demonstração. 1. De fato, como \mathcal{W} é dicrítica, a seção definida por $F_x + pF_y$ é identicamente nula.

Assim, o campo $Z_{(x,y,p)}$ é dado por

$$Z_{(x,y,p)} = F_p \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Em Γ_W , $Z_{(x,y,p)}$ é identicamente. Fora de Γ_W , na interseção das cartas (x, y, p) e (x', y', p') temos a seguinte relação

$$\frac{1}{F_p} Z_{(x,y,p)} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} \right) = (\alpha + p\beta) \left(\frac{\partial}{\partial x'} + p' \frac{\partial}{\partial y'} \right).$$

Donde segue que $T\mathcal{F}_W = \check{L}|_W$, pois $(\alpha + p\beta)$ são funções de transição de L fibrado tautológico de X .

2. Pelas equações (1.7) e (1.10), segue que na interseção das cartas (x, y, p) e (x', y', p') , os campos $Z_{(x,y,p)}$ e $Z_{(x',y',p')}$ se colam ao longo da curva criminante Γ_W por meio da expressão

$$Z_{(x,y,p)} = \mu^{-1}(\alpha + p\beta)^{(d-1)} \Theta Z_{(x',y',p')}.$$

Portanto, o fibrado tangente de \mathcal{F}_W é dado por

$$(\pi^{-1}(E^*) \otimes \mathcal{V} \otimes L^{d+1})|_W.$$

□

A *parte singular* da folheação \mathcal{F}_W , denotada por $\Sigma(\mathcal{F}_W)$, é a união dos pontos singulares de W com os pontos singulares da folheação \mathcal{F}_W em W' .

Observamos que se a web é dicrítica, \mathcal{F}_W não tem singularidades em W' , pois neste caso, a folheação em W' é definida localmente pelo campo $\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y}$ que não tem singularidades. No caso em que a web é não dicrítica, as singularidades de \mathcal{F}_W estão contidas no conjunto de zeros $(S_\Sigma)^{-1}(0)$ da seção S_Σ do fibrado $(\pi^{-1}(E) \otimes \check{L}^{d+1})|_W$.

1.4 Hipersuperfícies Levi-flat

Nesta seção falaremos sobre hipersuperfícies Levi-flat, que são hipersuperfícies reais analíticas (em uma variedade complexa) cuja parte regular é folheada por subvariedades complexas. As hipersuperfícies Levi-flat surgem naturalmente na teoria de folheações, como subconjuntos invariantes. Em geral, germes de folheações que são tangentes a hipersuperfícies desse tipo admitem uma integral primeira meromorfa (ver [11]).

As hipersuperfícies Levi-flat são eixo central do desenvolvimento deste trabalho. Alguns dos resultados principais apresentados nesta tese, tratam de verificar que determinadas famílias de variedades polares não são Levi-flat, ou seja, não admitem uma folheação por subvariedades complexas.

Seja $M \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ um germe de hipersuperfície real analítica. Vamos supor que $M := \{F = 0\}$ onde $F \in \mathcal{A}_{n,\mathbb{R}}$ é irredutível. O *conjunto singular* de M é denotado por $\text{Sing}(M)$ e definido por $\text{Sing}(M) := \{F = 0\} \cap \{dF = 0\}$. Definimos a *parte regular* de M por $M^* := \{F = 0\} - \{dF = 0\}$. Em M^* , a *distribuição de Levi* é dada por $L_p := \text{Ker}(\partial F(p)) \subset T_p M^*$, com $p \in M^*$. Observamos que L_p é o único hiperplano complexo contido em $T_p M^*$.

Definição 1.13. Seja M uma hipersuperfície real analítica. Dizemos que M é *Levi-flat* se a distribuição de Levi em M^* é integrável. Neste caso, a distribuição de Levi induz uma folheação em M^* chamada *folheação de Levi* e denotada por \mathcal{L} .

A distribuição de Levi também pode ser dada pela 1-forma

$$\eta := i(\partial F - \bar{\partial} F)$$

chamada *forma de Levi*. Assim, a integrabilidade da distribuição de Levi é equivalente a integrabilidade da forma η no sentido de Frobenius, ou seja, η é integrável se, e somente se, $\eta \wedge d\eta|_{M^*} \equiv 0$.

O exemplo mais simples de hipersuperfície Levi-flat é dado a seguir.

Exemplo 1.15. Em \mathbb{C}^n com coordenadas (z_1, \dots, z_n) , considere o conjunto

$$M = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n; \operatorname{Im}(z_n) = 0\}.$$

Então M é hipersuperfície real analítica Levi-flat lisa, ou seja, $\operatorname{Sing}(M) = \emptyset$. A distribuição de Levi em M é dada por

$$L_p = \operatorname{Ker}(dz_n(p))$$

As folhas da folheação de Levi em M são dadas por $\{z_n = c\}$ onde $c \in \mathbb{R}$.

Vejamos um exemplo um pouco mais elaborado em \mathbb{C}^2 .

Exemplo 1.16. Com coordenadas (z, w) em \mathbb{C}^2 tais que $z = x + iy$ e $w = s + it$, a hipersuperfície real analítica M dada por

$$M := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : t^2 = 4(y^2 + s)y^2\}$$

é Levi-flat, com conjunto singular $\operatorname{Sing}(M) = \{t = y = 0\}$. As folhas da folheação de Levi em M^* são dadas por

$$L_c = \{w = (z + c)^2 : \operatorname{Im}(z) \neq 0\}$$

com $c \in \mathbb{R}$.

O próximo resultado nos dá a forma local de uma hipersuperfície Levi-flat suave. Basicamente ele nós dirá que, em pontos regulares, toda Levi-flat é localmente como no exemplo 1.15.

Teorema 5 (Teorema de Cartan). *Seja $M \subset \mathbb{C}^n$ uma hipersuperfície real analítica Levi-flat. Em uma vizinhança de cada ponto $p \in M^*$ existe um sistema de coordenadas holomorfo $z = (z_1, \dots, z_n)$ tal que*

$$M = \{\operatorname{Im}(z_n) = 0\}.$$

Uma ideia da demonstração deste resultado, pode ser encontrada em [13].

Um critério para a integrabilidade da forma de Levi é dado na próxima proposição.

Proposição 1.8. *M é Levi-flat se, e somente se, $\partial F(p) \wedge \bar{\partial} F(p) \wedge \partial \bar{\partial} F(p) = 0$ para todo $p \in M$.*

Demonstração. Observando que

$$d\eta = id(\partial F - \bar{\partial}F) = i(\bar{\partial}\partial F - \partial\bar{\partial}F) = 2i\bar{\partial}\partial F,$$

segue que

$$\eta \wedge d\eta = i(\partial F - \bar{\partial}F \wedge 2i\bar{\partial}\partial F) = 2((\partial F - \bar{\partial}F) \wedge \partial\bar{\partial}F),$$

ou seja,

$$\eta \wedge d\eta|_{M^*} = (\partial F - \bar{\partial}F) \wedge \partial\bar{\partial}F|_{M^*}.$$

Assim, M é Levi-flat se, e somente se, $(\partial F - \bar{\partial}F) \wedge \partial\bar{\partial}F|_{M^*} \equiv 0$. Usando que $dF = \partial F + \bar{\partial}F$,

segue que

$$(\partial F - \bar{\partial}F) \wedge \partial\bar{\partial}F|_{M^*} \equiv 0 \iff \partial F(p) \wedge \bar{\partial}F(p) \wedge \partial\bar{\partial}F(p) = 0$$

para todo $p \in M$. □

Na próxima proposição, veremos que a propriedade de Levi-flat é invariante por mudança de coordenadas. De modo mais específico, vamos verificar o seguinte resultado.

Proposição 1.9. *Vamos considerar $G : V \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real-analítica em coordenadas $z = (z_1, \dots, z_n)$ e $z = z(u)$ uma mudança de coordenadas, ou seja, um biholomorfismo do aberto $V \subset \mathbb{C}^n$ sobre um aberto $U \subset \mathbb{C}^n$. Então, a hipersuperfície $M' = \{u \in U : G(u) = G(z(u)) = 0\}$ é Levi-flat se, e somente se, $M = \{z \in V : G(z) = 0\}$ é Levi-flat.*

Primeiramente vamos verificar que a parte regular de M é levada na parte regular de M' , para M e M' biholomorfas (não necessariamente Levi-flat).

Proposição 1.10. *Seja $u \in M'$. Então $z = z(u) \in \text{Sing}(M)$ se, e somente se, $u \in \text{Sing}(M')$.*

Demonstração. Temos $dG(u) = \partial G(u) + \bar{\partial}G(u)$, onde

$$\begin{aligned} \partial G &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial G}{\partial u_j} du_j, \\ \bar{\partial}G &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial G}{\partial \bar{u}_j} d\bar{u}_j. \end{aligned}$$

Um ponto $u \in M'$ pertence ao conjunto singular $\text{Sing}(M')$ se, e somente se, todas as derivadas parciais $\frac{\partial G}{\partial u_j}(u)$, $\frac{\partial G}{\partial \bar{u}_j}(u)$ são identicamente nulas.

Pela regra da cadeia, obtemos

$$\frac{\partial G}{\partial u_j}(u) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial G}{\partial z_\alpha}(z(u)) \frac{\partial z_\alpha}{\partial u_j}(u),$$

assim segue que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial u_1}(u) & \cdots & \frac{\partial G}{\partial u_n}(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial z_1}(z(u)) & \cdots & \frac{\partial G}{\partial z_n}(z(u)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial u_1}(u) & \cdots & \frac{\partial z_1}{\partial u_n}(u) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial z_n}{\partial u_1}(u) & \cdots & \frac{\partial z_n}{\partial u_n}(u) \end{pmatrix}.$$

Como $z = z(u)$ é um biholomorfismo, a matriz de mudança de coordenadas é invertível e, portanto,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial u_1}(u) & \cdots & \frac{\partial G}{\partial u_n}(u) \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial z_1}(z(u)) & \cdots & \frac{\partial G}{\partial z_n}(z(u)) \end{pmatrix} = 0.$$

□

Demonstração da Proposição 1.9.

As derivadas parciais de G nas coordenadas $z = (z_1, \dots, z_n)$ são dadas por:

$$\begin{aligned} \partial G &= \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial G}{\partial z_\alpha} dz_\alpha, \\ \bar{\partial} G &= \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial G}{\partial \bar{z}_\beta} d\bar{z}_\beta, \\ \partial \bar{\partial} G &= \sum_{\delta, \beta=1}^n \frac{\partial^2 G}{\partial z_\delta \partial \bar{z}_\beta} dz_\delta \wedge d\bar{z}_\beta. \end{aligned}$$

Desse modo, em coordenadas $z = (z_1, \dots, z_n)$ temos

$$\partial G \wedge \bar{\partial} G \wedge \partial \bar{\partial} G = \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} \left(\frac{\partial G}{\partial z_\alpha} \frac{\partial G}{\partial \bar{z}_\beta} \frac{\partial^2 G}{\partial z_\delta \partial \bar{z}_\gamma} \right) dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta \wedge dz_\delta \wedge d\bar{z}_\gamma. \quad (1.11)$$

Agora, fazendo $z = z(u)$, obtemos

$$\begin{aligned} dz_\alpha &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial z_\alpha}{\partial u_j} du_j, \\ d\bar{z}_\beta &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial \bar{z}_\beta}{\partial \bar{u}_k} d\bar{u}_k, \end{aligned}$$

donde segue que

$$dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta \wedge dz_\delta \wedge d\bar{z}_\gamma = \sum_{j, k, \ell, m} \frac{\partial z_\alpha}{\partial u_j} \frac{\partial \bar{z}_\beta}{\partial \bar{u}_k} \frac{\partial z_\delta}{\partial u_\ell} \frac{\partial \bar{z}_\gamma}{\partial \bar{u}_m} du_j \wedge d\bar{u}_k \wedge du_\ell \wedge d\bar{u}_m.$$

Assim, em coordenadas $u = (u_1, \dots, u_n)$,

$$\partial G \wedge \bar{\partial} G \wedge \partial \bar{\partial} G = \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial z_\alpha} \frac{\partial G}{\partial \bar{z}_\beta} \frac{\partial^2 G}{\partial z_\delta \partial \bar{z}_\gamma} \right) \left(\sum_{j, k, \ell, m} \left(\frac{\partial z_\alpha}{\partial u_j} \frac{\partial \bar{z}_\beta}{\partial \bar{u}_k} \frac{\partial z_\delta}{\partial u_\ell} \frac{\partial \bar{z}_\gamma}{\partial \bar{u}_m} \right) du_j \wedge d\bar{u}_k \wedge du_\ell \wedge d\bar{u}_m \right) \right].$$

Da expressão acima junto com a equação (1.11), segue que M' é Levi-flat se, e somente se, M é Levi-flat. E concluímos a demonstração da Proposição 1.9.

□

1.5 Complexificação

Uma hipersuperfície Levi-flat M é hipersuperfície real e, portanto, não tem estrutura complexa. Desse modo, não podemos aplicar as ferramentas da Geometria Complexa no estudo dessas hipersuperfícies. Um método para contornar essa dificuldade é fazer uma *complexificação* de M , obtendo uma subvariedade complexa $M_{\mathbb{C}}$ em \mathbb{C}^{2n} , onde podemos utilizar as ferramentas da Geometria Complexa para obter informações sobre a hipersuperfície original.

Seja $F \in \mathcal{A}_{n, \mathbb{R}}$. A *complexificação* de F é definida por

$$F_{\mathbb{C}}(z, w) = \sum_{\mu, \nu} F_{\mu, \nu} z^{\mu} w^{\nu},$$

onde

$$F(z) = \sum_{\mu, \nu} F_{\mu, \nu} z^{\mu} \bar{z}^{\nu}$$

é série de potência de F convergente em uma vizinhança da origem.

Observamos que $F_{\mathbb{C}}$ é holomorfa em $(\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n, 0)$. A *complexificação de M* é definida por

$$M_{\mathbb{C}} = \{F_{\mathbb{C}} = 0\},$$

e a *complexificação da forma de Levi* é dada por

$$\eta_{\mathbb{C}} = i \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F_{\mathbb{C}}}{\partial z_k} dz_k - \frac{\partial F_{\mathbb{C}}}{\partial w_k} dw_k \right).$$

Uma vez que η é integrável em M^* , segue que $\eta_{\mathbb{C}}$ é também integrável em $M_{\mathbb{C}}^*$. Observamos que podemos escrever $dF_{\mathbb{C}} = \alpha + \beta$ e $\eta_{\mathbb{C}} = i(\alpha - \beta)$, onde

$$\alpha = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_{\mathbb{C}}}{\partial z_k} dz_k \text{ e } \beta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_{\mathbb{C}}}{\partial w_k} dw_k.$$

Observamos ainda que α e β definem a mesma folheação que $\eta_{\mathbb{C}}$ em $M_{\mathbb{C}}^*$. Assim, a integrabilidade de $\eta_{\mathbb{C}}$ é equivalente a

$$\alpha(z, w) \wedge d\alpha(z, w) \wedge \beta(z, w) = 0$$

para todo $(z, w) \in M_{\mathbb{C}}$. Esta condição será utilizada mais adiante para verificar que a parte real de uma certa família de variedades polares não é Levi-flat.

1.6 Variedades de Segre

Embora as folhas da folheação de Levi sejam subvariedades complexas, a folheação obtida em M^* é uma folheação real, pois uma hipersuperfície Levi-flat é um objeto real-analítico. Com isso, surge naturalmente a seguinte pergunta: dada $M \subset \mathbb{C}^n$ uma hipersuperfície Levi-flat, existe uma folheação holomorfa \mathcal{F} em uma vizinhança $V \subset \mathbb{C}^n$ de M , tal que toda folha da folheação de Levi em M^* é também uma folha de \mathcal{F} ? Isso motiva a próxima definição.

Definição 1.14 (Folheação tangente à Levi-flat). Sejam \mathcal{F} um germe de folheação holomorfa em $(\mathbb{C}^n, 0)$ e M um germe de hipersuperfície real analítica Levi-flat em $(\mathbb{C}^n, 0)$. Dizemos que \mathcal{F} *estende a folheação de Levi* \mathcal{L} em M^* , ou que \mathcal{F} *é tangente a* M , se toda folha da folheação de Levi em M^* é também uma folha da folheação \mathcal{F} .

Observamos que \mathcal{F} é tangente a M se, e somente se, M é um conjunto invariante por \mathcal{F} no sentido da Definição 1.5.

De modo análogo a definição anterior, dizemos uma d -web \mathcal{W} *estende a folheação de Levi* \mathcal{L} em M^* (ou que \mathcal{W} *é tangente a* M) se toda folha da folheação de Levi em M^* é também uma folha de \mathcal{W} .

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.17. Considerando $M = \{\text{Im}(w) = 0\}$ como no Exemplo 1.15, é fácil ver que a folheação definida $\mathcal{F} : dw = 0$ é tangente a M . Neste caso, as folhas de \mathcal{F} são dadas por $\{w = c\}$ com $c \in \mathbb{C}$.

Exemplo 1.18. Considere a hipersuperfície real analítica M definida no Exemplo 1.16

$$M := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2; t^2 = 4(y^2 + s)y^2\}.$$

Não é possível estender a folheação de Levi por uma folheação holomorfa. Neste caso, a folheação de Levi será estendida pela web holomorfa (estudada no Exemplo 1.12) dada pela forma 2-simétrica

$$\omega = (dw)^2 - 4w(dz)^2 = 0.$$

Com o exemplo acima, vemos que nem sempre existirá uma folheação holomorfa que estende a folheação de Levi em uma hipersuperfície Levi-flat. Porém, a nível de germes, Shafikov, Sukhov [32] provaram que sempre existe uma d -web que estende a folheação de Levi (ver Teorema 7). Este problema de extensão da folheação de Levi será mais comentado no Capítulo 2.

Os germes de folheações que deixam invariante uma hipersuperfície Levi-flat sempre admitem uma integral primeira local. Este resultado foi provado por Cerveau, Lins-Neto [11] e será enunciado a seguir.

Teorema 6 (Cerveau, Lins-Neto [11]). *Seja \mathcal{F} um germe em $0 \in \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, de folheação holomorfa de codimensão 1 tangente a um germe em $0 \in \mathbb{C}^n$ de hipersuperfície real analítica Levi-flat irredutível M . Então \mathcal{F} tem uma integral primeira meromorfa não constante. No caso de dimensão dois:*

1. *Se \mathcal{F} é dicrítica então tem integral meromorfa não constante f/g , onde $f, g \in \mathcal{O}_2$ e $f(0) = g(0) = 0$.*
2. *Se \mathcal{F} é não dicrítica então tem integral holomorfa não constante.*

No caso $n = 2$ dicrítico, a integral primeira é obtida a partir dos primeiros jatos não nulos de uma função F que define o germe M . No caso $n = 2$ não dicrítico, os autores garantem a existência da integral primeira, fazendo um estudo da dinâmica das folhas em uma vizinhança da singularidade. Já no caso $n > 3$, os autores utilizam um argumento de corte transversal e aplicam o caso $n = 2$.

Vamos considerar $M = \{F = 0\}$ um germe em $(\mathbb{C}^n, 0)$ de hipersuperfície Levi-flat irredutível e uma vizinhança $U \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ da origem, onde F tem uma expressão em série de potência convergente

$$F(z, \bar{z}) = \sum_{I, J} F_{IJ} z^I \bar{z}^J.$$

A notação acima é entendida por $I = (i_1, \dots, i_n)$ e $z^I = z_1^{i_1} \dots z_n^{i_n}$, onde cada i_k é inteiro não negativo e $z = (z_1, \dots, z_n)$. Como $F \in \mathcal{A}_{n, \mathbb{R}}$, segue que $F_{IJ} = \overline{F_{JI}}$ para quaisquer multi-índices I, J .

Para cada $w \in U$ a **variedade de Segre de w associada a M** é a hipersuperfície complexa definida por

$$Q_w = \{z \in U; F(z, \bar{w}) = 0\}.$$

Claramente, temos:

1. $z \in Q_w \iff w \in Q_z$;

$$2. z \in Q_z \iff z \in M.$$

Se a origem $0 \in (\mathbb{C}^n, 0)$ é uma singularidade não dicrítica (ou, de modo equivalente, se $\dim_{\mathbb{C}} Q_0 = n - 1$), é possível parametrizar as variedades de Segre em uma pequena vizinhança $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ da origem, definindo um subconjunto analítico complexo

$$Y = \{(z, t), U \times \mathbb{D}; F(z, \overline{w(\bar{t})}) = 0\} \quad (1.12)$$

onde \mathbb{D} é o disco unitário em \mathbb{C} . Essa parametrização é utilizada em [32] para construir uma extensão da folheação de Levi em $(\mathbb{C}^n, 0)$. Essa extensão é obtida pelos seguintes passos:

1. Escrevemos $M \cap U = \{F = 0\}$;
2. Reduzindo U e \mathbb{D} , se necessário, podemos supor que $Y = \{(z, t), U \times \mathbb{D}; H(z, t) = 0\}$, onde H é um polinômio de Weierstrass na variável t , digamos $H(z, t) = t^d + h_1(z)t^{d-1} + \dots + h_d(z)$.
3. Tomamos uma decomposição de H em fatores irredutíveis

$$H(z, t) = H_1(z, t) \cdots H_m(z, t),$$

onde H_j são polinômios de grau estritamente positivo em t ;

4. Para cada $j = 1, \dots, m$ definimos

$$G_j(z, t, p_j) := \frac{\partial}{\partial z_j} H(z, t) + p_j \frac{\partial}{\partial z_n} H(z, t),$$

onde $p_j = \frac{\partial z_n}{\partial z_j}$. Ou seja, G_j é derivada de H com relação a z_j ;

5. Definimos equações diferenciais parciais $\Phi_j(z, p) := R(H, G_j)$ se G_j depende de t , e $\Phi_j(z, p) = G_j(z, t, p_j)$ se G_j não depende de t , onde $p := (p_1, \dots, p_{n-1})$. Aqui $R(H, G_j)$ denota a resultante de H e G_j .

As equações encontradas acima, definem uma d -web, pela relação entre webs e edp's apresentada na Seção 1.3.2. Observamos que um ponto (z, p) é solução das equações diferenciais Φ_j se, e somente se, é solução do sistema $H(z, t) = G_j(z, t, p_j) = 0$. Por construção, a d -web encontrada estende a folheação de Levi, pois cada folha \mathcal{L}_z está contida em uma única componente conexa da variedade de Segre Q_z , para cada $z \in M^*$. E ainda, o conjunto Y define uma integral primeira para a d -web. Isso resume a prova do seguinte Teorema:

Teorema 7 (Shafikov, Sukhov [32]). *Seja $M \subset \Omega$ uma hipersuperfície real analítica Levi-flat irreduzível em um domínio $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, com $n \geq 2$ e $0 \in \overline{M^*}$. Assuma que pelo menos uma das condições seguintes é verdadeira:*

1. $0 \in M$ é singularidade não dicrítica.
2. M é uma hipersuperfície real algébrica.

Então existe uma vizinhança U da origem e uma d -web holomorfa singular \mathcal{W} em U tal que \mathcal{W} estende a folheação de Levi. Além disso, \mathcal{W} admite uma integral primeira meromorfa multi-valorada em U .

Esta construção será fundamental para a demonstração do Teorema A no próximo capítulo.

Capítulo 2

Problema de extensão da Folheação de Levi

O primeiro problema abordado neste trabalho trata da extensão holomorfa da folheação de Levi em uma hipersuperfície real analítica M de uma variedade complexa X (ver Teorema A). Ao longo dos anos este problema foi estudado por diversos autores: Brunella [5], Cerveau, Lins-Neto [11], Fernández-Peréz [12], Lebl [21], Shafikov, Sukhov [32], dentre outros.

Pelo Teorema de Cartan, se M é lisa então ela é localmente dada por $\{\text{Im}(z_n) = 0\}$. Desse modo, a folheação dada por $dz_n = 0$ estende a folheação de Levi localmente. Estas extensões locais se colam, definindo uma folheação holomorfa de codimensão 1 que estende a folheação de Levi em uma vizinhança de M . Ou seja, se M é Levi-flat lisa é possível estender a folheação de Levi a uma folheação holomorfa em uma vizinhança $U \subset X$ de M . No caso em que M é singular, nem sempre é possível conseguir tal extensão (Exemplo 1.18), pois o conjunto singular pode ter dimensão alta.

Neste trabalho, estudamos o caso global (em \mathbb{P}^n) de *hipersuperfícies induzidas por curvas* na Grassmaniana de hiperplanos $G(n+1, n)$, que significa, a menor hipersuperfície em \mathbb{P}^n que contém todos os hiperplanos associados a pontos de uma curva $S \subset G(n+1, n)$. A motivação principal foi o trabalho de J. Lebl em [21], no qual foi provado que: se M é induzida por uma curva $S \subset G(n+1, n)$ real-analítica e o conjunto singular é pequeno (tem dimensão $2n-4$), existe uma folheação holomorfa em \mathbb{P}^n que estende a folheação de Levi.

De modo mais específico, J. Lebl mostrou o seguinte resultado:

Teorema 8 (J. Lebl [21]). *Seja $M \subset \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície real analítica irredutível induzida por uma curva $S \subset G(n+1, n)$ real analítica irredutível. Suponha que existe uma função real analítica não trivial r definida em uma vizinhança V de M , tal que r anula em M . Então*

1. M é Levi-flat,
2. $\overline{M^*}$ é união de hiperplanos complexos,
3. $\dim(\text{Sing}(M)) = 2n - 4$ ou $\dim(\text{Sing}(M)) = 2n - 2$.

Se $\dim(\text{Sing}(M)) = 2n - 4$, existem coordenadas homogêneas $[z_0 : \dots : z_n]$ tais que:

4. o conjunto $\text{Sing}(M)$ é dado por $z_1 = z_2 = 0$,
5. M é definida por uma equação polinomial bihomogênea real $\rho(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) = 0$,
6. a folheação holomorfa dada por $z_2 dz_1 - z_1 dz_2$ estende a folheação de Levi em M^* .

Neste trabalho, estendemos o resultado acima, considerando também o caso em que $\dim(\text{Sing}(M)) = 2n - 2$ e mostrando que existe uma web de grau 0 em \mathbb{P}^n (portanto algébrica) que estende a folheação de Levi em M^* . De modo mais específico, nosso resultado é o seguinte:

Teorema A. *Seja $M \subset \mathbb{P}^n$ ($n \geq 2$) uma hipersuperfície real analítica induzida por uma curva real analítica $S \subset G(n+1, n)$. Suponha que existe uma função real analítica não trivial r definida em uma vizinhança de V de M , tal que r anula em M . Então existe uma curva algébrica $C \subset G(n+1, n)$ tal que $S \subset C$ e a folheação de Levi \mathcal{L} em M^* é estendida pela web algébrica \mathcal{W}_C . Além disso, \mathcal{W}_C tem integral primeira meromorfa multivaluada da forma*

$$F(z, t) = A_0(z) + A_1(z)t + \dots + t^d,$$

onde $\deg(A_0) = \dots = \deg(A_d) = 1$.

Para provar o teorema acima, utilizamos um resultado de [21], que caracteriza hipersuperfícies induzidas por curvas. Este resultado será enunciado a seguir.

Teorema 9 (Lebl [21]). *Suponha que $M \subset \mathbb{P}^n$ é uma hipersuperfície real analítica induzida por uma curva $S \subset G(n+1, n)$ real analítica irredutível, e suponha que M tem um ponto singular dicrítico. Então existem um inteiro $1 \leq \ell < n$, coordenadas homogêneas $[z_0 : \dots : z_n]$, e um polinômio real bihomogêneo $\rho(z_0, \dots, z_\ell, \bar{z}_0, \dots, \bar{z}_\ell)$, tais que*

1. M é o conjunto de zeros de ρ em \mathbb{P}^n . Em particular, M é algébrica,
2. ρ define uma hipersuperfície real analítica Levi-flat $X \subset \mathbb{P}^\ell$, com singularidades não dicríticas, induzida por uma curva em $G(\ell + 1, \ell)$.

Outra ferramenta fundamental para a demonstração do Teorema A, é a construção feita em [32] na prova do Teorema 7. Um resumo dessa construção foi apresentado na Seção 1.4.

2.1 Teorema A

Teorema A. *Seja $M \subset \mathbb{P}^n$ ($n \geq 2$) uma hipersuperfície real analítica induzida por uma curva real analítica $S \subset G(n + 1, n)$. Suponha que existe uma função real analítica não trivial r definida em uma vizinhança de V de M , tal que r anula em M . Então existe uma curva algébrica $C \subset G(n + 1, n)$ tal que $S \subset C$ e a folheação de Levi \mathcal{L} em M^* é estendida pela web algébrica \mathcal{W}_C . Além disso, \mathcal{W}_C tem integral primeira meromorfa multivaluada da forma*

$$F(z, t) = A_0(z) + A_1(z)t + \cdots + t^d,$$

onde $\deg(A_0) = \cdots = \deg(A_d) = 1$.

Demonstração. Seja p uma singularidade de M , digamos $p = [1 : 0 : \cdots : 0]$, em coordenadas homogêneas em \mathbb{P}^n . Na carta $z_0 = 1$, vamos considerar coordenadas $\tilde{z} = (z_1, \dots, z_n)$, de modo que p corresponde a origem $0 \in \mathbb{C}^n$. Seja M_0 o germe de M em $0 \in \mathbb{C}^n$.

Temos duas possibilidades para a singularidade p em M : ou p é singularidade não dicrítica; ou p é singularidade dicrítica e, neste caso, M é algébrica pelo Teorema 9. Portanto, o germe M_0 satisfaz uma das afirmações abaixo:

1. $0 \in \mathbb{C}^n$ é singularidade não dicrítica de M_0 ;
2. M_0 é algébrica.

Ambos os casos satisfazem as hipóteses do Teorema 7, de modo que podemos concluir, em ambos os casos, que existe um germe de d -web holomorfa \mathcal{W}_p que estende a folheação de Levi em uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}^n$. Além disso \mathcal{W}_p tem integral primeira meromorfa multivaluada

$$f(\tilde{z}, t) = t^d + a_1(\tilde{z})t^{d-1} + \cdots + a_d(\tilde{z}),$$

onde a_k são germes de funções holomorfas em $(\mathbb{C}^n, 0)$.

Fazendo pullback pela carta $\{z_0 = 1\}$ obtemos uma vizinhança U de p em \mathbb{P}^n e um germe de d -web holomorfa, também denotado por \mathcal{W}_p , que estende a folheação de Levi em $U \subset \mathbb{P}^n$. Além disso, \mathcal{W}_p tem integral primeira meromorfa multivaluada em U

$$F([z], t) = t^d + A_1[z]t^{d-1} + \cdots + A_d[z],$$

onde $z \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ e $A_k[z] := a_k(\tilde{z})$ são germes de funções holomorfas em (\mathbb{P}^n, p) . Além disso, a d -web \mathcal{W}_p é dada pela eliminação de t no sistema $F = dF = 0$ (ou seja, via resultante $R(F, dF) = 0$), e o conjunto $Y = \{([z], t) \in U \times \mathbb{D}_\epsilon; F([z], t) = 0\}$ parametriza as variedades de Segre em U , com \mathbb{D}_ϵ disco em \mathbb{C} de centro 0 e raio ϵ .

Fixado $t \in \mathbb{D}_\epsilon$, vamos usar a notação $F_t := \{[z] \in U; F([z], t) = 0\}$. Seja $\pi : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$ a projeção natural. Afirmamos que as subvariedades $H_t := \{z \in \mathbb{C}^{n+1}; z = 0 \text{ ou } [z] \in F_t\}$ são semialgébricas (estão contidas em uma variedade algébrica), para cada t . O processo para verificar essa afirmação, é o mesmo utilizar na demonstração do Teorema de Chow, como veremos a seguir.

Primeiro observamos que se $z \in H_t$ então $\lambda z \in H_t$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}^*$, donde segue que $0 \in \overline{H_t}$. Pelo Teorema de Extensão de Remmer-Stein, $\overline{H_t}$ é um subconjunto analítico de \mathbb{C}^{n+1} . Além disso, \mathcal{O}_{n+1} é notheriano e, portanto, o ideal de $\overline{H_t}$ em \mathcal{O}_{n+1} , que denotamos por $I(\overline{H_t})$, é finitamente gerado.

Vamos supor que h_1, \dots, h_m são geradores de $I(\overline{H_t})$, definidos em um aberto comum $V \subset \mathbb{C}^{n+1}$.

Para cada $k = 1, \dots, m$, considere

$$h_k(z) = \sum_{\mu \geq 0} h_k^\mu(z),$$

onde h_k^μ é polinômio homogêneo de grau μ .

Seja $V_j = \{z \in V; h_k^\mu(z) = 0, \forall \mu \leq j \text{ e } k = 1, \dots, m\}$. Claramente $V_{j+1} \subset V_j$, para todo $j \geq 0$.

Assim, obtemos uma cadeia ascendente de ideais em \mathcal{O}_{n+1}

$$I(V_0) \subset \cdots \subset I(V_j) \subset I(V_{j+1}) \subset \cdots .$$

Novamente como \mathcal{O}_{n+1} é notheriano, existe j_0 tal que $I(V_j) = I(V_{j_0})$ para todo $j \geq j_0$. Consequentemente, $V_j = V_{j_0}$ para todo $j \geq j_0$. Assim segue que

$$\overline{H_t} \cap U = \{z \in U; h_k^\mu(z) = 0, \forall \mu \leq j_0 \text{ e } k = 1, \dots, m\}.$$

Isso conclue nossa afirmação de que H_t é semialgébrica.

Agora considere os conjuntos $W_t = \{z \in \mathbb{C}^{n+1}; h_k^\mu(z) = 0, \forall \mu \leq j_0, \text{ e } k = 1, \dots, m\}$. O germe de W_t coincide com o germe $\overline{H_t}$. Assim, as projeções $\pi(W_t)$ geram uma família de subvariedades algébricas em \mathbb{P}^n e, via resultante, obtemos uma d -web \mathcal{W} em \mathbb{P}^n . Como o germe \mathcal{W}_p é gerado pela família F_t e, por construção, F_t coincide com o germe $\pi(H_t)$, segue que \mathcal{W} estende a folheação de Levi em M^* .

Como \mathcal{W} é tangente a M , e as folhas de M são hiperplanos em \mathbb{P}^n , segue que \mathcal{W} tem grau 0. Pela Proposição 1.1, concluímos que \mathcal{W} é algébrica, ou seja, existe uma curva $C \subset \mathbb{P}^n$ de grau d tal que $\mathcal{W} = \mathcal{W}_C$. Além disso, como M é induzida pela curva real analítica irreduzível S , concluímos que $S \subset C$.

Isso conclue a demonstração do Teorema A. □

Capítulo 3

Webs em superfícies tangentes a hipersuperfícies Levi-flat

Nosso próximo problema trata da existência de singularidades dicríticas e integrais primeiras, para webs em superfícies compactas tangentes a Levi-flat. Nossa principal motivação foi o trabalho de Beltrán, Fernández-Pérez, Neciosup [2], no qual foram dadas condições para que uma folheação, que deixa invariante uma hipersuperfície Levi-flat, possua uma singularidade dicrítica com integral primeira local. Estas condições estão em termos da primeira classe de Chern do fibrado normal da folheação. Os principais resultados de [2] serão enunciados abaixo.

Teorema 10 (Beltrán, Fernández-Pérez, Neciosup [2]). *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa em uma variedade complexa compacta X de dimensão complexa 2, tangente a uma hipersuperfície M Levi-flat irredutível, com $\text{Sing}(\mathcal{F}) \subset M$. Suponha que $c_1^2(N\mathcal{F}) > 0$. Então existe uma singularidade dicrítica $p \in M$ tal que \mathcal{F} tem integral primeira meromorfa não constante em p .*

Teorema 11 (Beltrán, Fernández-Pérez, Neciosup [2]). *Seja \mathcal{F} uma folheação holomorfa em uma variedade complexa compacta X de dimensão complexa 2, tangente a uma hipersuperfície M Levi-flat irredutível. Suponha que a auto interseção $C \cdot C > 0$, onde $C \subset M$ é uma curva complexa compacta invariante por \mathcal{F} . Então existe uma singularidade dicrítica $p \in C \cap \text{Sing}(\mathcal{F})$ tal que \mathcal{F} tem integral primeira meromorfa não constante em p .*

Para provar o Teorema 10, os autores mostraram que, se todas as singularidades de \mathcal{F} são não

dicríticas, então a soma dos índices de Baum-Bott (que coincide com $c_1^2(N\mathcal{F})$ pela Fórmula de Baum-Bott) é sempre ≤ 0 . De fato, o germe de \mathcal{F} em uma singularidade p tem integral primeira holomorfa local (pelo Teorema 6 de Cerveau, Lins-Neto), em particular, é do tipo curva generalizada. Assim, pelo Teorema 4 (de Brunella), o índice de Baum-Bott coincide com a índice total de Camacho-Sad, isto é,

$$BB(\mathcal{F}, p) = CS(\mathcal{F}, S, p),$$

onde S é a soma de todas as separatrizes que passam por p . Para uma folheação com integral primeira holomorfa, têm-se que $BB(\mathcal{F}, p) = CS(\mathcal{F}, S, p) \leq 0$. O Teorema 11 é provado de modo análogo, utilizando o Teorema 2 de Camacho-Sad.

A existência de singularidades dicríticas no contexto do Teorema 10 não pode ser garantida se a condição $c_1^2(\mathcal{N}_{\mathcal{F}}) > 0$ não for satisfeita, como veremos no seguinte exemplo:

Exemplo 3.1. Considere a superfície de Hopf compacta (não projetiva)

$$X = \frac{\mathbb{C}^2 - \{(0, 0)\}}{\langle \Gamma_{a,b} \rangle},$$

onde $\Gamma_{a,b}$ é gerado pelas transformações $(z_1, z_2) \rightarrow (az_1, bz_2)$ onde $|a|, |b| > 1$. Levenberg, Yamaguchi provaram em [22] que o subconjunto $D \subset X$ definido por

$$D = \{(z_1, z_2) \in X : \text{Im}(z_2) > 0\}$$

é Stein para $b \in \mathbb{R}$.

O bordo $M = \{(z_1, z_2) \in X : \text{Im}(z_2) = 0\}$ é uma hipersuperfície Levi-flat e a folheação $\mathcal{F} : dz_2 = 0$ é tangente a M . Além disso, temos $c_1^2(N\mathcal{F}) = 0$ (ver [25]) e M não tem singularidades.

Como consequência dos resultados de [2], é possível verificar que as folheações de Jouanolou em \mathbb{P}^2 , definidas em coordenadas locais $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ por

$$\mathcal{J}_d : \omega_d = (y^d - x^{(d+1)})dy - (1 - x^d y)dx,$$

não deixam nenhuma hipersuperfície Levi-flat invariante. De fato, \mathcal{J}_d é uma folheação de grau d e tem $d^2 + d + 1$ singularidades todas não dicríticas. Mas pelo Exemplo 1.4, temos $c_1^2(N\mathcal{F}) = (d + 2)^2 > 0$. Se \mathcal{J}_d deixasse uma hipersuperfície Levi-flat invariante, entrariamos em contradição com o Teorema 10. Além disso, sabemos que estas folheações não admitem curvas algébricas invariantes (ver [23]).

Consideramos então, uma d -web holomorfa \mathcal{W} em uma superfície X complexa compacta, e M uma hipersuperfície Levi-flat em X invariante por \mathcal{W} . A primeira proposta deste capítulo é dar condições para que exista uma singularidade dicrítica $p \in X$ com integral primeira meromorfa local \mathcal{W} em p , similar aos resultados obtidos por Beltrán, Fernández-Pérez, Neciosup [2] no caso de folheações.

Para provar os teoremas deste capítulo, vamos considerar o levantamento de \mathcal{W} a $\tilde{X} = \mathbb{P}TX$ projetivização do espaço tangente de X . Este levantamento, define uma superfície complexa $W \subset \tilde{X}$ e a restrição da estrutura de contato de \tilde{X} a W define uma folheação holomorfa (possivelmente singular) \mathcal{F}_W em W , tal como na seção 1.3.5. Neste capítulo, seguiremos as notações já estabelecidas em tal seção. Observamos ainda, que se X é compacta então a superfície associada a d -web também é compacta, visto que $\pi|_W$ é uma aplicação própria. Além disso, uma vez que Δ é um conjunto analítico fechado de X , segue que Δ também é compacto.

Também precisaremos entender como é o levantamento de uma hipersuperfície real analítica $M \subset X$ ao espaço $\tilde{X} = \mathbb{P}TX$, via mapa $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$. Primeiro podemos fazer o levantamento de M^* (parte regular de M) da seguinte forma: para cada ponto $p \in M^*$, o hiperplano tangente complexo de M^* é dado por

$$T_p^{\mathbb{C}}M^* = T_pM^* \cap iT_pM^* \subset T_pX,$$

sendo assim, podemos considerar M' um subconjunto de \tilde{X} formado por pontos p de M^* e fibras dadas pela projetivização de $T_p^{\mathbb{C}}M^*$. Então para cada ponto $q \in \overline{M'}$, temos o seguinte resultado de Brunella [4].

Proposição 3.1. *Existem uma vizinhança $U_q \subset \tilde{X}$ de q e um subconjunto real analítico N_q de dimensão real 3 contendo $M' \cap U_q$.*

Afirmamos que tais construções locais podem ser juntadas para formar um conjunto real analítico $N \subset \tilde{X}$ de dimensão real 3 tal que $M' \subset N$. De fato, se $N_{q_1} \subset U_{q_1}$ e $N_{q_2} \subset U_{q_2}$ são como antes, com $M' \cap (U_{q_1} \cap U_{q_2}) \neq \emptyset$, então $N_{q_1} \cap (U_{q_1} \cap U_{q_2})$ e $N_{q_2} \cap (U_{q_1} \cap U_{q_2})$ tem componentes irredutíveis comuns contendo $M' \cap (U_{q_1} \cap U_{q_2})$. Assim N_{q_1} e N_{q_2} podem ser colados identificando estas componentes. Podemos então enunciar o seguinte lema.

Lema 3.1. *Seja $M \subset X$ uma hipersuperfície real analítica numa superfície complexa compacta X . Existe um conjunto real analítico $N \subset \tilde{X}$ de dimensão real 3 que contém M' , onde M' é o levantamento da parte regular de M por π .*

Utilizaremos também o seguinte lema sobre integrais primeiras de webs:

Lema 3.2 (Fernández-Pérez [12]). *Seja \mathcal{W} um germe de d -web em $(\mathbb{C}^n, 0)$, $n \geq 2$. Se $\mathcal{F}_{\mathcal{W}}$ tem integral primeira meromorfa não-constante, então \mathcal{W} tem integral primeira meromorfa não-constante.*

3.1 Teorema B

Agora estabelecemos o primeiro resultado deste capítulo.

Teorema B. *Seja \mathcal{W} uma d -web em uma superfície X complexa compacta definida por uma seção global $\omega \in H^0(X, \text{Sym}^d(\Omega_X^1) \otimes E)$. Suponhamos que se cumprem as seguintes condições:*

1. \mathcal{W} é tangente a uma hipersuperfície real analítica Levi-flat $M \subset X$,
2. a curva discriminante $\Delta \subset X$ está inteiramente contida em M ,
3. $(\pi^*(c_1(E)) \smile [\mathcal{R}_r] - c_1(\mathcal{V}) \smile [\mathcal{R}_r] - dc_1(L) \smile [\mathcal{R}_r]) \frown [W] > 0$, onde $\mathcal{W} = (W, \pi, \mathcal{F}_W)$, \mathcal{R}_r é o divisor da curva discriminante em W , \mathcal{V} é o subfibrado vetorial de TW de vetores tangentes as fibras de π e L é o fibrado tautológico de $\mathbb{P}TX$,
4. a curva discriminante Γ_W é invariante por \mathcal{F}_W .

Então \mathcal{W} é não-dicritica (no sentido de Cavalier-Lehmann) em alguma componente irredutível de Γ_W .

Mais ainda, \mathcal{W} possui uma singularidade $p \in \Delta$ com integral primeira meromorfa local.

Demonstração. Primeiro, vamos considerar \mathcal{W} definida pela tripla (W, π, \mathcal{F}_W) , onde π denota a projeção natural de \tilde{X} sobre X , W é a superfície compacta associada a \mathcal{W} e \mathcal{F}_W é uma folheação holomorfa em W cujas folhas são projetadas por π em folhas de \mathcal{W} . Pelo Lema 3.1, segue que existe uma subvariedade real analítica N de dimensão real 3 em $\mathbb{P}TX$ tal que $M' \subset N$, onde M' é o levantamento da parte regular de M por π . Afim de não recarregar a notação, denotamos a interseção $N \cap W$ por N .

Note que N é uma hipersuperfície real analítica em W e, mais ainda, N é Levi-flat. De fato, a condição de tangência entre \mathcal{W} e M implica que \mathcal{F}_W e N são tangentes num aberto denso em W . Isto é suficiente para afirmar que N é Levi-flat.

Além disso, desde que $\Delta \subset M$, temos que $\Gamma_W \subset N$. Sejam \mathcal{R} o divisor da curva discriminante Γ_W e \mathcal{R}_r a restrição de \mathcal{R} a superfície W . Afirmamos que

$$\mathcal{R}_r \cdot \mathcal{R}_r > 0.$$

De fato, aplicando a Proposição 1.5 e hipótese (3), obtemos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_r \cdot \mathcal{R}_r &= c_1(\mathcal{O}_W(\mathcal{R}_r)) \frown [\mathcal{R}_r] \\
 &= (c_1(\pi^{-1}(E) \otimes \mathcal{V}^* \otimes \check{L}^d) \smile [\mathcal{R}_r]) \frown [W] \\
 &= (\pi^{-1}(c_1(E)) \smile [\mathcal{R}_r] - c_1(\mathcal{V}) \smile [\mathcal{R}_r] - dc_1(L) \smile [\mathcal{R}_r]) \frown [W] > 0.
 \end{aligned}$$

Como a curva Γ_W é invariante por \mathcal{F}_W , a fórmula de Camacho-Sad (veja Teorema 2)

$$\sum_{q \in \Gamma_W \cap \text{Sing}(\mathcal{F}_W)} CS(\mathcal{F}_W, \Gamma_W, q) = \mathcal{R}_r \cdot \mathcal{R}_r > 0$$

implica que o conjunto $\Gamma_W \cap \text{Sing}(\mathcal{F}_W)$ é finito não-vazio. Agora seja q um ponto em $\Gamma_W \cap \text{Sing}(\mathcal{F}_W)$ e fixemos uma componente irredutível Γ_q de Γ_W que contém q . Fixemos também um sistema de coordenadas locais (x, y, p) . Então a folheação \mathcal{F}_W em uma vizinhança do ponto q pode ser definida pelo campo vetorial

$$Z_{(x,y,p)} = F_p \left(\frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial y} \right) - (F_x + pF_y) \frac{\partial}{\partial p}.$$

Então a expressão $(F_x + pF_y)|_{\Gamma_q}$ é uma função não identicamente nula, pois caso contrário, \mathcal{F}_W não teria singularidades em uma vizinhança de q . Portanto \mathcal{W} é uma d -web não dicrítica, no sentido de Cavalier-Lehmann, ao longo de Γ_q .

Finalmente, desde que \mathcal{F}_W é tangente a N , $\Gamma_W \subset N$ e $\mathcal{R}_r \cdot \mathcal{R}_r > 0$, segue pelo Teorema 11 que \mathcal{F}_W possui uma singularidade $q \in \Gamma_W \cap \text{Sing}(\mathcal{F}_W)$ com integral primeira meromorfa não constante em uma vizinhança de q . E segue-se do Lema 3.2 que \mathcal{W} tem integral primeira meromorfa local em $\pi(q) = p \in \Delta$. \square

A seguir, daremos um exemplo de 2-web em \mathbb{P}^2 que se encaixa nas condições do Teorema B.

Exemplo 3.2. Seja \mathcal{W} a 2-web em \mathbb{P}^2 definida em coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ por

$$\omega = ydy^2 + xdydx$$

Note que $\mathcal{W} = \mathcal{W}(xdx + ydy, dy)$. Então as folhas locais de \mathcal{W} são dadas pelas sobreposições das curvas de nível $x^2 + y^2 = c_1$ e $y = c_2$, onde $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. A curva discriminante é $\Delta = \{x = 0\}$.

Considere a hipersuperfície real analítica

$$M = \{\text{Re}(x^2 + y^2) = 0\} \cup \{\text{Re}(y) = 0\}.$$

Observamos que M é Levi-flat e tangente a \mathcal{W} . Além disso, M se estende a uma hipersuperfície Levi-flat em \mathbb{P}^2 e claramente $\Delta \subset M$.

A superfície W associada a \mathcal{W} é dada por

$$W = \{F(x, y, p) = yp^2 + xp = 0\}$$

e a curva criminante é dada por $\Gamma_W = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, onde $\Gamma_1 = \{p = x = 0\}$ e $\Gamma_2 = \{x = y = 0\}$ são componentes irredutíveis de Γ_W .

A folheação \mathcal{F}_W é dada por

$$\alpha = (dy - pdx)|_W = -xdp + p(p^2 + 1)dx,$$

e tem integral primeira meromorfa

$$f(x, p) = \frac{x^2(p^2 + 1)}{p^2}.$$

Observamos ainda que a seção $F_x + pF_y = p(p^2 + 1)$ não é identicamente nula ao longo de Γ_2 . Portanto \mathcal{W} é não-dicrítica ao longo de Γ_2 .

3.2 Teorema C

No caso de uma d -web lisa e dicrítica, a folheação associada \mathcal{F}_W a \mathcal{W} é regular. Neste caso, provamos a existência de integral primeira multivaluada global para \mathcal{W} , com a hipótese de que $X - \Delta$ é uma variedade Stein. De modo mais preciso, provamos o seguinte resultado.

Teorema C. *Seja \mathcal{W} uma d -web lisa e dicrítica (no sentido de Cavalier-Lehmann) em uma superfície complexa compacta X tangente a uma hipersuperfície real analítica Levi-flat $M \subset X$. Vamos supor as seguintes condições:*

1. *a curva discriminante Δ de \mathcal{W} está contida em M ,*
2. *$X - \Delta$ é uma variedade Stein,*
3. *a curva criminante Γ_W é não invariante por \mathcal{F}_W .*

Então \mathcal{W} admite uma integral primeira meromorfa multivaluada.

Demonstração. Novamente vamos considerar \mathcal{W} definida pela tripla (W, π, \mathcal{F}_W) . Como W é lisa, temos $W_0 = W - \Gamma_W$ e $X_0 = \pi(W_0) = X - \Delta$. Por hipótese X_0 é uma variedade Stein e, como $\pi : W_0 \rightarrow X_0$ é um mapa de recobrimento de d -folhas, segue que W_0 é também variedade Stein.

Uma vez que \mathcal{W} é dicrítica e W é lisa, a folheação \mathcal{F}_W é regular em W .

Pelo Lema 3.1, existe uma hipersuperfície real analítica Levi-flat $N \subset W$. Como $\Delta \subset M$, temos que $\Gamma_W \subset N$. Seja $\tilde{m} \in \Gamma_W \subset N$. Pelo fato de Γ_W ser não invariante por \mathcal{F}_W e usando o Teorema de Cartan (ver Teorema 5), segue que existem coordenadas locais $(x, y) \in U$ em W tais que

$$\Gamma_W \cap U = \{y = 0\} \quad \text{e} \quad N \cap U = \{\text{Im}(x) = 0\},$$

de modo que $\mathcal{F}_W|_U$ é dada por $dx = 0$. Como \mathcal{F}_W é regular, para cada $\tilde{m} \in \Gamma_W$ existe apenas uma folha $L_{\tilde{m}}$ de \mathcal{F}_W que passa por \tilde{m} . Assim, \mathcal{F}_W é definida localmente por uma fibração $\tilde{f} : U_{\tilde{m}} \rightarrow \Gamma_W$ em uma vizinhança $U_{\tilde{m}} \subset W$ de cada ponto $\tilde{m} \in \Gamma_W$. Note que $\tilde{f}(L_{\tilde{m}}) = L_{\tilde{m}} \cap \Gamma_W$.

Conseqüentemente, via colagem, encontramos uma vizinhança $U \subset W$ de Γ_W tal que \mathcal{F}_W é definida por uma fibração $\tilde{f} : U \rightarrow \Gamma_W$ em todo U .

Uma vez que W_0 é Stein, pelo Teorema de Extensão de Cartan, a fibração \tilde{f} se estende a uma fibração global $f : W \rightarrow \Gamma_W$. Essencialmente, essa fibração funciona como uma projeção de folhas de \mathcal{F}_W sobre a curva Γ_W . De fato, como W_0 não contém conjuntos analíticos, toda folha de \mathcal{F}_W intersecta a curva Γ_W em um único ponto (pois \mathcal{F}_W é regular).

Sejam $g : \Gamma_W \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ um mapa racional e considere $h := g \circ f$. O conjunto

$$Z = \{(\tilde{m}, p) \in W \times \mathbb{P}^1; \tilde{m} \in (g \circ f)^{-1}(p)\}$$

define uma correspondência meromorfa para \mathcal{W} (veja Definição 1.7), pois folhas de \mathcal{F}_W projetam em folhas de \mathcal{W} . Isso conclue a demonstração do Teorema C. □

Quando $X = \mathbb{P}^2$, o conjunto $X - \Delta$, onde Δ é a curva discriminante de uma d -web \mathcal{W} em \mathbb{P}^2 , é sempre uma variedade Stein. Então, em particular, temos o seguinte resultado.

Corolário 1. *Seja \mathcal{W} uma d -web lisa e dicrítica em \mathbb{P}^2 tangente a uma hipersuperfície real analítica Levi-flat $M \subset \mathbb{P}^2$. Suponha as seguintes condições:*

1. a curva discriminante Δ de \mathcal{W} está contida em M ,
2. a curva discriminante Γ_W é não invariante por \mathcal{F}_W .

Então \mathcal{W} admite uma integral primeira meromorfa global multivaluada.

Uma observação interessante é que para uma d -web holomorfa \mathcal{W} em \mathbb{P}^2 , tangente a uma hipersuperfície real analítica Levi-flat $M \subset \mathbb{P}^2$, a curva discriminante Δ sempre intersecta a $\overline{M^*}$. Com efeito, sabemos que todas as componentes conexas de $\mathbb{P}^2 \setminus \overline{M^*}$ são variedades Stein, (veja Teorema 2 de [14]). Logo a curva Δ não pode estar inteiramente contida em $\mathbb{P}^2 \setminus \overline{M^*}$. Portanto, temos

$$\Delta \cap \overline{M^*} \neq \emptyset.$$

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.3. Considere a família de hiperplanos $H_t := \{X + tY + t^2Z = 0; t \in \mathbb{C}\}$ em coordenadas $(X, Y, Z) \in \mathbb{C}^3$. Por eliminação de t no sistema $G_t = dG_t = 0$ (ou seja, calculando a resultante $R[G_t, dG_t]$), obtemos um germe de 2-web, que se estende a 2-web global \mathcal{W} de grau 0 em \mathbb{P}^2 , cujas folhas são os hiperplanos H_t , com $t \in \mathbb{C}$. Além disso, \mathcal{W} é tangente a hipersuperfície Levi-flat definida por $R[G_t, \overline{G_t}]$, cujas folhas da folheação de Levi são os hiperplanos H_t , com $t \in \mathbb{R}$.

Em coordenadas homogêneas $[X : Y : Z]$, a 2-web \mathcal{W} é dada pela forma 2-simétrica definida por

$$\omega = \det \begin{pmatrix} X & Y & Z & 0 \\ 0 & X & Y & Z \\ dX & dY & dZ & 0 \\ 0 & dX & dY & dZ \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\omega = Z^2(dX)^2 + XZ(dY)^2 + X^2(dZ)^2 + (Y^2 - 2XZ)dXdZ - XYdYdZ - YZdXdY.$$

Na carta $Z = 1$, denotamos por (x, y) as coordenadas afins de \mathbb{P}^2 , então temos

$$\mathcal{W} : (dx)^2 - ydxdy + x(dy)^2 = 0.$$

A superfície associada $W = \{F(x, y, p) = xp^2 - yp + 1 = 0\}$ é lisa e a curva criminante, definida por $\Gamma_W = \{xp^2 - 1 = y - 2xp = 0\}$, também é lisa. Além disso, \mathcal{W} é dicrítica, pois

$$F_x + pF_y = p^2 + p(-p) = 0.$$

Assim, a folheação associada \mathcal{F}_W é definida pelo campo $Z_{x,y,p} = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial y}$ e não tem singularidades. Além disso, Γ_W não é invariante por \mathcal{F}_W . Por construção, \mathcal{W} admite integral primeira meromorfa

dada por

$$P([X : Y : Z], t) = t^2 Z + tY + X.$$

Exemplo 3.4. Em \mathbb{P}^2 , com coordenadas homogêneas $[X : Y : Z]$, considere a 1-web (folheação) dada pela forma $\mathcal{W} : YdX - XdY = 0$. Na carta $Z = 1$, denotemos por (x, y) as coordenadas afins. Nestas coordenadas, \mathcal{W} é folheação radial $ydx - xdy = 0$. A superfície associada $W = \{F(x, y, p) = xp - y - 0\}$ é lisa e a curva dicrítica $\Gamma_W = \{x = y = 0\}$ também é lisa (é o eixo p). A web é dicrítica, pois $F_x + pF_y = p - p = 0$ se anula em W . A folheação associada \mathcal{F}_W é definida por $Z_{x,y,p} = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial y}$ e é regular. Finalmente, é claro que \mathcal{W} admite uma integral primeira racional

$$P([X : Y : Z], t) = tX - Y.$$

Agora veremos um exemplo onde o Corolário 1 continua sendo válido, mesmo quando a web é singular. Com base neste exemplo, podemos conjecturar que o Corolário 1 pode ser verdadeiro mesmo no caso de webs singulares.

Exemplo 3.5. Em coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ de \mathbb{P}^2 , considere a hipersuperfície real analítica

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; (|y|^2(x + \bar{x})^2 - (\bar{y} + y)^2)^2 = 4|y|^2\}.$$

A hipersuperfície M é obtida a partir da equação 2-valuada

$$\operatorname{Re}\left(x \pm \frac{1}{\sqrt{y}}\right) = 0$$

e foi estudada por Shafikov-Sukhov em [32]. Naturalmente M se estende a \mathbb{P}^2 como hipersuperfície e é Levi-flat, pois M é folheada pelas subvariedades

$$L_c : y = \frac{1}{(x+c)^2}, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Derivando implicitamente a equação (3.1), notamos que M é tangente à 2-web \mathcal{W} , dada em coordenadas afins por

$$\omega = dy^2 - 4y^3 dx^2 = 0.$$

A superfície associada a web \mathcal{W} é definida nas coordenadas (x, y, p) por

$$W = \{(x, y, p) : F(x, y, p) = p^2 - 4y^3 = 0\}$$

e a curva criminante é dada por $\Gamma_W = \{p = y = 0\}$. Observamos que W é singular ao longo da curva Γ_W . Observamos ainda que \mathcal{W} é dicrítica, pois a função $F_x + pF_y = 12y^3p$ é identicamente nula ao longo de Γ_W . Além disso, a folheação \mathcal{F}_W é definida por

$$\alpha = 4ydp - 6p^2dx = 0.$$

Assim, a curva Γ_W é não invariante por \mathcal{F}_W . Finalmente, por construção, \mathcal{W} admite a integral primeira meromorfa multivaluada

$$P([X : Y : Z], t) = t^2Y + 2Zt + X^2Y - Z^3.$$

Capítulo 4

Hipersuperfícies associadas a mapas com fibração de Milnor

Neste capítulo, estudamos famílias de hipersuperfícies reais analíticas associadas a mapas reais que satisfazem propriedades de fibração de Milnor na origem.

Um mapa real analítico $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, $n > p$, satisfaz a *condição de Milnor* na origem, se Df tem posto p em uma vizinhança perfurada de $0 \in \mathbb{R}^n$. Neste caso, J. Milnor provou em [26] que, para toda esfera suficientemente pequena $\mathbb{S}_\epsilon \subset \mathbb{R}^n$, a aplicação

$$\psi := \frac{f}{\|f\|} : \mathbb{S}_\epsilon - N_K \rightarrow \mathbb{S}^{p-1} \quad (4.1)$$

é um fibrado localmente trivial, onde $K = f^{-1}(0) \cap \mathbb{S}_\epsilon$ é o link da singularidade e N_K é uma vizinhança tubular de K em \mathbb{S}_ϵ .

O mapa ψ sempre pode ser estendido a $\mathbb{S}_\epsilon - K$ como projeção de um fibrado, mas essa extensão não é necessariamente $\frac{f}{\|f\|}$. Quando f satisfaz a condição de Milnor na origem e, além disso, o mapa $\frac{f}{\|f\|} : \mathbb{S}_\epsilon - K \rightarrow \mathbb{S}^{p-1}$ é um fibrado para toda esfera suficientemente pequena $\mathbb{S}_\epsilon \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que f satisfaz a *condição forte de Milnor* na origem. Mapas deste tipo, induzem uma “decomposição livro aberto” na esfera \mathbb{S}_ϵ .

J. Seade apresentou em [30] e [31] um método para construir famílias de mapas $f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^2$ não triviais que satisfazem a condição forte de Milnor na origem. Essa construção é dada da seguinte maneira: consideramos campos vetoriais holomorfos $G = (G_1, \dots, G_n)$ e $X = (X_1, \dots, X_n)$ com singularidade

isolada na origem, tomamos $\psi_{G,X}(z) := \langle G(z), X(z) \rangle$ o produto hermitiano usual de G e X , e então buscamos condições sobre os campos G e X para que $\psi_{G,X}$ satisfaça condição de Milnor ou condição forte de Milnor na origem.

O argumento de $i\langle G(z), X(z) \rangle$ é o ângulo pelo qual rotacionamos o campo G para que este fique ortogonal ao campo X . Assim, a variedade real analítica $\psi^{-1}(0)$, chamada de *variedade polar de G e X* é o conjunto dos pontos onde G e X são ortogonais. Consequentemente, na variedade polar, as folheações holomorfas definidas pelos campos G e X são transversais e sua interseção origina uma folheação por curvas reais em $\psi^{-1}(0)$. No caso particular em que X é o campo gradiente de uma função real analítica $f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^2$, a variedade polar é o conjunto dos pontos nos quais as folheações definidas pelo campo G e pelas curvas de nível de f são tangentes. Além disso, $\psi^{-1}(0)$ é interseção completa definida pelas equações $\operatorname{Re} \langle G(z), X(z) \rangle = \operatorname{Im} \langle G(z), X(z) \rangle = 0$.

O nosso problema consiste em tomar

$$M = \{\operatorname{Re} \langle G(z), X(z) \rangle = 0\}$$

e verificar sob quais condições nos campos G e X a hipersuperfície M é Levi-flat. Especificamente, o problema é o seguinte:

Problema 1. *Considere $F(z) := \operatorname{Re} \langle G(z), X(z) \rangle$ e M a hipersuperfície real analítica definida por $M := \{F = 0\}$. Queremos encontrar condições sobre os campos G e X para que M seja Levi-flat.*

Em [30], J. Seade provou que se X é o campo radial e $G = (\lambda_1 z_1^{a_1}, \dots, \lambda_n z_n^{a_n})$, então $\psi_{G,X}$ satisfaz a condição de Milnor, para quaisquer $\lambda_k \in \mathbb{C}^*$ e a_k inteiros > 1 . Dada $\sigma \in S_n$ uma permutação do conjunto \underline{n} , as famílias de campos vetoriais da forma $G = (\lambda_1 z_{\sigma_1}^{a_1}, \dots, \lambda_n z_{\sigma_n}^{a_n})$ e $X = (\beta_1 z_1^{b_1}, \dots, \beta_n z_n^{b_n})$, que satisfazem condição de Milnor ou condição forte de Milnor na origem, foram classificados por Ruas, Seade, Verjovsky [29], pelos seguintes resultados.

Teorema 12. *Assuma que $a_k > 1$ para todo $k \in \underline{n}$. Então $\psi_{G,x}$ satisfaz a condição de Milnor na origem $0 \in \mathbb{C}^n$ se, e somente se, uma das condições é satisfeita:*

1. a permutação σ é a identidade, $G = (\lambda_1 z_1^{a_1}, \dots, \lambda_n z_n^{a_n})$ e $a_k \neq b_k$ para cada $k \in \underline{n}$,
2. se σ é decomposta em ciclos $\sigma_1, \dots, \sigma_m$, onde cada σ_j é uma permutação de tamanho o_j , $o_1 + \dots + o_m = n$, então: para cada $j = 1, \dots, m$ tal que $o_j = 1$ devemos ter os expoentes correspon-

dentos satisfazendo $a_k \neq b_k$; para cada $j = 1, \dots, m$ tal que $o_j > 1$ devemos ter os expoentes b_k correspondentes destas componentes todos iguais a 1.

Teorema 13. *Sejam $G = (\lambda_1 z_{\sigma_1}^{a_1}, \dots, \lambda_n z_{\sigma_n}^{a_n})$ e $X = (\beta_1 z_1^{b_1}, \dots, \beta_n z_n^{b_n})$ campos vetoriais como acima, e assumamos que as seguintes condições são satisfeitas:*

1. *para cada ciclo de σ de tamanho 1, os expoentes correspondentes satisfazem $a_k \neq b_k$,*
2. *para cada ciclo de tamanho $r > 1$, r ímpar, temos $a_k \geq 1$, $b_k = 1$ e pelo menos um a_k é estritamente maior que 1, para cada $k = 1, \dots, r$,*
3. *para cada ciclo de tamanho $r > 1$, r par, para cada $k = 1, \dots, r$, temos $a_k \geq 1$, $b_k = 1$ e pelo menos dois a_k , digamos a_{k_1} e a_{k_2} são estritamente maiores que 1, com k_1 sendo ímpar e k_2 sendo par no ciclo.*

Então $\psi_{G,X}$ satisfaz a condição forte de Milnor em $0 \in \mathbb{R}^{2n}$. Isto é, para toda esfera suficientemente pequena $\mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$, a função:

$$\phi = \frac{\psi}{\|\psi\|} : \mathbb{S}_\epsilon^{2n-1} - K_\epsilon \rightarrow \mathbb{S}^1,$$

é o mapa projeção de um fibrado C^∞ localmente trivial.

O Teorema 13 é uma versão parcial do Teorema 2.7 provado em [29].

Os resultados obtidos do Problema 1 foram os seguintes:

Teorema D. *Sejam $G = (z_1^{a_1}, z_2^{a_2})$ e $X = (z_1^{b_1}, z_2^{b_2})$, com $a_1 > b_1 \geq 1$ e $a_2 > b_2 \geq 1$ inteiros positivos.*

Defina $F(z) := 2\operatorname{Re} \langle G(z), X(z) \rangle$ e $M := \{F = 0\}$. Então a hipersuperfície M não é Levi-flat.

Teorema E. *Sejam $G = (z_1^{a_1}, \dots, z_n^{a_n})$ e $X = (z_1^{b_1}, \dots, z_n^{b_n})$, com $a_k, b_k \geq 1$ inteiros, para $k = 1, \dots, n$*

e $n \geq 3$. Defina $F(z) := 2\operatorname{Re} \langle G(z), X(z) \rangle$ e $M := \{F = 0\}$. Então M não é Levi-flat.

Teorema F. *Considere os campos holomorfos $G = (z_1^a, z_2^b)$ e $X = (z_2^b, z_1^a)$ com a, b inteiros positivos e*

$M = \{F = 0\}$, onde $F = \langle G, X \rangle$. A hipersuperfície M é Levi-flat.

Teorema G. *Considere os campos vetoriais $G = (z_1^{a_1}, z_2^{a_2})$ e $X = (z_2^{b_2}, z_1^{b_1})$, onde $a_1 \geq b_1$ e $a_2 \geq b_2$ são*

inteiros positivos satisfazendo $a_1 b_2 = a_2 b_1$. Vamos considerar a hipersuperfície $M := \{\operatorname{Re} \langle G, X \rangle = 0\}$.

Então M é Levi-flat se, e somente se, $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$.

Teorema H. *Considere os campos vetoriais $G = (z_1^{a_1}, \dots, z_n^{a_n})$ e $X = (z_{\sigma_1}^{b_{\sigma_1}}, \dots, z_{\sigma_n}^{b_{\sigma_n}})$, onde $a_k \geq b_k$ são inteiros positivos e $n \geq 3$. Vamos supor que para algum $\ell \in \underline{n}$, os inteiros $a_\ell, b_\ell, a_{\sigma_\ell}, b_{\sigma_\ell}$ satisfazem as seguintes condições: $a_\ell > b_\ell$ e $a_\ell b_{\sigma_\ell} = b_\ell a_{\sigma_\ell}$. Então, a hipersuperfície $M := \{\text{Re} \langle G, X \rangle = 0\}$ não é Levi-flat.*

Na Seção 4.1, estudaremos o conjunto singular de M , no caso em que os campos G e X são da forma $G = (z_1^{a_1}, \dots, z_n^{a_n})$ e $X = (z_1^{b_1}, \dots, z_n^{b_n})$, com $a_k > b_k \geq 1$ para todo $k \in \underline{n}$. Nas Seções 4.2 e 4.3, vamos demonstrar os Teoremas D e E, respectivamente. Na Seção 4.4, estudaremos o conjunto singular de M , no caso em que os campos G e X são da forma $G = (z_1^{a_1}, z_2^{a_2})$ e $X = (z_{\sigma_1}^{b_{\sigma_1}}, z_{\sigma_2}^{b_{\sigma_2}})$. Nas Seções 4.5, 4.6 e 4.7, vamos demonstrar os Teoremas F, G e H, respectivamente. Finalmente, na Seção 4.8, veremos alguns exemplos em dimensão 2, para campos da forma $(\lambda_1 z_1^{a_1}, \lambda_2 z_1^{a_2})$, que não foram tratados nas seções anteriores.

Antes de passar aos resultados deste capítulo, vamos relembrar alguns fatos que já foram apresentados no Capítulo 1 e que serão úteis nas próximas seções.

1. Dada $F \in \mathcal{A}_{n, \mathbb{R}}$ a complexificação de F é definida por

$$F_{\mathbb{C}}(z, w) = \sum_{\mu, \nu} F_{\mu, \nu} z^\mu w^\nu,$$

onde

$$F(z) = \sum_{\mu, \nu} F_{\mu, \nu} z^\mu \bar{z}^\nu$$

é a série de potência de F .

2. Se $M = \{F = 0\}$ então a complexificação de M é definida por $M_{\mathbb{C}} = F_{\mathbb{C}} = 0$.

3. $dF_{\mathbb{C}} = \alpha + \beta$ e $\eta_{\mathbb{C}} = i(\alpha - \beta)$, onde

$$\alpha = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_{\mathbb{C}}}{\partial z_k} dz_k \text{ e } \beta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F_{\mathbb{C}}}{\partial w_k} dw_k.$$

4. A forma de Levi $\eta|_{M^*}$ é integrável se, e somente se, $\eta_{\mathbb{C}}|_{M_{\mathbb{C}}^*}$ é integrável.

5. $\eta_{\mathbb{C}}|_{M_{\mathbb{C}}^*}$ é integrável se, e somente se, $\alpha(z, w) \wedge d\alpha(z, w) \wedge \beta(z, w) = 0$ para todo $(z, w) \in M_{\mathbb{C}}$.

4.1 O caso dos campos $G = (z_1^{a_1}, \dots, z_n^{a_n})$ e $X = (z_1^{b_1}, \dots, z_n^{b_n})$

Nesta seção faremos algumas considerações para o caso em que os campos G e X são dados por $G = (z_1^{a_1}, \dots, z_n^{a_n})$ e $X = (z_1^{b_1}, \dots, z_n^{b_n})$, com a_k, b_k inteiros positivos tais que $a_k \geq b_k$, para $k \in \underline{n}$. Neste

caso, temos o produto hermitiano de G e X dado por

$$\langle G(z), X(z) \rangle = \sum_{k=1}^n z_k^{a_k} \bar{z}_k^{b_k}$$

e

$$2F(z) = \sum_{k=1}^n z_k^{a_k} \bar{z}_k^{b_k} + z_k^{b_k} \bar{z}_k^{a_k}. \quad (4.2)$$

Observamos que a hipersuperfície $M = \{F = 0\}$ é degenerada se $a_k = b_k$ para todo $k \in \underline{n}$, pois neste caso teríamos

$$F = \sum_{k=1}^n 2|z_k|^{a_k}$$

consequentemente, $M = \{0\}$. Portanto, não se considera $a_k = b_k$ para todo $k \in \underline{n}$.

A respeito do conjunto singular de M , temos o seguinte resultado:

Proposição 4.1. *Considere os campos $G = (z_1^{a_1}, \dots, z_n^{a_n})$ e $X = (z_1^{b_1}, \dots, z_n^{b_n})$, com $a_k \geq b_k \geq 1$, e a hipersuperfície $M = \{F = 0\}$, onde $F = 2\operatorname{Re} \langle G(z), X(z) \rangle$. Então $\operatorname{Sing}(M) = \{0\}$.*

Demonstração. Tomando as derivadas parciais de F temos

$$\partial F = \sum_{k=1}^n \left(a_k z_k^{(a_k-1)} \bar{z}_k^{b_k} + b_k z_k^{(b_k-1)} \bar{z}_k^{a_k} \right) dz_k$$

e

$$\bar{\partial} F = \sum_{k=1}^n \left(b_k z_k^{a_k} \bar{z}_k^{(b_k-1)} + a_k z_k^{b_k} \bar{z}_k^{(a_k-1)} \right) dz_k.$$

Desse modo, $dF(z) := \partial F(z) + \bar{\partial} F(z) = 0$ se, e somente se,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 z_1^{(a_1-1)} \bar{z}_1^{b_1} + b_1 z_1^{(b_1-1)} \bar{z}_1^{a_1} = 0 \\ b_1 z_1^{a_1} \bar{z}_1^{(b_1-1)} + a_1 z_1^{b_1} \bar{z}_1^{(a_1-1)} = 0 \\ \vdots \\ a_n z_n^{(a_n-1)} \bar{z}_n^{b_n} + b_n z_n^{(b_n-1)} \bar{z}_n^{a_n} = 0 \\ b_n z_n^{a_n} \bar{z}_n^{(b_n-1)} + a_n z_n^{b_n} \bar{z}_n^{(a_n-1)} = 0 \end{array} \right.$$

Claramente $0 \in \operatorname{Sing}(M)$. Agora vamos denotar $I := \{k \in \underline{n}; a_k = b_k\}$ e $J := \{k \in \underline{n}; a_k > b_k\}$.

Temos $\underline{n} = I \cup J$ e $I \cap J = \emptyset$. Considere as seguintes equações do sistema acima:

$$a_k z_k^{(a_k-1)} \bar{z}_k^{b_k} + b_k z_k^{(b_k-1)} \bar{z}_k^{a_k} = 0 \quad (4.3)$$

$$b_k z_k^{a_k} \bar{z}_k^{(b_k-1)} + a_k z_k^{b_k} \bar{z}_k^{(a_k-1)} = 0 \quad (4.4)$$

Se $k \in I$ as equações acima são reescritas por

$$2a_k z_k^{(a_k-1)} \bar{z}_k^{a_k} = 0$$

$$2a_k z_k^{a_k} \bar{z}_k^{(a_k-1)} = 0$$

e segue que $z = (z_1, \dots, z_n) \in \text{Sing}(M)$ implica $z_k = 0$, para todo $k \in I$. Agora, vamos supor que $z = (z_1, \dots, z_n) \in \text{Sing}(M)$ e $z_k \neq 0$, para algum $k \in J$. Da equação (4.3) obtemos

$$a_k z_k^{(a_k-1)} \bar{z}_k^{b_k} = -b_k z_k^{(b_k-1)} \bar{z}_k^{a_k},$$

ou seja,

$$\frac{a_k}{b_k} = - \left(\frac{\bar{z}_k}{z_k} \right)^{c_k}.$$

Da equação (4.4) obtemos

$$b_k z_k^{a_k} \bar{z}_k^{(b_k-1)} = -a_k z_k^{b_k} \bar{z}_k^{(a_k-1)},$$

ou seja,

$$\frac{b_k}{a_k} = - \left(\frac{\bar{z}_k}{z_k} \right)^{c_k}.$$

Desse modo, das equações (4.3) e (4.4) obtemos

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{b_k}{a_k},$$

mas isso é uma contradição, pois $a_k > b_k$.

Portanto, $\text{Sing}(M) = \{0\}$ e $M^* = M - \{0\}$. □

Antes de passar para as demonstrações dos Teoremas D e E, provaremos um lema técnico que será usado na demonstração do Teorema E.

Lema 4.1. *Considere as funções*

$$g_j(z, w) = a_j w_j^{(a_j-1)} z_j^{b_j} + b_j w_j^{(b_j-1)} z_j^{a_j}$$

$$f_k(z, w) = a_k z_k^{(a_k-1)} w_k^{b_k} + b_k z_k^{(b_k-1)} w_k^{a_k}$$

$$h_\ell(z, w) = a_\ell b_\ell (z_\ell^{(a_\ell-1)} w_\ell^{(b_\ell-1)} + z_\ell^{(b_\ell-1)} w_\ell^{(a_\ell-1)}),$$

onde $a_m > b_m \geq 1$ são inteiros para cada $m = 1, \dots, n$. Para cada tripla (j, k, ℓ) de índices $j, k, \ell = 1, \dots, n$ existe um ponto $(z_0, w_0) \in M_C$ tal que

$$f_k(z_0, w_0) g_j(z_0, w_0) h_\ell(z_0, w_0) \neq 0.$$

Demonstração. Neste caso, a complexificação de F é dada por

$$F_{\mathbb{C}}(z, w) = \sum_{k=1}^n z_k^{a_k} w_k^{b_k} + w_k^{a_k} z_k^{b_k}. \quad (4.5)$$

Para cada tripla (j, k, ℓ) , vamos escolher $(z_0, w_0) = (z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n)$ satisfazendo:

1. $z_j = z_k = z_\ell = w_j = w_k = 1$,
2. w_ℓ tal que $w_\ell^{b_\ell} + w_\ell^{a_\ell} = -4$,
3. $z_m = w_m = 0$ para os demais índices.

Observamos que $(z_0, w_0) \in M_{\mathbb{C}}$. De fato, temos

$$\begin{aligned} F_{\mathbb{C}}(z_0, w_0) &= z_j^{a_j} w_j^{b_j} + w_j^{a_j} z_j^{b_j} + z_k^{a_k} w_k^{b_k} + w_k^{a_k} z_k^{b_k} + z_\ell^{a_\ell} w_\ell^{b_\ell} + w_\ell^{a_\ell} z_\ell^{b_\ell} \\ &= 4 + w_\ell^{b_\ell} + w_\ell^{a_\ell} \end{aligned}$$

então $F_{\mathbb{C}}(z_0, w_0) = 0$.

Do item 3. acima, obtemos

$$w_\ell^{b_\ell-1} + w_\ell^{a_\ell-1} = -\frac{4}{w_\ell}.$$

Além disso, temos

$$g_j(z_0, w_0) = a_j + b_j,$$

$$f_k(z_0, w_0) = a_k + b_k,$$

$$h_\ell(z_0, w_0) = a_\ell b_\ell \left(w_\ell^{(b_\ell-1)} + w_\ell^{(a_\ell-1)} \right) = -\frac{4a_\ell b_\ell}{w_\ell}.$$

Segue que

$$f_k(z_0, w_0)g_j(z_0, w_0)h_\ell(z_0, w_0) = -\frac{4a_\ell b_\ell}{w_\ell}(a_j + b_j)(a_k + b_k) \neq 0.$$

□

4.2 Teorema D

Teorema D. *Sejam $G = (z_1^{a_1}, z_2^{a_2})$ e $X = (z_1^{b_1}, z_2^{b_2})$, com $a_1 > b_1 \geq 1$ e $a_2 > b_2 \geq 1$ inteiros positivos.*

Defina $F(z) := 2\operatorname{Re} \langle G(z), X(z) \rangle$ e $M := \{F = 0\}$. Então a hipersuperfície M não é Levi-flat.

Demonstração. Para provar o resultado acima, vamos estudar a integrabilidade da 1-forma α em $M_{\mathbb{C}}^*$.

Sendo assim, vamos estabelecer alguns fatos sobre $M_{\mathbb{C}}$ e $\eta_{\mathbb{C}}$.

Observamos que

$$F(z) = z_1^{a_1} \bar{z}_1^{b_1} + z_2^{a_2} \bar{z}_2^{b_2} + \bar{z}_1^{a_1} z_1^{b_1} + \bar{z}_2^{a_2} z_2^{b_2} \quad (4.6)$$

Neste caso, a complexificação de F é dada por

$$F_{\mathbb{C}} = z_1^{a_1} w_1^{b_1} + z_2^{a_2} w_2^{b_2} + w_1^{a_1} z_1^{b_1} + w_2^{a_2} z_2^{b_2} \quad (4.7)$$

donde segue que $dF_{\mathbb{C}} = \alpha + \beta$, onde

$$\begin{aligned} \alpha &= (a_1 z_1^{(a_1-1)} w_1^{b_1} + b_1 z_1^{(b_1-1)} w_1^{a_1}) dz_1 + (a_2 z_2^{(a_2-1)} w_2^{b_2} + b_2 z_2^{(b_2-1)} w_2^{a_2}) dz_2, \\ \beta &= (a_1 w_1^{(a_1-1)} z_1^{b_1} + b_1 w_1^{(b_1-1)} z_1^{a_1}) dw_1 + (a_2 w_2^{(a_2-1)} z_2^{b_2} + b_2 w_2^{(b_2-1)} z_2^{a_2}) dw_2. \end{aligned}$$

Além disso, como $dF_{\mathbb{C}} = \alpha + \beta$, temos

$$\alpha \wedge d\alpha \wedge dF_{\mathbb{C}} = \alpha \wedge d\alpha \wedge \beta.$$

Agora temos

$$d\alpha = a_1 b_1 (z_1^{(a_1-1)} w_1^{(b_1-1)} + z_1^{(b_1-1)} w_1^{(a_1-1)}) dw_1 \wedge dz_1 + a_2 b_2 (z_2^{(a_2-1)} w_2^{(b_2-1)} + z_2^{(b_2-1)} w_2^{(a_2-1)}) dw_2 \wedge dz_2.$$

Vamos usar as seguintes notações

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (a_1 z_1^{(a_1-1)} w_1^{b_1} + b_1 z_1^{(b_1-1)} w_1^{a_1}), \\ \alpha_2 &= (a_2 z_2^{(a_2-1)} w_2^{b_2} + b_2 z_2^{(b_2-1)} w_2^{a_2}), \\ \beta_1 &= (a_1 w_1^{(a_1-1)} z_1^{b_1} + b_1 w_1^{(b_1-1)} z_1^{a_1}), \\ \beta_2 &= (a_2 w_2^{(a_2-1)} z_2^{b_2} + b_2 w_2^{(b_2-1)} z_2^{a_2}), \\ g_1 &= a_1 b_1 (z_1^{(a_1-1)} w_1^{(b_1-1)} + z_1^{(b_1-1)} w_1^{(a_1-1)}), \\ g_2 &= a_2 b_2 (z_2^{(a_2-1)} w_2^{(b_2-1)} + z_2^{(b_2-1)} w_2^{(a_2-1)}). \end{aligned}$$

Assim, temos

$$\alpha \wedge d\alpha \wedge \beta = (\alpha_1 \beta_1 g_2 + \alpha_2 \beta_2 g_1) dz_1 \wedge dz_2 \wedge dw_1 \wedge dw_2.$$

Observamos que

$$\begin{aligned}\alpha_1\beta_1g_2 &= a_2b_2 (a_1^2 + b_1^2) \left(z_2^{(a_2-1)}w_2^{(b_2-1)} + z_2^{(b_2-1)}w_2^{(a_2-1)} \right) z_1^{(a_1+b_1-1)}w_1^{(a_1+b_1-1)} \\ &\quad + a_1b_1a_2b_2 \left(z_1^{(2a_1-1)}w_1^{(2b_1-1)} + z_1^{(2b_1-1)}w_1^{(2a_1-1)} \right) \left(z_2^{(a_2-1)}w_2^{(b_2-1)} + z_2^{(b_2-1)}w_2^{(a_2-1)} \right), \\ \alpha_2\beta_2g_1 &= a_1b_1 (a_2^2 + b_2^2) \left(z_1^{(a_1-1)}w_1^{(b_1-1)} + z_1^{(b_1-1)}w_1^{(a_1-1)} \right) z_2^{(a_2+b_2-1)}w_2^{(a_2+b_2-1)} \\ &\quad + a_1b_1a_2b_2 \left(z_2^{(2a_2-1)}w_2^{(2b_2-1)} + z_2^{(2b_2-1)}w_2^{(2a_2-1)} \right) \left(z_1^{(a_1-1)}w_1^{(b_1-1)} + z_1^{(b_1-1)}w_1^{(a_1-1)} \right).\end{aligned}$$

Agora, pela equação (4.7), obtemos a seguinte relação:

$$\left(z_2^{(a_2-1)}w_2^{(b_2-1)} + z_2^{(b_2-1)}w_2^{(a_2-1)} \right) = -\frac{z_1w_1}{z_2w_2} \left(z_1^{(a_1-1)}w_1^{(b_1-1)} + z_1^{(b_1-1)}w_1^{(a_1-1)} \right).$$

Com isso, podemos reescrever

$$\begin{aligned}\alpha_1\beta_1g_2 &= \left(\frac{z_1^{(a_1-1)}w_1^{(b_1-1)} + z_1^{(b_1-1)}w_1^{(a_1-1)}}{z_2w_2} \right) \left[-a_2b_2 (a_1^2 + b_1^2) z_1^{(a_1+b_1)}w_1^{(a_1+b_1)} \right. \\ &\quad \left. - a_1b_1a_2b_2 \left(z_1^{2a_1}w_1^{2b_1} + z_1^{2b_1}w_1^{2a_1} \right) \right], \\ \alpha_2\beta_2g_1 &= \left(\frac{z_1^{(a_1-1)}w_1^{(b_1-1)} + z_1^{(b_1-1)}w_1^{(a_1-1)}}{z_2w_2} \right) \left[a_1b_1 (a_2^2 + b_2^2) z_2^{(a_2+b_2)}w_2^{(a_2+b_2)} \right. \\ &\quad \left. + a_1b_1a_2b_2 \left(z_2^{2a_2}w_2^{2b_2} + z_2^{2b_2}w_2^{2a_2} \right) \right].\end{aligned}$$

Desse modo, temos

$$\begin{aligned}\alpha_2\beta_2g_1 + \alpha_1\beta_1g_2 &= \left(\frac{z_1^{(a_1-1)}w_1^{(b_1-1)} + z_1^{(b_1-1)}w_1^{(a_1-1)}}{z_2w_2} \right) \left[a_1b_1 (a_2^2 + b_2^2) z_2^{(a_2+b_2)}w_2^{(a_2+b_2)} \right. \\ &\quad \left. + a_1b_1a_2b_2 \left(z_2^{2a_2}w_2^{2b_2} + z_2^{2b_2}w_2^{2a_2} - z_1^{2a_1}w_1^{2b_1} + z_1^{2b_1}w_1^{2a_1} \right) \right. \\ &\quad \left. - a_2b_2 (a_1^2 + b_1^2) z_1^{(a_1+b_1)}w_1^{(a_1+b_1)} \right].\end{aligned}$$

Novamente pela equação (4.7), obtemos

$$\left(z_2^{2a_2}w_2^{2b_2} + z_2^{2b_2}w_2^{2a_2} - z_1^{2a_1}w_1^{2b_1} - z_1^{2b_1}w_1^{2a_1} \right) = 2 \left(z_1^{(a_1+b_1)}w_1^{(a_1+b_1)} - z_2^{(a_2+b_2)}w_2^{(a_2+b_2)} \right).$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned}\alpha_2\beta_2g_1 + \alpha_1\beta_1g_2 &= \left(\frac{z_1^{(a_1-1)}w_1^{(b_1-1)} + z_1^{(b_1-1)}w_1^{(a_1-1)}}{z_2w_2} \right) \left[a_1b_1 (a_2^2 + b_2^2) z_2^{(a_2+b_2)}w_2^{(a_2+b_2)} \right. \\ &\quad \left. + 2a_1b_1a_2b_2 \left(z_1^{(a_1+b_1)}w_1^{(a_1+b_1)} - z_2^{(a_2+b_2)}w_2^{(a_2+b_2)} \right) \right. \\ &\quad \left. - a_2b_2 (a_1^2 + b_1^2) z_1^{(a_1+b_1)}w_1^{(a_1+b_1)} \right],\end{aligned}$$

ou seja,

$$\alpha_2 \beta_2 g_1 + \alpha_1 \beta_1 g_2 = \left(\frac{z_1^{(a_1-1)} w_1^{(b_1-1)} + z_1^{(b_1-1)} w_1^{(a_1-1)}}{z_2 w_2} \right) \left[a_1 b_1 (a_2 - b_2)^2 \left(z_2^{(a_2+b_2)} w_2^{(a_2+b_2)} \right) - a_2 b_2 (a_1 - b_1)^2 \left(z_1^{(a_1+b_1)} w_1^{(a_1+b_1)} \right) \right].$$

Portanto, concluímos que $\alpha|_{M^*}$ é integrável se, e somente se, $a_1 b_1 (a_2 - b_2)^2 = 0$ e $a_2 b_2 (a_1 - b_1)^2 = 0$, isto é, $a_2 = b_2$ e $a_1 = b_1$. Isso conclue a demonstração do Teorema D. \square

4.3 Teorema E

Teorema E. *Sejam $G = (z_1^{a_1}, \dots, z_n^{a_n})$ e $X = (z_1^{b_1}, \dots, z_n^{b_n})$, com $a_k, b_k \geq 1$ inteiros, para $k = 1, \dots, n$.*

Defina $F(z) := 2\text{Re} \langle G(z), X(z) \rangle$ e $M := \{F = 0\}$. Então M não é Levi-flat.

Demonstração. Com a notação introduzida no Lema 4.1, podemos reescrever

$$\alpha = \sum_{k=1}^n f_k dz_k,$$

$$\beta = \sum_{k=1}^n g_k dw_k.$$

Agora, vejamos que

$$d\alpha = \sum_{\ell=1}^n h_\ell dw_\ell \wedge dz_\ell.$$

De fato, temos

$$d\alpha = \sum_{k,\ell=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial z_\ell} dz_\ell \wedge dz_k + \sum_{k,\ell=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial w_\ell} dw_\ell \wedge dz_k.$$

Além disso, temos as seguintes relações:

$$\frac{\partial f_k}{\partial z_\ell} = 0, \text{ para } k \neq \ell,$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial w_\ell} = 0, \text{ para } k \neq \ell,$$

$$\frac{\partial f_\ell}{\partial w_\ell} = a_\ell b_\ell (z_\ell^{(a_\ell-1)} w_\ell^{(b_\ell-1)} + z_\ell^{(b_\ell-1)} w_\ell^{(a_\ell-1)}).$$

Donde segue que

$$d\alpha = \sum_{\ell=1}^n a_\ell b_\ell (z_\ell^{(a_\ell-1)} w_\ell^{(b_\ell-1)} + z_\ell^{(b_\ell-1)} w_\ell^{(a_\ell-1)}) dw_\ell \wedge dz_\ell = \sum_{\ell=1}^n h_\ell dw_\ell \wedge dz_\ell.$$

Desse modo, temos

$$\alpha \wedge d\alpha \wedge \beta = \sum_{\ell \neq j, k} f_k g_j h_\ell dz_k \wedge dw_\ell \wedge dz_\ell \wedge dw_j. \quad (4.8)$$

Observamos que para $j \neq k$, o coeficiente do termo $dz_k \wedge dw_\ell \wedge dz_\ell \wedge dw_j$ na 4-forma $\alpha \wedge d\alpha \wedge \beta$ é exatamente $f_k g_j h_\ell$. Ou seja, se $j \neq k$,

$$f_k g_j h_\ell dz_k \wedge dw_\ell \wedge dz_\ell \wedge dw_j$$

é a única parcela na equação (4.8) que é da forma $\rho dz_k \wedge dw_\ell \wedge dz_\ell \wedge dw_j$.

Assim, escolhida uma tripla (j, k, ℓ) de índices dois a dois distintos, pelo Lema (4.1) existe $(z_0, w_0) \in M_{\mathbb{C}}$ tal que

$$\alpha(z_0, w_0) \wedge d\alpha(z_0, w_0) \wedge \beta(z_0, w_0) \neq 0.$$

Portanto, $M_{\mathbb{C}}$ não é Levi-flat e concluímos a demonstração do Teorema E. \square

Como corolário do teorema acima, temos o seguinte resultado:

Corolário 2. *Qualquer hipersuperfície biholomorfa à M não é Levi-flat.*

A demonstração segue diretamente da Proposição 1.9 junto com o Teorema anterior.

4.4 O caso dos campos $G = (z_1^{a_1}, z_2^{a_2})$ e $X = (z_{\sigma_1}^{b_{\sigma_1}}, z_{\sigma_2}^{b_{\sigma_2}})$

Nesta seção veremos alguns resultados sobre o conjunto singular da hipersuperfície $M = \{F = 0\}$, onde $F = \langle G, X \rangle$ e G, X são os campos $G = (z_1^{a_1}, z_2^{a_2})$ e $X = (z_{\sigma_1}^{b_{\sigma_1}}, z_{\sigma_2}^{b_{\sigma_2}})$.

Inicialmente vamos considerar o caso particular em que $G = (z_1^a, z_2^b)$ e $X = (z_2^b, z_1^a)$ com a, b inteiros positivos. Neste caso, o produto hermitiano de G com X será dado por:

$$\langle G, X \rangle = z_1^a \bar{z}_2^b + \bar{z}_1^a z_2^b.$$

Observamos que $\langle G, X \rangle \in \mathbb{R}$. Assim, vamos considerar

$$M = \{F = 0\}, \tag{4.9}$$

onde $F = z_1^a \bar{z}_2^b + \bar{z}_1^a z_2^b$.

Observamos que para estes campos, o mapa $\psi_{G, X}$ não satisfaz a condição de Milnor, pelo Teorema 12. Neste caso, a superfície M será Levi-flat, como mostraremos na Seção 4.5.

Agora verificaremos o seguinte resultado a respeito do conjunto singular de M .

Proposição 4.2. *Seja M a hipersuperfície descrita na Equação (4.9). Então temos as seguintes opções para $\text{Sing}(M)$:*

1. $\text{Sing}(M) = \{0\}$, se $b = a = 1$,
2. $\text{Sing}(M) = \{z_1 = 0\}$, se $b = 1$ e $a > 1$,
3. $\text{Sing}(M) = \{z_2 = 0\}$, se $a = 1$ e $b > 1$,
4. $\text{Sing}(M) = \{z_1 = 0\} \cup \{z_2 = 0\}$, se $a, b > 1$.

Demonstração. As derivadas parciais de F são dadas por

$$\begin{aligned}\partial F &= az_1^{(a-1)}\bar{z}_2^b dz_1 + b\bar{z}_1^a z_2^{(b-1)} dz_2, \\ \bar{\partial} F &= a\bar{z}_1^{(a-1)}z_2^b d\bar{z}_1 + bz_1^a \bar{z}_2^{(b-1)} d\bar{z}_2.\end{aligned}$$

Desse modo, $(z_1, z_2) \in \text{Sing}(M)$ se, e somente se, as equações são satisfeitas:

$$\begin{aligned}az_1^{(a-1)}\bar{z}_2^b &= 0, \\ b\bar{z}_1^a z_2^{(b-1)} &= 0, \\ a\bar{z}_1^{(a-1)}z_2^b &= 0, \\ bz_1^a \bar{z}_2^{(b-1)} &= 0.\end{aligned}$$

Se $a, b > 1$, segue que $\text{Sing}(M) = \{z_1 = 0\} \cup \{z_2 = 0\}$. Se $a = 1$, ou $b = 1$, teremos $\text{Sing}(M) = \{z_2 = 0\}$, ou $\text{Sing}(M) = \{z_1 = 0\}$, respectivamente. E finalmente, se $a = b = 1$ obtemos $\text{Sing}(M) = \{0\}$. \square

Agora vamos considerar os campos $G = (z_1^{a_1}, z_2^{a_2})$ e $X = (z_2^{b_2}, z_1^{b_1})$, que são mais gerais que no caso anterior. Neste caso, provamos o seguinte resultado, que será demonstrado na Seção 4.6.

Teorema G. *Considere os campos vetoriais $G = (z_1^{a_1}, z_2^{a_2})$ e $X = (z_2^{b_2}, z_1^{b_1})$, onde $a_1 \geq b_1$ e $a_2 \geq b_2$ são inteiros positivos satisfazendo $a_1 b_2 = a_2 b_1$. Vamos considerar a hipersuperfície $M := \{\text{Re} \langle G, X \rangle = 0\}$. Então M é Levi-flat se, e somente se, $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$.*

Na Proposição 4.2, nós vimos que $\text{Sing}(M) = \{z_1 = 0\} \cup \{z_2 = 0\}$ no caso em que $a_1 = b_1 > 1$ e $a_2 = b_2 > 1$. Agora, vamos verificar que isso também ocorre no caso em que $a_1 > b_1 > 1$ e $a_2 > b_2 > 1$ (mesmo sem a hipótese de $a_1 b_2 = a_2 b_1$).

Proposição 4.3. *Seja M a hipersuperfície descrita acima. Então temos as seguintes opções para $\text{Sing}(M)$:*

1. $\text{Sing}(M) = \{0\}$, se $b_1 = b_2 = 1$;
2. $\text{Sing}(M) = \{z_1 = 0\}$, se $b_2 = 1$ e $b_1 > 1$;
3. $\text{Sing}(M) = \{z_2 = 0\}$, se $b_1 = 1$ e $b_2 > 1$;
4. $\text{Sing}(M) = \{z_1 = 0\} \cup \{z_2 = 0\}$ se $b_1, b_2 > 1$.

Demonstração. Observamos que F é dada por

$$F = z_1^{a_1} \bar{z}_2^{b_2} + \bar{z}_1^{a_1} z_2^{b_2} + z_2^{a_2} \bar{z}_1^{b_1} + \bar{z}_2^{a_2} z_1^{b_1},$$

e suas derivadas parciais são dadas por

$$\partial F = (a_1 z_1^{(a_1-1)} \bar{z}_2^{b_2} + b_1 z_1^{(b_1-1)} \bar{z}_2^{a_2}) dz_1 + (a_2 z_2^{(a_2-1)} \bar{z}_1^{b_1} + b_2 z_2^{(b_2-1)} \bar{z}_1^{a_1}) dz_2,$$

$$\bar{\partial} F = (a_1 \bar{z}_1^{(a_1-1)} z_2^{b_2} + b_1 \bar{z}_1^{(b_1-1)} z_2^{a_2}) d\bar{z}_1 + (a_2 \bar{z}_2^{(a_2-1)} z_1^{b_1} + b_2 \bar{z}_2^{(b_2-1)} z_1^{a_1}) d\bar{z}_2.$$

Assim, $(z_1, z_2) \in M$ pertence ao conjunto singular se satisfaz as equações

$$a_1 z_1^{(a_1-1)} \bar{z}_2^{b_2} + b_1 z_1^{(b_1-1)} \bar{z}_2^{a_2} = 0 \quad (4.10)$$

$$a_1 \bar{z}_1^{(a_1-1)} z_2^{b_2} + b_1 \bar{z}_1^{(b_1-1)} z_2^{a_2} = 0 \quad (4.11)$$

$$a_2 z_2^{(a_2-1)} \bar{z}_1^{b_1} + b_2 z_2^{(b_2-1)} \bar{z}_1^{a_1} = 0 \quad (4.12)$$

$$a_2 \bar{z}_2^{(a_2-1)} z_1^{b_1} + b_2 \bar{z}_2^{(b_2-1)} z_1^{a_1} = 0 \quad (4.13)$$

Vamos supor que $b_1, b_2 > 1$. Então vemos que $(\{z_1 = 0\} \cup \{z_2 = 0\}) \subset \text{Sing}(M)$. Agora, suponha por absurdo que $(z_1, z_2) \in \text{Sing}(M)$ com $z_1 \neq 0$ e $z_2 \neq 0$. Da equação (4.10), obtemos

$$\frac{a_1}{b_1} = -\frac{z_1^{(b_1-1)} \bar{z}_2^{a_2}}{z_1^{(a_1-1)} \bar{z}_2^{b_2}} = -\frac{\bar{z}_2^{(a_2-b_2)}}{z_1^{(a_1-b_1)}},$$

e da equação (4.13), obtemos

$$\frac{a_2}{b_2} = -\frac{\bar{z}_2^{(b_2-1)} z_1^{a_1}}{\bar{z}_2^{(a_2-1)} z_1^{b_1}} = -\frac{z_1^{(a_1-b_1)}}{\bar{z}_2^{(a_2-b_2)}},$$

donde segue que

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{b_2}{a_2},$$

ou seja, $a_1 a_2 = b_1 b_2$. Isso é um absurdo, pois $a_1 > b_1$ e $a_2 > b_2$.

Concluimos que $\text{Sing}(M) = \{z_1 = 0\} \cup \{z_2 = 0\}$, se $b_1, b_2 > 1$.

Agora vamos supor que $b_1 = 1$ e $b_2 > 1$. Então, as equações do conjunto singular são dadas por

$$a_1 z_1^{(a_1-1)} \bar{z}_2^{b_2} + \bar{z}_2^{a_2} = 0 \quad (4.14)$$

$$a_1 \bar{z}_1^{(a_1-1)} z_2^{b_2} + z_2^{a_2} = 0 \quad (4.15)$$

$$a_2 z_2^{(a_2-1)} \bar{z}_1 + b_2 z_2^{(b_2-1)} \bar{z}_1^{a_1} = 0 \quad (4.16)$$

$$a_2 \bar{z}_2^{(a_2-1)} z_1 + b_2 \bar{z}_2^{(b_2-1)} z_1^{a_1} = 0 \quad (4.17)$$

Claramente $\{z_2 = 0\} \subset \text{Sing}(M)$. Agora suponha que $z_2 \neq 0$, então teremos necessariamente que $z_1 \neq 0$, pela equação (4.14). Assim, segue pelas equações (4.14) e (4.17)

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{\bar{z}_2^{(a_2-b_2)}}{z_1^{(a_1-1)}}, \\ \frac{a_2}{b_2} &= -\frac{z_1^{(a_1-1)}}{\bar{z}_2^{(a_2-b_2)}}, \end{aligned}$$

donde segue que $a_1 = \frac{b_2}{a_2}$, ou seja, $a_1 a_2 = b_2$. Mas isso contradiz $a_2 > b_2$ e $a_1 > 1$.

Portanto, $\text{Sing}(M) = \{z_2 = 0\}$ se $b_1 = 1$ e $b_2 > 1$. De modo análogo obtemos $\text{Sing}(M) = \{z_1 = 0\}$ se $b_2 = 1$ e $b_1 > 1$, e obtemos também $\text{Sing}(M) = \{0\}$ se $b_1 = b_2 = 1$. \square

Para a demonstração do Teorema F, vamos utilizar o seguinte lema:

Lema 4.2. *Em $M_{\mathbb{C}}$, vale que $\alpha \wedge d\alpha \wedge \beta = h dz_1 \wedge dw_1 \wedge dz_2 \wedge dw_2$, onde*

$$h = c(a_1 a_2 + b_1 b_1 - 2c)(z_1^{a_1+b_1} w_2^{a_2+b_2} - z_2^{(a_2+b_2)} w_1^{(a_1+b_1)}) \left(\frac{z_2^{(a_2-1)} w_1^{(b_1-1)} + z_2^{(b_2-1)} w_1^{(a_1-1)}}{z_1 w_2} \right)$$

e $c = a_1 b_2 = a_2 b_1$.

Demonstração. A complexificação de F é dada por

$$F_{\mathbb{C}} = z_1^{a_1} w_2^{b_2} + w_1^{a_1} z_2^{b_2} + z_2^{a_2} w_1^{b_1} + w_2^{a_2} z_1^{b_1}.$$

Desse modo, temos

$$\begin{aligned} \alpha &= (a_1 z_1^{(a_1-1)} w_2^{b_2} + b_1 z_1^{(b_1-1)} w_2^{a_2}) dz_1 + (a_2 z_2^{(a_2-1)} w_1^{b_1} + b_2 z_2^{(b_2-1)} w_1^{a_1}) dz_2, \\ \beta &= (a_1 w_1^{(a_1-1)} z_2^{b_2} + b_1 w_1^{(b_1-1)} z_2^{a_2}) dw_1 + (a_2 w_2^{(a_2-1)} z_1^{b_1} + b_2 w_2^{(b_2-1)} z_1^{a_1}) dw_2, \\ d\alpha &= (a_1 b_2 z_1^{(a_1-1)} w_2^{(b_2-1)} + a_2 b_1 z_1^{(b_1-1)} w_2^{(a_2-1)}) dw_2 \wedge dz_1 \\ &\quad + (a_2 b_1 z_2^{(a_2-1)} w_1^{(b_1-1)} + a_1 b_2 z_2^{(b_2-1)} w_1^{(a_1-1)}) dw_1 \wedge dz_2. \end{aligned}$$

Vamos utilizar as notações

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a_1 z_1^{(a_1-1)} w_2^{b_2} + b_1 z_1^{(b_1-1)} w_2^{a_2}; \\ \alpha_2 &= a_2 w_1^{b_1} z_2^{(a_2-1)} + b_2 w_1^{a_1} z_2^{(b_2-1)}; \\ \beta_1 &= a_1 w_1^{(a_1-1)} z_2^{b_2} + b_1 w_1^{(b_1-1)} z_2^{a_2}; \\ \beta_2 &= a_2 z_1^{b_1} w_2^{(a_2-1)} + b_2 z_1^{a_1} w_2^{(b_2-1)}; \\ g_1 &= a_1 b_2 z_1^{(a_1-1)} w_2^{(b_2-1)} + a_2 b_1 z_1^{(b_1-1)} w_2^{(a_2-1)}; \\ g_2 &= a_2 b_1 w_1^{(b_1-1)} z_2^{(a_2-1)} + a_1 b_2 w_1^{(a_1-1)} z_2^{(b_2-1)};\end{aligned}$$

de modo que podemos escrever:

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_1 dz_1 + \alpha_2 dz_2; \\ \beta &= \beta_1 dw_1 + \beta_2 dw_2; \\ d\alpha &= g_1 dw_2 \wedge dz_1 + g_2 dw_1 \wedge dz_2.\end{aligned}$$

Com estas notações, temos

$$\alpha \wedge d\alpha \wedge \beta = (\alpha_1 \beta_2 g_2 + \alpha_2 \beta_1 g_1) dz_1 \wedge dw_1 \wedge dz_2 \wedge dw_2.$$

Em $M_{\mathbb{C}}$, temos

$$z_1^{a_1} w_2^{b_2} + z_1^{b_1} w_2^{a_2} = -(w_1^{a_1} z_2^{b_2} + w_1^{b_1} z_2^{a_2}), \quad (4.18)$$

donde segue que

$$z_1^{(a_1-1)} w_2^{(b_2-1)} + z_1^{(b_1-1)} w_2^{(a_2-1)} = -\left(\frac{w_1 z_2}{z_1 w_2}\right) (w_1^{(a_1-1)} z_2^{(b_2-1)} + w_1^{(b_1-1)} z_2^{(a_2-1)}).$$

Tomando $c = a_1 b_2 = b_1 a_2$, temos

$$g_1 = c(z_1^{(a_1-1)} w_2^{(b_2-1)} + z_1^{(b_1-1)} w_2^{(a_2-1)}) = -c \left(\frac{w_1 z_2}{z_1 w_2}\right) (w_1^{(a_1-1)} z_2^{(b_2-1)} + w_1^{(b_1-1)} z_2^{(a_2-1)}),$$

e segue que

$$g_1 = -\left(\frac{w_1 z_2}{z_1 w_2}\right) g_2.$$

Desse modo, em $M_{\mathbb{C}}$ temos

$$\alpha_1 \beta_2 g_2 + \alpha_2 \beta_1 g_1 = \alpha_1 \beta_2 g_2 - \alpha_2 \beta_1 \left(\frac{w_1 z_2}{z_1 w_2}\right) g_2 = \frac{g_2}{z_1 w_2} (z_1 w_2 \alpha_1 \beta_2 - w_1 z_2 \alpha_2 \beta_1),$$

e temos

$$\alpha \wedge d\alpha \wedge \beta = \left[\frac{g_2}{z_1 w_2} (z_1 w_2 \alpha_1 \beta_2 - w_1 z_2 \alpha_2 \beta_1) \right] dz_1 \wedge dw_1 \wedge dz_2 \wedge dw_2. \quad (4.19)$$

Agora observamos que

$$\begin{aligned} \alpha_1 \beta_2 &= (a_1 z_1^{(a_1-1)} w_2^{b_2} + b_1 z_1^{(b_1-1)} w_2^{a_2}) (a_2 z_1^{b_1} w_2^{(a_2-1)} + b_2 z_1^{a_1} w_2^{(b_2-1)}) \\ &= (a_1 a_2 + b_1 b_2) z_1^{(a_1+b_1-1)} w_2^{(a_2+b_2-1)} + c(z_1^{(2a_1-1)} w_2^{(2b_2-1)} + z_1^{(2b_1-1)} w_2^{(2a_2-1)}), \end{aligned}$$

donde segue que

$$z_1 w_2 \alpha_1 \beta_2 = (a_1 a_2 + b_1 b_2) z_1^{(a_1+b_1)} w_2^{(a_2+b_2)} + c(z_1^{2a_1} w_2^{2b_2} + z_1^{2b_1} w_2^{2a_2}).$$

De modo análogo obtemos

$$w_1 z_2 \alpha_2 \beta_1 = (a_1 a_2 + b_1 b_2) w_1^{(a_1+b_1)} z_2^{(a_2+b_2)} + c(w_1^{2b_1} z_2^{2a_2} + w_1^{2a_1} z_2^{2b_2}),$$

de modo que $z_1 w_2 \alpha_1 \beta_2 - w_1 z_2 \alpha_2 \beta_1$ é igual a

$$(a_1 a_2 + b_1 b_2) (z_1^{(a_1+b_1)} w_2^{(a_2+b_2)} - w_1^{(a_1+b_1)} z_2^{(a_2+b_2)}) + c(z_1^{2a_1} w_2^{2b_2} + z_1^{2b_1} w_2^{2a_2} - w_1^{2b_1} z_2^{2a_2} - w_1^{2a_1} z_2^{2b_2}).$$

Novamente pela equação (4.18), em $M_{\mathbb{C}}$ temos

$$(z_1^{a_1} w_2^{b_2} + z_1^{b_1} w_2^{a_2})^2 = (w_1^{a_1} z_2^{b_2} + w_1^{b_1} z_2^{a_2})^2,$$

ou seja,

$$2(w_1^{(a_1+b_1)} z_2^{(a_2+b_2)} - z_1^{(a_1+b_1)} w_2^{(a_2+b_2)}) = z_1^{2a_1} w_2^{2b_2} + z_1^{2b_1} w_2^{2a_2} - w_1^{2b_1} z_2^{2a_2} - w_1^{2a_1} z_2^{2b_2},$$

donde segue que $z_1 w_2 \alpha_1 \beta_2 - w_1 z_2 \alpha_2 \beta_1$ é igual à

$$(a_1 a_2 + b_1 b_2) (z_1^{(a_1+b_1)} w_2^{(a_2+b_2)} - w_1^{(a_1+b_1)} z_2^{(a_2+b_2)}) + 2c(w_1^{(a_1+b_1)} z_2^{(a_2+b_2)} - z_1^{(a_1+b_1)} w_2^{(a_2+b_2)}).$$

Ou seja, $z_1 w_2 \alpha_1 \beta_2 - w_1 z_2 \alpha_2 \beta_1$ é igual à

$$(a_1 a_2 + b_1 b_2 - 2c) (z_1^{(a_1+b_1)} w_2^{(a_2+b_2)} - w_1^{(a_1+b_1)} z_2^{(a_2+b_2)}).$$

Finalmente concluímos que

$$\frac{g_2}{z_1 w_2} (z_1 w_2 \alpha_1 \beta_2 - w_1 z_2 \alpha_2 \beta_1) = \frac{g_2}{z_1 w_2} (a_1 a_2 + b_1 b_2 - 2c) (z_1^{(a_1+b_1)} w_2^{(a_2+b_2)} - w_1^{(a_1+b_1)} z_2^{(a_2+b_2)})$$

e o lema segue substituindo a expressão acima e a expressão de g_2 na equação (4.19). \square

4.5 Teorema F

Teorema F. *Considere os campos holomorfos $G = (z_1^a, z_2^b)$ e $X = (z_2^b, z_1^a)$ com a, b inteiros positivos e $M = \{F = 0\}$, onde $F = \langle G, X \rangle$. A hipersuperfície M é Levi-flat.*

Demonstração. Neste caso, F é dada por $F = z_1^a \bar{z}_2^b + \bar{z}_1^a z_2^b$ e sua complexificação será dada por

$$F_{\mathbb{C}} = z_1^a w_2^b + w_1^a z_2^b.$$

Assim, temos

$$\alpha = a z_1^{(a-1)} w_2^b dz_1 + b w_1^a z_2^{(b-1)} dz_2,$$

$$\beta = a w_1^{(a-1)} z_2^b dw_1 + b z_1^a w_2^{(b-1)} dw_2,$$

$$d\alpha = a b z_1^{(a-1)} w_2^{(b-1)} dw_2 \wedge dz_1 + a b w_1^{(a-1)} z_2^{(b-1)} dw_1 \wedge dz_2.$$

Segue que

$$\alpha \wedge d\alpha \wedge \beta = (a^2 b^2 z_1^{(2a-1)} w_2^{(2b-1)} w_1^{(a-1)} z_2^{(b-1)} + a^2 b^2 w_1^{(2a-1)} z_2^{(2b-1)} z_1^{(a-1)} w_2^{(b-1)}) dz_1 \wedge dw_1 \wedge dz_2 \wedge dw_2.$$

Da equação (4.5), obtemos

$$z_1^{(a-1)} w_2^{(b-1)} = - \left(\frac{w_1 z_2}{z_1 w_2} \right) w_1^{(a-1)} z_2^{(b-1)},$$

donde segue que $\alpha \wedge d\alpha \wedge \beta$ é igual a

$$\left[a^2 b^2 z_1^{(2a-1)} w_2^{(2b-1)} w_1^{(a-1)} z_2^{(b-1)} - a^2 b^2 \left(\frac{w_1 z_2}{z_1 w_2} \right) w_1^{(2a-1)} z_2^{(2b-1)} w_1^{(a-1)} z_2^{(b-1)} \right] dz_1 \wedge dw_1 \wedge dz_2 \wedge dw_2,$$

ou seja,

$$\alpha \wedge d\alpha \wedge \beta = \left[a^2 b^2 \frac{w_1^{(a-1)} z_2^{(b-1)}}{z_1 w_2} (z_1^{2a} w_2^{2b} - w_1^{2a} z_2^{2b}) \right] dz_1 \wedge dw_1 \wedge dz_2 \wedge dw_2.$$

Novamente pela equação (4.5), temos $z_1^a w_2^b = -w_1^a z_2^b$, donde segue que $z_1^{2a} w_2^{2b} = w_1^{2a} z_2^{2b}$ em $M_{\mathbb{C}}$.

Portanto, M é Levi-flat. □

4.6 Teorema G

Teorema G. *Considere os campos vetoriais $G = (z_1^{a_1}, z_2^{a_2})$ e $X = (z_2^{b_2}, z_1^{b_1})$, onde $a_1 \geq b_1$ e $a_2 \geq b_2$ são inteiros positivos satisfazendo $a_1 b_2 = a_2 b_1$. Vamos considerar a hipersuperfície $M := \{\text{Re} \langle G, X \rangle = 0\}$.*

Então M é Levi-flat se, e somente se, $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$.

Demonstração. Pelo Lema 4.2, segue que $\alpha(z, w) \wedge \beta(z, w) \wedge d\alpha(z, w) = 0$ para todo $(z, w) \in M_{\mathbb{C}}$ se, e somente se, $a_1 a_2 + b_1 b_2 - 2c = 0$, ou seja, $2c = a_1 a_2 + b_1 b_2$. Utilizando que $c = a_1 b_2 = b_1 a_2$, segue que

$$2c = a_1 a_2 + b_1 b_2 \iff a_1 b_2 + b_1 a_2 = a_1 a_2 + b_1 b_2 \iff b_1(a_2 - b_2) = a_1(a_2 - b_2).$$

Portanto, $M_{\mathbb{C}}$ é Levi-flat se, e somente se, $a_1 = b_1$ e $a_2 = b_2$. Isso conclue a demonstração do Teorema G. \square

Observação 8. A partir dos resultados acima, concluímos que para $n = 2$ a hipersuperfície M não será Levi-flat precisamente quando o mapa $\psi_{G, X}$ satisfizer a condição de Milnor na origem.

4.7 Teorema H

Agora, vamos estudar o caso com permutações em dimensão maior. Vamos considerar $\sigma \in S_n$ uma permutação no conjunto $\underline{n} := \{1, \dots, n\}$ e vamos usar a notação $\sigma_k := \sigma(k)$. Utilizamos um argumento de corte transversal, junto com o caso de dimensão 2 (Teorema G), para obter o seguinte resultado em dimensão ≥ 3 :

Teorema H. *Considere os campos vetoriais $G = (z_1^{a_1}, \dots, z_n^{a_n})$ e $X = (z_{\sigma_1}^{b_{\sigma_1}}, \dots, z_{\sigma_n}^{b_{\sigma_n}})$, onde $a_k \geq b_k$ são inteiros positivos. Vamos supor que para algum $\ell \in \underline{n}$, os inteiros $a_\ell, b_\ell, a_{\sigma_\ell}, b_{\sigma_\ell}$ satisfazem as seguintes condições: $a_\ell > b_\ell$ e $a_\ell b_{\sigma_\ell} = b_\ell a_{\sigma_\ell}$. Então, a hipersuperfície $M := \{\text{Re} \langle G, X \rangle = 0\}$ não é Levi-flat.*

Demonstração. Vamos supor por absurdo que M é Levi-flat. Então, a parte regular M^* é folheada por subvariedades complexas de dimensão (complexa) $n - 1$. Então, podemos escolher $i : \mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}^n$ um mergulho transversal a M (veja [11]), de modo que a parte regular de $i^{-1}(M)$ também é folheada por subvariedades complexas de dimensão 1 (superfícies de Riemann). Sem perda de generalidade, podemos supor que $\sigma(1) = 2$ e que a_1, b_1, a_2, b_2 são os inteiros que satisfazem as condições do enunciado. Fazendo uma mudança de coordenadas, e usando o fato de que propriedade de ser Levi-flat é invariante por biholomorfismo (Proposição 1.9), podemos assumir que o mergulho $i : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^n$ é dado por

$$i : (z_1, z_2) \mapsto (z_1, z_2, 0, \dots, 0).$$

Observamos que

$$i^{-1}(M) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1^{a_1} \bar{z}_2^{b_2} + \bar{z}_1^{a_1} z_2^{b_2} + z_2^{a_2} \bar{z}_1^{b_1} + \bar{z}_2^{a_2} z_1^{b_1} = 0\}.$$

Mas pelo Teorema G, $i^{-1}(M)$ não tem a parte regular folheada por subvariedades complexas.

Portanto, M não é Levi-flat. \square

Como corolário do Teorema acima, temos o seguinte resultado:

Corolário 3. *Qualquer hipersuperfície biholomorfa à M não é Levi-flat.*

4.8 Exemplos

Nesta seção veremos alguns exemplos de casos em que os campos G e X não satisfazem a condição de Milnor. Nestes exemplos, as nossas hipersuperfícies são todas Levi-flat.

Exemplo 4.1. Seja $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ o polinômio de Pham-Brieskorn $f(z) = z_1^p + z_2^q$, com $p, q > 2$. Seja

$$G = \left(\frac{\partial f}{\partial z_2}, -\frac{\partial f}{\partial z_1} \right)$$

um campo de vetores holomorfo cujas soluções são as fibras de f . Considere ainda um campo vetorial

$$X = (a_1, a_2).$$

Observe que

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} = pz_1^{(p-1)}, \quad \frac{\partial f}{\partial z_2} = qz_2^{(q-1)}.$$

Então o campo G é dado por $G = (qz_2^{(q-1)}, -pz_1^{(p-1)})$. Assim, o produto hermitiano de G por X é dado por

$$\Psi_{G,X} = \langle G, X \rangle = \bar{a}_1 q z_2^{(q-1)} - \bar{a}_2 p z_1^{(p-1)},$$

e claramente $\Psi_{G,X}$ não satisfaz a condição de fibração de Milnor na origem.

Agora tomamos $F := 2\text{Re} \langle G, X \rangle$ e $M = \{G = 0\}$. Vamos verificar que M é Levi-flat. Primeiro observe que

$$F(z) = \bar{a}_1 q z_2^{(q-1)} - \bar{a}_2 p z_1^{(p-1)} + a_1 q \bar{z}_2^{(q-1)} - a_2 p \bar{z}_1^{(p-1)},$$

e as derivadas parciais de F são dadas por

$$\partial F = q(q-1)\bar{a}_1 z_2^{(q-2)} dz_2 - p(p-1)\bar{a}_2 z_1^{(p-2)} dz_1,$$

$$\bar{\partial} F = q(q-1)a_1 \bar{z}_2^{(q-2)} d\bar{z}_2 - p(p-1)a_2 \bar{z}_1^{(p-2)} d\bar{z}_1,$$

donde segue que $\text{Sing}(M) = \{0\}$ e $\partial\bar{\partial}F \equiv 0$. Portanto, M é Levi-flat.

Exemplo 4.2. Vamos considerar os campos holomorfos $G = (z_1, iz_2, (-1-i)z_3)$ e $X = (z_1, z_2, z_3)$. Pelo Teorema 12, o mapa $\psi_{G,X}$ não satisfaz a condição de Milnor.

O produto hermitiano de G por X é dado por

$$\langle G, X \rangle = z_1 \bar{z}_1 + iz_2 \bar{z}_2 + (-1-i)z_3 \bar{z}_3.$$

Considere $F = \text{Re} \langle G, X \rangle$ e $M = \{F = 0\}$. Vamos verificar que M é Levi-flat.

Primeiramente observe que

$$F = z_1 \bar{z}_1 - z_3 \bar{z}_3,$$

e as derivadas parciais de F são dadas por

$$\partial F = \bar{z}_1 dz_1 - \bar{z}_3 dz_3,$$

$$\bar{\partial} F = z_1 d\bar{z}_1 - z_3 d\bar{z}_3.$$

Assim, segue que $\text{Sing}(M) = \{(0, z_2, 0) \in \mathbb{C}^3 : z_2 \in \mathbb{C}\}$. Claramente $\dim_{\mathbb{R}} \text{Sing}(M) = 2$. E ainda,

$$M^* = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : z_1 \bar{z}_1 - z_3 \bar{z}_3 = 0, z_1 \neq 0 \text{ e } z_3 \neq 0\}.$$

Observamos que

$$\partial \bar{\partial} F = dz_1 \wedge d\bar{z}_1 - dz_3 \wedge d\bar{z}_3,$$

$$\partial F \wedge \bar{\partial} F = z_1 \bar{z}_1 dz_1 \wedge d\bar{z}_1 - \bar{z}_1 z_3 dz_1 \wedge d\bar{z}_3 - \bar{z}_3 z_1 dz_3 \wedge d\bar{z}_1 + z_3 \bar{z}_3 dz_3 \wedge d\bar{z}_3,$$

assim segue que

$$\partial F \wedge \bar{\partial} F \wedge \partial \bar{\partial} F = (z_3 \bar{z}_3 - z_1 \bar{z}_1) dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge dz_3 \wedge d\bar{z}_3.$$

Desse modo,

$$\partial F(p) \wedge \bar{\partial} F(p) \wedge \partial \bar{\partial} F(p) = 0$$

para todo $p \in M$ e, portanto, M é Levi-flat.

Exemplo 4.3. Considere os campos $G(z) = (z_1, z_2)$ e $X(z) = (-iz_2, iz_1)$. Então

$$F(z) = \text{Re} \langle G(z), X(z) \rangle = \frac{z_2 \bar{z}_1 - z_1 \bar{z}_2}{2i}$$

e a hipersuperfície $M = \{F = 0\}$ é Levi-flat com conjunto singular $\text{Sing}(M) = \{0\}$.

De modo geral, quando $G = (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2)$ e X é o campo radial, se $\operatorname{Re}(\lambda_k) \neq 0$ para $k = 1, 2$, o conjunto singular de $M = \{\operatorname{Re} \langle G(z), X(z) \rangle = 0\}$ é apenas a origem $0 \in \mathbb{C}^2$ e M é Levi-flat. Mas nestes casos, o mapa $\psi_{G,X}$ também não satisfaz a condição de fibração de Milnor na origem.

Bibliografia

- [1] P. Baum & R. Bott. (1972). *Singularities of holomorphic foliations*. J. Differ. Geom. 7, 279–432.
- [2] A. Beltran & A. Fernández-Pérez & H. Neciosup. (2018). *Existence of dicritical singularities of Levi-flat hypersurfaces and holomorphic foliations*. Geometriae Dedicata. 196. 10.1007/s10711-017-0303-4.
- [3] M. Brunella. (2000). *Birational Geometry of Foliations*. Doi 10.1007/978-3-319-14310-1.
- [4] M. Brunella. (2007). *Singular Levi-flat hypersurfaces and codimension one foliations*. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze, Série 5, Tome 6, no. 4, pp. 661-672.
- [5] M. Brunella. (1997). *Some remarks on indices of holomorphic vector fields*. Publicacions Matemàtiques 41(2), 527–544.
- [6] O. Calvo-Andrade & M. Corrêa & M. Jardim. (2018). *Codimension One Holomorphic Distributions on the Projective Three-space*. International Mathematics Research Notices. 10.1093/imrn/rny251.
- [7] C. Camacho & A. Lins-Neto. (1979). *Teoria Geométrica das Folheações*; Projeto Euclides vol. 12, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada IMPA. Rio de Janeiro, 1979.
- [8] C. Camacho & P. Sad. (1982). *Invariant varieties through singularities of vector fields*. Ann. Math. 115(3), 579–595.
- [9] Cartan, E.: *Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes*. Ann. Mat. Pura Appl., 11 (1) (1933), 17-90.
- [10] V. Cavalier & D. Lehmann. (2007). *Introduction à l'étude globale des tissus sur une surface holomorphe*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 57, no. 4, 1095–1133.
- [11] D. Cerveau & A. Lins-Neto. (2011). *Local Levi-Flat hypersurfaces invariants by codimension one holomorphic foliation*. American Journal of Mathematics. 133. 677-716. 10.1353/ajm.2011.0018.

- [12] A. Fernández-Pérez. (2013). *On Levi-flat hypersurfaces with generic real singularities*. J. Geom. Anal. 23, 2020–2033.
- [13] A. Fernandez-Pérez & J. Lebl. (2015). *Global and local aspects of Levi-flat hypersurfaces*. Publicações Matemáticas do IMPA, 30 Colóquio Brasileiro de Matemática, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada IMPA. Rio de Janeiro, 2015.
- [14] A. Fernández-Pérez & R. Mol & R. Rosas. (2017). *Compact Invariant Sets for Global Holomorphic Foliations*. Bull Braz Math Soc, New Series 48, 19–28. 10.1007/s00574-016-0012-x.
- [15] E. Ghys. (2000). *À propos d'un théorème de J.-P. Jouanolou concernant les feuilles fermées des feuilletages holomorphes*. Rend. Circ. Mat. Palermo (2), 49(1):175–180.
- [16] X. Gómez-Mont & I. Luengo. (1992). *Germes of holomorphic vector fields in \mathbb{C}^3 without a separatrix*. Inventiones mathematicae. 109. 211-219. 10.1007/BF01232024.
- [17] P. Griffiths & J. Harris. (2011). *Principles of Algebraic Geometry*. (pp. 1–813). wiley. <https://doi.org/10.1002/9781118032527>.
- [18] R. Gunning. (1990). *Introduction to holomorphic functions of several variables. Vol. I*. The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Monterey, CA, 1990. Function theory.
- [19] R. Gunning. (1990). *Introduction to holomorphic functions of several variables. Vol. II*. The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Monterey, CA, 1990. Local theory.
- [20] R. Gunning. (1990). *Introduction to holomorphic functions of several variables. Vol. III*. The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Monterey, CA, 1990. Homological theory.
- [21] J. Lebl. (2014). *Singular Levi-flat hypersurfaces in complex projective space induced by curves in the Grassmannian*. International Journal of Mathematics. 26. 10.1142/S0129167X15500366.
- [22] N. Levenberg & H. Yamaguchi. (2015). *Pseudoconvex domains in the Hopf surface*. J. Math. Soc. Jpn. 67(1), 231–273.

- [23] A. Lins Neto. (1988). *Algebraic solutions of polynomial differential equations and foliations in dimension two*. In: Holomorphic Dynamics, (Mexico, 1986), Lectures Notes 1345, pp. 192–232. Springer, Berlin.
- [24] A. Lins Neto & B. Scárdua. (1997). *Folheações algébricas complexas*. 21 Colóquio Brasileiro de Matemática, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada IMPA. Rio de Janeiro, 1997.
- [25] D. Mall. (1991). *The cohomology of line bundles on Hopf manifolds*. Osaka J. Math. 28, 999–1015.
- [26] J. Milnor. (1968). *Singular points of complex hypersurfaces*. Ann. of Math. Studies 61, Princeton Univ. Press.
- [27] I. Pan. (2003). *Quelques remarques sur les d -web des surfaces complexes et un problème proposé par D. Cerveau*. Bol. Asoc. Mat. Venez. 10, no.1, 21-33.
- [28] J. Pereira & L. Pirio. (2015). *An Invitation to Web Geometry*. Doi 10.1007/978-3-319-14562-4.
- [29] M. Ruas & J. Seade & A. Verjovsky. (2002). *On Real Singularities with a Milnor Fibration*. 10.1007/978-3-0348-8161-6_9.
- [30] J. Seade. (1997). *Open book decompositions associated to holomorphic vector fields*. Boletín Soc. Mat. Mex., 3, New Series, 323–336.
- [31] J. Seade. (1996). *Fibred links and a construction of real singularities via complex geometry*. Bulletin of the Brazilian Mathematical Society. 27. 199-215. 10.1007/BF01259360.
- [32] R. Shafikov & A. Sukhov. (2014). *Germes of singular Levi-flat hypersurfaces and holomorphic foliations*. Commentarii Mathematici Helvetici. 90. 10.4171/CMH/361.