UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Tese de Doutorado

Variedades de álgebras G-graduadas com involução graduada de crescimento quase polinomial

Lorena Mara Costa Oliveira

Belo Horizonte
2022

Lorena Mara Costa Oliveira

Variedades de álgebras G-graduadas com involução graduada de crescimento quase polinomial

Versão final

Tese apresentada ao corpo docente de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Rafael Bezerra dos Santos
Coorientadora: Ana Cristina Vieira

Belo Horizonte
2022

O48v
Oliveira, Lorena Mara Costa.
Variedades de álgebras G-graduadas com involução graduada de crescimento quase polinomial [manuscrito] / Lorena Mara Costa Oliveira – 2022.
70 f. il.

Orientador: Rafael Bezerra dos Santos.
Coorientadora: Ana Cristina Vieira
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f. 69-70.

1.Matemática – Teses. 2. Identidades polinomiais – Teses. 3. Involução graduada – Teses. 4. Identidades (Matemática) – Teses. I. Santo, Rafael Bezerra dos. II.Vieira, Ana Cristina. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. IV. Título.

CDU 51 (043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende Costa,CRB6 1510 do Insituto de Ciências Exatas da UFMG

ATA DA CENTÉSIMA SEPTUAGÉSIMA NONA DEFESA DE TESE DE DOUTORADO DA ALUNA LORENA MARA COSTA OLIVEIRA, REGULARMENTE MATRICULADA NO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, REALIZADA DIA 18 DE FEVEREIRO DE 2022.

Aos dezoito dias do mês de fevereiro de 2022, às 10h00, em reunião pública virtual na Plataforma Google Meet pelo link https://meet.google.com/ccq-rkfc-cwq (conforme mensagem eletrônica da Pró-Reitoria de Pós-Graduação de 26/03/2020, com orientações para a atividade de defesa de tese durante a vigência da Portaria nº 1819), reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para julgar a defesa de tese da aluna **Lorena Mara Costa Oliveira**, intitulada: "*Variedades de álgebras G-graduadas com involução graduada de crescimento quase polinomial*", requisito final para obtenção do Grau de Doutor em Matemática. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Rafael Bezerra dos Santos, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares do trabalho final, passou a palavra à aluna para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa da aluna. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se reservadamente, sem a presença da aluna, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: a aluna foi considerada aprovada sem ressalvas e por unanimidade. O resultado final foi comunicado publicamente à aluna pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 18 de fevereiro de 2022.

PROF. DR. RAFAEL BEZERRA DOS SANTOS
Orientador (UFMG)

Ana Cristina Vieira

PROFA. DRA. ANA CRISTINA VIEIRA
Coorientadora (UFMG)

PROF. DR. ANTONIO GIAMBRUNO
Examinador (Universidade de Palermo - Itália)

Dimas José Gonçalves

PROF. DR. DIMAS JOSÉ GONÇALVES
Examinador (UFSCar)

Lucas Reis

PROF. DR. LUCAS DA SILVA REIS
Examinador (UFMG)

Thiago Castilho de Mello

PROF. DR. THIAGO CASTILHO DE MELLO
Examinador (Unifesp)

À minha tia Conceição (*in memorian*).

Agradecimentos

Aos meu pais, Myriam e Celso, e aos meus irmãos, Daniela e Gabriel, por serem meu suporte e por todo incentivo ao longo da minha trajetória.

À minha esposa Ana Flávia por todo companheirismo, paciência e afeto ao longo de todo este percurso.

Agradeço a todos meus amigos que sempre estiverem ao meu lado e por tornarem a minha caminhada mais leve.

Aos meus orientadores, Professor Rafael Bezerra dos Santos e Professora Ana Cristina Vieira, por compartilharem tamanho conhecimento com muita dedicação e paciência. Muito obrigada!

Aos professores da banca, Antonio Giambruno, Dimas Gonçalves, Lucas Reis e Thiago Castilho, pelo cuidado com a leitura da minha tese e pelas correções e sugestões.

Aos professores e funcionários do Departamento de Matemática da UFMG, que muito contribuíram para minha jornada.

Agradeço à instituição UFSJ pela oportunidade de realizar meu doutorado e por todo auxílio dado nesse tempo.

Muito obrigada a todos que torceram por essa conquista.

Abstract

In this thesis, the main object of study is the class of the $(G, *)$-algebras, that is, algebras graded by a group G and endowed with a graded involution $*$. Firstly, we study the algebraic structure of the $(G, *)$-algebras. In this case, we characterize the finite dimensional simple $(G, *)$-algebras over an algebraically closed field of characteristic zero, where G is a finite abelian group. Moreover, we present the classification of the finite dimensional simple $(C_p, *)$-algebras over any algebraically closed field of characteristic zero, for an odd prime p, extending the results given in [4]. After that, we study the class of the $(G, *)$-algebras in the context of the PI-theory. Our main goal is to characterize the varieties of polynomial growth generated by finite dimensional $(G, *)$-algebras, where G is a finite abelian group. As a consequence, we classify all varieties generate by finite dimensional $(G, *)$-algebras of almost polynomial growth.

Keywords: polynomial identity, graded involution, codimension, almost polynomial growth

Resumo

Nesta tese, o principal objeto de estudo é a classe das $(G,*)$-álgebras, isto é, álgebras graduadas por um grupo G e munidas com uma involução graduada $*$. Primeiramente, estudamos a estrutura algébrica das $(G,*)$-álgebras. Neste caso, caracterizamos as álgebras $(G,*)$-simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, onde G é um grupo abeliano finito. Além disso, classificamos as álgebras $(C_p,*)$-simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, onde p é primo ímpar, estendendo os resultados presentes em [4]. Em sequência, estudamos a classe das $(G,*)$-álgebras na PI-teoria, tendo como objetivo principal caracterizar variedades geradas por $(G,*)$-álgebras de dimensão finita de crescimento polinomial, onde G é um grupo abeliano finito. Como consequência, classificamos todas as variedades geradas por $(G,*)$-álgebras de dimensão finita de crescimento quase polinomial.

Palavras-chave: identidade polinomial, involução graduada, codimensão, crescimento quase polinomial

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Nesta tese, consideramos F um corpo de característica zero, A uma F-álgebra associativa, G um grupo e C_m um grupo cíclico de ordem m. O nosso principal objeto de estudo consiste nas $(G,*)$-álgebras, isto é, álgebras $A = \bigoplus_{g\in G} A^{(g)}$ G-graduadas munidas com uma involução $*$ tal que $(A^{(g)})^* = A^{(g)}$, para todo $g \in G$. Em particular, se $G = C_2$, então uma $(C_2,*)$-álgebra é chamada de $*$-superálgebra. Neste trabalho, desenvolvemos dois problemas centrais em relação às $(G,*)$-álgebras: o primeiro envolve a sua estrutura algébrica e o segundo é o estudo dessa classe de álgebras na PI-teoria. Para melhor compreendê-los, apresentaremos um breve contexto de ambos os casos.

Dizemos que A é uma álgebra simples se $A^2 \neq \{0\}$ e os únicos ideais de A são $\{0\}$ e A. O Teorema de Wedderburn-Artin classifica as álgebras simples de dimensão finita: se A é uma F-álgebra simples de dimensão finita, então $A \cong M_n(D)$, a álgebra de matrizes $n \times n$ com coeficientes em uma álgebra de divisão D de dimensão finita sobre F.

Em sequência, ao considerar as álgebras munidas com alguma estrutura adicional, tais como álgebras com involuções, álgebras G-graduadas e $*$-superálgebras, definimos de forma similar as álgebras $*$-simples, G-simples e $*$-superálgebras simples. A extensão do Teorema de Wedderburn-Artin em cada uma dessas classes de álgebras foram realizadas em [19], [1], [4], respectivamente.

O primeiro problema presente nesta tese consiste em caracterizar as álgebras $(G,*)$-simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, onde G é um grupo abeliano finito. Através desse resultado, apresentamos uma generalização do Teorema de Wedderburn-Malcev para a classe das $(G,*)$-álgebras e classificamos as álgebras $(C_p,*)$-simples, onde p é primo ímpar, estendendo os resultados presentes em [4].

Agora, apresentaremos alguns resultados presentes na PI-teoria que são de interesse para a apresentação do segundo problema a ser tratado. Sejam X um conjunto enumerável de variáveis e $F\langle X\rangle$ a álgebra livre associativa gerada por X sobre F. Um polinômio em

$F\langle X\rangle$ que se anula quando avaliado em quaisquer elementos de uma álgebra A é chamado de identidade polinomial de A. Dizemos que A é uma PI-álgebra se satisfaz uma identidade polinomial não nula. Denotamos por $\mathrm{Id}(A)$ o conjunto de todas as identidades polinomiais satisfeitas por A. Vale ressaltar que $\mathrm{Id}(A)$ é um T-ideal de $F\langle X\rangle$, ou seja, é um ideal invariante por todos os endomorfismos de $F\langle X\rangle$.

Um importante estudo presente na PI-teoria consiste em determinar uma base para o conjunto $\mathrm{Id}(A)$ visto como um T-ideal. Em 1950, Specht conjecturou que o T-ideal de uma álgebra associativa sobre um corpo de característica zero é finitamente gerado, resultado provado somente em 1987 por Kemer [12]. Porém, apesar da grande relevância desse trabalho, Kemer não apresentou uma maneira de obter tal base.

Com o intuito de tornar mais factível o estudo do T-ideal de uma álgebra, Regev [18] introduziu a sequência de codimensões de uma álgebra A denotada por $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$. Essa sequência desempenha um papel importante na PI-teoria, pois é capaz, de certa forma, mensurar o crescimento das identidades polinomiais que são satisfeitas por A. Ao considerar a variedade $\mathcal{V}$ gerada por uma álgebra A, definimos $c_n(\mathcal{V}) = c_n(A)$.

Um questionamento que surge ao tratar a sequência de codimensões de uma álgebra é em relação ao seu comportamento assintótico. O primeiro resultado nesta direção foi obtido por Regev [18], provando que A é uma PI-álgebra se, e somente se, $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$ é exponencialmente limitada, isto é, existem constantes $C, \alpha > 0$ tais que $c_n(A) \leq C\alpha^n$, para todo $n \geq 1$.

Dizemos que uma variedade de álgebras tem crescimento polinomial da sequência de codimensões se existem constantes $C, \alpha > 0$ tais que $c_n(A) \leq Cn^\alpha$, para todo $n \geq 1$. Em [13], Kemer mostrou que uma variedade $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial se, e somente se, $\mathcal{G}$, $UT_2 \notin \mathcal{V}$, onde $\mathcal{G}$ denota a álgebra de Grassmann de dimensão infinita e UT_2 é a álgebra das matrizes triangulares superiores 2×2 com coeficientes em F. Consequentemente, tem-se que as álgebras $\mathcal{G}$ e UT_2 geram as únicas variedades de crescimento quase polinomial, ou seja, essas variedades têm crescimento exponencial, mas toda subvariedade própria de $\mathrm{var}(\mathcal{G})$ e $\mathrm{var}(UT_2)$ tem crescimento polinomial.

Os resultados de Kemer foram estendidos para as classes das álgebras com involução, álgebras G-graduadas e $*$-superálgebras em [7], [21], [4], respectivamente.

O segundo problema deste trabalho consiste na classificação de variedades geradas por $(G,*)$-álgebras de crescimento quase polinomial. Atingimos nosso objetivo na classe das variedades geradas por $(G,*)$-álgebras de dimensão finita, onde G é um grupo abeliano finito.

Esta tese foi divida em três capítulos. No Capítulo 1, apresentamos conceitos e definições básicas sobre álgebras G-graduadas e álgebras com involução. Recordaremos que existe uma dualidade entre G-ações e G-graduações, onde G é um grupo abeliano finito.

Além disso, apresentamos os conceitos necessários para definir a álgebra de grupo torcida, uma álgebra fundamental para este trabalho.

No Capítulo 2, apresentamos a definição e as propriedades do principal objeto de estudo deste trabalho: as $(G, *)$-álgebras. Definimos o conceito de álgebras $(G, *)$-simples e apresentamos uma extensão do Teorema Wedderburn-Malcev para essa classe de álgebras. Além disso, caracterizamos as álgebras $(G, *)$-simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero e apresentamos uma lista completa das álgebras $(C_p, *)$-simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, onde p é um primo ímpar.

No Capítulo 3, estudamos as variedades geradas por $(G, *)$-álgebras. Neste contexto, definimos a sequência de $(G, *)$-codimensões de uma $(G, *)$-álgebra e estudamos seu comportamento assintótico. Neste capítulo se encontra o principal resultado desta tese: a classificação das variedades geradas por $(G, *)$-álgebras de dimensão finita de crescimento quase polinomial, onde G é um grupo abeliano finito. Mostramos que existe apenas uma quantidade finita delas e exibimos uma lista completa das $(G, *)$-álgebras de dimensão finita de crescimento quase polinomial.

Os resultados presentes nesta tese foram publicados em [17].

Capítulo 2

Conceitos Básicos

Ao longo deste trabalho, consideraremos F um corpo de característica zero, A uma álgebra associativa sobre F, G um grupo multiplicativo, com elemento neutro 1, e C_m um grupo cíclico de ordem m. Se A é uma álgebra unitária, denotaremos também por 1 o elemento neutro multiplicativo de A.

Neste capítulo, iremos apresentar a definição de álgebras graduadas por um grupo G, também conhecidas como álgebras G-graduadas. Recordaremos que existe uma dualidade entre $\widehat{G}$-ações e G-graduações, onde G é um grupo abeliano finito e $\widehat{G}$ denota o conjunto de todos os caracteres irredutíveis de G. Além disso, serão apresentadas algumas definições que nos levarão a conceituar a álgebra de grupo torcida, sendo esta uma álgebra de fundamental importância para este trabalho. Na última seção, recordaremos também o conceito e alguns resultados fundamentais a respeito de $*$-álgebras.

2.1 Álgebras G-graduadas

Nesta seção, definiremos as álgebras G-graduadas, exibiremos exemplos e apresentaremos os principais resultados utilizados no decorrer desta tese sobre essa classe de álgebras.

Definição 2.1. *Uma álgebra A é graduada por um grupo G, ou simplesmente, A é uma álgebra G-graduada, se A pode ser escrita como a soma direta de espaços vetoriais $A = \bigoplus_{g\in G} A^{(g)}$, tais que $A^{(g)}A^{(h)} \subseteq A^{(gh)}$, para todos $g, h \in G$.*

Diante desta definição, ao considerar uma álgebra $A = \bigoplus_{g\in G} A^{(g)}$ G-graduada, então todo elemento $a \in A$ pode ser escrito como $a = \sum_{g\in G} a^{(g)}$, onde $a^{(g)} \in A^{(g)}$. Em particular, se A é uma álgebra G-graduada unitária, então $1 \in A^{(1)}$.

Um elemento $a \in A^{(g)}$ é chamado de homogêneo de grau g e denotamos por $\deg(a) = g$ o seu grau homogêneo. Os subespaços vetoriais $A^{(g)}$ são chamados de componentes homogêneas de A de grau g, e um subespaço B de A é chamado homogêneo, ou de um G-subespaço, se $B = \bigoplus_{g\in G} B \cap A^{(g)}$. Analogamente, definimos G-subálgebras e G-ideais.

Sabemos que, se G é um grupo finito, então dada qualquer álgebra G-graduada A, o seu radical de Jacobson, denotado por $J(A)$, é um G-ideal de A (ver [2], Teorema 4.4).

Fixada uma G-graduação na álgebra A, o suporte da G-graduação de A é dado por $\mathrm{supp}(A) = \{g \in G \mid A^{(g)} \neq \{0\}\}$.

A partir de agora, iremos apresentar alguns exemplos de álgebras G-graduadas.

Exemplo 2.2. Toda álgebra A possui uma G-graduação. De fato, basta considerar $A^{(1)} = A$ e $A^{(g)} = \{0\}$, para todo $g \in G - \{1\}$. Esta G-graduação é chamada de G-graduação trivial.

Exemplo 2.3. Sejam $A_1 = \bigoplus_{g\in G} A_1^{(g)}$ e $A_2 = \bigoplus_{g\in G} A_2^{(g)}$ álgebras G-graduadas. Considere $B = A_1 \oplus A_2$ e $B^{(g)} = A_1^{(g)} \oplus A_2^{(g)}$, para todo $g \in G$. Então $B = \bigoplus_{g\in G} B^{(g)}$, fornece uma G-graduação para a álgebra B. Tal procedimento pode ser estendido para uma quantidade arbitrária de álgebras G-graduadas.

Exemplo 2.4. Sejam $A = \bigoplus_{g\in G} A^{(g)}$ e $B = \bigoplus_{g\in G} B^{(g)}$ duas álgebras G-graduadas e denote por $S = \mathrm{supp}(A)$ e $T = \mathrm{supp}(B)$. Se os elementos de S e T comutam entre si, então uma G-graduação em $C = A \otimes B$ é dada por

$$C^{(r)} = \sum_{g_1 g_2 = r} A^{(g_1)} \otimes B^{(g_2)},$$

onde $r \in ST$, e $C^{(h)} = \{0\}$ para todo $h \notin ST$.

Exemplo 2.5. Sejam G um grupo e FG a álgebra de grupo de G sobre F munida com o produto usual, isto é, dados dois elementos $\beta_1 = \sum a_i g_i$ e $\beta_2 = \sum b_j g_j$ em FG, então $\beta_1 \beta_2 = \sum_{i,j} (a_i b_j)(g_i g_j)$, onde $a_i, b_j \in F$ e $g_i, g_j \in G$.

Considere os espaços vetoriais $FG^{(g)} = \mathrm{span}_F\{g\}$, para todo $g \in G$. Assim, $FG = \bigoplus_{g\in G} FG^{(g)}$ fornece uma G-graduação para a álgebra FG, chamada de G-graduação canônica.

Exemplo 2.6. Seja $A = M_n(F)$ a álgebra de matrizes $n \times n$ sobre F. Fixe uma n-upla $\alpha = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$. Denotamos por e_{ij} as matrizes elementares usuais, para todos $1 \leq i, j \leq n$. Para cada $g \in G$, considere o seguinte subespaço de A:

$$A^{(g)} = \mathrm{span}_F\{e_{ij} \mid g_i^{-1} g_j = g\}.$$

É imediato que $A^{(g)}A^{(h)} \subseteq A^{(gh)}$, para todos $g, h \in G$. Assim, a decomposição $M_n(F) = \bigoplus_{g\in G} A^{(g)}$ é uma G-graduação para $M_n(F)$, chamada de graduação elementar induzida pela n-upla α. Vale ressaltar que podemos assumir $g_1 = 1$ em α.

Exemplo 2.7. Sejam $C_2 = \langle g \rangle$ e $n = k + l$ um inteiro não negativo com $k \geq l \geq 0, k \geq 1$. Considere a álgebra $M_n(F)$ com C_2-graduação elementar induzida pela n-upla $\alpha = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, \underbrace{g, \ldots, g}_{l})$. Esta C_2-graduação pode ser vista da seguinte maneira:

$$M_n(F)^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \mid P \in M_k(F), S \in M_l(F) \right\}$$

e

$$M_n(F)^{(g)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & Q \\ R & 0 \end{pmatrix} \mid Q \in M_{k\times l}, R \in M_{l\times k}(F) \right\}.$$

Neste caso, denotaremos essa álgebra C_2-graduada por $M_{k,l}(F)$. Observe que, quando $l = 0$, então $M_{k,0}(F)$ é a álgebra $M_k(F)$ com C_2-graduação trivial.

Vejamos um exemplo que será importante ao longo deste trabalho.

Exemplo 2.8. Considere a álgebra $M_n(F)$ com G-graduação elementar induzida pela n-upla $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ e seja $B = \bigoplus_{g\in G} B^{(g)}$ uma álgebra G-graduada. Considerando $C = M_n(F) \otimes B$, nosso intuito é fornecer uma G-graduação para a álgebra C. Para isso, definimos

$$C^{(g)} = \text{span}_F\{e_{ij} \otimes b \mid \deg(b) = h, g_i^{-1}hg_j = g\},$$

para todo $g \in G$. Claramente, $\bigoplus_{g\in G} C^{(g)}$ é uma G-graduação para a álgebra C chamada de graduação induzida. Observe que, sendo $M_n(F)$ uma álgebra unitária, então B é uma G-subálgebra de C. Se a álgebra B for unitária, então $M_n(F)$ é uma G-subálgebra de C.

Definição 2.9. *Sejam $A = \bigoplus_{g\in G} A^{(g)}$ e $B = \bigoplus_{g\in G} B^{(g)}$ duas álgebras G-graduadas. Dizemos que uma aplicação $\phi : A \to B$ é um isomorfismo de álgebras G-graduadas, se ϕ for um isomorfismo de álgebras que satisfaz $\phi(A^{(g)}) \subseteq B^{(g)}$, para todo $g \in G$.*

Considere a álgebra $C = M_n(F) \otimes B$ com G-graduação descrita no Exemplo 2.8. É bem conhecido que a álgebra C é isomorfa, como álgebra, a $M_n(B)$. Agora, $M_n(B)$ com G-graduação induzida pela n-upla $\alpha = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ tal que $\deg(e_{ij}h) = g_i^{-1}hg_j$, para toda matriz elementar em $M_n(F)$ e para cada elemento homogêneo $h \in B^{(h)}$, é isomorfa, como álgebra G-graduada, a álgebra C.

Exemplo 2.10. Denote por A_1 e A_2 a álgebra $M_3(F)$ munida com C_3-graduação elementar induzida, respectivamente, por $\alpha_1 = (1, 1, g)$ e $\alpha_2 = (1, g^2, g^2)$. Mostraremos que as álgebras A_1 e A_2 são isomorfas como álgebras G-graduadas. Para isso, começaremos exibindo a C_3-graduação de cada uma dessas álgebras.

A C_3-graduação elementar induzida por $\alpha_1 = (1, 1, g)$ na álgebra A_1 é dada por:

$$A_1^{(1)} = \begin{pmatrix} F & F & 0 \\ F & F & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}, \quad A_1^{(g)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1^{(g^2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ F & F & 0 \end{pmatrix}.$$

A C_3-graduação elementar induzida por $\alpha_2 = (1, g^2, g^2)$ na álgebra A_2 é da seguinte maneira:

$$A_2^{(1)} = \begin{pmatrix} F & 0 & 0 \\ 0 & F & F \\ 0 & F & F \end{pmatrix}, \quad A_2^{(g)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2^{(g^2)} = \begin{pmatrix} 0 & F & F \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A aplicação $\phi : A_1 \to A_2$, tal que $\phi(e_{11}) = e_{33}, \phi(e_{22}) = e_{22}, \phi(e_{33}) = e_{11}, \phi(e_{12}) = e_{32}, \phi(e_{13}) = e_{31}, \phi(e_{21}) = e_{23}, \phi(e_{23}) = e_{21}, \phi(e_{31}) = e_{13}$ e $\phi(e_{32}) = e_{12}$, fornece que as álgebras A_1 e A_2 são isomorfas como álgebras C_3-graduadas.

Exemplo 2.11. A álgebra UT_n das matrizes triangulares superiores $n \times n$ sobre um corpo F com G-graduação elementar induzida pela n-upla $\alpha = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ é denotada por UT_n^α. É importante ressaltar que Valenti e Zaicev [22] mostraram que, a menos de isomorfismo de álgebras G-graduadas, toda graduação em UT_n é elementar.

Denotaremos por $\mathcal{G} = \langle 1, e_1, e_2, \ldots \mid e_i e_j = -e_j e_i \rangle$ a álgebra de Grassmann de dimensão infinita sobre F.

Exemplo 2.12. Se G é um grupo de ordem par, então a álgebra de Grassmann $\mathcal{G}$ tem uma G-graduação dada da seguinte maneira: tome um elemento $g \in G$ de ordem 2. Dessa forma, definimos $\mathcal{G}^{(1)}$ como sendo o espaço gerado por todos os monômios de comprimento par em $e_i's$, $\mathcal{G}^{(g)}$ como sendo o espaço gerado por todos os monômios de comprimento ímpar em $e_i's$ e $\mathcal{G}^{(h)} = \{0\}$, para todo $h \neq 1, g$. Denotamos por $\mathcal{G}^g$ a álgebra $\mathcal{G}$ com esta graduação. Observe que, se g_1, g_2 são elementos distintos em G de ordem 2, então $\mathcal{G}^{g_1}$ e $\mathcal{G}^{g_2}$ não são isomorfas como álgebras G-graduadas.

Agora, definiremos a seguir a subálgebra de UT_4 que tem importante relevância para este trabalho.

Considere

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in F \right\}.$$

Observamos que $J(M) = \text{span}_F\{e_{12}, e_{34}\}$ é o radical de Jacobson de M. Além disso, dada uma G-graduação em M, temos que $J(M)$ é um G-ideal de M.

A classificação das G-graduações, a menos de isomorfismo de álgebras G-graduadas, presentes na álgebra M é apresentada a seguir.

Teorema 2.13. *A menos de isomorfismo de álgebras G-graduadas, a álgebra M possui uma das seguintes G-graduações:*

1. $M^{(1)} = \text{span}_F\{1\}$, $M^{(g_1)} = \text{span}_F\{e_{11} + e_{44} - (e_{22} + e_{33})\}$, $M^{(g_2)} = \text{span}_F\{e_{12} - e_{34}\}$, $M^{(g_3)} = \text{span}_F\{e_{12} + e_{34}\}$ *e* $M^{(h)} = \{0\}$, *para todo* $h \notin \{1, g_1, g_2, g_3\}$, *com* $g_1^2 = 1$ *e* $g_1 g_2 = g_3$*;*

2. $M^{(1)} = \text{span}_F\{e_{11} + e_{44}, e_{22} + e_{33}\}$, $M^{(g)} = \text{span}_F\{e_{12}, e_{34}\}$ *e* $M^{(h)} = \{0\}$, *para todo* $h \neq 1, g$*;*

3. $M^{(1)} = \text{span}_F\{1, e_{12} - e_{34}\}$, $M^{(g)} = \text{span}_F\{e_{11} + e_{44} - (e_{22} + e_{33}), e_{12} + e_{34}\}$ *e* $M^{(h)} = \{0\}, h \neq 1, g$, *com* $g^2 = 1$*;*

4. $M^{(1)} = \text{span}_F\{e_{11} + e_{44}, e_{22} + e_{33}\}$, $M^{(g_1)} = \text{span}_F\{e_{12}\}$, $M^{(g_2)} = \text{span}_F\{e_{34}\}$ *e* $M^{(h)} = \{0\}$, *para todo* $h \neq 1, g_1, g_2$*;*

5. $M^{(1)} = \text{span}_F\{e_{11} + e_{44}, e_{22} + e_{33}, e_{34}\}$, $M^{(g)} = \text{span}_F\{e_{12}\}$ *e* $M^{(h)} = \{0\}$, *para todo* $h \neq 1, g$*;*

6. $M^{(1)} = \text{span}_F\{e_{11} + e_{44}, e_{22} + e_{33}, e_{12}\}$, $M^{(g)} = \text{span}_F\{e_{34}\}$ *e* $M^{(h)} = \{0\}$, *para todo* $h \neq 1, g$*;*

7. *G-graduação trivial, ou seja,* $M^{(1)} = M$, $M^{(g)} = \{0\}$, *para todo* $g \in G$, $g \neq 1$.

Com o intuito de demonstrar este teorema, apresentaremos alguns resultados.

Lema 2.14. *Sejam G um grupo e $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$ uma álgebra G-graduada. Se um elemento homogêneo $e \in A$ é idempotente, então $e \in A^{(1)}$.*

Demonstração. Seja e um elemento idempotente não nulo e homogêneo de A. Suponha que, para algum $g \neq 1$, $e \in A^{(g)}$. Logo, $e = e^2 \in A^{(g^2)}$, e como, $A^{(g)} \cap A^{(g^2)} = \{0\}$, obtemos que $e = 0$, uma contradição. $\square$

Para o próximo resultado, recordemos que dada uma álgebra A e um subconjunto $A_1 \subseteq A$, definiremos o anulador à esquerda de A_1 em A por $\mathrm{Ann}_l(A_1) = \{a \in A \mid aa_1 = 0, \text{ para todo } a_1 \in A_1\}$.

Lema 2.15. *Sejam $A = \bigoplus_{g\in G} A^{(g)}$ uma álgebra G-graduada e $a \in A$ um elemento homogêneo. Então, o anulador à esquerda de a em A é um subespaço graduado.*

Demonstração. Suponha que $a \in A^{(g_1)}$, para algum $g_1 \in G$.

Se $x \in A$, então $x = \sum_{g\in G} x^{(g)}$, onde $x^{(g)} \in A^{(g)}$, para todo $g \in G$. Suponha que $x \in \mathrm{Ann}_l(a)$. Logo, $0 = xa = \sum_{g\in G} x^{(g)}a$. Notemos que, $x^{(g)}a \in A^{(gg_1)}$, e além disso, $gg_1 \neq gg_2$, para todo $g_1 \neq g_2$. Dessa forma, xa é dado pela soma de elementos em componentes homogêneas distintas, e assim, $x^{(g)}a = 0$, para todo $g \in G$. Portanto, $x^{(g)} \in \mathrm{Ann}_l(a)$, para todo $g \in G$. $\square$

Agora, estamos aptos para demonstrar o Teorema 2.13. Suponha que M é uma álgebra G-graduada. Inicialmente, considere $\alpha_i, \beta_i, \gamma_j \in F, i = 1, 2,\ j = 1, \ldots, 4$, tais que

$$B = \{1, a, \alpha_1 e_{12} + \alpha_2 e_{34}, \beta_1 e_{12} + \beta_2 e_{34}\},$$

é uma base homogênea para a álgebra M, onde $a = \gamma_1(e_{11} + e_{44}) + \gamma_2(e_{22} + e_{33}) + \gamma_3 e_{12} + \gamma_4 e_{34}$. Observe que, se $\alpha_i = 0$, então $\beta_i \neq 0$ e $\alpha_j \neq 0$, para $i = 1, 2$ e $j \neq i$. E também, se $\beta_i = 0$, então $\alpha_i \neq 0$ e $\beta_j \neq 0$, para $i = 1, 2$ e $j \neq i$. Além disso, como B é uma base de M e $\dim_F(J(M)) = 2$, necessariamente $\gamma_1 \neq \gamma_2$.

Denotaremos por F^* o grupo multiplicativo do corpo F.

Para obter o nosso objetivo, analisaremos todas as possíveis dimensões da componente identidade de M:

1. Suponha que $\dim_F(M^{(1)}) = 1$. Então existem $g, g_i \in G, i = 1, 2, 3$, tais que, ou $\dim_F(M^{(g)}) = 3$, ou $\dim_F(M^{(g_1)}) = 2$ e $\dim_F(M^{(g_2)}) = 1$, ou $\dim_F(M^{(g_1)}) = \dim_F(M^{(g_2)}) = \dim_F(M^{(g_3)}) = 1$. Assim, analisaremos esses casos a seguir.

   - Suponha que, para $1 \neq g \in G$, $\dim_F(M^{(g)}) = 3$. Considere $M^{(1)} = \mathrm{span}_F\{1\}$, $M^{(g)} = \mathrm{span}_F\{a, \alpha_1 e_{12} + \alpha_2 e_{34}, \beta_1 e_{12} + \beta_2 e_{34}\}$ e $M^{(h)} = \{0\}$, para todo $h \neq 1, g$.

     i. Se $g^2 = 1$, então $a(\alpha_1 e_{12} + \alpha_2 e_{34}) = \gamma_1\alpha_1 e_{12} + \gamma_2\alpha_2 e_{34} \in M^{(1)}$. Diante disso, temos que

$$\begin{cases} \gamma_1\alpha_1 = 0 \\ \gamma_2\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Se $\gamma_1 = 0$, então $\gamma_2 \neq 0$. Logo, $\alpha_2 = 0$, e assim, $\alpha_1 \neq 0$ e $\beta_2 \neq 0$. Com isso, $M^{(g)} = \text{span}_F\{\gamma_2(e_{22}+e_{33}) + \gamma_3 e_{12} + \gamma_4 e_{34}, e_{12}, \beta_1 e_{12} + \beta_2 e_{34}\}$. Como $g^2 = 1$, temos que $e_{12}a = \gamma_2 e_{12} \in M^{(1)}$, e concluímos que $\gamma_2 = 0$, uma contradição.

Se $\alpha_1 = 0$, então $\alpha_2 \neq 0$ e $\beta_1 \neq 0$. Assim, $\gamma_2 = 0$, e com isso, $\gamma_1 \neq 0$. Diante disso, $M^{(g)} = \text{span}_F\{\gamma_1(e_{11}+e_{44}) + \gamma_3 e_{12} + \gamma_4 e_{34}, e_{34}, \beta_1 e_{12} + \beta_2 e_{34}\}$. Portanto, $\gamma_1 e_{34} \in M^{(1)}$, e assim, $\gamma_1 = 0$, uma contradição.

ii. Se $g^2 \neq 1$, então

$$a^2 = \gamma_1^2(e_{11}+e_{44}) + \gamma_2^2(e_{22}+e_{33}) + \gamma_3(\gamma_1+\gamma_2)e_{12} + \gamma_4(\gamma_1+\gamma_2)e_{34} = 0. \quad (2.1.1)$$

Logo, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, uma contradição. Concluímos que este caso não pode ocorrer.

- Considere que, para $1 \neq g_1, g_2 \in G$ distintos, $M^{(1)} = \text{span}_F\{1\}$, $M^{(g_1)} = \text{span}_F\{a, \alpha_1 e_{12} + \alpha_2 e_{34}\}$, $M^{(g_2)} = \text{span}_F\{\beta_1 e_{12} + \beta_2 e_{34}\}$ e $M^{(h)} = \{0\}$, para todo $h \notin \{1, g_1, g_2\}$.

  i. Se $g_1^2 = 1$, então $a(\alpha_1 e_{12} + \alpha_2 e_{34}) \in M^{(1)}$. Como vimos anteriormente, essa situação não ocorre.

  ii. Se $g_1^2 = g_2$, então $a^2 \in M^{(g_2)}$. Com isso, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, uma contradição.

  iii. Se $g_1^2 = h$, onde $h \neq 1, g_2$, então $a^2 = 0$. Logo, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, uma contradição.

  Portanto, concluímos que este caso não pode ocorrer.

- Suponha que, para $1 \neq g_1, g_2, g_3 \in G$ distintos, $M^{(1)} = \text{span}_F\{1\}$, $M^{(g_1)} = \text{span}_F\{a\}$, $M^{(g_2)} = \text{span}_F\{\alpha_1 e_{12} + \alpha_2 e_{34}\}$, $M^{(g_3)} = \text{span}_F\{\beta_1 e_{12} + \beta_2 e_{34}\}$ e $M^{(h)} = \{0\}$, para todo $h \notin \{1, g_1, g_2, g_3\}$

  i. Se $g_1^2 = 1$, então $a^2 \in M^{(1)}$. Assim, $a^2 = \mu 1$, para algum $\mu \in F$. Pela Equação 2.1.1, temos que $\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \mu$. Como $\gamma_1 \neq \gamma_2$, então $\gamma_1 = -\gamma_2$. Portanto, podemos considerar $a = e_{11} + e_{44} - (e_{22} + e_{33}) + \gamma_3 e_{12} + \gamma_4 e_{34}$.
  Agora, analisaremos os possíveis resultados que podemos considerar da operação $g_1 g$, para cada $g \in G$. Pelo fato que $g_1^2 = 1$, se $g_1 g_2 = 1$, então $g_1 = g_2$, uma contradição. Além disso, observe que, $g_1 g_2 \neq g_1$ e $g_1 g_2 \neq g_2$, pois $g_1, g_2 \neq 1$. Então, ou $g_1 g_2 = g_3$, ou $g_1 g_2 = h$, $h \notin \{1, g_i\}, i = 1, 2, 3$.
  Suponha que $g_1 g_2 = g_3$. Como $g_1^2 = 1$, então $g_1 g_3 = g_2$. Por um lado, existe $\lambda_1 \in F$, tal que

$$a(\alpha_1 e_{12} + \alpha_2 e_{34}) = \alpha_1 e_{12} - \alpha_2 e_{34} = \lambda_1(\beta_1 e_{12} + \beta_2 e_{34}).$$

Segue de forma imediata que $\alpha_i, \beta_i \neq 0$, $i = 1, 2$. Logo, $\lambda_1 = \alpha_1\beta_1^{-1} = -\alpha_2\beta_2^{-1}$. Assim, podemos considerar $\alpha_2 = -\alpha_1\beta_1^{-1}\beta_2$. Por outro lado, existe $\lambda_2 \in F$, tal que

$$a(\beta_1 e_{12} + \beta_2 e_{34}) = \lambda_2(\alpha_1 e_{12} + \alpha_2 e_{34}).$$

Analogamente ao caso anterior, temos que $\alpha_i, \beta_i \neq 0$, $i = 1, 2$, $\lambda_2 = \beta_1\alpha_1^{-1} = -\beta_2\alpha_2^{-1}$ e $\alpha_2 = -\alpha_1\beta_1^{-1}\beta_2$. Diante disso, temos que $M^{(g_2)} = \mathrm{span}_F\{e_{12} + \alpha e_{34}\}$ e $M^{(g_3)} = \mathrm{span}_F\{e_{12} - \alpha e_{34}\}$, onde $\alpha = -\beta_1^{-1}\beta_2$.
Agora, vamos denotar por $\widetilde{M}$, a álgebra M com G-graduação dada por $M^{(1)} = \mathrm{span}_F\{1\}$, $M^{(g_1)} = \mathrm{span}_F\{e_{11}+e_{44}-(e_{22}+e_{33})\}$, $M^{(g_2)} = \mathrm{span}_F\{e_{12}-e_{34}\}$, $M^{(g_3)} = \mathrm{span}_F\{e_{12} + e_{34}\}$ e $M^{(h)} = \{0\}$, para todo $h \notin \{1, g_1, g_2, g_3\}$. Vamos mostrar que $\widetilde{M}$ é isomorfa a álgebra M com a graduação que construímos nesta situação. Para isso, considere a aplicação

$$\begin{aligned} f : M &\to \widetilde{M} \\ 1 &\mapsto 1 \\ e_{11} + e_{44} - (e_{22} + e_{33}) + \gamma_3 e_{12} + \gamma_4 e_{34} &\mapsto e_{11} + e_{44} - (e_{22} + e_{33}) \\ e_{12} - \alpha e_{34} &\mapsto e_{12} + e_{34} \\ e_{12} + \alpha e_{34} &\mapsto e_{12} - e_{34}. \end{aligned}$$

Claramente, f é um isomorfismo de álgebras G-graduadas.
Para finalizar, suponhamos que $g_1g_2 = h, h \notin \{1, g_i\}, i = 1, 2, 3$. Neste caso, $a(\alpha_1 e_{12} + \alpha_2 e_{34}) = \alpha_1 e_{12} - \alpha_2 e_{34} = 0$. Uma contradição, pois α_1 e α_2 não são ambos nulos.

ii. Se $g_1^2 = g_2$, então $a^2 \in M^{(g_2)}$. Pela Equação 2.1.1, temos que $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, uma contradição.

iii. Seguindo o mesmo raciocínio do anterior, concluímos que $g_1^2 \neq g_3$.

iv. Se $g_1^2 = h$, $h \notin \{1, g_1, g_2, g_3\}$, então, $a^2 = 0$. Através da Equação 2.1.1, temos que $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, uma contradição.
Assim, obtemos o item 1. do Teorema 2.13.

2. Considere que $\dim_F(M^{(1)}) = 2$. Analisaremos os seguintes casos:

- Suponha que, para $1 \neq g \in G$, $M^{(1)} = \mathrm{span}_F\{1, a\}$, $M^{(g)} = \mathrm{span}_F\{\alpha_1 e_{12} + \alpha_2 e_{34}, \beta_1 e_{12} + \beta_2 e_{34}\}$ e $M^{(h)} = \{0\}, h \neq 1, g$. Claramente, temos que $M^{(g)} = \mathrm{span}_F\{e_{12}, e_{34}\}$, e assim, e_{12} e e_{34} são elementos homogêneos. Observe que, $\mathrm{Ann}_l(e_{12}) = \mathrm{span}_F\{e_{12}, e_{34}, e_{22} + e_{33}\}$ e $\mathrm{Ann}_l(e_{34}) = \mathrm{span}_F\{e_{12}, e_{34}, e_{11} + e_{44}\}$.

Logo, pelo Lema 2.15, temos que $\mathrm{Ann}_l(e_{12})$ e $\mathrm{Ann}_l(e_{34})$ são espaços homogêneos. Diante disso, como $e_{11}+e_{44}$ não pode ser uma combinação linear dos elementos de $M^{(g)}$ e $e_{11}+e_{44}$ é idempotente, temos que $e_{11}+e_{44} \in M^{(1)}$. Analogamente, concluímos que $e_{22}+e_{33} \in M^{(1)}$. Logo, a G-graduação é dada por $M^{(1)} = \mathrm{span}_F\{e_{11}+e_{44}, e_{22}+e_{33}\}$, $M^{(g)} = \mathrm{span}_F\{e_{12}, e_{34}\}$ e $M^{(h)} = \{0\}, h \neq 1, g$. Portanto, obtemos o item 2. do Teorema 2.13.

- Considere que, para $1 \neq g \in G$, $M^{(1)} = \mathrm{span}_F\{1, \alpha_1 e_{12} + \alpha_2 e_{34}\}$, $M^{(g)} = \mathrm{span}_F\{a, \beta_1 e_{12} + \beta_2 e_{34}\}$ e $M^{(h)} = \{0\}, h \neq 1, g$.

  i. Se $g^2 = 1$, então $a^2 \in M^{(1)}$. Logo, existem $\lambda_1, \lambda_2 \in F$, tais que $a^2 = \lambda_1 1 + \lambda_2(\alpha_1 e_{12} + \alpha_2 e_{34})$. Isso implica que

$$\begin{cases} \gamma_1^2 = \lambda_1 \\ \gamma_2^2 = \lambda_1 \\ \gamma_3(\gamma_1+\gamma_2) = \lambda_2\alpha_1 \\ \gamma_4(\gamma_1+\gamma_2) = \lambda_2\alpha_2. \end{cases}$$

  Assim, obtemos que $\gamma_1^2 = \gamma_2^2$. Sendo que $\gamma_1 \neq \gamma_2$, concluímos que $\gamma_1 = -\gamma_2$ e, com isso, podemos considerar $a = e_{11}+e_{44}-(e_{22}+e_{33})+\gamma_3 e_{12}+\gamma_4 e_{34}$. Mostraremos que α_i e β_i são não nulos, para todo $i = 1, 2$. De fato, se $\beta_1 = 0$, então $\alpha_1 \neq 0$. Assim, $M^{(g)} = \mathrm{span}_F\{a, e_{34}\}$. Por outro lado, $e_{34}a = e_{34} \in M^{(1)}$, e assim, $\alpha_1 = 0$, uma contradição. Realizando esse mesmo raciocínio para as outras constantes, temos o resultado desejado.
  Portanto, temos que $M^{(1)} = \mathrm{span}_F\{1, e_{12}+\alpha e_{34}\}$, $M^{(g)} = \mathrm{span}_F\{e_{11}+e_{44}-(e_{22}+e_{33})+\gamma_3 e_{12}+\gamma_4 e_{34}, e_{12}+\beta e_{34}\}$ e $M^{(h)} = \{0\}, h \neq 1, g$, para certos $\alpha, \beta \in F^*$. Por fim, como $g^2 = 1$, temos que

$$(e_{11}+e_{44}-(e_{22}+e_{33})+\gamma_3 e_{12}+\gamma_4 e_{34})(e_{12}+\beta e_{34}) \in M^{(1)}.$$

  Assim, temos que $\beta = -\alpha$.
  A álgebra M com esta G-graduação é isomorfa, como álgebra G-graduada, à álgebra M com G-graduação dada por $M^{(1)} = \mathrm{span}_F\{1, e_{12}-e_{34}\}$, $M^{(g)} = \mathrm{span}_F\{e_{11}+e_{44}-(e_{22}+e_{33}), e_{12}+e_{34}\}$ e $M^{(h)} = \{0\}, h \neq 1, g$. De fato, basta verificar que a aplicação f, definida anteriormente, também é um isomorfismo de álgebras G-graduadas para esse caso. Diante disso, temos o item 3. do Teorema 2.13.

  ii. Se $g^2 \neq 1$, então $a^2 = 0$, e como vimos, essa situação não pode ocorrer.

- Considere que, para $1 \neq g_1, g_2 \in G$ distintos, $M^{(1)} = \mathrm{span}_F\{1, a\}$, $M^{(g_1)} = \mathrm{span}_F\{\alpha_1 e_{12}+\alpha_2 e_{34}\}$, $M^{(g_2)} = \mathrm{span}_F\{\beta_1 e_{12}+\beta_2 e_{34}\}$ e $M^{(h)} = \{0\}, h \notin \{1, g_1, g_2\}$.

Dessa forma, $a(\alpha_1 e_{12} + \alpha_2 e_{34}) \in M^{(g_1)}$, ou seja, existe $\mu \in F$, tal que $a(\alpha_1 e_{12} + \alpha_2 e_{34}) = \mu(\alpha_1 e_{12} + \alpha_2 e_{34})$. Com isso temos o seguinte sistema

$$\begin{cases} (\gamma_1 - \mu)\alpha_1 = 0 \\ (\gamma_2 - \mu)\alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Se $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$, então $\gamma_1 = \gamma_2 = \mu$. Uma contradição, pois $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Diante disso, consideraremos os seguinte casos.

i. Se $\alpha_1 = 0$, então $\beta_1 \neq 0$ e $\alpha_2 \neq 0$. Assim, $\gamma_2 = \mu$ e $\gamma_1 \neq \mu$.
   Sabemos também que, $a(\beta_1 e_{12} + \beta_2 e_{34}) \in M^{(g_2)}$. Utilizando o mesmo raciocínio anterior e sendo $\beta_1 \neq 0$, concluímos que $\beta_2 = 0$. Assim essa G-graduação é dada por $M^{(1)} = \mathrm{span}_F\{1, a\}$, $M^{(g_1)} = \mathrm{span}_F\{e_{34}\}, M^{(g_2)} = \mathrm{span}_F\{e_{12}\}$ e $M^{(h)} = \{0\}, h \notin \{1, g_1, g_2\}$.
   Sendo que e_{12} e e_{34} são elementos homogêneos, então, pelos Lemas 2.14, 2.15 e, como visto no caso anterior, concluímos que $e_{11} + e_{44}, e_{22} + e_{33} \in M^{(1)}$. Portanto, $M^{(1)} = \mathrm{span}_F\{e_{11} + e_{44}, e_{22} + e_{33}\}$, $M^{(g_1)} = \mathrm{span}_F\{e_{34}\}$, $M^{(g_2)} = \mathrm{span}_F\{e_{12}\}$ e $M^{(h)} = \{0\}$, para todo $h \notin \{1, g_1, g_2\}$

ii. Ao considerar que $\alpha_2 = 0$, concluímos, de maneira similar ao caso anterior, que $\alpha_1 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$ e $\beta_1 = 0$. Logo, $M^{(1)} = \mathrm{span}_F\{e_{11} + e_{44}, e_{22} + e_{33}\}$, $M^{(g_1)} = \mathrm{span}_F\{e_{12}\}$, $M^{(g_2)} = \mathrm{span}_F\{e_{34}\}$ e $M^{(h)} = \{0\}$, para todo $h \notin \{1, g_1, g_2\}$.
   Portanto, obtemos o item 4. do Teorema 2.13.

- Suponha que, para $1 \neq g_1, g_2 \in G$ distintos, $M^{(1)} = \mathrm{span}_F\{1, \alpha_1 e_{12} + \alpha_2 e_{34}\}$, $M^{(g_1)} = \mathrm{span}_F\{a\}, M^{(g_2)} = \mathrm{span}_F\{\beta_1 e_{12} + \beta_2 e_{34}\}$ e $M^{(h)} = \{0\}, h \notin \{1, g_1, g_2\}$. Logo, temos que $a(\alpha_1 e_{12} + \alpha_2 e_{34}) \in M^{(g_1)}$. Então, existe $\lambda \in F$ tal que

$$a(\alpha_1 e_{12} + \alpha_2 e_{34}) = \lambda a.$$

Isso implica que

$$\begin{cases} \lambda\gamma_1 = 0 \\ \lambda\gamma_2 = 0 \\ \lambda\gamma_3 = \gamma_1\alpha_1 \\ \lambda\gamma_4 = \gamma_2\alpha_2. \end{cases}$$

Suponha que $\lambda = 0$. Se $\alpha_1 = 0$, então $\alpha_2 \neq 0$ e, assim, $\gamma_2 = 0$. Sabendo que γ_1 e γ_2 não são ambos nulos, então $\gamma_1 \neq 0$ e podemos supor que $\gamma_1 = 1$. Logo, a é um elemento idempotente. Portanto, $a \in M^{(1)}$, uma contradição. Se $\alpha_2 = 0$, então, analogamente ao caso anterior, concluímos que $a \in M^{(1)}$, uma contradição.

Se $\lambda \neq 0$, então $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, uma contradição. Portanto, esse caso não ocorre.

3. Suponha que $\dim_F(M^{(1)}) = 3$. Analisaremos os seguintes casos possíveis.

- Considere que, para $1 \neq g \in G$, $M^{(1)} = \text{span}_F\{1, a, \alpha_1 e_{12} + \alpha_2 e_{34}\}$, $M^{(g)} = \text{span}_F\{\beta_1 e_{12} + \beta_2 e_{34}\}$ e $M^{(h)} = \{0\}, h \neq 1, g$. Observe que

$$a(\alpha_1 e_{12} + \alpha_2 e_{34}) = \gamma_1 \alpha_1 e_{12} + \gamma_2 \alpha_2 e_{34} \in M^{(1)},$$

então existem constantes $\lambda_i, i = 1, 2, 3$, tais que $\gamma_1 \alpha_1 e_{12} + \gamma_2 \alpha_2 e_{34} = \lambda_1 1 + \lambda_2 a + \lambda_3(\alpha_1 e_{12} + \alpha_2 e_{34})$. Com isso, temos o seguinte sistema.

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 \gamma_1 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \gamma_2 = 0 \\ \lambda_2 \gamma_3 + \lambda_3 \alpha_1 = \gamma_1 \alpha_1 \\ \lambda_2 \gamma_4 + \lambda_3 \alpha_2 = \gamma_2 \alpha_2. \end{cases}$$

Primeiramente, é possível verificar que, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, pois $\gamma_1 \neq \gamma_2$. Assim, nos resta solucionar o seguinte sistema

$$\begin{cases} \alpha_1(\lambda_3 - \gamma_1) = 0 \\ \alpha_2(\lambda_3 - \gamma_2) = 0. \end{cases}$$

Observe que, se $\lambda_3 - \gamma_1 = \lambda_3 - \gamma_2 = 0$, então $\gamma_1 = \gamma_2$, uma contradição. Assim, temos os seguintes casos para analisar.

Se $\alpha_1 = 0$, então $\alpha_2 \neq 0$ e $\beta_1 \neq 0$. Por sua vez, temos que $a(\beta_1 e_{12} + \beta_2 e_{34}) \in M^{(g)}$. Utilizando de maneira análoga o raciocínio anterior e como $\beta_1 \neq 0$, temos que $\beta_2 = 0$. Assim, os elementos e_{12} e e_{34} são homogêneos. Como visto nos outros casos e pelos Lemas 2.14 e 2.15, concluímos que $e_{11} + e_{44}, e_{22} + e_{33} \in M^{(1)}$. Portanto, $M^{(1)} = \text{span}_F\{e_{11} + e_{44}, e_{22} + e_{33}, e_{34}\}$, $M^{(g)} = \text{span}_F\{e_{12}\}$ e $M^{(h)} = \{0\}, h \neq 1, g$. Logo, obtemos o item 5. do Teorema 2.13.

Se $\alpha_2 = 0$, então, de modo análogo ao caso anterior, temos que $\alpha_1, \beta_2 \neq 0$ e $\beta_1 = 0$. Dessa forma, temos que $M^{(1)} = \text{span}_F\{e_{11} + e_{44}, e_{22} + e_{33}, e_{12}\}$, $M^{(g)} = \text{span}_F\{e_{34}\}$ e $M^{(h)} = \{0\}, h \neq 1, g$. Dessa forma, temos o item 6. do Teorema 2.13.

- Suponha que, para $1 \neq g \in G$, $M^{(1)} = \text{span}_F\{1, \alpha_1 e_{12} + \alpha_2 e_{34}, \beta_1 e_{12} + \beta_2 e_{34}\}$, $M^{(g)} = \text{span}_F\{a\}$ e $M^{(h)} = \{0\}, h \neq 1, g$. Observe que $a(\alpha_1 e_{12} + \alpha_2 e_{34}) \in M^{(g)}$. De modo análogo ao caso anterior, concluímos que este caso não ocorre.

4. Se $\dim_F(M^{(1)}) = 4$, então a G-graduação é trivial. Portanto, obtemos o item 7. do Teorema 2.13.

2.2 Dualidade entre G-graduações e G-ações

Sejam G um grupo e X um conjunto não vazio qualquer. Recordemos que G age à esquerda sobre X se para todo $x \in X$ e para todos $g_1, g_2 \in G$, temos que:

- $x^1 = x$;
- $x^{g_1 g_2} = (x^{g_2})^{g_1}$.

Considere G um grupo abelino finito de ordem k, F um corpo algebricamente fechado e $\widehat{G} = \{\chi_1, \ldots, \chi_k\}$ o conjunto de todos os caracteres irredutíveis de G sobre F. É bem conhecido que $\widehat{G}$ é um grupo isomorfo a G munido com o produto $(\chi_i\chi_j)(g) = \chi_i(g)\chi_j(g)$, para todos $\chi_i, \chi_j \in \widehat{G}$ e para todo $g \in G$. Para mais informações sobre caracteres de grupos finitos o leitor pode consultar a referência 3. Mostraremos que existe uma dualidade entre G-graduações e $\widehat{G}$-ações em álgebras associativas A sobre F (ver [8], Seção 3.2).

Primeiramente, considere $A = \bigoplus\limits_{g\in G} A^{(g)}$ uma álgebra G-graduada.

Definimos a seguinte ação de $\widehat{G}$ sobre A:

$$\begin{array}{ccc} \widehat{G} \times A & \longrightarrow & A \\ (\chi, a) & \longmapsto & \overline{\chi}(a) := \displaystyle\sum_{g\in G} \chi(g) a^{(g)}, \end{array}$$

onde $a = \sum\limits_{g\in G} a^{(g)}$. Esta ação de $\widehat{G}$ sobre A será chamada de ação induzida (ou determinada) pela G-graduação.

Para cada $\chi \in \widehat{G}$, considere a aplicação $\phi_\chi : A \to A$, tal que $\phi_\chi(a) = \overline{\chi}(a)$. Claramente, ϕ_χ é um isomorfismo de espaços vetoriais, para todo $\chi \in \widehat{G}$. Recordemos que o caracter de um grupo abeliano G é um homomorfismo de grupos multiplicativos. Diante disso, se $a = \sum\limits_{g\in G} a^{(g)}$, $b = \sum\limits_{h\in G} b^{(h)} \in A$, então $\phi_\chi(ab) = \overline{\chi}(ab) = \sum\limits_{g,h\in G} \chi(gh) a^{(g)} b^{(h)} = \sum\limits_{g,h\in G} (\chi(g)a^{(g)})(\chi(h)b^{(h)})$. Logo, $\phi_\chi(ab) = \phi_\chi(a)\phi_\chi(b)$. Portanto, ϕ_χ é um automorfismo de A, e assim, $\widehat{G}$ age como automorfismos sobre A.

Proposição 2.16. *Sejam G um grupo abeliano finito não trivial e A uma álgebra G-graduada. Considere V um subespaço da álgebra A. Então, V é homogêneo na G-graduação de A se, e somente se, V é invariante sob a $\widehat{G}$-ação determinada por esta G-graduação. Em particular, um elemento $a \in A$ é homogêneo na G-graduação se, e somente se, a é um autovetor de $\overline{\chi}$, para todo $\chi \in \widehat{G}$.*

Demonstração. Se $V = \bigoplus_{g\in G} V^{(g)}$ é um subespaço homogêneo de A e $\chi \in \widehat{G}$, então $\overline{\chi}(V^{(g)}) \subseteq V^{(g)}$, para todo $g \in G$ e para todo $\chi \in \widehat{G}$. Portanto, $\overline{\chi}(V) \subseteq V$, para todo $\chi \in \widehat{G}$.

Por sua vez, suponha que V é um subespaço de A invariante pela $\widehat{G}$-ação e não é um subespaço homogêneo. Com isso, existe $v = a^{(g_1)} + \cdots + a^{(g_t)} \in V$, onde $a^{(g_1)}, \ldots, a^{(g_t)} \notin V$ e $a^{(g_i)} \in A^{(g_i)}, i = 1, \ldots, t$. Considere $\chi \in \widehat{G}$ tal que $\chi(g_1) = \lambda$ e $\chi(g_2) = \mu$ são distintos. Neste caso, $w = \lambda v - \overline{\chi}(v) = (\lambda - \mu)a^{(g_2)} + \cdots \in V$. Realizando este mesmo processo indutivamente para w, temos que existirá $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$ tal que um múltiplo escalar de $a^{(g_i)}$ pertencerá a V, uma contradição. $\square$

Por meio desses resultados, temos que os espaços vetoriais $A^{(g)}$, para todo $g \in G$, podem ser dados da seguinte maneira:

$$A^{(g)} = \{a \in A \mid \overline{\chi}(a) = \chi(g)a, \forall \chi \in \widehat{G}\}.$$

Por outro lado, a partir de uma G-ação como automorfismos sobre A, é possível obter uma $\widehat{G}$-graduação em A, como veremos a seguir.

A ação de G sobre A pode ser estendida a uma ação da álgebra de grupo FG sobre A da seguinte forma: $a^{\alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_k g_k} = \alpha_1 a^{g_1} + \cdots + \alpha_k a^{g_k}$, onde $g_1, \ldots, g_k \in G$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in F$.

Como F é algebricamente fechado, $FG = \bigoplus_{i=1}^{k} FGf_i$, onde $f_i = \dfrac{1}{k}\sum_{g\in G} \chi_i(g^{-1})g$, para todo $i = 1, \ldots, k$, são os idempotentes minimais de FG (ver [15], Teorema 5.1.11).

Agora, para cada $\chi_i \in \widehat{G}$, definimos

$$A^{(\chi_i)} = \{a \in A \mid a^g = \chi_i(g)a, \forall g \in G\}.$$

Observe que, $gf_i = \chi_i(g)f_i$, para todo $g \in G$ e para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$. De fato,

$$\begin{aligned} gf_i &= \frac{1}{k}\sum_{g_1\in G} \chi_i(g_1^{-1})gg_1 \\ &= \frac{1}{k}\sum_{g_1\in G} \chi_i(g)\chi_i(g_1^{-1})\chi_i(g^{-1})gg_1 \\ &= \chi_i(g)\frac{1}{k}\sum_{g_1\in G} \chi_i((gg_1)^{-1})gg_1 \\ &= \chi_i(g)f_i. \end{aligned}$$

Com isso, $(a^{f_i})^g = a^{\chi_i(g)f_i} = \chi_i(g)a^{f_i}$, e assim, $a^{f_i} \in A^{(\chi_i)}$. Mostraremos que $A^{(\chi_i)}$ é o subespaço gerado pelos elementos a^{f_i}, onde $a \in A$. De fato, ao recordar que $1 =$

$f_1 + \cdots + f_k$, então

$$a = a^{f_1} + \cdots + a^{f_k}, \tag{2.2.1}$$

para todo $a \in A$. Logo, para $a \in A$ e $g \in G$, temos que

$$a^g = a^{gf_1} + \cdots + a^{gf_k} = \chi_1(g)a^{f_1} + \cdots + \chi_k(g)a^{f_k}. \tag{2.2.2}$$

Suponha que $a \in A^{(\chi_i)}$. Então, $a^g = \chi_i(g)a$, e por meio de (2.2.1), temos que $a^g = \chi_i(g)a = \chi_i(g)a^{f_1} + \cdots + \chi_i(g)a^{f_k}$. Por sua vez, através da igualdade (2.2.2), implica que $a^g = \chi_i(g)a^{f_1} + \cdots + \chi_i(g)a^{f_k} = \chi_1(g)a^{f_1} + \cdots + \chi_k(g)a^{f_k}$. Assim, concluímos que $(\chi_i(g) - \chi_j(g))a^{f_j} = 0$, para todo $j = 1, \ldots, k$ e $g \in G$. Dessa forma, $a^{f_j} = 0$ se $i \neq j$. Portanto, $a = a^{f_i}$ e temos o resultado desejado.

Com isso, temos que

$$A = \bigoplus_{\chi \in \widehat{G}} A^{(\chi)}.$$

Suponha que $a \in A^{(\chi)}$ e $b \in A^{(\psi)}$. Então $(ab)^g = (\chi\psi)(g)ab$ e isto implica que $A^{(\chi)}A^{(\psi)} \subseteq A^{(\chi\psi)}$, para todos $\chi, \psi \in \widehat{G}$. Portanto, $A = \bigoplus_{\chi \in \widehat{G}} A^{(\chi)}$ é uma $\widehat{G}$-graduação em A.

Exemplo 2.17. Considere $G = C_3 = \langle g \rangle$ e $M = \mathrm{span}_F\{e_{11} + e_{44}, e_{22} + e_{33}, e_{12}, e_{34}\}$. Seja $\widehat{G}$ o grupo dos caracteres irredutíveis de G, cujos elementos são apresentados na tabela a seguir, onde w é a raiz cúbica primitiva da unidade:

	1	g	g^2
χ_1	*1*	*1*	*1*
χ_2	*1*	w	w^2
χ_3	*1*	w^2	w

Considere a seguinte G-graduação para a álgebra M: $M^{(1)} = \mathrm{span}_F\{e_{11}+e_{44}, e_{22}+e_{33}\}$, $M^{(g)} = \mathrm{span}_F\{e_{12}, e_{34}\}$ e $M^{(g^2)} = \{0\}$.

Defina a ação de $\widehat{G}$ em M por:

$$\begin{array}{rcl} \widehat{G} \times M & \longrightarrow & M \\ (\chi, a) & \longmapsto & \overline{\chi}(a) := \sum_{g \in G} \chi(g)a^{(g)}, \end{array}$$

onde $a = \sum_{g \in G} a^{(g)}$. Dessa forma, temos que

- $\overline{\chi}_1 : M \to M$, $\overline{\chi}_1(a^{(1)} + a^{(g)} + a^{(g^2)}) = a^{(1)} + a^{(g)}$;
- $\overline{\chi}_2 : M \to M$, $\overline{\chi}_2(a^{(1)} + a^{(g)} + a^{(g^2)}) = a^{(1)} + wa^{(g)}$;

- $\overline{\chi}_3 : M \to M$, $\overline{\chi}_3(a^{(1)} + a^{(g)} + a^{(g^2)}) = a^{(1)} + w^2 a^{(g)}$

fornecem todos os automorfismos em M induzidos pela $\widehat{G}$-ação. Portanto, $\widehat{G}$ age por automorfismos sobre M.

Agora, suponha que G age como automorfismos sobre M da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcl} G \times M & \to & M \\ (h, e_{11} + e_{44}) & \mapsto & (e_{11} + e_{44}) \\ (h, e_{22} + e_{33}) & \mapsto & (e_{22} + e_{33}) \\ (1, e_{12}) & \mapsto & e_{12} \\ (g, e_{12}) & \mapsto & w^2 e_{12} \\ (g^2, e_{12}) & \mapsto & w e_{12} \\ (1, e_{34}) & \mapsto & e_{34} \\ (g, e_{34}) & \mapsto & w e_{34} \\ (g^2, e_{34}) & \mapsto & w^2 e_{34}, \end{array}$$

para todo $h \in G$. Ao estender essa ação de G sobre M para uma ação da álgebra de grupo FG sobre M, temos que: $a^{\alpha_1 + \alpha_2 g + \alpha_3 g^2} = \alpha_1 a + \alpha_2 a^g + \alpha_3 a^{g^2}$, para todos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in F$.

Sabemos que, sendo F um corpo algebricamente fechado, então $FG = \bigoplus_{i=1}^{3} FGf_i$, onde f_i é um idempotente minimal de FG, para todo $i = 1, 2, 3$. Verifica-se de maneira breve que, $f_1 = \frac{1}{3}(1 + g + g^2)$, $f_2 = \frac{1}{3}(1 + w^2 g + w g^2)$, e $f_3 = \frac{1}{3}(1 + w^2 g + w g^2)$. Claramente, $f_1 + f_2 + f_3 = 1$.

Definimos,

$$M^{(\chi_i)} = \{a \in M \mid a^g = \chi_i(g)a, \forall g \in G\},$$

para todo $\chi_i \in \widehat{G}$.

Queremos mostrar que, $M = \bigoplus_{\chi \in \widehat{G}} M^{(\chi)}$ fornece uma $\widehat{G}$-graduação em M. Com este intuito, iniciaremos analisando os seguintes casos:

- $(e_{11} + e_{44})^h = e_{11} + e_{44} = \chi_1(h)(e_{11} + e_{44})$, para todo $h \in G$. Logo, $e_{11} + e_{44} \in M^{(\chi_1)}$.

- $(e_{22} + e_{33})^h = e_{22} + e_{33} = \chi_1(h)(e_{22} + e_{33})$, para todo $h \in G$. Assim, $e_{22} + e_{33} \in M^{(\chi_1)}$.

- Afirmamos que, $e_{34} \in M^{(\chi_2)}$. De fato,

$$\begin{aligned}(e_{34})^1 &= e_{34} = \chi_2(1)e_{34}\\ (e_{34})^g &= we_{34} = \chi_2(g)e_{34}\\ (e_{34})^{g^2} &= w^2e_{34} = \chi_2(g^2)e_{34}.\end{aligned}$$

- Por fim, $e_{12} \in M^{(\chi_3)}$, pois

$$\begin{aligned}(e_{12})^1 &= e_{12} = \chi_3(1)e_{12}\\ (e_{12})^g &= w^2e_{12} = \chi_3(g)e_{12}\\ (e_{12})^{g^2} &= we_{12} = \chi_3(g^2)e_{12}.\end{aligned}$$

Com isso, temos que $e_{12}^{g_1} = \chi_3(g_1)e_{12}$, para todo $g_1 \in G$.

Portanto, $M^{(\chi_1)} = \text{span}_F\{e_{11}+e_{44}, e_{22}+e_{33}\}$, $M^{(\chi_2)} = \text{span}_F\{e_{34}\}$, $M^{(\chi_3)} = \text{span}_F\{e_{12}\}$ é uma $\widehat{G}$-graduação para a álgebra M determinada pela $\widehat{G}$-ação.

2.3 Álgebras G-simples

Em [1], Bathurin, Sehgal e Zaicev classificaram as álgebras G-simples a partir das álgebras de grupo torcidas, classificação esta essencial para o nosso trabalho. Com isso, nesta seção, iniciaremos o estudo do segundo grupo de cohomologia de um grupo e apresentaremos os resultados que serão utilizados nos próximos capítulos.

Definição 2.18. *Seja A uma álgebra G-graduada. Dizemos que A é uma álgebra G-simples se $A^2 \neq \{0\}$ e seus únicos G-ideais são $\{0\}$ e A.*

Por meio dessa definição, se A é simples como álgebra, então A é uma álgebra G-simples.

Dada uma álgebra G-graduada A, diremos que um G-ideal I é um G-ideal próprio de A se $I \neq A$.

Exemplo 2.19. Sejam G um grupo e $A = FG$ a álgebra de grupo de G sobre F com G-graduação canônica. Mostraremos que A é uma álgebra G-simples. De fato, suponha que existe um G-ideal próprio não nulo I de A e seja $a \in I$ não nulo. Como I é um G-ideal, temos que $a = a^{(g_1)} + \cdots + a^{(g_k)}$, onde $a^{(g_i)} \in I^{(g_i)}, i = 1, \ldots, k$. Além disso, sendo $a \neq 0$, existe $j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $a^{(g_j)} \neq 0$. Como a G-graduação em A é canônica, $a^{(g_j)} = \beta g_j$, para algum $\beta \in F^*$. Logo, existe $b = (a^{(g_j)})^{-1} \in A$, e sendo I um ideal de A, concluímos que $1 = ba^{(g_j)} \in I$. Assim, $A = I$, uma contradição. Portanto, A é uma álgebra G-simples.

Recordemos que uma álgebra A é semissimples se $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_k$, onde cada A_i é uma álgebra simples. Observe que cada A_i é um ideal simples de A.

Vejamos um resultado que será importante para o próximo capítulo.

Lema 2.20. *Sejam G um grupo abeliano finito e A uma álgebra G-graduada sobre um corpo algebricamente fechado. Se A é semissimples como álgebra, então A possui um ideal G-simples.*

Demonstração. Seja I um ideal simples não nulo de A. Mostraremos que A possui um ideal G-simples. Se I é um G-ideal, então I é um ideal G-simples de A. Suponha que I não é um G-ideal de A e seja $B := \bigoplus_{\chi_i \in \widehat{G}} I^{\overline{\chi}_i}$, onde $I^{\overline{\chi}_i}$ denota a imagem do ideal I pelo automorfismo $\overline{\chi}_i$. Como cada $\overline{\chi}_i$ é um automorfismo, então $I^{\overline{\chi}_i}$ é um ideal simples de B, para todo $\chi_i \in \widehat{G}$. Assim, B é um G-ideal de A. Mostraremos que B é um ideal G-simples de A.

Para isso, suponha que existe um G-ideal próprio não nulo L de B. Então, $L = \bigoplus I^{\overline{\chi}_{i_k}}$, para alguns $\overline{\chi}_{i_k} \in \widehat{G}$. Por outro lado, $L^{\overline{\chi}_i} = L$, para todo $\chi_i \in \widehat{G}$, pois L é um G-ideal. Logo, $L = B$, uma contradição. Portanto, B é um ideal G-simples de A. $\square$

Agora, nosso objetivo consiste no estudo das álgebras de grupo torcidas. Para isso, iniciaremos definindo o segundo grupo de cohomologia de um grupo.

Sejam G um grupo e A um grupo abeliano multiplicativo. Dizemos que G age (à esquerda) sobre A se G age sobre o conjunto A e para todo $g \in G$ e para todos $a_1, a_2 \in A$, $(a_1a_2)^g = a_1^g a_2^g$.

A seguir, apresentaremos a definição de 2-cociclos.

Definição 2.21. *Seja G um grupo que age sobre um grupo abeliano A. Uma aplicação $\sigma : G \times G \to A$ satisfazendo as relações*

i. $\sigma(x, 1) = \sigma(1, x) = 1$;

ii. $\sigma(x, y)\sigma(xy, z) = \sigma(y, z)^x \sigma(x, yz)$,

para todos $x, y, z \in G$ é chamada de 2-cociclo. Denotaremos por $Z^2(G, A)$ o conjunto formado pelos 2-cociclos.

Definimos um produto em $Z^2(G, A)$ por

$$(\sigma_1\sigma_2)(x, y) = \sigma_1(x, y)\sigma_2(x, y),$$

para todos $\sigma_1, \sigma_2 \in Z^2(G, A)$ e para todos $x, y \in G$. Mostraremos que, se $\sigma_1, \sigma_2 \in Z^2(G, A)$, então $\sigma_1\sigma_2 \in Z^2(G, A)$. Claramente, $(\sigma_1\sigma_2)(x, 1) = (\sigma_1\sigma_2)(1, x) = 1$, para todo

$x \in G$. Agora, para cada $x, y, z \in G$, temos que

$$\begin{aligned}
((\sigma_1\sigma_2)(x,y))((\sigma_1\sigma_2)(xy,z)) &= \sigma_1(x,y)\sigma_2(x,y)\sigma_1(xy,z)\sigma_2(xy,z) \\
&= \sigma_1(x,y)\sigma_1(xy,z)\sigma_2(x,y)\sigma_2(xy,z) \\
&= \sigma_1(y,z)^x\sigma_1(x,yz)\sigma_2(y,z)^x\sigma_2(x,yz) \\
&= (\sigma_1(y,z)\sigma_2(y,z))^x\sigma_1(x,yz)\sigma_2(x,yz) \\
&= ((\sigma_1\sigma_2)(y,z))^x((\sigma_1\sigma_2)(x,yz)).
\end{aligned}$$

Portanto, $\sigma_1\sigma_2 \in Z^2(G, A)$, e assim, concluímos que $Z^2(G, A)$ é um grupo abeliano.

Exemplo 2.22. Seja $G = C_3 = \langle g \rangle$ e suponha que G age trivialmente sobre F^*. Considere a aplicação $\sigma : G \times G \to F^*$ dada por $\sigma(g^i, 1) = \sigma(1, g^i) = 1$, $\sigma(g, g) = a_1$, $\sigma(g, g^2) = a_2, \sigma(g^2, g) = a_3, \sigma(g^2, g^2) = a_4$, para todo $i = 0, 1, 2$. Vamos determinar os possíveis valores das constantes a_j, tais que σ é um 2-cociclo. Se σ é um 2-cociclo, então $\sigma(x, y)\sigma(xy, z) = \sigma(y, z)\sigma(x, yz)$, para todos $x, y, z \in G$. Analisaremos os seguintes casos:

- Fixe $x = g$.

  i. Se $y = g$, então $\sigma(g, g)\sigma(g^2, z) = \sigma(g, z)\sigma(g, gz)$, para todo $z \in G$.

  - $*$ Se $z = 1$, então $\sigma(g, g)\sigma(g^2, 1) = \sigma(g, 1)\sigma(g, g)$, e não há o que considerar;
  - $*$ Se $z = g$, então $\sigma(g, g)\sigma(g^2, g) = \sigma(g, g)\sigma(g, g^2)$. Isso nos mostra que $a_2 = a_3$.
  - $*$ Se $z = g^2$, implica que $\sigma(g, g)\sigma(g^2, g^2) = \sigma(g, g^2)\sigma(g, 1)$. Logo, temos que $a_1a_4 = a_2$.

  ii. Suponha que $y = g^2$. Então, $\sigma(g, g^2)\sigma(1, z) = \sigma(g^2, z)\sigma(g, g^2z)$, para todo $z \in G$. Ao realizar todas as análises, para cada $z \in G$, também obtemos que $a_2 = a_3$ e $a_1a_4 = a_2$.

- Ao fixar $x = g^2$, analogamente, concluímos que $a_2 = a_3$ e $a_1a_4 = a_2$.

Portanto, temos que a aplicação σ é um 2-cociclo se, e somente se, $a_2 = a_3$ e $a_1a_4 = a_2$.

Definição 2.23. *Sejam G um grupo que age sobre o grupo abeliano A e $t : G \to A$ uma aplicação qualquer tal que $t(1) = 1$. A aplicação $\delta : G \times G \to A$ dada por $\delta(x, y) = t(y)^x t(x)t(xy)^{-1}$, para todos $x, y \in G$, é dita uma 2-cofronteira. O conjunto formado pelas 2-cofronteiras será denotado por $B^2(G, A)$.*

Toda 2-cofronteira satisfaz as relações *i.* e *ii.* da Definição 2.21. De fato, $\delta(1, x) = \delta(x, 1) = 1$, para todo $x \in G$, e verificamos que

- $\delta(x,y)\delta(xy,z) = t(y)^x t(x)t(xy)^{-1}t(z)^{xy}t(xy)t(xyz)^{-1} = t(y)^x t(x)t(z)^{xy}t(xyz)^{-1}$;

- $\delta(y,z)^x\delta(x,yz) = (t(z)^y t(y)t(yz)^{-1})^x t(yz)^x t(x)t(xyz)^{-1} = t(y)^x t(x)t(z)^{xy}t(xyz)^{-1}$.

Com isso, $\delta(x,y)\delta(xy,z) = \delta(y,z)^x\delta(x,yz)$, para todos $x,y,z \in G$. Portanto, $B^2(G,A)$ está contido em $Z^2(G,A)$.

Nosso próximo objetivo consiste em mostrar que $B^2(G,A)$ é um subgrupo de $Z^2(G,A)$. Para isso, basta verificar que se $\delta_1,\delta_2 \in B^2(G,A)$, então $\delta_1\delta_2 \in B^2(G,A)$, ou seja, existe uma aplicação $t : G \to A$ tal que $(\delta_1\delta_2)(x,y) = t(y)^x t(x)t(xy)^{-1}$, para todo $x,y \in G$. Para isso, considere $\delta_1,\delta_2 \in B^2(G,A)$, definidos de acordo com a Definição 2.23, respectivamente, pelas aplicações t_1 e t_2. Temos que

$$\begin{aligned}
(\delta_1\delta_2)(x,y) &= \delta_1(x,y)\delta_2(x,y)\\
&= t_1(y)^x t_1(x)t_1(xy)^{-1}t_2(y)^x t_2(x)t_2(xy)^{-1}\\
&= (t_1(y)t_2(y))^x(t_1(x)t_2(x))(t_1(xy)t_2(xy))^{-1}.
\end{aligned}$$

Logo, fazendo $t = t_1t_2$ concluímos que $\delta_1\delta_2 \in B^2(G,A)$. Portanto, $B^2(G,A)$ é um subgrupo de $Z^2(G,A)$.

Assim, definimos $H^2(G,A) = \dfrac{Z^2(G,A)}{B^2(G,A)}$ o segundo grupo de cohomologia de G com coeficientes em A. Os elementos de $H^2(G,A)$ são chamados de classes de cohomologia. Além disso, quaisquer dois 2-cociclos que pertencem a mesma classe de cohomologia são chamados de cohomólogos.

Exemplo 2.24. Sejam $G = C_3 = \langle g\rangle$, F um corpo algebricamente fechado e σ um 2-cociclo como apresentado no Exemplo 2.22. Mostraremos que σ é uma 2-cofronteira. Para isso, considere $t : G \to F^*$ a aplicação dada por $t(1) = 1, t(g) = (a_1^2a_4)^{\frac{1}{3}}$ e $t(g^2) = (a_1a_4^2)^{\frac{1}{3}}$. Seja $\delta : G \times G \to F^*$ a 2-cofronteira determinada por t. Dessa forma, temos que

- $\delta(x,1) = \delta(1,x) = 1$, para todo $x \in G$;

- $\delta(g,g) = (a_1^2a_4)^{\frac{2}{3}}(a_1a_4^2)^{\frac{-1}{3}} = a_1$;

- $\delta(g,g^2) = (a_1^2a_4)^{\frac{1}{3}}(a_1a_4^2)^{\frac{1}{3}} = a_1a_4 = a_2$;

- $\delta(g^2,g) = (a_1^2a_4)^{\frac{1}{3}}(a_1a_4^2)^{\frac{1}{3}} = a_2$;

- $\delta(g^2,g^2) = (a_1a_4^2)^{\frac{2}{3}}(a_1^2a_4)^{\frac{-1}{3}} = a_4$.

Isso nos mostra que, $\delta(x,y) = \sigma(x,y)$, para todos $x,y \in G$. Portanto, concluímos que todo 2-cociclo descrito no Exemplo 2.22 é uma 2-cofronteira, e assim, $H^2(C_3,F^*) = \{1\}$.

Agora, apresentaremos uma álgebra de grande importância para este trabalho, a álgebra de grupo torcida. Para isto, assumiremos que G age trivialmente sobre F^*.

Definição 2.25. *Sejam G um grupo e $\sigma \in Z^2(G, F^*)$. A álgebra de grupo torcida $F^\sigma G$ de G sobre F é definida como sendo o espaço vetorial sobre F com base $\{\overline{g} \mid g \in G\}$. Defina o produto nos elementos da base de $F^\sigma G$ por*

$$\overline{g}_1 \star \overline{g}_2 = \sigma(g_1, g_2)\overline{g_1 g_2},$$

para todos $g_1, g_2 \in G$. Devido à condição ii. presente na Definição 2.21, a extensão deste produto fornece uma estrutura de álgebra associativa a $F^\sigma G$. Além disso, verifica-se que $F^\sigma G$ é uma F-álgebra com unidade $\overline{1}$ e $\overline{g}^{-1} = \sigma(g, g^{-1})^{-1}\overline{g^{-1}}$. Se definirmos $(F^\sigma G)^{(g)} = span_F\{\overline{g}\}$, para todo $g \in G$, então $F^\sigma G$ se torna uma álgebra G-graduada.

Uma importante observação a ser feita é que, se G é um grupo abeliano finito, então a álgebra $F^\sigma G$ pode não ser comutativa, como veremos no seguinte exemplo:

Exemplo 2.26. Seja $G = \{1, a, b, ab\} \cong C_2 \times C_2$ o grupo de Klein. Suponha que G age trivialmente sobre F^*.

Considere a aplicação $\sigma : G \times G \to F^*$ dada por $\sigma(1,1) = \sigma(1,x) = \sigma(x,1) = \sigma(a,ab) = \sigma(b,a) = \sigma(ab,b) = 1$ e $\sigma(x,x) = \sigma(a,b) = \sigma(b,ab) = \sigma(ab,a) = -1$, para todo $x \in G$. Verifica-se que esta aplicação satisfaz os itens $i.$ e $ii.$ da Definição 2.21, e com isso, é um 2-cociclo. Na álgebra de grupo torcida $F^\sigma G$, verificamos que $a \star b = -ab \neq ba = b \star a$, e isso nos mostra que apesar do grupo G ser abeliano, temos que a álgebra $F^\sigma G$ não é comutativa.

No entanto, através dos resultados que apresentaremos a seguir, mostraremos que se G é um grupo cíclico finito, então $F^\sigma G \cong FG$. Iniciaremos este estudo por meio do seguinte resultado.

Proposição 2.27. ([11], Capítulo 1, Proposição 5.5) *Seja F um corpo algebricamente fechado de característica zero. Se G é um grupo cíclico finito, então $H^2(G, F^*) = \{1\}$.*

Esta proposição nos diz que, se G é um grupo cíclico finito, então todo 2-cociclo é uma 2-cofronteira.

Definição 2.28. *Dados $\sigma_1, \sigma_2 \in Z^2(G, F^*)$, diremos que $F^{\sigma_1}G$ e $F^{\sigma_2}G$ são equivalentes se são isomorfas como álgebras G-graduadas através de um isomorfismo de álgebras $f : F^{\sigma_1}G \to F^{\sigma_2}G$, e existe uma aplicação $t : G \to F^*$ tal que $f(\overline{g}) = t(g)\hat{g}$, para todo $g \in G$, onde $F^{\sigma_1}G = \mathrm{span}_F\{\overline{g} \mid g \in G\}$ e $F^{\sigma_2}G = \mathrm{span}_F\{\hat{g} \mid g \in G\}$.*

Lema 2.29. ([11], Capítulo 2, Lema 1.1) *Seja G um grupo finito. Então, as álgebras de grupo torcidas $F^\alpha G$ e $F^\beta G$ são equivalentes se, e somente se, α e β são cohomólogos.*

Demonstração. Suponha que as álgebras de grupo torcidas $F^\alpha G$ e $F^\beta G$ são equivalentes. Logo, existe um isomorfismo de F-álgebras $f : F^\alpha G \to F^\beta G$, e uma aplicação $t : G \to F^*$, tal que $f(\overline{g}) = t(g)\hat{g}$, para todo $g \in G$, onde $F^\alpha G = \text{span}_F\{\overline{g} \mid g \in G\}$ e $F^\beta G = \text{span}_F\{\hat{g} \mid g \in G\}$.

Com isso, para todos $x, y \in G$, temos que

$$\begin{aligned} t(xy)\widehat{xy} &= f(\overline{xy}) = f(\alpha(x,y)^{-1}\overline{x}\,\overline{y}) \\ &= \alpha(x,y)^{-1}f(\overline{x}\,\overline{y}) \\ &= \alpha(x,y)^{-1}f(\overline{x})\ f(\overline{y}) \\ &= \alpha(x,y)^{-1}t(x)\hat{x}t(y)\hat{y} \\ &= \alpha(x,y)^{-1}t(x)t(y)\hat{x}\hat{y} \\ &= \alpha(x,y)^{-1}t(x)t(y)\beta(x,y)\widehat{xy}. \end{aligned}$$

Portanto, $\alpha(x,y) = \beta(x,y)t(x)t(y)t(xy)^{-1}$, e assim, α e β pertencem a mesma classe de cohomologia.

Reciprocamente, suponha que α e β são cohomólogos. Com isso, existe uma aplicação $t : G \to F^*$, tal que, $t(1) = 1$ e

$$\alpha(x,y) = \beta(x,y)t(x)t(y)t(xy)^{-1},$$

para todos $x, y \in G$.

Considere a aplicação $f : F^\alpha G \to F^\beta G$, onde $f(\overline{g}) = t(g)\hat{g}$. Notemos que, estendendo linearmente esta aplicação, obtemos que f é um isomorfismo de espaços vetoriais que preserva as componentes homogêneas. Nos resta mostrar que $f(\bar{x}\bar{y}) = f(\overline{x})f(\overline{y})$, para todos $x, y \in G$.

Temos que

$$\begin{aligned} f(\overline{x}\,\overline{y}) &= f(\alpha(x,y)\overline{xy}) = \alpha(x,y)f(\overline{xy}) \\ &= \alpha(x,y)t(xy)\widehat{xy} \\ &= \alpha(x,y)t(xy)\beta(x,y)^{-1}\hat{x}\hat{y} \\ &= (t(x)\hat{x})(t(y)\widehat{y}) = f(\overline{x})f(\overline{y}). \end{aligned}$$

□

Recordemos que o mapa de aumento $\epsilon : FG \to F$, $\epsilon\left(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i$, é um homomorfismo de F-álgebras. Porém, o mapa de aumento da álgebra de grupo torcida pode não ser um homomorfismo de F-álgebras. De fato, considere o mapa de aumento

$\overline{\epsilon} : F^\sigma G \to F$ tal que $\overline{\epsilon}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i g_i\right) = \sum_{i=1}^{n} b_i$, onde σ é um 2-cociclo não trivial. Por um lado, temos que $\overline{\epsilon}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i g_i\right)\overline{\epsilon}\left(\sum_{j=1}^{n} c_j g_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} b_i c_j$. Por outro lado,

$$\overline{\epsilon}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} b_i g_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} c_j g_j\right)\right) = \overline{\epsilon}\left(\sum_{i,j=1}^{n}(b_i c_j)\sigma(g_i, g_j) g_i g_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} b_i c_j \sigma(g_i, g_j).$$

Portanto, em geral, a aplicação $\overline{\epsilon}$ não é um homomorfismo de F-álgebras.

Uma consequência desses resultados é apresentada a seguir.

Teorema 2.30. ([11], Capítulo 2, Corolário 1.2) *Para qualquer $\sigma \in Z^2(G, F^*)$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$F^\sigma G$ é equivalente a FG;*
2. *$F^\sigma G \cong FG$ como álgebras;*
3. *σ é uma 2-cofronteira.*

Demonstração. Inicialmente, segue de forma imediata que 1 implica 2. Através do Lema 2.29, temos que 1 é equivalente a 3.

Por fim, precisamos mostrar que 2 implica em 3. Seja $f : F^\sigma G \to FG$ um isomorfismo de álgebras e considere a aplicação de aumento $\epsilon : FG \to F$. Logo, a aplicação $\overline{\epsilon} = \epsilon \circ f$: $F^\sigma G \to F$ é um homomorfismo de F-álgebras. Assim, para todos $x, y \in G$, obtemos que:

$$\overline{\epsilon}(\overline{x})\overline{\epsilon}(\overline{y}) = \overline{\epsilon}(\overline{x}\,\overline{y}) \;=\; \overline{\epsilon}(\sigma(x,y)\overline{xy}) = \sigma(x,y)\overline{\epsilon}(\overline{xy}),$$

e com isso, $\sigma(x, y) = \overline{\epsilon}(\overline{x})\overline{\epsilon}(\overline{y})\overline{\epsilon}(\overline{xy})^{-1}$. Portanto, pela Definição 2.23, concluímos que α é uma 2-cofronteira. □

Corolário 2.31. *Se G é um grupo cíclico finito, então $F^\sigma G \cong FG$, e com isso, $F^\sigma G$ é uma álgebra comutativa. Em particular, se $G = \{1\}$, então $F^\sigma\{1\} \cong F$.*

A álgebra de grupo torcida foi extremamente importante para que Bahturin, Zaicev e Sehgal em 2008 pudessem classificar as álgebras G-simples.

Teorema 2.32. ([1], Teorema 3) *Seja $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$ uma álgebra G-graduada de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero. Então, A é uma álgebra G-simples se, e somente se, $A \cong M_n(F) \otimes F^\sigma H \cong M_n(F^\sigma H)$, onde H é um subgrupo de G e $\sigma : H \times H \to F^*$ é um 2-cociclo. A G-graduação em $M_n(F^\sigma H)$ é definida considerando uma n-upla $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$, tal que, $\deg(e_{ij}\overline{h}) = g_i^{-1} h g_j$, para toda matriz elementar em $M_n(F)$ e para cada elemento homogêneo $\overline{h} \in F^\sigma H$.*

Diremos que a G-graduação apresentada no teorema anterior para a álgebra $M_n(F^\sigma H)$ é induzida pela n-upla $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$. Vale ressaltar que, se $A \cong M_n(F) \otimes F^\sigma H \cong M_n(F^\sigma H)$, para algum subgrupo H de G, então $M_n(F)$ e $F^\sigma H$ são G-subálgebras de A.

Exemplo 2.33. Sejam $G = \{1, a, b, ab\} \cong C_2 \times C_2$ o grupo de Klein e $H = \{1, a\}$. Considere $A = M_3(F^\sigma H)$, para algum $\sigma \in Z^2(H, F^*)$, com G-graduação induzida pela 3-upla $\alpha = (1, b, ab)$. Agora, apresentaremos essa G-graduação para a álgebra A. Para isso, calcularemos $\deg(e_{ij}h)$, para todos $1 \leq i, j \leq 3$ e para todo $h \in H$.

- Para $h = 1$:

$$\begin{array}{ccc} \deg(e_{11}) = 1 & \deg(e_{21}) = b & \deg(e_{31}) = ab \\ \deg(e_{12}) = b & \deg(e_{22}) = 1 & \deg(e_{32}) = a \\ \deg(e_{13}) = ab & \deg(e_{23}) = a & \deg(e_{33}) = 1 \end{array}$$

- Para $h = a$:

$$\begin{array}{ccc} \deg(e_{11}a) = a & \deg(e_{21}a) = ab & \deg(e_{31}a) = b \\ \deg(e_{12}a) = ab & \deg(e_{22}a) = a & \deg(e_{32}a) = 1 \\ \deg(e_{13}a) = b & \deg(e_{23}a) = 1 & \deg(e_{33}a) = a \end{array}$$

Portanto, temos que

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} F & 0 & 0 \\ 0 & F & F^\sigma a \\ 0 & F^\sigma a & F \end{pmatrix}, \quad A^{(a)} = \begin{pmatrix} F^\sigma a & 0 & 0 \\ 0 & F^\sigma a & F \\ 0 & F & F^\sigma a \end{pmatrix},$$

$$A^{(b)} = \begin{pmatrix} 0 & F & F^\sigma a \\ F & 0 & 0 \\ F^\sigma a & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{(ab)} = \begin{pmatrix} 0 & F^\sigma a & F \\ F^\sigma a & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que no Exemplo 2.33 temos que $M_n(F)^{(1)} \neq A^{(1)}$.

Observação 2.34. ([14], após Teorema 1) Sejam G um grupo, H um subgrupo de G e $A = M_n(F^\sigma H)$ com G-graduação induzida pela n-upla $\alpha = (g_1, g_2, \ldots, g_n) \in G^n$. Então, existe uma n-upla $\alpha' \in G^n$ que fornece uma G-graduação induzida em A tal que $A^{(1)} = M_n(F)^{(1)}$, e a álgebra A com G-graduação induzida por α' é isomorfa, como álgebra G-graduada, à álgebra A com G-graduação induzida por α.

A partir de agora, ao considerar a álgebra G-simples $A = M_n(F^\sigma H)$ com G-graduação induzida pela n-upla $\alpha = (g_1, g_2, \ldots, g_n) \in G^n$, onde H um subgrupo de G, iremos assumir que $A^{(1)} = M_n(F)^{(1)}$.

Através da Observação 2.34, apresentaremos a seguir um resultado que é crucial neste trabalho.

Lema 2.35. ([14], Lema 1) *Sejam G um grupo abelino finito, H um subgrupo de G e $A = M_n(F^\sigma H)$ com G-graduação induzida pela n-upla $\alpha = (1, g_2, \ldots, g_n) \in G^n$. Se $K = \mathrm{supp}(M_n(F))$, então $K \cap H = \{1\}$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que existe $1 \neq h \in K \cap H$. Considere $x \in M_n(F)^{(h)}$ e $r \in F^\sigma H^{(h^{-1})}$. Sendo G um grupo abeliano, temos que $\deg(xr) = 1$. Logo, pela Observação 2.34, implica que $xr \in A^{(1)} = M_n(F)^{(1)}$, e assim, $r = 1$, uma contradição. □

Observação 2.36. *Através do Lema 2.35, temos que dada uma álgebra $A \cong M_n(F^\sigma H)$, para algum subgrupo H de G, com G-graduação induzida pela n-upla $\alpha = (1, g_2, \ldots, g_n) \in G^n$, então, para todo $g_i \neq 1$, temos que $g_i \notin H$. De fato, suponha que existe $j \in \{2, \ldots, n\}$, tal que $1 \neq g_j \in H$. Observe que, deg$(e_{1j}) = g_j$, e assim, $g_j \in$ supp$(M_n(F))$. Pelo Lema 2.35, temos que $g_j \in$ supp$(M_n(F)) \cap H = \{1\}$, uma contradição.*

2.4 Álgebras com involução

Nesta seção, recordaremos o conceito de $*$-álgebras e apresentaremos alguns importantes resultados.

Definição 2.37. *Uma involução em uma álgebra A é um antiautomorfismo de ordem no máximo 2 denotada por $*$, ou seja, é uma aplicação linear $* : A \to A$ tal que $(a^*)^* = a$ e $(ab)^* = b^* a^*$, para todos $a, b \in A$. Uma álgebra munida com uma involução é chamada de $*$-álgebra.*

Como F é um corpo de característica zero, toda $*$-álgebra pode ser escrita como $A = A^+ \oplus A^-$, onde $A^+ = \{a \in A \mid a^* = a\}$ e $A^- = \{a \in A \mid a^* = -a\}$.

Observe que um antiautomorfismo de ordem 1 é a aplicação identidade, e com isso, será uma involução em A se, e somente se, A é uma álgebra comutativa.

Exemplo 2.38. A álgebra FC_2 munida com a involução $(a_1 + a_2 h)^* = a_1 - a_2 h$, para todos $a_1, a_2 \in F$, é uma $*$-álgebra denotada por $(FC_2)_*$.

Exemplo 2.39. Na álgebra $M_n(F)$, a aplicação

$$\begin{array}{rcl} t : M_n(F) & \to & M_n(F) \\ (a_{ij}) & \mapsto & (a_{ji}). \end{array}$$

é uma involução chamada de involução transposta.

Exemplo 2.40. A álgebra $M_{2n}(F)$, pode ser munida com a involução simplética, denotada por s, dada por

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}^s = \begin{pmatrix} E^t & -C^t \\ -D^t & B^t \end{pmatrix},$$

onde $B, C, D, E \in M_n(F)$.

Vale ressaltar que, a menos de equivalência, as únicas involuções na álgebra de matrizes $n \times n$ sobre um corpo F são a involução transposta e a involução simplética, sendo que o último caso só ocorre quando n é par (ver [20], Corolário 3.1.58).

Dada uma álgebra A, definimos a álgebra oposta de A, denotada por A^{op}, com a mesma estrutura de espaço vetorial de A, e o produto em A^{op} é definido por $a_1 \cdot a_2 = a_2 a_1$, para todos $a_1, a_2 \in A$.

Exemplo 2.41. Sejam A uma álgebra e $B = A \oplus A^{op}$. A aplicação $\diamond : B \to B$, dada por $(a_1, a_2)^{\diamond} = (a_2, a_1)$, para todos $a_1, a_2 \in A$, é uma involução em B, chamada de involução troca.

Definição 2.42. *Sejam A_1 e A_2 duas álgebras munidas, respectivamente, com as involuções ψ_1 e ψ_2. Dizemos que essas álgebras são isomorfas como álgebras com involução, se existe um isomorfismo de álgebras $\varphi : A_1 \to A_2$, tal que, $\varphi(a^{\psi_1}) = \varphi(a)^{\psi_2}$, para todo $a \in A_1$.*

Exemplo 2.43. Sejam A uma $*$-álgebra e I um ideal de A tal que $I^* \neq I$. Considere $B_1 = I \oplus I^*$. A aplicação $\bar{*} : B_1 \to B_1$ dada por $(a_1, a_2^*)^{\bar{*}} = (a_2, a_1^*)$ é uma involução em B_1. Considere a álgebra $B_2 = I \oplus I^{op}$ munida com involução troca. A aplicação $\phi : B_1 \to B_2$, tal que, $\phi(a, b^*) = (a, b)$ é um isomorfismo de $*$-álgebras.

Exemplo 2.44. Considere $D = F \oplus F$ munida com involução troca. A aplicação $\phi : D \to (FC_2)_*$ tal que $\phi((a, b)) = \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}(a - b)g$ é um isomorfismo de $*$-álgebras.

Exemplo 2.45. A subálgebra de UT_4

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in F \right\},$$

munida com a involução reflexão

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{\rho} = \begin{pmatrix} a & d & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix},$$

é uma $*$-álgebra.

O nosso próximo estudo consiste em classificar, a menos de isomorfismos de $*$-álgebras, todas as involuções presentes na álgebra M. Para isso, temos a seguinte observação.

Observação 2.46. *Sejam A uma $*$-álgebra e $a \in A$. Se $a \in A$ é idempotente (nilpotente), então a^* é idempotente (nilpotente). Além disso, se A é uma álgebra unitária, então $1^* = 1$.*

Para dar prosseguimento ao nosso objetivo, se faz necessário classificar todos os elementos idempotentes da álgebra M. Vejamos este resultado a seguir, onde denotamos $1 = e_{11} + e_{22} + e_{33} + e_{44}$.

Lema 2.47. *Os elementos idempotentes da álgebra M são: $0, 1, e_{11} + e_{44} + \alpha_1 e_{12} + \alpha_2 e_{34}$ e $e_{22} + e_{33} + \beta_1 e_{12} + \beta_2 e_{34}$, para todos $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in F$.*

Demonstração. Seja $e = a_1(e_{11} + e_{44}) + a_2(e_{22} + e_{33}) + a_3 e_{12} + a_4 e_{34}$, $a_1, a_2, a_3, a_4 \in F$ um elemento idempotente de M. Logo, $e = e^2 = a_1^2(e_{11} + e_{44}) + a_2^2(e_{22} + e_{33}) + (a_1 a_3 + a_2 a_3)e_{12} + (a_2 a_4 + a_1 a_4)e_{34}$.

Por meio dessa igualdade, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_1(a_1 - 1) = 0 \\ a_2(a_2 - 1) = 0 \\ a_3(a_1 + a_2 - 1) = 0 \\ a_4(a_1 + a_2 - 1) = 0 \end{cases}$$

Com o intuito de solucionar este sistema, basta analisar os possíveis valores para a_1 e a_2, como veremos a seguir:

1. Suponha que $a_1 = 0$. Se $a_2 = 0$, então $a_3 = a_4 = 0$ e $e = 0$.

   Se $a_2 \neq 0$, então $a_2 = 1$. Portanto, a_3 e a_4 podem assumir quaisquer valores em F. Neste caso, temos que $e = e_{22} + e_{33} + a_3 e_{12} + a_4 e_{34}$.

2. Se $a_2 = 0$, então, analogamente ao caso anterior, concluímos que ou $e = 0$, ou $e = e_{11} + e_{44} + a_3 e_{12} + a_4 e_{34}$.

3. Se $a_1 a_2 \neq 0$, então $a_1 = a_2 = 1$. Logo $a_3 = a_4 = 0$, e portanto, $e = 1$.

□

Agora, suponha que $c = b_1(e_{11} + e_{44}) + b_2(e_{22} + e_{33}) + b_3 e_{12} + b_4 e_{34}$, para certos $b_i \in F, 1 \leq i \leq 4$, é um elemento nilpotente de M de índice de nilpotência n. Assim,

$$c^n = b_1^n(e_{11} + e_{44}) + b_2^n(e_{22} + e_{33}) + \alpha e_{12} + \beta e_{34} = 0,$$

para alguns $\alpha, \beta \in F$. Logo, $b_1 = b_2 = 0$, e portanto, $c = b_3e_{12} + b_4e_{34}$.

Por meio destes resultados apresentados, estamos aptos para classificar as involuções em M. A estratégia para solucionar este problema é a seguinte: primeiramente, seja $*$ uma involução em M. Ao observamos que a base $\{e_{11} + e_{44}, e_{22} + e_{33}, e_{12}, e_{34}\}$ da álgebra M é formada por elementos idempotentes e nilpotentes não triviais, pela Observação 2.46, suas respectivas imagens pela aplicação $*$ são elementos idempotentes e nilpotentes não triviais. Logo, $(e_{12})^* = a_1e_{12} + a_2e_{34}$ e $(e_{34})^* = b_1e_{12} + b_2e_{34}$, para alguns $a_1, a_2, b_1, b_2 \in F$, e $(e_{11} + e_{44})^*$ e $(e_{22} + e_{33})^*$ são idempotentes não triviais conforme descritos no Lema 2.47. Assim, temos os seguintes casos:

- Considere

$$\begin{aligned} * : M &\to M \\ e_{11} + e_{44} &\mapsto e_{11} + e_{44} + \alpha_1e_{12} + \alpha_2e_{34} \\ e_{22} + e_{33} &\mapsto e_{22} + e_{33} + \beta_1e_{12} + \beta_2e_{34} \\ e_{12} &\mapsto a_1e_{12} + a_2e_{34} \\ e_{34} &\mapsto b_1e_{12} + b_2e_{34}, \end{aligned}$$

para $a_1, a_2, b_1, b_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in F$. Agora, usaremos as propriedades da involução para encontrar todas as relações possíveis para essas variáveis.

Sabemos que, $1^* = 1$, e assim, $(e_{11}+e_{22}+e_{33}+e_{44})^* = 1+(\alpha_1+\beta_1)e_{12}+(\alpha_2+\beta_2)e_{34}$. Por meio dessa igualdade, concluímos que $\beta_1 = -\alpha_1$ e $\beta_2 = -\alpha_2$.

Observe que, $(e_{12})^* = ((e_{11} + e_{44})e_{12})^*$. Assim, $a_1e_{12} + a_2e_{34} = (a_1e_{12} + a_2e_{34})(e_{11} + e_{44} + \alpha_1e_{12} + \alpha_2e_{34}) = a_2e_{34}$. Logo, $a_1 = 0$.

Além disso, como $(e_{34})^* = (e_{34}(e_{11} + e_{44}))^*$, concluímos que $b_2 = 0$. Em seguida, temos que, $e_{12} = (e_{12}^*)^* = (a_2e_{34})^* = a_2b_1e_{12}$, e assim, obtemos que $b_1 = a_2^{-1}$. Para finalizar a nossa análise, observamos que $e_{11} + e_{44} = ((e_{11} + e_{44})^*)^*$, e para esta igualdade ser satisfeita, concluímos que $\alpha_2 = -\alpha_1a_2$. Portanto, para $a \in F^*$, a involução considerada neste caso é dada por

$$\begin{aligned} * : M &\to M \\ e_{11} + e_{44} &\mapsto e_{11} + e_{44} + \alpha_1e_{12} - \alpha_1ae_{34} \\ e_{22} + e_{33} &\mapsto e_{22} + e_{33} - \alpha_1e_{12} + \alpha_1ae_{34} \\ e_{12} &\mapsto ae_{34} \\ e_{34} &\mapsto a^{-1}e_{12}. \end{aligned}$$

A aplicação

$$\begin{aligned} f:(M,\rho) &\rightarrow (M,*) \\ e_{11}+e_{44} &\mapsto e_{11}+e_{44}+\alpha_1 e_{12} \\ e_{22}+e_{33} &\mapsto e_{22}+e_{33}-\alpha_1 e_{12} \\ e_{12} &\mapsto e_{12} \\ e_{34} &\mapsto a e_{34}, \end{aligned}$$

nos fornece que $(M,*)$ e (M,ρ) são isomorfas como $*$-álgebras.

- Agora, suponha que $*$ é dada por:

$$\begin{aligned} *:M &\rightarrow M \\ e_{11}+e_{44} &\mapsto e_{22}+e_{33}+\alpha_1 e_{12}+\alpha_2 e_{34} \\ e_{22}+e_{33} &\mapsto e_{11}+e_{44}+\beta_1 e_{12}+\beta_2 e_{34} \\ e_{12} &\mapsto a_1 e_{12}+a_2 e_{34} \\ e_{34} &\mapsto b_1 e_{12}+b_2 e_{34}, \end{aligned}$$

para $a_1, a_2, b_1, b_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in F$. Como visto, $1^* = 1$ implicando que $\beta_1 = -\alpha_1$ e $\beta_2 = -\alpha_2$. Por sua vez, a igualdade $(e_{12})^* = ((e_{11}+e_{44})e_{12})^*$ nos fornece que $a_2 = 0$. E também, temos que $(e_{34})^* = (e_{34}(e_{11}+e_{44}))^*$, e com isso, $b_1 = 0$. Além disso, $e_{12} = (e_{12}^*)^*$ e $e_{34} = (e_{34}^*)^*$, e assim, $a_1 = \pm 1$ e $b_2 = \pm 1$. Por fim, ao verificar que $((e_{11}+e_{44})^*)^* = e_{11}+e_{44}$, chegamos ao seguinte sistema

$$\begin{cases} \alpha_1(a_1-1) = 0 \\ \alpha_2(b_2-1) = 0 \end{cases}$$

Com o intuito de solucionar este sistema e já conhecendo os possíveis valores para a_1 e b_2, analisaremos os seguintes casos possíveis.

1. Se $a_1 = b_2 = 1$, então α_1 e α_2 são quaisquer elementos em F. Neste caso, temos a seguinte involução

$$\begin{aligned} \phi_1:M &\rightarrow M \\ e_{11}+e_{44} &\mapsto e_{22}+e_{33}+\alpha_1 e_{12}+\alpha_2 e_{34} \\ e_{22}+e_{33} &\mapsto e_{11}+e_{44}-\alpha_1 e_{12}-\alpha_2 e_{34} \\ e_{12} &\mapsto e_{12} \\ e_{34} &\mapsto e_{34}. \end{aligned}$$

Considere a involução

$$\begin{aligned} \gamma_1 : M &\to M \\ e_{11} + e_{44} &\mapsto e_{22} + e_{33} \\ e_{22} + e_{33} &\mapsto e_{11} + e_{44} \\ e_{12} &\mapsto e_{12} \\ e_{34} &\mapsto e_{34}. \end{aligned}$$

Mostraremos que (M, ϕ_1) e (M, γ_1) são isomorfas, como $*$-álgebras. Para isso, basta verificar que a aplicação $f_1 : (M, \gamma_1) \to (M, \phi_1)$ tal que $f_1(e_{11} + e_{44}) = e_{22}+e_{33}+\frac{1}{2}\alpha_1 e_{12}+\frac{1}{2}\alpha_2 e_{34}$, $f_1(e_{22}+e_{33}) = e_{11}+e_{44}-\frac{1}{2}\alpha_1 e_{12}-\frac{1}{2}\alpha_2 e_{34}$, $f_1(e_{12}) = e_{34}$, $f_1(e_{34}) = e_{12}$, é um isomorfismo de $*$-álgebras.

2. Se $a_1 = 1$ e $b_2 = -1$, então $\alpha_2 = 0$ e α_1 é um elemento qualquer em F. Diante disso, temos a involução

$$\begin{aligned} \phi_2 : M &\to M \\ e_{11} + e_{44} &\mapsto e_{22} + e_{33} + \alpha_1 e_{12} \\ e_{22} + e_{33} &\mapsto e_{11} + e_{44} - \alpha_1 e_{12} \\ e_{12} &\mapsto e_{12} \\ e_{34} &\mapsto -e_{34}. \end{aligned}$$

Verificaremos que (M, ϕ_2) e (M, γ_2) são isomorfas, como $*$-álgebras, onde

$$\begin{aligned} \gamma_2 : M &\to M \\ e_{11} + e_{44} &\mapsto e_{22} + e_{33} \\ e_{22} + e_{33} &\mapsto e_{11} + e_{44} \\ e_{12} &\mapsto -e_{12} \\ e_{34} &\mapsto e_{34}. \end{aligned}$$

Com este intuito, a aplicação $f_2 : (M, \gamma_2) \to (M, \phi_2)$ tal que $f_2(e_{11} + e_{44}) = e_{22}+e_{33}+\frac{1}{2}\alpha_1 e_{12}$, $f_2(e_{22}+e_{33}) = e_{11}+e_{44}-\frac{1}{2}\alpha_1 e_{12}$, $f_2(e_{12}) = e_{34}$, $f_2(e_{34}) = e_{12}$, nos fornece um isomorfismo de $*$-álgebras.

3. Sejam $a_1 = -1$ e $b_2 = 1$. Então, $\alpha_1 = 0$ e α_2 é um elemento qualquer em F.

Assim, temos a involução

$$\begin{array}{rcl}\phi_3 : M & \to & M \\ e_{11} + e_{44} & \mapsto & e_{22} + e_{33} + \alpha_2 e_{34} \\ e_{22} + e_{33} & \mapsto & e_{11} + e_{44} - \alpha_2 e_{34} \\ e_{12} & \mapsto & -e_{12} \\ e_{34} & \mapsto & e_{34}.\end{array}$$

Ao considerar a involução

$$\begin{array}{rcc}\gamma_3 : M & \to & M \\ e_{11} + e_{44} & \mapsto & e_{22} + e_{33} \\ e_{22} + e_{33} & \mapsto & e_{11} + e_{44} \\ e_{12} & \mapsto & e_{12} \\ e_{34} & \mapsto & -e_{34},\end{array}$$

então (M, ϕ_3) e (M, γ_3) são isomorfas como $*$-álgebra. De fato, temos que a aplicação $f_3 : (M, \gamma_3) \to (M, \phi_3)$ dada por $f_3(e_{11} + e_{44}) = e_{22} + e_{33} + \frac{1}{2}\alpha_2 e_{34}$, $f_3(e_{22}+e_{33}) = e_{11}+e_{44}-\frac{1}{2}\alpha_2 e_{12}$, $f_3(e_{12}) = e_{34}$, $f_3(e_{34}) = e_{12}$, é um isomorfismo de $*$-álgebras.

É possível verificar que (M, γ_2) e (M, γ_3) são isomorfas como $*$-álgebras.

4. Sejam $a_1 = b_2 = -1$. Logo, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Dessa forma, a involução neste caso é dada por

$$\begin{array}{rcl}\phi_4 : M & \to & M \\ e_{11} + e_{44} & \mapsto & e_{22} + e_{33} \\ e_{22} + e_{33} & \mapsto & e_{11} + e_{44} \\ e_{12} & \mapsto & -e_{12} \\ e_{34} & \mapsto & -e_{34}.\end{array}$$

Denotaremos a involução ϕ_4 por γ_4.

Através desses resultados, obtemos a classificação das involuções na álgebra M. Utilizaremos as notações apresentadas acima.

Teorema 2.48. *Se a álgebra M está munida com uma involução $*$, então $(M, *)$ é isomorfa, como álgebra com involução, ou a (M, ρ), ou a (M, γ_1), ou a (M, γ_2), ou a (M, γ_4).*

Agora, estudaremos as álgebras $*$-simples.

Definição 2.49. *Seja A uma $*$-álgebra. Um ideal I de A é um $*$-ideal se $I^* = I$. Dizemos que uma $*$-álgebra é uma álgebra $*$-simples se $A^2 \neq \{0\}$ e os únicos $*$-ideais de A são $\{0\}$ e A.*

Através dessa definição, temos que se A é uma álgebra simples como álgebra, então A é uma álgebra $*$-simples.

Exemplo 2.50. Considere a álgebra $A = (FC_2)_*$ munida com a involução $(a_1 + a_2 g)^* = a_1 - a_2 g$, para todos $a_1, a_2 \in F$. Mostraremos que $(FC_2)_*$ é uma álgebra $*$-simples. Para isso, recordemos que os únicos ideais não triviais de A são $I_1 = \text{span}_F\{1 + g\}$ e $I_2 = \text{span}_F\{1 - g\}$. Diante disso, I_1 e I_2 não são $*$-ideais de A, pois $I_1^* = I_2$ e $I_2^* = I_1$. Portanto, os únicos $*$-ideais de A são $\{0\}$ e A, e assim, A é uma álgebra $*$-simples.

Recordemos que se A é uma $*$-álgebra de dimensão finita sobre F e $J = J(A)$ é o radical de Jacobson de A, então J é um $*$-ideal de A.

Um importante resultado em relação a estrutura algébrica das $*$-álgebras é a classificação das álgebras $*$-simples, como veremos a seguir.

Teorema 2.51. ([19], Proposição 2.13.24) *Seja A uma álgebra $*$-simples de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado de característica zero. Então A, ou é isomorfa a $M_n(F)$ com involução transposta ou simplética, ou é isomorfa a $M_n(F) \oplus M_n(F)^{op}$ com involução troca.*

Demonstração. Seja A uma álgebra $*$-simples de dimensão finita. Como A não é uma álgebra nilpotente e $J(A)$ é um $*$-ideal de A, então $J(A) = 0$. Logo, A é uma álgebra semissimples.

Seja I um ideal simples não nulo de A.

Se I é um $*$-ideal de A e sendo A uma álgebra $*$-simples, então $I = A$, e assim, $A \cong M_n(F)$ munida com involução transposta ou com involução simplética (caso n é par).

Suponha que I não é um $*$-ideal de A. Considere $B = I \oplus I^*$, e claramente, B é um $*$-ideal de A. Dessa forma, temos que $A = B$, pois A é uma álgebra $*$-simples, e assim, $A \cong M_n(F) \oplus M_n(F)^*$. Em luz do Exemplo 2.43, a álgebra $A \cong M_n(F) \oplus M_n(F)^*$ com involução $\bar{*}$ dada por $(a_1, a_2^*)^{\bar{*}} = (a_2, a_1^*)$ é isomorfa, como $*$-álgebra, a $A \cong M_n(F) \oplus M_n(F)^{op}$ com involução troca. $\square$

Capítulo 3

Álgebras com involução graduada

Neste capítulo, apresentaremos o principal objeto de estudo deste trabalho, as chamadas $(G,*)$-álgebras, álgebras G-graduadas munidas com uma involução $*$ tal que suas componentes homogêneas são invariantes por $*$. O nosso interesse consiste no estudo da classe das $(G,*)$-álgebras na PI-teoria. Para isso, apresentaremos neste capítulo resultados sobre a estrutura algébrica dessa classe de álgebras.

3.1 $(G,*)$-álgebras

Nesta seção, definiremos o conceito de $(G,*)$-álgebras e apresentaremos resultados e exemplos que serão importantes no decorrer desta tese.

Definição 3.1. *Uma álgebra G-graduada $A = \bigoplus_{g\in G} A^{(g)}$ munida com uma involução $*$ é uma $(G,*)$-álgebra se $*$ é uma involução graduada em A, isto é, se $(A^{(g)})^* = A^{(g)}$, para todo $g \in G$.*

Vejamos alguns exemplos de $(G,*)$-álgebras.

Exemplo 3.2. Toda álgebra comutativa G-graduada e munida com involução trivial é uma $(G,*)$-álgebra.

Exemplo 3.3. Toda $*$-álgebra munida com G-graduação trivial é uma $(G,*)$-álgebra.

Exemplo 3.4. A álgebra $(FC_2)_*$, definida no Exemplo 2.38, com C_2-graduação trivial é uma $(C_2,*)$-álgebra.

Vale ressaltar que nem toda involução em uma álgebra G-graduada é uma involução graduada. Por exemplo, na álgebra M definida no capítulo anterior, munida com G-graduação dada por $M^{(1)} = \operatorname{span}_F\{e_{11}+e_{44}, e_{22}+e_{33}\}$, $M^{(g_1)} = \operatorname{span}_F\{e_{12}\}$, $M^{(g_2)} = \operatorname{span}_F\{e_{34}\}$ e $M^{(h)} = \{0\}$, para todo $h \neq 1, g_1, g_2$, a involução reflexão não é graduada.

Definição 3.5. *Sejam A uma $(G,*)$-álgebra e B uma subálgebra de A. Dizemos que B é uma $(G,*)$-subálgebra de A, se B é uma G-subálgebra de A e $B^* = B$.*

Note que se A é uma $(G,*)$-álgebra, então $A^{(1)}$ é uma $(G,*)$-subálgebra de A com G-graduação trivial e involução induzida.

Exemplo 3.6. Sejam G um grupo abeliano, A uma $(G,*)$-álgebra e $Z(A)$ o centro de A. É fácil verificar que $Z(A)$ é invariante por automorfismos e antiautomorfismos em A. Pela Proposição 2.16, temos que $Z(A)$ é uma G-subálgebra de A, e portanto, $Z(A)$ é uma $(G,*)$-subálgebra de A.

Exemplo 3.7. Sejam G um grupo, H um subgrupo de G e $M_n(F^\sigma H)$ munida com G-graduação induzida pela n-upla $\alpha = (g_1, g_2, \ldots, g_n) \in G^n$. Através do Exemplo 2.3, temos que a álgebra $B = M_n(F^\sigma H) \oplus M_n(F^\sigma H)^*$ possui uma G-graduação induzida pela n-upla α dada por $B^{(g)} = M_n(F^\sigma H)^{(g)} \oplus (M_n(F^\sigma H)^{(g)})^*$, para todo $g \in G$. Em B, considere a involução $(b_1, b_2^*)^* = (b_2, b_1^*)$, para todos $b_1, b_2 \in M_n(F^\sigma H)$. A involução $*$ é graduada e, assim, B é uma $(G,*)$-álgebra.

Exemplo 3.8. Sejam G um grupo, H um subgrupo de G e $M_n(F^\sigma H)$ munida com G-graduação induzida pela n-upla $\alpha = (g_1, g_2, \ldots, g_n) \in G^n$. Considere $B' = M_n(F^\sigma H) \oplus M_n(F^\sigma H)^{op}$. Pelo Exemplo 2.3, temos que a G-graduação induzida pela n-upla α em B' é dada por $(B')^{(g)} = M_n(F^\sigma H)^{(g)} \oplus (M_n(F^\sigma H)^{op})^{(g)}$, para todo $g \in G$. A álgebra B' com esta G-graduação e munida da involução troca é uma $(G,*)$-álgebra.

Definição 3.9. *Dizemos que um isomorfismo de álgebras $\rho : A \to B$ de uma $(G,*)$-álgebra A em uma $(G,\overline{*})$-álgebra B é um isomorfismo de $(G,*)$-álgebras se, $\rho(A^{(g)}) = B^{(g)}$, para todo $g \in G$, e $\rho(a^*) = \rho(a)^{\overline{*}}$, para todo $a \in A$. Neste caso, dizemos que A e B são isomorfas como $(G,*)$-álgebras e denotaremos por $A \cong B$.*

No próximo exemplo consideraremos as $(G,*)$-álgebras B e B' apresentadas, respectivamente, nos Exemplos 3.7 e 3.8.

Exemplo 3.10. Mostraremos que as $(G,*)$-álgebras B e B' são isomorfas como $(G,*)$-álgebras. Com este intuito, considere a aplicação $\phi : B \to B'$ dada por $\phi(b_1, b_2^*) = (b_1, b_2)$. Claramente, $\phi(B^{(g)}) = B'^{(g)}$, para todo $g \in G$. Por fim, $\phi((b_1, b_2^*)^*) = \phi((b_2, b_1^*)) = (b_2, b_1) = \phi((b_1, b_2^*))^\diamond$, para todos $b_1, b_2 \in B$. Portanto, ϕ é um isomorfismo de $(G,*)$-álgebras, e assim, $B \cong B'$.

Em geral, é um problema difícil determinar todas as involuções graduadas presentes em uma álgebra. Mediante os Teoremas 2.13 e 2.48, classificamos todas as involuções graduadas na álgebra M.

Teorema 3.11. *Se M é uma $(G,*)$-álgebra, então M é isomorfa, como $(G,*)$-álgebra, a uma das seguintes $(G,*)$-álgebras, para cada $g, g_1, g_2, g_3 \in G$ distintos:*

1. *A álgebra M com G-graduação dada por $M^{(1)} = \mathrm{span}_F\{1\}$, $M^{(g_1)} = \mathrm{span}_F\{e_{11} + e_{44} - (e_{22}+e_{33})\}$, $M^{(g_2)} = \mathrm{span}_F\{e_{12} - e_{34}\}$, $M^{(g_3)} = \mathrm{span}_F\{e_{12}+e_{34}\}$ e $M^{(h)} = \{0\}$, para todo $h \notin \{1, g_1, g_2, g_3\}$, e munida, ou da involução reflexão, ou da involução γ_i, $i = 1, 2, 4$, com $g_1^2 = 1$ e $g_1 g_2 = g_3$;*

2. *A álgebra M com G-graduação dada por $M^{(1)} = \mathrm{span}_F\{e_{11} + e_{44}, e_{22} + e_{33}\}$, $M^{(g)} = \mathrm{span}_F\{e_{12}, e_{34}\}$ e $M^{(h)} = \{0\}$, para todo $h \neq 1, g$, e munida, ou da involução reflexão, ou da involução γ_i, $i = 1, 2, 4$;*

3. *A álgebra M com G-graduação definida por $M^{(1)} = span_F\{1, e_{12} + e_{34}\}$, $M^{(g)} = span_F\{e_{11} + e_{44} - (e_{22} + e_{33}), e_{12} - e_{34}\}$ e $M^{(h)} = \{0\}, h \neq 1, g$, e munida, ou da involução reflexão, ou da involução γ_i, $i = 1, 2, 4$, com $g^2 = 1$;*

4. *A álgebra M com G-graduação dada por $M^{(1)} = \mathrm{span}_F\{e_{11}+e_{44}, e_{22}+e_{33}\}$, $M^{(g_1)} = \mathrm{span}_F\{e_{12}\}$, $M^{(g_2)} = \mathrm{span}_F\{e_{34}\}$ e $M^{(h)} = \{0\}$, para todo $h \neq 1, g_1, g_2$, e munida da involução γ_i, $i = 1, 2, 4$;*

5. *A álgebra M com G-graduação definida por $M^{(1)} = \mathrm{span}_F\{e_{11} + e_{44}, e_{22} + e_{33}, e_{12}\}$, $M^{(g)} = \mathrm{span}_F\{e_{34}\}$ e $M^{(h)} = \{0\}$, para todo $h \neq 1, g$, e munida da involução γ_i, $i = 1, 2, 4$;*

6. *A álgebra M com G-graduação dada por $M^{(1)} = \mathrm{span}_F\{e_{11} + e_{44}, e_{22} + e_{33}, e_{34}\}$, $M^{(g)} = \mathrm{span}_F\{e_{12}\}$ e $M^{(h)} = \{0\}$, para todo $h \neq 1, g$, e munida da involução γ_i, $i = 1, 2, 4$;*

7. *A álgebra M com G-graduação trivial e munida, ou da involução reflexão, ou da involução γ_i, $i = 1, 2, 4$.*

Definição 3.12. *Para cada $g \in G$, a álgebra M com G-graduação dada por $M^{(1)} = span_F\{e_{11} + e_{44}, e_{22} + e_{33}\}$, $M^{(g)} = span_F\{e_{12}, e_{34}\}$ e $M^{(h)} = \{0\}$, para todo $h \neq 1, g$, e munida com involução reflexão será denotada por $M_{g,\rho}$.*

As álgebras $M_{g,\rho}$ possuem uma grande importância neste trabalho como veremos no Capítulo 3.

Seja $F^\sigma G$ a álgebra de grupo torcida de G sobre F. Para os nossos propósitos, a partir de agora, consideraremos G uma base de $F^\sigma G$ sobre F e G-graduação dada por $(F^\sigma G)^{(g)} = \mathrm{span}_F\{g\}$, para todo $g \in G$, chamada de G-graduação canônica.

Considere $F^\sigma G$ com G-graduação canônica e munida com uma involução $*$. No próximo lema, apresentamos condições necessárias e suficientes para que $*$ seja uma involução graduada em $F^\sigma G$.

Lema 3.13. ([17], Lema 2.3) *Seja $F^\sigma G$ uma álgebra de grupo torcida com G-graduação canônica e munida com uma involução $*$. Então, $*$ é uma involução graduada em $F^\sigma G$ se, e somente se, dado $g \in G$, ou $g^* = g$, ou $g^* = -g$. Em particular, se g é um elemento de ordem ímpar, então $g^* = g$.*

Demonstração. Seja $*$ uma involução na álgebra de grupo torcida $F^\sigma G$, munida de G-graduação canônica. Com isso, $*$ é uma involução graduada em $F^\sigma G$ se, e somente se, $g^* = \beta g$, para todo $g \in G$ e para algum $\beta \in F$. Assim, $g = (g^*)^* = \beta^2 g$, e como F é um corpo de característica zero, temos que $\beta = \pm 1$. Dessa forma, a involução $*$ é graduada se, e somente se, cada elemento de G é, ou simétrico, ou antissimétrico.

Agora, suponha que a ordem de g é igual a m, onde m é um número ímpar, e que g é um elemento antissimétrico. Então, temos que

$$1 = 1^* = (g^m)^* = (g^*)^m = -g^m = -1,$$

uma contradição, pois a característica de F é zero. □

Como consequência imediata do lema anterior, temos o seguinte resultado.

Corolário 3.14. *Sejam p um primo ímpar e FC_p a álgebra de grupo munida com C_p-graduação canônica. Então, a única involução graduada em FC_p é a involução trivial.*

Exemplo 3.15. Sejam G um grupo finito e $F^\sigma G$ uma álgebra de grupo torcida com G-graduação canônica e munida com uma involução graduada $*$.

Dado um primo p que divide $|G|$, considere a álgebra $F^\sigma C_p$. Através do Teorema 2.30, temos que $F^\sigma C_p$ é isomorfa a álgebra FC_p. Assim, FC_p é uma subálgebra G-graduada de $F^\sigma G$, com G-graduação $FC_p = \bigoplus_{i=0}^{p-1} FC_p^{(g^i)}$, onde $FC_p^{(g^i)} = \operatorname{span}_F\{g^i\}, 0 \leq i \leq p-1$, e $FC_p^{(h)} = \{0\}$, para todo $h \notin \langle g \rangle$.

1. A álgebra FC_p com G-graduação definida acima e munida com involução trivial é uma $(G,*)$-subálgebra de $F^\sigma G$ e a denotamos por $(FC_p)^G$.

2. Se a ordem de G for par e existe $h \in G$ de ordem 2 tal que $h^* = -h$, então a álgebra FC_2 com G-graduação definida acima e munida com a involução $(a_1 + a_2 h)^* = a_1 - a_2 h$, para todos $a_1, a_2 \in F$, é uma $(G,*)$-subálgebra de $F^\sigma G$ denotada por $(FC_2)^{(G,*)}$.

No próximo lema, mostraremos um resultado importante para este trabalho, que relaciona a involução e a G-graduação presentes em uma $(G,*)$-álgebra A. Para isso, utilizaremos as notações estabelecidas na Seção 2.2.

Lema 3.16. ([17], Lema 2.1) *Seja A uma álgebra sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, graduada por um grupo abeliano finito G e munida com uma involução $*$. Então, A é uma $(G,*)$-álgebra se, e somente se, $* \circ \overline{\chi} = \overline{\chi} \circ *$, para todo $\chi \in \widehat{G}$.*

Demonstração. Sendo A uma álgebra graduada por um grupo abeliano finito, temos que $A^{(g)} = \{a \in A \mid \overline{\chi}(a) = \chi(g)a, \forall \chi \in \widehat{G}\}$, para todo $g \in G$.

Suponha que A é uma $(G,*)$-álgebra. Dado $a \in A^{(g)}$, temos que $a^* \in A^{(g)}$, para todo elemento homogêneo a de A. Logo, $\overline{\chi}(a^*) = \chi(g)a^* = (\overline{\chi}(a))^*$, para todo $\chi \in \widehat{G}$. Portanto, $* \circ \overline{\chi} = \overline{\chi} \circ *$, para todo $\chi \in \widehat{G}$.

Agora, suponha que $* \circ \overline{\chi} = \overline{\chi} \circ *$. Então, para todo $\chi \in \widehat{G}$ e para todo $a \in A^{(g)}$, $\overline{\chi}(a^*) = (\overline{\chi}(a))^* = (\chi(g)a)^* = \chi(g)a^*$. Portanto, $a^* \in A^{(g)}$, e assim, A é uma $(G,*)$-álgebra. $\square$

Uma consequência imediata do Lema 3.16 é que se G é um grupo abeliano finito e F é um corpo algebricamente fechado, então uma álgebra G-graduada A munida com uma involução $*$ será uma $(G,*)$-álgebra se, e somente se, os subespaços A^- e A^+ são homogêneos.

3.2 Álgebras $(G,*)$-simples

Nesta seção iremos caracterizar as álgebras $(G,*)$-simples, onde G é um grupo abeliano finito. Além disso, daremos nossa contribuição na classificação das álgebras $(C_p,*)$-simples.

Definição 3.17. *Seja A uma $(G,*)$-álgebra. Um ideal I de A é um $(G,*)$-ideal se é um G-ideal invariante pela involução. Dizemos que A é uma álgebra $(G,*)$-simples se $A^2 \neq \{0\}$ e os únicos $(G,*)$-ideais de A são $\{0\}$ e A.*

É claro que, se A é uma álgebra simples como álgebra, então A é uma álgebra $(G,*)$-simples. Também, se A é uma álgebra $*$-simples ou G-simples, então A é uma álgebra $(G,*)$-simples.

Exemplo 3.18. Se A é uma $(G,*)$-álgebra de dimensão finita e G é um grupo finito, então o radical de Jacobson de A é um $(G,*)$-ideal de A.

O nosso primeiro objetivo é estender o Teorema de Wedderburn-Malcev para a classe das $(G,*)$-álgebras de dimensão finita, onde G é um grupo abeliano finito. A partir de agora, G denotará um grupo abeliano finito. Antes disso, apresentaremos a seguinte observação.

Observação 3.19. Considere H uma álgebra associativa unitária. Então A é uma álgebra com H-ação generalizada se A é munida com um homomorfismo $H \to \mathrm{End}_F(A)$ e para todo $h \in H$, existem $h_i^{(1)}, h_i^{(2)}, h_i^{(3)}, h_i^{(4)} \in H$ tais que, para todos $a, b \in A$, temos que

$$h(ab) = \sum_i (h_i^{(1)}(a))(h_i^{(2)}(b)) + (h_i^{(3)}(b))(h_i^{(4)}(a)).$$

$(G, *)$-álgebras, onde G é um grupo abeliano finito, são casos particulares de álgebras com H-ação generalizada. De fato, considere A uma $(G, *)$-álgebra, onde G é um grupo abeliano finito. Então o grupo $\widehat{G} \times \{1, *\}$ age sobre A como automorfismos e antiautomorfismos, e, por [10, Exemplo 6], temos que A é uma álgebra com FG-ação generalizada.

Teorema 3.20. ([17], Teorema 2.8) *Seja A uma $(G, *)$-álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero. Então:*

1. *Se A é uma álgebra $(G, *)$-simples, então, ou A é uma álgebra G-simples, ou $A = B \oplus B^*$, para alguma subálgebra G-simples B de A;*

2. *Se A é semissimples, então A é soma direta de álgebras $(G, *)$-simples;*

3. *$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m + J(A)$, onde cada $A_i, i = 1, \ldots m$, é uma álgebra $(G, *)$-simples.*

Demonstração. Suponha que A seja uma $(G, *)$-álgebra de dimensão finita.

1. Como visto, $J(A)$ é um $(G, *)$-ideal de A. Se A é uma álgebra $(G, *)$-simples, então A não é uma álgebra nilpotente e, portanto, $J(A) = \{0\}$. Logo, A é um álgebra semissimples, e pelo Lema 2.20, A possui um ideal G-simples.

   Tome B um ideal G-simples de A. Se $B^* = B$, então B é um $(G, *)$-ideal de A e como A é uma álgebra $(G, *)$-simples, implica que $A = B$. Portanto, A é uma álgebra G-simples. Por outro lado, se $B^* \neq B$, então B^* é um ideal de A e, pelo Lema 3.16, temos que $(B^*)^{\overline{\chi}} = (B^{\overline{\chi}})^* = B^*$, para todo $\chi \in \widehat{G}$. Assim, B^* é um G-ideal de A. Logo, $C = B \oplus B^*$ é um $(G, *)$-ideal de A e como A é uma álgebra $(G, *)$-simples, temos que $A = B \oplus B^*$.

2. A demonstração segue do item 1.

3. Em 2013, Gordienko provou uma extensão do Teorema de Wedderburn-Malcev para álgebras com H-ação generalizada (ver [10], Teorema 5). Como visto, as $(G, *)$-álgebras são casos particulares de álgebras com H-ação generalizada, e portanto, temos o resultado desejado.

$\square$

Exemplo 3.21. Seja $M = \text{span}_F\{e_{11} + e_{44}, e_{22} + e_{33}, e_{12}, e_{24}\}$. Recordemos que no caso ordinário, a decomposição de Wedderburn-Malcev da álgebra M é dada por $A_1 \oplus A_2 + J(M)$, onde $A_1 = F(e_{11}+e_{44})$ e $A_2 = F(e_{22}+e_{33})$. Agora, considere M com G-graduação $M^{(1)} = \text{span}_F\{e_{11} + e_{44}, e_{22} + e_{33}, e_{12}\}$, $M^{(g)} = \text{span}_F\{e_{34}\}$ e $M^{(h)} = \{0\}$, $h \neq 1, g$, e munida com a involução γ_1. Então, a decomposição de Wedderburn-Malcev da $(G,*)$-álgebra M, é dada por $B + J(M)$, onde $B = F(e_{11} + e_{44}) \oplus F(e_{22} + e_{33})$ munida com involução troca.

Por meio do Teorema 2.32 e do item 1. do Teorema 3.20, temos a caracterização das álgebras $(G,*)$-simples de dimensão finita.

Teorema 3.22. ([17], Teorema 2.10) *Seja A uma $(G,*)$-álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero. Então, A é uma álgebra $(G,*)$-simples se, e somente se, ou $A \cong M_n(F^\sigma H)$, ou $A \cong M_n(F^\sigma H) \oplus M_n(F^\sigma H)^{op}$, para algum subgrupo H de G e para algum 2-cociclo $\sigma : H \times H \to F^*$.*

Como consequência do Teorema 3.22 temos o seguinte corolário.

Corolário 3.23. *Seja A uma álgebra $(G,*)$-simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero. Se $\dim_F(A^{(1)}) = 1$, então A é isomorfa a uma álgebra de grupo torcida.*

Demonstração. Seja A uma álgebra $(G,*)$-simples. Então, pelo Teorema 3.22, ou $A \cong M_n(F^\sigma H)$, ou $A \cong M_n(F^\sigma H) \oplus M_n(F^\sigma H)^{op}$, para algum subgrupo H de G e para algum 2-cociclo $\sigma : H \times H \to F^*$.

Se $A \cong M_n(F^\sigma H) \oplus M_n(F^\sigma H)^{op}$, claramente, $\dim_F(A^{(1)}) \geq 2$. Dessa forma, se $\dim_F(A^{(1)}) = 1$, implica que $A \cong M_n(F^\sigma H)$.

Se $n \geq 2$, então $e_{ii} \in (M_n(F))^{(1)}$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Mas isto é um absurdo, pois pela Observação 2.34, temos que $1 = \dim_F(A^{(1)}) = \dim_F(M_n(F))^{(1)}$. Logo, $n = 1$, e assim, $A \cong F^\sigma H$. □

Agora, o nosso objetivo é classificar as álgebras $(C_p,*)$-simples. Quando $p = 2$, Giambruno, dos Santos e Vieira, classificaram as álgebras $(C_2,*)$-simples.

Teorema 3.24. ([4], Teorema 7.6) *Seja A uma álgebra $(C_2,*)$-simples de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado de característica zero. Então A é isomorfa a alguma das seguintes $(C_2,*)$-álgebras:*

1) $M_{k,l}(F)$, com $k \geq 1, k \geq l \geq 0$, e com involução transposta ou simplética (a involução simplética ocorre somente quando $k = l$ ou quando $l = 0$ e k é par).

2) $M_{k,l}(F) \oplus M_{k,l}(F)^{op}$, com $k \geq 1, k \geq l \geq 0$, com graduação induzida e involução troca.

3) $M_n(F) \oplus cM_n(F)$, *com involução dada por* $(a+cb)^\dagger = a^* - cb^*$, *onde* $*$ *denota a involução transposta ou simplética.*

4) $M_n(F) \oplus cM_n(F)$, *com involução dada por* $(a+cb)^\dagger = a^* + cb^*$, *onde* $*$ *denota a involução transposta ou simplética.*

5) $(M_n(F) + cM_n(F)) \oplus (M_n(F) + cM_n(F))^{op}$, *com graduação* $(M_n(F) \oplus M_n(F)^{op}, c(M_n(F) \oplus M_n(F)^{op}))$ *e involução troca.*

Até o fim da seção, F denotará um corpo algebricamente fechado.

Inicialmente, recordemos que se G é um grupo cíclico finito, então, pelo Teorema 2.30 e pela Proposição 2.27, $F^\sigma H \cong FH$, para todo subgrupo H de G. Consequentemente, $M_n(F^\sigma H) \cong M_n(FH)$.

Em seguida, suponha que A seja uma álgebra $(C_p, *)$-simples, onde p é um primo ímpar. Sabemos que os únicos subgrupos de C_p são os subgrupos triviais. Então, pelo Teorema 3.22, ou $A \cong M_n(F)$, ou $A \cong M_n(FC_p)$, ou $A \cong M_n(F) \oplus M_n(F)^{op}$, ou $A \cong M_n(FC_p) \oplus M_n(FC_p)^{op}$.

Iniciaremos o nosso trabalho supondo que $A \cong M_n(FH) \oplus M_n(FH)^{op}$ com C_p-graduação induzida pela n-upla $\alpha = (1, g_2, \ldots, g_n) \in C_p^n$, onde H é um subgrupo de C_p e munida com a involução troca. Neste caso, as únicas possibilidades para a álgebra A são descritas a seguir:

i. $A \cong M_n(F) \oplus M_n(F)^{op}$ com C_p-graduação induzida pela n-upla α e munida com a involução troca;

ii. $A \cong M_n(FC_p) \oplus M_n(FC_p)^{op}$ com C_p-graduação induzida pela n-upla α e munida com a involução troca.

Nosso objetivo agora consiste em classificar todas as involuções graduadas presentes em $M_n(F)$ e $M_n(FC_p)$ com C_p-graduação induzida pela n-upla $\alpha = (1, g_2, \ldots, g_n) \in C_p^n$.

Iniciaremos com a classificação das involuções graduadas em $M_n(F)$. Recorde que as únicas involuções, a menos de equivalência, em $M_n(F)$ são a involução transposta (t) e a involução simplética (s).

Teorema 3.25. ([17], Teorema 3.2) *Seja* $M_n(F)$ *com* C_p*-graduação induzida pela* n*-upla* $\alpha = (1, g_2, \ldots, g_n) \in C_p^n$ *e munida com involução* $*$. *Então, a involução* $*$ *é graduada se, e somente se, ou*

1. $* = t$ *e* $\alpha = (1, 1, \ldots, 1)$ *ou*

2. $* = s, n = 2k$ *e, na* $2k$*-upla* α, *temos que* $g_{k+1} = g_i g_{k+i}$, *para todo* $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Demonstração. Seja $M_n(F)$ com C_p-graduação induzida pela n-upla $\alpha = (1, g_2, \ldots, g_n) \in C_p^n$.

1. Suponha que t é uma involução graduada em $M_n(F)$. Então, $\deg(e_{ij}) = \deg(e_{ji})$, para todos $1 \leq i, j \leq n$. Em particular, quando $j = 1$, temos que $g_i^2 = 1$ com $g_i \in C_p$. Sendo p um primo ímpar, isto implica em $g_i = 1$, para todo $1 \leq i \leq n$. Portanto, $\alpha = (1, 1, \ldots, 1)$.

2. Suponha que s é uma involução graduada em $M_{2k}(F)$. Vamos definir em $M_{2k}(F)$ os seguintes conjuntos:

   - $A_1 := \{e_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq k\}$;
   - $A_2 := \{e_{ij} \mid 1 \leq i \leq k,\, n+1 \leq j \leq 2k\}$;
   - $A_3 := \{e_{ij} \mid k+1 \leq i \leq 2k,\, 1 \leq j \leq k\}$;
   - $A_4 := \{e_{ij} \mid k+1 \leq i, j \leq 2k\}$.

   Sendo a involução simplética uma involução graduada em A, temos os seguintes casos:

   Se $e_{ij} \in A_1$, então $\deg(e_{ij}) = \deg(e_{(k+j)(k+i)})$, para todos $1 \leq i, j \leq k$. Logo, $g_i^{-1} g_j = (g_{k+j})^{-1} g_{k+i}$. Em particular, ao considerar $j = 1$, implica que $g_{k+1} = g_i g_{k+i}$, para todo $1 \leq i \leq k$;

   Se $e_{ij} \in A_2$, então $\deg(e_{ij}) = \deg(e_{(j-k)(k+i)})$, para todo $1 \leq i \leq k$ e $k+1 \leq j \leq 2k$. Assim, ao tomar $j = k+1$, temos que $g_{k+1} = g_i g_{k+i}$, para todo $1 \leq i \leq k$;

   Se $e_{ij} \in A_3$, então, $\deg(e_{ij}) = \deg(e_{(k+j)(i-k)})$, para todo $k+1 \leq i \leq 2k$ e $1 \leq j \leq k$. Em particular, quando $i = k+i$, obtemos que $g_{k+1} = g_j g_{k+j}$, para todo $1 \leq j \leq k$;

   Se $e_{ij} \in A_4$, então $\deg(e_{ij}) = \deg(e_{(j-k)(i-k}))$, para todos $k+1 \leq i, j \leq 2k$. Com isso, considerando $j = k+1$, temos que $g_{k+1} = g_i g_{i-k}$, para todo $k+1 \leq i \leq 2k$. Transladando os índices temos que $g_{k+1} = g_i g_{k+i}$, para todo $1 \leq i \leq k$.

A volta segue de forma imediata. □

Agora, nosso trabalho consiste em classificar todas as involuções graduadas em $M_n(FC_p)$. Se $A = M_n(FC_p)$, então $Z(A) \cong FC_p$, munida com C_p-graduação canônica e, pelo Corolário 3.14, munida com involução trivial, é uma $(C_p, *)$-subálgebra de A. Portanto, a involução em A é dada por $(e_{ij} g)^* = e_{ij}^* g$, para toda matriz elementar $e_{ij} \in M_n(F)$ e para todo $g \in C_p$.

Vejamos a seguir a classificação das involuções C_p-graduadas em $M_n(FC_p)$.

Teorema 3.26. ([17], Teorema 3.3) *Seja $M_n(FC_p)$ com C_p-graduação induzida pela n-upla $(1, g_2, \ldots, g_n) \in C_p^n$ e munida com uma involução $*$. Então, $*$ é uma involução graduada se, e somente se, $\alpha = (1, 1, \ldots, 1)$ e $(e_{ij}g)^* = e_{ij}^{\sharp}g$, para toda matriz elementar $e_{ij} \in M_n(F)$ e para todo $g \in C_p$, onde $\sharp$ denota a involução transposta ou simplética.*

Demonstração. Considere $A = M_n(FC_p)$, com C_p-graduação induzida pela n-upla $\alpha = (1, g_2, \ldots, g_n) \in C_p^n$ e munida com uma involução $*$. Pela Observação 2.36, temos que $g_i = 1$, para todo $i = 2, \ldots, n$, ou seja, $\alpha = (1, 1, \ldots, 1)$.

Através da Observação 2.34, podemos assumir que $M_n(FC_p)^{(1)} = M_n(F)^{(1)}$, e consequentemente, temos que $M_n(FC_p)^{(1)} = M_n(F)$. Diante disso, se $*$ é uma involução graduada em $M_n(FC_p)$, então $M_n(F)$ é uma $(G, *)$-subálgebra de $M_n(FC_p)$. Portanto, $e_{ij}^* = e_{ij}^{\sharp}$, onde $\sharp$ denota a involução transposta ou involução simplética. Assim, $(e_{ij}g)^* = e_{ij}^{\sharp}g$, para toda matriz elementar $e_{ij} \in M_n(F)$ a para todo $g \in C_p$.

A recíproca segue de forma imediata. $\square$

Através dos resultados apresentados e dos Teoremas 3.22, 3.25 e 3.26, temos a classificação das álgebras $(C_p, *)$-simples.

Teorema 3.27. ([17], Teorema 3.4) *Sejam p um primo ímpar e A uma álgebra $(C_p, *)$-simples de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado de característica zero. Então, A é isomorfa a uma das seguintes álgebras $(C_p, *)$-simples:*

1. *$M_n(F)$ com C_p-graduação trivial e involução transposta;*

2. *$M_{2k}(F)$ com C_p-graduação induzida pela $2k$-upla $\alpha = (1, g_2, \ldots, g_{2k}) \in C_p^{2k}$, com $g_{k+1} = g_i g_{k+i}$, para todo $1 \leq i \leq k$, e munida com involução simplética;*

3. *$M_n(FC_p)$ com C_p-graduação induzida pela n-upla $\alpha = (1, 1, \ldots, 1) \in C_p^n$ e munida com involução $(e_{ij}g)^* = e_{ij}^{\sharp}g$, para toda matriz elementar e_{ij} em $M_n(F)$ e para todo $g \in C_p$, onde $\sharp$ denota a involução transposta ou a involução simplética (a involução simplética só ocorre quando n é par);*

4. *$M_n(F) \oplus M_n(F)^{op}$ com C_p-graduação induzida e involução troca;*

5. *$M_n(FC_p) \oplus M_n(FC_p)^{op}$ com C_p-graduação induzida e involução troca.*

Capítulo 4

Variedades de $(G,*)$-álgebras de crescimento quase polinomial

Neste capítulo estudaremos as identidades polinomiais de $(G,*)$-álgebras. Se G é um grupo abeliano finito, o resultado principal desta tese caracteriza variedades geradas por $(G,*)$-álgebras de dimensão finita de crescimento quase polinomial, estendendo os resultados de Giambruno, dos Santos e Vieira presentes em [4]. Antes disso, faremos uma breve revisão dos resultados sobre caracterizações de variedades de crescimento quase polinomial no contexto de álgebras com estruturas adicionais presentes na literatura.

Iniciaremos estudando o caso ordinário. Sejam $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto enumerável de variáveis e $F\langle X\rangle$ a álgebra livremente gerada por X sobre F. Dizemos que um polinômio $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ é uma identidade polinomial de uma álgebra A se $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$, para todo $a_i \in A$, $i = 1, 2, \ldots, n$. É bem conhecido que o conjunto das identidades polinomiais de A, denotado por $\mathrm{Id}(A)$, é um T-ideal de $F\langle X\rangle$, ou seja, $\mathrm{Id}(A)$ é um ideal invariante sob todos os endomorfismos de $F\langle X\rangle$.

Uma variedade $\mathcal{V}$ gerada por uma álgebra A é a classe de todas as álgebras que satisfazem todas as identidades polinomiais de A e é denotada por $\mathrm{var}(A)$. Logo, uma álgebra $B \in \mathrm{var}(A)$ se, e somente se, $\mathrm{Id}(A) \subseteq \mathrm{Id}(B)$. Dizemos que as álgebras A e B são PI-equivalentes se $\mathrm{Id}(A) = \mathrm{Id}(B)$. Por exemplo, é possível mostrar que as álgebras M e UT_2 são PI-equivalentes.

Recordemos que, em característica zero, $\mathrm{Id}(A)$ é gerado por seus polinômios multilineares. Denotaremos por

$$P_n = \mathrm{span}_F\{x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}$$

o conjunto dos polinômios multilineares de grau n nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ em $F\langle X\rangle$. Em [12], Kemer mostrou que, se F é um corpo de característica zero, então o T-ideal de

A é gerado, como T-ideal, por um conjunto finito de polinômios multilineares. Porém, Kemer não estabelece uma maneira para encontrar uma base para o T-ideal de A. Uma maneira de contornar esse problema seria encontrar uma função que consiga medir, de certo modo, o crescimento das identidades polinomiais presentes em um T-ideal. Com esse intuito, em 1972, Regev [18] introduziu a sequência das codimensões de A dada por

$$c_n(A) = \dim_F \frac{P_n}{P_n \cap \mathrm{Id}(A)}.$$

Se $\mathcal{V} = \mathrm{var}(A)$, definimos $c_n(\mathcal{V}) = c_n(A)$.

Além de $c_n(A)$ ser uma importante ferramenta na PI-teoria, ela também se tornou um dos principais objetos de estudos na área. Um importante resultado mostrado por Regev em [18] foi que, para qualquer PI-álgebra A, $c_n(A)$ é exponencialmente limitada, isto é, existem constantes α, a tais que $c_n(A) \leq a\alpha^n$, para todo $n \geq 1$.

Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras. Dizemos que $\mathcal{V}$ tem

- crescimento polinomial, se existem constantes α e t, tais que $c_n(\mathcal{V}) \leq \alpha n^t$, para todo $n \geq 1$;
- crescimento exponencial, se existe uma constante $\alpha \geq 2$, tal que $c_n(\mathcal{V}) \geq \alpha^n$, para todo $n \geq 1$;
- crescimento quase polinomial, se $\mathcal{V}$ tem crescimento exponencial e qualquer subvariedade própria de $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial.

É bem conhecido que, por exemplo, F gera uma variedade de crescimento polinomial, enquanto as álgebras $\mathcal{G}$ e UT_2 geram variedades de crescimento exponencial [13].

Um dos principais resultados de caracterização de variedades de álgebras de crescimento polinomial foi dado por Kemer [13],

Teorema 4.1. *Uma variedade $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial se, e somente se, $\mathcal{G}$, $UT_2 \notin \mathcal{V}$.*

Como consequência do Teorema de Kemer, as álgebras $\mathcal{G}$ e UT_2 geram as únicas variedades de crescimento quase polinomial.

O objetivo principal desta tese é estender o Teorema de Kemer para a classe das $(G, *)$-álgebras. Nas próximas seções apresentaremos a extensão do Teorema de Kemer para a classe das $*$-álgebras e das álgebras G-graduadas.

4.1 $*$-identidades polinomiais

Nessa seção, vamos apresentar a extensão do Teorema de Kemer para a classe das $*$-álgebras.

Considere $F\langle X|*\rangle$ a álgebra livremente gerada por $\{x_1, x_1^*, x_2, x_2^*, \ldots\}$ sobre F. Seja $F\langle X|*\rangle$ munida com a involução

$$(x_{i_1}^{h_1}x_{i_2}^{h_2}\ldots x_{i_n}^{h_n})^* = x_{i_n}^{h_n*}x_{i_{n-1}}^{h_{n-1}*}\ldots x_{i_1}^{h_1*},$$

onde $h_i \in \{1,*\} \cong \mathbb{Z}_2$, para todo $1 \leq i \leq n$. A álgebra $F\langle X|*\rangle$ munida com essa involução é chamada de $*$-álgebra livre e os elementos de $F\langle X|*\rangle$ são chamados de $*$-polinômios. Se $f \in F\langle X|*\rangle$, escrevemos $f = f(x_1, x_1^*, \ldots, x_n, x_n^*)$.

Dizemos que $f \in F\langle X|*\rangle$ é uma $*$-identidade para a $*$-álgebra A, se

$$f(a_1, a_1^*, a_2, a_2^*, \ldots, a_n, a_n^*) = 0,$$

para quaisquer $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$. Neste caso, denotaremos por $f \equiv 0$ em A.

Considere A uma $*$-álgebra. Definimos

$$\mathrm{Id}^*(A) = \{f \in F\langle X|*\rangle \mid f \equiv 0 \text{ em } A\}.$$

Recordemos que $\mathrm{Id}^*(A)$ é um T^*-ideal de $F\langle X|*\rangle$, isto é, $\mathrm{Id}^*(A)$ é invariante sob todos os endomorfismos de $F\langle X|*\rangle$ que comutam com a involução $*$.

Uma variedade $\mathcal{V}$ gerada por uma $*$-álgebra A é a classe de todas as $*$-álgebras B tais que $\mathrm{Id}^*(A) \subseteq \mathrm{Id}^*(B)$ denotada por $\mathcal{V} = \mathrm{var}^*(A)$. Neste caso, dizemos que $\mathcal{V}$ é uma $*$-variedade.

Se considerarmos $y_i = x_i + x_i^*$ e $z_i = x_i - x_i^*$, então a $*$-álgebra livre $F\langle X|*\rangle$ pode ser gerada por variáveis simétricas e antissimétricas. Assim, temos que $F\langle X|*\rangle = F\langle y_1, z_1, y_2, z_2, \ldots\rangle$. Além disso, como F é um corpo de característica zero, todo T^*-ideal de $F\langle X|*\rangle$ é gerado por $*$-polinômios multilineares. Dessa forma, definimos

$$P_n^* = \mathrm{span}_F\{\omega_{\sigma(1)}\omega_{\sigma(2)}\cdots\omega_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n, \omega_i \in \{y_i, z_i\}, i = 1, \ldots, n\},$$

como o espaço dos $*$-polinômios multilineares de grau n nas variáveis $y_1, z_1, \ldots, y_n, z_n$.

Definimos

$$P_n^*(A) = \frac{P_n^*}{P_n^* \cap \mathrm{Id}^*(A)}$$

e sua dimensão sobre F é chamada de n-ésima $*$-codimensão de A denotada por $c_n^*(A)$.

Se $\mathcal{V}$ é uma $*$-variedade, definimos $c_n^*(\mathcal{V}) = c_n^*(A)$ e o crescimento de $\mathcal{V}$ é o crescimento da sequência $\{c_n^*(\mathcal{V})\}_{n\geq 1}$. De maneira análoga ao caso ordinário, definimos a noção de

$*$-variedades de crescimento polinomial, exponencial e quase polinomial.

Exemplo 4.2. Seja $D = F \oplus F$ munida com involução troca. Giambruno e Mishchenko mostraram que $\mathrm{var}^*(D)$ tem crescimento quase polinomial (ver [6], Teorema 4).

Como visto no Exemplo 2.44, a álgebra D com involução troca é isomorfa, como $*$-álgebra, a álgebra $(FC_2)_*$. Logo, pelo Exemplo 4.2, temos que $\mathrm{var}^*((FC_2)_*)$ tem crescimento quase polinomial.

Denotaremos por $M_{1,\rho}$ a álgebra M munida com involução reflexão.

Exemplo 4.3. Mishchenko e Valenti mostraram que $\mathrm{var}^*(M_{1,\rho})$ tem crescimento quase polinomial ([16], Corolário 1).

O próximo resultado, devido a Mishchenko e Giambruno, caracteriza as $*$-variedades de crescimento polinomial.

Teorema 4.4. ([7], Teorema 4.7) *Uma $*$-variedade $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial se, e somente se, $(FC_2)_*, M_{1,\rho} \notin \mathcal{V}$.*

Consequentemente, temos que as $*$-álgebras $(FC_2)_*$ e $M_{1,\rho}$ geram as únicas $*$-variedades de crescimento quase polinomial.

Giambruno e Zaicev apresentaram a seguinte caracterização de variedades geradas por $*$-álgebras de dimensão finita de crescimento polinomial.

Teorema 4.5. ([9], Teorema 6) *Seja A uma $*$-álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero. Então a sequência de $*$-codimensão $\{c_n^*(A)\}_{n\geq 1}$ é limitada polinomialmente se, e somente se,*

1. *A sequência de codimensões $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$ é limitada polinomialmente;*

2. *$A = B + J(A)$, onde B é uma $*$-subálgebra semissimples maximal de A e B tem involução induzida trivial.*

Como consequência dos Teoremas 4.4 e 4.5, temos o seguinte corolário.

Corolário 4.6. *Seja A uma $*$-álgebra de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado de característica zero. Considere $A = B + J(A)$ uma decomposição de Wedderburn-Malcev de A, onde B é uma $*$-subálgebra semissimples maximal de A. Se* $\mathrm{var}^*(A)$ *tem crescimento polinomial, então $B \cong A_1 \oplus \cdots \oplus A_m$, onde $A_i \cong F$ e $A_i^* = A_i$, para todo $i = 1, \ldots, m$.*

4.2 G-identidades polinomiais

Nesta seção, apresentaremos a versão do Teorema de Kemer para a classe das álgebras graduadas por um grupo finito.

Seja G um grupo finito de ordem k e considere $X = \bigcup_{g\in G} X^{(g)}$, união disjunta, onde $X^{(g)} = \{x_{1,g}, x_{2,g} \ldots\}$. O grau homogêneo de um monômio $x_{1,g_1} \cdots x_{t,g_t} \in F\langle X\rangle$ é dado por $g_1 \cdots g_t$.

Para cada $g \in G$, definimos por $\mathcal{F}^{(g)}$ o subespaço de $F\langle X\rangle$ gerado por todos os monômios de grau homogêneo g. Assim,

$$F\langle X\rangle = \bigoplus_{g\in G} \mathcal{F}^{(g)},$$

fornece uma G-graduação em $F\langle X\rangle$. A álgebra livre $F\langle X\rangle$ munida com essa graduação é denotada por $F\langle X|G\rangle$ e é chamada de álgebra G-graduada livre. Os elementos $f = f(x_{1,g_1}, \ldots, x_{t_1,g_1}, \ldots, x_{1,g_k}, \ldots, x_{t_k,g_k}) \in F\langle X|G\rangle$ são chamados de G-polinômios.

Diremos que f é uma G-identidade para a álgebra G-graduada $A = \bigoplus_{g\in G} A^{(g)}$, se

$$f = f(a_{1,g_1}, \ldots, a_{t_1,g_1}, \ldots, a_{1,g_k}, \ldots, a_{t_k,g_k}) = 0,$$

para todos $a_{1,g_j}, \cdots, a_{t_j,g_j} \in A^{(g_j)}$, $1 \leq j \leq k$, e denotaremos por $f \equiv 0$ em A.

O conjunto

$$\mathrm{Id}^G(A) = \{f \in F\langle X|G\rangle \mid f \equiv 0 \text{ em } A\},$$

é chamado de ideal das G-identidades de A. Recordemos que $\mathrm{Id}^G(A)$ é um T_G-ideal de $F\langle X|G\rangle$, ou seja, é um ideal invariante sob qualquer endomorfismo graduado de $F\langle X|G\rangle$.

De forma análoga aos casos ordinário e com involução, definimos a noção de G-variedade. Se $\mathcal{V}$ é uma G-variedade gerada por uma álgebra G-graduada A, então denotamos $\mathcal{V} = \mathrm{var}^G(A)$.

Como F é um corpo de característica zero, $\mathrm{Id}^G(A)$ é determinado por G-polinômios multilineares. Com isso, definimos,

$$P_n^G = \mathrm{span}_F\{x_{\sigma(1),g_1} \ldots x_{\sigma(n),g_n} \mid \sigma \in S_n, g_1, \ldots, g_n \in G\},$$

o espaço dos G-polinômios multilineares nas variáveis $x_{1,g_1}, \ldots, x_{n,g_n}$ de grau n. A dimensão sobre F do espaço

$$P_n^G(A) = \frac{P_n^G}{P_n^G \cap \mathrm{Id}^G(A)},$$

é chamada de n-ésima G-codimensão de A denotada por $c_n^G(A)$.

Considere A uma álgebra G-graduada. De forma similar ao casos anteriores, se $\mathcal{V} = \mathrm{var}^G(A)$, então $c_n^G(\mathcal{V}) = c_n^G(A)$. Além disso, as noções de G-variedades de crescimento polinomial, exponencial e quase polinomial são definidas como nos casos ordinários e com involução.

Agora, vejamos alguns exemplos importantes de álgebras G-graduadas presentes na PI-teoria.

Exemplo 4.7. Sejam G um grupo abeliano finito, p um primo que divide $|G|$, e FC_p com G-graduação definida no Exemplo 3.15. Em [21], Valenti mostrou que $\mathrm{var}^G(FC_p)$ tem crescimento exponencial.

Exemplo 4.8. Vimos no Exemplo 2.11 que toda G-graduação na álgebra UT_2 é elementar e pode ser induzida por um elemento da forma $\alpha = (1, g) \in G^2$, para algum $g \in G$.

Em [21], Valenti mostrou que UT_2^α gera uma G-variedade de crescimento quase polinomial.

Para o próximo exemplo, vamos considerar $\mathcal{G}$ como sendo a álgebra de Grassmann munida com G-graduação trivial. Além disso, se a ordem de G é par e g é um elemento de ordem 2, então $\mathcal{G}^g$ denota a álgebra de Grassmann com G-graduação definida no Exemplo 2.12.

Exemplo 4.9. ([21], Proposição 6) Valenti mostrou que as álgebras $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}^g$, no caso em que a ordem de G é par, geram G-variedades de crescimento quase polinomial.

No próximo resultado, apresentamos a extensão do Teorema de Kemer para a classe de álgebras G-graduadas. Tal resultado foi mostrado por Valenti em [21] que apresentou uma caracterização das G-variedades de crescimento polinomial, onde G é um grupo abeliano finito. A caracterização depende da paridade da ordem do grupo G e, em cada caso, existe uma lista de álgebras G-graduadas que são excluídas da G-variedade.

Teorema 4.10. ([21], Teorema 9) *Sejam G um grupo abeliano finito e A uma álgebra G-graduada que satisfaz uma identidade polinomial ordinária. Então,* $\mathrm{var}^G(A)$ *tem crescimento polinomial se, e somente se, ou $|G|$ é ímpar e $UT_2^\alpha, \mathcal{G}, FC_p \notin$* $\mathrm{var}^G(A)$*, para todo primo p que divide a ordem de G, ou $|G|$ é par e $UT_2^\alpha, FC_p, \mathcal{G}, \mathcal{G}^g \notin$* $\mathrm{var}^G(A)$*, para todo primo p que divide a ordem de G e para $g \in G$ de ordem 2.*

Como consequência, as álgebras G-graduadas presente no teorema anterior geram as únicas G-variedades de crescimento quase polinomial.

4.3 $(G,*)$-identidades

Nesta seção, desenvolveremos a teoria de identidades polinomiais na classe das $(G,*)$-álgebras necessárias para a demonstração do principal resultado desta tese.

Seja G um grupo finito de ordem k e considere a álgebra G-graduada livre $F\langle X|G\rangle$, onde $X=\bigcup_{g\in G}X^{(g)}$. Para cada $g\in G$, decomponha $X^{(g)}$ como a união disjunta de dois conjuntos, que por um abuso de notação, escrevemos $X^{(g)}=\{x_{1,g},x_{1,g}^*,x_{2,g},x_{2,g}^*,\ldots\}$.

Como na $*$-álgebra livre, defina a seguinte involução em $F\langle X|G\rangle$

$$(x_{i_1,g_1}^{h_1}x_{i_2,g_2}^{h_2}\cdots x_{i_n,g_n}^{h_n})^*=x_{i_n,g_n}^{h_n*}x_{i_{n-1},g_{n-1}}^{h_{n-1}*}\cdots x_{i_1,g_1}^{h_1*},$$

onde $h_i\in\{1,*\}\cong\mathbb{Z}_2$, para todo $i\in\{1,2,\ldots,n\}$. Observe que essa involução não altera o grau homogêneo dos monômios em $F\langle X|G\rangle$. Logo, para todo $g\in G$, $(\mathcal{F}^{(g)})^*=\mathcal{F}^{(g)}$ e, assim, $*$ é uma involução graduada em $F\langle X|G\rangle$.

A álgebra $F\langle X|G\rangle$ munida com essa involução é denotada por $F\langle X|G,*\rangle$ e é chamada de $(G,*)$-álgebra livre. Os elementos

$$f=f(x_{1,g_1},x_{1,g_1}^*,\ldots,x_{n,g_n},x_{n,g_n}^*)\in F\langle X|G,*\rangle$$

são chamados de $(G,*)$-polinômios.

Dizemos que $f\in F\langle X|G,*\rangle$ é uma $(G,*)$-identidade para a $(G,*)$-álgebra $A=\bigoplus_{g\in G}A^{(g)}$, se

$$f(a_1^{(g_1)},(a_1^{(g_1)})^*,\ldots,a_n^{(g_n)},(a_n^{(g_n)})^*)=0$$

para todo $a_i^{(g_i)}\in A^{(g_i)}, 1\leq i\leq n$, e denotamos por $f\equiv 0$ em A.

O conjunto

$$\mathrm{Id}^{(G,*)}(A):=\{f\in F\langle X|G,*\rangle\mid f\equiv 0 \text{ em } A\}$$

é um ideal de $F\langle X|G,*\rangle$ chamado de ideal das $(G,*)$-identidades de A.

Observamos que $\mathrm{Id}^{(G,*)}(A)$ é um $T^{(G,*)}$-ideal de $F\langle X|G,*\rangle$, isto é, $\mathrm{Id}^{(G,*)}(A)$ é um ideal invariante por todos os endomorfismo de $F\langle X|G,*\rangle$ que preservam a G-graduação e comutam com a involução $*$.

Uma variedade $\mathcal{V}$ gerada por uma $(G,*)$-álgebra é a classe de todas as $(G,*)$-álgebras B tais que $\mathrm{Id}^{(G,*)}(A)\subseteq\mathrm{Id}^{(G,*)}(B)$, denotada por $\mathcal{V}=\mathrm{var}^{(G,*)}(A)$. Neste caso, dizemos que $\mathcal{V}$ é uma $(G,*)$-variedade.

Agora, se definirmos $y_{i,g}=\dfrac{x_{i,g}+x_{i,g}^*}{2}$ e $z_{i,g}=\dfrac{x_{i,g}-x_{i,g}^*}{2}$, então $y_{i,g}^*=y_{i,g}$ e $z_{i,g}^*=-z_{i,g}$. Logo, cada variável $x_{i,g}$ pode ser escrita como $x_{i,g}=y_{i,g}+z_{i,g}$ e cada variável $x_{i,g}^*$ pode ser escrita como $x_{i,g}^*=y_{i,g}-z_{i,g}$. Com isso, $F\langle X|G,*\rangle=F\langle Y\cup Z\rangle$, onde $Y=\bigcup_{g\in G}Y^{(g)}$ e $Z=\bigcup_{g\in G}Z^{(g)}$, sendo $Y^{(g)}=\{y_{1,g},y_{2,g},\ldots\}$ o conjunto das variáveis simétricas de grau homogêneo g e $Z^{(g)} = \{z_{1,g}, z_{2,g}, \ldots\}$ o conjunto das variáveis antissimétricas de grau homogêneo g.

Como F é um corpo de característica zero, então $\mathrm{Id}^{(G,*)}(A)$ é determinado por $(G,*)$-polinômios multilineares. Assim, definimos

$$P_n^{(G,*)} = \mathrm{span}_F\{\omega_{\sigma(1)}\omega_{\sigma(2)}\cdots\omega_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n, \omega_i \in \{y_{i,g}, z_{i,g}\}, i = 1, \ldots, n, g \in G\}$$

o espaço dos $(G,*)$-polinômios multilineares de grau n. Observe que $\dim_F(P_n^{(G,*)}) = 2^n|G|^n n!$.

A dimensão sobre F do espaço

$$P_n^{(G,*)}(A) = \frac{P_n^{(G,*)}}{P_n^{(G,*)} \cap \mathrm{Id}^{(G,*)}(A)}$$

será chamada de n-ésima $(G,*)$-codimensão de A e denotaremos por $c_n^{(G,*)}(A)$. Se $\mathcal{V} = \mathrm{var}^{(G,*)}(A)$, então definimos $c_n^{(G,*)}(\mathcal{V}) = c_n^{(G,*)}(A)$.

As noções de $(G,*)$-variedades de crescimento polinomial, exponencial e quase polinomial são definidas como nos casos ordinário, com involução e G-graduação.

Observe que, se A é uma $(G,*)$-álgebra com G-graduação trivial, então $c_n^{(G,*)}(A) = c_n^*(A)$. Além disso, se A é uma $(G,*)$-álgebra comutativa com involução trivial, então $c_n^{(G,*)}(A) = c_n^G(A)$.

Observação 4.11. *Sejam A uma $(G,*)$-álgebra sobre um corpo F de característica zero e $\overline{A} = A \otimes \overline{F}$, onde $\overline{F}$ é o fecho algébrico de F. Então, $\overline{A}$ tem estrutura de $(G,*)$-álgebra com G-graduação $\overline{A} = \bigoplus_{g\in G} \overline{A}^{(g)}$, onde $\overline{A}^{(g)} = A^{(g)} \otimes \overline{F}$, para todo $g \in G$, e munida da involução $*$ dada por $(a \otimes \alpha)^* = a^* \otimes \alpha$, para todo $a \in A$ e para todo $\alpha \in \overline{F}$. Além disso, $\dim_F(A) = \dim_{\overline{F}}(\overline{A}), \mathrm{Id}^{(G,*)}(A) = \mathrm{Id}^{(G,*)}(\overline{A})$, vista como uma $(G,*)$-álgebra sobre F, e $c_n^{(G,*)}(A) = c_n^{(G,*)}(\overline{A})$.*

De acordo com essa observação, ao trabalharmos com questões relacionadas às $(G,*)$-codimensões podemos considerar $(G,*)$-álgebras sobre um corpo algebricamente fechado.

Observação 4.12. *Se G é um grupo abeliano finito e F um corpo algebricamente fechado, então devido à dualidade entre ações e graduações vista no Capítulo 1, temos que os espaços P_n, P_n^*, P_n^G podem ser naturalmente imersos em $P_n^{(G,*)}$.*

De agora em diante, G denotará um grupo abeliano finito.

Se A é uma $(G,*)$-álgebra, então existe uma relação entre as correspondentes codimensões de A. Esse resultado será apresentado a seguir e a demonstração é similar ao caso já demonstrado para $G = C_2$ (ver [4], Lema 3.1).

Lema 4.13. *Seja A uma $(G,*)$-álgebra. Então:*

1. $c_n(A) \leq c_n^*(A) \leq c_n^{(G,*)}(A)$;
2. $c_n(A) \leq c_n^G(A) \leq c_n^{(G,*)}(A)$;
3. $c_n(A) \leq c_n^{(G,*)}(A) \leq 2^n|G|^n c_n(A)$.

Em [18], Regev mostrou que A é uma PI-álgebra se, e somente se, $c_n(A)$ é exponencialmente limitada. Dessa forma, uma consequência do Lema 4.13 é apresentada a seguir.

Corolário 4.14. *Seja A uma $(G,*)$-álgebra de dimensão finita. Então, $c_n^{(G,*)}(A)$ é limitada exponencialmente.*

Se A é uma $(G,*)$-álgebra, então A é uma $*$-álgebra e é uma álgebra G-graduada. Assim, pelo Lema 4.13, se, ou A gera uma variedade de $*$-álgebras de crescimento exponencial, ou A gera uma variedade de álgebras G-graduadas de crescimento exponencial, então A gera uma variedade de $(G,*)$-álgebras de crescimento exponencial.

Exemplo 4.15. Considere, para cada primo p que divide a ordem de G, a álgebra G-graduada FC_p definida no Exemplo 3.15. Pelo Exemplo 4.7, temos que $\mathrm{var}^G(FC_p)$ tem crescimento exponencial. Logo, as $(G,*)$-álgebras $(FC_p)^G$ e $(FC_2)^{(G,*)}$, definidas no Exemplo 3.15, geram $(G,*)$-variedades de crescimento exponencial.

Exemplo 4.16. Seja $(FC_2)_*$ a $*$-álgebra definida no Exemplo 2.38. Através do Exemplo 4.2, temos que $\mathrm{var}^*((FC_2)_*)$ tem crescimento exponencial. Com isso, a variedade $\mathcal{V}$ gerada pela $(G,*)$-álgebra $(FC_2)_*$, definida no Exemplo 3.4, tem crescimento exponencial.

Exemplo 4.17. Sabemos que a álgebra M é PI-equivalente a álgebra UT_2. Como UT_2 gera uma variedade de crescimento exponencial, então, para todo $g \in G$, temos que $\mathrm{var}^{(G,*)}(M_{g,\rho})$ tem crescimento exponencial.

Se A é uma $(G,*)$-álgebra de dimensão finita, então, como consequência do Corolário 4.14, existe uma constante $\alpha \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq c_n^{(G,*)}(A) \leq \alpha^n$. Assim, a sequência $\{c_n^{(G,*)}(A)\}_{n\geq 1}$, é limitada, portanto, podemos falar em limite superior e limite inferior dessa sequência.

Definição 4.18. *Seja A uma $(G,*)$-álgebra. Definimos*

$$\underline{\exp^{(G,*)}(A)} := \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^{(G,*)}(A)} \quad e \quad \overline{\exp^{(G,*)}(A)} := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^{(G,*)}(A)}.$$

Se ocorrer a igualdade, então

$$\exp^{(G,*)}(A) := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^{(G,*)}(A)},$$

é chamado de $(G,*)$*-expoente de* A.

Seja A uma $(G,*)$-álgebra. Como vimos, A é uma álgebra com H-ação generalizada e Gordienko em [10] provou a existência do expoente para essa classe de álgebras. Este resultado transcrito para a classe das $(G,*)$-álgebras é dado por:

Teorema 4.19. ([10], Teorema 5) *Sejam* G *um grupo abeliano finito e* A *uma* $(G,*)$*-álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero. Então, existe um inteiro* $d \geq 0$ *e constantes* C_1, C_2, r_1, r_2*, tais que* $C_1 > 0$ *e*

$$C_1 n^{r_1} d^n \leq c_n^{(G,*)}(A) \leq C_2 n^{r_2} d^n.$$

Portanto, $\exp^{(G,*)}(A)$ *existe e é um inteiro não negativo. Se* B *é uma* $(G,*)$*-subálgebra semissimples maximal de* A *e* $J = J(A)$ *é o radical de Jacobson de* A*, então*

$$\exp^{(G,*)}(A) = \max_i \dim_F(C_1^{(i)} + \cdots + C_k^{(i)}),$$

onde $C_1^{(i)}, \ldots, C_k^{(i)}$ *são subálgebras* $(G,*)$*-simples distintas de* B *e*

$$C_1^{(i)} J C_2^{(i)} J \cdots J C_{k-1}^{(i)} J C_k^{(i)} \neq \{0\}.$$

Como consequência do Teorema 4.19, temos o seguinte resultado.

Corolário 4.20. *Sejam* G *um grupo abeliano finito e* A *uma* $(G,*)$*-álgebra de dimensão finita sobre um corpo* F *de característica zero. Então,* $\exp^{(G,*)}(A)$ *existe, é um inteiro não negativo e* $\exp^{(G,*)}(A) \leq \dim_F(A)$.

4.4 Caracterização das $(G,*)$-álgebras de crescimento polinomial

Nesta seção demonstraremos o principal resultado deste capítulo: a extensão do Teorema de Kemer para a classe das $(G,*)$-álgebras de dimensão finita. Recordamos que G denota um grupo abeliano finito.

Iniciamos apresentando uma primeira caracterização das variedades geradas por $(G,*)$-álgebras de dimensão finita de crescimento polinomial.

Teorema 4.21. *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade gerada por uma $(G,*)$-álgebra de dimensão finita sobre um corpo de característica zero. Então,* $\exp^{(G,*)}(\mathcal{V}) \leq 1$ *se, e somente se,* $\mathcal{V}$ *tem crescimento polinomial.*

Demonstração. Se $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial, então existem um inteiro não negativo r e uma constante C tais que $c_n^{(G,*)}(A) \leq Cn^r$. Portanto, $\exp^{(G,*)}(A) \leq 1$.

Suponha que $\exp^{(G,*)}(A) \leq 1$. Pelo Teorema 4.19, temos que $c_n^{(G,*)}(A) \leq C_2 n^{r_2}$. Considere k um inteiro não negativo tal que $r_2 \leq k$. Assim, $c_n^{(G,*)}(A) \leq C_2 n^k$, e portanto, $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial. □

Giambruno, dos Santos e Vieira em [4] apresentaram uma primeira extensão do Teorema de Kemer para a classe das $(C_2,*)$-álgebras de dimensão finita.

Teorema 4.22. ([4], Teorema 8.6) *Seja A uma $(C_2,*)$-álgebra de dimensão finita sobre um corpo de característica zero. Então $c_n^{(C_2,*)}(A)$ é limitada polinomialmente se, e somente se, $M_{g,\rho}, (FC_2)_*, (FC_2)^{C_2}, (FC_2)^{(C_2,*)} \notin \mathrm{var}^{(C_2,*)}(A)$, para todo $g \in C_2$.*

É importante ressaltar que os autores em [5] mostraram que dada uma variedade $\mathcal{V}$ gerada por uma $(C_2,*)$-álgebra tal que $(FC_2)_* \notin \mathcal{V}$, então $\mathcal{V} = \mathrm{var}^{(G,*)}(A)$, para alguma $(C_2,*)$-álgebra A de dimensão finita. Isso nos diz que a hipótese de dimensão finita no Teorema 4.22 não é necessária.

Nosso objetivo nesta seção é generalizar o Teorema 4.22 para um grupo abeliano finito qualquer. Para isso, iniciaremos apresentando dois lemas técnicos.

Dado $S \subseteq F\langle X \mid G,*\rangle$, denotamos por $\langle S\rangle_{T^{(G,*)}}$ o $T^{(G,*)}$-ideal gerado por S.

Lema 4.23. ([17], Lema 5.4) *Sejam A e B $(G,*)$-álgebras. Se B tem G-graduação trivial e $B \notin \mathrm{var}^{(G,*)}(A)$, então $B \notin \mathrm{var}^*(A^{(1)})$.*

Demonstração. Sejam A e B $(G,*)$-álgebras. Como $A^{(1)}$ tem G-graduação trivial induzida, temos que

$$\mathrm{Id}^{(G,*)}(A^{(1)}) = \langle \mathrm{Id}^*(A^{(1)}), y_{i,g}, z_{i,g} : g \neq 1\rangle_{T^{(G,*)}}.$$

Se B tem G-graduação trivial, então

$$\mathrm{Id}^{(G,*)}(B) = \langle \mathrm{Id}^*(B), y_{i,g}, z_{i,g} : g \neq 1\rangle_{T^{(G,*)}}.$$

Suponha que $B \in \mathrm{var}^*(A^{(1)})$. Então $B \in \mathrm{var}^{(G,*)}(A^{(1)})$ e como $A^{(1)}$ é uma $(G,*)$-subálgebra de A, temos que $\mathrm{var}^{(G,*)}(A^{(1)}) \subseteq \mathrm{var}^{(G,*)}(A)$. Portanto, $B \in \mathrm{var}^{(G,*)}(A)$. □

Lema 4.24. ([17], Lema 5.5) *Seja A uma $(G,*)$-álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero. Considere $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m + J$ uma* *decomposição de Wedderburn-Malcev de A, onde $A_1, \ldots, A_m$ são álgebras $(G,*)$-simples e $J = J(A)$. Se $g \in G$ e existem $r, s \in \{1, \ldots, m\}, r \neq s$, tais que $A_r^{(1)} J^{(g)} A_s^{(1)} \neq \{0\}$, então $M_{g,\rho} \in \mathrm{var}^{(G,*)}(A)$.*

Demonstração. Considere A uma $(G,*)$-álgebra de dimensão finita e $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m + J$ uma decomposição de Wedderburn-Malcev de A, onde $A_1, \ldots, A_m$ são álgebras $(G,*)$-simples e $J = J(A)$.

Seja $g \in G$ e suponha que existem $r, s \in \{1, \ldots, m\}, r \neq s$, tais que $A_r^{(1)} J^{(g)} A_s^{(1)} \neq \{0\}$. Com isso, existem $a_r \in A_r^{(1)}, a_s \in A_s^{(1)}$ e $j \in J^{(g)}$ tais que $a_r j a_s \neq 0$. Se e_1 e e_2 denotam as unidades de $A_r^{(1)}$ e $A_s^{(1)}$, respectivamente, então existe $j_g \in J^{(g)}$ tal que $0 \neq e_1 j_g e_2 \in J^{(g)}$.

Considere k o maior inteiro não negativo tal que $e_1 J e_2 \subseteq J^k$ e seja $A' = \dfrac{A}{J^{k+1}}$. Como J é um $(G,*)$-ideal de A, temos que A' é uma $(G,*)$-álgebra e $A' \in \mathrm{var}^{(G,*)}(A)$.

Seja $\overline{J} = \overline{J(A')} = \dfrac{J}{J^{k+1}}$ o radical de Jacobson de A'. Se $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ e $\overline{j}_g$ denotam as classes de e_1, e_2 e j_g em A', então $\overline{e}_1 \overline{J} \overline{e}_2 \neq 0$.

Considere

$$B = \mathrm{span}_F\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e_1 j_g e_2}, \overline{e_2 j_g^* e_1}\}.$$

Como $e_1 J e_2 \subseteq J^k$, temos que $e_1 J e_2 J, e_2 J e_1 J \subseteq J^{k+1}$. Além disso, como e_1 e e_2 são idempotentes ortogonais, concluímos que B é uma $(G,*)$-subálgebra de A'.

Se $g = 1$, então B é munida com G-graduação trivial induzida. Neste caso, a álgebra B será denotada por B_1.

Se $g \neq 1$, então a álgebra B é munida da seguinte G-graduação:

$$B^{(1)} = \mathrm{span}_F\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\},\ B^{(g)} = \mathrm{span}_F\{\overline{e_1 j_g e_2}, \overline{e_2 j_g^* e_1}\} \text{ e } B^{(h)} = \{0\},$$

para todo $h \in G, h \notin \{1, g\}$. Neste caso, a álgebra B será denotada por B_g, para todo $g \in G - \{1\}$. Observe que, $(B_g^{(1)})^+ = \mathrm{span}_F\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$, $(B_g^{(1)})^- = \{0\}, (B_g^{(g)})^+ = \mathrm{span}_F\{\overline{e_1 j_g e_2} + \overline{e_2 j_g^* e_1}\}$ e $(B_g^{(g)})^- = \mathrm{span}_F\{\overline{e_1 j_g e_2} - \overline{e_2 j_g^* e_1}\}$.

Agora, mostraremos que, para todo $g \in G$, as álgebras B_g e $M_{g,\rho}$ são isomorfas, como $(G,*)$-álgebras. Para isto, consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rcc} \varphi : B_g & \to & M_{g,\rho} \\ \overline{e}_1 & \mapsto & e_{11} + e_{44} \\ \overline{e}_2 & \mapsto & e_{22} + e_{33} \\ \overline{e_1 j_g e_2} & \mapsto & e_{12} \\ \overline{e_2 j_g^* e_1} & \mapsto & e_{34}. \end{array}$$

Claramente, a aplicação φ é um isomorfismo de $(G,*)$-álgebras. Portanto, $M_{g,\rho} \in \mathrm{var}^{(G,*)}(B_g) \subseteq \mathrm{var}^{(G,*)}(A') \subseteq \mathrm{var}^{(G,*)}(A)$. $\square$

Através desses resultados, estamos aptos para expor uma caracterização das $(G,*)$-álgebras de crescimento polinomial, estendendo o Teorema de Kemer para essa classe de álgebras.

Teorema 4.25. ([17], Teorema 5.8) *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade gerada por uma $(G,*)$-álgebra de dimensão finita sobre um corpo F de característica zero. Então, $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial se, e somente se, ou $|G|$ é par e $(FC_2)_*, (FC_2)^{(G,*)}, (FC_p)^G$ e $M_{g,\rho} \notin \mathcal{V}$, ou $|G|$ é ímpar e $(FC_2)_*, (FC_p)^G$ e $M_{g,\rho} \notin \mathcal{V}$, para todo primo p que divide a ordem de G e para todo $g \in G$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{V}$ uma variedade gerada por uma $(G,*)$-álgebra A de dimensão finita sobre um corpo F de característica zero. Por meio da Observação 4.11, podemos assumir que F é um corpo algebricamente fechado.

Através dos Exemplos 4.15, 4.16 e 4.17, temos que as $(G,*)$-álgebras $(FC_2)_*, (FC_2)^{(G,*)}$, $(FC_p)^G$ e $M_{g,\rho}$ geram $(G,*)$-variedades de crescimento exponencial, para todo $g \in G$ e para todo primo p que divide $|G|$. Assim, se $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial, então $(FC_2)_*, (FC_p)^G$ e $M_{g,\rho} \notin \mathcal{V}$ (adicionamos $(FC_2)^{(G,*)}$ quando $|G|$ for par).

Reciprocamente, suponha que $(FC_2)_*, (FC_p)^G$ e $M_{g,\rho} \notin \mathcal{V}$, e caso $|G|$ seja par, também assumiremos que $(FC_2)^{(G,*)} \notin \mathcal{V}$, para todo $g \in G$ e para todo primo p que divide $|G|$.

Pelo Teorema 3.20, podemos considerar

$$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_m + J$$

uma decomposição de Wedderburn-Malcev de A, onde $A_1, \ldots, A_m$ são álgebras $(G,*)$-simples e $J = J(A)$ o radical de Jacobson de A. Temos que $A^{(1)} = A_1^{(1)} \oplus \cdots \oplus A_m^{(1)} + J^{(1)}$ é uma $(G,*)$-álgebra com G-graduação trivial e involução induzida. Como $(FC_2)_*, M_{1,\rho} \notin \mathcal{V}$, então, pelo Lema 4.23, temos que $(FC_2)_*$ e $M_{1,\rho} \notin \mathrm{var}^*(A^{(1)})$. Isso implica que, pelo Teorema 4.4, $\mathrm{var}^*(A^{(1)})$ tem crescimento polinomial. Portanto, através do Corolário 4.6, temos que $A_i^{(1)} \cong F$, para todo $1 \leq i \leq m$.

Agora, como $\dim_F(A_i^{(1)}) = 1$, por meio do Corolário 3.23, temos que cada A_i é isomorfa a uma álgebra de grupo torcida. Mostraremos que $A_i \cong F$, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. De fato, suponha que existe i, tal que $A_i \cong F^\sigma H$, para algum subgrupo $H \neq \{1\}$ de G. Dessa forma, existe um primo p que divide $|H|$ e, assim, $F^\sigma C_p$ é uma $(G,*)$-subálgebra de A_i. Pelo Teorema 2.30, temos que $F^\sigma C_p \cong FC_p$. Se $p \neq 2$, então, pelo Lema 3.13, a única involução graduada em FC_p é a involução trivial e, com isso, $(FC_p)^G \in \mathcal{V}$, uma contradição. Por outro lado, se $p = 2$, então, ou $(FC_p)^G$, ou $(FC_2)^{(G,*)} \in \mathcal{V}$, uma contradição. Portanto, $A_i = A_i^{(1)} \cong F$, para todo $i = 1, \ldots, m$.

Por fim, como $M_{g,\rho} \notin \mathcal{V}$, para todo $g \in G$, pelo Lema 4.24, temos que $A_r^{(1)} J^{(g)} A_s^{(1)} = \{0\}$, para todo $r, s \in \{1, \ldots, m\}, r \neq s$ e para todo $g \in G$. Como $A_i = A_i^{(1)}$, para todo $i = 1, \ldots, m$ e J é um $(G,*)$-ideal de A, implica que $A_r J A_s = \{0\}$, para todo $r, s \in \{1, \ldots, m\}, r \neq s$.

Portanto, como consequência do Teorema 4.19, $\exp^{(G,*)}(\mathcal{V}) = 1$, e concluímos pelo Teorema 4.21, que $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial. $\square$

Corolário 4.26. *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade gerada por uma $(G,*)$-álgebra A de dimensão finita. Então, a sequência $\{c_n^{(G,*)}(A)\}_{n\geq 1}$, ou é limitada polinomialmente, ou cresce exponencialmente.*

É importante ressaltar que o corolário anterior também segue do Teorema 4.19.

Corolário 4.27. *Para todo primo p que divide $|G|$ e para todo $g \in G$, as $(G,*)$-álgebras $(FC_2)_*, (FC_p)^G, M_{g,\rho}$ e $(FC_2)^{(G,*)}$, se $|G|$ for par, geram variedades de crescimento quase polinomial.*

Demonstração. Considere o conjunto

$$\mathcal{L} = \{(FC_2)_*, (FC_p)^G, M_{g,\rho} : p \mid |G|, g \in G\},$$

e caso $|G|$ for par, adicionamos $(FC_2)^{(G,*)}$. Como vimos, se $A \in \mathcal{L}$, então $\mathrm{var}(A)^{(G,*)}$ tem crescimento exponencial. Observe, que se g_1, g_2 são elementos distintos de G, então $\mathrm{Id}^{(G,*)}(M_{g_1,\rho}) \nsubseteq \mathrm{Id}^{(G,*)}(M_{g_2,\rho})$. Além disso, se A e B são $(G,*)$-álgebras distintas em $\mathcal{L}$, então, claramente, $\mathrm{Id}^{(G,*)}(A) \nsubseteq \mathrm{Id}^{(G,*)}(B)$.

Sejam $A \in \mathcal{L}$ e $\mathcal{U}$ uma $(G,*)$-subvariedade própria de $\mathrm{var}^{(G,*)}(A)$. Como $\mathcal{U}$ é própria, então $A \notin \mathcal{U}$. Além disso, se $B \in \mathcal{U}$, para algum $B \in \mathcal{L}$, então $B \in \mathrm{var}^{(G,*)}(A)$, e como visto acima, isto não ocorre. Portanto, $B \notin \mathcal{U}$, para todo $B \in \mathcal{L}$, e pelo Teorema 4.25, temos que $\mathcal{U}$ tem crescimento polinomial. $\square$

Corolário 4.28. *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade gerada por uma $(G,*)$-álgebra A de dimensão finita sobre um corpo F de característica zero. Então, $\mathcal{V}$ tem crescimento quase polinomial se, e somente se, ou $\mathrm{Id}^{(G,*)}(A) = \mathrm{Id}^{(G,*)}((FC_2)_*)$, ou $\mathrm{Id}^{(G,*)}(A) = \mathrm{Id}^{(G,*)}((FC_2)^{(G,*)})$, quando $|G|$ for par, ou $\mathrm{Id}^{(G,*)}(A) = \mathrm{Id}^{(G,*)}((FC_p)^G)$, para algum primo p que divide $|G|$, ou $\mathrm{Id}^{(G,*)}(A) = \mathrm{Id}^{(G,*)}(M_{g,\rho})$, para algum $g \in G$.*

Considerações Finais

Nesta tese estudamos as $(G,*)$-álgebras em relação à sua estrutura algébrica e suas identidades polinomiais. A primeira parte deste trabalho foi dedicada ao estudo das álgebras $(G,*)$-simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, onde G é um grupo abeliano finito.

No Capítulo 2, classificamos as álgebras $(C_p,*)$-simples, onde p é um primo ímpar. É natural questionarmos sobre a extensão dessa classificação para G um grupo abeliano finito. Como vimos no Teorema 3.22, A é uma álgebra $(G,*)$-simples se, e somente se, ou $A \cong M_n(F^\sigma H)$ munida com alguma involução graduada, ou $A \cong M_n(F^\sigma H) \oplus M_n(F^\sigma H)^{op}$ munida com involução troca, onde σ é um 2-cociclo e H é um subgrupo de G.

Para classificar todas as álgebras $(G,*)$-simples é necessário determinar todas as involuções graduadas presentes na $(G,*)$-álgebra $M_n(F^\sigma H)$. Neste momento estamos trabalhando na resolução deste problema.

No Capítulo 3, demos nossa contribuição na classificação das variedades geradas por $(G,*)$-álgebras de dimensão finita de crescimento quase polinomial. Nessa classificação, está presente a $(G,*)$-álgebra $M_{g,\rho}$, a álgebra $M = F(e_{11}+e_{44}) \oplus F(e_{22}+e_{33}) \oplus Fe_{12} \oplus Fe_{34}$ com G-graduação $M^{(1)} = \text{span}_F\{e_{11}+e_{44}, e_{22}+e_{33}\}$, $M^{(g)} = \text{span}_F\{e_{12}, e_{34}\}$ e $M^{(h)} = \{0\}$, para $h \neq g$, e munida com involução reflexão.

No Teorema 3.11 apresentamos todas as involuções graduadas presentes na álgebra M e nos perguntamos se a álgebra M munida com uma estrutura de $(G,*)$-álgebra diferente da $(G,*)$-álgebra $M_{g,\rho}$ gera uma variedade de crescimento quase polinomial.

Para facilitar as demonstrações dos próximos resultados, denotaremos por $M_{j,\phi}$ a álgebra M com G-graduação presente no item $j \in \{1,\ldots,7\}$ do Teorema 2.13 e munida da involução $\phi \in \{\rho, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_4\}$, presente no Teorema 2.48.

Proposição 4.29. *As variedades geradas pelas $(G,*)$-álgebras M_{j,γ_i}, com $j = 2,4,5,6$ e $i = 1,2,4$ possuem uma subvariedade própria gerada por uma álgebra isomorfa, como $(G,*)$-álgebra, a $(FC_2)_*$.*

Demonstração. Considere primeiramente a $(G,*)$-álgebra M_{2,γ_1}. A álgebra $B = F \oplus F(e_{11} + e_{44} - (e_{22} + e_{33}))$ com G-graduação trivial e involução induzida é uma $(G,*)$-

subálgebra de M_{2,γ_1} isomorfa, como $(G,*)$-álgebra, a $(FC_2)_*$. Logo, $\mathrm{var}^{(G,*)}(M_{2,\gamma_1})$ possui uma subvariedade própria gerada por $(FC_2)_*$.

Os outros casos são análogos. □

Como visto, $\mathrm{var}^{(G,*)}((FC_2)_*)$ tem crescimento exponencial. Logo, por meio da Proposição 4.29, temos que as $(G,*)$-álgebras descritas acima, não geram variedades de crescimento quase polinomial.

Proposição 4.30. *As variedades geradas pelas $(G,*)$-álgebras $M_{j,\rho}$, com $j = 1,3$, possuem uma subvariedade própria gerada por uma álgebra isomorfa, como $(G,*)$-álgebra, a $(FC_2)^G$.*

Demonstração. Inicialmente, considere $M_{1,\rho}$. A álgebra $B = F \oplus F(e_{11}+e_{44}-(e_{22}+e_{33}))$ com G-graduação induzida e involução trivial é uma $(G,*)$-subálgebra de $M_{1,\rho}$ isomorfa, como $(G,*)$-álgebra, a $(FC_2)^G$. Portanto, $\mathrm{var}^{(G,*)}((FC_2)^G)$ é uma subvariedade própria de $\mathrm{var}^{(G,*)}(M_{1,\rho})$.

O outro caso é análogo. □

Recordemos que $\mathrm{var}^{(G,*)}((FC_2)^G)$ tem crescimento exponencial, e através da Proposição 4.30, concluímos que as $(G,*)$-álgebras apresentadas no resultado anterior não geram variedades de crescimento quase polinomial.

Proposição 4.31. *As variedades geradas pelas $(G,*)$-álgebras M_{j,γ_i}, com $j = 1,3$ e $i = 1,2,4$, possuem uma subvariedade própria gerada por uma álgebra isomorfa, como $(G,*)$-álgebra, a $(FC_2)^{(G,*)}$.*

Demonstração. Seja M_{1,γ_1}. A álgebra $B = F \oplus F(e_{11}+e_{44}-(e_{22}+e_{33}))$ com G-graduação e involução induzida é uma $(G,*)$-subálgebra de M_{1,γ_1} isomorfa, como $(G,*)$-álgebra, a $(FC_2)^{(G,*)}$. Portanto, $\mathrm{var}^{(G,*)}((FC_2)^{(G,*)})$ é uma subvariedade própria de $\mathrm{var}^{(G,*)}(M_{1,\gamma_1})$.

O resultado segue análogo para as outras álgebras. □

Como $(FC_2)^{(G,*)}$ gera uma variedade de crescimento exponencial, temos que as álgebras presentes na Proposição 4.31 não geram variedades de crescimento quase polinomial.

Em relação à classificação das $(G,*)$-variedades de crescimento quase polinomial, questionamos sob quais condições este resultado é válido sem a condição de dimensão finita da álgebra. Além disso, fica ainda em aberto, a questão da extensão desse resultado para G um grupo finito qualquer. As soluções desses problemas serão abordadas em trabalhos futuros.

Referências Bibliográficas

[1] Yu. A. Bahturin, M. V. Zaicev and S. K. Sehgal. *Finite-dimensional simple graded algebras*. Sbornik-Mathematics **199**:7 (2008) 965-983.

[2] M. Cohen and S. Montgomery. *Group-graded rings, smash product and group actions*. Trans. Amer. Math. Soc. **282** (1984) 237-258.

[3] C. W. Curtis and I. Reiner. Representation theory of finite groups and associative algebras. Interscience Publishers, New York, 1962.

[4] A. Giambruno, R. B dos Santos and A. C. Vieira. *Identities of $*$-superalgebras and almost polynomial growth*. Linear Multilinear Algebra. **64** (3) (2016) 484-501.

[5] A. Giambruno, A. Ioppolo and D. La Mattina. *Superalgebras with involutions or superinvolutions and almost polynomial growth of the codimensions*. Algebr. Represent. Theory 22 (2019) no. 4, 961-976.

[6] A. Giambruno and S. Mishchenko. *Polynomial growth of the $*$-codimensions and Young diagrams*. Comm. in Algebra **29** (1) (2001) 277-284.

[7] A. Giambruno and S. Mishchenko. *On star-varieties with almost polynomial growth*. Algebra Colloq.(1) (2001) 33-42.

[8] A. Giambruno and M. Zaicev. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. Math. Surveys Monogr., vol.122, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[9] A. Giambruno and M. Zaicev. *A characterization of algebras with polynomial growth of the codimensions*. Proc. Amer. Math. Soc **129** (1) (2000) 59-67.

[10] A. S. Gordienko. *Amitsur's conjecture for associative algebras with a generalized Hopf action*. J. Pure Appl. Algebra **217** (2013) 1395-1411.

[11] G. Karpilovsky. Group Representations. vol 1, Elsevier Science Publishers B.V, 1993.

[12] A.R. Kemer. Ideals of Identities of Associative Algebras. AMS Translations of Math. Monographs. Vol 87, 1988.

[13] A. R. Kemer. *Varieties of finite rank*. Em Proc. 15-th All the União Algebraic Conf., Krasnoyarsk. Vol 2, 1979.

[14] P. Koshlukov and M. V. Zaicev. *Identities and isomorphisms of graded simple algebras.* Linear Algebra and its applications **432** (2010) 3141-3148.

[15] C.P. Milies and S.K. Sehgal. An introdution to group ring. Kluwer Academic. Publishers, 2002.

[16] S. Mishchenko and A. Valenti. *A star-variety with almost polynomial growth.* J. Algebra **233** (2000) 66-84.

[17] L. M. C. Oliveira, R. B. dos Santos and A. C. Vieira. *Varieties of Group Graded Algebras with Graded Involution of Almost Polynomial Growth.* Algebras and Representation Theory (2021). https://doi.org/10.1007/s10468-021-10107-0.

[18] A. Regev. *Existence of identities in* $A \otimes B$. Israel J. Math. **11** (1972) 131-152.

[19] L. H. Rowen. Ring Theory. Vol. 1, Academic Press, New York, 1988.

[20] L. H. Rowen. Polynomial Identities in Ring Theory. Vol. 1, Academic Press, New York, 1980.

[21] A. Valenti. *Group graded algebras and almost polynomial growth.* J. Algebra **334** (2011) 247-254.

[22] A. Valenti and M. Zaicev. *Abelian gradings on upper-triangular matrices.* Arch. Math. 80 (2003) 12-17.