

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**  
**Departamento de Matemática**  
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**

Alberto Mizrahy Campos

**Novos resultados sobre o problema do  
truncamento em percolação de longo alcance**

Belo Horizonte,  
2020

Alberto Mizrahy Campos

# **Novos resultados sobre o problema do truncamento em percolação de longo alcance**

**Versão Final**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMG, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Bernardo Nunes Borges de Lima.

Belo Horizonte,  
2020

Campos, Alberto Mizrahy.

C198c      Novos resultados sobre o problema do truncamento em  
percolação de longo alcance / Alberto Mizrahy Campos. – 2020.  
36 f. il.

Orientador: Bernardo Nunes Borges de Lima.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas  
Gerais Instituto de Ciências Exatas, Departamento de  
Matemática.

Referências: f.36.

1. Matemática – Teses. 2. Problema do truncamento – Teses.  
3. Percolação de longo alcance – Teses. I. Lima, Bernardo  
Nunes Borges de. II. Universidade Federal de Minas Gerais,  
Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.  
IV. Título.

CDU 51 (043)



FOLHA DE APROVAÇÃO

*Novos resultados sobre o problema do truncamento  
em percolação de longo alcance*

**ALBERTO MIZRAHY CAMPOS**

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Prof. Bernardo Nunes Borges de Lima  
UFMG

Pós-Doc. Daniel Ungaretti Borges  
UFRJ

Prof. Marcelo Richard Hilário  
UFMG

Belo Horizonte, 06 de março de 2020.

*Aos meus parentes e meus amigos,  
por sempre estarem comigo em todos os momentos.*

# Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Tarcísio e Ethel, por todo o apoio que eles prestaram durante os anos, sempre me tratando com muito carinho.

Agradeço ao meu orientador, Bernardo, por me acolher como aluno desde cedo e me ensinar do básico até o mais avançado, sempre com muita paciência e conselhos bons.

Agradeço à minha namorada, Luiza, por ter uma paciência enorme para escutar as 'minhas matemáticas'.

Agradeço a todos os meus familiares pelo apoio.

Agradeço aos meus amigos velhos e novos, que estão sempre comigo me ajudando em diversas situações e me proporcionaram muitas histórias.

Agradeço, com um carinho especial, a todos os professores que eu tive até esse momento pela enorme paciência.

Por fim, agradeço ao CNPQ pelo apoio financeiro durante a pesquisa.

# Resumo

Em diversos casos do processo de percolação de longo alcance em  $\mathbb{L}^2$ , provamos avanços com relação ao problema do truncamento.

**Palavras-chaves:** Processo de Percolação. Processo de Percolação de Longo Alcance. Problema do Truncamento.

# Abstract

Advances with respect the truncation problem in diversses cases of the long range percolation process in  $\mathbb{L}^2$ .

**Keywords:** Percolation Process. Long Range Percolation. Truncation Problem.

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>10</b>
<b>1.1</b>	<b>Grafos</b>	<b>10</b>
<b>1.2</b>	<b>Noções de Percolação</b>	<b>11</b>
<b>1.3</b>	<b>Percolação de Longo Alcance em <math>\mathbb{L}^d</math></b>	<b>14</b>
<b>1.4</b>	<b>O Problema do Truncamento</b>	<b>17</b>
<b>1.5</b>	<b>Objetivos</b>	<b>19</b>
1.5.1	Resultados no modelo de percolação deslocado	19
1.5.2	Teoremas no modelo de percolação completo	19
1.5.3	Teoremas no modelo de percolação de longo alcance clássico	20
<b>2</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b>	<b>21</b>
<b>2.1</b>	<b>O Teorema de Kalikow e Weiss</b>	<b>21</b>
<b>2.2</b>	<b>Provas para Percolação de longo alcance deslocada</b>	<b>24</b>
2.2.1	Comentários	29
<b>2.3</b>	<b>Provas para Percolação de longo alcance completo</b>	<b>30</b>
2.3.1	Comentários	38
<b>2.4</b>	<b>Provas para Percolação de longo alcance clássico</b>	<b>39</b>
2.4.1	Comentários	44
	<b>Bibliografia</b>	<b>45</b>

# 1 Introdução

## 1.1 Grafos

Um **grafo**  $\mathcal{G}$  é um par ordenado  $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , onde  $\mathcal{V}$  é um conjunto qualquer de elementos e  $\mathcal{E}$  é um conjunto formado por pares de elementos não ordenados de  $\mathcal{V}$ , quando o grafo  $\mathcal{G}$  está implícito denotamos os elementos do par  $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$  como  $(\mathcal{V}(\mathcal{G}), \mathcal{E}(\mathcal{G}))$ . O conjunto  $\mathcal{V}$  é chamado de **conjunto dos vértices**, e seus elementos são denominados de **vértices** ou **sítios**; O conjunto  $\mathcal{E}$  é chamado de **conjunto dos elos**, e seus elementos são denominados de **elos**, **arestas** ou **arestas não orientadas**. Quando o conjunto  $\mathcal{E}$  é formado por pares orientados do conjunto  $\mathcal{V}$ , dizemos que o grafo  $\mathcal{G}$  é um **grafo orientado**, e nesta ocasião os elementos do conjunto  $\mathcal{E}$  são denominados de **arestas orientadas**.

Dado uma aresta não orientada  $e = \{x, y\}$ , do ponto de vista da aresta dizemos que a aresta  $e = \{x, y\}$  **liga** os vértices  $x$  e  $y$ . Nos grafos orientados, para a aresta  $f = (x, y)$ , dizemos que a aresta  $f = (x, y)$  liga somente o vértice  $x$  ao vértice  $y$ . Do ponto de vista dos sítios, se existe uma aresta  $e = \{x, y\}$  que liga o vértice  $x$  ao vértice  $y$  dizemos que o vértice  $x$  é **adjacente** ao vértice  $y$ , no caso da aresta orientada  $f = (x, y)$  dizemos que somente o vértice  $y$  é adjacente do vértice  $x$ . Denotamos por  $x \sim y$  se  $x$  é adjacente a  $y$ , sendo que nos grafos orientados esta relação não é comutativa e nos grafos não orientados esta relação é comutativa.

Um **caminho** do vértice  $v_0$  até o vértice  $v_k$  em um grafo  $\mathcal{G}$  é um sequência ordenada de vértices  $(v_0, v_1, \dots, v_k)$  com  $v_i \sim v_{i+1}$  para todo  $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ . Quando ocorre um caminho do vértice  $v_0$  até  $v_k$  em um grafo, dizemos que  $v_0$  está **conectado** com o vértice  $v_k$ . Se o caminho é formado por arestas não orientadas dizemos que é um **caminho não orientado**, agora se o caminho é formado por arestas orientadas dizemos que é um **caminho orientado**.

Durante o texto diversos grafos diferentes serão empregados nas demonstrações, então para não sobrecarregar o leitor vamos defini-los a frente junto com os resultados respectivos a cada um deles. Nas próximas seções, entretanto, iremos utilizar um conjunto de grafos fundamentais para a teoria de percolação que são as redes hipercúbicas denotadas por  $\mathbb{L}^d$ , com  $d \in \{1, 2, 3, \dots\}$ . Para defini-las considere  $\mathbb{Z}$  o conjunto dos números inteiros e defina  $\mathbb{Z}^d = \{(x_1, \dots, x_d) : x_i \in \mathbb{Z}, \text{ para todo } i = \{1, \dots, d\}\}$  a **malha quadriculada de dimensão d**. Em  $\mathbb{Z}^d$ , iremos definir duas **funções distância** distintas, para isso considere

$x, y \in \mathbb{Z}^d$  onde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_d)$ , assim as funções são dadas por:

$$\begin{aligned} d_1 : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| \\ d_\infty : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow \max_{i=1, \dots, d} \{|x_i - y_i|\} \end{aligned}$$

Considere  $E^d = \{\{x, y\} : x, y \in \mathbb{Z}^d \text{ e } d_1(x, y) = 1\}$ . Então, a **rede hipercúbica**  $\mathbb{L}^d$  é definida como sendo o par  $(\mathbb{Z}^d, E^d)$ .

Com qualquer uma das funções  $d_1$  ou  $d_\infty$  o espaço  $\mathbb{Z}^d$  recebe a classificação de **espaço métrico**. Nele, o vértice que apresenta todas as suas coordenadas nulas é denominado de **origem** e é denotado por 0. Para qualquer conjunto de vértices  $V \subset \mathbb{Z}^d$ , definimos  $x + V$  como sendo o conjunto de vértices  $\{x + v : v \in V\}$ , onde a soma é a soma coordenada a coordenada. Para  $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$  e  $N \in \mathbb{Z}$  definimos o vértice  $Nx = (Nx_1, Nx_2, \dots, Nx_d)$ .

No conjunto de arestas  $E^d$ , as arestas que ligam a origem em vértices cujas coordenadas são positivas em  $\mathbb{Z}^d$  recebem o nome de **arestas canônicas**, para  $i \in \{1, \dots, d\}$  definimos as arestas canônicas como:

$$e_i = \{0, (\delta_{1,i}, \dots, \delta_{d,i})\}$$

Onde  $\delta_{i,j}$  é a função **delta de Kronecker** definida como:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Dado  $e = \{x, y\}$  e  $f = \{a, b\}$  duas arestas quaisquer formada por vértices de  $\mathbb{Z}^d$ , considere  $z \in \mathbb{Z}^d$  um vértice qualquer e  $h \in \mathbb{Z}$  um parâmetro, assim defina as seguintes operações sobre as arestas:

$$\begin{aligned} z + e &= \{z + x, z + y\} \\ he &= \{xh, yh\} \\ e + f &= \{a + x, b + y\} \end{aligned}$$

Observe que em todos os casos o resultado da operação é uma aresta.

## 1.2 Noções de Percolação

Introduzido por Broadbent, S. e Hammersley, J. em 1957, o modelo de percolação é um estudo probabilístico dos meios porosos. Apesar de existirem diversos trabalhos

na época sobre esta mesma temática, o modelo foi inovador uma vez que mudou o foco que perpetuava nos outros trabalhos. Na época se discutia bastante a respeito do comportamento dos líquidos ou partículas, os caminhos aleatórios e os processos de ramificações, e foi com a percolação que apareceram novos resultados e questões a respeito do comportamento e geometria do meio.

O significado da palavra percolação se refere a passagem de um líquido por um meio poroso. Dessa maneira, acompanhando o significado da palavra, o modelo de percolação é um modelo que tenta explicar questões físicas a respeito da permeabilidade dos materiais. Para isso, o modelo sugere uma aproximação do mundo real demasiadamente complexa e muitas vezes realizada de forma empírica, sugerindo que o meio ou material possa ser aproximado por um grafo, o qual os vértices correspondem com regiões do material e as arestas correspondem com dutos ou canais que permitem que um líquido flua de uma região para a outra. Considerando que não conhecemos o interior do material, cada duto entre regiões ou arestas que ligam vértices no grafo podem estar abertos, permitindo a conexão, ou fechados, bloqueando a conexão, com determinada probabilidade. Assim, o estudo de percolação corresponde com o estudo do comportamento médio ou esperado dos grafos aleatórios obtidos em função do sorteio das arestas em abertas e fechadas.

Para definir este processo de forma formal, tome  $\mathcal{G}$  um grafo arbitrário com  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  e um parâmetro  $p \in [0, 1]$ , defina o **processo de percolação canônico com parâmetro  $p$**  como o espaço probabilístico  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_p)$ . Considere uma ordem arbitrária no conjunto dos elos  $\mathcal{E}$ , e então defina o **espaço amostral** como  $\Omega = \prod_{e \in \mathcal{E}} \{0, 1\}$ , sendo que uma configuração do espaço é um elemento  $\omega \in \Omega$  e é representado como uma sequência  $\omega = (\omega(e) : e \in \mathcal{E})$ , onde  $\omega(e)$  é o estado da aresta  $e$  que pode ser  $\omega(e) = 0$ , a aresta está fechada, ou  $\omega(e) = 1$ , a aresta está aberta.

Considerando  $\Omega$ , fixado os valores de  $a_1, \dots, a_n$  com  $a_i \in \{0, 1\}$  e  $i \in \{1, \dots, n\}$ , defina o **conjunto cilíndrico de tamanho  $n$**  como:

$$C_n(a_1, \dots, a_n) = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots) \in \Omega : x_i = a_i, \text{ para } 1 \leq i \leq n\}.$$

Sobre estes conjuntos defina a  $\sigma$ -álgebra do cilindro  $n$  como:

$$\mathcal{F}_n = \sigma(\{C_n(a_1, \dots, a_n) | a_i \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq n\});$$

Por fim defina a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}$  como  $\sigma(\cup \mathcal{F}_n)$ , a qual recebe a notação de  **$\sigma$ -álgebra dos cilindros**, ou seja a menor  $\sigma$ -álgebra que deixa os conjuntos cilíndricos mensuráveis.

Durante o texto, todos os processos de percolação terão os espaços amostrais e as sigmas álgebras padrões como definido acima, entretanto as medidas de probabilidade não serão as mesmas. Neste caso, definimos a **medida de probabilidade canônica** como a medida produto dada por  $P_p = \prod_{e \in \mathcal{E}} \mu_e^p$ , onde  $\mu_e^p$  é uma medida de Bernoulli com parâmetro  $p$ . Para  $\omega \in \Omega$ , temos que  $\mu_e^p(\omega(e) = 1) = p$  e  $\mu_e^p(\omega(e) = 0) = 1 - p$ .

Alguns eventos do conjunto de configurações  $\Omega$  são notáveis no estudo de percolação em um grafo  $\mathcal{G}$ . Considere então  $x, y \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$  e  $A \subset \mathcal{V}(\mathcal{G})$ , definimos então o evento  $\{x \leftrightarrow y\}$  como o evento onde existe um caminho formado por arestas abertas que conecta  $x$  até  $y$ ; o evento  $\{x \leftrightarrow A\}$  é definido como o evento onde existe um caminho formado por arestas abertas que conecta  $x$  até algum vértice de  $A$ . Vale ressaltar que a percolação é definida para qualquer grafo, tendo a mesma definição para grafos orientados e não orientados. Entretanto, os eventos da forma  $\{x \leftrightarrow y\}$  e  $\{x \leftrightarrow A\}$  tem interpretações distintas para grafos orientado e não orientados, pois nos grafos orientados os caminhos considerados são caminhos orientados, e nos grafos não orientados os caminhos considerados são não orientados.

Defina o **aglomerado de um vértice**  $v$  como sendo o conjunto aleatório  $C_v$  descrito como  $C_v(\omega) = \{x \in \mathcal{V}(\mathcal{G}) : v \leftrightarrow x \text{ em } \omega\}$ . Observe que com este conjunto podemos definir o tamanho do aglomerado dado por  $|C_v| = \sum_{x \in \mathcal{V}(\mathcal{G})} \mathbb{1}(v \leftrightarrow x)$ ; Com esta variável aleatória, dado  $v \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$  definimos a **função de percolação**:

$$\begin{aligned} \theta_v &: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \\ \theta_v(p) &= \theta_v^{\mathcal{G}}(p) = P_p(|C(v)| = \infty) \end{aligned}$$

Dadas duas configurações  $\omega, \omega' \in \Omega$ , dizemos que  $\omega \geq \omega'$  se  $\omega(e) \geq \omega'(e)$  para todo  $e \in \mathcal{E}$ . Assim, um evento  $A$  é dito **crecente** se para todo  $\omega \in A$  e  $\omega' \geq \omega$ , temos que  $\omega' \in A$ .

Os resultados a seguir têm uma extrema importância para o desenvolver do texto, entretanto como as provas desses teoremas não acrescentam para as demonstrações dos resultados principais o leitor é convidado a encontrar essas demonstrações no livro de Grimmett, [4], caso não as conheça.

O primeiro resultado da série de resultados retirados de [4] é dado por:

**Teorema 1.2.1.** *Sejam  $p_1, p_2 \in [0, 1]$  tais que  $p_1 > p_2$ , então para todo evento crescente  $A$  temos que:*

$$P_{p_1}(A) \geq P_{p_2}(A)$$

Para qualquer grafo  $G$  e  $v \in V(G)$ , como o evento  $\{|C_v| = \infty\}$  é um evento crescente, a função  $\theta_v^G(p)$ , pelo Teorema 1.2.1, é uma função crescente. Desta maneira, pode-se acrescentar na definição de  $\theta$  a conceito de **ponto crítico** de  $\theta_v^G$ , definido por:

$$p_c^v = p_c^v(G) = \sup_p \{\theta_v^G(p) = 0\}$$

Também a respeito de eventos crescentes, veja em [4], o seguinte resultado:

**Teorema 1.2.2** (Desigualdade FKG). *Sejam  $A, B$  dois eventos crescentes, então:*

$$P_p(A \cap B) \geq P_p(A)P_p(B)$$

Uma aplicação do Teorema 1.2.2 segue da observação que tanto o evento  $\{C_v = \infty\}$  quanto o evento  $\{v \leftrightarrow w\}$  são eventos crescentes, desta maneira podemos mostrar que para grafos conexos o ponto crítico é igual para todos os vértices. Usando esta aplicação, em grafos como  $\mathbb{L}^d$  vale a pena definir  $\theta(p) = \theta_0^{\mathbb{L}^d}(p)$ , onde 0 é a origem de  $\mathbb{Z}^d$ . E com isso, podemos definir  $p_c = p_c(\mathbb{L}^d) = \sup_p \{\theta(p) = 0\}$ .

Para compreender o valor de  $p_c$  nos grafos  $\mathbb{L}^d$ , um dos resultados iniciais de percolação é o teorema abaixo:

**Teorema 1.2.3** (Broadbent-Hammersley). *Em  $\mathbb{L}^d$ , com  $d \geq 2$ , temos que  $0 < p_c(\mathbb{L}^d) < 1$ .*

Dessa forma no grafo  $\mathbb{L}^d$  temos um processo de transição de fase se alterarmos o valor de  $p$ , isto é, para  $p$  menor do que  $p_c$  os aglomerados formados são todos finitos quase certamente, entretanto com  $p$  maior que  $p_c$  existe algum aglomerado infinito no grafo, e o que acontece em  $p_c$  não tem uma resposta afirmativa para todas as dimensões  $d$  e é hoje o maior problema em aberto na percolação canônica.

### 1.3 Percolação de Longo Alcance em $\mathbb{L}^d$

Fixado um modelo de percolação nas arestas de um grafo  $\mathcal{G}$ , o modelo de percolação de Longo Alcance tenta compreender as variações do estudo da percolação quando se adiciona arestas a mais no conjunto  $\mathcal{E}(\mathcal{G})$ . As arestas adicionadas podem ser de natureza aleatória, com parâmetros arbitrários e centralizadas em qualquer posição ou vértice, dessa maneira o processo de adicionar mais arestas faz com que o modelo de longo alcance tenha uma ampla variação de descrições. Cada distinção gera um problema diferente e o que se denomina na literatura de Percolação de Longo Alcance acaba sendo o conjunto de todos estes resultados.

Em  $\mathbb{L}^d$  abordaremos percolação em três grafos de longo alcance distintos. Cada grafo, por sua vez já foi introduzido em artigos anteriores, entretanto as notações utilizadas nos artigos não são boas para diferenciá-los no texto. Afim de diferenciar os grafos no texto, denotaremos eles de **grafo clássico**, **grafo completo** e **grafo deslocado**. O nome clássico vem pela presença do grafo desde os primeiros artigos sobre percolação de longo alcance até os mais atuais, artigos como ([6],2008), ([5],1988) e ([8],1983). A denominação de completo está ligado ao fato da presença de todas as arestas no grafo, podendo ser encontrado no artigo [3]. Por fim, a denominação deslocado está relacionado com o fato que a disposição das arestas é a disposição utilizada no grafo clássico com um deslocamento vertical, e sua utilização na literatura pode ser visto em artigos como [1].

Relembre o conjunto das arestas canônicas dado por  $e_i = \{0, (\delta_{1,i}, \dots, \delta_{d,i})\}$ . Então defina:

$$E_i = \{x + ie_j | x \in \mathbb{Z}^d, j = 1, \dots, d\}$$

O conjunto das arestas de alcance  $i$ , e:

$$E_{LA}^d = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$$

Utilizando este conjunto, defina o **grafo clássico** como  $LA(\mathbb{Z}^d) = (\mathbb{Z}^d, E_{LA}^d)$ , onde  $LA$  representa Longo Alcance. Observe abaixo o grafo de percolação de longo alcance clássico em  $LA(\mathbb{Z})$ .

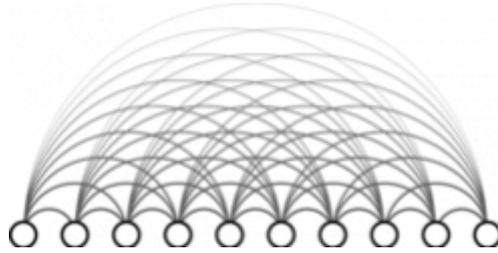


Figura 1 – Grafo  $LA(\mathbb{Z})$

Em  $LA(\mathbb{Z})$  como mostrado na Figura 1, o grafo apresenta todas as arestas possíveis, já em  $LA(\mathbb{Z}^2)$  essa condição não é verdadeira pois não temos a aresta  $e = \{(0, 0), (1, 1)\}$ . Considerando a ausência da aresta  $\{(0, 0), (1, 1)\}$  em  $LA(\mathbb{Z}^2)$  defina o conjunto das arestas completo como:

$$E_c^d = \{\{x, y\} | x, y \in \mathbb{Z}^d, x \neq y\}$$

E defina o **grafo completo** como sendo  $C(\mathbb{Z}^d) = (\mathbb{Z}^d, E_c^d)$ , onde  $C$  representa Longo Alcance Completo.

O **grafo deslocado** será definido apenas para dimensão dois, e será representado por  $D(\mathbb{Z}^2)$  onde  $D$  representa Longo Alcance Deslocado. Definimos o conjunto de vértices como  $V(D(\mathbb{Z}^2)) = \mathbb{Z}^2$  e o conjunto das arestas é dado por:

$$E(D(\mathbb{Z}^2)) = \{\{x, y\} \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 : y = x + (h, 1), \text{ para algum } h \in \mathbb{Z}\}$$

Para deixar claro todos estes grafos observe abaixo a Figura 2 que ilustra no vértice  $v \in \mathbb{Z}^2$  todos os respectivas arestas que saem de  $v$  nos grafos  $LA(\mathbb{Z}^2)$ ,  $C(\mathbb{Z}^2)$  e  $D(\mathbb{Z}^2)$ .

A ideia na definição do modelo de percolação de longo alcance nestes três grafos vem ao realizar uma percolação onde cada aresta  $e = \{x, y\}$  está aberta em função de um parâmetro que depende unicamente de  $d_\infty(x, y)$  ou  $d_1(x, y)$ . Então dado uma serie  $(p_i)_{i=1}^{\infty}$

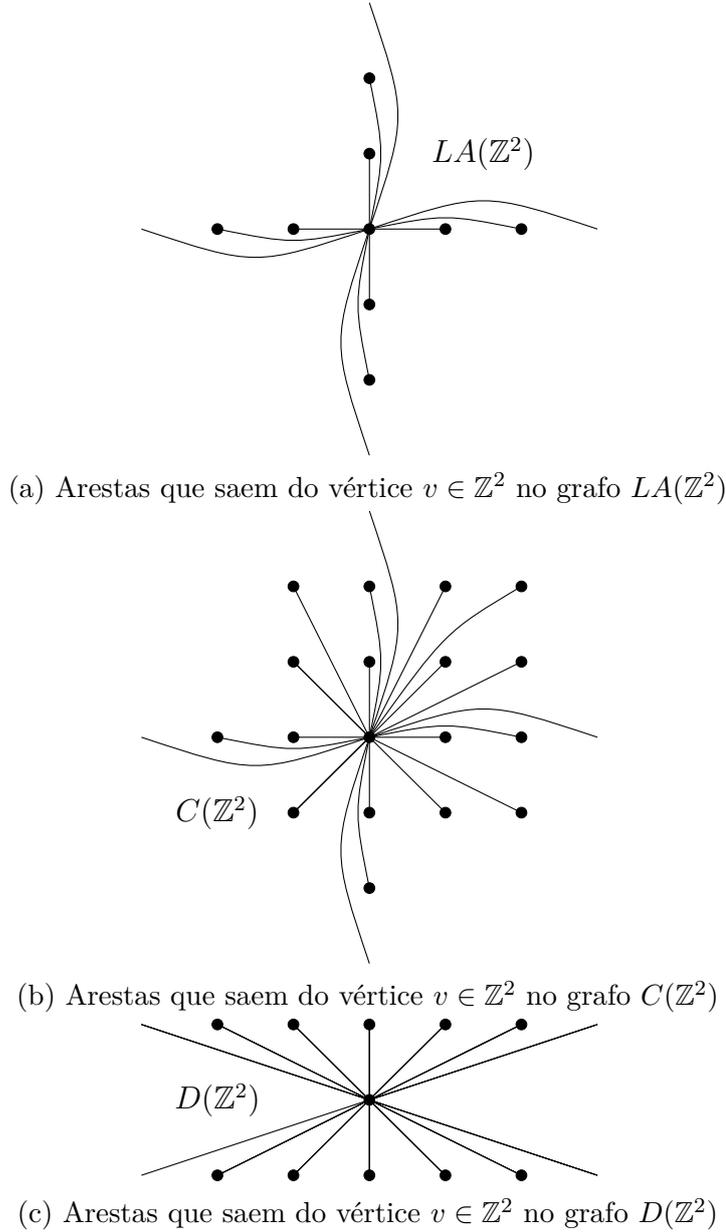


Figura 2 – Esquema de aresta e vértice para cada um dos grafos  $LA(\mathbb{Z}^2)$ ,  $C(\mathbb{Z}^2)$  e  $D(\mathbb{Z}^2)$

de parâmetros em  $[0, 1]$ , o processo associa a probabilidade de cada aresta de tamanho  $i$  estar aberta ao valor  $p_i$ .

Formalmente, defina o **processo de percolação de longo alcance em  $LA(\mathbb{Z}^d)$**  com parâmetro  $(p_i)_{i=1}^\infty$  como sendo o espaço probabilístico  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , onde  $\Omega = \prod_{e \in \mathcal{E}(LA(\mathbb{Z}^d))} \{0, 1\}$  e  $\mathcal{F}$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada por cilindros de  $\Omega$ , a medida de probabilidade  $\mathbb{P}$  é a medida produto dado por  $\mathbb{P} = \prod_{e \in \mathcal{E}(LA(\mathbb{Z}^d))} \mu_e$ , onde para  $e = \{x, y\}$  temos que  $\mu_e$  corresponde com uma Bernoulli de parâmetro  $p_{d_\infty(x,y)}$ . Em particular, usamos um abuso de notação e denotamos este modelo como percolação em  $LA(\mathbb{Z}^2)$ .

De forma análoga definimos o **processo de percolação de longo alcance em  $C(\mathbb{Z}^d)$**  com parâmetro  $(p_i)_{i=1}^\infty$  como o espaço probabilístico  $(\Omega_c, \mathcal{F}_c, \mathbb{P}_c)$ , onde  $\Omega_c =$

$\prod_{e \in \mathcal{E}(C(\mathbb{Z}^d))} \{0, 1\}$  e  $\mathcal{F}_c$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada por cilindros de  $\Omega_c$ , a medida de probabilidade  $\mathbb{P}_c$  é a medida produto dado por  $\mathbb{P}_c = \prod_{e \in \mathcal{E}(C(\mathbb{Z}^d))} \mu_e$ , onde para  $e = \{x, y\}$  a medida  $\mu_e$  é uma Bernoulli de parâmetro  $p_{d_\infty(x,y)}$ . Em particular, usamos um abuso de notação e denotamos este modelo como percolação em  $C(\mathbb{Z}^2)$ .

Por fim defina o **processo de percolação de longo alcance em  $D(\mathbb{Z}^2)$**  com parâmetro  $(p_i)_{i=1}^\infty$  como o espaço probabilístico  $(\Omega_d, \mathcal{F}_d, \mathbb{P}_d)$ , onde  $\Omega_d = \prod_{e \in \mathcal{E}(D(\mathbb{Z}^2))} \{0, 1\}$  e  $\mathcal{F}_d$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada por cilindros de  $\Omega_d$ , a medida de probabilidade  $\mathbb{P}_d$  é a medida produto dado por  $\mathbb{P}_d = \prod_{e \in \mathcal{E}(D(\mathbb{Z}^2))} \mu_e$ , onde para  $e = \{x, y\}$  a medida  $\mu_e$  é uma Bernoulli de parâmetro  $p_{d_1(x,y)}$ . Em particular, usamos um abuso de notação e denotamos este modelo como percolação em  $D(\mathbb{Z}^2)$ .

A existência de um caminho infinito ou não nestes modelos depende somente da sequência  $(p_i)_{i=1}^\infty$ . No processo de percolação de longo alcance em  $\mathbb{L}^d$  tanto o modelo clássico, como o completo ou o deslocado, ao ser fixado  $(p_i)_{i=1}^\infty$ , o comportamento do evento  $\{C_0 = \infty\}$  apresenta alguns exemplos triviais de demonstrar como:

- Se  $p_i > p_c(\mathbb{L}^d)$  para algum  $i > 0$ , então  $P(|C_0| = \infty) > 0$ .
- Se  $p_i = 0$  para todo  $i > 0$ , então  $P(|C_0| = \infty) = 0$ .

Onde  $P$  pode ser qualquer uma das medidas  $\mathbb{P}, \mathbb{P}_c$  ou  $\mathbb{P}_d$ ; Não por acaso, existem vários artigos que abordam sequências específicas como é o caso do artigo [7]. Um dos resultados fundamentais sobre percolação de longo alcance pode ser descrito como:

**Teorema 1.3.1.** *Em qualquer um dos três grafos discutidos acima, se  $\sum_i p_i = \infty$  então  $P(|C_0| = \infty) = 1$ .*

Onde  $P$ , pode ser qualquer uma das três medidas definidas,  $\mathbb{P}, \mathbb{P}_c$  e  $\mathbb{P}_d$ .

*Demonstração.* Em  $LA(\mathbb{Z}^d)$ , como  $\sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}(\text{Existir a aresta } \{0, (i, 0)\}) = \sum_{i=1}^\infty p_i = \infty$ , e como são eventos independentes, segue por Borel Cantelli que  $P(|C_0| = \infty) = 1$ . Nos outros grafos a demonstração é análoga.  $\square$

## 1.4 O Problema do Truncamento

Para definir de forma formal o problema do truncamento, considere a sequência  $(p_i)_{i=1}^\infty$  e para cada  $k \in \mathbb{N}$  defina a sequência truncada  $(p_i^k)_{i=1}^\infty$  como:

$$p_i^k = \begin{cases} p_i, & i \leq k \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Com tal sequência define o **espaço de percolação de longo alcance em  $LA(\mathbb{Z}^2)$  truncado em  $k$**  como sendo o espaço probabilístico  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^k)$ , onde  $\Omega$  e  $\mathcal{F}$  são os mesmos da percolação de longo alcance clássico e a única mudança do processo é a nova medida dada por  $\mathbb{P}^k = \prod_{e \in E_{LA}^d} \mu_e^k$  onde para  $e = \{x, y\}$  temos que  $\mu_e^k = Ber(p_{d_\infty(x,y)}^k)$ . Defina o **processo de percolação de longo alcance em  $C(\mathbb{Z}^2)$  truncado em  $k$**  como sendo o espaço probabilístico  $(\Omega_c, \mathcal{F}_c, \mathbb{P}_c^k)$ , onde  $\Omega_c$  e  $\mathcal{F}_c$  são os mesmos da percolação de longo alcance completo e a única mudança do processo é a nova medida dada por  $\mathbb{P}_c^k = \prod_{e \in E_{LAC}^d} \mu_e^k$  onde para  $e = \{x, y\}$  temos que  $\mu_e^k = Ber(p_{d_\infty(x,y)}^k)$ . E por fim, defina o **processo de percolação de longo alcance em  $D(\mathbb{Z}^2)$  truncado em  $k$**  como sendo o espaço probabilístico  $(\Omega_d, \mathcal{F}_d, \mathbb{P}_d^k)$ , onde  $\Omega_d$  e  $\mathcal{F}_d$  são os mesmos da percolação de longo alcance deslocado e a única mudança do processo é a nova medida dada por  $\mathbb{P}_d^k = \prod_{e \in E_{LAD}^d} \mu_e^k$  onde para  $e = \{x, y\}$  temos que  $\mu_e^k = Ber(p_{d_1(x,y)}^k)$ .

O **problema do truncamento** para este trabalho pode ser enunciado como:

**Conjectura 1.4.1** (Problema do Truncamento). *Para a percolação de longo alcance em  $\mathbb{L}^2$  com parâmetros  $(p_i)_{i=1}^\infty$  onde  $\sum_{i=1}^\infty p_i = \infty$ , temos que, existe  $k$  tal que  $P^k(|C_0| = \infty) > 0$  e mais ainda:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P^k(|C_0| = \infty) = 1$$

Onde o modelo de percolação de longo alcance em  $\mathbb{L}^2$  pode ser  $LA(\mathbb{Z}^2)$ ,  $C(\mathbb{Z}^2)$  e  $D(\mathbb{Z}^2)$ , com a medida  $P$  sendo respectivamente  $\mathbb{P}$ ,  $\mathbb{P}_c$  e  $\mathbb{P}_d$ .

O problema do truncamento enunciado em outras dimensões já foi resolvido em grande parte, e não necessariamente é verdadeiro para toda dimensão. Em dimensão  $d = 1$ , já começa a falhar se a sequência  $(p_i)_{i=1}^\infty$  for tal que  $p_i < 1$  para todo  $i$ , isto é em percolação de longo alcance em  $LA(\mathbb{Z})$ , o processo truncado não percola. Por outro lado, em dimensões  $d \geq 3$  o problema do truncamento é verdadeiro, conforme mostrado em [3] para  $LA(\mathbb{Z}^d)$  e estendido para o caso de grafos orientados no artigo [2].

Em percolação de longo alcance em  $\mathbb{L}^2$ , diversas tentativas foram realizadas para muitas sequências diferentes. Uma destas tentativas, e que influenciou grande parte do texto é o teorema apresentado no artigo [1]. Podemos enuncia-lo da seguinte forma:

**Teorema 1.4.2** (Teorema 1 de [1]). *Em percolação de longo alcance deslocado em  $D(\mathbb{Z}^2)$  se  $\limsup_{n \rightarrow \infty} p_n > 0$ , então vale que:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}_d^k(|C_0| = \infty) = 1$$

Ainda em [1], segue o seguinte teorema:

**Teorema 1.4.3** (Teo 2. de [1]). *Em percolação de longo alcance em  $LA(\mathbb{Z}^2)$  se  $\limsup_{n \rightarrow \infty} p_n > 0$ , então vale que:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}^k(|C_0| = \infty) = 1$$

## 1.5 Objetivos

Tentando generalizar ou expandir os teoremas apresentados no artigo [1] vários resultados foram obtidos. Os resultados serão divididos nos grafos respectivos a cada um deles, e a ordem escolhida para os grafos foi uma ordem cronológica com relação a pesquisa, de forma a apresentar o avanço do início da pesquisa até o fim dela.

A abordagem adotada tem como perspectiva deixar de forma explicita algumas fronteiras e dificuldades técnicas encontradas no problema do truncamento. Dessa maneira seguem os teoremas:

### 1.5.1 Resultados no modelo de percolação deslocado

Para todos os teoremas nessa seção, tome  $(p_i)_{i=1}^{\infty}$  a sequência de parâmetros no modelo de percolação de longo alcance deslocado em  $\mathbb{L}^2$ .

**Teorema 1.5.1.** *Seja  $(p_i)_{i=1}^{\infty}$  se  $\sum_i p_i^2 = \infty$ , temos que:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}_d^k(|C_0| = \infty) = 1$$

**Corolário 1.5.2.** *Seja  $(p_i)_{i=1}^{\infty}$ , então se existe  $N = 1, 2, \dots$  tal que  $\sum_i p_i p_{i+N} = \infty$ , ou vale que  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_i p_i p_{i+k} > 0$ , então temos que:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}_d^k(|C_0| = \infty) = 1$$

### 1.5.2 Teoremas no modelo de percolação completo

Para todos os teoremas dessa seção, tome  $(p_i)_{i=1}^{\infty}$  a sequência de parâmetros no modelo de percolação de longo alcance completo em  $\mathbb{L}^2$ .

**Teorema 1.5.3.** *Seja  $(p_i)_{i=1}^{\infty}$  se  $\sum_{i=1}^{\infty} i p_i^2 = \infty$ . Então:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}_c^k(|C_0| = \infty) = 1$$

**Teorema 1.5.4.** *Seja  $(p_i)_{i=1}^{\infty}$  se  $\limsup_{n \rightarrow \infty} n p_n > 0$ . Então:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}_c^k(|C_0| = \infty) = 1$$

### 1.5.3 Teoremas no modelo de percolação de longo alcance clássico

Para todos os teoremas nessa seção, tome  $(p_i)_{i=1}^{\infty}$  a sequência de parâmetros no modelo de percolação de longo alcance clássico em  $\mathbb{L}^2$ .

**Teorema 1.5.5.** *Seja  $(p_i)_{i=1}^{\infty}$  se  $\sum_i p_i p_{i+N} = \infty$  para algum  $N > 0$ , temos que:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}^k(|C_0| = \infty) = 1$$

**Teorema 1.5.6.** *Seja  $(p_i)_{i=1}^{\infty}$  se  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_i p_i p_{i+k} > 0$ , então temos que:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}^k(|C_0| = \infty) = 1$$

## 2 Resultados e Discussão

### 2.1 O Teorema de Kalikow e Weiss

Nesta seção será exposto e demonstrado o teorema de Kalikow e Weiss que se encontra no artigo [5]. Para isso, lembre o grafo  $LA(\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}, E_{LA}^1)$ , onde  $E_{LA}^1 = \{\{x, y\} : x, y \in \mathbb{Z} \text{ e } x \neq y\}$ , representado na Figura 1. Então, o chamado Teorema de Kalikow-Weiss é descrito como:

**Teorema 2.1.1.** *Em  $LA(\mathbb{Z})$  com  $(p_i)_{i=1}^\infty$  tal que  $\sum_{i=1}^\infty p_i = \infty$ , e  $p_1 > 0$  temos então:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(0 \leftrightarrow 1 \text{ em } [0, n]) = 1$$

*Demonstração.* Defina  $G^+ = (\mathbb{Z}^+, E^+) \subset LA(\mathbb{Z})$ , onde  $E^+ = \{\{x, y\} | x, y \in \mathbb{Z}^+ \text{ e } x \neq y\}$ . Defina  $G_n = (V_n, E_n) \subset LA(\mathbb{Z})$  onde  $V_n = \{0, 1, 2, \dots, n\}$  e  $E_n = \{\{x, y\} | x, y \in V_n \text{ e } x \neq y\}$ . Considere  $A_n$  o evento que os vértices 0 e 1 estão conectados em uma componente de  $G_n$ . Isto é,  $A_n = \{0 \leftrightarrow 1 \text{ em } G_n\}$ . Note que  $A_n \subset A_{n+1}$  para todo  $n$ , então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n) = \mathbb{P}(0 \leftrightarrow 1 \text{ em } G^+)$$

A prova do teorema consiste em mostrar que:

$$\mathbb{P}(A_n) \rightarrow 1, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Para isso, defina  $B_n$  como o evento {existe alguma aresta aberta  $\{0, i\}$  com  $2 \leq i \leq n$  em  $G_n$ }. A probabilidade de  $B_n$  não ocorrer é :

$$\mathbb{P}(B_n^c) = \prod_{i=2}^n (1 - p_i)$$

como  $\sum_i p_i = \infty$  temos que  $B_n$  satisfaz que:

$$\mathbb{P}(B_n^c) \rightarrow 0, \text{ com } n \rightarrow \infty$$

Defina  $G'_n$  como o grafo aleatório obtido por  $G_n$  removendo a aresta  $\{0, 1\}$  se ela existe; Devido a falta da aresta  $\{0, 1\}$  o evento  $\{0 \leftrightarrow 1 \text{ em } G'_n\}$  está contido em  $A_n$ , assim:

$$\mathbb{P}(A_n^c) \leq \mathbb{P}(0 \not\leftrightarrow 1 \text{ em } G'_n)$$

Uma vez que a probabilidade de  $\{0 \not\leftrightarrow 1 \text{ em } G'_n\}$  não depende da existência da aresta  $\{0, 1\}$ , particionando no evento  $B_n$  temos que:

$$\mathbb{P}(A_n^c) \leq \mathbb{P}(0 \not\leftrightarrow 1 \text{ em } G'_n, B_n) + \mathbb{P}(B_n^c) \tag{2.1}$$

Assim, se  $\{0 \nleftrightarrow 1 \text{ em } G'_n, B_n\}$  ocorrer e a aresta  $\{0, 1\}$  existir então em  $G_n$  temos menos componentes conexas que o número  $C_{n-1}$  que é definido como sendo o número de componentes conexas no grafo formado pelo conjunto de vértices  $V_n - \{0\} = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ . Definindo  $K_n$  como o número de componentes conexas de  $G_n$ , então segue que:

$$\begin{aligned} p_1 \mathbb{P}(0 \nleftrightarrow 1 \text{ em } G'_n, B_n) &\leq \mathbb{P}(K_n < C_{n-1}) \\ &= \mathbb{P}(K_n < K_{n-1}) \end{aligned}$$

Uma vez que o par  $(K_n, C_{n-1})$  tem a mesma distribuição que o par  $(K_n, K_{n-1})$ . Substituindo, na equação 2.1 temos que:

$$\mathbb{P}(A_n^c) \leq \frac{1}{p_1} \mathbb{P}(K_n < K_{n-1}) + \mathbb{P}(B_n^c)$$

Já que ao adicionar um novo vértice o número de aglomerados em módulo pode subir no máximo 1, vale que  $\{K_n < K_{n-1}\} = \{K_{n-1} - K_n \geq 1\}$ . Substituindo temos:

$$\mathbb{P}(A_n^c) \leq \frac{1}{p_1} \mathbb{P}(K_{n-1} - K_n \geq 1) + \mathbb{P}(B_n^c) \quad (2.2)$$

Observe que podemos cotar a probabilidade do evento  $\{K_{n-1} - K_n \geq 1\}$  utilizando a esperança da diferença:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(K_{n-1} - K_n \geq 1) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(K_{n-1} - K_n = i) \\ &\leq E(K_{n-1} - K_n) + \mathbb{P}(K_{n-1} - K_n = -1) \\ &\leq E(K_{n-1} - K_n) + \mathbb{P}(B_n^c) \end{aligned}$$

Uma vez que o evento  $\{K_{n-1} - K_n = -1\}$  ocorre se e somente se o vértice  $n$  é isolado em  $G_n$ , o que implica na ocorrência de um evento que tem probabilidade  $(1 - p_1)P(B_n^c)$ . Dessa maneira substituindo na Equação 2.2 temos:

$$\mathbb{P}(A_n^c) \leq \frac{1}{p_1} E(K_{n-1} - K_n) + \left(1 + \frac{1}{p_1}\right) \mathbb{P}(B_n^c) \quad (2.3)$$

O resultado então segue do seguinte lema:

**Lema 2.1.2.** *Seja  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , onde  $a_n \geq 0$  para todo  $n$ . Assim, para todo  $\epsilon > 0$  existe infinitos índices  $n$  tal que  $a_{n-1} - a_n < \epsilon$ .*

*Demonstração.* Fixe  $\epsilon > 0$ , se  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_{n-1} - a_n > \epsilon$ , então  $a_{n-1} - a_n > \frac{1}{2}\epsilon$  para todo  $n \geq N(\epsilon)$ , o que implica que para  $n > N$  vale :

$$\begin{aligned} a_n &= a_N - (a_N - a_{N+1} + a_{N+1} - a_{N+2} + \dots + a_{n-1} - a_n) \\ a_n &\leq a_N - \frac{1}{2}\epsilon(n - N) \end{aligned}$$

Como  $N$  é fixo, existirá algum  $n > N$  onde  $\frac{1}{2}\epsilon(n - N) > a_N$ , ou seja implicando que  $a_n < 0$  o que é um absurdo pois  $a_n \geq 0$  para todo  $n$ . Então  $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_{n-1} - a_n \leq 0$   $\square$

Para a prova, como  $E(K_n) \geq 0$  para todo  $n$ , vale que:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} E(K_{n-1} - K_n) \leq 0$$

Então, tomando o limite e substituindo na Equação 2.3, segue que:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n^c) \leq \frac{1}{p_1} \liminf_{n \rightarrow \infty} E(K_{n-1} - K_n) \leq 0$$

Como os eventos  $A_n$  são encaixantes, e  $P$  é uma probabilidade segue que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \mathbb{P}(A_n^c) = 1 \quad (2.4)$$

□

Nas demonstrações apresentadas no texto não se utiliza o teorema de forma direta. Em vez disto é utilizado o seguinte corolário:

**Corolário 2.1.3.** *Em  $LA(\mathbb{Z})$  com  $(p_i)_{i=1}^{\infty}$  tal que  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \infty$ , e  $p_1 > 0$ , vale que para todo  $\epsilon > 0$  e  $H \in \mathbb{N}$  existe  $n_1 = n_1(\epsilon, H)$  tal para todo  $N > n_1$ , vale que:*

$$\mathbb{P}(\{0, 1, 2, \dots, H\} \text{ estão conectados em } [0, N]) > 1 - \epsilon$$

*Demonstração.* Com  $\epsilon > 0$  e  $H \in \mathbb{N}$  fixados. Escolha  $n_0$  usando o Teorema 2.1.3, onde para todo  $N \geq n_0$  vale que:

$$\mathbb{P}(0 \leftrightarrow 1 \text{ em } [0, N]) > (1 - \epsilon)^{1/H}$$

Tome  $n_1 = n_0 + H$ , dessa maneira para todo  $N > n_1$  vale que:

$$\mathbb{P}^N(\{0, 1, 2, \dots, H\} \text{ estão conectados em } [0, N]) > \mathbb{P}^N\left(\bigcap_{i=0}^{H-1} \{i \leftrightarrow i+1 \text{ em } [i, N]\}\right)$$

Como os eventos  $\{i \leftrightarrow i+1 \text{ em } [i, N]\}$  são eventos crescentes pela desigualdade de FKG, vale que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n(\{0, 1, 2, \dots, H\} \text{ estão conectados em } [0, N]) &> \prod_{i=1}^H \mathbb{P}(\{0 \leftrightarrow 1 \text{ em } [0, N-i]\}) \\ &> ((1 - \epsilon)^{\frac{1}{H}})^H = 1 - \epsilon \end{aligned}$$

□

Durante o texto, este corolário será aplicado muitas vezes em subconjuntos dos grafos  $LA(\mathbb{Z}^2)$  ou  $C(\mathbb{Z}^2)$ , em ambos os casos, os subespaços apresentados serão de forma trivial isomorfos com  $LA(\mathbb{Z})$ .

## 2.2 Provas para Percolação de longo alcance deslocada

**Prova do Teorema 1.5.1.** Tome  $\epsilon > 0$ , então seja  $k = \min\{i > 0 \mid p_i > 0\}$ . Sem perda de generalidade, considere  $p_k > 0$ . Então, encontre  $M_0 = M_0(\epsilon, a) \in \mathbb{N}$  tal que:

$$1 - (1 - p_k^2)^{M_0} > 1 - \frac{\epsilon}{3} \quad (2.5)$$

Agora, considere  $M \in \mathbb{N}$  para ser escolhido no final da prova, um número maior ou igual que  $k + 1$ , e então defina os eventos:

$$S_{(x,n)}^+(i) = \{\{(x, n), (x + i, n + 1)\} \text{ e } \{(x + i, n + 1), (x, n + 2)\} \text{ estão abertas}\}$$

$$L_{(x,n)}^+ = \{\{(x, n), (x + k, n + 1)\} \text{ e } \{(x + k, n + 1), (x + 2k, n + 2)\} \text{ estão abertas}\}$$

$$R_{(x,n)}^+(M) = \bigcup_{i=k+1}^M S_{(x,n)}^+(i)$$

Observe que:

$$R_{(x,h)}^+(M) \subseteq \{(x, h) \leftrightarrow (x, h + 2)\}, \quad \text{para todo } M > k + 1$$

$$L_{(x,h)}^+ \subseteq \{(x, h) \leftrightarrow (x + 2k, h + 2)\}$$

De forma análoga defina:

$$S_{(x,n)}^-(i) = \{\{(x, n), (x - i, n + 1)\} \text{ e } \{(x - i, n + 1), (x, n + 2)\} \text{ estão abertas}\}$$

$$R_{(x,n)}^-(M) = \bigcup_{i=k+1}^M S_{(x,n)}^-(i)$$

Observe que:

$$R_{(x,h)}^-(M) \subseteq \{(x, h) \leftrightarrow (x, h + 2)\}, \quad \text{para todo } M > k + 1$$

Sobre a independência dos eventos definidos acima vale destacar que tomando  $(x, h)$  um vértice fixo, temos que os eventos  $R_{(x,h)}^+(M)$ ,  $R_{(x,h)}^-(M)$  e  $L_{(x,h)}^+$  dependem das arestas na faixa  $\mathbb{Z} \times \{h, h + 1, h + 2\}$  e por isso são independentes de eventos fixados em vértices  $(y, h')$  com  $h' \geq h + 2$  ou  $h' \leq h - 2$ . Agora vou mostrar que para fixado  $h$ , e qualquer escolha de parâmetros distintos os eventos acima são independentes:

- $R^\pm$  e  $L$ : Os eventos  $R_{(x,h)}^+(M)$  e  $R_{(x,h)}^-(M)$  dependem de arestas de tamanho entre  $k + 1$  e  $M$ , já o evento  $L_{(x,h)}^+$  depende de arestas de tamanho exatamente  $k$ . Dessa forma os eventos  $R^\pm$  e  $L$  são independentes.
- $R_{(x,h)}^+(M)$  e  $R_{(y,h)}^+(M)$ : O evento  $R_{(x,h)}^+$  depende de dois conjuntos de arestas disjuntos, o primeiro é o conjunto de arestas que partem de  $(x, h)$  e vão para vértices  $\{(z, h + 1) : z > x\}$ , e o segundo conjunto de arestas são aquelas partem de  $\{(z, h + 1) : z > x\}$  e vão para  $(x, h + 2)$ . Tomando  $x \neq y$ , esses conjuntos de arestas para os eventos  $R_{(x,h)}^+(M)$  e  $R_{(y,h)}^+(M)$  são disjuntos, logo são independentes.

- $R_{(x,h)}^-(M)$  e  $R_{(y,h)}^-(M)$ : Análogo ao caso anterior.
- $R_{(x,h)}^-(M)$  e  $R_{(y,h)}^+(M)$ : Fixados os eventos  $R_{(x,h)}^-(M)$  e  $R_{(y,h)}^+(M)$ , para qualquer vértice  $(z, h+1)$ , as arestas deste vértice que podem ser checadas para o evento  $R_{(x,h)}^-(M)$  são da forma  $\{(z, h+1), (x, h)\}, \{(z, h+1), (x, h+2)\}$  se  $x > z$ , já para o evento  $R_{(y,h)}^+(M)$ , as arestas são da forma  $\{(z, h+1), (y, h)\}, \{(z, h+1), (y, h+2)\}$  se  $y < z$ . Agora para qualquer escolha de  $x, y \in \mathbb{Z}$  (mesmo  $x = y$ ), esse conjunto é disjunto, logo os eventos são independentes.
- $L_{(x,h)}^+$  e  $L_{(y,h)}^+$ : Se  $x \neq y$ , temos que o evento  $L_{(x,h)}^+$  depende somente das arestas  $\{(x, h), (x+k, h+1)\}$  e  $\{(x+k, h+1), (x+2k, h+2)\}$ , e o evento  $L_{(y,h)}^+$  depende somente das arestas  $\{(y, h), (y+k, h+1)\}$  e  $\{(y+k, h+1), (y+2k, h+2)\}$ . Ou seja, são eventos independentes.

Observe que para qualquer  $(x, n) \in \mathbb{Z}^2$  e qualquer valor de  $i$ , temos que:

$$\mathbb{P}_d(S_{(x,n)}^+(i)) = \mathbb{P}_d(S_{(x,n)}^-(i)) = p_i^2$$

Como  $\sum p_i^2 = \infty$ , então podemos encontrar  $K$  grande tal que:

$$\mathbb{P}_d^K(R_{(x,n)}^+(K)) = \mathbb{P}_d^K(R_{(x,n)}^-(K)) > (1 - \frac{\epsilon}{3})^{\frac{1}{M_0+1}} \quad (2.6)$$

Notando que os eventos  $R(K)$  só dependem de arestas  $e$  onde  $|e| \leq K$ .

Defina, os eventos:

$$\begin{aligned} T_{(x,n)}^+ &= \left\{ \bigcap_{i=0}^{M_0} R_{(x,n+2i)}^+(K) \right\} \cap \left\{ \bigcup_{i=0}^{M_0} L_{(x,n+2i)}^+ \right\} \cap \left\{ \bigcap_{i=0}^{M_0} R_{(x+2k,n+2i)}^+(K) \right\} \\ T_{(x,n)}^- &= \left\{ \bigcap_{i=0}^{M_0} R_{(x,n+2i)}^-(K) \right\} \cap \left\{ \bigcup_{i=0}^{M_0} L_{(x,n+2i)}^+ \right\} \cap \left\{ \bigcap_{i=0}^{M_0} R_{(x+2k,n+2i)}^-(K) \right\} \end{aligned}$$

Observe a figura abaixo para ter um referencia dos eventos definidos acima. Nela se encontram os eventos  $T_{(w,h)}^-$  e  $T_{(v,h)}^+$ , observe que se analisadas em pontos específicos, pode-se garantir que os eventos usam arestas distintas.

Usando as equações 2.5 e 2.6, temos por construção que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_d^K(T_{(x,n)}^+) &= (\mathbb{P}_d^K(R_{(x,n)}^+(K)))^{M_0+1} (\mathbb{P}_d^K(R_{(x+2k,n)}^+(K)))^{M_0+1} (1 - \mathbb{P}_d^K(\bigcap_{i=0}^{M_0} \{L_{(x,n)}^+\}^c)) \\ &> (1 - \frac{\epsilon}{3})^2 (1 - (1 - \mathbb{P}_d^K(L_{(x,n)}^+))^{M_0}) = (1 - \frac{\epsilon}{3})^2 (1 - (1 - p_k^2)^{M_0}) \\ &> (1 - \frac{\epsilon}{3})^3 \geq 1 - \epsilon \end{aligned}$$

de forma análoga temos que :

$$\mathbb{P}_d^K(T_{(x,n)}^-) > 1 - \epsilon$$

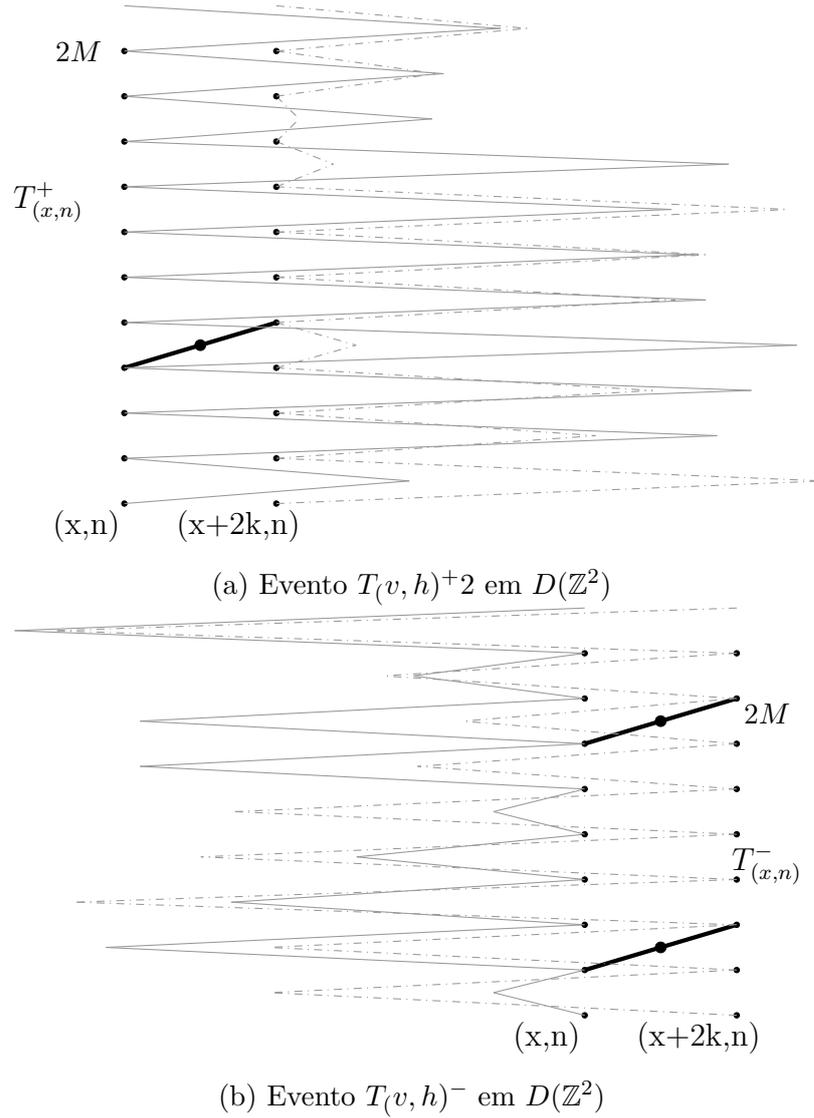


Figura 3 – Representação dos eventos  $T^-$  e  $T^+$  em  $D(\mathbb{Z}^2)$

e, também temos que:

$$T_{(x,n)}^+ \subseteq \{(x, n) \leftrightarrow (x, n + 2(M_0 + 1))\} \cap \{(x, n) \leftrightarrow (x + 2k, n + 2(M_0 + 1))\}$$

$$T_{(x,n)}^- \subseteq \{(x, n) \leftrightarrow (x, n + 2(M_0 + 1))\} \cap \{(x, n) \leftrightarrow (x + 2k, n + 2(M_0 + 1))\}$$

Agora considere  $G^* = (V^*, E^*)$  um grafo, onde  $V^* = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{N}, x \leq y\}$  com o conjunto de arestas dado por  $E^* = \{((x, y), (z, y+1)) : (x, y) \in V(G^*), z = x \text{ ou } z = x + 1\}$ . Considere  $<$  uma ordem sobre os vértices de  $G^*$  onde para  $x = (i_1, j_1), y = (i_2, j_2) \in V^*$  temos que  $x < y$  se e somente se algum dos itens abaixo for satisfeito:

- $j_1 < j_2$
- $j_1 = j_2$  e  $i_1 < i_2$

Por fim seja  $S \subset V^*$ , definimos a fronteira de S como sendo o conjunto:

$$\partial S = \{(i, j) \in V^*/S : (i-1, j-1) \in S \text{ ou } (i, j-1) \in S\}$$

Iremos realizar um processo de renormalização indutivo considerando o grafo  $D(\mathbb{Z}^2)$  e o grafo  $G^*$  acima. Tome  $x_0 = (0, 0) \in G^*$ , definimos o evento  $\{x_0 \text{ é bom}\}$  se o evento  $T_{(0,0)}^+$  ocorre em  $D(\mathbb{Z}^2)$ , o que acontece com probabilidade maior que  $1 - \epsilon$ . Assim, considere a sequência de conjuntos  $(A_n, B_n)_{n \geq 0}$  definida de forma indutiva, onde  $A_0 = B_0 = \emptyset$ , então:

$$A_1 = \begin{cases} A_0 \cup \{x_0\}, & \text{se } x_0 \text{ é bom} \\ A_0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad B_1 = \begin{cases} B_0, & \text{se } x_0 \text{ é bom} \\ B_0 \cup \{x_0\}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Assim, suponha que exista  $(A_n, B_n)$  definido de forma indutiva tal que:

1.  $A_n$  é conexo em  $G^*$ .
2.  $B_n \subset \partial A_n$ .
3. Para cada  $v = (x, y) \in G^*/A_n$ , as arestas para o evento  $T_{(2kx, y2(M_0+1))}^-$  ou  $T_{(2kx, y2(M_0+1))}^+$  ainda não foram testadas.
4. Para todo  $v = (x, y) \in A_n$  temos que  $\{0 \leftrightarrow (2kx, 2(M_0+1)(y+1))\} \cap \{0 \leftrightarrow (2kx+2k, 2(M_0+1)(y+1))\}$  em  $D(\mathbb{Z}^2)$ .

Então para definir  $(A_{n+1}, B_{n+1})$  se  $\partial A_n/B_n = \emptyset$ , faça  $A_k = A_n$  e  $B_k = B_n$  para todo  $k \geq n$ . Se  $\partial A_n/B_n \neq \emptyset$ , considere  $x_n \in \partial A_n/B_n$  o menor ponto com respeito a ordem  $<$ . Então definimos:

$$A_{n+1} = \begin{cases} A_n \cup \{x_n\}, & \text{se } x_n \text{ é bom} \\ A_n, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad B_{n+1} = \begin{cases} B_n, & \text{se } x_n \text{ é bom} \\ B_n \cup \{x_n\}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Sendo  $x_n = (x, y)$  definimos o evento  $\{x_n \text{ é bom}\}$  como  $T_{(x2k, 2(M_0+1)y)}^+$  se  $x$  é par, ou  $T_{(x2k, 2(M_0+1)y)}^-$  se  $x$  é ímpar. As condições 1,2, são satisfeitas de forma trivial, a condição 3 é satisfeita pelas observações de independência dos eventos e a condição 4 ocorre pois  $(0, 0)$  está conectado com  $(2kx, 2(M_0+1)y)$  uma vez que  $x_n \in A_{n-1}$  e se  $x_n$  for bom, temos que o evento  $T^\pm$  realiza as conexões para os vértices  $(x2k, 2(M_0+1)(y+1))$  e  $((x+1)2k, 2(M_0+1)(y+1))$ . Desta maneira,  $(A_n, B_n)$  está bem definido satisfazendo as condições 1, 2, 3 e 4.

Como os evento  $T_{(x,n)}$  são independentes nessa construção, temos que:

$$P(x_n \text{ é bom} | (A_{n-1}, B_{n-1}), \dots, (A_0, B_0)) > 1 - \epsilon$$

E então como  $\{(0, 0) \leftrightarrow \infty \text{ em } G^*\} \subset \{(0, 0) \leftrightarrow \infty \text{ em } D(\mathbb{Z}^2)\}$ . Temos que tomando  $\epsilon \rightarrow 0$ , podemos encontrar  $K$  truncamento onde a probabilidade de percolar é cada vez maior, assim, vale que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}_d^k((0, 0) \rightarrow \infty) = 1.$$

□

**Prova do Corolário 1.5.2 .** Suponha que  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i p_{i+N} = \infty$  para algum valor de  $N > 0$ . Agora observe que para  $x, y \in [0, 1]$ , vale a seguinte inequação:

$$x^2 + y^2 \geq xy$$

Então, para  $N$  fixo vale que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i p_{i+N} \leq \sum_{i=1}^{\infty} 2p_i^2$$

Dessa maneira, com  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i p_{i+N} = \infty$  temos que  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i^2 = \infty$ , o que satisfaz o Teorema 1.5.1 e consequentemente vale que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}_d^k((0, 0) \rightarrow \infty) = 1.$$

Agora, fixado  $(p_i)_{i=1}^{\infty}$  tal que  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} p_i p_{i+k} = \eta > 0$ . Dividiremos a prova do corolário em dois casos, o primeiro quando  $\limsup_{k \rightarrow \infty} p_k > 0$ , e o segundo quando  $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = 0$ . Em ambos os casos, será satisfeito que  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i^2 = \infty$ .

No primeiro caso se  $\limsup_{k \rightarrow \infty} p_k > 0$ , então  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i^2 = \infty$ , logo vale o Teorema 1.5.1.

Para o segundo caso, se  $\sum_{i=1}^{\infty} 2p_i^2 = \infty$  a prova é trivial, então sem perda de generalidade suponha que  $\sum_{i=1}^{\infty} 2p_i^2 < \infty$ . Desta maneira, para todo  $\epsilon > 0$  existe  $k_1 = k_1(\epsilon)$  tal que  $\sum_{i=k_1}^{\infty} 2p_i^2 < \frac{\epsilon}{2}$ . Assim:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} p_i p_{i+k} &= \sum_{i=1}^{k_1-1} p_i p_{i+k} + \sum_{i=k_1}^{\infty} p_i p_{i+k} \\ &< \left( \max_{i=1, \dots, k_1-1} \{p_{i+k}\} \right) \left( \sum_{i=1}^{k_1-1} p_i \right) + \sum_{i=k_1}^{\infty} 2p_i^2 \\ &< \left( \max_{i=1, \dots, k_1-1} \{p_{i+k}\} \right) \left( \sum_{i=1}^{k_1-1} p_i \right) + \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Agora como  $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = 0$ , temos que existe  $k_2 = k_2(\epsilon)$  tal que para todo  $k > k_2$  vale  $(\max_{i=1, \dots, k_1-1} \{p_{i+k}\}) (\sum_{i=1}^{k_1-1} p_i) < \frac{\epsilon}{2}$ . Assim:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i p_{i+k} < \epsilon, \text{ para todo } k > k_2.$$

Tomando  $\epsilon < \eta$ , temos um absurdo, pois  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} p_i p_{i+k} = \eta$ . Logo quando  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$ , as únicas sequências que satisfazem  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} p_i p_{i+k} = \eta$ , também satisfazem  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i^2 = \infty$ , dessa maneira:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}_d^k((0,0) \rightarrow \infty) = 1.$$

□

### 2.2.1 Comentários

O modelo de percolação de longo alcance no grafo de  $D(\mathbb{Z}^2)$  é em vários aspectos similar com processo de contato e o modelo em  $LA(\mathbb{Z}^2)$ . No artigo [1], que foi de grande influencia para este trabalho, utiliza-se justamente desta proximidade de modelos para demonstrar em vários casos diferentes o problema do truncamento, nele é realizado a demonstração para o problema do truncamento cuja sequência  $(p_i)_{i=1}^{\infty}$  satisfaz  $\limsup_{i \rightarrow \infty} p_i > 0$ , Teorema 1.4.2.

Além da proximidade dos modelos, a escolha de começar a trabalhar em  $D(\mathbb{Z}^2)$  está entrelaçada com a sua geometria. Diferente do modelo clássico, o grafo de  $D(\mathbb{Z}^2)$  apresenta durante o processo de percolação uma facilidade de controle nos caminhos e aglomerados com relação ao seu deslocamento vertical, então ele facilita argumentos e técnicas que muitas vezes em  $LA(\mathbb{Z}^2)$  não são possíveis.

A prova do Teorema 1.5.1 desta seção em todo momento aproveita desta facilidade de controle vertical, oriunda da geometria do grafo. E foi usando estas técnicas facilitadas pela geometria, que os argumentos mais complexos foram elaborados para o modelo de percolação de longo alcance clássico em  $\mathbb{Z}^2$  que é o grande problema do artigo.

O Teorema 1.5.1 apresenta uma inovação no modelo de  $D(\mathbb{Z}^2)$  em comparação com o que foi proposto em [1]. Pois todo os casos que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} p_n > 0$ , vale que  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i^2 = \infty$ , entretanto  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i^2 = \infty$  não implica que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} p_n > 0$ , observe a sequência  $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n=5}^{\infty}$ , que satisfaz  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$  e  $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n})^2} = \infty$ .

As sequências  $(p_n)_n$  que são abordadas no Corolário 1.5.2 também apresentam inovação com relação ao proposto em [1], entretanto pelo enunciado do Corolário 1.5.2 fica claro que as sequências abordadas satisfazem à condição do Teorema 1.5.1, o que implica que corolário não apresenta inovação com relação ao Teorema 1.5.1. O motivo do Corolário 1.5.2 ser colocado na tese foi o fato que foi possível traduzir seu enunciado para o modelo de percolação em  $LA(\mathbb{Z}^2)$ . Então, deixaremos para comentar as inovações do corolário nos resultados em  $LA(\mathbb{Z}^2)$ .

## 2.3 Provas para Percolação de longo alcance completo

Os teoremas abaixo estão em sequência, o primeiro caso abordará as sequências onde  $\sum_i ip_i^2 = \infty$ , o segundo caso abordará as sequências que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} np_n > 0$ .

**Prova do Teorema 1.5.3.** Fixado a sequência  $(p_i)_{i=1}^{\infty}$  onde  $\sum_i p_i^2 i = \infty$ . Defina para cada  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$  os seguintes eventos:

$$S_i^x = \bigcup_{k=-i+2, \text{ com } k \text{ par}}^{i-2} \{ \{(x_1, x_2), (x_1 + i, x_2 + k)\} \text{ e } \{(x_1 + i, x_2 + k), (x_1 + 1, x_2)\} \text{ estão abertas} \}$$

$$U_n^x = \bigcup_{i=2}^n S_i^x$$

$$R_i^x = \bigcup_{k=-i+2, \text{ e } k \text{ par}}^{i-2} \{ \{(x_1, x_2), (x_1 + k, x_2 + i)\} \text{ e } \{(x_1 + k, x_2 + i), (x_1, x_2 + 1)\} \text{ estão abertas} \}$$

$$L_n^x = \bigcup_{i=2}^n R_i^x$$

Observe a figura abaixo com uma representação de  $S_L^0$  e  $R_H^0$  ocorrendo no grafo  $C(\mathbb{Z}^2)$ . Note que para todo  $i$ , o acontecimento de  $S_i^x$  faz com que exista um caminho de  $x$  até  $x + (0, 1)$ , de forma análoga, ocorrendo  $R_j^x$  existe um caminho de  $x$  até  $x + (1, 0)$ .

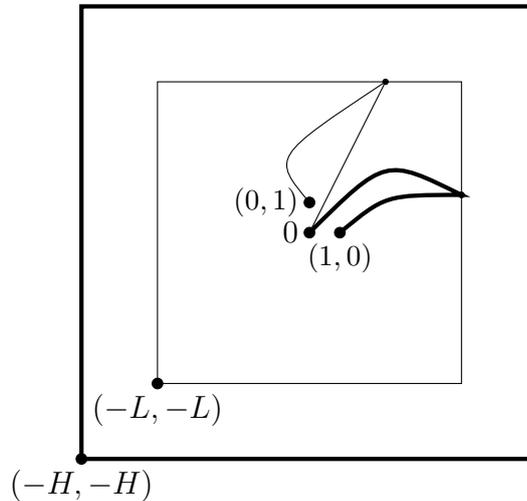


Figura 4 –  $S_H^0$  e  $R_L^0$  acontecendo no grafo de  $C(\mathbb{Z}^2)$ , no caso as arestas em negrito são as que corresponde com o evento  $S_H^0$  e as arestas mais finas são as que correspondem com o evento  $R_L^0$

Sobre a independência dos eventos definidos acima, vale destacar as seguintes características. Entre os eventos  $S$  e  $R$  para quaisquer valores de  $x, y \in \mathbb{Z}^2$  e  $i, j \in \{2, 3, 4, \dots\}$  temos que  $R_j^x$  e  $S_i^y$  são independentes, pois respectivamente o primeiro evento utiliza arestas que ligam os vértices a parte superior de uma caixa e o segundo utiliza arestas que ligam os vértices na margem direita de uma caixa, ou seja arestas diferentes. Comparando os eventos  $S$  em relação a independência, para  $S_i^x$  e  $S_j^y$ , com  $x, y \in \mathbb{Z}^2$  e

$i, j \in \{2, 3, 4, \dots\}$ , temos que se  $i \neq j$  os eventos trabalham com arestas de tamanhos diferentes então  $S_i^x$  é independente de  $S_j^y$ , agora se  $i = j$  a posição de  $y$  e  $x$  toma um valor importante para a independência desses eventos, se  $x$  e  $y$  não são vértices adjacentes então esses eventos trabalham com arestas distintas e então são independentes, agora se  $x$  é adjacente a  $y$  observe que a escolha na definição dos índices  $k$  somente no conjunto dos números pares faz com que não ocorra interseção entre esses eventos, de toda forma  $S_i^x$  é independente de  $S_j^y$ . De forma análoga, as mesmas propriedades de independência que o evento  $S$  goza, o evento  $R$  também apresenta, isto é considerando  $R_i^x$  e  $R_j^y$ , temos que os eventos são independentes para todo  $x, y \in \mathbb{Z}^2$  e  $i, j \in \{2, 3, 4, \dots\}$  exceto quando  $x = y$  e  $i = j$  (no caso em que os eventos são iguais).

Em relação a probabilidade dos eventos note que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_c(U_n^x) &= 1 - \mathbb{P}_c\left(\bigcap_{i=2}^n \{S_i^x\}^c\right) \\ &\geq 1 - \prod_{i=2}^n (1 - p_i^2)^{i-2} \\ &\geq 1 - e^{-\sum_{i=2}^n (i-2)p_i^2} \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\mathbb{P}_c(L_n^x) \geq 1 - e^{-\sum_{i=2}^n (i-2)p_i^2}$$

Como  $\sum_i p_i^2 i = \infty$ , escolha  $\delta \in (0, 1)$  e encontrar  $n$  tal que  $\mathbb{P}_c(L_n^x) > 1 - \frac{\delta}{2}$ , e  $\mathbb{P}_c(U_n^x) > 1 - \frac{\delta}{2}$ . Como  $L_n$  e  $U_n$  só dependem de arestas de tamanho até  $n$ , temos que podemos truncar e garantir que  $\mathbb{P}_c^n(L_n^x) > 1 - \frac{\delta}{2}$  e  $\mathbb{P}_c^n(U_n^x) > 1 - \frac{\delta}{2}$ .

Uma vez com  $\delta$  fixo e com o problema truncado em  $n$ , tome  $G^* = (V^*, E^*)$  onde  $V^* = \mathbb{Z}_+^2$ , e as arestas  $E^* = \{\{x, y\} : d_1(x, y) = 1\}$ . Em  $G^*$ , considere  $>$  uma ordem sobre os sítios onde para  $x_1 = (i_1, j_1)$  e  $x_2 = (i_2, j_2)$  temos que  $x_1 > x_2$  sempre que alguns dos itens são satisfeitos:

- $j_1 > j_2$
- $j_1 = j_2, i_1 > i_2$

Para  $S \subset V^*$ , defina fronteira de vértices como:

$$\partial S = \{x \in V^*/S : d_1(x, y) = 1, y \in S\}$$

Iremos realizar um processo de renormalização indutivo considerando o grafo  $C(\mathbb{Z}^2)$  e o grafo  $G^*$  apresentado. Tome  $x_0 = (0, 0) \in G^*$ , então definimos o evento  $\{x_0 \text{ é bom}\}$  se os eventos  $U_n^{(0,0)}$  e  $L_n^{(0,0)}$  ocorrerem em  $C(\mathbb{Z}^2)$ , o que acontece com probabilidade maior que

$1 - \delta$ . Assim, considere a sequência de conjuntos  $(A_n, B_n)_{n \geq 0}$  definida de forma indutiva, onde  $A_0 = B_0 = \emptyset$ , e:

$$A_1 = \begin{cases} A_0 \cup \{x_0\}, & \text{se } x_0 \text{ é bom} \\ A_0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad B_1 = \begin{cases} B_0, & \text{se } x_0 \text{ é bom} \\ B_0 \cup \{x_0\}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Observe que em  $C(\mathbb{Z}^2)$  se  $\{x_0 \text{ é bom}\}$  ocorre, então a origem está conectada com os vértices  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$ .

Suponha como hipótese de indução que exista o par  $(A_n, B_n)$  definido de forma que:

1.  $A_n$  é um conjunto de sítios conectados em  $G^*$ .
2.  $B_n \subset \partial A_n$ .
3. Nos sítio em  $\mathbb{Z}_+^2 / \{A_n \cup B_n\}$  em  $C(\mathbb{Z}^2)$ , as arestas referentes aos eventos  $U$  e  $L$  ainda não foram testadas.
4. Para todo vértice  $x \in A_n$ , então temos que  $\{0 \leftrightarrow x\}$  em  $C(\mathbb{Z}^2)$ .

Então para definir  $(A_{n+1}, B_{n+1})$  se  $\partial A_n / B_n = \emptyset$ , faça  $A_k = A_n$  e  $B_k = B_n$  para todo  $k \geq n$ . Se  $\partial A_n / B_n \neq \emptyset$ , considere  $x_n \in \partial A_n / B_n$  o menor ponto com respeito a ordem  $<$ . Então definimos:

$$A_{n+1} = \begin{cases} A_n \cup \{x_n\}, & \text{se } x_n \text{ é bom} \\ A_n, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad B_{n+1} = \begin{cases} B_n, & \text{se } x_n \text{ é bom} \\ B_n \cup \{x_n\}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Onde o evento  $\{x_n \text{ é bom}\}$  é o evento  $U_n^{x_n} \cap L_n^{x_n}$  em  $C(\mathbb{Z}^2)$ . A condição 1 e 2 é garantida pois  $x_n \in \partial A_n / B_n$ , a condição 3 vem pela independência dos eventos  $R$  e  $S$ , a condição 4 é garantida pois quando  $U_n^{x_n} \cap L_n^{x_n}$  ocorre temos que  $\{0 \leftrightarrow x_n\}$  e  $\{x_n \leftrightarrow x_n + (1, 0)\}$  e  $\{x_n \leftrightarrow x_n + (0, 1)\}$ , ou seja  $\{0 \leftrightarrow x_n + (1, 0)\}$  e  $\{0 \leftrightarrow x_n + (0, 1)\}$ . Como  $\mathbb{P}_c^n(U_n^{x_n} \cap L_n^{x_n}) > 1 - \delta$  temos que:

$$P(x_k \text{ ser bom} | (A_{k-1}, B_{k-1}), \dots, (A_0, B_0)) > 1 - \delta$$

Assim, pelo modo de construção podemos afirmar que  $\{(0, 0) \leftrightarrow \infty \text{ em } G^*\} \subset \{(0, 0) \leftrightarrow \infty \text{ em } G\}$ . E, vale que:

$$\mathbb{P}_c^n(|C_0| = \infty) > P_{1-\delta}(|C_0| = \infty)$$

Tomando  $\delta \rightarrow 0$ , e usando o modelo de transição de fase de proposto em 1.2.3, temos que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}_c^k(|C_0| = \infty) = 1$$

□

**Prova do Teorema 1.5.4.** Dada a sequência  $(p_i)_{i=1}^{\infty}$  onde  $\limsup_{n \rightarrow \infty} np_n = \eta > 0$ . A prova segue na demonstração de que para fixado  $\delta \in (0, 1)$  existe algum  $n(\delta)$  tal que:

$$\mathbb{P}_c^{n(\delta)}(|C_0| = \infty) > P_{1-\delta}(|C_0| = \infty)$$

Para isso defina:

$$H_\delta = \lceil \frac{-12 \log(\frac{\delta}{3})}{\eta} \rceil$$

E então com  $H_\delta \in \mathbb{N}$  fixo e  $N \in \mathbb{N}$ , defina para  $x \in \mathbb{Z}^2$  o evento:

$$A_x^{H_\delta, N} = A_x^N = \{x + \{(0, 0), (1, 0), \dots, (H_\delta, 0)\}\} \text{ estão conectados em } \{x\} \times [0, N]\}$$

Onde  $N \in \mathbb{N}$  será escolhido por meio do Corolário 2.1.3, de forma que:

$$\mathbb{P}_c(A_x^N) > 1 - \delta/3$$

Com  $N$  fixado, defina para  $x \in \mathbb{Z}^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e para  $a, b \in \{-n, \dots, n\}$  com  $a < b$  o seguinte evento:

$$B_x^{[a, b]}(n) = \bigcup_{j=a}^b \{\{x, x + (j, n)\} \text{ está aberta}\}$$

Onde:

$$\mathbb{P}_c(B_x^{[a, b]}(n)) = 1 - (1 - p_n)^{|a-b|}$$

A prova procede a partir daqui realizando uma abordagem geométrica, isto é trabalharemos para definir o grafo de renormalização para em seguida voltar e definir o evento que será usado.

Para escolha do parâmetro  $n$  no evento  $B_x^{[a, b]}(n)$ , como  $\limsup_{n \rightarrow \infty} np_n = \eta > 0$  encontre uma subsequência  $(n_k)_{k>1}$  tal que  $n_k p_{n_k} \rightarrow \eta$ . E, tome  $k_0$  grande o suficiente tal que  $n_k p_{n_k} > \eta/2$  para todo  $k > k_0$ . Em seguida, tome  $n = n_k$  onde  $k > k_0$  e  $n_k > 12N$ .

Com  $n$  fixo defina  $a, b, c, d \in \{-n, \dots, n\}$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 a &= \lfloor -\frac{n}{2} - \frac{n}{12} \rfloor \\
 b &= \lceil -\frac{n}{2} + \frac{n}{12} \rceil \\
 c &= -b \\
 d &= -a
 \end{aligned}$$

Pelas aproximações por cima ou por baixo podemos garantir que  $|a-b| = |c-d| \geq \frac{n}{6}$ . A escolha de  $n > 12N$  foi realizada para que  $b + N < c$ , propriedade a qual garantirá na renormalização uma independência entre eventos.

Com  $n, a, b, c, d$  fixos defina o grafo  $G^* = (V^*, E^*)$ , onde  $V^* = \{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+ \mid i + j \text{ é par}\}$ , e as arestas  $E^* = \{(x, y), (x \pm 1, y + 1) \mid (x, y) \in V^*\}$ . Para cada  $(i, j) \in V^*$ , defina os intervalos:

$$I_{i,j} = [\lfloor i\frac{n}{2} - \frac{n}{12} \rfloor - 1, \lceil i\frac{n}{2} + \frac{n}{12} \rceil + 1] \times \{jn\} \subset V(C(\mathbb{Z}^2))$$

Dentro de cada intervalo defina o ponto  $v_{i,j}$  como o ponto médio de  $I_{i,j}$ :

$$v_{i,j} = (\lceil \frac{\lfloor i\frac{n}{2} - \frac{n}{12} \rfloor - \lceil i\frac{n}{2} + \frac{n}{12} \rceil - 2}{2} \rceil, nj)$$

Os intervalos  $I_{i,j}$  foram escolhidos de forma a terem mais sítios em seu interior do que os intervalos  $[a, b]$  ou  $[c, d]$ . Da forma que foi definido, temos que para o ponto  $v_{i,j}$  os intervalos da forma  $v_{i,j} + ([a, b], n)$  e  $v_{i,j} + ([c, d], n)$  estão contidos nos intervalos  $I_{i-1,j+1}$  e  $I_{i+1,j+1}$  respectivamente. Observe novamente que pela escolha do valor de  $n > 12$  esses intervalos são disjuntos, e formam uma estrutura isomorfa a  $\mathbb{Z}_+^2$ . Observe a Figura 5 abaixo retratando os intervalos e a associação de cada intervalo em um ponto de  $V^*$ .

Agora para definir o evento que iremos utilizar, seja  $x \in I_{i,j}$ , então  $x$  é da forma  $(x_1, jn)$  e  $v_{i,j}$  é da forma  $(x_2, jn)$ , para algum  $x_1$  e  $x_2$ . Defina  $h_{v_{i,j}}^x = x_2 - x_1$ , como sendo a diferença da primeira coordenada. E então defina os seguintes eventos:

$$\begin{aligned}
 C_1^x &= \bigcup_{k=0}^{H_\delta} B_{x+(k,0)}^{[a+h_{v_{i,j}}^x-k, b+h_{v_{i,j}}^x-k]}(n) \\
 C_2^x &= \bigcup_{k=0}^{H_\delta} B_{x+(k,0)}^{[c+h_{v_{i,j}}^x-k, d+h_{v_{i,j}}^x-k]}(n) \\
 T_x &= A_x^N \cap C_1^x \cap C_2^x
 \end{aligned}$$

Sobre os eventos  $C_1^x$  e  $C_2^x$ , vale destacar que o conjunto de pontos da forma  $x + ([a + h_{v_{i,j}}^x, b + h_{v_{i,j}}^x], n)$  coincide com o conjunto de sítios da forma  $v_{i,j} + ([a, b], n)$ , o mesmo é verdade para  $x + ([c + h_{v_{i,j}}^x, d + h_{v_{i,j}}^x], n)$  e  $v_{i,j} + ([c, d], n)$ . Dessa maneira, o evento  $C_1^x$

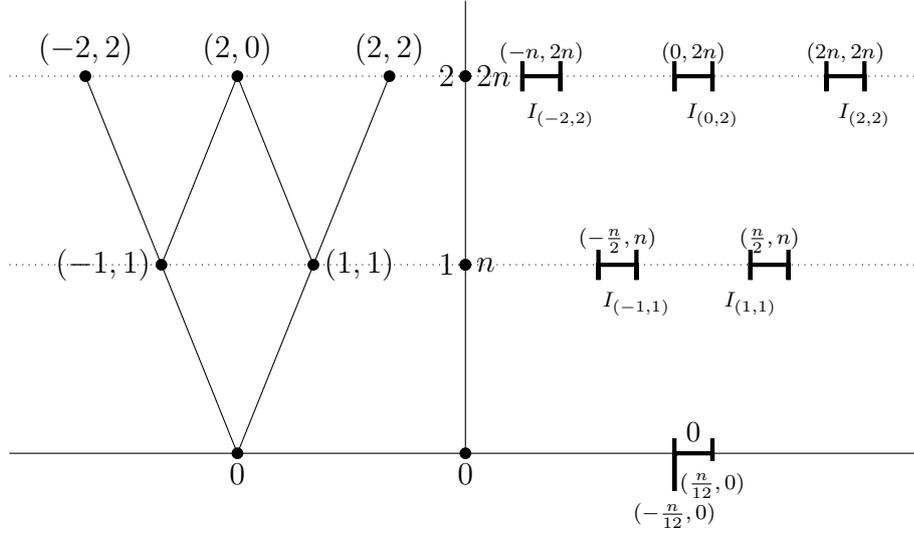


Figura 5 – Grafo para renormalização  $G^*$  e Conjuntos  $I_{i,j}$  em  $C(\mathbb{Z}^2)$  respectivos para cada ponto de  $G^*$ .

equivale a existência de uma aresta que vai do conjunto de pontos  $\{x, x + (1, 0), \dots, (H_\delta, 0)\}$  até o intervalo  $v_{i,j} + ([a, b], n) \subset I_{i-1,j+1}$ ; De forma análoga, o evento  $C_2^x$  equivale a existência de uma aresta que vai do conjunto de pontos  $\{x, x + (1, 0), \dots, (H_\delta, 0)\}$  até o intervalo  $v_{i,j} + ([c, d], n) \subset I_{i+1,j+1}$ .

Observe a Figura 6 abaixo com a ilustração do evento  $T_x$ , com  $x \in I_{i,j}$ :

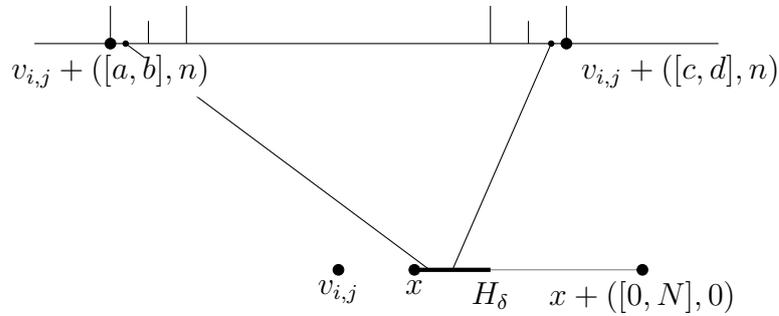


Figura 6 – Ilustração do evento  $T_x$  sendo realizado; O evento  $A_x^N$  está representado pelo tracinho  $x + ([0, N], 0)$ , sendo a parte negritada os vértices conectados. As arestas que vão desta região até as regiões  $v_{i,j} + ([a, b], n)$  e  $v_{i,j} + ([c, d], n)$  são respectivamente as arestas que faltam para o evento  $C_1^x$  e  $C_2^x$  acontecer. Sendo que as escalas de  $n$  e  $N$  no desenho não são realistas.

Para o cálculo da probabilidade deste evento. Observe que o evento  $A_x^N$  trabalha com arestas horizontais e os eventos  $C_1^x$  e  $C_2^x$  além de não necessitarem de arestas horizontais, entre si eles trabalham com arestas distintas. Dessa maneira temos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_c(T_x) &= \mathbb{P}_c(A_x^N \cap C_1^x \cap C_2^x) \\ &= \mathbb{P}_c(A_x^N) \mathbb{P}_c(C_1^x) \mathbb{P}_c(C_2^x) \\ &> (1 - \delta/3)^3 > 1 - \delta \end{aligned}$$

Observando que:

$$\mathbb{P}_c(C_1^x) = \mathbb{P}_c\left(\bigcup_{k=0}^{H_\delta} B_{x+(k,0)}^{[a+h_{v_{i,j}}^x-k, b+h_{v_{i,j}}^x-k]}(n)\right)$$

Por estas arestas serem disjuntas e, os eventos terem a mesma distribuição que  $B_{v_{i,j}}^{[a,b]}$  segue que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_c(C_1^x) &= 1 - (\mathbb{P}_c(\{B_{v_{i,j}}^{[a,b]}\}^c)^{H_\delta+1}) \\ &= 1 - (1 - p_n)^{|a-b|(H_\delta+1)} \\ &> 1 - (1 - p_n)^{|a-b|H_\delta} \\ &> 1 - e^{-|a-b|p_n H_\delta} \\ &> 1 - e^{-\frac{np_n}{6} H_\delta} \\ &> 1 - e^{-\frac{\eta}{12} H_\delta} \\ &> 1 - \frac{\delta}{3} \end{aligned}$$

E de forma análoga temos que  $\mathbb{P}_c(C_2^x) > 1 - \frac{\delta}{3}$ . Como nenhum evento utiliza aresta maiores que  $n$ , temos que:

$$\mathbb{P}_c^n(T_x) > 1 - \delta$$

Sobre a independência entre os  $T_x$ , se  $x \in I_{i,j}$  e  $y \in I_{k,l}$ , se são intervalos disjuntos, pela escolha de  $n > 12N$ , temos que para sítios  $x$  e  $y$ , os eventos  $T_x$  e  $T_y$  não usam nenhuma aresta em comum, então  $T_x$  é independente de  $T_y$ . Além disso, os eventos  $T_x$  só dependem de arestas de comprimento no máximo  $n$ .

Relembre o grafo  $G^* = (V^*, E^*)$ , onde  $V^* = \{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+ | i + j \text{ é par}\}$ , e as arestas  $E^* = \{\{(x, y), (x \pm 1, y + 1)\} | (x, y) \in V^*\}$ . Tome  $<$  uma ordem em  $\mathbb{Z}^2$ , esta ordem vale tanto para  $V^*$  quando para  $V(C(\mathbb{Z}^2))$ , onde para  $x_1 = (i_1, j_1)$  e  $x_2 = (i_2, j_2)$ , então dizemos que  $x_1 < x_2$  sempre que um dos itens acontece:

- $j_1 < j_2$
- $j_1 = j_2, i_1 < i_2$

Para  $S \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$  definimos a fronteira exterior como:

$$\partial S = \{(i, j) \in V^*/S : (i - 1, j - 1) \in S \text{ ou } (i + 1, j - 1) \in S\}$$

Tome  $x_0 = (0, 0) \in G^*$ , dizemos que o vértice  $x_0$  é bom se no vértice  $(0, 0) \in C(\mathbb{Z}^2)$  ocorrer o evento  $T_0$ . Defina uma sequência de conjuntos  $(A_n, B_n)_{n \geq 0}$  de forma indutiva, onde  $A_0 = B_0 = \emptyset$ , e:

$$A_1 = \begin{cases} A_0 \cup \{x_0\}, & \text{se } x_0 \text{ é bom} \\ A_0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad B_1 = \begin{cases} B_0, & \text{se } x_0 \text{ é bom} \\ B_0 \cup \{x_0\}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Observe que se  $\{x_0 \text{ é bom}\}$  ocorre, então em  $C(\mathbb{Z}^2)$  a origem está conectada com algum ponto do intervalo  $I_{1,1}$  e com outro ponto no intervalo  $I_{-1,1}$ , para cada intervalo tomaremos o menor com relação a ordem  $<$  e chamaremos estes pontos de  $u_{1,1}$  e  $u_{-1,1}$  respectivamente.

Suponha como hipótese de indução que exista o par  $(A_n, B_n)$  definido de forma que:

1.  $A_n$  é um conjunto de sítios conectados em  $G^*$ .
2.  $B_n \subset \partial A_n$ .
3. Para todos os sítios  $x \in V^*/\{A_n \cup B_n\}$  nenhuma aresta em  $I_x$  em  $C(\mathbb{Z}^2)$  foi testada.
4. Para todo vértice  $x \in A_n$ , então temos algum vértice  $u_x \in I_x$  tal que  $\{0 \leftrightarrow u_x\}$  em  $C(\mathbb{Z}^2)$ .

Então para definir  $(A_{n+1}, B_{n+1})$  se  $\partial A_n/B_n = \emptyset$ , faça  $A_k = A_n$  e  $B_k = B_n$  para todo  $k \geq n$ . Se  $\partial A_n/B_n \neq \emptyset$ , considere  $x_n \in \partial A_n/B_n$  o menor vértice com respeito a ordem  $<$  e  $u_n \in I_{x_n}$  o menor vértice com respeito a ordem  $<$  conectado com a origem. Então definimos:

$$A_{n+1} = \begin{cases} A_n \cup \{x_n\}, & \text{se } x_n \text{ é bom} \\ A_n, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad B_{n+1} = \begin{cases} B_n, & \text{se } x_n \text{ é bom} \\ B_n \cup \{x_n\}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Onde  $x_n$  é bom se  $T_{u_n}$  acontecer, dessa maneira  $u_n$  está conectado com sítios nos intervalos dos vértices adjacentes a  $x_n$ . Assim, de forma trivial é satisfeito as condições 1,2,3 e 4.

Como a probabilidade dos eventos é maior que  $1 - \delta$ , temos que:

$$P(x_k \text{ ser bom} | (A_{k-1}, B_{k-1}), \dots, (A_0, B_0)) > 1 - \delta$$

Pelas condições 1,2,3,4 e pelo modo de construção podemos afirmar que  $\{|C_0| = \infty \text{ em } G^*\} \subset \{|C_0| = \infty \text{ em } C(\mathbb{Z}^2)\}$ . Assim segue o resultado:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}_d^k(|C_0| = \infty) = 1$$

□

### 2.3.1 Comentários

Diversas dificuldades são encontradas para tentar resolver o problema do truncamento clássico em  $\mathbb{Z}^2$ , para tentar suprimir estas dificuldades estudamos o problema do truncamento em  $C(\mathbb{Z}^2)$ , pois ao adicionar mais arestas ao grafo deixamos construções geométricas mais fáceis de serem realizadas.

Pouca referencia foi encontrado neste tipo de problema, no artigo de [3], foi resolvido o problema para sequências  $(p_n)_{n=1}^{\infty}$  tal que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n ip_i}{\text{Log}[n]} > c$ , onde  $c$  é uma constante que depende da dimensão. Para a sequência:

$$p_n = \begin{cases} \frac{c}{2^n} & , \text{ se } n = 2^k \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Vale que  $\limsup_n np_n = \frac{c}{2} > 0$  e  $\sum_{i=1}^{2^k} np_n = \frac{c}{2}k$ , e vale que  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n ip_i}{\text{Log}[n]} = \frac{c}{2} < c$ , o que mostra que o 1.5.4 é uma condição melhor do que a condição mostrada em [3].

Inspirado na prova de  $D(\mathbb{Z}^2)$ , o primeiro teorema apresenta uma abordagem análoga com a demonstração de 1.5.1, entretanto o excesso de arestas faz com que a conclusão seja muito melhor do que a obtida em  $D(\mathbb{Z}^2)$ . No Teorema 1.5.3 mostramos que se  $\sum_{i=1}^{\infty} ip_i^2$  divergir então o problema truncamento é verdadeiro, o que é muito melhor em comparação com o que foi demonstrado em 1.5.1 o qual se refere a  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i^2$  divergente.

Diversas considerações podem ser realizadas por meio deste teorema, a maior delas está escondida no somatório pelo produto do índice  $i$  com o parâmetro  $p_i$ , esse produto causa uma relação direta entre grandes distâncias de arestas e facilidade de percolar. De forma que sequências  $(p_i)_{i=1}^{\infty}$  que apresentam muitos zeros entre termos positivos tenha o problema do truncamento com resposta afirmativa, mesmo se  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i < \infty$ , para um exemplo tome a sequência  $(q_k)_{k=1}^{\infty}$ , onde  $q_k = \frac{1}{k^2}$ , e construa a sequência  $(p_n)_{n=1}^{\infty}$  onde:

$$p_n = \begin{cases} q_k, & \text{ se } n = 2^k \\ 0, & \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Claramente  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$ , entretanto  $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{k^4} = \infty$  satisfazendo o problema do truncamento.

A dificuldade de trabalhar com somatório proporcionou uma busca para uma condição mais simples de ser analisada. Essa busca culminou no Teorema 1.5.4 com uma conclusão simples de que se  $\limsup_{n \rightarrow \infty} np_n > 0$  vale o problema do truncamento. Tal condição não é mais forte, nem mais fraca com relação a do Teorema 1.5.3. Observe que a sequência  $p_n = \frac{1}{n\sqrt{\log(n)}}$  satisfaz que  $\sum_{i=1}^{\infty} ip_i^2 = \infty$ , mas  $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = 0$ , por outro lado a sequência  $p_n$  dada por:

$$p_n = \begin{cases} 1/n, & \text{ se } n = 2^k \\ \frac{1}{n \log n}, & \text{ caso contrário} \end{cases}$$

é tal que  $\sum_{n=1}^{\infty} np_n^2 < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log(n))^2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} < \infty$ , entretanto  $\limsup_{n \rightarrow \infty} np_n = 1$ .

## 2.4 Provas para Percolação de longo alcance clássico

**Prova do Teorema 1.5.5.** Fixe  $N > 0$  onde  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i p_{i+N} = \infty$ . Para inteiros  $M_1$  e  $M_2$  defina os eventos:

$$\begin{aligned} \xi_i^{(x,n)} &= \{ \{(x, n), (x+i, n)\} \text{ e } \{(x+i, n), (x-N, n)\} \text{ estão abertas} \} \\ L_{M_1}^{(x,n)} &= \left\{ \bigcup_{i=1}^{M_1} \xi_i^{(x,n)} \right\} \\ R_{M_1, M_2}^{(x,n)} &= \left\{ \bigcup_{i=M_1+1}^{M_2} \xi_i^{(x,n)} \right\} \end{aligned}$$

Note que se  $L_{M_1}^{(x,h)}$  ou  $R_{M_1, M_2}^{(x,h)}$  ocorrerem então temos que o evento  $\{(x, h) \leftrightarrow (x-N, h)\}$  ocorre. Sobre independência temos que os eventos  $R_{M_1, M_2}$  e  $L_{M_1}$  trabalham com arestas de tamanhos diferentes então são independentes independente do vértice que estaremos olhando. Observe que o eventos  $L_{M_1}^{(x,h)}$  é independente do evento  $L_{M_1}^{(x+KN, h)}$  com  $K > 2$  já que as arestas iniciais e finais são distintas para esses dois eventos, o mesmo podemos falar para  $R_{M_1, M_2}^{(x,h)}$  e  $R_{M_1, M_2}^{(x+KN, h)}$  com  $K > 2$ .

Observe a Figura 7, que mostra os eventos  $R, L$  sendo realizados em  $LA(\mathbb{Z}^2)$ .

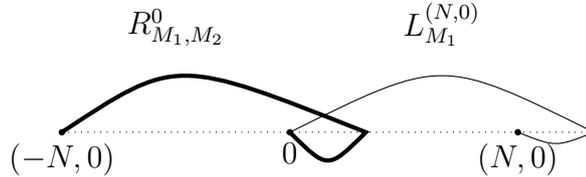


Figura 7 – Evento  $R_{M_1, M_2}^0$  e  $L_{M_1}^{(-N, 0)}$  sendo realizados em  $LA(\mathbb{Z}^2)$ ; As aresta negritadas são as utilizadas no evento  $R$  e as demais arestas são utilizadas no evento  $L$ .

Defina de forma análoga os eventos relativos a vertical:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i^{(n,x)} &= \{ \{(n, x), (n, x+i)\} \text{ e } \{(n, x+i), (n, x-N)\} \text{ estão abertas} \} \\ D_{M_1}^{(n,x)} &= \left\{ \bigcup_{i=1}^{M_1} \mathcal{E}_i^{(n,x)} \right\} \\ U_{M_1, M_2}^{(n,x)} &= \left\{ \bigcup_{i=M_1+1}^{M_2} \mathcal{E}_i^{(n,x)} \right\} \end{aligned}$$

Onde se  $D_{M_1}^{(x,h)}$  ou  $U_{M_1, M_2}^{(x,h)}$  ocorrerem então temos que o evento  $\{(h, x) \leftrightarrow (x, x+N)\}$  ocorre. Em relação a independência do eventos, vale as mesmas observações com relação a independência dos eventos  $L$  e  $R$ . Isto é, os eventos  $D_{M_1}^{(x,h)}$  e  $U_{M_1, M_2}^{(x,h)}$  são independentes entre si, e o evento  $D_{M_1}^{(x,h)}$  é independente do evento  $D_{M_1}^{(x+sN, h)}$  com  $s > 2$ , o mesmo podemos falar para  $U_{M_1, M_2}^{(x,h)}$  e  $U_{M_1, M_2}^{(x+sN, h)}$  com  $s > 2$ .

Como  $\mathbb{P}(\xi_i^{(x,n)}) = \mathbb{P}(\mathcal{E}_i^{(x,n)}) = p_i p_{i+N}$ , e  $\sum p_i p_{i+N} = \infty$ , então para fixado  $\delta$  podemos encontrar  $M_1$  e  $M_2$ , de forma que ao tomar  $K = M_2$  temos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^K(L_{M_1}^{(x,n)}) &> 1 - \delta \\ \mathbb{P}^K(R_{M_1, M_2}^{(x,n)}) &> 1 - \delta \\ \mathbb{P}^K(U_{M_1, M_2}^{(n,x)}) &> 1 - \delta \\ \mathbb{P}^K(D_{M_1}^{(n,x)}) &> 1 - \delta\end{aligned}$$

Uma vez que os eventos  $L_{M_1}, R_{M_1, M_2}, U_{M_1, M_2}$  e  $D_{M_1}$  só dependem de arestas  $e$  de tamanho menor ou igual que  $K$ .

Considere  $G^* = (V^*, E^*)$  um grafo onde  $V^* = \mathbb{Z}^2$ , e  $E^* = \{\{x, y\} | d_1(x, y) = 1\}$ . Para cada  $x \in V^*$  defina em  $LA(\mathbb{Z}^2)$  o sítio  $v_x = Nx$  ( $N$ , o valor fixado para que  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i p_{i+N} = \infty$ ). Dizemos que dois vértices  $v_x$  e  $v_y$  são adjacentes se  $x \sim y$  em  $G^*$ .

Iremos realizar um processo de percolação em  $G^*$ , onde para cada elo  $e = (z_1, z_2)$  com  $z_1 = (x_1, y_1)$  e  $z_2 = (x_2, y_2)$  vamos falar que o elo está aberto se em  $LA(\mathbb{Z}^2)$  vale:

- Caso  $|x_1 - x_2| = 1$  e  $x_1$  é par então dizemos que o elo  $e$  está aberto se  $R_{M_1, M_2}^{nz_1}$  ocorrer. Se  $x_1$  for ímpar dizemos que o elo  $e$  está aberto se  $L_{M_1}^{nz_1}$  ocorrer.
- Caso  $|y_1 - y_2| = 1$  e  $y_1$  é par então dizemos que o elo  $e$  está aberto se  $U_{M_1, M_2}^{nz_1}$  ocorrer. Se  $y_1$  for ímpar dizemos que o elo  $e$  está aberto se  $D_{M_1}^{nz_1}$  ocorrer.

Esses eventos em  $LA(\mathbb{Z}^2)$  são independentes entre si. E como para o elo  $e = \{z_1, z_2\}$  estar aberto, então em  $LA(\mathbb{Z}^2)$  temos que  $\{v_{z_1} \leftrightarrow v_{z_2}\}$ . Desta maneira, em  $\{|C_0| = \infty \text{ em } G^*\} \subset \{|C_0| = \infty \text{ em } LA(\mathbb{Z}^2)\}$ .

Como todos tem uma probabilidade maior que  $1 - \delta$ . Vale que:

$$\mathbb{P}^K(|C_0| = \infty) > \mathbb{P}(|C_0| = \infty \text{ em } G^*) > \mathbb{P}_{1-\delta}(|C_0| = \infty) \quad (2.7)$$

Como  $\delta$  é arbitrário vale que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}^k(|C_0| = \infty) = 1$$

□

**Prova do Teorema 1.5.6.** Fixe  $\delta > 0$  e considere a sequência  $(p_i)_{i=1}^{\infty}$  tal que

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} p_i p_{i+k} = 3\eta > 0$$

Tome  $H = \lceil \frac{-\log(\frac{\delta}{3})}{\eta} \rceil$ , então encontre  $N$  usando o Lema 2.1.3 tal que:

$$\mathbb{P}(\{(0, 0), (1, 0), \dots, (2H, 0)\} \text{ está conectado em } [0, N] \times \{0\}) > (1 - \frac{\delta}{3})^{\frac{1}{2}}$$

Para  $x \in \mathbb{Z}^2$ , defina os eventos:

$$\begin{aligned} F_x^1 &= \{x + \{(0, 0), (1, 0), \dots, (2H, 0)\} \text{ está conexo em } [0, N] \times \{0\}\} \\ F_x^2 &= \{x + \{(0, 0), (0, 1), \dots, (0, 2H)\} \text{ está conexo em } \{0\} \times [0, N]\} \\ L_x &= F_x^1 \cap F_x^2 \end{aligned}$$

Como  $F_x^1$  e  $F_x^2$  são eventos independentes temos que:

$$\mathbb{P}(L_x) > 1 - \frac{\delta}{3}$$

Observe que o evento  $L_x$  utiliza arestas de tamanho no máximo  $N$ .

Como  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} p_i p_{i+k} = 3\eta$ , encontre  $K > N$  tal que  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i p_{i+K} > 2\eta$ . Assim, para  $K$  fixo, encontre  $T = T(K)$  tal que  $\sum_{i=1}^T p_i p_{i+K} > \eta$ . Com as constantes fixadas, considere  $x \in \mathbb{Z}^2$  e defina os seguintes eventos auxiliares:

$$\begin{aligned} A_x^s &= \bigcup_{i=1}^T \{ \{x + (0, s), x + (i + K, s)\} \text{ e } \{x + (i + K, s), x + (K, s)\} \text{ estão abertas} \} \\ B_x^t &= \bigcup_{i=1}^T \{ \{x + (t, 0), x + (t, i + K)\} \text{ e } \{x + (t, i + K), x + (t, K)\} \text{ estão abertas} \} \end{aligned}$$

Então defina os seguintes eventos:

$$\begin{aligned} X_x^1 &= \bigcup_{s=1}^H A_x^s \\ X_x^2 &= \bigcup_{s=1}^H B_x^s \\ X_x^3 &= \bigcup_{s=H+1}^{2H} A_x^s \\ X_x^4 &= \bigcup_{s=H+1}^{2H} B_x^s \end{aligned}$$

Tanto o evento  $L_x$  quanto os eventos  $X_x^1$ ,  $X_x^2$ ,  $X_x^3$  e  $X_x^4$  utilizam-se de arestas de tamanho no máximo  $K + T$ . Assim, se truncarmos em  $K + T$ , vale que para  $i = 1, 2, 3, 4$  a probabilidade é:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}^{K+T}(X_x^i) &= 1 - (1 - (\mathbb{P}^{K+T}(\{A_0^s\}^c)^H)) \\
 &= 1 - (1 - \prod_{i=1}^T (1 - p_i p_{i+K}))^H \\
 &> 1 - e^{-H \sum_{i=1}^T p_i p_{i+K}} \\
 &= 1 - e^{-\lceil \frac{-\log(\delta/3)}{\eta} \rceil \sum_{i=1}^T p_i p_{i+K}} \\
 &> 1 - e^{\log(\delta/3)} = 1 - \frac{\delta}{3}
 \end{aligned}$$

Para a prova iremos construir uma renormalização utilizando os vértices de  $K\mathbb{Z}^2$ , em cada vértice observaremos um evento da forma  $L_x \cap X_x^i \cap X_x^j$ , onde os índices  $i$  e  $j$  serão escolhidos em função do ponto  $x$ .

Sobre independência dos eventos, note que os eventos  $L_x, X_x^1, X_x^2, X_x^3$  e  $X_x^4$  trabalham com arestas disjuntas, então são independentes. Nos vértices de  $v \in k\mathbb{Z}^2$ , os elos dos eventos  $L_v$  são completamente disjuntos, logo são independentes. Já os eventos  $X_v^i$ , tem certas paridades para  $i = 1, 2, 3, 4$ . Assim para cada vértice  $v = (Kx_1, Kx_2)$  de  $K\mathbb{Z}^2$  defina dois eventos, o primeiro evento é  $X_v^1$  se  $x_1$  for par ou  $X_v^3$  se  $x_1$  for ímpar, o segundo evento é  $X_v^2$  se  $x_2$  for par ou  $X_v^4$  se  $x_2$  for ímpar. Definido os eventos seguindo esta escolha, todos os eventos trabalham com arestas disjuntas então são todos eventos independentes.

Para cada vértice  $v \in K\mathbb{Z}^2$  defina o evento:

$$E_v = L_v \cap X_v^i \cap X_v^j$$

Onde para  $v = (Kx_1, Kx_2)$  temos que  $i = 1$  se  $x_1$  é par ou  $i = 3$  se  $x_1$  é ímpar, e  $j = 2$  se  $x_2$  é par ou  $j = 4$  se  $x_2$  é ímpar.

Dessa maneira se  $E_v$  acontecer, temos que todos os vértices de  $v + ([0, 2H], 0)$  e  $v + (0, [0, 2H])$  estarão conectados entre si, e existira algum vértice de  $v + ([0, 2H], K)$  e outro de  $v + (K, [0, 2H + 1])$  conexo com  $v$ . Sobre a probabilidade dos eventos, como são eventos identicamente distribuídos, vale que:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}^{K+T}(E_v) &= \mathbb{P}^{K+T}(E_0) \\
 &= \mathbb{P}^{K+T}(L_0 \cap X_0^1 \cap X_0^2) \\
 &= \mathbb{P}^{K+T}(L_0) \mathbb{P}^{K+T}(X_0^1) \mathbb{P}^{K+T}(X_0^2) \\
 &> (1 - \frac{\delta}{3})^3 > 1 - \delta.
 \end{aligned}$$

Considere  $G^* = (V^*, E^*)$ , onde o conjunto dos vértices  $V^* = \mathbb{Z}^2$ , e o conjunto das arestas  $E^* = \{\{x, y\} | d_1(x, y) = 1\}$ . Considere  $<$  uma ordem sobre os vértices de  $G^*$  onde para  $x_1 = (i_1, j_1), x_2 = (i_2, j_2)$ , temos que  $x_1 < x_2$  sempre alguns dos itens são satisfeitos:

- $j_2 > j_1$
- $j_2 = j_1, i_1 > i_2$

Dessa forma para  $S \subset V^*$  definimos a fronteira de vértices como:

$$\partial S = \{x \in V^*/S : \exists y \in S \text{ tal que } , y \sim x\}$$

Iremos realizar um processo de renormalização indutivo considerando o grafo  $LA(\mathbb{Z}^2)$  e o grafo  $G^*$  apresentado. Tome  $x_0 = (0, 0) \in G^*$ , então defina o evento  $\{x_0 \text{ é bom}\}$  se em  $LA(\mathbb{Z}^2)$  ocorrer o evento  $E_0$ . A partir daí, a sequência de conjuntos  $(A_n, B_n)_{n \geq 0}$  será definida de forma indutiva, onde  $A_0 = B_0 = \emptyset$ , e:

$$A_1 = \begin{cases} A_0 \cup x_0, & \text{se } x_0 \text{ é bom} \\ A_0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad B_1 = \begin{cases} B_0, & \text{se } x_0 \text{ é bom} \\ B_0 \cup x_0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Suponha como hipótese de indução que exista  $(A_n, B_n)$  tal que:

1.  $A_n$  é um conjunto de arestas conexas em  $G^*$ .
2.  $B_n \subset \partial A_n$ .
3. Considere  $v \in \mathbb{Z}^2/\{A_n \cup B_n\}$  então, as arestas que englobam os eventos  $E_{kv}$  ainda não foram exploradas.
4. Para todo vértice  $x \in A_n$ , temos que  $\{0 \leftrightarrow kx\}$  em  $LA(\mathbb{Z}^2)$ .

Então para definir  $(A_{n+1}, B_{n+1})$  se  $\partial A_n/B_n = \emptyset$ , faça  $A_k = A_n$  e  $B_k = B_n$  para todo  $k \geq n$ . Se  $\partial A_n/B_n \neq \emptyset$ , considere  $x_n \in \partial A_n/B_n$  o menor vértice com respeito a ordem  $<$ . Então definimos:

$$A_{n+1} = \begin{cases} A_n \cup \{x_n\}, & \text{se } x_n \text{ é bom} \\ A_n, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad B_{n+1} = \begin{cases} B_n, & \text{se } x_n \text{ é bom} \\ B_n \cup \{x_n\}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Onde o evento  $\{x_n \text{ é bom}\}$  corresponde ao evento  $E_{Kx_n}$ . Dessa forma, as condições 1, 2 e 3 são satisfeitas de forma trivial e a condição 4 ocorre pois  $(0, 0)$  está conectado com algum vértice em  $x_n + ([0, 2H], 0)$  ou  $x_n + (0, [0, 2H])$ , assim com o sucesso do evento  $E_{Kx_n}$ , temos que o evento  $L_{Kx_n}$  acontece e com isso a condição 4 é satisfeita.

Como todos os eventos têm probabilidade maior ou igual que  $1 - \delta$ , vale que:

$$P(x_k \text{ ser bom} | (A_{k-1}, B_{k-1}), \dots, (A_0, B_0)) > 1 - \delta$$

Pelas condições 1,2,3,4 e pelo modo de construção podemos afirmar que  $\{|C_0| = \infty \text{ em } G^*\} \subset \{|C_0| = \infty \text{ em } LA(\mathbb{Z}^2)\}$ . Assim segue o resultado:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{P}^k(|C_0| = \infty) = 1$$

□

### 2.4.1 Comentários

O modelo de percolação de longo alcance completo domina estocasticamente o modelo de percolação de longo alcance clássico, uma vez que  $LA(\mathbb{Z}^2) \subset C(\mathbb{Z}^2)$ . Assim, uma ausência da afirmação do problema de truncamento em  $C(\mathbb{Z}^2)$  impede uma resolução completa para o problema em  $LA(\mathbb{Z}^2)$ , mas mesmo sem uma resposta completa as técnicas discutidas nos teoremas de  $D(\mathbb{Z}^2)$  e as ideias apresentadas para  $C(\mathbb{Z}^2)$  representaram avanços interessantes com relação ao problema do truncamento. O objetivo desta seção foi trazer das seções anteriores todos os possíveis resultados para  $LA(\mathbb{Z}^2)$ .

Do corolário apresentado em 1.5.2, fica evidente uma ligação entre os Teoremas 1.5.5 e 1.5.6 com a hipótese  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n^2 = \infty$ . A condição do Teorema 1.5.5 consegue mostrar para algumas sequências onde  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n^2 = \infty$ , entretanto a distância entre os termos positivos da sequência têm que ser controlada, como é o caso da sequências  $(p_n)_{n=1}^{\infty}$  onde  $p_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ , onde temos que  $\sum_{i=0}^{\infty} p_n p_{n+1} = \infty$ .

Esse controle rígido sobre os termos da sequência exigido por 1.5.5 faz com que a hipótese fique muito fraca com relação a  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n^2 = \infty$ , e como qualquer avanço técnico é muito complexo, deixava uma indagação sobre sequências mais arbitrárias, uma vez que tais sequências fizeram uma parte interessante da resolução do teorema em  $C(\mathbb{Z}^2)$ .

O Teorema 1.5.6 tenta adicionar uma variabilidade maior nas sequências do Teorema 1.5.5, entretanto as sequências que o satisfazem apresentam um caráter um tanto quanto artificial. Sua única vantagem é a construção de uma sequência que tem seu termo positivo indo para zero e uma quantidade enorme de zeros entre os termos positivos. Como é o caso da sequência  $(p_n)_{n=1}^{\infty}$  onde para todo  $k$  o conjunto  $\{p_{100^k+t2^k} : t = 0, \dots, k\}$  assume o valor constante de  $\frac{1}{4\sqrt{k-1}}$  de forma que  $\sum_{i=1}^{\infty} p_i p_{2^k+i} > \sum_{t=0}^{k-1} (p_{100^k+t2^k})(p_{100^k+(t+1)2^k}) = (k-1)\frac{1}{16(k-1)} = \frac{1}{16}$ . Fora dos conjuntos da forma  $\{p_{100^k+t2^k} : t = 0, \dots, k\}$ , com  $k$  inteiro, a sequência  $p_n$  assume o valor 0. Observe que para esta sequência, como os termos positivos podem ser agrupados em conjuntos que distam uma quantidade exponencial um dos outros, claramente a sequência  $p_n$  não satisfaz à condição de 1.5.5.

# Bibliografia

- [1] C. Alves, M. Hilário, B.N.B. de Lima e D. Valesin. “A Note on Truncated Long-Range Percolation with Heavy Tails on Oriented Graphs”. Em: *Journal of Statistical Physics* (set. de 2017), pp. 972–980. DOI: [10.1007/s10955-017-1899-3](https://doi.org/10.1007/s10955-017-1899-3).
- [2] A. C. D. van Enter, B. N. B. de Lima e D. Valesin. “Truncated Long-Range Percolation on Oriented Graphs”. Em: *Journal of Statistical Physics* 164.1 (jul. de 2016), pp. 166–173. ISSN: 1572-9613. DOI: [10.1007/s10955-016-1538-4](https://doi.org/10.1007/s10955-016-1538-4). URL: <https://doi.org/10.1007/s10955-016-1538-4>.
- [3] S. Friedli e B. N. B. de Lima. “On the Truncation of Systems with Non-Summable Interactions”. Em: *Journal of Statistical Physics* 122.6 (mar. de 2006), pp. 1215–1236. ISSN: 1572-9613. DOI: [10.1007/s10955-005-8023-9](https://doi.org/10.1007/s10955-005-8023-9). URL: <https://doi.org/10.1007/s10955-005-8023-9>.
- [4] G. R. Grimmett. *Percolation*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999. ISBN: 978-3-662-03981-6.
- [5] S. Kalikow e B. Weiss. “When are random graphs connected”. Em: *Israel Journal of Mathematics* 62.3 (out. de 1988), pp. 257–268. ISSN: 1565-8511. DOI: [10.1007/BF02783296](https://doi.org/10.1007/BF02783296). URL: <https://doi.org/10.1007/BF02783296>.
- [6] B. N. B. de Lima e A. Sapozhnikov. “On the Truncated Long-Range Percolation on  $\mathbb{Z}^2$ ”. Em: *Journal of Applied Probability* 45 (mar. de 2008), pp. 287–291. DOI: [10.1017/S0021900200004137](https://doi.org/10.1017/S0021900200004137).
- [7] M. Menshikov, V. Sidoravicius e M. Vachkovskaia. “A Note on Two-Dimensional Truncated Long-Range Percolation”. Em: *Advances in Applied Probability* 33.4 (2001), pp. 912–929. ISSN: 00018678. URL: <http://www.jstor.org/stable/1428312>.
- [8] L. S. Schulman. “Long range percolation in one dimension”. Em: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 16.17 (dez. de 1983), pp. L639–L641. DOI: [10.1088/0305-4470/16/17/001](https://doi.org/10.1088/0305-4470/16/17/001). URL: <https://doi.org/10.1088/0305-4470/16/17/001>.