

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Mateus Henrique Ramos de Souza

CARACTERIZAÇÕES DO PLANO E DO CATENOIDE COMO  
SUPERFÍCIES CAPILARES À BOLA EUCLIDIANA TRIDIMENSIONAL

Belo Horizonte

2020

Mateus Henrique Ramos de Souza

**CARACTERIZAÇÕES DO PLANO E DO CATENOIDE COMO  
SUPERFÍCIES CAPILARES À BOLA EUCLIDIANA TRIDIMENSIONAL**

**Versão Final**

Dissertação de mestrado apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre pelo Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais.

Orientador: Ezequiel Rodrigues Barbosa

Belo Horizonte

2020

Souza, Mateus Henrique Ramos de.

S729c      Caracterizações do plano e do catenoide como superfícies capilares à bola euclidiana tridimensional / Mateus Henrique Ramos de Souza. – 2020.

70 f. il.

Orientador: Ezequiel Rodrigues Barbosa.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.

Referências: f.68-70.

1. Matemática – Teses. 2. Superfícies (Matemática) – Teses. 3. Catenoide – Teses. 4. Geometria diferencial ) – Teses. I. Barbosa, Ezequiel Rodrigues. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. IV. Título.

CDU 51 (043)



FOLHA DE APROVAÇÃO

*Caracterização do Plano e do Catenóide como Superfícies  
Capilares à Bola Euclidiana Tridimensional*

**MATEUS HENRIQUE RAMOS DE SOUZA**

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Prof. Emerson Alves Mendonça de Abreu  
UFMG

Prof. Maurício Barros Corrêa Júnior  
UFMG

Prof. Rosivaldo Antonio Gonçalves  
UNIMONTES

Belo Horizonte, 19 de fevereiro de 2020.

# Resumo

O objetivo deste trabalho é obter resultados que permitam caracterizar, em certo sentido, superfícies capilares mínimas imersas na bola euclidiana e que possuam a topologia de um disco ou a de um anel. Veremos que um disco capilar mínimo à bola Euclidiana tridimensional é um disco plano e que uma superfície capilar mínima em  $\mathbb{R}^3 \setminus B^3$  que possui curvatura total finita é um pedaço de um plano ou um pedaço de um catenoide, onde  $B^3$  é a bola euclidiana em  $\mathbb{R}^3$  de centro na origem e raio um.

**Palavras-chave:** plano, catenoide, imersão capilar.

# Abstract

The objective of this work is concerned with obtaining results that allow characterize, in a certain sense, minimal capillary surfaces immersed in the three-dimensional Euclidean ball and wich have the topology of a disk or that of a ring . We will see that a minimum capillary disk to the ball is a flat disk and that a minimum capillary surface at  $\mathbb{R}^3 \setminus B^3$  with finite total curvature is a piece of a plane or a piece of a catenoid, where  $B^3$  is the Euclidian tridimensional ball of center at origin and radius one.

**Keywords:** plane, catenoid, capillary immersion.

# Agradecimentos

A Deus acima de tudo;

Aos meus pais Adalberto e Maria, por estarem sempre presentes e me ajudando a todo momento;

Aos professores da minha graduação, em especial ao meu orientador de Iniciação Científica Rosivaldo Gonçalves;

Aos professores da UFMG, em especial ao meu orientador Ezequiel que esteve sempre presente quando necessitei de ajuda;

Aos meus colegas da pós graduação, em especial ao Genilson, Pedro e Karol, com os quais dividimos uma casa durante esses dois anos;

A o meu colega Pedro Gonzaga, pela ajuda com a revisão do trabalho;

À Capes, pelo auxílio financeiro.

*"Seja você quem for, seja qual for a posição social que você tenha na vida, a mais alta ou a mais baixa, tenha sempre como meta muita força, muita determinação e sempre faça tudo com muito amor e com muita fé em Deus, que um dia você chega lá. De alguma maneira você chega lá".*

Ayrton Senna



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>1 Conceitos e Resultados Básicos</b>	<b>12</b>
1.1 Variedades Diferenciáveis . . . . .	12
1.2 Métricas Riemannianas . . . . .	15
1.3 Conexões afins . . . . .	16
1.4 Curvaturas . . . . .	19
1.5 Imersões Isométricas . . . . .	21
1.6 Hipersuperfícies . . . . .	22
<b>2 Funções Harmônicas e Funções Complexas</b>	<b>25</b>
2.1 Funções Harmônicas . . . . .	25
2.2 Funções complexas . . . . .	26
2.3 A esfera de Riemann . . . . .	30
<b>3 Variações da área, do volume e da energia</b>	<b>34</b>
3.1 Fórmula da primeira variação da área . . . . .	34
3.2 Fórmula para a primeira variação do volume . . . . .	39
3.3 Variação da energia . . . . .	42
<b>4 Representação de Enneper -Weierstrass e relações entre superfícies CMC e funções complexas</b>	<b>47</b>
4.1 Representação de Enneper-Weierstrass . . . . .	50
4.2 Resultados envolvendo Superfícies CMC e funções complexas . . . . .	55
4.3 A curvatura gaussiana em termos da representação de Enneper-Weierstrass	59
<b>5 Superfícies Mínimas com Curvatura Total Finita</b>	<b>62</b>

<b>6 Superfícies mínimas capilares à bola euclidiana tridimensional.</b>	<b>69</b>
6.1 O catenoide crítico . . . . .	73
6.2 Uma caracterização do plano e do catenoide como superfícies mínimas . . .	74
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>78</b>

# Introdução

A teoria de imersões de curvatura média constante (CMC) é um ramo da Geometria Diferencial que tem chamado cada vez mais a atenção de pesquisadores, haja vista sua íntima relação com fenômenos naturais que podem ser modelados por esse tipo de imersão. Em particular, podemos citar o modelo de imersões capilares que, como veremos, é caracterizado por ser ponto crítico do funcional energia (ver seção 3.3) e veremos que imersões capilares satisfazem a duas propriedades importantes: (a) possuem curvatura média constante e (b) é tal que seu bordo intersecta o bordo do domínio a um ângulo constante. Um caso especial de imersão CMC ocorre quando a função curvatura média é zero, onde, nesse caso, diremos que se trata de uma *imersão mínima*.

No caso de imersões mínimas de variedades Riemannianas de dimensão dois em  $\mathbb{R}^3$ , temos como importantes exemplos o plano e o catenoide. Por exemplo, as superfícies mínimas totalmente umbílicas são pedaços (subconjuntos abertos) de planos, já as superfícies mínimas de rotação são pedaços de catenoides. Além dessas propriedades, muitas outras caracterizações do plano e do catenoide como superfícies mínimas vem sendo estudadas ao longo dos últimos anos. Por exemplo, o catenoide é o único anel mínimo mergulhado, completo e de curvatura total finita em  $\mathbb{R}^3$  (veja o corolário 5.0.8). Outra caracterização do catenoide é dada pelo fato de ser o único anel mínimo completo em  $\mathbb{R}^3$  tal que a interseção com qualquer  $z$ -plano é uma curva de Jordan (veja [1]), o plano é o único gráfico inteiro em  $\mathbb{R}^3$  (Veja [2]).

Com respeito às superfícies mínimas capilares, um caso bem estudado é o em relação à bola euclidiana tridimensional  $B^3$ . É bem conhecido que uma superfície mínima capilar a  $B^3$  com a topologia de um disco é necessariamente um disco plano (veja o teorema 6.0.3).

No caso em que a superfície possui a topologia de uma anel. Fraser e Li [3] conjecturaram que um anel mínimo de fronteira livre em  $B^3$  é necessariamente o catenoide crítico (veja a seção 6.1). Para muitos resultados particulares acerca dessa conjectura a resposta é verdadeira. Por exemplo, Fraser e Schoem [4] mostraram que sob a hipótese adicional de que as funções coordenadas do vetor posição são as primeiras autofunções de Steklov, a superfície é congruente ao catenoide crítico. McGrath [5] mostrou que se a superfície for invariante via reflexões em relação a três planos ortogonais  $\Pi_i, i = 1; 2; 3$ , então a superfície é congruente ao catenoide crítico. Recentemente, soluções para esse problema foram publicadas (veja [6] e [7]).

Neste trabalho, buscaremos caracterizar o plano e o catenoide como superfícies capilares. Veremos dois resultados: (a) superfícies mínimas capilares à esfera euclidiana com a topologia de um disco é um disco plano e (b) a partir dos trabalhos de E. Yeon [8], que uma superfície mínima capilar a  $\mathbb{R}^3 \setminus B^3$  é um pedaço de plano ou um pedaço de um catenoide.

Este trabalho está organizado em seis capítulos. O capítulo 1 abordará noções e resultados básicos de Variedades Diferenciáveis e Geometria Riemanniana. No capítulo 2 serão apresentadas noções e resultados básicos de funções harmônicas e análise complexa. No capítulo 3 fazemos estudos sobre cálculos variacionais, onde vemos, por exemplo, que hipersuperfícies mínimas minimizam áreas para dois tipos de variações: as variações normais e as variações que mantêm o bordo fixo. Ainda nesse capítulo, definimos o funcional energia e obtemos a fórmula para a primeira variação da energia, a partir da qual definimos o conceito de *imersão capilar*. No capítulo 4 fazemos estudos a respeito das superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^3$  e vemos que existem fortes relações entre as superfícies mínimas e as funções holomorfas, o que nos permite conceituar a *representação de Enneper-Weierstrass* de uma superfície mínima. O capítulo 5 aborda alguns resultados de um subgrupo do conjunto das superfícies mínimas, que é o subconjunto das superfícies mínimas completas e com curvatura total finita. No capítulo 6 vemos alguns resultados envolvendo superfícies capilares mínimas na bola tridimensional.

# Capítulo 1

## Conceitos e Resultados Básicos

### 1.1 Variedades Diferenciáveis

Nesta seção, veremos alguns dos resultados de variedades diferenciáveis. Para maiores detalhes acerca dos resultados aqui apresentados, veja [9].

**Definição 1.1.1.** *Uma variedade diferenciável de dimensão  $n$  é um espaço topológico de Hausdorff e base enumerável  $M$  e um conjunto de homeomorfismos  $x_\alpha : U_\alpha \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $U_\alpha$  aberto em  $M$ , tais que:*

- (i)  $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$ ;
- (ii) Para quaisquer  $\alpha$  e  $\beta$  tais que  $U_\alpha \cap U_\beta = V \neq \emptyset$ , tem-se que  $x_\alpha \circ x_\beta^{-1} : x_\beta(V) \rightarrow x_\alpha(V)$  é um difeomorfismo;
- (iii) A família  $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$  é máxima relativamente às condições (i) e (ii).

Cada par  $(U_\alpha, x_\alpha)$  é dito ser uma *carta local* de  $M$ ; um conjunto de cartas locais que cumprem as condições (i) e (ii) é chamado *atlas* em  $M$ . A classe de diferenciabilidade de uma variedade diferenciável  $M$  é definida como sendo a classe dos difeomorfismos definidos na condição (ii). Daqui em diante, a menos de especificação em contrário, todas as variedades diferenciáveis em questão serão de classe  $C^\infty$ . Às vezes, indicaremos também

a dimensão de  $M$  com a notação de superíndice, isto é,  $M^n$  designa uma variedade  $M$  de dimensão  $n$ .

**Definição 1.1.2.** *Sejam  $M$  e  $N$  variedades diferenciáveis. Uma aplicação  $f : M^m \rightarrow N^n$  é dita ser **diferenciável em**  $p \in M$  se dadas cartas locais  $x_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $y_\beta : V_\beta \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $p \in U_\alpha \subset M$  e  $f(p) \in V_\beta \subset N$ , tivermos que a aplicação*

$$y_\beta \circ f \circ x_\alpha^{-1} : x_\alpha(U) \rightarrow y_\beta(V)$$

*é diferenciável, em que  $U \subset U_\alpha$  e  $V \subset V_\beta$ ,  $p \in U$ ,  $f(p) \in V$ , são abertos escolhidos de modo a fazer a aplicação acima ficar bem definida. Uma aplicação  $f : M^m \rightarrow N^n$  é dita ser **diferenciável** se é diferenciável em todos os pontos de  $M$ . Por fim, um **difeomorfismo** é uma aplicação  $f : M^n \rightarrow N^n$ , diferenciável, tal que  $f^{-1} : N \rightarrow M$  existe e também é diferenciável.*

**Definição 1.1.3.** *Uma aplicação diferenciável  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  é chamada de uma **curva** (diferenciável) em  $M$ . Dado  $p \in M$ , considere  $\mathcal{C}_p$  o conjunto de todas as curvas  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  com  $\alpha(0) = p$ . Dados  $\alpha$  e  $\beta \in \mathcal{C}_p$ , vamos definir, em  $\mathcal{C}$ , a relação de equivalência  $\sim$ , em que  $\alpha \sim \beta$  se, para toda carta local  $x$  definida em uma vizinhança de  $p$ , tem-se que as curvas  $x \circ \alpha, x \circ \beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno, são tais que  $(x \circ \alpha)'(0) = (x \circ \beta)'(0)$ . O **espaço tangente a  $p$  em  $M$**  é definido como sendo o conjunto:*

$$T_p M = \{[\alpha], \alpha \in \mathcal{C}_p\},$$

onde  $[\alpha]$  representa a classe de  $\alpha$  relativamente à relação de equivalência definida acima.

**Teorema 1.1.4.** *Seja  $M^n$  uma variedade diferenciável, então  $T_p M$  é um espaço vetorial real de dimensão  $n$ . Dada uma carta  $x$  definida em uma vizinhança  $U$  de  $p$  em  $M$ , uma base para  $T_p M$  (também chamada de **base coordenada relativamente à carta  $x$** ) é o conjunto  $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ , definidos por  $\frac{\partial}{\partial x_i} = [\alpha_i]$ , onde  $\alpha_i$  é tal que  $(x \circ \alpha_i)'(0) = e_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , onde  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^n$ .*

**Proposição 1.1.5.** *Sejam  $M^m$  e  $N^n$  variedades diferenciáveis e seja  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação diferenciável. Para cada  $p \in M$  e  $v \in T_pM$ , escolha uma curva  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  com  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha'(0) = v$ . Seja  $\beta = f \circ \alpha$ , a aplicação  $df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$  definida por  $df_p(v) = \beta'(0)$  é uma aplicação linear.*

**Definição 1.1.6.** *A aplicação  $df_p$  definida na proposição 1.1.5 é chamada de **diferencial da  $f$  em  $p$** .*

**Definição 1.1.7.** *Dada uma aplicação  $f : M \rightarrow N$ . Dizemos que  $f$  é uma **imersão** se  $df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$  é injetiva em todo ponto  $p \in M$ . Se  $df_p : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$  é sobrejetiva  $\forall p \in M$ , dizemos que  $f$  é uma **submersão**. Se  $f$  é uma imersão e  $f$  define um homeomorfismo entre  $M$  e  $f(M)$ , dizemos que  $f$  é um **mergulho**.*

Quando existe uma imersão  $f : M \rightarrow N$ , dizemos que  $M$  é uma subvariedade imersa em  $N$ . Quando  $f$  é um mergulho, dizemos que  $M$  é uma subvariedade mergulhada em  $M$ .

**Definição 1.1.8.** *Um **atlas orientado** em uma variedade diferenciável  $M^n$  é um atlas  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Gamma}$  tal que para quaisquer duas cartas  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  e  $(U_\beta, \varphi_\beta)$  tais que  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , tem-se que  $\det(J(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})_q) > 0 \forall q \in \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ .*

Nem toda variedade Riemanniana  $M$  admite um atlas orientado. Quando uma variedade Riemanniana  $M$  admite um atlas orientado, dizemos que  $M$  é **orientável**.

**Definição 1.1.9.** *Um **campo vetorial** em  $M^n$  é uma correspondência  $X$  que associa a cada ponto  $p \in M$  um vetor  $v = X(p) \in T_pM$  de forma que, para uma dada carta local  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  e seus referenciais coordenados  $\{\frac{\partial}{\partial x_i} : p \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i}(p)\}_{i=1}^n$  e escrevendo em  $U$   $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , tem-se que as aplicações  $X_i : U \rightarrow \mathbb{R}$  são diferenciáveis.*

**Proposição 1.1.10.** *Existe um isomorfismo entre o conjunto dos campos vetoriais em  $M$  e o conjunto das aplicações  $S : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  que satisfazem a  $S(fg) = fS(g) + gS(f)$ , conhecida como relação de Leibniz.*

Assim, podemos identificar cada campo vetorial  $X$  de  $M$  a uma aplicação  $C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ ,  $f \mapsto X(f)$ .

**Definição 1.1.11.** *Dados dois campos vetoriais  $X$  e  $Y$  em  $M$ . Definimos o **colchete de Lie** entre  $X$  e  $Y$ , denotado por  $[X, Y]$ , como sendo o campo vetorial definido por:*

$$[X, Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

## 1.2 Métricas Riemannianas

A partir dessa seção, veremos alguns dos resultados básicos de Geometria Riemanniana. Para mais detalhes sobre os resultados, veja [10].

**Definição 1.2.1.** *Uma **Métrica Riemanniana** em uma variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência  $g$  que associa a cada ponto  $p$  de  $M$  uma aplicação bilinear, simétrica e positiva-definida  $g_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$  (isto é, um produto interno em  $T_pM$ ), de modo que para todo ponto  $p \in M$  e para uma dada carta local  $x$  definida em uma vizinhança  $U$  de  $p$ , tem-se que as aplicações  $g_{ij}(p)$ ,  $1 \leq i, j \leq n$  definidas por  $g_{ij}(p) = g_p(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) : U \rightarrow \mathbb{R}$  sejam diferenciáveis.*

É usual usarmos a notação  $\langle u, v \rangle_p$  para indicar  $g_p(u, v)$ . As funções  $g_{ij}$  definidas acima são chamadas de *Expressão da métrica Riemanniana na carta local  $x$* . Chamaremos de *variedade Riemanniana* às variedades diferenciáveis munidas de uma métrica Riemanniana.



**Teorema 1.2.2.** *Toda variedade diferenciável pode ser munida de uma métrica Riemanniana.*

**Definição 1.2.3.** *Um difeomorfismo  $f : M^n \rightarrow N^n$  é dito ser uma **isometria** se  $\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}$  para todo  $p \in M$  e  $u, v \in T_p M$ .*

**Definição 1.2.4.** *Uma aplicação diferenciável  $f : M^n \rightarrow N^n$  é uma **isometria local** se, para todo  $p \in M$ , existe uma vizinhança  $U \subset M$  de  $p$  tal que  $f|_U : U \rightarrow f(U)$  é uma isometria.*

**Definição 1.2.5.** *Seja  $f : M^m \rightarrow N^n$  uma imersão de uma variedade diferenciável  $M$  em uma variedade Riemanniana  $N$ . A **métrica induzida pela aplicação  $f$**  ou **métrica pull-back da  $f$**  é a métrica Riemanniana  $g$  de  $M$  definida por*

$$g_p(u, v) = \langle df_p \cdot u, df_p \cdot v \rangle_{f(p)},$$

onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é a métrica Riemanniana de  $N$ .

### 1.3 Conexões afins

Indicaremos por  $\mathfrak{X}(M)$  o conjunto dos campos vetoriais de classe  $C^\infty$  em  $M$ .

**Definição 1.3.1.** *Uma conexão afim  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M$  é uma aplicação:*

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

que indicamos por  $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$  que satisfaz às seguintes propriedades para cada  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  e  $f, g \in C^\infty(M)$ :

- (i)  $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$ ;
- (ii)  $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ ;
- (iii)  $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$ .

**Proposição 1.3.2.** *Seja  $M^n$  uma variedade diferenciável e  $\nabla$  uma conexão afim em  $M$ . Então existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial  $V$  ao longo de uma curva diferenciável  $c : I \rightarrow M$  um outro campo vetorial  $\frac{DV}{dt}$  ao longo de  $c$ , denominado **derivada covariante de  $V$  ao longo de  $c$** , tal que, para quaisquer campos vetoriais  $V$  e  $W$  ao longo de  $c$  e qualquer aplicação diferenciável  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , tem-se:*

$$(i) \frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt};$$

$$(ii) \frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt};$$

$$(iii) \text{ Se } V \text{ é a restrição à curva de um campo vetorial } X \text{ em } M, \text{ então } \frac{DV}{dt} = \nabla_{dc/dt}X.$$

**Definição 1.3.3.** *Seja  $M^n$  uma variedade Riemanniana com uma conexão afim  $\nabla$ . Dizemos que  $\nabla$  é **compatível com a métrica** se para todo par  $X, Y$  de campos vetoriais em  $M$  e  $c : I \rightarrow M$  curva diferenciável, tem-se:*

$$\frac{d}{dt}\langle X, Y \rangle = \left\langle \frac{DX}{dt}, Y \right\rangle + \left\langle X, \frac{DY}{dt} \right\rangle.$$

**Proposição 1.3.4.** *Uma conexão  $\nabla$  é compatível com a métrica se, e somente se, para quaisquer  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ , vale:*

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle X, \nabla_X Z \rangle.$$

**Definição 1.3.5.** *Uma conexão afim  $\nabla$  em uma variedade diferenciável  $M$  é dita ser **simétrica** quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

para todo  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Teorema 1.3.6** (Levi-Civita). *Dada uma variedade Riemanniana  $M^n$ , existe uma única conexão afim  $\nabla$  que é simétrica e compatível com a métrica Riemanniana.*

A conexão definida pelo teorema acima é denominada *conexão de Levi-Civita* ou *conexão Riemanniana* de  $M$ . Daqui em diante, toda conexão afim a ser considerada é a conexão de Levi-Civita da variedade Riemanniana.

**Lema 1.3.7** (de simetria). *Se  $M$  é uma variedade diferenciável com uma conexão simétrica e  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$  é uma parametrização de uma superfície, então:*

$$\frac{D}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s},$$

onde  $s$  e  $t$  são as funções coordenadas de  $\mathbb{R}^2$ .

**Definição 1.3.8.** *Uma curva parametrizada  $\gamma : I \rightarrow M$  é uma **geodésica em  $t_0$**  se  $\frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt} = 0$  no ponto  $t_0$ . Se  $\gamma$  é geodésica em  $t$  para todo  $t \in I$ , dizemos que  $\gamma$  é uma **geodésica**.*

**Proposição 1.3.9.** *Dado  $p \in M$ , existem aberto  $V \subset M$ , números  $\delta > 0$  e  $\varepsilon_1 > 0$  e uma aplicação  $C^\infty$*

$$\gamma : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \rightarrow M, \quad \mathcal{U} = \{(q, v); q \in V, v \in T_q M, |v| < \varepsilon_1\},$$

tais que a curva  $t \mapsto \gamma(t, q, v)$ ,  $t \in (-\delta, \delta)$  é a única geodésica de  $M$  que no instante  $t = 0$  passa por  $q$  com velocidade  $v$ , para cada  $q \in V$  e cada  $v \in T_q M$  com  $|v| < \varepsilon_1$ .

**Proposição 1.3.10.** *Dado um ponto  $p \in M$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $M$ , um número  $\varepsilon > 0$  e uma aplicação  $C^\infty$   $\gamma : (-2, 2) \times U \rightarrow M$ ,  $U = \{(q, v); q \in V, v \in T_q M, |v| < \varepsilon\}$  tal que  $t \mapsto \gamma(t, q, w)$ ,  $t \in (-2, 2)$  é a única geodésica de  $M$  que no instante  $t = 0$  passa por  $q$  com velocidade  $w$ , para cada  $q \in V$  e cada  $w \in T_q M$ , com  $|w| < \varepsilon$ .*

**Lema 1.3.11** (Homogeneidade de uma geodésica). *Se a geodésica  $\gamma(t, q, v)$  está definida no intervalo  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ , então a geodésica  $\gamma(t, q, av)$ ,  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , está definida no intervalo  $(-\frac{\varepsilon}{a}, \frac{\varepsilon}{a})$  e  $\gamma(t, q, av) = \gamma(at, q, v)$ .*

As proposições anteriores nos garante a existência e a unicidade de geodésica passando por um ponto dado com um vetor tangente dado.

**Definição 1.3.12.** Definimos a **aplicação exponencial**  $\exp : \mathcal{U} \rightarrow M$ ,  $\mathcal{U}$  como na proposição 1.3.10, a aplicação dada por

$$\exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma\left(|v|, q, \frac{v}{|v|}\right), \quad (q, v) \in \mathcal{U}.$$

## 1.4 Curvaturas

**Definição 1.4.1.** A **curvatura**  $R$  de uma variedade Riemanniana  $M$  é a aplicação  $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  definida por

$$R(X, Y, Z) = R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

**Proposição 1.4.2.** A curvatura  $R$  é uma aplicação  $C^\infty(M)$ -trilinear.

Dada uma variedade Riemanniana  $M$ , seja  $(X, Y, Z, T) := \langle R(X, Y)Z, T \rangle$ .

**Proposição 1.4.3.** (i)  $(X, Y, Z, T) + (Y, Z, X, T) + (Z, X, Y, T) = 0$ ;

(ii)  $(X, Y, Z, T) = -(Y, X, Z, T)$ ;

(iii)  $(X, Y, Z, T) = -(X, Y, T, Z)$ ;

(iv)  $(X, Y, Z, T) = (Z, T, X, Y)$ .

**Proposição 1.4.4.** Dado  $p \in M$ , seja  $\sigma \subset T_p M$  um subespaço de dimensão dois e  $x, y \in \sigma$  dois vetores linearmente independentes. Então:

$$K(x, y) := \frac{(x, y, y, x)}{|x|^2 |y|^2 - \langle x, y \rangle^2}$$

não depende da escolha dos vetores LI's  $x, y \in \sigma$ .

**Definição 1.4.5.** Dado  $p \in M$  e um subespaço bidimensional  $\sigma \in T_pM$ , o número real  $K(x, y) = K(\sigma)$ , onde  $\{x, y\}$  é uma base qualquer de  $\sigma$ , é chamado de **curvatura seccional de  $\sigma$  em  $p$** .

**Definição 1.4.6.** Seja  $x = z_n$  um vetor unitário em  $T_pM$ . Seja  $\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$  uma base ortonormal do hiperplano de  $T_pM$  ortogonal a  $x$ . A **curvatura de Ricci na direção  $x$**  é definida como sendo o número real

$$Ric_p(x) = \sum_{i=1}^{n-1} (x, z_i, z_i, x).$$

É fato que a curvatura de Ricci está bem definida, no sentido de que não depende da base  $\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$  considerada para o hiperplano de  $T_pM$  ortogonal a  $x$  (veja [10]).

**Definição 1.4.7.** A **curvatura escalar em  $p$**  é definida como sendo

$$K(p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Ric_p(z_i),$$

onde  $\{z_1, \dots, z_n\}$  são como na definição 1.4.6.

## 1.5 Imersões Isométricas

Vamos considerar a seguinte situação: seja  $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+k}$  uma imersão de uma variedade diferenciável  $M$  em uma variedade Riemanniana  $\overline{M}$ . A métrica Riemanniana de  $\overline{M}$  induz de maneira natural uma métrica em  $M$  (através do pull-back).

Para cada  $p \in M$ , um vetor  $v \in T_p\overline{M}$  pode ser decomposto em vetores  $v^\top + v^\perp$ ,  $v^\top \in T_pM$ ,  $v^\perp \in T_pM^\perp$ .

Temos que, se a conexão Riemanniana de  $\overline{M}$  é  $\overline{\nabla}$ , então a conexão Riemanniana de  $M$  será definida por  $\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y})^\top$ , onde  $\overline{X}$  e  $\overline{Y}$  são extensões locais dos campos  $X$  e  $Y$ , respectivamente, cuja existência está ligada ao fato de que toda imersão é localmente um mergulho (ver [10]).

**Proposição 1.5.1.** *Se  $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ ,  $U \subset M$ , a aplicação  $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \rightarrow \mathfrak{X}(U)^\perp$  dada por*

$$B(X, Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}} \overline{Y} - \nabla_X Y$$

*é bilinear e simétrica.*

Seja  $p \in M$  e  $\eta \in (T_pM)^\perp$ . A aplicação  $H_\eta : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle$$

é, pela proposição 1.5.1, uma forma bilinear e simétrica.

**Definição 1.5.2.** *A forma quadrática  $II_\eta$  definida em  $T_pM$  por*

$$II_\eta(x) = H_\eta(x, x)$$

*é chamada de **segunda forma fundamental de  $f$  em  $p$  segundo o vetor normal  $\eta$ .***

Temos também que, como  $H_\eta$  é bilinear e simétrica, existe uma aplicação linear auto-adjunta  $S_\eta : T_pM \rightarrow T_pM$  dada por

$$\langle S_\eta(x), y \rangle = H_\eta(x, y) = \langle B(x, y), \eta \rangle$$

**Proposição 1.5.3.** *Seja  $p \in M$ ,  $x \in T_pM$  e  $\eta \in (T_pM)^\perp$ . Seja  $N$  uma extensão local de  $\eta$  normal a um subconjunto aberto de  $M$ , então*

$$S_\eta(x) = -(\bar{\nabla}_x N)^\top.$$

**Teorema 1.5.4** (Gauss). *Sejam  $p \in M$  e  $x, y$  vetores ortonormais de  $T_pM$ . Então*

$$K(x, y) - \bar{K}(x, y) = \langle B(x, x), B(y, y) \rangle - |B(x, y)|^2.$$

## 1.6 Hipersuperfícies

Um caso especial de imersão isométrica ocorre quando tomamos uma imersão  $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$ . Nesse caso, o espaço ortogonal a  $T_pM$  possui dimensão um e a aplicação  $B$ , definida na seção anterior, se torna a aplicação bilinear e simétrica associada à segunda forma fundamental.

**Definição 1.6.1.** *Uma **hipersuperfície** de  $\bar{M}$  é uma subvariedade (imersa ou mergulhada)  $M$  de  $\bar{M}$  tal que  $\dim(\bar{M}) = \dim(M) + 1$ .*

A próxima proposição caracteriza a orientabilidade de uma hipersuperfície.

**Proposição 1.6.2.** *Seja  $\bar{M}^{n+1}$  uma variedade Riemanniana orientável, então uma hipersuperfície  $M^n$  de  $\bar{M}$  será orientável se, e somente se, existir um campo vetorial diferenciável de vetores normais e unitários definido em todo  $M$ .*

Uma demonstração para esse resultado pode ser obtido a partir de uma simples adaptação dos resultados da seção 3.2 de [11].

Seja  $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$  uma imersão isométrica e  $\eta : p \in M \mapsto \eta(p) \in (T_p M)^\perp$  um campo normal, unitário e diferenciável em  $M$ . Como a aplicação  $S_\eta(p) : T_p M \rightarrow T_p M$  é auto-adjunta,  $S_\eta(p)$  admite uma base  $\{e_1(p), e_2(p), \dots, e_n(p)\}$  de autovetores normais dois a dois e unitários. Vamos exigir que  $\{e_1(p), e_2(p), \dots, e_n(p), \eta(p)\}$  seja uma base ortonormal e positiva de  $T_p \overline{M}$  em todo ponto  $p \in M$ . Seja  $\{\lambda_1(p), \lambda_2(p), \dots, \lambda_n(p)\}$  o conjunto dos autovalores de  $S_\eta(p)$ , i.e., tais que  $S_\eta(p)e_i(p) = \lambda_i(p)e_i(p)$ . Nesse caso, denominamos os  $e_i(p)$ ,  $1 \leq i \leq n$  como vetores principais e os  $\lambda_i(p)$ ,  $1 \leq i \leq n$  como sendo as curvaturas principais de  $f$  em  $p$ .

**Definição 1.6.3.** *Dada uma imersão isométrica  $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ , a função curvatura média  $H$  de  $M$  é definida por:*

$$H = \frac{1}{n}(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) = \frac{1}{n} \text{tr}(S_\eta)$$

Dado um ponto  $p \in M \subset \overline{M}$  e uma carta  $\varphi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$  com  $q \in U$ , temos os campos  $\{\partial_i\}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , onde  $\partial_i|_q = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(q) \forall q \in U$ . Logo, no sistema de coordenadas locais  $\varphi$ , podemos considerar pontualmente em  $U$ , em relação à base coordenada  $\{\partial_i\}$ , as representações locais da métrica  $g$  como sendo a matriz  $g = (g_{ij})_{n \times n}$ , onde  $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$  e de  $S_\eta$  como sendo a matriz  $a = (a_{ij})_{n \times n}$ .

**Definição 1.6.4.** *Os coeficientes da segunda forma fundamental de uma imersão  $f : M \rightarrow \overline{M}$  são definidos pela matriz  $\pi$ , onde*

$$\pi_{ij} = \langle S_\eta \partial_i, \partial_j \rangle$$

Com o objetivo de encontrar a curvatura média em  $M$ , precisamos encontrar a matriz  $(a)_{ij}$  em termos dos coeficientes da métrica e da segunda forma fundamental de  $M$ . Usando a proposição 1.5.3 e o fato de  $S_\eta$  ser auto-adjunta, temos:



$$\bar{\nabla}_{\partial_i} \eta = -S_\eta \partial_i = -(a_{ij}) \partial_i = -\sum_{j=1}^n a_{ji} \partial_j.$$

Como  $\langle \partial_i, \eta \rangle \equiv 0$  em  $M$ , temos que  $\partial_j \langle \partial_i, \eta \rangle \equiv 0 \Rightarrow \langle \bar{\nabla}_{\partial_j} \partial_i, \eta \rangle + \langle \partial_i, \bar{\nabla}_{\partial_j} \eta \rangle = 0$   
 $\Rightarrow \pi_{ij} = -\langle \partial_i, \bar{\nabla}_{\partial_j} \eta \rangle = \langle \eta, \bar{\nabla}_{\partial_j} \partial_i \rangle$ , temos então:

$$\pi_{ik} = -\langle \bar{\nabla}_{\partial_i} \eta, \partial_k \rangle = \sum_{j=1}^n a_{ji} \langle \partial_j, \partial_k \rangle = \sum_{j=1}^n a_{ji} g_{jk} = (a^T g)_{ik}$$

Logo,  $\pi = a^T g \Rightarrow a^T = \pi g^{-1}$ .

Como  $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = \text{tr}(a)$ , temos que  $H = \frac{1}{n} \text{tr}(a) = \frac{1}{n} \text{tr}(a^T)$ , como  $a_{ii} = \sum_{k=1}^n \pi_{ik} g^{ki}$ ,  
 onde  $(g)^{ij} = (g^{-1})_{ij}$ . Conclui-se então que:

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i,k=1}^n \pi_{ik} g^{ki}.$$

## Capítulo 2

# Funções Harmônicas e Funções Complexas

Esse capítulo será voltado para alguns dos principais resultados a respeito das funções harmônicas, definidas a partir do operador de Laplace. Funções harmônicas, por motivos a serem vistos a seguir, são às vezes tratadas como o análogo real das funções complexamente diferenciáveis (também conhecidas como funções holomorfas). No capítulo 4 veremos que as funções harmônicas e as funções complexas exercem um papel importante no estudo das superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^3$ .

### 2.1 Funções Harmônicas

**Definição 2.1.1.** *O operador de Laplace, em coordenadas cartesianas  $\{(u, v)\}$ , de uma aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$  é definido como sendo o operador:*

$$\begin{aligned}\Delta : C^2(U) &\rightarrow C^0(U) \\ f &\mapsto f_{uu} + f_{vv}.\end{aligned}$$

Assim, o operador de Laplace é um operador linear entre espaços de funções. Usaremos a notação usual  $\Delta(f) = \Delta f$ .

**Definição 2.1.2.** *Uma função  $f \in C^2(U)$  é dito ser **harmônica** se  $f \in N(\Delta)$ , isto é, se  $\Delta f \equiv 0$ .*

As funções harmônicas gozam de propriedades interessantes. Algumas delas vão ser tratadas ao longo de todo o texto. Vamos iniciar com duas das mais importantes delas:

**Teorema 2.1.3** (Princípio do máximo e do mínimo). *Uma função harmônica não constante não possui um máximo ou um mínimo interior.*

Para uma demonstração, veja [12].

**Teorema 2.1.4** (princípio da Singularidade Removível). *Seja  $f : A(0, 0, 1) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < \|(u, v)\| < 1\} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função harmônica definida no "disco unitário furado". Se  $f$  é limitada, então  $0$  é uma singularidade removível da  $f$ , isto é,  $f$  possui uma extensão harmônica para o disco unitário.*

Para uma demonstração, veja [13], proposição 4.12.

## 2.2 Funções complexas

Assim como os números reais, os números complexos formam um corpo completo. Além disso, o conjunto dos números complexos (representado por  $\mathbb{C}$ ) formam de maneira natural um espaço vetorial real de dimensão 2 (e muitas vezes identificado com o próprio  $\mathbb{R}^2$ ) com base  $\{1, i\}$ , onde  $i^2 = -1$ . A partir de agora,  $z = u + iv$ , representará um número complexo. Para cada número complexo  $z = u + iv$  existe um número complexo a ele relacionado  $\bar{z} = u - iv$  chamado de **conjugado** de  $z$  (que representa uma outra maneira de mapear os números complexos a partir dos números reais).

Assim, temos  $u = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\bar{z}$  e  $v = \frac{1}{2i}z - \frac{1}{2i}\bar{z}$ , podendo assim definir os operadores:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v} i \right) \quad e \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} i \right),$$

de modo a termos  $\frac{\partial}{\partial z}(z) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\bar{z}) = 1$ . Temos assim:

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial(u - iv)}{\partial u} - \frac{1}{2} \frac{\partial(u - iv)}{\partial v} i = 0 \quad e \quad \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{\partial(u + iv)}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial(u + iv)}{\partial v} i = 0$$

Essas duas relações indicam que  $z$  e  $\bar{z}$  são independentes entre si, apesar de termos uma sensação inicial que um define o outro, mas isso ocorre porque não é possível definir  $\bar{z}$  somente a partir de  $z$  (é preciso recorrer às partes reais e imaginárias de  $z$ , ou seja, a como  $\mathbb{C}$  foi definido em termos de  $\mathbb{R}$ ).

Como  $u$  e  $v$  podem ser obtidos em termos de  $z$  e  $\bar{z}$ , temos, por exemplo, que qualquer função diferenciável  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  pode ser escrita em termos de  $z$  e  $\bar{z}$  e, com isso, faz sentido falarmos em derivadas parciais da  $f$  em relação a  $z$  e  $\bar{z}$  a partir dos operadores definidos acima. Podemos notar também que nem todas as funções diferenciáveis  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  pode ser escrita somente em termos de  $z$  ou somente em termos de  $\bar{z}$ , já que uma delas não pode ser obtida a partir da outra. Isso nos motiva a definir as funções desse tipo que dependem somente de uma delas.

**Definição 2.2.1.** *Uma aplicação diferenciável  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita ser holomorfa (respectivamente anti-holomorfa) se  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$  (respectivamente  $\frac{\partial f}{\partial z} \equiv 0$ ).*

Dada uma aplicação holomorfa  $f$ , como  $f$  não depende de  $\bar{z}$ ,  $f$  pode ser definida somente em termos de  $z$ . A proposição seguinte fará fazer sentido, para uma aplicação holomorfa  $f$ , usarmos o termo "derivada complexa" de  $f$  e olharmos  $f$  como uma aplicação  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  complexamente diferenciável.

**Proposição 2.2.2.** *Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação de classe  $C^1$ . Então, identificando  $\mathbb{R}^2$  com  $\mathbb{C}$  a partir do sistema de coordenadas  $z$  (i.e.,  $(u, v) \sim u + iv$ ) e olhando  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , então  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$  ( $z_0 = u_0 + iv_0$ ) se, e somente se, o limite  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  existe como um número complexo.*

**Demonstração:** Podemos escrever  $f(z) = f_1(z) + if_2(z)$ , onde  $f_1$  e  $f_2$  são funções reais.

Suponha que  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0$ , temos que:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} i \right) \Big|_{z=z_0} = 0 \Rightarrow \left( \frac{\partial f_1}{\partial u} + \frac{\partial f_2}{\partial u} i + \frac{\partial f_1}{\partial v} i - \frac{\partial f_2}{\partial v} \right) \Big|_{z=z_0} = 0$$

Logo,  $\frac{\partial f_1}{\partial u}(z_0) = \frac{\partial f_2}{\partial v}(z_0)$  e  $\frac{\partial f_2}{\partial u}(z_0) = -\frac{\partial f_1}{\partial v}(z_0)$ .

Como  $f$  é de classe  $C^1$ , existem funções  $R_1, R_2, R_3$  e  $R_4$  tais que:

$$\begin{aligned} f_1(z) &= f_1(z_0) + \frac{\partial f_1}{\partial u}(z_0)(u - u_0) + \frac{\partial f_1}{\partial v}(z_0)(v - v_0) + R_1(z); \\ f_2(z) &= f_2(z_0) + \frac{\partial f_2}{\partial u}(z_0)(u - u_0) + \frac{\partial f_2}{\partial v}(z_0)(v - v_0) + R_2(z). \end{aligned}$$

Onde:

$$\lim_{u \rightarrow u_0} \frac{R_1(z)}{u - u_0} = \lim_{v \rightarrow v_0} \frac{R_1(z)}{v - v_0} = \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{R_2(z)}{u - u_0} = \lim_{v \rightarrow v_0} \frac{R_2(z)}{v - v_0} = 0.$$

Logo:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f_1(z) - f_1(z_0) + i(f_2(z) - f_2(z_0))}{z - z_0} = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ \frac{\frac{\partial f_1}{\partial u}(z_0)(u - u_0) + \frac{\partial f_1}{\partial v}(z_0)(v - v_0) + R_1(z) + i[\frac{\partial f_2}{\partial u}(z_0)(u - u_0) + \frac{\partial f_2}{\partial v}(z_0)(v - v_0) + R_2(z)]}{(u - u_0) + i(v - v_0)} \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{\partial f_1}{\partial u}(z_0)[(u - u_0) + i(v - v_0)] + \frac{\partial f_1}{\partial v}(z_0)[(v - v_0) - i(u - u_0)]}{(u - u_0) + i(v - v_0)} = \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial u}(z_0) - \frac{\partial f_1}{\partial v}(z_0)i. \end{aligned}$$

Isso conclui a ida. Para a recíproca, como  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  existe, podemos tomar esse limite nas direções dos eixos  $u$  e  $v$ , e teremos:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{f(u + iv) - f(u_0 + iv)}{u - u_0} = \lim_{v \rightarrow v_0} \frac{f(u + iv) - f(u + iv_0)}{i(v - v_0)}.$$

Logo:

$$\begin{aligned} & \lim_{u \rightarrow u_0} \frac{f_1(u + iv_0) - f_1(u_0 + iv_0) + i(f_2(u + iv_0) - f_2(u_0 + iv_0))}{u - u_0} = \\ & = \lim_{v \rightarrow v_0} \frac{f_1(u_0 + iv) - f_1(u_0 + iv_0) + i(f_2(u_0 + iv) - f_2(u_0 + iv_0))}{i(v - v_0)} \\ & \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial u}(z_0) + i \frac{\partial f_2}{\partial u}(z_0) = -i \frac{\partial f_1}{\partial v}(z_0) + \frac{\partial f_2}{\partial v}(z_0) \\ & \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial u}(z_0) + i \frac{\partial f_2}{\partial u}(z_0) + i \frac{\partial f_1}{\partial v}(z_0) - \frac{\partial f_2}{\partial v}(z_0) = 0 \\ & \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial u}(z_0) + i \frac{\partial f}{\partial v} = 0 \\ & \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = 0. \end{aligned}$$

Isso conclui a demonstração.

As condições  $\frac{\partial f_1}{\partial u}(z_0) = \frac{\partial f_2}{\partial v}(z_0)$  e  $\frac{\partial f_2}{\partial u}(z_0) = -\frac{\partial f_1}{\partial v}(z_0)$  em todos os pontos de  $U$  são chamadas de **condições de Cauchy-Riemann**. Com esse resultado acima, temos que uma aplicação de classe  $C^1$   $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  é holomorfa (ou complexamente diferenciável em  $U$ ) se, e somente se, satisfaz às condições de Cauchy-Riemann.

**Definição 2.2.3.** Uma função complexa  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  é dito ser **analítica** em  $z_0 \in U$  se existir  $r > 0$  e números complexos  $\alpha_i, 0 \leq i < \infty$  tal que,  $\forall z \in D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < r\} \subset U$ , tem-se  $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (z - z_0)^i$ . Uma função é dito ser **analítica** se for analítica em todos os pontos de  $U$ .

Agora, um resultado que caracteriza uma função complexamente diferenciável.

**Teorema 2.2.4.** Toda função holomorfa é analítica.

Assim, ao contrário das funções reais, uma função complexa diferenciável pode sempre ser escrita localmente como uma série de potências (em particular, a existência da derivada de primeira ordem garante a existência da derivada de todas as ordens).

Com isso, pelas condições de Cauchy-Riemann e pelo fato de funções holomorfas serem de classe  $C^\infty$ , segue que  $\frac{\partial^2 f_1}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 f_2}{\partial v \partial u} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial v^2}$  e  $\frac{\partial^2 f_2}{\partial u^2} = -\frac{\partial^2 f_1}{\partial v \partial u} = -\frac{\partial^2 f_2}{\partial v^2}$ . Logo,  $\Delta f_1 = \Delta f_2 = 0$ . Chegando à seguinte conclusão:

**Teorema 2.2.5.** *As funções parte real e parte imaginária de uma função holomorfa são funções harmônicas.*

**Definição 2.2.6.** *Uma função holomorfa  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é chamada **função inteira**.*

**Teorema 2.2.7** (Picard). *A imagem de uma função inteira não constante é todo o conjunto  $\mathbb{C}$ , com a possível exceção de um ponto.*

**Teorema 2.2.8** (Rouché). *Sejam  $f$  e  $g$  duas funções holomorfas definidas em um aberto  $U$  que contém um domínio fechado  $K$ . Se, em  $\partial K$ ,  $|g(z)| < |f(z)|$  então  $f$  e  $f+g$  possuem a mesma quantidade de zeros no interior de  $K$ .*

Para uma demonstração, veja [14].

## 2.3 A esfera de Riemann

Nesta seção vamos introduzir a noção de aplicações holomorfas entre superfícies com parametrizações complexas (mais especificamente, entre abertos do plano  $\mathbb{C}$  e abertos

da esfera  $\mathbb{S}^2$ ). Antes de tudo, vamos introduzir o conceito de singularidade de funções holomorfas:

**Definição 2.3.1.** *Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  uma função holomorfa. Suponha que exista  $z_0 \in \mathbb{C}$  tal que, para  $r$  suficientemente pequeno,  $A(z_0, 0, r) \subset U$  e  $f$  não está definida em  $z_0$ . Nessas condições,  $z_0$  é dito ser uma **singularidade** de  $f$ .*

Assim, podemos classificar as singularidades:

**Definição 2.3.2.** *Uma singularidade  $z_0$  de uma função holomorfa  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  é dito ser uma **singularidade removível** se existir uma função holomorfa  $F : U \cup \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $f(z) = F(z) \forall z \in U \setminus \{z_0\}$ .*

**Definição 2.3.3.** *Uma singularidade  $z_0$  de uma função holomorfa  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  é dito ser um **pólo** da  $f$  se a aplicação  $F$  definida por  $F(z) = (z - z_0)^m f(z)$  possui uma singularidade removível em  $z_0$  para algum  $m \in \mathbb{N}$ . O menor número natural  $m$  com essa propriedade é chamado de **ordem do pólo da  $f$  em  $z_0$** .*

**Definição 2.3.4.** *Uma singularidade  $z_0$  de uma função holomorfa  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  é dito ser uma **singularidade essencial** da  $f$  se  $z_0$  não for uma singularidade removível, nem um pólo da  $f$ .*

**Exemplo 2.3.5.** *A aplicação definida por  $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ , onde  $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$  possui uma singularidade removível em  $z = 0$ , onde podemos estender a  $f$  para a  $F$  definindo  $F(0) = 1$ .*

**Exemplo 2.3.6.** *A aplicação  $f$  definida por  $f(z) = \frac{1}{(z-1)^5}$  possui um pólo de ordem 5 em  $z = 1$ .*



**Exemplo 2.3.7.** A aplicação  $f$  definida por  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$  possui uma singularidade essencial em  $z = 0$ .

Um resultado muito importante envolvendo singularidades essenciais é o teorema seguinte:

**Teorema 2.3.8** (Picard). *Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  uma função holomorfa com singularidade essencial em  $z_0$ . Então para qualquer vizinhança  $V$  de  $z_0$  em  $\mathbb{C}$ ,  $f$  assume cada valor  $z \in \mathbb{C}$  infinitas vezes em  $V$ , com a possível exceção de um ponto.*

Temos que, se  $z_0$  é um pólo de uma função holomorfa  $f$ , então  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ , isso seria uma motivação para definir um "ponto no infinito"  $\infty$ , assim, definindo o conjunto  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Além disso, colocamos, nesse conjunto, uma topologia da seguinte forma:  $U$  é um aberto de  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  se satisfaz a uma das seguintes condições:

- (i)  $U$  é aberto em  $\mathbb{C}$ ;
- (ii)  $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus U$  é um subconjunto compacto de  $\mathbb{C}$ .

Também conhecida como a compactificação de Alexandrov de  $\mathbb{C}$ . Não é difícil ver que, nessas condições,  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  se torna um conjunto compacto homeomorfo à esfera  $\mathbb{S}^2$ .

Além disso, podemos estender as operações de adição e multiplicação dos números complexos para  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , as seguintes propriedades, por conveniência, vamos fazer valer para o elemento  $\infty$ :

- (i)  $z \pm \infty = \infty \quad \forall z \in \mathbb{C}$ ;
- (ii)  $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty \quad \forall z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus \{0\}$ ;
- (iii)  $\frac{z}{\infty} = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$  e  $\frac{z}{0} = \infty \quad \forall z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus \{0\}$ ;

sendo que não fica bem definido os valores de  $\infty \pm \infty$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $0 \cdot \infty$  e  $\frac{0}{0}$ .

Vamos então definir, em  $\mathbb{S}^2$ , duas cartas via o que a gente chama de **projeção estereográfica**. Defina então o homeomorfismo:

$$\begin{aligned} \varphi_n^{-1} : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \\ z = u + iv &\mapsto \left( \frac{2u}{|z|^2 + 1}, \frac{2v}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

Temos que  $\varphi_n$  define um homeomorfismo entre  $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$  e  $\mathbb{C}$ . Do mesmo modo, defina:

$$\begin{aligned} \varphi_s^{-1} : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, -1)\} \\ z = u + iv &\mapsto \left( \frac{2u}{|z|^2 + 1}, -\frac{2v}{|z|^2 + 1}, -\frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

Temos também que  $\varphi_n : (x, y, w) \mapsto \frac{x}{1-w} + i\frac{y}{1+w}$  e  $\varphi_s : (x, y, w) \mapsto \frac{x}{1+w} - i\frac{y}{1-w}$ , donde  $\varphi_n \circ \varphi_s^{-1}(z) = \varphi_n\left(\frac{2u}{|z|^2+1}, -\frac{2v}{|z|^2+1}, -\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) = \frac{2u}{2|z|^2} - i\frac{2v}{2|z|^2} = \frac{1}{z}$ , do mesmo modo,  $\varphi_s \circ \varphi_n^{-1}(z) = \frac{1}{z}$ , ambas holomorfas no plano furado  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Com isso, podemos dizer que  $\{\varphi_n, \varphi_s\}$  seria um **atlas holomorfo** de  $\mathbb{S}^2$ . À esfera  $\mathbb{S}^2$  com um atlas holomorfo maximal que contém  $\{\varphi_n, \varphi_s\}$  chamamos de **Esfera de Riemann**. Sendo assim, a esfera de Riemann se torna uma variedade complexa.

Assim como para variedades diferenciáveis reais, o conceito de aplicação diferenciável (ou equivalentemente, holomorfa ou analítica) entre variedades complexas existe e é definido como para o caso real (veja a definição 1.1.2). Assim, temos bem definido o conceito de aplicação holomorfa entre abertos da esfera de Riemann.

**Observação 2.3.9.** *Segue que uma aplicação meromorfa  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^2$  se torna uma aplicação holomorfa na esfera de Riemann. Além disso, uma aplicação  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S}^2$  será uma aplicação holomorfa na esfera de Riemann se ocorrer uma das duas situações:*

- (i)  $f$  é diferenciável em  $z \forall z \in U \cap \mathbb{C}$ ;
- (ii) para  $z = \infty$ ,  $f$  será diferenciável em  $z$  se  $f\left(\frac{1}{z}\right)$  for diferenciável em 0.

## Capítulo 3

# Variações da área, do volume e da energia

Dada uma hipersuperfície imersa isometricamente  $M^n \subset \overline{M}^{n+1}$ . No que segue, vamos considerar que a métrica de  $M$  determina uma forma de "área" e a de  $\overline{M}$  como sendo uma forma de "volume". O nosso problema nesse capítulo é encontrar as hipersuperfícies que minimizam a área, o volume e a energia, sob certas condições, para qualquer variação que tomarmos dela (a ser definida a seguir).

### 3.1 Fórmula da primeira variação da área

**Definição 3.1.1.** *Dada uma hipersuperfície  $M \subset \overline{M}$  e  $K \subset M$  um subconjunto compacto homeomorfo a uma bola Euclidiana fechada  $n$ -dimensional. Uma **variação** em  $K$  é uma aplicação  $h : (-\varepsilon, \varepsilon) \times K \rightarrow \overline{M}$ , diferenciável, tal que  $h_t = h(t, \cdot)$  é uma hipersuperfície compacta e com bordo para todo  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  e  $h_0 = id$ .*

Assim, para uma dada variação  $h$ , podemos definir uma aplicação  $A$  que fornece a área da variação  $h$  de  $K$  no instante de tempo  $t$ , isto é:

$$A : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$$

$t \mapsto \text{área de } h_t(K).$

Assim, como  $A$  é uma função real, podemos pensar que, se  $0$  é ponto crítico de  $A$  para qualquer  $h$  considerada, então  $K$  seria um "ponto crítico" para toda variação  $h$  e, portanto, dizer que  $K$  pode, localmente, minimizar a área.

Como  $K$  é difeomorfo a uma bola  $n$ -dimensional, temos que existe uma carta local  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $K \subset U$  (podemos considerar  $\varphi$  como sendo, por exemplo, uma extensão da aplicação que define o difeomorfismo entre  $K$  e a bola  $n$ -dimensional). Sendo  $\varphi(K) = R$  e sendo  $\{g_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n}$  os coeficientes da primeira forma fundamental (ou métrica induzida de  $\overline{M}$ ) de  $K$  na carta  $\varphi$ , vamos chamar de  $g_t$  a primeira forma fundamental em  $h_t(K) = K_t$ , temos que:

$$A(t) = \int_{K^t} dA = \int_R \sqrt{\det g_t} dx.$$

Onde  $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$  é a medida de volume usual de  $\mathbb{R}^n$ . Assim:

$$A'(t) = \int_R \frac{1}{2\sqrt{\det g_t}} \frac{\partial(\det g_t)}{\partial t} dx.$$

Como em cada ponto da imagem da  $h$  vale  $\frac{\partial(\det g_t)}{\partial t} = \text{tr}(g_t^{-1} \frac{\partial g_t}{\partial t}) \cdot \det g_t = \sum_{i=1}^n (g_t^{-1} \frac{\partial g_t}{\partial t})_{ii}$ .  $\det g_t = \sum_{i,j=1}^n g_t^{ij} \frac{\partial(g_t)_{ij}}{\partial t} \cdot \det g_t$ , onde na última igualdade usamos o fato de  $g_t$  ser simétrica e  $(g_t^{ij})$  representa a matriz inversa de  $g_t$ . Temos:

$$A'(t) = \frac{1}{2} \int_R \sum_{i,j=1}^n \left( g_t^{ij} \frac{\partial(g_t)_{ij}}{\partial t} \right) \sqrt{\det g_t} dx.$$

Mas  $\frac{\partial(g_t)_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial \langle \partial_i(t), \partial_j(t) \rangle}{\partial t} = \langle \overline{\nabla}_{Y_t} \partial_i(t), \partial_j(t) \rangle + \langle \partial_i(t), \overline{\nabla}_{Y_t} \partial_j(t) \rangle$ , onde  $\partial_i(t) = dh_t \cdot \partial_i$ , sendo  $\{\partial_i\}_{1 \leq i \leq n}$  os campos coordenados de  $U$  na carta  $\varphi$ ;  $\overline{\nabla}$  é a conexão de Levi-Civita de  $\overline{M}$  e  $Y_t = \frac{\partial h}{\partial t}$ . Logo:

$$A'(t) = \int_R \left( \sum_{i,j=1}^n g_t^{ij} \langle \overline{\nabla}_{Y_t} \partial_i(t), \partial_j(t) \rangle \right) \sqrt{\det g_t} dx.$$

Afirmamos que  $\bar{\nabla}_{Y_t} \partial_i(t) = \bar{\nabla}_{\partial_i(t)} Y_t$  em  $K$ , ou seja, quando  $t = 0$ . Para mostrar isso, considere um ponto  $p \in K$  com  $p = \varphi^{-1}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  e a superfície  $f$  definida por  $(x_i, t) \mapsto h(t, \varphi^{-1}(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0))$ . Pelo lema 1.3.7, temos

$$\frac{D}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Logo,  $\bar{\nabla}_{\partial_i(0)} \frac{\partial f}{\partial t} = \bar{\nabla}_{Y_0} \frac{\partial f}{\partial x_i}$ . Como  $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t}$  e  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = dh \cdot d\varphi^{-1} \cdot e_i = dh \cdot \partial_i$  e  $h_0$  é a função identidade em  $K$ , temos que, em  $p$ , vale  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_i$ . Logo,  $\bar{\nabla}_{\partial_i} Y|_p = \bar{\nabla}_Y \partial_i|_p$  e, com isso, conclui-se que  $\bar{\nabla}_Y \partial_i = \bar{\nabla}_{\partial_i} Y$  em  $K$ .

Logo:

$$A'(0) = \int_R \left( \sum_{i,j=1}^n g_0^{ij} \langle \bar{\nabla}_{\partial_i} Y_0, \partial_j \rangle \right) \sqrt{\det g_0} dx.$$

Vamos agora restringir um pouco o conjunto das variações e introduzir o conceito de variação normal.

**Definição 3.1.2.** Dizemos que a variação  $h$  é **normal** se  $Y_0 = \frac{\partial h}{\partial t}|_{t=0} \parallel \eta$ , onde  $\eta$  é um campo normal e unitário em  $M$ .

Assim, considerando  $Y_0 = f(t)\eta$  e tendo que  $\langle Y, \partial_j \rangle = 0$  em  $t = 0$ , então, em  $t = 0$  vale (derivando os dois lados na direção  $\partial_i$ ):

$$\langle \bar{\nabla}_{\partial_i} Y, \partial_j \rangle = -\langle Y, \bar{\nabla}_{\partial_i} \partial_j \rangle.$$

Portanto, se  $h$  é uma variação normal, então:

$$\begin{aligned} A'(0) &= - \int_R \sum_{i,j=1}^n g_0^{ij} \langle Y_0, \bar{\nabla}_{\partial_i} \partial_j \rangle \sqrt{\det g_0} dx = - \int_R \sum_{i,j=1}^n g_0^{ij} \langle f\eta, \bar{\nabla}_{\partial_i} \partial_j \rangle \sqrt{\det g_0} dx = \\ &= - \int_R f \left( \sum_{i,j=1}^n g_0^{ij} \pi_{ij} \right) \sqrt{\det g_0} dx = - \int_R f n H dA. \end{aligned}$$

Portanto, a fórmula da primeira variação da área considerando uma variação normal  $h$  fica na forma  $A'(0) = -n \int_R f H dA$ . Sendo  $\vec{H} = H\eta$  (também chamado de vetor curvatura média), temos  $A'(0) = -n \int_R \langle Y, \vec{H} \rangle dA$ .

Com isso, percebe-se que  $K$  é ponto crítico do funcional variação da área para qualquer variação normal se, e somente se,  $H \equiv 0$  em  $K$ .

Vamos imaginar agora que tenhamos o seguinte problema: Dada uma variedade Riemanniana  $N$  que é uma esfera  $(n - 1)$ -dimensional mergulhada em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , é possível determinar uma hipersuperfície  $M$  tal que  $A(M) = \int_M dA$  atinja o menor valor possível em  $M$  dentre todas as hipersuperfícies  $\Sigma$  com  $\partial\Sigma = N$ ?

Notemos que, caso  $M$  seja uma solução para o problema acima,  $M$  seria um ponto crítico para qualquer variação que deixaria  $N = \partial M$  fixo. Antes de prosseguirmos, vamos definir o divergente de um campo vetorial, bem como enunciar o teorema da divergência:

**Definição 3.1.3.** *Dada uma hipersuperfície  $M$  e um campo vetorial  $V$  ao longo de  $M$ , definimos o **divergente** de  $V$  em  $M$  como sendo uma aplicação  $div_M V : M \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:*

$$div_M V(p) = tr \left( (\omega_1, \omega_2) \in T_p M \times T_p M \mapsto \frac{1}{2} \langle D_{\omega_1} V(p), \omega_2 \rangle + \langle D_{\omega_2} V(p), \omega_1 \rangle \right)$$

onde  $D$  indica a derivada covariante.

**Teorema 3.1.4** (Teorema da Divergência). *Seja  $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$  uma hipersuperfície com bordo  $N = \partial M$ . Seja  $\nu$  o campo em  $N$  que é tangente em  $M$ , normal em  $N$ , unitário e que aponta para fora de  $M$ . Se  $ds$  e  $dA$  são as formas volumes de  $N$  e  $M$ , respectivamente, induzidas da inclusão em  $\mathbb{R}^{n+1}$ , então para todo campo vetorial  $V$  definido em  $M$ , vale:*

$$\int_M div_M V dA = \int_N \langle V, \nu \rangle ds.$$

Dada uma variação  $h$  de  $M$  e  $A$  a área da variação no instante de tempo e seja  $M_t = h(t, M)$ , temos:

$$A'(t) = \int_{M_t} \left( \sum_{i,j=1}^n g_t^{ij} \langle \bar{\nabla}_Y \partial_i(t), \partial_j(t) \rangle \right) dA.$$

Sendo  $Y_t = (Y_t)^\top + (Y_t)^\perp$ , onde  $Y_t$  é o campo variacional ao longo de  $M_t$  e  $(Y_t)^\top$  é a parte de  $Y_t$  tangente à hipersuperfície  $M_t$  no instante de tempo considerado.

Em  $t = 0$ , temos  $h_0 = h(0, M)$  como sendo a aplicação identidade e, portanto:

$$\begin{aligned} A'(0) &= \int_M \left( \sum_{i,j=1}^n g_0^{ij} \langle \bar{\nabla}_{\partial_i} Y_0, \partial_j \rangle \right) dA = \int_M \left( \sum_{i,j=1}^n g_0^{ij} \langle \bar{\nabla}_{\partial_i} Y_0^\top + \bar{\nabla}_{\partial_i} Y_0^\perp, \partial_j \rangle \right) dA \\ &= \int_M \left( \sum_{i,j=1}^n g_0^{ij} \langle \bar{\nabla}_{\partial_i} Y_0^\top, \partial_j \rangle \right) dA + \int_M \left( \sum_{i,j=1}^n g_0^{ij} \langle \bar{\nabla}_{\partial_i} Y_0^\perp, \partial_j \rangle \right) dA. \end{aligned}$$

Se usarmos para a primeira parcela acima um fato análogo ao usado para o cálculo do  $H$  no final do capítulo 1, no qual poderia ser facilmente generalizado para: O traço de uma aplicação linear em  $T_p M$  cuja matriz escrita na base  $\{\partial_1(p), \dots, \partial_n(p)\}$  é  $(\pi)_{n \times n}$  pode ser calculado como sendo  $\sum_{i,k=1}^n \pi_{ik} g^{ki}$  e, além disso, usarmos para a segunda parcela o fato de representar uma variação normal, obtemos:

$$A'(0) = \int_M \operatorname{div}_M(Y_0^\top) dA - n \int_M \langle Y_0, \eta \rangle H dA.$$

Portanto, usando o teorema da divergência, chegamos a:

$$A'(0) = \int_{\partial M} \langle Y_0, \nu \rangle ds - n \int_M \langle Y_0, \eta \rangle H dA = -n \int_M \langle Y_0, \eta \rangle H dA,$$

uma vez que  $h$  é constante em  $\partial M$ , sendo  $\nu$  o campo tangente em  $M$ , normal em  $\partial M$  e que aponta para fora de  $M$ .

Logo,  $M$  minimiza a área para qualquer variação que deixar seu bordo  $N$  fixo se, e somente se,  $H \equiv 0$  em  $M$ .

Concluimos esta seção verificando que hipersuperfícies mínimas minimizam a área para dois tipos de variação: variação normal e variação que deixa o bordo fixo.

## 3.2 Fórmula para a primeira variação do volume

Considere agora o seguinte problema: seja  $\overline{M}^{n+1}$  uma variedade Riemanniana orientável e  $B$  uma subvariedade de  $\overline{M}$  que é difeomorfa a uma bola fechada  $(n+1)$ -dimensional. Seja  $x : M \rightarrow B$  uma imersão de uma variedade diferenciável  $n$ -dimensional com bordo  $\partial M$ , de modo que  $x(\text{int } M) \subset \text{int } B$  e  $x(\partial M) \subset \partial B$ . Seja  $\overline{g} = \langle \cdot, \cdot \rangle$  a métrica de  $\overline{M}$ ,  $g$  a métrica de  $M$  induzida por  $x$ ,  $dV$  o elemento de volume de  $\overline{M}$  (e de  $B$ ),  $dA$  o elemento de volume de  $M$  e de  $\partial B$  (apesar de serem variedades distintas, vamos usar a mesma notação para indicar que é um "elemento de área" induzido por  $\overline{g}$  já que possui dimensão um a menos que a dimensão de  $\overline{M}$ ). No que segue nesta seção, vamos considerar todas essas hipóteses como fatos pré-estabelecidos.

**Definição 3.2.1.** *Uma variação admissível de  $x(M)$  em  $\overline{M}$  é uma aplicação  $h : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \rightarrow B$  tal que  $M_t = h_t(M) = h(t, M)$  é tal que  $\text{int } M_t \subset \text{int } B$ ,  $\partial M_t \subset \partial B$  e  $M_0 = x(M)$ .*

Para essa variação, podemos definir os funcionais  $A$  e  $V : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  dados por:

$$A(t) = \int_{M_t} dA$$

e

$$V(t) = \int_{[0,t] \times M} h^* dV.$$

Onde  $h^*$  representa o pull-back da aplicação  $h$ . Nessas condições, chamaremos  $A$  de *funcional área* e  $V$  de *funcional de volume*. Com isso,  $V$  será o volume da região limitada por  $\partial B$ ,  $x(M)$  e  $M_t$  (contando com sinal).



**Definição 3.2.2.** Dizemos que uma variação admissível  $h$  **preserva volume** se  $V(t) = V(0) = 0 \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

Dada uma variação admissível  $h$ , vamos chamar de  $Y$  o campo em  $h((-\varepsilon, \varepsilon) \times M)$  definido por  $Y(h(t, p)) = \frac{\partial h}{\partial t}(t, p)$ .

**Proposição 3.2.3.** Seja  $\eta$  o campo em  $h((-\varepsilon, \varepsilon) \times M)$  que é normal e unitário a  $M_t$   $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  de tal forma que, se para um dado  $p \in M_t$ ,  $\{e_1, \dots, e_n\}$  é uma base ortonormal e positiva para  $T_p M_t$ , então  $\{e_1, \dots, e_n, \eta\}$  será uma base ortonormal e positiva para  $T_p \overline{M}$ , então

$$V'(0) = \int_M \langle Y_0, \eta_0 \rangle dA,$$

onde  $Y_0 = Y \circ h_0$  e  $\eta_0 = \eta \circ h_0$ .

**Demonstração:** Seja  $p \in M$ , temos

$$h^*(dV)(t, p) = dV \left( \frac{\partial h}{\partial t}, dh_t \cdot e_1, \dots, dh_t \cdot e_n \right) (t, p).$$

Como  $h_0 = x$ , temos

$$h^*(dV)(0, p) = dV \left( \frac{\partial h}{\partial t}, \partial_1, \dots, \partial_n \right) (0, p) = \left\langle \frac{\partial h}{\partial t}, \eta \right\rangle (0, p).$$

Logo, em  $x(M)$ , temos

$$h^* dV = \left\langle \frac{\partial h_0}{\partial t}, \eta_0 \right\rangle dt \wedge dA = \langle Y_0, \eta_0 \rangle dt \wedge dA.$$

Com isso:

$$V'(0) = \frac{d}{dt} \int_{[0, t] \times M} h^* dV \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \int_{[0, t] \times M} \langle Y, \eta \rangle dt \wedge dA \Big|_{t=0} = \int_M \langle Y_0, \eta_0 \rangle dA.$$

□

**Proposição 3.2.4.** Seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $C^\infty$  tal que  $\int_M f dA = 0$  e  $f \equiv 0$  em  $\partial M$ , então existe uma variação normal de  $x(M)$  que preserva volume cujo campo variacional ao longo de  $x(M)$  é  $f\eta_0$ .

**Demonstração:** seja  $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável. Defina  $h : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \rightarrow \overline{M}$  dada por

$$h(s, p) = \exp_{x(p)}[\varphi(s, p)\eta].$$

Temos que  $h$  é uma variação normal e  $\frac{\partial h}{\partial s}|_{s=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}|_{s=0}$ .

Vamos calcular a função volume relativamente a essa variação  $h$ . Seja  $\psi$  a aplicação  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times M \rightarrow \mathbb{R} \times M$  dada por  $\psi(s, p) = (\varphi(s, p), p)$  e  $e$  a aplicação  $I \times M \rightarrow \overline{M}$  dada por  $e(s, p) = \exp_{x(p)}s\eta$ , onde  $I$  é um intervalo da reta de modo que faz a aplicação  $e$  ficar bem definida (sendo que  $0 \in I$ ) temos  $h = e \circ \psi$ . Seja  $D(s, p) = \det(de_{(s,p)})$ , temos:

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_{[0,t] \times M} h^* dV = \int_{[0,t] \times M} \psi^* e^* dV = \int_{[0,t] \times M} de_{\varphi(s,p)} \frac{\partial \varphi}{\partial s} (ds \wedge dA) = \\ &= \int_M \left( \int_0^t D(\varphi(s, p), p) \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds \right) dA. \end{aligned}$$

Dada  $f$  com as hipóteses do lema e  $\varphi$  a solução da seguinte EDO com valor inicial:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{f(p)}{D(\varphi(t), p)}, \quad \varphi(0, p) = 0,$$

temos:

$$V(t) = \int_M \left( \int_0^t f(p) ds \right) dA = t \int_M f(p) dA = 0.$$

Com isso,  $h$  assim definida é uma variação que preserva volume. Além disso, seu campo variacional é dado por  $\frac{\partial h}{\partial s}(s, p) = \frac{\partial \varphi}{\partial s} \eta(s, p) = \frac{f\eta(s,p)}{D(\varphi(s,p), p)}$  e em  $s = 0$  temos  $D(\varphi(0, p), p) = D(0, p) = 1$  já que  $de(0,p)$  é a aplicação identidade de  $T_p M$  em cada  $p \in M$ . Logo,  $\frac{\partial h}{\partial s} = f\eta$ .

□

Seja  $H_0 = \frac{1}{A(0)} \int_M (H \circ x) dA$ , onde  $H$  é a função curvatura média em  $x(M)$ . Vamos ao seguinte resultado:

**Proposição 3.2.5.** *Se toda variação normal  $h$  de  $x(M)$  que mantém o bordo fixo e que preserva volume é tal que  $A'(0) = 0$ , então  $x(M)$  possui curvatura média constante.*

**Demonstração:** Suponha que  $x(M)$  não possua curvatura média constante. Seja  $p \in \text{int } M$  tal que  $H(x(p)) \neq H_0$ , podemos supor que  $H(x(p)) > H_0$ . Sejam

$$H^+ = \{q \in M; H(x(q)) > H_0\} \quad e \quad H^- = \{q \in M; H(x(q)) < H_0\}.$$

Sejam também  $\varphi$  e  $\psi$  funções não negativas pertencentes a  $C^\infty(M)$  de modo que  $p \in \text{supp } \varphi \subset H^+$ ,  $\text{supp } \psi \subset H^-$  e  $\int_M (\varphi + \psi)(H \circ x - H_0) dA = 0$ , onde  $\text{supp}$  representa o suporte da função e, além disso, vamos exigir que  $\varphi$  e  $\psi$  se anulem em  $\partial M$  (note que, como  $\int_M (H \circ x - H_0) dA = 0$ , podemos construir tais funções, basta tomar  $\varphi$  como uma função bump em uma vizinhança suficientemente pequena de  $p$  e  $\psi$  como uma função bump em  $H^-$ , no caso bastaria termos  $\int_M \varphi(H \circ x - H_0) dA = -\int_M \psi(H \circ x - H_0) dA$ , onde caso a igualdade não aconteça em uma certa escolha, bastaria multiplicar uma das funções por uma constante, para mais informações sobre função bump, veja [15]).

Sendo então  $f = (\varphi + \psi)(H \circ x - H_0)$ , temos  $f \equiv 0$  em  $\partial M$  e  $\int_M f dA = 0$ . Pela proposição 3.2.4, existe uma variação de  $x(M)$  que preserva volume cujo vetor variacional em  $x(M)$  é  $f\eta$ . Por hipótese e pela fórmula da primeira variação da área temos  $A'(0) = -n \int_M (H \circ x) f dA = 0$ . Como  $\int_M H_0 f dA = 0$ , temos

$$0 = \int_M f(H \circ x - H_0) dA = \int_M (\varphi + \psi)(H \circ x - H_0)^2 dA > 0,$$

o que é uma contradição.

□

### 3.3 Variação da energia

Com as hipóteses do capítulo anterior, vamos definir o funcional *wetting area* como sendo o funcional

$$W : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto \int_{[0,t] \times \partial M} h^* dA$$

onde  $dA$  é, como mencionado no capítulo anterior, é o elemento de área de  $\partial B$ .

**Definição 3.3.1.** *Seja  $\theta \in (0, \pi)$  um número real fixado. Definimos o **funcional energia** como sendo a aplicação  $E : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  dado por*

$$E(t) = A(t) - \cos\theta W(t).$$

Vamos considerar como terminologia dos seguintes campos normais e unitários:

(i)  $N$  será o campo normal e unitário a  $x(M)$  (em outras palavras, vamos considerar como  $\eta|_{x(M)}$ );

(ii)  $\bar{N}$  será o campo normal e unitário a  $\partial B$  que aponta para fora de  $B$ ;

(iii)  $\nu$  será o campo normal a  $x(\partial M)$  que é tangente a  $x(M)$  e aponta para fora de  $x(M)$ ;

(iv)  $\bar{\nu}$  será o campo normal a  $x(\partial M)$  e tangente a  $\partial B$  de modo que  $\{N, \nu\}$  e  $\{\bar{\nu}, \bar{N}\}$  tenham a mesma orientação em seus respectivos subespaço do espaço tangente ao respectivo ponto em  $\bar{M}$  (note que  $\{N, \nu\}$  e  $\{\bar{\nu}, \bar{N}\}$  são bases do mesmo subespaço de  $T_p \bar{M} \forall p \in x(\partial M)$ ).

Sendo  $h$  admissível,  $h((-\varepsilon, \varepsilon) \times \partial M) \subset \partial B$  e, com isso, o campo  $Y = \frac{\partial h}{\partial t}$  restrito a  $h((-\varepsilon, \varepsilon) \times \partial M)$  é um campo tangente a  $\partial B$ .

Assim, podemos usar a fórmula da primeira variação do volume para a variação de  $x(\partial M)$  em  $\partial B$  e, assim, obtemos

$$W'(0) = \int_{\partial M} \langle Y, \bar{\nu} \rangle ds.$$

Olhando agora para a variação da área de  $M$ . Como visto na seção 3.1, temos

$$A'(0) = \int_{\partial M} \langle Y, \nu \rangle ds - n \int_M \langle Y, \eta \rangle H dA.$$

Com isso, temos que

$$E'(0) = -n \int_M \langle Y, \eta \rangle H dA + \int_{\partial M} \langle Y, \nu - \cos \theta \bar{\nu} \rangle ds.$$

Temos assim a fórmula da primeira variação da energia.

**Definição 3.3.2.** *Uma imersão  $x : M^n \rightarrow B$ , com  $B \subset \bar{M}$  difeomorfa a uma bola fechada  $(n+1)$ -dimensional, com  $x(\text{int}M) \subset \text{int}B$  e  $x(\partial M) \subset \partial B$  é dito ser **capilar** se  $E'(0) = 0$  para toda variação admissível que preserva volume.*

Dada uma imersão capilar  $x$ , podemos tomar uma variação  $h$  de modo a termos  $Y = f\eta$ , com  $f$  nas condições da proposição 3.2.4 e teremos que, como  $h$  é uma variação normal e  $Y$  será nulo na fronteira, temos

$$E'(0) = -n \int_M f H dA = A'(0) = 0.$$

Logo, pela proposição 3.2.5, temos que  $H$  é constante. Assim, para uma imersão ser capilar, é necessário que ela tenha curvatura média constante.

Considere agora uma variação admissível e que preserva volume  $h$  (não necessariamente normal). O fato de  $h$  ser admissível e preservar volume implica que  $Y$  é tangente a  $\partial B$  em  $x(\partial M)$ . A fórmula da primeira variação do volume nos dá que  $\int_M \langle Y, \eta \rangle dA = 0$ . Assim, sendo  $x$  capilar, temos  $-n \int_M \langle Y, \eta \rangle H dA = 0$ . Logo, se  $x$  é capilar, então para toda variação  $h$  vale

$$\int_{\partial M} \langle Y, \nu - \cos \theta \bar{\nu} \rangle ds = 0,$$

o que implica que a componente tangente de  $\nu$  a  $\partial B$  é igual a  $\cos \theta$ . Logo, o ângulo entre  $\nu$  e  $\bar{\nu}$  é constante e igual a  $\theta$ , característica no qual faz a gente poder dizer que  $x(M)$

intersecta  $\partial B$  a um ângulo constante e igual a  $\theta$ . Com isso, demonstramos o seguinte resultado:

**Teorema 3.3.3.** *Uma imersão  $x : M^n \rightarrow B^{n+1}$ , com  $B$  difeomorfa a uma bola fechada  $(n+1)$ -dimensional,  $x(\text{int}M) \subset \text{int}B$  e  $x(\partial M) \subset \partial B$ , é capilar se, e somente se,  $x$  é de curvatura média constante e  $x(M)$  intersecta  $\partial B$  a um ângulo constante.*

A fim de saber se uma dada imersão  $x$  que é um ponto crítico do funcional energia seria uma função que minimizaria a energia para qualquer variação dada que preserva volume, precisaríamos ter  $E''(0) \geq 0$ , para qualquer  $h$  admissível e  $x$  capilar.

**Definição 3.3.4.** *Dizemos que uma imersão capilar  $x : M \rightarrow B$  é estável se  $E''(0) \geq 0$  para toda variação de  $x$  que preserva volumes.*

O seguinte resultado mostra a expressão exata da fórmula da segunda variação da energia:

**Proposição 3.3.5.** *Nas condições apresentadas nesta seção, seja  $\sigma$  a segunda forma fundamental de  $x$  com respeito ao campo normal  $N$ ,  $x$  capilar e seja  $II$  a segunda forma fundamental de  $\partial B$  em  $\bar{M}$  com respeito a  $-\bar{N}$ , então*

$$E''(0) = - \int_M (f \Delta f + (|\sigma|^2 + n \text{Ric}(N)) f^2) dA + \int_{\partial M} f \left[ \frac{\partial f}{\partial \nu} - \left( \frac{1}{\sin \theta} II(\bar{\nu}) + \cot \theta \sigma(\nu) \right) f \right] ds,$$

onde  $f = \langle Y, N \rangle$  e  $\Delta$  é o operador de Laplace.

Para uma demonstração, veja [16].

Imersões capilares hoje é um objeto muito estudado e as bolas e as esferas são as superfícies centrais nessa teoria. Por exemplo, o fato de duas esferas de mesma dimensão (que não são disjuntas, nem tangentes) sempre se intersectarem a um ângulo constante e a interseção ser uma esfera de dimensão um a menos (supondo as esferas iniciais em

um ambiente euclidiano de dimensão uma a mais) e, além disso, terem curvatura média constante implica que uma calota esférica é sempre capilar a uma bola. Com o mesmo raciocínio, conclui-se que um pedaço de hiperplano (uma bola  $n$ -dimensional) é sempre capilar a uma bola  $(n + 1)$ -dimensional.

Podemos estender o conceito de imersão capilar para quando  $B$  não é difeomorfa a uma bola fechada a partir do teorema 3.3.3. Assim, a partir de agora, uma imersão  $x : M \rightarrow B$  será capilar se  $x(M)$  possui curvatura média constante e  $\partial M$  intersecta  $\partial B$  a um ângulo constante.

Vejamos agora alguns casos especiais de imersões capilares.

**Definição 3.3.6.** *Dizemos que uma imersão capilar  $x : M \rightarrow \overline{M}$  é **mínima** se  $x(M)$  for uma hipersuperfície mínima, isto é, se  $H \equiv 0$ . Dizemos que uma imersão capilar  $x$  é **mínima de fronteira livre** se  $x$  é mínima e  $\theta = 0$ .*

Como exemplos de hipersuperfícies mínimas de fronteira livre temos os discos flats em  $\mathbb{S}^n$  (os discos  $n$ -dimensionais obtidos pela interseção entre  $B^{n+1}$  e um hiperplano que passa pela origem), o catenoide crítico (a ser definido adiante), entre outros.

## Capítulo 4

# Representação de Enneper -Weierstrass e relações entre superfícies CMC e funções complexas

Como vimos anteriormente, existe uma forte relação entre as funções harmônicas e as funções complexas. Além disso, veremos que as superfícies mínimas parametrizadas por um sistema de coordenadas isotérmico torna as suas funções coordenadas funções harmônicas. Assim, naturalmente buscaremos relações entre superfícies mínimas imersas em  $\mathbb{R}^3$  e funções holomorfas.

No que segue, usaremos a letra  $U$  para representar um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^2$  e  $\{(u, v)\}$  o sistema de coordenadas cartesiano de  $\mathbb{R}^2$ . Vamos representar as matrizes  $g$  e  $\pi$  definidas na seção 1.6 por

$$g = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \pi = \begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix}$$

e a aplicação normal de Gauss  $\eta$  representaremos agora pela letra  $N$ .

**Definição 4.0.1.** *Uma parametrização  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  é dita ser **isotérmica** se  $E \equiv G$  e  $F \equiv 0$ .*



Vamos admitir aqui que toda superfície regular em  $\mathbb{R}^3$  admite um atlas isotérmico, isto é, cujas cartas locais possuem como funções inversas parametrizações isotérmicas (veja [17]).

**Lema 4.0.2.** *Seja  $X = (X^1, X^2, X^3) : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma parametrização isotérmica de uma superfície  $M$ , então  $M$  é uma superfície mínima se, e somente se, as funções coordenadas  $X^1$ ,  $X^2$  e  $X^3$  são funções harmônicas.*

**Demonstração:** A partir da fórmula encontrada para  $H$  no final do Capítulo 1, obtemos, por um cálculo direto,  $H = \frac{EN - FM + GL}{2(EG - F^2)}$ .

Se  $X$  é harmônica (isto é, possui funções coordenadas harmônicas), temos que  $X_{uu} + X_{vv} = 0 \Rightarrow \langle X_{uu}, N \rangle + \langle X_{vv}, N \rangle = 0 \Rightarrow \mathcal{L} + \mathcal{N} = 0 \Rightarrow H = \frac{\mathcal{L} + \mathcal{N}}{2E} = 0$ . Logo,  $M$  é uma superfície mínima.

Reciprocamente, suponha que  $M$  seja uma superfície mínima, temos  $\mathcal{L} + \mathcal{N} = 0 \Rightarrow X_{uu}^\perp + X_{vv}^\perp = 0$ , restando mostrar que a componente tangente de  $X_{uu} + X_{vv}$  também é nula. Como  $\langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle$ , derivando ambos os lados em relação a  $u$  e em relação a  $v$ , temos  $\langle X_{uu}, X_u \rangle = \langle X_{uv}, X_v \rangle$  (\*) e  $\langle X_{uv}, X_u \rangle = \langle X_{vv}, X_v \rangle$  (\*\*). Temos também que, como  $\langle X_u, X_v \rangle = 0$ , derivando ambos os lados em relação a  $u$  e em relação a  $v$ , encontramos  $\langle X_{uu}, X_v \rangle = -\langle X_u, X_{uv} \rangle$  (\*\*\*) e  $\langle X_{uv}, X_v \rangle = -\langle X_u, X_{vv} \rangle$  (\*\*\*)\*\*. Combinando (\*) e (\*\*\*)\*\*, encontramos  $\langle X_{uu} + X_{vv}, X_u \rangle = 0$  e combinando (\*\*) e (\*\*\*)\*\*, encontramos  $\langle X_{uu} + X_{vv}, X_v \rangle = 0$ , o que nos garante que a componente tangente de  $X_{uu} + X_{vv}$  também é nula e, portanto,  $X_{uu} + X_{vv} = 0$ . Portanto,  $X$  é uma função harmônica.

□

**Lema 4.0.3.** *Seja  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma parametrização isotérmica de uma superfície regular e seja  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}^3$  a aplicação definida por  $\varphi = X_u - iX_v$ , então  $X$  é mínima se, e somente se, cada função coordenada de  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = (X_u^1 - iX_v^1, X_u^2 - iX_v^2, X_u^3 - iX_v^3)$  é uma função holomorfa.*

**Demonstração:** Seja  $X$  uma parametrização isotérmica de uma superfície mínima. Pelo lema anterior, segue que  $X_{uu} + X_{vv} = 0 \iff (X_u)_u = (-X_v)_v$ . Temos  $X_{uv} = X_{vu} \implies (X_u)_v = -(-X_v)_u$ . Portanto,  $X_u^j$  e  $-X_v^j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , satisfazem às condições de Cauchy-Riemann. Como  $X_u^i$  e  $X_v^i$  são funções contínuas, segue que  $\varphi_i = X_u^i - X_v^i$  são funções holomorfas. Reciprocamente, sendo  $\varphi_1, \varphi_2$  e  $\varphi_3$  funções holomorfas, segue por Cauchy-Riemann que  $X_{uu} = -X_{vv} \implies X_{uu} + X_{vv} = 0$ . Como  $X$  é uma parametrização isotérmica, segue que  $X$  é mínima.

**Lema 4.0.4.** *Seja  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma parametrização isotérmica de uma superfície mínima  $M$ , então a aplicação holomorfa  $\varphi$  definida no lema 4.0.3 satisfaz à condição  $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$  e  $\varphi$  nunca se anula. Além disso, para uma dada aplicação  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}^3$ ,  $U$  simplesmente conexo, que satisfaz a essas duas condições representa uma parametrização isotérmica de uma superfície mínima  $M$  a partir da identidade  $\varphi = X_u - iX_v$ .*

**Demonstração:** Seja  $X(u, v) = (X^1(u, v), X^2(u, v), X^3(u, v))$ , temos  $\varphi = (X_u^1 - iX_v^1, X_u^2 - iX_v^2, X_u^3 - iX_v^3)$ . Logo:

$$\begin{aligned}\varphi_1^2 &= (X_u^1)^2 - (X_v^1)^2 - 2X_u^1 X_v^1 i ; \\ \varphi_2^2 &= (X_u^2)^2 - (X_v^2)^2 - 2X_u^2 X_v^2 i ; \\ \varphi_3^2 &= (X_u^3)^2 - (X_v^3)^2 - 2X_u^3 X_v^3 i ;\end{aligned}$$

Com isso:  $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = \|X_u\|^2 - \|X_v\|^2 - 2i\langle X_u, X_v \rangle = 0$  já que  $X$  é isotérmica.

Como  $M$  é regular, temos que  $X_u$  e  $X_v$  não podem ser ambos não nulos e, portanto,  $\varphi$  nunca se anula.

Para a afirmação seguinte, precisamos mostrar que, se  $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$  e  $\varphi$  nunca se anula, então  $X$  é isotérmica e mínima. Vamos então definir:

$$X(u, v) = \operatorname{Re} \int_{\gamma} \varphi(\xi) d\xi,$$

onde  $\gamma$  é uma curva com início em um determinado ponto  $z_0 = u_0 + iv_0$  e termina em

$z = u + iv$ . Como  $U$  é simplesmente conexo,  $X$  está bem definida (não depende da curva  $\gamma$ ) e é parte real de uma função holomorfa. Segue que:

$$X_u = \frac{\partial}{\partial u} \operatorname{Re} \left( \int_{\gamma} \varphi(\xi) d\xi \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{d}{dz} \int_{\gamma} \varphi(\xi) d\xi \right) = \operatorname{Re} \varphi(z);$$

$$X_v = \frac{\partial}{\partial v} \operatorname{Re} \left( \int_{\gamma} \varphi(\xi) d\xi \right) = \operatorname{Re} \left( \frac{d}{dz} \int_{\gamma} i\varphi(\xi) d\xi \right) = -\operatorname{Im} \varphi(z).$$

Logo,  $\operatorname{Re} \varphi = X_u$  e  $-\operatorname{Im} \varphi = X_v \Rightarrow \varphi(u + iv) = X_u(u, v) - iX_v(u, v)$ .

Desse modo:  $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = \|x_u\|^2 + \|X_v\|^2 - 2i\langle X_u, X_v \rangle = 0$ . Separando as partes real e imaginária, segue que  $\|X_u\| = \|X_v\|$  e  $\langle X_u, X_v \rangle = 0 \Rightarrow E = G$  e  $F = 0$ .

Como  $\varphi$  nunca se anula, segue que  $X_u$  e  $X_v$  nunca se anulam simultaneamente (e, portanto, ambos nunca se anulam). Logo,  $M$  é regular e  $X$  isotérmica. Como  $X$  é harmônica, segue também que  $M$  é uma superfície mínima.

## 4.1 Representação de Enneper-Weierstrass

**Teorema 4.1.1.** *Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  uma função holomorfa e  $g : U \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  meromorfa tal que  $fg^2$  é holomorfa. Assuma que se  $\xi \in U$  é um polo de ordem  $n$  de  $g$ , então  $\xi$  é um zero de ordem  $2n$  de  $f$  e que, além disso, esses sejam os únicos zeros de  $f$ . Então a aplicação:*

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{2} (1 - g(z)^2, i(1 + g(z)^2), 2g(z))$$

*satisfaz às condições do lema 4.0.4. Além disso, para toda  $\varphi$  como no lema 4.0.3, existe  $f$  holomorfa e  $g$  meromorfa nas condições acima.*

**Demonstração:** Temos:

$$\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = \frac{1}{4} f^2 (1 - g^2)^2 - \frac{1}{4} f^2 (1 + g^2)^2 + f^2 g^2 =$$

$$= \frac{1}{4}f^2 - \frac{1}{2}f^2g^2 + \frac{1}{4}f^2g^4 - \frac{1}{4}f^2 - \frac{1}{2}f^2g^2 - \frac{1}{4}f^2g^4 + f^2g^2 = 0.$$

Ademais, para dado  $z \in U$ ,  $\varphi(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(z)}{2}(1 - g(z)^2, i(1 + g(z)^2), 2g(z)) = 0$ . Com isso:  $f(z) - f(z)g(z)^2 = 0$  e  $if(z) + if(z)g(z)^2 = 0$ , essas duas igualdades implicam que  $2if(z)g(z)^2 = 0 \Rightarrow g(z) = 0$  já que caso tivéssemos  $f(z) = 0$ , teríamos, por hipótese,  $f(z)g(z)^2 \neq 0$ . Assim,  $f(z) \neq 0$  e, portanto,  $\varphi(z) = (\frac{f(z)}{2}, \frac{f(z)}{2}i, 0) \neq 0$  (contradição).

Reciprocamente, vamos assumir que  $\varphi$  é holomorfa,  $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$  e  $\varphi$  nunca se anula. Tome  $f(z) = \varphi_1(z) - i\varphi_2(z)$  e  $g(z) = \frac{\varphi_3(z)}{\varphi_1(z) - i\varphi_2(z)}$ , caso  $f$  não seja identicamente nula ao defini-la dessa maneira. Temos que  $f$  é holomorfa e  $g$  é meromorfa. Se  $f$ , definida dessa maneira, for identicamente nula, teremos  $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 \equiv 0$  e, portanto,  $\varphi_3 \equiv 0$  e, nesse caso,  $\varphi$  representará, de acordo com o lema 4.0.3, a parametrização  $X$  de um pedaço de um plano e, nesse caso, redefina  $f(z) = \varphi_1(z) + i\varphi_2(z)$  e  $g(z) \equiv 0$ . Como  $\varphi$  nunca se anula e  $\varphi_1 - i\varphi_2 \equiv 0$ , temos que  $f$  assim definida nunca se anula e, portanto, satisfaz às condições iniciais do teorema. Assim, sendo  $f = \varphi_1 - i\varphi_2 \neq 0$  e  $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \equiv 0$ , temos  $-\varphi_3^2 = (\varphi_1 + i\varphi_2)(\varphi_1 - i\varphi_2)$ , com isso,  $\varphi_1 + i\varphi_2 = -\frac{\varphi_3^2}{\varphi_1 - i\varphi_2} = -fg^2$ .

Com isso, vale a relação  $\varphi(z) = \frac{f(z)}{2}(1 - g(z)^2, i(1 + g(z)^2), 2g(z))$ . Segue assim que, se  $f(z) = 0$ , então, necessariamente,  $f(z)g(z)^2 \neq 0$ . Isso termina a demonstração.

Essa relação entre a superfície mínima  $M$  parametrizada por  $X$  e as aplicações  $\varphi$ ,  $f$  e  $g$ :

$$\varphi(z) = X_u(u, v) - iX_v(u, v) = \frac{f(z)}{2}(1 - g(z)^2, i(1 + g(z)^2), 2g(z))$$

nos dá as ferramentas necessárias para definir a representação de Enneper-Weierstrass de uma dada superfície mínima  $M$ .

**Teorema 4.1.2.** *Seja  $U$  um subconjunto aberto e simplesmente conexo do plano complexo  $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$  e  $\gamma$  uma curva contida em  $U$  que liga um fixado ponto  $z_0$  a  $z = u + iv$ . Seja  $0 \neq f : U \rightarrow \mathbb{C}^2$  holomorfa e  $g : U \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  meromorfa tal que  $fg^2$  é holomorfa. Além disso, assuma que todo pólo de  $g$  de ordem  $n$  é um zero de  $f$  de ordem  $2n$  e que  $f$  não possua outros zeros. Então*

$$X(u, v) = x_0 + \operatorname{Re} \left( \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{2} (1 - g(\xi)^2, i + ig(\xi)^2, 2g(\xi)) d\xi \right)$$

é uma parametrização de uma superfície mínima e regular. Além disso, para toda superfície mínima  $M$  existe uma representação dada como acima. Tal representação é chamada de **Representação de Enneper-Weierstrass**.

**Demonstração:** Segue diretamente dos lemas 4.0.3 e 4.0.4 e do teorema 4.1.1 .

A ideia de representar uma superfície mínima a partir de aplicações  $f$  e  $g$  como na representação de Enneper-Weierstrass parece de pouca utilidade no meio prático, mas a seguir vamos mostrar propriedades interessantes em relação às funções  $f$  e  $g$ .

Vamos determinar a aplicação normal de Gauss  $N : X(U) \rightarrow \mathbb{S}^2$ . Nas notações acima, como  $X_u = \operatorname{Re}\varphi$  e  $X_v = -\operatorname{Im}\varphi$ , temos:

$$\begin{aligned} X_u \times X_v &= \operatorname{Re}\varphi \times (-\operatorname{Im}\varphi) = \\ &= -(\operatorname{Re}\varphi_2 \operatorname{Im}\varphi_3 - \operatorname{Re}\varphi_3 \operatorname{Im}\varphi_2, \operatorname{Re}\varphi_3 \operatorname{Im}\varphi_1 - \operatorname{Re}\varphi_1 \operatorname{Im}\varphi_3, \operatorname{Re}\varphi_1 \operatorname{Im}\varphi_2 - \operatorname{Re}\varphi_2 \operatorname{Im}\varphi_1) = \\ &= -(\operatorname{Im}(\varphi_2 \overline{\varphi_3}), \operatorname{Im}(\varphi_3 \overline{\varphi_1}), \operatorname{Im}(\varphi_1 \overline{\varphi_2})). \end{aligned}$$

Temos:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad -\operatorname{Im}(\varphi_2 \overline{\varphi_3}) &= -\operatorname{Im}\left(\frac{1}{4}|f|^2 i(1+g^2) \cdot 2\overline{g}\right) = -\operatorname{Im}\left(\frac{i}{2}|f|^2(\overline{g} + |g|^2 g)\right) = -\frac{|f|^2}{2} \operatorname{Re}(\overline{g} + \\ &|g|^2 g) = \\ &= -\frac{|f|^2}{2}(1 + |g|^2) \operatorname{Re}g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad -\operatorname{Im}(\varphi_3 \overline{\varphi_1}) &= -\operatorname{Im}\left(fg(1 - \overline{g}^2) \frac{\overline{f}}{2}\right) = -\frac{|f|^2}{2} \operatorname{Im}(g - |g|^2 \overline{g}) \\ &= -\frac{|f|^2}{2}(1 + |g|^2) \operatorname{Im}g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad -\operatorname{Im}(\varphi_1 \overline{\varphi_2}) &= -\frac{1}{4}|f|^2 \operatorname{Im}((1 - g^2)(-i + i\overline{g}^2)) = -\frac{1}{4}|f|^2 \operatorname{Im}((1 - g^2)(-i - i\overline{g}^2)) = \\ &= -\frac{1}{4}|f|^2 \operatorname{Im}(-i - i\overline{g}^2 + ig^2 + i|g^2|^2) = -\frac{1}{4}|f|^2 \operatorname{Im}(-i - i\operatorname{Re}g^2 + i\operatorname{Re}g^2 + \\ &i|g^2|^2) = \\ &= -\frac{|f|^2}{4}(-1 + |g^2|^2) = \end{aligned}$$

$$= \frac{|f|^2}{4}(1 + |g|^2)(|g|^2 - 1).$$

Com isso:  $X_u \times X_v = -\frac{|f|^2}{4}(1 + |g|^2)(2\text{Reg}, 2\text{Img}, |g|^2 - 1)$ .

Assim,  $N = \frac{1}{1+|g|^2}(2\text{Reg}, 2\text{Img}, |g|^2 - 1)$

Olhando  $\mathbb{S}^2$  como a esfera de Riemann, a forma local da aplicação normal de Gauss a partir da carta  $P_n$  (ver seção 2.3) fica:

$$P_n \circ N(z) = \frac{\frac{2\text{Reg}}{1+|g|^2} + \frac{2i\text{Img}}{1+|g|^2}}{1 - \frac{|g|^2-1}{|g|^2+1}}(z) = \frac{2\text{Reg} + 2i\text{Img}}{2}(z) = g(z)$$

Isso nos faz poder enxergar  $g$  como sendo a própria aplicação normal de Gauss de uma superfície mínima (às vezes, com um certo abuso, trataremos a  $g$  como sendo a própria  $N$ ).

**Exemplo 4.1.3.** *O plano.*

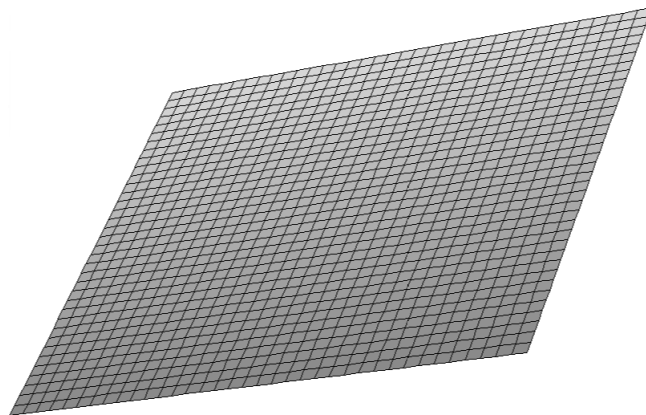


Figura 4.1: plano

O plano é um exemplo de superfície mínima e se caracteriza por ser a superfície que possui a segunda forma fundamental nula. Uma parametrização de um plano pode ser dada por  $x : U = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto (u, v, 0)$  e um exemplo de representação de Enneper-Weierstrass para o plano é dado por  $(U = \mathbb{C}, f(z) = 1, g(z) = 0)$ .

**Exemplo 4.1.4.** *O catenoide.*

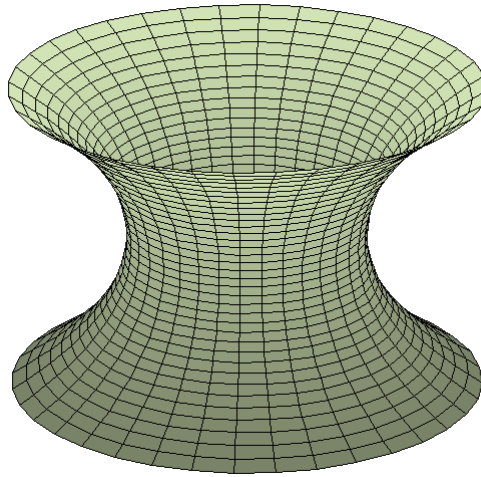


Figura 4.2: catenoide

O catenoide é caracterizada por ser um sólido de revolução obtido a partir da revolução de uma catenária em torno de um eixo paralelo à reta tangente ao vértice da catenária e que não a intersecta. É a única superfície mínima completa de revolução e possui a topologia de um plano furado (ou um disco furado). Uma parametrização do catenoide é dada por  $x : U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto -\frac{1}{2}\left(\frac{u}{u^2+v^2} + u, \frac{v}{u^2+v^2} + v, -\frac{1}{2} \log(u^2 + v^2)\right)$  e um exemplo de representação de Enneper-Weierstrass para o catenoide:  $(U = \mathbb{C} \setminus \{0\}, f(z) = \frac{1}{z^2}, g(z) = z)$ .

**Exemplo 4.1.5.** *O helicoido.*

O helicoido foi, assim como o plano e o catenoide, uma das primeiras superfícies mínimas a ser descoberta. Ela é homeomorfa a um plano e uma superfície regrada (é obtida a partir de uma hélice, a partir da união das retas que possuem a direção do vetor normal em cada ponto). Uma parametrização do helicoido é dada por  $x : U = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto (\cosh(v) \sin(u), -\cosh(v) \cos(u), u)$  e um exemplo de representação de Enneper-Weierstrass para o helicoido:  $(U = \mathbb{C}, f(z) = e^{-iz}, g(z) = e^{iz})$ .

**Exemplo 4.1.6.** *A superfície de Enneper.*

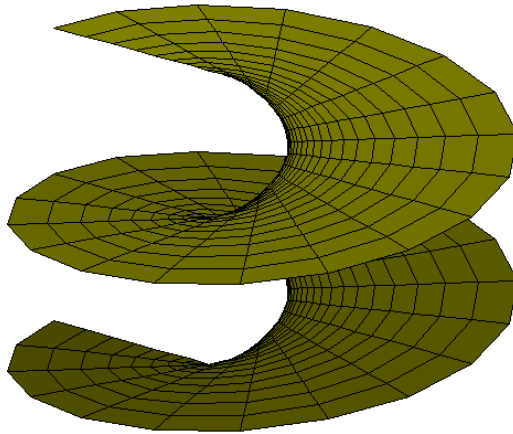


Figura 4.3: helicóide

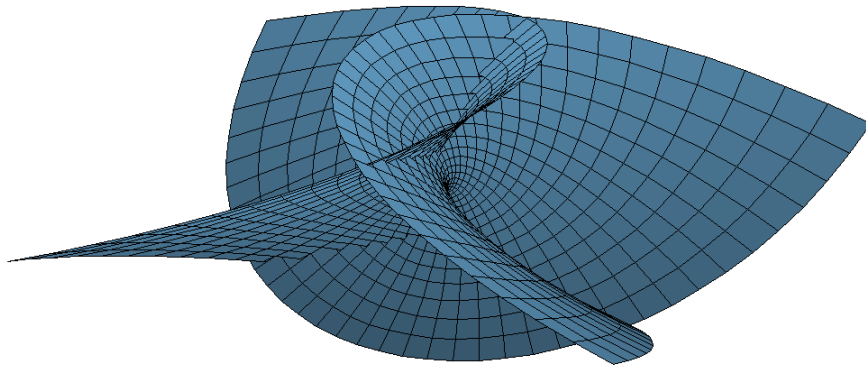


Figura 4.4: superfície de Enneper

A superfície de Enneper é um exemplo de superfície mínima que se auto-intersecta. Uma parametrização da superfície de Enneper é dada por  $x : U = \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (u, v) \mapsto \frac{1}{3}(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, -v + \frac{v^3}{3} - u^2v, u^2 - v^2)$  e um exemplo de representação de Enneper-Weierstrass para o helicóide:  $(U = \mathbb{C}, f(z) = 1, g(z) = z)$ .

## 4.2 Resultados envolvendo Superfícies CMC e funções complexas



Segue abaixo algumas relações que usaremos em seguida.

**Proposição 4.2.1.** *Seja  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma parametrização isotérmica de uma superfície. Seja  $\Lambda = E = G$  e  $F = 0$  os coeficientes da primeira forma fundamental de  $X$ ,  $(\rho, \theta)$  coordenadas polares definidas por  $u + iv = \rho e^{i\theta}$  então:*

$$\begin{aligned}
(i) \quad X_{uu} &= \frac{\Lambda_u}{2\Lambda} X_u - \frac{\Lambda_v}{2\Lambda} X_v + \mathcal{L}N; \\
(ii) \quad X_{uv} &= \frac{\Lambda_v}{2\Lambda} X_u + \frac{\Lambda_u}{2\Lambda} X_v + \mathcal{M}N; \\
(iii) \quad X_{vv} &= -\frac{\Lambda_u}{2\Lambda} X_u + \frac{\Lambda_v}{2\Lambda} X_v + \mathcal{N}N; \\
(iv) \quad N_u &= -\frac{\mathcal{L}}{\Lambda} X_u - \frac{\mathcal{M}}{\Lambda} X_v; \\
(v) \quad N_v &= -\frac{\mathcal{M}}{\Lambda} X_u - \frac{\mathcal{N}}{\Lambda} X_v; \\
(vi) \quad H &= \frac{\mathcal{L} + \mathcal{N}}{2\Lambda} \\
(vii) \quad K &= \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{\Lambda^2} = -\frac{1}{\Lambda} \Delta \log \sqrt{\Lambda}; \\
(viii) \quad \mathcal{L}_v - \mathcal{M}_u &= \Lambda_v H \\
(ix) \quad \mathcal{M}_v - \mathcal{N}_u &= -\Lambda_u H \\
(x) \quad [\frac{1}{2}(\mathcal{L} - \mathcal{N}) - i\mathcal{M}]_{\bar{z}} &= \Lambda H_z;
\end{aligned}$$

Seja  $F(z) = \frac{1}{2}(\mathcal{L} - \mathcal{N}) - i\mathcal{M}$ ,  $\Phi(z) = z^2 F(z) = \alpha(z) + i\beta(z)$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  funções reais.

Temos ainda:

$$\begin{aligned}
(xi) \quad X_{\rho\rho} &= \frac{\Lambda_\rho}{2\Lambda} X_\rho - \frac{1}{\rho^2} \frac{\Lambda_\theta}{2\Lambda} X_\theta + (\frac{\alpha}{\rho^2} + \Lambda H)N; \\
(xii) \quad X_{\rho\theta} &= \frac{\Lambda_\theta}{\Lambda} X_\rho + (\frac{1}{\rho} + \frac{\Lambda_\rho}{2\Lambda}) X_\theta - \frac{\beta}{\rho} N; \\
(xiii) \quad X_{\theta\theta} &= -\rho^2 (\frac{1}{\rho} + \frac{\Lambda_\rho}{2\Lambda}) X_\rho + \frac{\Lambda_\theta}{2\Lambda} X_\theta - (\alpha - \rho^2 \Lambda H)N; \\
(xiv) \quad N_\rho &= -\frac{1}{\Lambda} (\frac{\alpha}{\rho^2} + \Lambda H) X_\rho + \frac{\beta}{\rho^3 \Lambda} X_\theta \\
(xv) \quad N_\theta &= \frac{\beta}{\rho \Lambda} X_\rho + \frac{1}{\Lambda} (\frac{\alpha}{\rho^2} - \Lambda H) X_\theta.
\end{aligned}$$

**Demonstração:** Dadas as relações:

$$\begin{aligned}
(a) \quad \Lambda_u &= \langle X_u, X_u \rangle_u = 2\langle X_{uu}, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle_u = 2\langle X_{uv}, X_v \rangle; \\
(b) \quad \Lambda_v &= \langle X_u, X_u \rangle_v = 2\langle X_{uv}, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle_v = 2\langle X_{vv}, X_v \rangle; \\
(c) \quad \langle X_u, X_v \rangle &= 0 \Rightarrow \langle X_{uu}, X_v \rangle = -\langle X_{uv}, X_u \rangle \text{ e } \langle X_{uv}, X_v \rangle = -\langle X_{vv}, X_u \rangle \\
(d) \quad \langle X_{uu}, N \rangle &= \mathcal{L}
\end{aligned}$$

$$(e) \langle X_{uv}, N \rangle = \mathcal{M}$$

$$(f) \langle X_{vv}, N \rangle = \mathcal{N}$$

(i), (ii) e (iii): Temos por (a), (b), (c) (d), (e) e (f):

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda_u}{2\Lambda} X_u - \frac{\Lambda_v}{2\Lambda} X_v + \mathcal{L}N &= \frac{\langle X_{uu}, X_u \rangle}{\Lambda} X_u - \frac{\langle X_{uv}, X_u \rangle}{\Lambda} X_v + \langle X_{uu}, N \rangle N = \frac{\langle X_{uu}, X_u \rangle}{\Lambda} X_u + \frac{\langle X_{uv}, X_u \rangle}{\Lambda} X_v + \\ \langle X_{uu}, N \rangle N &= X_{uu}; \\ \frac{\Lambda_v}{2\Lambda} X_u + \frac{\Lambda_u}{2\Lambda} X_v + \mathcal{M}N &= \frac{\langle X_{uv}, X_u \rangle}{\Lambda} X_u + \frac{\langle X_{uv}, X_v \rangle}{\Lambda} X_v + \langle X_{uv}, N \rangle N = \frac{\langle X_{uv}, X_u \rangle}{\Lambda} X_u + \frac{\langle X_{uv}, X_v \rangle}{\Lambda} X_v + \\ \langle X_{uv}, N \rangle N &= X_{uv}; \\ -\frac{\Lambda_u}{2\Lambda} X_u + \frac{\Lambda_v}{2\Lambda} X_v + \mathcal{N}N &= -\frac{\langle X_{uv}, X_v \rangle}{\Lambda} X_u + \frac{\langle X_{vv}, X_v \rangle}{\Lambda} X_v + \langle X_{vv}, N \rangle N = \frac{\langle X_{vv}, X_u \rangle}{\Lambda} X_u + \\ \frac{\langle X_{vv}, X_v \rangle}{\Lambda} X_v + \langle X_{vv}, N \rangle N &= X_{vv}. \end{aligned}$$

(iv) e (v):

Como  $\langle N, N \rangle \equiv 1$  e  $\langle N, X_u \rangle \equiv \langle N, X_v \rangle \equiv 0$ , segue que:

$$(a) \langle N_u, N \rangle \equiv \langle N_v, N \rangle \equiv 0;$$

$$(b) \langle N_u, X_u \rangle = -\langle N, X_{uu} \rangle, \langle N_v, X_u \rangle = -\langle N, X_{uv} \rangle = \langle N_u, X_v \rangle \text{ e } \langle N_v, X_v \rangle = -\langle N, X_{vv} \rangle.$$

Logo, por (a) e (b), temos:

$$\begin{aligned} -\frac{\mathcal{L}}{\Lambda} X_u - \frac{\mathcal{M}}{\Lambda} X_v &= \frac{\langle N_u, X_u \rangle}{\Lambda} X_u + \frac{\langle N_u, X_v \rangle}{\Lambda} X_v + \langle N_u, N \rangle N = N_u; \\ -\frac{\mathcal{M}}{\Lambda} X_u - \frac{\mathcal{N}}{\Lambda} X_v &= \frac{\langle N_v, X_u \rangle}{\Lambda} X_u + \frac{\langle N_v, X_v \rangle}{\Lambda} X_v + \langle N_v, N \rangle N = N_v. \end{aligned}$$

(vi)

Como  $X_u$  é ortogonal a  $X_v$ , segue que  $H = \frac{\mathcal{L} + \mathcal{N}}{2\Lambda}$ .

(vii)

Como, pelo teorema 2.19:  $K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[ \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right]$ , sendo  $E = G = \Lambda$ ,

temos:

$$K = -\frac{1}{2\Lambda} \left[ \left( \frac{\Lambda_v}{\Lambda} \right)_v + \left( \frac{\Lambda_u}{\Lambda} \right)_u \right] = -\frac{1}{\Lambda} \left[ \frac{1}{2} \log(\Lambda)_{vv} + \frac{1}{2} \log(\Lambda)_{uu} \right] = -\frac{1}{\Lambda} \Delta \log \sqrt{\Lambda}$$

(viii)

Como  $\mathcal{L} = \langle X_{uu}, N \rangle$ , temos  $\mathcal{L}_v = \langle X_{uuv}, N \rangle + \langle X_{uu}, N_v \rangle$  e  $\mathcal{M}_u = \langle X_{uv}, N \rangle_u = \langle X_{uuv}, N \rangle + \langle X_{uv}, N_u \rangle$ . Logo,  $\mathcal{L}_v - \mathcal{M}_u = \langle X_{uu}, N_v \rangle - \langle X_{uv}, N_u \rangle$ .

Logo, por (i), (ii), (iv) e (v), temos:

$$\mathcal{L}_v - \mathcal{M}_u = -\frac{\mathcal{M}\Lambda_u}{2\Lambda^2} \langle X_u, X_u \rangle + \frac{\mathcal{N}\Lambda_v}{2\Lambda^2} \langle X_v, X_v \rangle + \frac{\mathcal{L}\Lambda_v}{2\Lambda^2} \langle X_u, X_u \rangle + \frac{\mathcal{M}\Lambda_u}{2\Lambda^2} \langle X_v, X_v \rangle = \frac{\mathcal{L} + \mathcal{N}}{2\Lambda} \Lambda_v = H\Lambda_v.$$

(ix) De modo similar a (viii):

Como  $\mathcal{M} = \langle X_{uv}, N \rangle$ , temos  $\mathcal{M}_v = \langle X_{uvv}, N \rangle + \langle X_{uv}, N_v \rangle$  e  $\mathcal{N}_u = \langle X_{vv}, N \rangle_u = \langle X_{uvv}, N \rangle + \langle X_{vv}, N_u \rangle$ . Logo,  $\mathcal{M}_v - \mathcal{N}_u = \langle X_{uv}, N_v \rangle - \langle X_{vv}, N_u \rangle$ .

Logo, por (ii), (iii), (iv) e (v), temos:

$$\mathcal{M}_v - \mathcal{N}_u = -\frac{\mathcal{M}\Lambda_v}{2\Lambda^2} \langle X_u, X_u \rangle - \frac{\mathcal{N}\Lambda_u}{2\Lambda^2} \langle X_v, X_v \rangle - \frac{\mathcal{L}\Lambda_u}{2\Lambda^2} \langle X_u, X_u \rangle + \frac{\mathcal{M}\Lambda_v}{2\Lambda^2} \langle X_v, X_v \rangle = -\frac{\mathcal{L} + \mathcal{N}}{2\Lambda} \Lambda_u = -H\Lambda_u.$$

(x) Temos  $H = \frac{\mathcal{L} + \mathcal{N}}{2\Lambda} \Rightarrow 2\Lambda H = \mathcal{L} + \mathcal{N}$ . Aplicando  $\frac{\partial}{\partial z}$  em ambos os lados, obtemos:

$$2\Lambda_z H + 2\Lambda H_z = \mathcal{L}_z + \mathcal{N}_z \Rightarrow \Lambda H_z = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_z + \mathcal{N}_z) - H\Lambda_z \quad (*)$$

Temos também:

$$\mathcal{L}_{\bar{z}} - \mathcal{N}_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_u + \frac{i}{2}\mathcal{L}_v - \frac{1}{2}\mathcal{N}_u - \frac{i}{2}\mathcal{N}_v = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_u - i\mathcal{L}_v) + i\mathcal{L}_v + \frac{1}{2}(\mathcal{N}_u - i\mathcal{N}_v) - \mathcal{N}_u = \mathcal{L}_z + \mathcal{N}_z + (-\mathcal{N}_u + i\mathcal{L}_v) \quad (**).$$

$$\text{Além disso, } -i\mathcal{M}_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\mathcal{M}_v - i\mathcal{M}_u). \quad (***)$$

Relacionando (viii), (ix), (\*\*) e (\*\*\*), temos:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{2}(\mathcal{L} - \mathcal{N}) - i\mathcal{M} \right]_{\bar{z}} &= \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{\bar{z}} - \mathcal{N}_{\bar{z}}) - i\mathcal{M}_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_z + \mathcal{N}_z) + \frac{1}{2}(\mathcal{M}_v - \mathcal{N}_u) + \frac{i}{2}(\mathcal{L}_v - \mathcal{M}_u) = \\ &= \frac{1}{2}(\mathcal{L}_z + \mathcal{N}_z) - \frac{1}{2}\Lambda_u H + \frac{i}{2}\Lambda_v H = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_z + \mathcal{N}_z) - H\Lambda_z. \quad (***) \end{aligned}$$

Juntando (\*) e (\*\*\*), obtemos:

$$[\frac{1}{2}(\mathcal{L} - \mathcal{N}) - i\mathcal{M}]_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_z + \mathcal{N}_z) + \Lambda H_z - \frac{1}{2}(\mathcal{L}_z + \mathcal{N}_z) = \Lambda H_z.$$

Para demonstrar (xi), (xii), (xiii), (xiv) e (xv), notemos que, a partir da mudança de variável  $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ , temos:

$$(*) \begin{cases} X_u = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}X_\rho - \frac{v}{u^2+v^2}X_\theta = \cos \theta X_\rho - \frac{\sin \theta}{\rho}X_\theta \\ X_v = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}X_\rho + \frac{u}{u^2+v^2}X_\theta = \sin \theta X_\rho + \frac{\cos \theta}{\rho}X_\theta \\ \Lambda_u = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\Lambda_\rho - \frac{v}{u^2+v^2}\Lambda_\theta = \cos \theta \Lambda_\rho - \frac{\sin \theta}{\rho}\Lambda_\theta \\ \Lambda_v = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\Lambda_\rho + \frac{u}{u^2+v^2}\Lambda_\theta = \sin \theta \Lambda_\rho + \frac{\cos \theta}{\rho}\Lambda_\theta \end{cases}$$

Além disso:

$$(**) \begin{cases} X_\rho = \cos \theta X_u + \sin \theta X_v \\ X_\theta = -\rho \sin \theta X_u + \rho \cos \theta X_v \\ X_{\rho\rho} = \cos^2 \theta X_{uu} + \sin(2\theta)X_{uv} + \sin^2 \theta X_{vv} \\ X_{\rho\theta} = -\sin \theta X_u + \cos \theta X_v - \frac{\rho \sin(2\theta)}{2}X_{uu} + \frac{\rho \sin(2\theta)}{2}X_{vv} - r \cos(2\theta)X_{uv} \\ X_{\theta\theta} = -\rho \cos \theta X_u - \rho \sin \theta X_v + \rho^2 \sin^2 \theta X_{uu} + \rho^2 \cos^2 \theta X_{vv} - \rho^2 \sin(2\theta)X_{uv} \end{cases}$$

Combinando (i), (ii), (iii), (iv), (v), (\*) e (\*\*), chegamos a todas as relações desejadas.

**Corolário 4.2.2.**  $F = \frac{\mathcal{L}-\mathcal{N}}{2} - i\mathcal{M}$  é holomorfa  $\Leftrightarrow H$  é constante.

### 4.3 A curvatura gaussiana em termos da representação de Enneper-Weierstrass

Dada  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície mínima, seja  $\varphi$  a função definida como no lema 4.0.3 e  $f$  e  $g$  as funções correspondentes a  $X$  na representação de Enneper-Weierstrass, temos  $\varphi = X_u - iX_v \Rightarrow \varphi' = X_{uu} - iX_{uv}$ , logo,

$$l := \langle \varphi', N \rangle = \mathcal{L} - i\mathcal{M} = -\mathcal{N} - i\mathcal{M}$$

é tal que:

$$(i) |l|^2 = \mathcal{L}^2 + \mathcal{M}^2;$$

(ii)  $l$  é holomorfa (conclusão feita a partir do corolário 4.2.2).

Por outro lado, usando que  $N = \frac{1}{1+|g|^2}(2\text{Reg}, 2\text{Img}, |g|^2 - 1)$ :

$$(iii) \varphi = \frac{1}{2}f(1 - g^2, i + ig^2, 2g) \Rightarrow \varphi' = \frac{1}{2}f' \frac{\varphi}{f} + \frac{1}{2}f(-2gg', 2ig'g', 2g');$$

(iv)  $\langle N, \varphi \rangle = \frac{1}{2(1+|g|^2)}f(2(1 - g^2)\text{Reg} + 2i(1 + g^2)\text{Img} + 2g|g|^2 - 2g) = \frac{f}{1+|g|^2}(\text{Reg} - g^2\text{Reg} + i\text{Img} + ig^2\text{Img} + g|g|^2 - g) = \frac{fg^2}{1+|g|^2}(-\text{Reg} + i\text{Img} + \bar{g}) = 0$ , onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é o produto escalar usual em  $\mathbb{C}$ , definido por  $\langle (z_1, z_2, z_3), (z_4, z_5, z_6) \rangle = z_1z_4 + z_2z_5 + z_3z_6$ .

$$\text{Logo, } \langle \varphi', N \rangle = \frac{2fg'}{1+|g|^2}(-g\text{Reg} + ig\text{Img} + \frac{1}{2}|g|^2 - \frac{1}{2}) = \frac{2fg'}{1+|g|^2}(-g\bar{g} + \frac{1}{2}|g|^2 - \frac{1}{2}) = \frac{2fg'}{1+|g|^2}(-\frac{1}{2}|g|^2 - \frac{1}{2}) = -fg'.$$

Com isso, a curvatura Gaussiana pode ser escrita como:

$$K = \frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{EG - F^2} = -\frac{\mathcal{L}^2 + \mathcal{M}^2}{\Lambda^2} = -\frac{|\langle \varphi', N \rangle|^2}{\Lambda^2} = -\left(\frac{|fg'|}{\Lambda}\right)^2.$$

Mas  $\Lambda = \langle X_u, X_u \rangle = \langle \frac{1}{2}(\varphi + \bar{\varphi}), \frac{1}{2}(\varphi + \bar{\varphi}) \rangle = \frac{1}{4}|\varphi|^2$ , então:

$$\begin{aligned} 2\Lambda &= \sum_{i=1}^3 [(X_u^i)^2 + (X_v^i)^2] = \frac{1}{2}[(X_u^1)^2 - 2X_u^1X_v^2 + (X_v^2)^2 + (X_u^2)^2 + 2X_u^2X_v^1 + (X_v^1)^2 + \\ &2(X_u^3)^2 + 2(X_v^3)^2 + (X_u^1)^2 + 2X_u^1X_v^2 + (X_v^2)^2 + (X_v^1)^2 - 2X_v^1X_u^2 + (X_u^2)^2] = \frac{1}{2}[(X_u^1 - X_v^2)^2 + \\ &(-X_u^2 - X_v^1)^2 + 2((X_u^3)^2 + (X_v^3)^2) + (X_u^1 + X_v^2)^2 + (-X_v^1 + X_u^2)^2] = \frac{1}{2}[|X_u^1 - X_v^2 + (-X_u^2 - \\ &X_v^1)i|^2 + 2|X_u^3 - iX_v^3|^2 + |X_u^1 + X_v^2 + (-X_v^1 + X_u^2)i|^2] = \frac{1}{2}[|\varphi_1 - i\varphi_2|^2 + 2|fg|^2 + |\varphi_1 + i\varphi_2|^2] = \\ &\frac{1}{2}[|f|^2 + 2|fg|^2 + |fg^2|^2] = \frac{1}{2}|f|^2[1 + 2|g|^2 + |g|^4] \\ &\Rightarrow \Lambda = \frac{1}{4}|f|^2(1 + |g|^2)^2. \end{aligned}$$

Assim:

$$K = -\left(\frac{|fg'|}{\Lambda}\right)^2 = -\left(\frac{4|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2}\right)^2.$$

## Capítulo 5

# Superfícies Mínimas com Curvatura Total Finita

A curvatura total de uma superfície  $M$  é definida como sendo a área da imagem de  $M$  pela aplicação normal de Gauss (ou imagem esférica) em  $\mathbb{S}^2$  (contando com multiplicidade e sinal) ou, equivalentemente, a curvatura total de  $M$ :  $C(M) = \int_M K dA$ , onde  $K$  é a função curvatura gaussiana de  $M$  (veja [17]). Neste capítulo veremos propriedades geométricas de superfícies mínimas e completas de curvatura total finita. Começamos então com o seguinte resultado:

**Lema 5.0.1** (Osserman). *Seja  $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma parametrização isotérmica de uma superfície regular e mínima  $M$ . Então ou  $M$  está contido em um plano ou a aplicação normal de Gauss  $g$  assume todos os valores na esfera unitária com a possível exceção de no máximo dois pontos.*

**Demonstração:** Usando as notações e resultados da Seção 4.1, dada a aplicação  $\varphi = X_u - iX_v$ , temos que  $g = \frac{\varphi_3}{\varphi_1 - i\varphi_2}$ . Se  $\varphi_3 \equiv 0$ , temos que  $M$  estará contida em um plano. Caso contrário, temos que, como  $g$  é meromorfa em  $\mathbb{C}$ ,  $g$  é constante (implicando também que  $M$  está contido em um plano) ou, por consequência do teorema de Picard (Teorema 2.2.7)  $g$  assume todos os valores de  $\mathbb{S}^2$ , com a possível exceção de no máximo dois pontos (caso  $g$  não assuma um determinado valor  $z_0$  na esfera de Riemann, podemos supor,

rotacionando a superfície, se necessário, que  $z_0 = \infty$  e, assim, teremos que  $g$  é uma função inteira).

**Observação 5.0.2.** *Na Seção 4.1 tivemos os exemplos do plano, do catenoide, do helicóide e da superfície de Enneper. A partir da aplicação  $g$  da representação de Enneper-Weierstrass, podemos deduzir a curvatura total de ambas as superfícies. Para o plano, a aplicação  $g$  é constante e, portanto, a imagem esférica do plano possui área nula e, portanto, a curvatura total do plano é 0. Para o catenoide temos  $g(z) = z$ ,  $g$  definida em  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  e, portanto, a imagem esférica do catenoide é a esfera menos dois pontos e, além disso,  $g$  é injetiva. Como a curvatura em cada ponto é negativa, logo se conclui que a curvatura total do catenoide será  $-4\pi$ , uma vez que a área de  $\mathbb{S}^2$  é  $4\pi$ . De modo análogo, conclui-se que a curvatura total da superfície de Enneper é  $-4\pi$ . Finalmente, quanto à curvatura total do helicóide, temos  $g(z) = e^{iz}$ , que possui uma singularidade essencial em  $\infty$  e, portanto, pelo teorema de Picard,  $g$  assume, com a possível exceção de no máximo um ponto, todos os valores de  $\mathbb{C}$  infinitas vezes e, portanto, a área da imagem esférica (contando com multiplicidade) será  $\infty$ . Logo, o helicóide possui curvatura total igual a  $-\infty$ .*

**Teorema 5.0.3** (Osserman). *Seja  $M$  uma superfície mínima completa, então ou  $M$  é um plano ou a imagem da aplicação  $g$  é um subconjunto denso de  $\mathbb{S}^2$ .*

Para uma demonstração desse teorema, veja [18].

**Teorema 5.0.4.** *Seja  $M$  uma superfície regular completa tal que  $K \leq 0$  e  $\int_M |K| dA < \infty$ , então existe uma superfície compacta  $\tilde{M}$  e pontos  $p_1, p_2, \dots, p_k$  em  $\tilde{M}$  tal que existe um difeomorfismo conforme entre  $M$  e  $\tilde{M} \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ .*

Para uma demonstração desse teorema, veja [18].



**Definição 5.0.5.** Uma aplicação  $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}$  é dito ter *variação limitada* (ou ser *lipschitziana*) se satisfizer a condição:  $\|\alpha(p_1) - \alpha(p_2)\| \leq K\|p_1 - p_2\|$  para algum  $K > 0$  e para todo  $p_1, p_2 \in U$ .

**Definição 5.0.6.** Uma imersão mínima  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  de  $M$  é dita ser *regular no infinito* se existir um compacto  $K \subset M$  tal que  $M \setminus K$  consiste de  $r$  componentes  $M_1, \dots, M_r$  tais que cada  $M_i$  é o gráfico de uma aplicação  $u_i$  de variação limitada definida no complemento de uma região limitada de algum plano  $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ .

Quando as componentes  $M_i$  acima são superfícies mergulhadas para algum  $K$  compacto escolhido como acima, dizemos que os fins de  $M$  são mergulhados. Note que nada impede de dois fins distintos se intersectarem.

**Teorema 5.0.7** (Jorge-Meeks). *Suponha que  $M$  seja uma superfície mínima em  $\mathbb{R}^3$  completa, de curvatura total finita e  $k$  fins, tem-se então:*

$$C(M) \leq 2\pi(\chi(M) - k),$$

onde  $\chi(M)$  é a característica de Euler de  $M$ . Além disso, a igualdade acima ocorre se, e somente se, os fins de  $M$  são mergulhados.

Para mais detalhes, veja [19].

**Corolário 5.0.8.** *O catenoide é o único anel mínimo mergulhado e completo em  $\mathbb{R}^3$  com curvatura total finita.*

**Demonstração:** Suponha que  $M$  seja uma superfície mínima e completa mergulhada em  $\mathbb{R}^3$  com curvatura total finita e topologia de um anel. Como  $\chi(M) = 0$  e  $k = 2$ , suponha que  $C(M) = -4\pi$ . Por [18],  $M$  é um catenoide ou a superfície de Enneper, no qual essa última não é mergulhada em  $\mathbb{R}^3$ .

**Proposição 5.0.9.** *Se  $M$  possui curvatura total finita e cada fim de  $M$  é mergulhado, então  $M$  é regular no infinito.*

**Lema 5.0.10.** *Seja  $M$  uma superfície mínima completa de curvatura total finita e seja  $\tilde{M}$  como no teorema 5.0.3, então a aplicação normal de Gauss  $g$  de  $M$  estende meromorficamente a  $\tilde{M}$ .*

**Demonstração:** Como a função curvatura gaussiana  $K$  em  $M$  é negativa, temos que:

$$\left| \int_M K dA \right| = \int_M -K dA.$$

Seja  $p \in \tilde{M}$  um fim de  $M$ , suponha sem perda de generalidade que  $p = (0, 0, -1) \in \mathbb{S}^2$  (no caso, basta aplicar uma translação e depois uma rotação em  $\tilde{M}$ ). Temos que em uma vizinhança suficientemente pequena  $V$  de  $0$ ,  $g$  é holomorfa em  $V \setminus \{0\}$ . Suponha que  $g$  possua uma singularidade essencial em  $0$ , pelo teorema de Picard, temos que  $g$  assume em  $V \setminus \{0\}$  todos os valores de  $\mathbb{S}^2$  com a possível exceção de no máximo dois pontos infinitas vezes. Portanto,  $\int_M -K dA$ , que seria a área da imagem esférica de  $M$  contada com multiplicidade seria a área de  $\mathbb{S}^2$  contada com uma multiplicidade infinita, portanto,  $M$  teria curvatura total infinita (contradição). Portanto,  $g$  estende meromorficamente a  $p$ .

**Demonstração da proposição 5.0.9:** Suponha que  $M$  possua curvatura total finita e que cada fim de  $M$  é mergulhado. Dado um fim  $p$  de  $M$ , precisamos mostrar que  $X$  possui variação limitada em  $p$ . Como no lema anterior, considere  $X|_{A(0,0,r)} : A(0,0,r) \rightarrow \mathbb{R}^3$  a parametrização de uma vizinhança suficientemente pequena de um fim de  $M$  (que é conformemente equivalente a um disco furado). Logo, em  $A(0,0,r)$ :

$$X^j(z) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^{(z)} \varphi_j(z) dz, \quad j = 1, 2, 3$$

Temos que cada  $\varphi_j$  é holomorfa em  $A(0,0,r)$ , possui polo em  $0$  e satisfazem à relação  $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$ . Podemos supor que o limite dos vetores normais a  $M$  no fim corres-

pondente a  $p$  é  $(0, 0, -1)$ , o que nos faz deduzir que  $\varphi_3$  possui em 0 um polo de ordem menor que em  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ .

Afirmamos que o fato de o fim  $p$  ser mergulhado implica que ambos  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  possuem polos de ordem 2 em 0 pois, caso contrário, suponha que possua um polo de ordem  $n > 2$  em 0. Para  $i = 1, 2$ , a aplicação  $\Phi_i$  que é tal que  $\varphi_i = \Phi_i'$  teria um polo de ordem  $n - 1 \geq 2$  em 0 e, portanto, em uma vizinhança suficientemente pequena  $V$  de 0,  $\Phi_i(z) = z^{-n+1}\psi_i(z)$ , com  $\psi_i$  holomorfa e  $\psi_i(0) \neq 0$ . Com isso, a aplicação  $\mu_i$  definida por  $\mu_i(z) = \frac{1}{\Phi_i(z)} = \frac{z^{n-1}}{\psi_i(z)}$  teria um zero de ordem  $n - 1$  em  $z = 0$ . Portanto, para mostrar que  $X_i$  não é injetiva em tal fim de  $M$ , resta mostrar que  $\mu_i$  não é injetiva em qualquer vizinhança pequena de 0. Escreva, numa vizinhança de 0,  $\mu_i(z) = a_{n-1}z^{n-1} + H_i(z)$ , com  $H_i$  tendo um zero de ordem pelo menos  $n$  em  $z = 0$ . Para  $z_0$  suficientemente pequeno em módulo, escreva  $\mu_i(z) - z_0 = F_i(z) + H_i(z)$ , com  $F_i(z) = a_{n-1}z^{n-1} - z_0$  e de modo que  $|H_i(z)| < |F_i(z)|$  para  $z$  pertencente a um pequeno disco centrado em 0. Portanto, pelo teorema de Rouché (Teorema 2.2.8),  $\mu_i(z) - z_0$  possui pelo menos dois zeros, implicando que  $\mu_i$  não é injetora e, portanto,  $\Phi_i$  também não será injetora em toda vizinhança de 0. Por fim,  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  não podem ter polos de ordem 1 porque  $\varphi_3$  precisa ter um polo em 0 de ordem menor que em  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ .

Logo,  $\varphi_3$  é holomorfa ou possui um polo de ordem 1 em 0.

Assim, as séries de Laurent de  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  e  $\varphi_3$  ficam:

$$\varphi_1(z) = a_{-2}z^{-2} + a_{-1}z^{-1} + O(1), \quad \varphi_2(z) = b_{-2}z^{-2} + b_{-1}z^{-1} + O(1), \quad \varphi_3(z) = c_{-1}z^{-1} + \lambda + O(|z|)$$

A partir da relação  $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 0$ , podemos tirar facilmente as seguintes conclusões:

(i)  $a_{-2}^2 + b_{-2}^2 = 0$ ;

(ii) Devemos ter  $X_1$  e  $X_2$  independentes da curva considerada acima, o que é equivalente, pelo teorema dos resíduos (veja [14]), a termos  $a_{-1}$  e  $b_{-1}$  reais e o coeficiente de  $z^{-3}$  de  $\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2$  igual a 0. Assim:

$$2a_{-2}a_{-1} + 2b_{-2}b_{-1} = 0.$$

Por (i), temos  $a_{-2} = \pm ib_{-2}$ , com isso:

$$2a_{-2}a_{-1} \pm i2a_{-2}b_{-1} = 0.$$

$$\Rightarrow a_{-1} = \pm ib_{-1}.$$

O que conclui que  $a_{-1} = b_{-1} = 0$ . Assim:

$$\varphi_1(z) = a_{-2}z^{-2} + O(1), \quad \varphi_2(z) = b_{-2}z^{-2} + O(1), \quad \varphi_3(z) = c_{-1}z^{-1} + \tau + O(|z|), \quad c_{-1} \in \mathbb{R}.$$

A menos de rotação, como  $a_{-2} = \pm b_{-2}$ , podemos supor que  $a_{-2} \in \mathbb{R}$  e  $b_{-2} \in i\mathbb{R}$ . Vamos considerar o plano  $(X_1, X_2, 0)$  e verificar que  $X_3$  como uma função de  $X_1$  e  $X_2$  possui variação limitada. Temos assim:

$$X_1(u, v) = -a_{-2} \frac{u}{|z|^2} + O(|z|), \quad X_2 = -a_{-2} \frac{v}{|z|^2} + O(|z|), \quad X_3 = \gamma \log |z| + \tau_1 u - \tau_2 v + O(|z|^2).$$

Onde  $\tau = \tau_1 + i\tau_2$ ;  $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$ . Em vista disso, temos que, sendo  $x = (X_1, X_2)$ :

$$u = -\frac{X_1}{a_{-2}(X_1^2 + X_2^2)} + O(\|(X_1, X_2)\|^{-3}), \quad v = -\frac{X_2}{a_{-2}(X_1^2 + X_2^2)} + O(\|(X_1, X_2)\|^{-3}).$$

Com isso,  $|z| = \frac{1}{|a_{-2}\|(X_1, X_2)\|} + O(\|(X_1, X_2)\|^{-3})$ . Substituindo na expressão que determina  $X_3$ , temos que  $X_3$  assumirá a forma

$$X_3 = a \log(\|(X_1, X_2)\|) + b + \frac{c_1 X_1}{X_1^2 + X_2^2} + \frac{c_2 X_2}{X_1^2 + X_2^2} + O(\|(X_1, X_2)\|^{-2}),$$

o que implica que  $X_3$  possui variação limitada no complemento de uma vizinhança de 0 do plano  $(X_1, X_2, 0)$  de  $\mathbb{R}^3$ , concluindo a regularidade de  $M$  no infinito.

□

Em um determinado fim de uma determinada superfície mínima completa com curvatura total finita, a representação de Enneper-Weierstrass é tal que  $g$  tem um polo em 0 e, a partir de uma mudança de coordenadas na esfera de Riemann (uma rotação que leva o 0 no  $\infty$ ), devemos ter que  $g(\frac{1}{z})$  tenha um zero de mesma ordem em  $\infty$ , temos que  $g$  é da forma  $g(z) = \lambda z^n$ , onde  $n$  é o polo da  $g$  em 0. Através de rotação e homotetia no disco furado, podemos supor que  $\lambda = 1$ .

Observa-se, então, que a partir das relações encontradas para  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  e  $\varphi_3$  acima e supondo que o fim tenha  $(0,0,-1)$  como vetor normal limite, que  $g$  e  $f$  podem ser escritas na forma:

$$g(z) = z^n, \quad f(z) = \sum_{\alpha=-2}^{\infty} a_{\alpha} z^{\alpha}.$$

Como  $X_3(z) = \operatorname{Re} \int^z fg dz$ , temos que, se  $n = 1$ ,  $fg$  terá um polo de ordem um em 0 e  $X_3(z) \approx a_{-2} \log(|z|) + u_0$  próximo de 0, o que nos permite afirmar que o fim será assintótico a um catenoide. No caso em que  $n > 1$ ,  $fg$  será holomorfa em 0 e teremos  $X_3(z) \approx a_{-2} z^{n-2} + u_0$ , no qual se  $n = 2$ ,  $X_3$  será assintótico ao plano  $x_3 = a_{-2} + u_0$  e se  $n > 2$ , será assintótico ao plano  $x_3 = u_0$ . Logo, de toda sorte,  $X_3$  será assintótico a um plano.

Assim, dada uma superfície mínima com curvatura total finita e dado um fim mergulhado, diremos que o fim será catenoidal quando for assintótico a um catenoide e será planar se for assintótico a um plano. Os resultados acima nos garante que uma superfície mínima completa e fins nas condições acima terão que ter fins catenoidais ou planares.

## Capítulo 6

# Superfícies mínimas capilares à bola euclidiana tridimensional.

O problema de encontrar superfícies capilares, mesmo na bola unitária em  $\mathbb{R}^3$ , é tema de muitos projetos de pesquisas nos dias de hoje. Vamos abordar uma parte deles considerando o seguinte problema:

**Problema 6.0.1.** *Seja  $D$  o disco unitário e fechado em  $\mathbb{R}^2$  e sejam  $k_1, \dots, k_n$  pontos em  $D$ . Determinar as imersões mínimas capilares  $X : D \setminus \{k_1, \dots, k_n\} \rightarrow B$ , onde  $B$  é a bola de centro 0 e raio 1 em  $\mathbb{R}^3$ .*

Neste capítulo, buscaremos trabalhar em cima desse problema. É fácil notar que  $M$  terá  $n + 1$  componentes de bordo. Para  $n = 0$ , temos o exemplo do disco e, para  $n = 1$ , temos o exemplo do catenoide (veja a figura 6.1).

Vamos agora a um resultado envolvendo linhas de curvaturas.

**Teorema 6.0.2** (Terquem-Joachimsthal). *Sejam  $M_1$  e  $M_2$  superfícies regulares e  $c \subset M_1 \cap M_2$  uma curva que é uma linha de curvatura de  $M_1$ . Então  $c$  é uma linha de curvatura em  $M_2$  se, e somente se,  $M_1$  e  $M_2$  se intersectam em um ângulo constante ao longo de  $c$ , isto é, quando o ângulo entre os vetores normais a  $M_1$  e  $M_2$  ao longo de  $c$  é constante.*

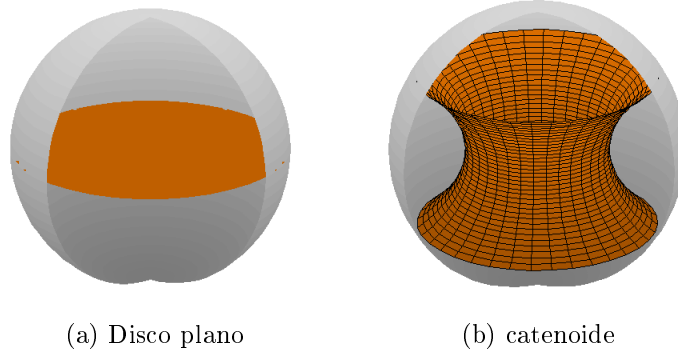


Figura 6.1: disco e catenoide capilares a  $B^3$ .

**Demonstração:** Dado  $p \in c$ , vamos supor que  $c(0) = p$ . Sejam  $N_1$  e  $N_2$  campos normais e unitários definidos em um subconjunto aberto de  $M_1$  e  $M_2$ , respectivamente, de modo que ambos os campos estejam definidos em  $p$ . Assim, existe  $a > 0$  tal que  $N_1$  e  $N_2$  está definido em todo  $c|_{(-a,a)}$ . Assim, para cada  $s \in (-a, a)$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \langle N_1(c(s)), N_2(c(s)) \rangle &= \left\langle \frac{dN_1(c(s))}{ds}, N_2(c(s)) \right\rangle + \left\langle N_1(c(s)), \frac{dN_2(c(s))}{ds} \right\rangle \\ &= \left\langle -k(s) \frac{dc}{ds}, N_2(c(s)) \right\rangle + \left\langle N_1(c(s)), \frac{dN_2(c(s))}{ds} \right\rangle \\ &= \left\langle N_1(c(s)), \frac{dN_2(c(s))}{ds} \right\rangle. \end{aligned}$$

Se  $c$  é uma linha de curvatura em  $M_2$ , segue que o termo da última igualdade acima é zero. Logo,  $\langle N_1(c(s)), N_2(c(s)) \rangle$  é constante e, portanto,  $M_1$  e  $M_2$  se intersectarão em um ângulo constante ao longo de  $c$ .

Reciprocamente, suponha que  $M_1$  intersecta  $M_2$  em um ângulo constante ao longo de  $c$ , ou seja, que  $\langle N_1(c(s)), N_2(c(s)) \rangle$  seja constante. Temos então, pela expressão acima que  $\langle N_1(c(s)), \frac{dN_2(c(s))}{ds} \rangle = 0$ , ou seja, temos a relação:

$$N_1(c(s)) \perp \frac{dN_2(c(s))}{ds} \perp N_2(c(s)).$$

Se  $N_1(c(s))$  e  $N_2(c(s))$  são vetores LI, seguirá que  $N_1(c(s)) \perp c'(s) \perp N_2(c(s))$  e, portanto,  $\frac{dN_2(c(s))}{ds}$  será múltiplo de  $c'(s)$ . Logo,  $c$  será linha de curvatura de  $M_2$ . Se  $N_1(c(s))$  e  $N_2(c(s))$  não são LI, tem-se  $N_1(c(s)) = \pm N_2(c(s))$  para todo  $s$ , desse modo,

segue que  $\frac{dN_2(c(s))}{ds} = \pm \frac{dN_1(c(s))}{ds}$  é múltiplo de  $c'(s)$  e, portanto,  $c$  é uma linha de curvatura de  $M_2$ .

Esse resultado implica que, se  $M$  intersecta uma dada esfera  $S$  a um ângulo constante ao longo de uma curva  $c$ , então  $c$  é uma linha de curvatura de  $M$ .

Voltando ao problema 6.0.1, temos então que se  $M$  é uma solução do problema, então suas componentes de bordo são linhas de curvaturas. Dada uma solução  $M$ , temos que  $X(\mathbb{S}^1)$  é uma componente de bordo de  $M$ . Além disso, pela proposição 4.2.1 item (xv), temos, usando as mesmas notações mencionadas em tal proposição e usando a parametrização em coordenadas polares:

$$N_\theta = \frac{\beta}{\rho\Lambda} X_\rho + \frac{1}{\Lambda} \left( \frac{\alpha}{\rho^2} - \Lambda H \right) X_\theta. \quad (*)$$

Como  $X(\mathbb{S}^1) = X(1, \cdot)$  é parametrizada em  $\theta$  fixando  $\rho = 1$ , temos que, em  $X(1, \cdot)$ ,  $N_\theta = dN \cdot X_\theta$  é múltiplo de  $X_\theta$ . Em coordenadas isotérmicas, temos que  $X_\theta \perp X_\rho$ , já que  $\langle X_\rho, X_\theta \rangle = \langle X_u \cos \theta + X_v \sin \theta, -\rho \sin \theta X_u + \rho \cos \theta X_v \rangle = -\rho \sin \theta \cos \theta \|X_u\|^2 + \rho \sin \theta \cos \theta \|X_v\|^2$ , como  $\|X_u\| = \|X_v\|$ , segue que  $\langle X_\rho, X_\theta \rangle = 0$ . Isso implica que, pela expressão (\*),  $\beta \equiv 0$  em  $\mathbb{S}^1$ . Logo, a aplicação  $\Phi = \alpha + i\beta = z^2(\mathcal{L} - i\mathcal{M})$  da proposição 4.2.1 é real em  $\mathbb{S}^1$ .

Com esse fato, podemos demonstrar o seguinte teorema, para o caso  $n = 0$  no problema inicial:

**Teorema 6.0.3.** *Se  $X : D(0, 1) \rightarrow B^3$  é uma imersão capilar e mínima de um disco na bola euclidiana tridimensional, então a imagem de  $X$  é um disco plano.*

**Demonstração:** Seja  $D = D(0, 1)$ , com as notações da proposição 4.2.1, temos que, pelo resultado anterior,  $\beta \equiv 0$  em  $\partial D$ . Como  $\beta$  é uma função harmônica, temos que, pelos princípios do máximo e do mínimo,  $\beta$  é constante e nula em  $D$ . Logo, pelas condições de Cauchy-Riemann,  $\alpha$  também é constante em  $D$ . Logo,  $\Phi \equiv \lambda \in \mathbb{R}$ .



Seja  $(f, g)$  o par de Enneper-Weierstrass de  $X$ , pela relação  $fg' = -\mathcal{N} - i\mathcal{M}$  (encontrado no início da Seção 4.3), temos:

$$\Phi(z) = z^2 f(z)g'(z) = \lambda \Rightarrow f(z)g'(z) = \lambda z^{-2}.$$

A menos de rotação, podemos supor que a imagem da aplicação normal de Gauss em  $z = 0$  é  $(0, 0, -1)$ , isto é, que  $g(0) = 0$  e, com isso, temos que  $g$  é holomorfa em um disco  $D(0, r)$  para algum  $r \leq 1$ . Para esse mesmo  $r$ , temos que  $g'$  será holomorfa em  $D(0, r)$  (é fato que o raio de convergência de uma função holomorfa é o mesmo do de sua derivada). Sendo  $f$  holomorfa, temos então que  $fg'$  é holomorfa em  $z = 0$ . Com isso,  $f(0)g'(0) \in \mathbb{C}$  e, portanto, devemos ter  $\lambda = 0$ . Logo,  $fg' \equiv 0$ , o que implica que  $f \equiv 0$  ou  $g' \equiv 0$ , no qual a primeira possibilidade não pode ocorrer já que os únicos zeros de  $f$  seriam em eventuais polos de  $g$ . Assim,  $g' \equiv 0$  e, portanto,  $g$  é uma função constante. Assim, a aplicação normal de Gauss de  $X$  é constante e, portanto,  $X$  determina uma superfície contida em um plano. Logo, a imagem de  $X$  é um disco plano.

□

Em outras palavras, o teorema 6.0.3 nos garante que as únicas superfícies capilares mínimas na bola tridimensional com a topologia de um disco são os discos planos.

Para o caso  $n = 1$ , podemos considerar para o problema inicial do capítulo o domínio da  $X$  como sendo, sem perda de generalidade, o disco unitário furado  $D(0, 1) \setminus \{0\}$ . Nesse caso, o disco furado pode ser substituído pelo anel  $A = \{z \in \mathbb{C}; 0 < r < z < 1\}$ . Temos, assim, que  $\partial X(A)$  terá duas componentes conexas e serão linhas de curvaturas de  $X$ . Logo, usando os mesmos argumentos usados anteriormente, a aplicação  $\Phi$  terá parte imaginária nula e, portanto, será uma função real constante.

O problema para o caso  $n = 1$  até os dias de hoje ainda é estudado. Um caso particular foi enunciado por Fraser e Li, usando um caso particular, que é quando o ângulo  $\theta$  entre a superfície e a esfera, que é o bordo da bola, é igual a  $90^\circ$ , que é conhecido como o caso *de fronteira livre*, mencionado na introdução desse trabalho.

## 6.1 O catenoide crítico

Considere, para cada  $a > 0$ , o catenoide  $\mathcal{C}_a$  em  $\mathbb{R}^3$  parametrizado por

$$X_a(\rho, \theta) = (a \cosh(\rho/a) \cos \theta, a \cosh(\rho/a) \sin \theta, \rho),$$

temos:

$$(X_a)_\rho = (\sinh(\rho/a) \cos \theta, \sinh(\rho/a) \sin \theta, 1);$$

$$(X_a)_\theta = (-a \cosh(\rho/a) \sin \theta, a \cosh(\rho/a) \cos \theta, 0);$$

de modo que:

$$\begin{aligned} N_a &= \frac{(-a \cosh(\rho/a) \cos \theta, -a \cosh(\rho/a) \sin \theta, a \sinh(\rho/a) \cosh(\rho/a))}{\|(-a \cosh(\rho/a) \cos \theta, -a \cosh(\rho/a) \sin \theta, a \sinh(\rho/a) \cosh(\rho/a))\|} = \\ &= \left( -\frac{\cos \theta}{\cosh(\rho/a)}, -\frac{\sin \theta}{\cosh(\rho/a)}, \tanh(\rho/a) \right). \end{aligned}$$

Desejamos encontrar  $a$  de modo que o catenoide  $\mathcal{C}_a$  intersecte a esfera  $\mathbb{S}^2$  ortogonalmente. Isso será equivalente a encontrar  $a$  e  $\rho_0$  de modo que tenhamos  $X_a(\rho_0, \theta)$ , considerando como o vetor posição, múltiplo de  $(X_a)_\rho(\rho_0, \theta)$  para todo  $\theta$ . Para isso ocorrer, pelas expressões acima é necessário que tenhamos, para todo  $\theta$ ,  $\rho_0 \cdot (X_a)_\rho(\rho_0, \theta) = X_a(\rho, \theta)$  e  $\|X_a(\rho_0, \theta)\| = 1$ , o que nos dá o sistema de equações:

$$\begin{cases} a \cosh(\rho_0/a) = \rho_0 \sinh(\rho_0/a) \\ a^2 \cosh^2(\rho_0/a) + \rho_0^2 = 1 \end{cases}.$$

Elevando a primeira equação ao quadrado e subtraindo a segunda, chegamos a

$$\rho_0 \cosh(\rho_0/a) = 1, \quad (*)$$

como a aplicação  $\rho \mapsto \rho \cosh(\rho/a)$  é crescente em  $(0, \infty)$ , conclui-se então que, dado um  $a > 0$ , existirá somente um  $\rho_0 > 0$  que satisfaz a (\*). Além disso, percebe-se que tal  $\rho_0$  é menor que 1, uma vez que a função  $\cosh$  é maior que um nos números positivos. Com isso, considere a equação  $a^2 \cosh^2(\rho_0/a) + \rho_0^2 = 1$  e  $\rho_0$  de modo que valha (\*), temos  $\frac{a^2}{\rho_0^2} + \rho_0^2 = 1 \Rightarrow a^2 + \rho_0^4 = 1$ , que é uma equação que possui somente uma raiz  $a$  positiva.

Assim, existe um único  $a > 0$  que torna  $\mathcal{C}_a$  ortogonal a  $\mathbb{S}^1$ .

**Definição 6.1.1.** *Seja  $\mathcal{C}_a$  o catenoide parametrizado por:*

$$X_a(\rho, \theta) = (a \cosh(\rho/a) \cos \theta, a \cosh(\rho/a) \sin \theta, \rho)$$

*que é ortogonal à esfera  $\mathbb{S}^1$ , chamamos de **catenoide crítico** o pedaço do catenoide  $\mathcal{C}_a$  que se encontra no interior da bola euclidiana tridimensional  $B^3$ .*

O catenoide crítico possui a topologia de um anel. A seguinte conjectura caracterizaria um catenoide crítico.

**Conjectura 6.1.2** (Fraser e Li). *Uma imersão mínima de fronteira livre  $X : D(0,1) \setminus \{0\} \rightarrow B^3$ ,  $X \in C^2(D(0,1) \setminus \{0\}) \cap C^1(\mathbb{S}^1)$  e duas componentes de bordo é o catenoide crítico.*

Alguns resultados parciais da conjectura já foram dados. Por exemplo, A. Fraser e R. Schoen, com a hipótese adicional de que as funções coordenadas do vetor posição são as primeiras autofunções de Stecklov, então a superfície é congruente ao Catenóide crítico. P. McGrath obteve outro resultado parcial assumindo que a superfície seja invariante sob reflexões em relação a três hiperplanos ortogonais  $\pi$ ,  $i = 1, 2, 3$ , então a superfície é congruente ao Catenóide crítico.

## 6.2 Uma caracterização do plano e do catenoide como superfícies mínimas

Nesta seção, veremos o seguinte resultado que caracteriza o plano e o catenoide como superfícies mínimas, a partir do trabalho de Yeon [8].

**Teorema 6.2.1.** *Seja  $A$  o anel  $A(0,0,1) \subset \mathbb{C}$  e  $X : A \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus B^3(0,1)$ ,  $X$  de classe  $C^2$  no interior de  $A$  e de classe  $C^1$  na fronteira de  $A$ , uma parametrização de uma superfície mínima  $M$  que intersecta a esfera unitária centrada na origem a um ângulo constante (isto é, capilar a  $\mathbb{R}^3 \setminus B^3$ ) e tal que  $M$  tenha curvatura total finita e um fim mergulhado. Então  $M$  é uma parte de um plano ou parte de um catenoide.*

Antes de demonstrar esse teorema, vamos ao seguinte lema:

**Lema 6.2.2.** *Seja  $M$  uma superfície com as hipóteses do teorema acima. Então a aplicação  $\Phi$  como na proposição 4.2.1 é tal que  $\Phi \equiv 0$ , se  $M$  possui um fim planar e  $\Phi \equiv A \in \mathbb{R}^*$ , se  $M$  possui um fim catenoidal.*

**Demonstração:** Temos que como a fronteira de  $M$  intersecta  $\mathbb{S}^2$  a um ângulo constante, o teorema de Terquem-Joachimsthal nos garante que  $\partial M$  é uma linha de curvatura de  $M$ , e pela proposição 5.2.1, temos:

$$N_\theta = \frac{\beta}{\rho\Lambda} X_\rho + \frac{1}{\Lambda} \left( \frac{\alpha}{\rho^2} - \Lambda H \right) X_\theta.$$

Como  $\partial M$  é uma linha de curvatura de  $M$ , temos que  $\beta = 0$  ao longo da fronteira da superfície. Como  $M$  é uma superfície mínima de curvatura total finita e um único fim, temos que uma representação de Enneper-Weierstrass de  $X$  possui expansão de Laurent em torno da origem na forma:

$$f(z) = \sum_{j=-2}^{\infty} d_j z^j, \quad g(z) = z^n.$$

Temos assim que o fim é planar, se  $n > 1$  e catenoidal, se  $n = 1$  (veja o final do capítulo 5).

Temos também  $\frac{\Phi(z)}{z^2} = F(z) = \mathcal{L} - i\mathcal{M}$ . Como  $\frac{\mathcal{L}\mathcal{N} - \mathcal{M}^2}{\Lambda} = k_1 k_2$ , onde  $k_1$  e  $k_2$  são as funções curvatura principal, temos que as matrizes

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L} & \mathcal{M} \\ \mathcal{M} & \mathcal{N} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} \Lambda k_1 & 0 \\ 0 & \Lambda k_2 \end{pmatrix}$$

são equivalentes. Logo:

$$|\Phi(z)|^2 = |z|^4 |F(z)|^2 = |z|^4 |\mathcal{L} - i\mathcal{M}|^2 = |z|^4 \Lambda^2 k_1 k_2 = |z|^4 \Lambda^2 |K|$$

Além disso:

$$K = - \left( \frac{4|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2} \right)^2 = O(|z|^{2n+2});$$

$$\Lambda = \frac{1}{4} |f|^2 (1+|g|^2)^2 = O(|z|^{-4}).$$

Portanto, perto de  $z = 0$ , temos:

$$|\Phi(z)| = |z|^4 \Lambda^2 |K| \leq C |z|^4 |z|^{-8} |z|^{2n+2} = C |z|^{2n-2},$$

para algum  $C > 0$ . Logo, quando a superfície possui um fim planar,  $\Phi(z) \rightarrow 0$  quando  $z \rightarrow 0$ . Quando  $n = 1$ , temos que  $\Phi$  é limitada em uma vizinhança de  $z = 0$ . Logo, em qualquer um dos casos acima, pelo teorema 2.1.4, temos que  $\alpha$  e  $\beta$  possuem singularidades removíveis em  $z = 0$ .

Assim  $\beta = 0$  em toda a fronteira de  $A$  e, pelo princípio do máximo e do mínimo,  $\beta \equiv 0$  em  $A$ . Como  $\alpha$  é o conjugado harmônico de  $\beta$ , temos que  $\alpha$  é constante, no qual  $\alpha = 0$  quando o fim é planar e, no caso em que o fim é catenoidal,  $\alpha$  é real, constante e não nulo.

**Corolário 6.2.3.** *Seja  $X$  uma parametrização de  $M$  como no lema acima, então a imagem por  $X$  de todos os círculos centrados na origem são linhas de curvatura de  $M$ .*

**Demonstração:** Pelo lema 6.2.2, temos que  $\beta = 0$  e, portanto:

$$N_\theta = \frac{\alpha}{\rho^2 \Lambda} X_\theta,$$

com isso,  $N_\theta(z)$  é paralelo a  $X_\theta(z)$ . Isso implica que a imagem de todos os círculos centrados na origem por  $X$  são linhas de curvatura de  $M$ .

**Demonstração do teorema 6.2.1:** Vamos supor, inicialmente, que a superfície  $M$  tenha um fim planar. Temos, pelo lema anterior,  $\Phi \equiv 0 \Rightarrow F(z) = \mathcal{L} - i\mathcal{M} \equiv 0$ . Logo, a segunda forma fundamental de  $M$  é identicamente nula, o que nos garante que  $M$  é um pedaço de um plano.

Suponha então que  $M$  possua um fim catenoidal e que esse fim possua como limite de vetor normal o vetor  $(0, 0, -1) \in \mathbb{S}^2$ . Temos que a representação de Enneper-Weierstrass de  $M$  é da forma:

$$f(z) = \sum_{j=-2}^{\infty} d_j z^j, \quad g(z) = \lambda z,$$

onde  $\lambda \in \mathbb{R}$ , na qual  $g$  deve ser escolhida dessa maneira porque a ordem do zero da  $g$  em 0 deve ser a ordem do polo de  $g$  em  $\infty$  e, além disso, a constante  $\lambda$  surge pelo fato de não sabermos se a  $g$ , de fato, leva o equador  $\mathbb{S}^1$  nele próprio.

Pela fórmula da Seção 4.3, temos  $\mathcal{L} - i\mathcal{M} = -fg' \Rightarrow -\lambda f = z^2 \Phi(z) = Cz^2 \rightarrow f = -\frac{\lambda}{C} z^{-2}$ .

Assim, tomando  $R = -\frac{\lambda}{C}$  concluímos que  $f(z) = \frac{R}{z^2}$  e, portanto, a representação de Enneper-Weierstrass de  $M$  fica:

$$f(z) = \frac{R}{z^2}, \quad g(z) = \lambda z,$$

donde segue que  $M$  é um pedaço de um catenoide.

□

## Referências Bibliográficas

- [1] P. Collin, “Topologie et courbure des surfaces minimales proprement plongées de  $r^3$ ,” *Annals of mathematics*, pp. 1–31, 1997.
- [2] S. Bernstein, “Über ein geometrisches theorem und seine anwendung auf die partiellen differentialgleichungen vom elliptischen typus,” *Mathematische Zeitschrift*, vol. 26, no. 1, pp. 551–558, 1927.
- [3] A. Fraser, M. M.-c. Li, *et al.*, “Compactness of the space of embedded minimal surfaces with free boundary in three-manifolds with nonnegative ricci curvature and convex boundary,” *Journal of Differential Geometry*, vol. 96, no. 2, pp. 183–200, 2014.
- [4] A. Fraser and R. Schoen, “Sharp eigenvalue bounds and minimal surfaces in the ball,” *Inventiones mathematicae*, vol. 203, no. 3, pp. 823–890, 2016.
- [5] P. McGrath, “A characterization of the critical catenoid,” *arXiv preprint arXiv:1603.04114*, 2016.
- [6] N. Nadirashvili and A. V. Penskoi, “Free boundary minimal surfaces and overdetermined boundary value problems,” *arXiv preprint arXiv:1812.08943*, 2018.
- [7] S. Liu and Z. Yu, “A note on free boundary minimal annulus,” *arXiv preprint arXiv:1910.01958*, 2019.
- [8] E. Yeon, “Characterizations of the plane and the catenoid as capillary surfaces,” *arXiv preprint arXiv:1905.07887*, 2019.
- [9] J. M. Lee, “Smooth manifolds,” in *Introduction to Smooth Manifolds*, pp. 1–31, Springer, 2013.

- [10] M. P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988.
- [11] E. L. Lima, *Variiedades Diferenciáveis*. No. 15, Instituto Matemática Puro e Aplicada, Conselho Nacional de Pesquisas, 1973.
- [12] S. Axler, P. Bourdon, and R. Wade, *Harmonic Function Theory*, vol. 137. Springer Science & Business Media, 2013.
- [13] A. C. Ponce, *Métodos Clássicos em Teoria do Potencial*. IMPA, 2006.
- [14] L. Ahlfors, “Complex analysis, international series in pure and applied mathematics, macgraw-hill,” 1979.
- [15] L. W. Tu, “Bump functions and partitions of unity,” *An Introduction to Manifolds*, pp. 127–134, 2008.
- [16] A. Ros and R. Souam, “On stability of capillary surfaces in a ball,” *pacific journal of mathematics*, vol. 178, no. 2, pp. 345–361, 1997.
- [17] M. P. Do Carmo, *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2008.
- [18] R. Osserman, *A Survey of Minimal Surfaces*. Courier Corporation, 2013.
- [19] L. P. Jorge and W. H. Meeks III, “The topology of complete minimal surfaces of finite total gaussian curvature,” *Topology*, vol. 22, no. 2, pp. 203–221, 1983.
- [20] J. L. Barbosa, M. Do Carmo, and J. Eschenburg, “Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in riemannian manifolds,” in *Manfredo P. do Carmo–Selected Papers*, pp. 291–306, Springer, 2012.
- [21] J. L. Barbosa and M. do Carmo, “Stability of hypersurfaces with constant mean curvature,” in *Manfredo P. do Carmo–Selected Papers*, pp. 221–235, Springer, 2012.
- [22] G. Wang and C. Xia, “Uniqueness of stable capillary hypersurfaces in a ball,” *Mathematische Annalen*, vol. 374, no. 3-4, pp. 1845–1882, 2019.
- [23] A. Ingelström, “On the weierstrass-enneper representation of minimal surfaces,”



- [24] J. C. Nitsche, “Stationary partitioning of convex bodies,” *Archive for rational mechanics and analysis*, vol. 89, no. 1, pp. 1–19, 1985.
- [25] B. Devyver, “Index of the critical catenoid,” *Geometriae Dedicata*, vol. 199, no. 1, pp. 355–371, 2019.
- [26] H. Tran, “The gauss map of a free boundary minimal surface,” *arXiv preprint arXiv:1711.05682*, 2017.
- [27] H. Tran, “Index characterization for free boundary minimal surfaces,” *arXiv preprint arXiv:1609.01651*, 2016.
- [28] J. Pyo, “Minimal annuli with constant contact angle along the planar boundaries,” *arXiv preprint arXiv:0912.0063*, 2009.
- [29] H. Hopf, *Differential Geometry in the Large: Seminar Lectures New York University 1946 and Stanford University 1956*, vol. 1000. Springer, 2003.
- [30] W. Meeks and J. Pérez, *A Survey on Classical Minimal Surface Theory*, vol. 60. American Mathematical Soc., 2012.
- [31] R. M. Schoen *et al.*, “Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces,” *Journal of Differential Geometry*, vol. 18, no. 4, pp. 791–809, 1983.
- [32] M. Spivak, “A comprehensive introduction to differential geometry. vol. iii. berkeley: Publish or perish,” *Inc. XI*, 1979.