

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**  
**Instituto de Ciências Exatas**  
**Programa de Pós-graduação em Matemática**

Cássio Henrique Vieira Moraes

**SOBRE CURVAS INVARIANTES NO BORDO**  
**DO BILHAR HEXAGONAL ELÍPTICO**

Belo Horizonte - MG  
2016

Cássio Henrique Vieira Morais

**SOBRE CURVAS INVARIANTES NO BORDO  
DO BILHAR HEXAGONAL ELÍPTICO**

**Versão final**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática d da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Sylvie Marie Oliffson  
Kamphorst Leal da Silva

Belo Horizonte - MG  
2016

Morais, Cássio Henrique Vieira.

M828s

Sobre curvas invariantes no bordo do bilhar hexagonal elíptico [manuscrito] / Cássio Henrique Vieira Morais. – 2016. 65 f. il.

Orientadora: Sylvie Marie Oliffson Kamphorst Leal da Silva.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.

Referências: f.64-65.

1. Matemática – Teses. 2. Sistemas dinâmicos – Teses.  
3. Curvas invariantes – Teses. I. Silva, Sylvie Marie Oliffson Kamphorst Leal da. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51 (043)



FOLHA DE APROVAÇÃO

*Sobre curvas invariantes no bordo do bilhar  
hexagonal elíptico*

**CÁSSIO HENRIQUE VIEIRA MORAIS**

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

\_\_\_\_\_  
Profa. Sylvie Marie Oliffson Kamphorst Leal da Silva  
UFMG

\_\_\_\_\_  
Prof. Fernando Figueiredo de Oliveira Filho  
UFMG

\_\_\_\_\_  
Profa. Ivana de Vasconcellos Latosinski  
UFSJ

\_\_\_\_\_  
Profa. Sônia Pinto de Carvalho  
UFMG

Belo Horizonte, 08 de agosto de 2016.

# **Agradecimentos**

Agradeço especialmente à Sylvie O. Kamphorst pela paciência durante a elaboração deste trabalho. Agradeço também a CAPES pelo financiamento.

# Resumo

Nesse trabalho discutimos o bilhar hexagonal elíptico, introduzido por Fetter em [6]. Experimentos numéricos não descartam uma possível integrabilidade de tal bilhar, fato que confirmado contradiria a conjectura de Birkhoff, no caso  $\mathcal{C}^2$ . Também demonstramos o teorema de Hubacher sobre curvas invariantes e enunciamos o teorema de Lazutkin. Discutimos também um exemplo de Halpern, que consiste num bilhar convexo de classe  $\mathcal{C}^2$  com curvatura não nula e que não possui cáusticas próximas do bordo.

Palavras-chave: Sistemas Dinâmicos. Curvas Invariantes. Bilhares. Integrabilidade. Elipse. Conjectura de Birkhoff.

# Abstract

In this work we discuss the hexagonal string billiard, introduced by Fetter in [6]. Numerical experiments suggests a possible integrability of the billiard map, contradicting Birkhoff's Conjecture in  $\mathcal{C}^2$  case. We give a proof of Hubacher's Theorem about invariant curves and we discuss an exemple due to Halpern about a  $\mathcal{C}^2$  convex curve, with non vanishing curvature such that there is no rotational invariant curve for the billiard map in a neighborhood of the boundary.

Keywords: Dynamical Systems. Invariant Curves. Billiards. Integrability. Elipse. Birkhoff's Conjecture.

# Sumário

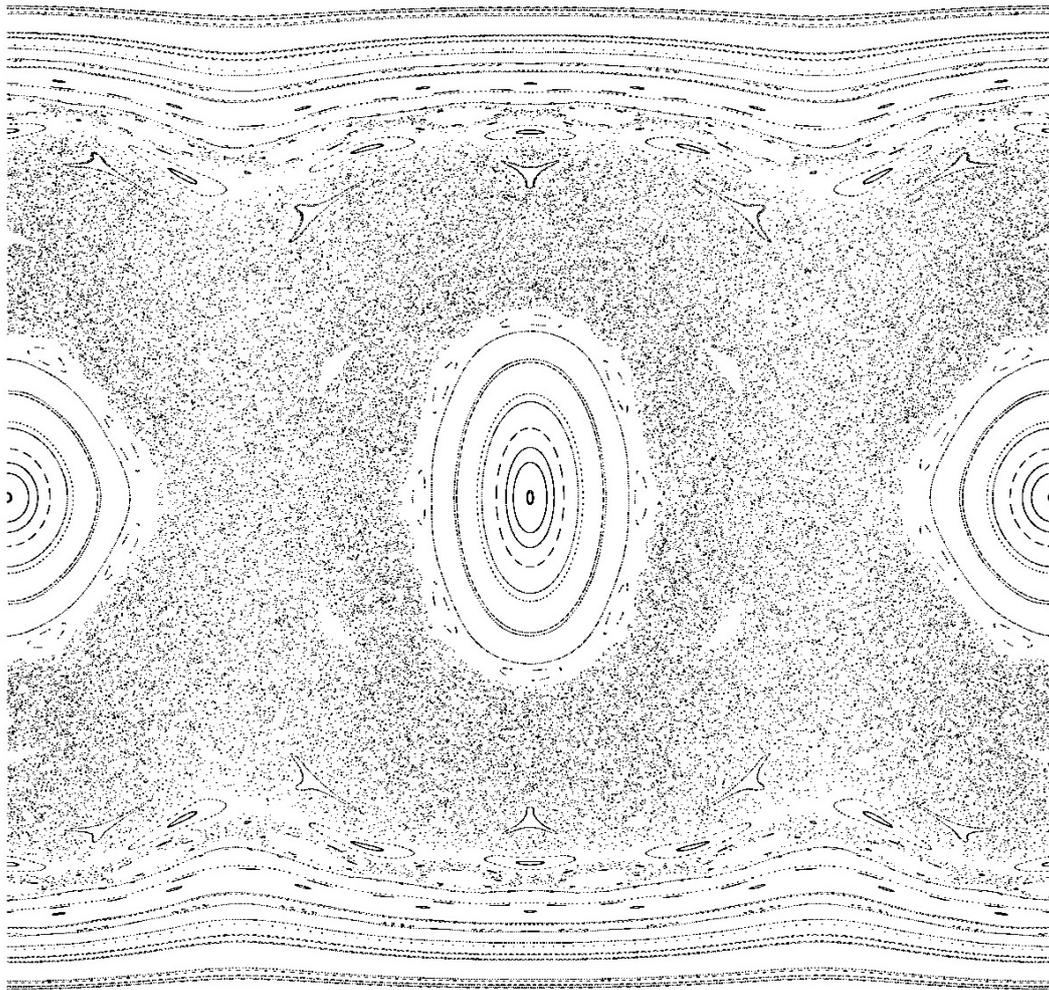
<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>1 Elipses e Construção com Barbante</b>	<b>12</b>
1.1 Elipses . . . . .	12
1.2 Construção com Barbante . . . . .	20
1.3 Construção Hexagonal . . . . .	26
<b>2 Bilhares</b>	<b>28</b>
2.1 Aplicação do Bilhar . . . . .	28
2.2 Aplicação do Bilhar no Círculo . . . . .	29
2.3 Função Geratriz e a Derivada da Aplicação do Bilhar . . . . .	30
2.4 Aplicações Twist . . . . .	33
2.5 Bilhar na Elipse . . . . .	35
2.5.1 Trajetórias focais . . . . .	35
2.5.2 Integrabilidade . . . . .	37
2.5.3 Cústicas . . . . .	38
2.6 Bilhar Hexagonal Elíptico . . . . .	40
<b>3 Cústicas e Curvas Invariantes</b>	<b>45</b>
3.1 Curvas Invariantes, Cústicas e Teorema de Birkhoff . . . . .	45
3.2 Teorema de Lazutkin . . . . .	49
3.3 Teorema de Halpern . . . . .	50
3.4 Teorema de Hubacher . . . . .	56
3.5 Conclusão . . . . .	63
<b>Referências</b>	<b>64</b>

# Introdução

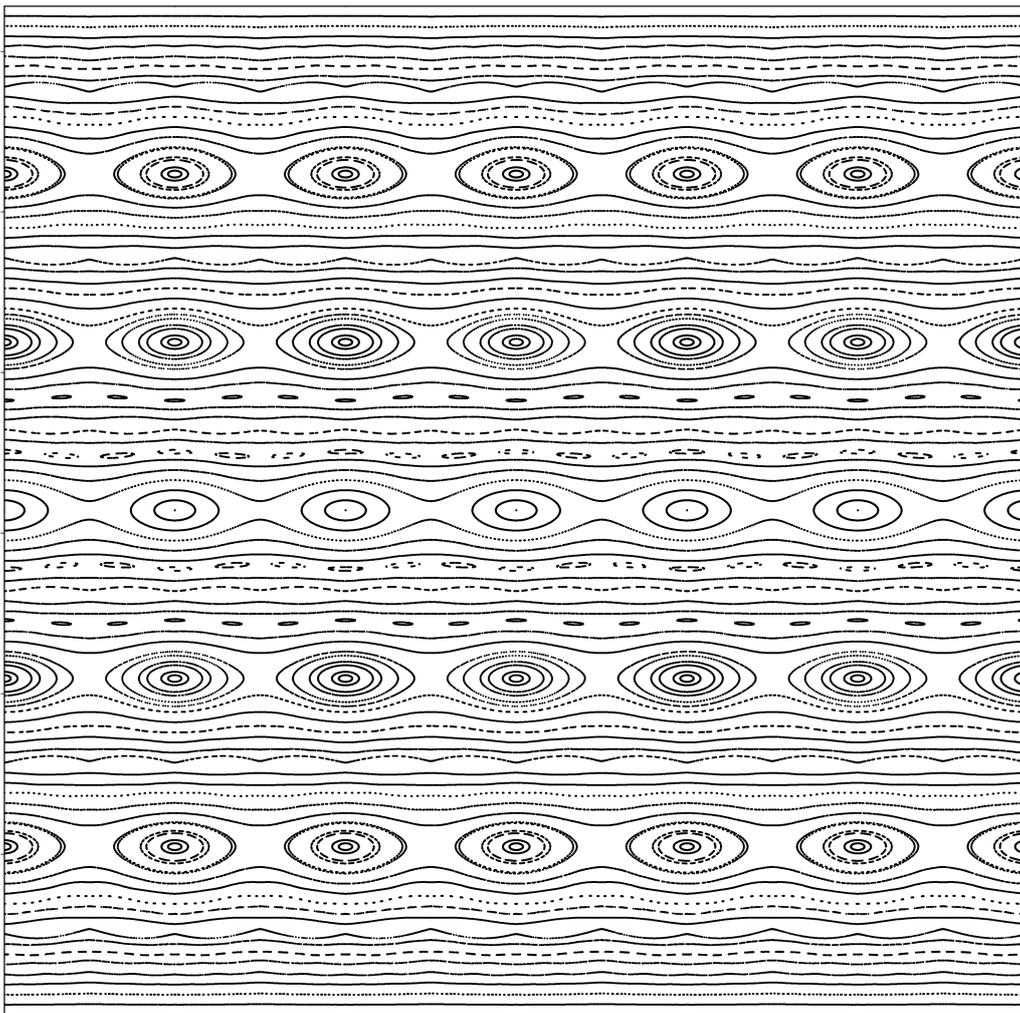
Bilhares foram introduzidos por Birkhoff e desde então se tornaram um assunto popular em sistemas dinâmicos. Como o próprio disse

*"[...] in this problem the formal side, usually so formidable in dynamics, almost completely disappears, and only the interesting qualitative questions need to be considered."*

Bilhares são aplicações que preservam área e twist, e uma das questões deixadas por Birkhoff trata da integrabilidade. Isto é, se cada ponto do espaço de fase está em uma curva invariante (um esboço onde tal situação ocorre encontra-se na figura **21**). Sabemos que os bilhares no círculo e na elipse são integráveis e são de fato os únicos exemplos conhecidos. O que observa-se em geral no espaço de fase dos bilhares são a presença (ou não) de ilhas elípticas (que consistem basicamente de um ponto periódico elíptico circundado por curvas invariantes que são homotopicamente triviais). Também podem existir curvas invariantes rotacionais (que são curvas invariantes não homotopicamente triviais), e a região compreendida entre duas de tais curvas consecutivas (i.e., nessa região onde não existem outras curvas rotacionais invariantes) é denominada zona de instabilidade. Na figura a seguir temos o espaço de fase de um bilhar convexo onde é possível observar tais elementos típicos.



Birkhoff conjecturou que os únicos bilhares suaves integráveis são a elipse e o círculo, e a conjectura permanece aberta até hoje. Neste trabalho, apresentaremos o bilhar hexagonal elíptico. Não há ainda nenhum resultado acerca de suas curvas invariantes, mas experimentos numéricos sugerem a presença destas e inclusive não descartam uma possível integrabilidade. Mesmo descartada a integrabilidade seria interessante entender por que não se observa experimentalmente (figura a seguir) zonas de instabilidade no seu espaço de fase, pois tal fato é surpreendente.



## Capítulo 1

# Elipses e Construção com Barbante

### Introdução

Bilhares consistem no estudo do movimento de uma partícula (bola) no interior de uma região  $\Omega$  (mesa) delimitada por uma curva fechada  $\partial\Omega$  (bordo). Ignoramos possíveis perdas de energia sofridas pela partícula: a bola possuirá velocidade constante, as colisões serão totalmente elásticas e satisfazendo à lei da reflexão. Dessa forma, a geometria da curva  $\partial\Omega$  tem papel fundamental, e por isso o objetivo do primeiro capítulo deste trabalho é apresentar as principais características do bordo do bilhar hexagonal elíptico e esclarecer porque o escolhemos.

### 1.1 Elipses

Cônicas possuem propriedades de reflexão conhecidas desde a antiguidade (como conta a lenda na qual Arquimedes incendiou um navio usando um gigantesco espelho parabólico). Para elipses tais propriedades transformam o seu bilhar num dos mais notáveis. Na definição a seguir e no decorrer do texto, se  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  denotam pontos de  $\mathbb{R}^n$ , então  $\mathbf{AB}$  é a distância  $\|\mathbf{B} - \mathbf{A}\|$ .  $\overline{AB}$  denotará o segmento com extremos em  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ ; ou seja, o conjunto  $\{\mathbf{A} + t(\mathbf{B} - \mathbf{A}); 0 \leq t \leq 1\}$ .

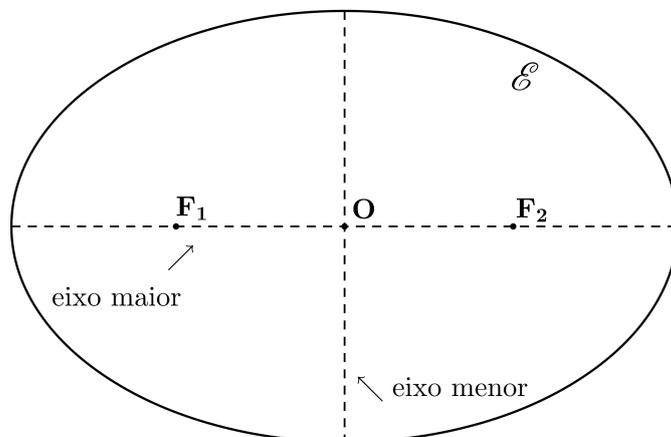


Figura 1: A elipse  $\mathcal{E}$

**Definição 1.** Dados pontos distintos  $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^2$  e  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $2a > F_1F_2$ , a **elipse**  $\mathcal{E}$  é o conjunto dos  $X \in \mathbb{R}^2$  tais que  $\mathbf{XF}_1 + \mathbf{XF}_2 = 2a$ . Os pontos  $F_1, F_2$  são denominados **focos**.

Na figura 1, temos outras grandezas de  $\mathcal{E}$ . O seu centro é  $\mathbf{O} = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) / 2$ , ponto médio dos focos;  $2c$  é a distância focal (quer dizer,  $2c = F_1F_2$ );  $a$  e  $b$  são as medidas dos semi-eixos maior e menor, respectivamente. Essas medidas se relacionam pelo Teorema de Pitágoras:  $a^2 = b^2 + c^2$ . Uma reta passando por um dos focos é denominada **raio focal**.

De acordo com a definição 1, podemos desenhar uma elipse da seguinte maneira: fixamos o segmento  $\overline{F_1F_2}$  unindo os focos e o contornamos com um barbante de comprimento  $\ell$ . Ao ser esticado, o barbante tomará a forma de um triângulo cujo vértice percorre a elipse quando o movemos, como pode ser visto na figura 2.

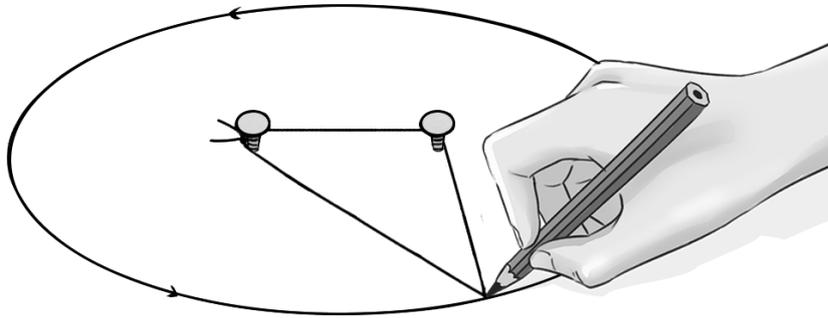


Figura 2: Desenhando uma elipse

**Proposição 1.** Dada uma elipse  $\mathcal{E}$ , existem coordenadas tais que

$$\mathcal{E} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \right\}$$

**Demonstração:** Tome base  $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}\}$  de  $\mathbb{R}^2$  positiva, ortonormal e tal que  $\hat{\mathbf{i}}$  tenha a mesma direção do segmento focal (ou seja,  $(\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2) \hat{\mathbf{i}} = \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1$ ). Daí,  $\mathbf{F}_1 = \mathbf{O} - c\hat{\mathbf{i}}$  e  $\mathbf{F}_2 = \mathbf{O} + c\hat{\mathbf{i}}$ . Assim, sendo  $\mathbf{X} = \mathbf{O} + x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}$ . Da definição advém

$$\mathbf{XF}_1 + \mathbf{XF}_2 = 2a \Rightarrow \|(x+c)\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}\| + \|(x-c)\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}\| = 2a$$

Como  $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}\}$  é ortonormal, temos

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Simplificando (com o uso da relação  $a^2 = b^2 + c^2$ ), encontramos a **equação da elipse**

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \tag{1.1}$$

Para concluir, basta transladar o sistema de coordenadas de forma que  $\mathbf{O}$  seja a origem. ■

**Corolário.** As curvas

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{O} + a \cos t \hat{\mathbf{i}} + b \sin t \hat{\mathbf{j}}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad 1.2$$

e

$$\mathbf{r}(\varphi) = \mathbf{O} + \frac{a^2 \cos \varphi \hat{\mathbf{i}} + b^2 \sin \varphi \hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad 1.3$$

são parametrizações da elipse.

**Demonstração:** Para a primeira parametrização, basta combinar a relação  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$  à proposição anterior. Já a segunda é obtida a partir de 1.2 através da reparametrização  $h: [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$ ,  $h(\varphi) = t$ , com  $\varphi$  e  $t$  satisfazendo  $b \tan \varphi = a \tan t$ . Quer dizer, se  $\varphi$  está no primeiro quadrante,  $t = \arctan\left(\frac{b}{a} \tan \varphi\right)$ , se está no segundo ou terceiro,  $t = \pi + \arctan\left(\frac{b}{a} \tan \varphi\right)$ . Por fim, se está no quarto,  $t = 2\pi + \arctan\left(\frac{b}{a} \tan \varphi\right)$  e  $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$  e  $2\pi$  são pontos fixos de  $h$ .

Notamos que  $t$  e  $\varphi$  estão sempre no mesmo quadrante (logo, suas funções trigonométricas possuem mesmo sinal). Isso aliado à relação fundamental  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  permite escrever

$$\begin{cases} \cos t = \frac{a}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \cos \varphi \\ \sin t = \frac{b}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} \sin \varphi \end{cases}$$

Combinando isto com 1.2 obtemos 1.3. ■

No corolário acima, a motivação de  $h$  vem da convexidade de  $\mathcal{E}$ , que passamos a discutir agora.

**Definição 2.** Um conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é **convexo** se  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \Omega \Rightarrow \overline{AB} \subset \Omega$ .  $\Omega$  é um **domínio convexo** se é convexo, aberto e limitado.

Observamos que se  $\Omega$  é convexo, então é conexo por caminhos, em particular conexo. Além disso,  $\overline{\Omega}$  também é convexo. De fato, dado  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \overline{\Omega}$ , existem seqüências  $(\mathbf{X}_n), (\mathbf{Y}_n) \subset \Omega$  tais que  $\lim \mathbf{X}_n = \mathbf{X}$  e  $\lim \mathbf{Y}_n = \mathbf{Y}$ . Daí, se  $\mathbf{Z} \in \overline{XY}$  então  $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + t(\mathbf{Y} - \mathbf{X})$ . Logo,  $\mathbf{Z} = \lim \mathbf{Z}_n$ , onde  $\mathbf{Z}_n = \mathbf{X}_n + t(\mathbf{Y}_n - \mathbf{X}_n) \in \overline{\mathbf{X}_n \mathbf{Y}_n}$ . Portanto  $\mathbf{Z} \in \overline{\Omega}$ . Observamos ainda que  $\Omega$  tem interior vazio se, somente se, está contido em uma reta. Por isso faz sentido nos restringirmos ao caso em que  $\Omega$  é um domínio convexo.

**Proposição 2.** Seja  $\Omega$  domínio convexo e  $t$  uma reta. Então  $t \cap \Omega$  é um intervalo aberto (possivelmente vazio).

**Demonstração:**  $t$  e  $\Omega$  são conjuntos convexos. Logo, sua interseção também. Em particular, a interseção é conexa, portanto é um intervalo. Além disso, como  $\Omega$  é aberto a interseção é um aberto em  $t$ . ■

**Definição 3.** Uma reta  $t$  é tangente a um domínio convexo  $\Omega$  se  $t \cap \Omega = \emptyset$  e  $t \cap \overline{\Omega} \neq \emptyset$

**Proposição 3.** Seja  $\Omega$  domínio convexo. Para cada  $\mathbf{P} \in \partial\Omega$  existe ao menos uma reta  $t$  contendo  $\mathbf{P}$  e tangente a  $\Omega$ .

**Demonstração:** Seja  $\mathbf{P} \in \partial\Omega$  e  $S$  uma circunferência com centro em  $\mathbf{P}$  de forma que  $\Omega$  está inteiramente contida na região limitada definida por  $S$ . Definimos  $f : S \rightarrow \{0, 1\}$  tal que  $f(\mathbf{X}) = 0$  se  $\overline{\mathbf{X}\mathbf{P}} \cap \Omega = \emptyset$  e  $f(\mathbf{X}) = 1$  caso contrário. Observamos que  $f^{-1}(0)$  é um intervalo aberto em  $S$ . De fato, se  $f(\mathbf{X}_1) = f(\mathbf{X}_2) = 0$  então existem  $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2 \in \Omega$  e nos segmentos  $\overline{\mathbf{X}_1\mathbf{P}}, \overline{\mathbf{X}_2\mathbf{P}}$ , respectivamente. Pela convexidade de  $\Omega$  temos  $\overline{\mathbf{Y}_1\mathbf{Y}_2} \in \Omega$  e portanto o arco  $\overline{\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2}$  está em  $f^{-1}(0)$ . Isso mostra que  $f^{-1}(0)$  é conexo. É aberto porque  $\Omega$  é aberto.

Além disso,  $f^{-1}(0)$  não contém ponto diametralmente opostos, pois isso implicaria que  $\mathbf{P} \in \Omega$ . Logo, existe um par de pontos (de fato, existe um intervalo) diametralmente opostos cuja imagem por  $f$  é 1. A reta passando por eles não intersecta  $\Omega$  mas contém  $\mathbf{P}$ . Logo, é uma reta tangente. ■

Podemos caracterizar um conjunto convexo pelas suas retas tangentes. Para enunciar precisamente precisamos de algumas definições

**Definição 4.** Um domínio convexo  $\Omega$  é chamado **estritamente convexo** se para qualquer reta  $t$  tangente a  $\Omega$ , então  $t \cap \partial\Omega$  contém apenas um elemento.

**Definição 5.** Dado um conjunto  $C \subset \mathbb{R}^2$  e uma reta  $t$ , dizemos que  $t$  é **reta suporte** de  $C$  se  $C$  está inteiramente contido em um dos semiplanos (fechados) definidos por  $t$ .

**Proposição 4.** Um conjunto  $\Omega$  aberto e limitado é convexo se, e somente se, todo ponto  $\mathbf{P} \in \partial\Omega$  está contido em uma reta suporte de  $\Omega$ .

**Demonstração:** Suponhamos  $\Omega$  domínio convexo. Pela proposição 3 por todo  $\mathbf{P} \in \partial\Omega$  passa uma reta tangente. Como  $\Omega$  é convexo, retas tangentes são retas suporte, o que prova a ida.

Reciprocamente, suponhamos que por todo ponto de  $\partial\Omega$  passa uma reta suporte. Então dados  $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \Omega$ , o segmento  $\overline{\mathbf{P}\mathbf{Q}}$  não pode conter pontos de  $\partial\Omega$ . De fato, isso implicaria que a reta por esses pontos é suporte o que contradiz o fato que  $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \Omega$ . ■

**Proposição 5.** Se  $\Omega$  é um domínio convexo, então  $\partial\Omega$  é homeomorfo a  $\mathbb{S}^1$

**Demonstração:** Se  $\mathbf{O} \in \Omega$  existe um círculo  $S$  com centro em  $\mathbf{O}$  contido em  $\Omega$ . Para cada ponto  $\mathbf{S} \in \partial S$ , tomamos a semirreta partindo de  $\mathbf{O}$  passando por  $\mathbf{S}$ . Segue diretamente da proposição 2 que tal semirreta possui uma única intersecção com  $\partial\Omega$ . Assim, está bem definida uma bijeção  $r : \partial S \rightarrow \partial\Omega$ . Resta mostrar que  $r$  é homeomorfismo. Dada uma sequência monótona (pois podemos definir uma relação de ordem localmente numa circunferência)  $(\mathbf{S}_n) \rightarrow \mathbf{S}$ , cada um dos pontos  $\mathbf{Q}_n = r(\mathbf{S}_n)$  está contido na semirreta com origem  $\mathbf{O}$  e passando por  $\mathbf{S}_n$ . Daí, segue que  $\lim \mathbf{Q}_n$  (caso exista) está na semirreta com centro  $\mathbf{O}$  e passando por  $\mathbf{S}$ . Como  $\partial\Omega$  é fechado, e  $\mathbf{Q}$  é o único ponto de  $\partial\Omega$  nessa semirreta, segue que  $\lim \mathbf{Q}_n = \mathbf{Q}$  (pois  $\mathbf{Q}$  é o único valor de aderência da sequência  $(\mathbf{Q}_n)$ ). Logo,  $r$  é contínua. De maneira similar prova-se que  $r^{-1}$  é contínua e isso conclui a prova da proposição. ■

A proposição acima permite definir a noção de convexidade para curvas:

**Definição 6.** Uma curva é convexa se é o bordo de um domínio convexo. Similarmente temos curvas estritamente convexas.

Se a curva é  $\mathcal{C}^1$  e regular, suas tangentes coincidem com as tangentes ao domínio convexo. Notamos que tais curvas sempre serão simples e fechadas. Também temos a noção de convexidade para funções:

**Definição 7.** Uma função  $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é convexa se para todo  $a, b, c \in X$  com  $c = ta + (1-t)b$ ,  $t \in [0, 1]$  vale que

$$f(c) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

$f$  é estritamente convexa caso a desigualdade acima seja estrita para  $a \neq b$  e  $t \in (0, 1)$ . Dizemos que  $f$  é côncava caso a desigualdade seja invertida e estritamente côncava caso a desigualdade seja estrita e invertida.

**Proposição 6.** Se  $\Omega$  é domínio convexo, então  $\partial\Omega$  é metrizável.

**Demonstração:** Basta provar que se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é côncava, então seu gráfico é metrizável. Primeiro observamos que  $f$  é contínua. De fato, se  $c \in (a, b)$  para cada  $x \in (a, c)$  existe  $t \in (0, 1)$  tal que  $x = tc + (1-t)a$ . Logo

$$\liminf_{x \rightarrow c^-} f(x) \geq \lim_{t \rightarrow 1^-} tf(c) + (1-t)f(a) = f(c)$$

Por outro lado, existe  $s \in (0, 1)$  tal que  $c = sx + (1-s)b$ . Logo

$$\limsup_{x \rightarrow c^-} f(x) \leq \lim_{s \rightarrow 1^-} \frac{f(c) - (1-s)f(b)}{s} = f(c)$$

De maneira análoga obtém-se o outro limite lateral. Isso prova a continuidade de  $f$  em  $(a, b)$ . É possível entretanto que  $f$  seja descontínua em  $\{a, b\}$ . Mas como

$$\liminf_{x \rightarrow a} f(x) \geq f(a) \quad \text{e} \quad \liminf_{x \rightarrow b} f(x) \geq f(b)$$

essa possível descontinuidade não torna o gráfico não metrizável. De fato, sempre existem os limites laterais. Provaremos para  $a$ . Já sabemos que  $f(x)$  é limitada inferiormente numa vizinhança de  $a$  por  $f(a)$ . Por outro lado,  $f$  é limitada superiormente. Caso contrário, dado  $c \in (a, b)$  existiria  $x \in (a, b)$  com

$$f(x) > \max \left\{ f(b), f(c) \frac{b-a}{c-a} - f(b) \frac{b-c}{c-a}, f(c) \frac{b-a}{b-c} - f(a) \frac{c-a}{b-c} \right\}$$

Mas isso contradiz a convexidade. De fato, se  $x \in (a, c)$  temos

$$c = tx + (1-t)b \Rightarrow f(c) \geq tf(x) + (1-t)f(b)$$

Já que  $t \in \left(1, \frac{c-a}{b-a}\right)$  e  $f(x) > f(b)$  segue que

$$f(c) \geq \frac{c-a}{b-a}f(x) + \frac{b-c}{b-a}f(b) > f(c)$$

Isso prova que  $f$  é uma função limitada. Para provar que o limite em  $a$  existe, suponha que existam duas seqüências  $(x_n), (y_n)$  monótonas tendendo a  $a$  com  $\lim f(x_n) > \lim f(y_n)$ . Dado  $y_p$  e  $t_0 > 0$  existem  $q, r$  tais que  $a < x_r < y_q < y_p$  e  $y_q = (1-t)x_r + ty_p$  com  $t < t_0$ . Isso aliado a convexidade contradiz  $\lim f(x_n) > \lim f(y_n)$ .

Podemos então supor que  $f$  é contínua em  $[a, b]$ . Existe  $x_0 \in [a, b]$  onde  $f$  é máxima. Segue da convexidade de  $f$  que  $f$  é monótona nos intervalos  $[a, x_0], [x_0, b]$ . Assim o gráfico de  $f$  é metrizável e seu comprimento é menor que  $(f(x_0) - f(a)) + (b-a) + (f(x_0) - f(b))$ . ■

**Proposição 7.** Seja  $\Omega$  domínio convexo. Por cada ponto  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$  passam exatamente duas retas tangentes a  $\Omega$ .

**Demonstração:** Dado  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^2 - \overline{\Omega}$  não podem existir 3 retas tangentes passando por  $\mathbf{P}$ . De fato, retas tangentes são retas suporte. Assim, existem no máximo duas. Por outro lado, seja  $S$  uma circunferência com centro em  $\mathbf{P}$  de forma que  $\overline{\Omega}$  está contido na região limitada definida por  $S$  e defina  $f : S \rightarrow \{0, 1\}$  tal que  $f(\mathbf{X}) = 0$  caso  $\overline{\mathbf{P}\mathbf{X}} \cap \Omega = \emptyset$  e  $f(\mathbf{X}) = 1$  caso contrário. Similarmente ao que foi feito na proposição 3,  $f^{-1}(0)$  é um intervalo aberto em  $S$  (i.e., um arco). A medida desse arco é menor que  $\pi$  pois  $\mathbf{P} \notin \partial\Omega$ . Assim, os extremos desse intervalo definem com  $\mathbf{P}$  duas retas tangentes a  $\Omega$ . ■

**Proposição 8.** Uma curva plana  $\mathcal{C}^1$  regular fechada é convexa se e somente se ela é simples e o ângulo de inclinação da tangente varia monotonamente.

**Demonstração:** Seja  $\mathbf{r} : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma parametrização por comprimento de arco da curva e  $\varphi : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  o ângulo de inclinação da reta tangente. Para a volta, suponha que  $\mathbf{r}$  não é convexa. Então existe  $s_0 \in [0, l]$  de forma que existem pontos do traço de  $\mathbf{r}$  em ambos os lados da reta tangente  $t$  em  $\mathbf{r}(s_0)$ . Seja  $h$  a função distância até a reta  $t$ . Mais precisamente, se  $\mathbf{n}(s_0)$  é a normal a curva em  $\mathbf{r}(s_0)$  então

$$h(s) = \langle \mathbf{r}(s) - \mathbf{r}(s_0), \mathbf{n}(s_0) \rangle$$

$h$  possui máximo  $s_1$  e mínimo  $s_2$  distintos de  $s_0$  já que  $\mathbf{r}$  possui pontos em ambos os lados de  $t$ . Logo, as tangentes em  $s_0, s_1$  e  $s_2$  são paralelas. Pelo Teorema do índice de rotação, segue que existem dois desses três valores para os quais  $\varphi$  coincide. Isso significa que  $\varphi$  é constante em algum dos intervalos delimitados por  $s_0, s_1, s_2$  e isso contradiz a escolha de  $t$ . Reciprocamente, se  $\mathbf{r}$  é convexa então também é simples. Além disso, se  $\varphi$  não é monótona, existem  $s_1 < s_2 \in [0, l]$  com  $\varphi(s_1) = \varphi(s_2)$  e  $\varphi$  não constante em  $[s_1, s_2]$ . Novamente pelo Teorema do índice de rotação existe  $s_3$  com  $\varphi(s_3) = -\varphi(s_1)$ . Pela convexidade de  $\mathbf{r}$  duas das três retas tangentes em  $\mathbf{r}(s_1), \mathbf{r}(s_2)$  e  $\mathbf{r}(s_3)$  devem coincidir. Isso implica que  $\mathbf{r}$  contém um segmento de reta ligando dos desses pontos. Nesse caso, tais pontos devem ter tangentes com mesmo sentido, o que implica que são exatamente  $\mathbf{r}(s_1)$  e  $\mathbf{r}(s_2)$ . Logo  $\varphi$  é constante em  $[s_1, s_2]$ , uma contradição. ■

O parâmetro  $\varphi$  da função  $h$  usados para obtermos a equação 1.3 é justamente a inclinação da tangente. Se  $\Omega$  é um conjunto convexo e sua fronteira é  $\mathcal{C}^2$ , então a curvatura  $\kappa$  está bem definida. Observamos que  $\kappa$  é a variação de  $\varphi$ . De fato, sendo  $\varphi$  medido a partir de  $\hat{\mathbf{i}}$  e  $\mathbf{r}$  parametrização por comprimento de arco  $s$ , temos

$$\left\langle \frac{d\mathbf{r}}{ds}(s), \hat{\mathbf{i}} \right\rangle = \cos \varphi(s)$$

Derivando essa expressão obteremos

$$\left\langle \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}(s), \hat{\mathbf{i}} \right\rangle = -\frac{d\varphi}{ds}(s) \sin \varphi(s)$$

Denotando  $\mathbf{t}, \mathbf{n}$  para indicar a tangente e a normal respectivamente, pelas fórmulas de Frenet,  $\kappa$  deve satisfazer

$$\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s) \tag{1.4}$$

Ou seja,

$$\kappa(s) \langle \mathbf{n}(s), \hat{\mathbf{i}} \rangle = -\frac{d\varphi}{ds}(s) \sin \varphi(s) \Rightarrow \kappa(s) = \frac{d\varphi}{ds}(s)$$

Ou seja, a proposição anterior nos diz que uma curva  $\mathcal{C}^2$  simples e fechada é convexa se, e somente se, sua curvatura não troca de sinal. Para que seja estritamente convexa, a função  $\varphi$

deve ser estritamente monótona. É suficiente (embora não seja necessário) que a curvatura seja distinta de zero em todos os pontos (por continuidade garantimos que  $\kappa$  assume apenas um sinal nessa situação). Vamos usar esse fato para verificarmos que a elipse é uma curva estritamente convexa.

**Proposição 9.** A elipse é estritamente convexa.

**Demonstração:** A elipse com a parametrização 1.2 não está parametrizada por comprimento de arco  $s$ , mas é regular. Daí devemos primeiro reparametrizá-la com este parâmetro. Lembrando que

$$s(t) = \int \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right\| dt \quad 1.5$$

seguem as relações:

$$\frac{ds}{dt} = \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| \quad \text{e} \quad \left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\| \frac{d^2s}{dt^2} = \left\langle \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\rangle \quad 1.6$$

Por outro lado,  $\bar{\mathbf{r}}(s(t)) = \mathbf{r}(t)$  ( $\bar{\mathbf{r}}$  é a parametrização por comprimento do arco), obtemos também as equações

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{ds} \frac{ds}{dt} \\ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= \frac{d^2\bar{\mathbf{r}}}{ds^2} \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{ds} \frac{d^2s}{dt^2} \end{aligned}$$

Comparando isto às equações 1.6 advém

$$\frac{d^2\bar{\mathbf{r}}}{ds^2} = \frac{\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}}{\left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\|^2} - \frac{\left\langle \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\rangle}{\left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\|^4} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad 1.7$$

Pela parametrização 1.2

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= -a \sin t \hat{\mathbf{i}} + b \cos t \hat{\mathbf{j}} \\ \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= -a \cos t \hat{\mathbf{i}} - b \sin t \hat{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

Como  $\kappa = \left\langle \frac{d^2\bar{\mathbf{r}}}{ds^2}, \mathbf{n}(s) \right\rangle$ , (da equação 1.4), e  $\left\| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right\| \mathbf{n}(t) = -b \cos t \hat{\mathbf{i}} - a \sin t \hat{\mathbf{j}}$  concluímos

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{\langle -a \cos t \hat{\mathbf{i}} - b \sin t \hat{\mathbf{i}}, -b \cos t \hat{\mathbf{i}} - a \sin t \hat{\mathbf{j}} \rangle}{\left\| \frac{d\mathbf{r}}{dt}(t) \right\|^3} \\ \kappa(t) &= \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{(3/2)}} \end{aligned} \quad 1.8$$

Logo,  $\kappa(t) > 0$  para todo  $t$ . Assim, a elipse é estritamente convexa. Com isso para cada direção e sentido, existe uma única reta tangente à elipse. Em outros termos, a aplicação  $s \mapsto \mathbf{n}(s)$  é uma bijeção de  $S^1$  em  $S^1$ . ■

Se uma curva  $\gamma$  está descrita pela equação  $\rho = \rho(\theta)$  em coordenadas polares, em coordenadas cartesianas temos a parametrização  $\mathbf{x}(\theta) = (\rho(\theta) \cos \theta, \rho(\theta) \sin \theta)$ . Assim, das equações 1.4 e 1.7, podemos calcular sua curvatura:

$$\kappa(\theta) = \frac{\rho(\theta)^2 + 2\rho'(\theta)^2 - \rho(\theta)\rho''(\theta)}{(\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2)^{3/2}} \quad 1.9$$

Consideremos agora a função  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}\mathbf{F}_1 + \mathbf{X}\mathbf{F}_2$ . A elipse pode ser vista como a curva de nível  $f^{-1}(2a)$ . Observamos que

$$\nabla f(\mathbf{X}) = \frac{\mathbf{X} - \mathbf{F}_1}{\mathbf{X}\mathbf{F}_1} + \frac{\mathbf{X} - \mathbf{F}_2}{\mathbf{X}\mathbf{F}_2} \quad 1.10$$

Já que o gradiente é perpendicular as curvas de nível, a direção normal à elipse é a soma de dois vetores unitários. Essa equação revela uma importante propriedade geométrica da elipse  $\mathcal{E}$ . Dado um ponto  $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ , a reta normal neste ponto é a bissetriz dos segmentos  $\overline{\mathbf{P}\mathbf{F}_1}$  e  $\overline{\mathbf{P}\mathbf{F}_2}$ . Ou seja, uma partícula que passa sobre um dos focos e se choca com a elipse, é refletida na direção do outro foco. Esse fato possui consequências notáveis no estudo da dinâmica do bilhar elíptico.

**Proposição 10.** Seja  $\mathcal{E}$  uma elipse e  $\mathbf{P} \in \mathcal{E}$ . A tangente no ponto  $\mathbf{P}$  forma ângulos iguais com os raios focais.

**Demonstração:** Essa proposição também pode ser obtida simplesmente derivando a equação da elipse, da definição 1. De fato, sendo  $\mathbf{r}$  uma parametrização para algum  $t$ , temos  $\mathbf{P} = \mathbf{r}(t)$ . Logo, de  $\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{F}_1\| + \|\mathbf{r}(t) - \mathbf{F}_2\| = 2a$  vem

$$\frac{\langle \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}(t) - \mathbf{F}_1 \rangle}{\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{F}_1\|} + \frac{\langle \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}(t) - \mathbf{F}_2 \rangle}{\|\mathbf{F}_2 - \mathbf{r}(t)\|} = 0$$

Daí obtemos a igualdade

$$\frac{\langle \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}(t) - \mathbf{F}_1 \rangle}{\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{F}_1\|} = \frac{\langle \mathbf{r}'(t), \mathbf{F}_2 - \mathbf{r}(t) \rangle}{\|\mathbf{F}_2 - \mathbf{r}(t)\|}$$

que é exatamente o que queríamos provar.

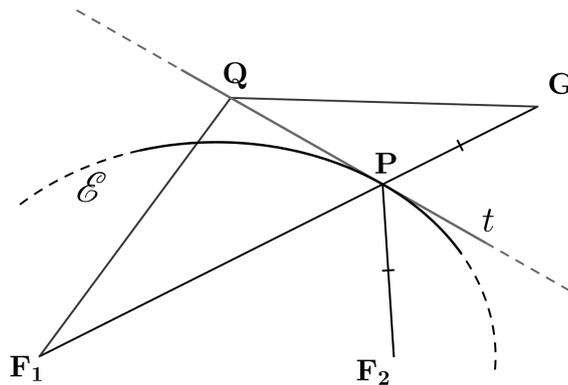


Figura 3: Prova da proposição 10

Daremos ainda uma prova geométrica para essa proposição. Seja  $t$  uma das bissetrizes dos raios focais (a que não atravessa  $\overline{\mathbf{F}_1\mathbf{F}_2}$ ). Prolongando o segmento  $\overline{\mathbf{F}_1\mathbf{P}}$ , consideremos o ponto  $\mathbf{G}$  de forma que  $\mathbf{P}\mathbf{G} = \mathbf{P}\mathbf{F}_2$ , como na figura 3. Notamos então que, com exceção de  $\mathbf{P}$ , todos os

pontos  $Q$  de  $t$  satisfazem  $F_1Q + QG > F_1P + PG$ , pela desigualdade triangular. Como  $t$  é bissetriz, segue que

$$F_1Q + QF_2 > F_1P + PF_2 = 2a$$

assim,  $t \cap \mathcal{E} = \{P\}$ , e portanto,  $t$  é a reta tangente. ■

## 1.2 Construção com Barbante

Apresentamos nessa seção uma construção que de certa forma generaliza as elipses, e ainda possui propriedades próximas às da proposição 10. Seja uma curva  $\vartheta$  convexa, com  $\vartheta = \partial\Omega$ . Dado um ponto  $X \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ , consideremos as duas tangentes a  $\vartheta$  passando por  $X$ . Tais retas definem dois cones com vértice em  $X$ . Qualquer reta contida no interior de um desses cones intersecta  $\vartheta$  em exatamente dois pontos. O mais próximo deles denominamos ponto adjacente; e o mais distante, ponto oposto. O conjunto de todos pontos opostos é o **arco oposto** de  $\vartheta$  em relação a  $X$ . Similarmente temos o **arco adjacente**. Os pontos de  $\partial\Omega$  que não estão nos arcos adjacente e oposto são pontos de tangencia. Como existem duas tangentes passando por  $X$  os pontos de tangencia se dividem em dois conjuntos, cada um sendo um segmento ou um único ponto. Denotamos por  $t_1(X)$  e  $t_2(X)$  o comprimento (possivelmente zero) de cada um desses segmentos e por  $d_1(X), d_2(X)$  sua distância a  $X$ .  $\mathcal{L}(X)$  é o comprimento do arco oposto a  $X$ .

**Definição 8.** Seja  $\ell$  um número maior que o comprimento de  $\vartheta$ . O conjunto dos pontos  $X$  tais que  $t_1(X) + t_2(X) + d_1(X) + d_2(X) + \mathcal{L}(X) = \ell$  é o traço  $\gamma$  de uma curva denominada **construção com barbante** de  $\vartheta$  com parâmetro  $\ell$ .

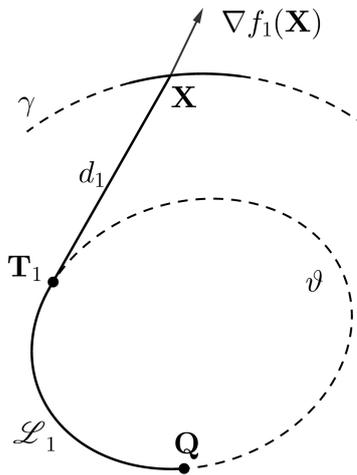


Figura 4: A função  $f_1 = d_1 + \mathcal{L}_1$ .

A curva  $\gamma$  obtida é  $\mathcal{C}^1$  mesmo que  $\vartheta$  seja apenas contínua. Daremos um esboço da demonstração desse fato ao final da seção. No momento nos ateremos a  $\vartheta$  de classe  $\mathcal{C}^1$  e estritamente convexa.

Neste caso, denotamos por  $T_1, T_2$  os pontos de tangência e fixamos  $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$  e  $Q$  no arco oposto a  $P$ . Assim  $Q$  divide o arco oposto em dois arcos de comprimentos  $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_2$ . Observamos que se  $X$  está próximo de  $P$ , então  $Q$  também está no arco oposto a  $X$ . Com isso, numa vizinhança de  $P$  estão definidas as funções  $f_1, f_2$  por  $f_1(X) = d_1(X) + \mathcal{L}_1(X)$  e  $f_2(X) = d_2(X) + \mathcal{L}_2(X)$  (figura 4).

Logo,  $f_1(X) + f_2(X) = d_1(X) + d_2(X) + \mathcal{L}(X)$ . Já que estamos considerando que  $\vartheta$  tem ao menos classe  $\mathcal{C}^1$ , os pontos de tangência variam de forma  $\mathcal{C}^1$  com  $X$ , e disto segue que  $f_1, f_2$  são  $\mathcal{C}^1$  numa vizinhança de  $P$ . Portanto, a string construction  $\gamma$  é localmente a curva de nível  $(f_1 + f_2)^{-1}(\ell)$ . Pelo teorema da função implícita, tal curva será  $\mathcal{C}^1$  caso seu gradiente seja não nulo. De fato,  $\nabla f_1(P)$  é o vetor unitário na direção da reta tangente à  $\vartheta$ . Fisicamente esse fato pode ser interpretado da seguinte forma: um elástico preso em  $Q$  e com a outra ponta livre se contrai nessa direção. Mais formalmente temos:

fisicamente esse fato pode ser interpretado da seguinte forma: um elástico preso em  $Q$  e com a outra ponta livre se contrai nessa direção. Mais formalmente temos:

**Proposição 11.** O gradiente de  $f_1$  no ponto  $\mathbf{P}$  é o vetor unitário com direção da reta tangente a  $\vartheta$  e com sentido de  $\vartheta$  para  $\mathbf{P}$ .

**Demonstração:** Seja  $\mathbf{r}(s)$  a parametrização por comprimento de arco de  $\vartheta$ , com  $\mathbf{r}(0) = \mathbf{Q}$ . Assim, cada ponto  $\mathbf{X}$  da curva de nível  $f_1^{-1}(c)$  pode ser escrito como  $\mathbf{X}(s) = \mathbf{r}(s) + (c - s)\mathbf{r}'(s)$ , onde  $\mathbf{r}(s)$  é o ponto de tangência. Logo,  $\mathbf{X}'(s) = \mathbf{r}'(s) + c\mathbf{r}''(s) - \mathbf{r}'(s) - s\mathbf{r}''(s) = (c - s)\mathbf{r}''(s)$ . Como  $\mathbf{r}'(s)$  e  $\mathbf{r}''(s)$  são perpendiculares, segue que  $\mathbf{r}'(s)$  e  $\mathbf{X}'(s)$  são perpendiculares. Daí conclui-se que o gradiente de  $f$  está na direção de  $\mathbf{r}'(s)$ . Além disso, nessa direção a função  $f_1$  coincide (a menos de uma constante) com a função distância ao ponto de tangência, donde segue que  $\nabla f_1$  é unitário. Essa demonstração vale para o caso em que  $\mathbf{r}$  é  $\mathcal{C}^2$ . Com mais trabalho usando ideias similares a da prova do teorema 2 pode-se mostrar também no caso  $\mathcal{C}^1$ . ■

Gostaríamos de ressaltar a semelhança de  $\nabla(f_1 + f_2)$  com a expressão 1.10. A semelhança também traz propriedades de reflexão similares as da elipse para a construção com barbante:

**Teorema 1.** Seja  $\vartheta$  curva  $\mathcal{C}^1$  estritamente convexa e  $\gamma$  construção com barbante. Se uma partícula atinge  $\gamma$  após tangenciar  $\vartheta$ , então sua reflexão ocorre na direção da outra tangente a  $\vartheta$ .

**Demonstração:** Seja  $\mathbf{X} \in \gamma$ . Observamos que numa vizinhança desse ponto,  $\gamma$  é curva de nível da função  $f_1 + f_2$ . Assim, o vetor normal em  $\mathbf{X}$  é paralelo a  $\nabla f_1(\mathbf{X}) + \nabla f_2(\mathbf{X})$ . Como esses vetores são unitários, concluímos que a reta tangente a  $\gamma$  em  $\mathbf{X}$  forma ângulos iguais com os segmentos  $\mathbf{X}\mathbf{T}_1$  e  $\mathbf{X}\mathbf{T}_2$ . Logo, pela lei da reflexão, uma partícula que atinge  $\mathbf{X}$  vindo de uma das direções das tangentes, é refletida na direção da outra. ■

Na outra direção temos

**Proposição 12.** Se  $\gamma, \vartheta$  são curvas  $\mathcal{C}^1$  estritamente convexas, com  $\vartheta$  contida no interior da componente conexa limitada de  $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ , e satisfazendo a propriedade de reflexão do teorema 1 (i.e., qualquer raio tangente a  $\vartheta$  é refletido em  $\gamma$  em outro raio tangente), então  $\gamma$  é uma construção com barbante de  $\vartheta$ .

**Demonstração:** De fato, dada uma parametrização (por comprimento de arco)  $\mathbf{x}$  de  $\gamma$ , a cada ponto  $\mathbf{x}(s) \in \gamma$  existem duas direções  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  das tangentes a  $\vartheta$ . Obtemos assim duas parametrizações (figura 5) de  $\vartheta$ .

$$\mathbf{r}_1(s) = \mathbf{x}(s) + d_1(s)\mathbf{v}_1(s)$$

$$\mathbf{r}_2(s) = \mathbf{x}(s) + d_2(s)\mathbf{v}_2(s)$$

Digamos que  $\mathbf{v}_1(s)$  faz um ângulo menor que  $\pi/2$  com  $\mathbf{x}'(s)$ . A orientação de  $\gamma$  induz uma orientação em  $\vartheta$  e assim,  $\mathbf{v}_2(s)$  está 'antes' de  $\mathbf{v}_1(s)$ . Denotando por  $\mathcal{L}(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$  o comprimento do arco entre os pontos  $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \vartheta$  (no sentido positivo) queremos mostrar que

$$d_1(s) + d_2(s) + \mathcal{L}(\mathbf{r}_1(s), \mathbf{r}_2(s)) \quad 1.11$$

é constante para todo  $s$ . Para isso, tomaremos dois pontos  $s_1, s_2$  e verificaremos que a expressão acima assume o mesmo valor para ambos. Com isso em mente, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{r}_1(s_1), \mathbf{r}_1(s_2)) &= \int_{s_1}^{s_2} \|\mathbf{r}_1'(s)\| ds \\ &= d_1(s_2) - d_1(s_1) + \int_{s_1}^{s_2} \langle \mathbf{x}'(s), \mathbf{v}_1(s) \rangle ds \end{aligned}$$

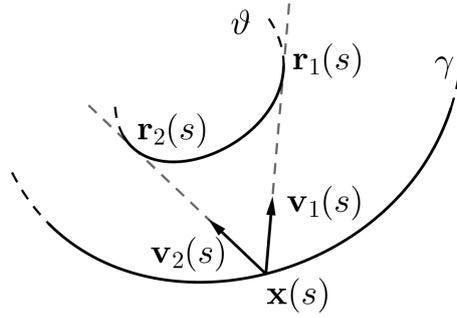


Figura 5: Duas parametrizações de  $\vartheta$

De fato,  $\mathbf{r}'_1(s)$  é tangente à  $\vartheta$ . Daí, é paralelo a  $\mathbf{v}_1(s)$  e portanto  $\|\mathbf{r}'_1(s)\| = \langle \mathbf{r}'_1(s), \mathbf{v}_1(s) \rangle$ . Similarmente (mas dessa vez  $\|\mathbf{r}'_2(s)\| = \langle \mathbf{x}'(s), -\mathbf{v}_2(s) \rangle$ ), temos também

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}_2(s_1), \mathbf{r}_2(s_2)) = d_2(s_1) - d_2(s_2) - \int_{s_1}^{s_2} \langle \mathbf{x}'(s), \mathbf{v}_2(s) \rangle ds$$

Por outro lado, pela lei da reflexão,  $\langle \mathbf{x}'(s), \mathbf{v}_1(s) \rangle = -\langle \mathbf{x}'(s), \mathbf{v}_2(s) \rangle$ . Assim, subtraindo as equações acima obtemos

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}_1(s_1), \mathbf{r}_1(s_2)) - \mathcal{L}(\mathbf{r}_2(s_2), \mathbf{r}_2(s_1)) = d_1(s_2) - d_1(s_1) + d_2(s_2) - d_2(s_1) \quad \mathbf{1.12}$$

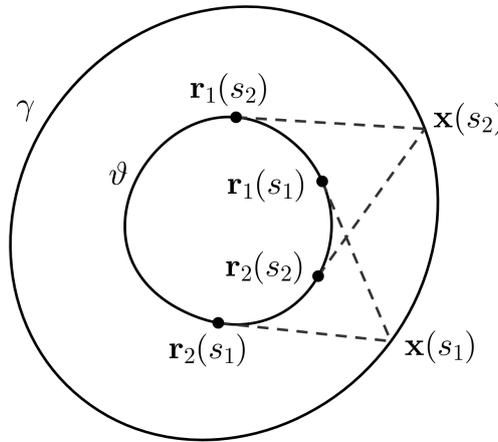


Figura 6:  $\gamma$  é string construction de  $\vartheta$

Para terminar, basta notarmos que (veja figura 6)

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}_1(s_1), \mathbf{r}_1(s_2)) - \mathcal{L}(\mathbf{r}_2(s_1), \mathbf{r}_2(s_2)) = \mathcal{L}(\mathbf{r}_1(s_1), \mathbf{r}_2(s_1)) - \mathcal{L}(\mathbf{r}_1(s_2), \mathbf{r}_2(s_2))$$

Substituindo isso em 1.12

$$d_1(s_1) + d_2(s_1) + \mathcal{L}(\mathbf{r}_1(s_1), \mathbf{r}_2(s_1)) = d_1(s_2) + d_2(s_2) + \mathcal{L}(\mathbf{r}_1(s_2), \mathbf{r}_2(s_2))$$

como queríamos ■

**Definição 9.** A constante 1.11 (ou o  $\ell$  da definição 8) é chamada de **parâmetro de Lazutkin**.

Passamos agora ao caso onde  $\vartheta$  é um polígono e não mais uma curva  $\mathcal{C}^1$  completamente. Notamos que os casos em que  $\vartheta$  é apenas um ponto ou um segmento já são conhecidos da seção anterior. No primeiro a construção com barbante é uma circunferência e no segundo teremos uma elipse pela definição 1.

Vamos assumir que  $\vartheta$  é um polígono. Nessa situação, o traço de  $\vartheta$  é formado por arcos de elipses (na figura 7 se  $\mathbf{X}$  está na região hachurada temos um arco de elipse com os focos indicados). Com efeito, dado um ponto  $\mathbf{X}$ , existem duas tangentes  $r$  e  $\bar{r}$  a  $\vartheta$  passando por tal ponto. Sendo  $\vartheta$  um polígono, temos duas situações: ou  $r, \bar{r}$  não tangenciam um lado inteiro do polígono, ou alguma das retas contém um dos lados. Na segunda situação,  $\mathbf{X}$  e dois vértices consecutivos do polígono são colineares. Daí,  $\mathbf{X}$  deve estar sobre alguma das retas suporte dos lados de  $\vartheta$ . Observamos que a união de tais retas é um conjunto  $R$  fechado com interior vazio. Além disso, seu complementar (desconsiderando a região correspondente ao polígono) consiste num número finito de componentes conexas. Concluímos que ao realizarmos a construção com barbante a curva  $\gamma$  resultante será constituída de partes contidas em algumas das componentes, passando eventualmente por  $R$  (claramente nenhum pedaço das retas de  $R$  está em  $\gamma$ ). Dentro de cada uma dessas componentes as retas tangentes passam sempre pelos mesmos vértices. Logo,  $\gamma$  será formado por pedaços de elipses.

Para verificarmos a diferenciabilidade, basta analisarmos o que ocorre quando  $\gamma$  encontra  $R$  (figura 8). Digamos que  $\mathbf{X} \in \gamma$  é um desses pontos e que a reta  $r$  contém um dos lados do triângulo. Tomamos uma vizinhança de  $\mathbf{X}$  e observamos que  $r$  a divide em duas partes  $U_1$  e  $U_2$ . Restrita a cada um desses conjuntos  $\gamma$  é um arco contido nas elipses  $\mathcal{E}_1$  e  $\mathcal{E}_2$ . Os focos de  $\mathcal{E}_1$  e  $\mathcal{E}_2$  estão contidos nas retas  $r$  e  $\bar{r}$  pois tais retas são raios focais de ambas as elipses. Assim, pela proposição 10, no ponto  $\mathbf{X}$  a reta normal à ambas as elipses é a mesma. Logo,  $\gamma$  é  $\mathcal{C}^1$  em  $\mathbf{X}$ .

Embora em geral a construção com barbante seja apenas  $\mathcal{C}^1$ , se o polígono é regular e para um parâmetro  $\ell$  específico podemos conseguir curvas de classe  $\mathcal{C}^2$ . Suponhamos que temos um polígono regular de  $n \geq 5$  lados. Num sistema de coordenadas  $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}\}$  apropriado, seus focos

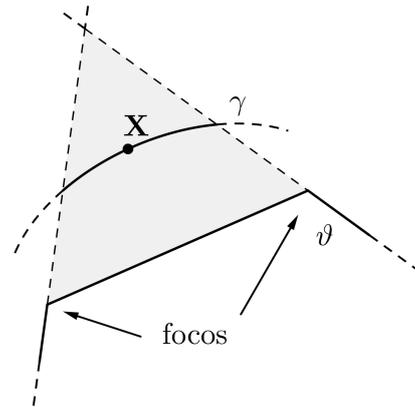


Figura 7: Construção com barbante de um polígono

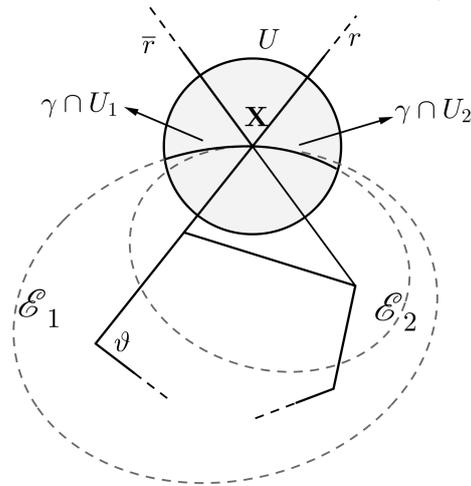


Figura 8:  $\gamma \cap R$  numa vizinhança de  $\mathbf{x}$

$\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$  são

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 &= \hat{\mathbf{i}} \\ \mathbf{F}_{k+1} &= T(\mathbf{F}_k)\end{aligned}$$

onde  $T = \begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi}{n} & -\sin \frac{2\pi}{n} \\ \sin \frac{2\pi}{n} & \cos \frac{2\pi}{n} \end{bmatrix}$  é a rotação de  $\frac{2\pi}{n}$  no sentido positivo.

Para obtermos curvas  $\mathcal{C}^2$  basta mostrarmos que a curvatura é contínua em  $\gamma \cap R$ . Observamos na figura 9 trechos de duas construções com barbante de  $\vartheta$  para valores  $\ell_1 < \ell_2$  do parâmetro. As curvas  $\gamma_{\ell_1}$  e  $\gamma_{\ell_2}$  obtidas são formadas por pedaços de elipses cujos focos dependem da componente de  $\mathbb{R}^2 \setminus R$  em que se encontram, como indicado na imagem. Há em destaque alguns pontos de  $\gamma_{\ell_1} \cap R$  e  $\gamma_{\ell_2} \cap R$ , marcando os pontos de colagem dos arcos de elipse. Os pontos  $\mathbf{A}_k$  são obtidas pela intersecção dos prolongamentos dos lados  $\mathbf{F}_{k-1}\mathbf{F}_k$  e  $\mathbf{F}_{k+1}\mathbf{F}_{k+1}$  de  $\vartheta$ . O parâmetro  $\ell_2$  foi escolhido de forma que  $\mathbf{A}_k \in \gamma_{\ell_2}$ .

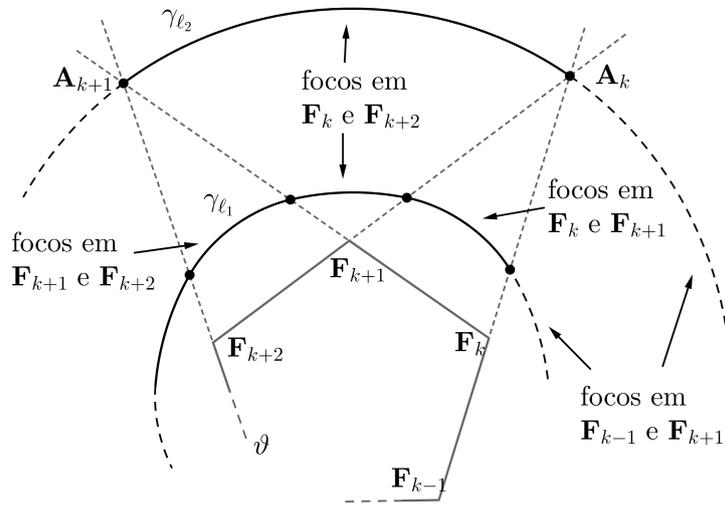


Figura 9: Partes de uma string construction de um polígono com valores distintos de  $\ell$

Pela simetria de rotação ( $\gamma_{\ell_2}$  é invariante por  $T$ ), se  $\gamma_{\ell_2}$  contém um dos pontos  $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ , então possui também todos os demais. Além disso, temos simetria de reflexão. Quer dizer,  $\gamma_{\ell_2}$  é invariante por reflexão na reta mediatriz de  $\mathbf{F}_k$  e  $\mathbf{F}_{k+2}$ , por exemplo. Digamos então que escolhemos uma parametrização  $\mathbf{r}(s)$  para  $\gamma_{\ell_2}$ , orientada positivamente e de forma que  $\mathbf{r}(s_k) = \mathbf{A}_k$ . Queremos mostrar que a curvatura  $\kappa(s)$  é contínua em  $s_k$ . Para isso, basta notar que  $\kappa(s_k^-) = \kappa(s_{k+1}^-)$  pela simetria de rotação. Similarmente,  $\kappa(s_k^+) = \kappa(s_{k+1}^+)$ . Pela simetria de reflexão, temos  $\kappa(s_{k+1}^-) = \kappa(s_k^+)$ . Com isso,  $\kappa(s_k^+) = \kappa(s_k^-)$  para qualquer  $k$ . Logo,  $\gamma_{\ell_2}$  é  $\mathcal{C}^2$ .

Calcularemos o parâmetro explicitamente nesse caso. Primeiro notamos que o centro do polígono é a origem  $\mathbf{O}$  e  $\|\mathbf{F}_k\| = 1$ . Como  $\mathbf{F}_{k+1} = T(\mathbf{F}_k)$  em que  $T$  é rotação, segue que

$$\langle \mathbf{F}_k, \mathbf{F}_{k+1} \rangle = \langle \mathbf{F}_k, T(\mathbf{F}_k) \rangle = \cos \frac{2\pi}{n} \|\mathbf{F}_k\|^2 = \cos \frac{2\pi}{n}$$

Pela lei dos cossenos a medida do lado do polígono é

$$L^2 = \|\mathbf{F}_{k+1} - \mathbf{F}_k\|^2 = 2 - 2 \cos \frac{2\pi}{n} \implies L = 2 \sin \frac{\pi}{n} \quad \mathbf{1.13}$$

Sendo  $x = \|\mathbf{A}_k - \mathbf{F}_k\|$ , no triângulo de vértices  $\mathbf{A}_k, \mathbf{F}_k, \mathbf{F}_{k+1}$ , pela lei dos senos temos

$$\frac{x}{\sin \frac{2\pi}{n}} = \frac{L}{\sin(\pi - \frac{4\pi}{n})} \implies x = \frac{L}{2 \cos \frac{2\pi}{n}}$$

Assim, o parâmetro  $\ell$  será

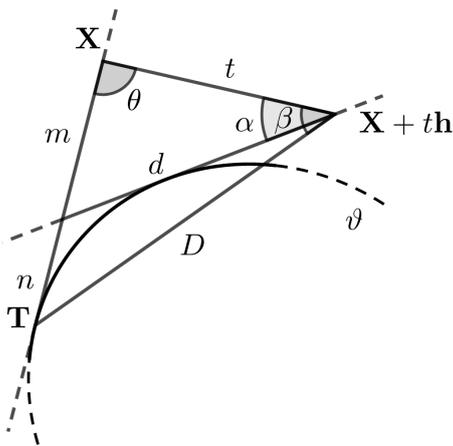
$$\ell = 2x + (n-1)L = L \left( n - 1 + \sec \frac{2\pi}{n} \right) \tag{1.14}$$

Para concluir, observamos que a curva obtida não é  $\mathcal{C}^3$ . De fato, os pontos  $\mathbf{A}$ 's são pontos de máximo da curvatura da string construction. Entretanto tais pontos não são pontos de máximo nas elipses coladas (quer dizer,  $\kappa'(s_n) \neq 0$ ). Logo,  $\gamma$  não é  $\mathcal{C}^3$ .

Embora nos restringimos a conjuntos convexos, a construção com barbante também pode ser feita em situações mais gerais, como em curvas não convexas [12]. Finalizamos essa seção com um esboço da demonstração da suavidade da construção com barbante.

**Teorema 2.** Seja  $\Omega$  um conjunto convexo aberto limitado por  $\partial\Omega = \vartheta$ . Então a construção com barbante de  $\vartheta$  é uma curva  $\gamma$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Demonstração:**



Fixado um ponto  $\mathbf{X}$  em  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ , podemos definir as funções  $f_1, f_2$  como descrito no início da seção. Seja  $f$  uma delas e  $\mathbf{T}$  o ponto de tangência (se não for único, consideremos  $\mathbf{T}$  o mais próximo de  $\mathbf{X}$ ). Vamos provar que o gradiente de  $f$  é o vetor unitário no sentido de  $\mathbf{X} - \mathbf{T}$ . De fato, fixado um vetor unitário  $\mathbf{h}$  temos  $\nabla f(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{h} = \cos \theta$  conforme a figura 10. Dessa figura notamos também que

$$f(\mathbf{X} + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{X}) \geq d - m$$

$$f(\mathbf{X} + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{X}) \geq D - m - n$$

Para provar o afirmado basta mostrar que

Figura 10: Prova do Teorema 2

$$\lim_{t \rightarrow 0} d - m - t \cos \theta = \lim_{t \rightarrow 0} D - m - n - t \cos \theta = 0$$

Observamos que  $\beta \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow 0$  e isso implica que o mesmo ocorre para  $\alpha$ . Além disso, da lei dos cossenos temos:

$$D^2 = (m + n)^2 + t^2 - 2t(m + n) \cos \theta$$

Isso prova o segundo limite. Para o primeiro, da lei dos senos obtemos

$$d = \frac{t \sin \theta}{\sin(\theta + \alpha)} \quad \text{e} \quad m = \frac{t \sin \alpha}{\sin(\theta + \alpha)}$$

Com isso prova-se o primeiro limite e terminamos o esboço da demonstração. ■

### 1.3 Construção Hexagonal

Vamos lidar agora com o caso em que a construção com barbante provém de um hexágono regular (que chamaremos de curva hexagonal). Na equação **1.13**, temos  $n = 6$  e portanto o lado desse hexágono é  $L = 1$ . Da equação **1.14** temos  $\ell = 7$ .

Nosso objetivo agora é obter uma parametrização de  $\gamma$ . Para isso, dividimos seu traço nos 6 arcos de elipse  $\gamma_1, \dots, \gamma_6$  que o compõem. Cada um desses arcos de elipse  $\gamma_k$  possui um centro  $\mathbf{O}_k$  e uma base  $\{\hat{\mathbf{i}}_k, \hat{\mathbf{j}}_k\}$ , conforme fizemos na parametrização de elipses da segunda seção deste capítulo. Usando a equação **1.2** temos uma parametrização para cada um desses arcos

$$\mathbf{r}_k(t) = \mathbf{O}_k + a \cos t \hat{\mathbf{i}}_k + b \sin t \hat{\mathbf{j}}_k$$

Como  $\gamma_k$  é um arco e não a elipse completa, devemos ter  $t_1 \leq t \leq t_2$  para algum  $t_1, t_2$ .

Os focos de  $\gamma_k$  são  $\mathbf{F}_k$  e  $\mathbf{F}_{k+2}$ . Usamos a convenção  $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_j$  se  $i \equiv j \pmod{6}$ . Notamos que  $2c = \|\mathbf{F}_{k+2} - \mathbf{F}_k\| = L\sqrt{3} = \sqrt{3}$  e que  $2a = 3L = 3$ . Dai,  $2b = \sqrt{6}$ . Para calcularmos  $t_1$ , basta observar

$$\langle \mathbf{r}_k(t_1) - \mathbf{O}_k, \hat{\mathbf{i}}_k \rangle = c \hat{\mathbf{i}}_k$$

Logo

$$a \cos t_1 = c \implies t_1 = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 54,74^\circ \quad \mathbf{1.15}$$

Para  $t_2$  basta usarmos a mesma relação (lembrando que o produto interno nesse caso será  $-c \hat{\mathbf{i}}_k$ ). Ou então por simetria  $\pi - t_1 = t_2$ .

Usando a inclinação da tangente como parâmetro (equação **1.3**) temos

$$\mathbf{r}_k(\varphi) = \mathbf{O}_k + \frac{a^2}{z} \cos \varphi \hat{\mathbf{i}}_k + \frac{b^2}{z} \sin \varphi \hat{\mathbf{j}}_k, \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$$

Como  $b \tan \varphi = a \tan t$ , segue que  $\varphi_1 = 60^\circ$  e  $\varphi_2 = 120^\circ$ , como esperado. Para obtermos uma parametrização global de  $\gamma$  vamos usar o parâmetro inclinação da tangente. Dessa forma, basta transladar o parâmetro  $\varphi$  de cada uma das seis parametrizações.

$$\mathbf{r}(\varphi) = \begin{cases} \mathbf{r}_1\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right), & \text{se } \frac{\pi}{6} \leq \varphi < \frac{\pi}{2} \\ \mathbf{r}_2\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right), & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq \varphi < \frac{5\pi}{6} \\ \mathbf{r}_3\left(\varphi + \frac{5\pi}{6}\right), & \text{se } \frac{5\pi}{6} \leq \varphi < \frac{7\pi}{6} \\ \mathbf{r}_4\left(\varphi + \frac{7\pi}{6}\right), & \text{se } \frac{7\pi}{6} \leq \varphi < \frac{3\pi}{2} \\ \mathbf{r}_5\left(\varphi + \frac{3\pi}{2}\right), & \text{se } \frac{3\pi}{2} < \varphi \leq \frac{11\pi}{6} \\ \mathbf{r}_6\left(\varphi + \frac{11\pi}{6}\right), & \text{se } \frac{11\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{13\pi}{6} \end{cases}$$

com  $\pi/6 \leq \varphi \leq 13\pi/6$ .

Para uso posterior, calcularemos a curvatura em cada um dos pontos de colagem  $\mathbf{A}_k$  e no ponto médio de cada arco  $\gamma_k$ . Usando a parametrização **1.2** e a fórmula **1.8**, queremos calcular a curvatura para  $t = \pi/2$  e para  $t = t_1$  conforme **1.15**. Então:

$$\kappa\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{b}{a^2} = \frac{2\sqrt{6}}{9} \quad \mathbf{1.16}$$

e no ponto de colagem:

$$\kappa(t_1) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t_1 + b^2 \cos^2 t_1)^{3/2}} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad 1.17$$

Temos agora o resultado análogo a proposição 10 para o bilhar hexagonal elíptico, cuja demonstração decorre diretamente desta. Digamos que  $\vartheta$  é o hexágono e  $\gamma$  a curva hexagonal. Então:

**Proposição 13.** Se uma partícula atinge  $\gamma$  após tangenciar  $\vartheta$ , então é refletida na direção da outra tangente a  $\vartheta$

Dada uma curva  $\vartheta$ , temos uma família de curvas  $\gamma_\ell$  obtidas através da string construction. Sobre isso, há um resultado interessante de Gutkin e Knill. Fixado um  $\ell$ , podemos criar uma função  $f_\ell : S^1 \rightarrow S^1$  da seguinte forma. A cada  $s \in S^1$  corresponde um ponto  $\mathbf{r}(s) \in \gamma_\ell$ . E por esse ponto passam duas tangentes a  $\vartheta$ , uma após escolha de orientação. Essa tangente intersecta  $\gamma_\ell$  em dois pontos distintos, digamos  $\mathbf{r}(\tilde{s})$  e  $\mathbf{r}(s)$ . Assim, definimos  $f_\ell(s) = \tilde{s}$ . Dessa forma,  $f_\ell$  será um homeomorfismo e possui número de rotação  $\rho(\ell)$ . Em [7] é demonstrado que  $\ell \mapsto \rho(\ell)$  é uma escada do diabo quando  $\vartheta$  é um triângulo.

Sabemos também que se  $\vartheta$  é um segmento, obtemos uma elipse. Assim, variando  $\ell$  temos uma família  $\gamma_\ell$  de elipses confocais. E se realizarmos a construção com barbante em uma dessas elipses, geraremos uma nova elipse com mesmos focos (resultado conhecido como teorema de Graves). Ou seja, obtemos uma elipse da família  $\gamma_\ell$ . A pergunta que fazemos agora é dual: queremos descobrir quais curvas  $\vartheta$  tem como construção com barbante a curva hexagonal. Ao contrário do que ocorre com elipses no teorema de Graves, a construção com barbante de uma curva hexagonal não é outra curva hexagonal. Não temos a resposta dessa pergunta, mas uma solução possivelmente traria novas ideias no estudo de cáusticas, que abordaremos nos capítulos posteriores.

## Capítulo 2

# Bilhares

### 2.1 Aplicação do Bilhar

Um bilhar consiste numa região (mesa) e uma partícula (bola) que move-se livremente nessa região. A bola move-se com velocidade constante sobre a mesa até que colida com a fronteira da região. As colisões são elásticas, e vale a lei da reflexão. A bola continua com a nova velocidade até que atinja novamente o bordo.

Uma mesa de bilhar será um aberto convexo  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  cuja fronteira é suave (ou seja, uma mesa sem 'caçapas'). Em geral não faremos distinção entre o traço  $\partial\Omega$  e sua parametrização. O movimento da partícula pode então ser descrito por um fluxo no fibrado tangente de  $\overline{\Omega}$ . Como a velocidade é constante, o fluxo pode ser descrito em  $\overline{\Omega} \times S^1$ .

Neste momento, ao invés de estudarmos o fluxo (maiores detalhes em [4]) passaremos a sua aplicação de primeiro retorno. Consideremos então que  $\mathbf{r} : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma parametrização (regular) de  $\partial\Omega$ . Podemos associar a cada colisão da bola um par  $(s, \theta)$ , onde  $s \in [0, l]$  é tal que  $\mathbf{r}(s)$  é o ponto da colisão e  $\theta \in [0, \pi]$  é o ângulo entre a velocidade de saída e a tangente a curva neste ponto. O **Espaço de Fase** do bilhar é o anel  $X = [0, l] \times [0, \pi]$ .

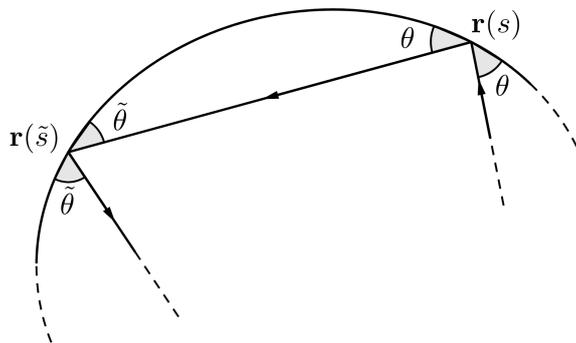


Figura 11: O problema da bola de bilhar

**Definição 10.** A **Aplicação de Bilhar** é  $\Phi : X \rightarrow X$  que associa a cada  $(s, \theta)$  o par  $(\tilde{s}, \tilde{\theta})$  correspondente a colisão seguinte. Se  $x = (s_0, \theta_0) \in X$ , a **órbita** de  $x$  é o conjunto  $\mathcal{O}(x) = \{(s_n, \theta_n) = \Phi^n(x); n \in \mathbb{Z}\}$ . A **trajetória** de  $x$  é o conjunto  $\mathcal{T}(x)$  dos segmentos (ou das retas) ligando  $\Phi^n(x)$  e  $\Phi^{n+1}(x)$ .

Também podemos pensar no espaço de fase como sendo o conjunto das retas orientadas do plano que cortam  $\overline{\Omega}$ . Assim, durante esse texto um ponto  $x \in X$  será interpretado ora como o par  $(s, \theta)$  ora como uma reta orientada. Nesse segundo ponto de vista, uma órbita seria similar ao que chamamos anteriormente de trajetória. Ambos os termos de fato se referem a essencialmente o mesmo objeto, embora um deles enfatize mais o viés geométrico. Provaremos no teorema 3 que  $\Phi$  é um difeomorfismo em  $[0, l) \times (0, \pi)$ . Definimos  $\Phi$  em  $[0, l) \times \{0, \pi\}$  de forma que seja a identidade nesse conjunto. A aplicação do Bilhar será contínua dessa forma.

Observamos que  $\partial\Omega$  pode ter parametrizações  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  distintas. Entretanto, como são regulares, as aplicações de bilhar  $\Phi_1, \Phi_2$  geradas são essencialmente as mesmas (do nosso ponto de vista). Mais precisamente, sejam  $\mathbf{r}_1: [a_1, b_1] \rightarrow \partial\Omega$  e  $\mathbf{r}_2: [a_2, b_2] \rightarrow \partial\Omega$ , com reparametrização  $h: [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$ . Isto é,  $\mathbf{r}_2 \circ h = \mathbf{r}_1$ . Assim, as aplicações do bilhar se relacionam por

$$(h^{-1}, i_d) \circ \Phi_2 \circ (h, i_d) = \Phi_1 \quad 2.1$$

onde  $i_d$  representa a aplicação identidade. Similarmente, se temos um difeomorfismo (ou ao menos um homeomorfismo)  $\omega: [0, \pi] \rightarrow [a, b]$ , podemos trocar o parâmetro  $\theta$  por  $\omega(\theta)$  na aplicação do bilhar, e estas se relacionarão por

$$(i_d, \omega^{-1}) \circ \overline{\Phi} \circ (i_d, \omega) = \Phi$$

onde  $\overline{\Phi}$  representa a aplicação do bilhar com parâmetro  $\omega(\theta)$ . É comum usarmos por exemplo  $\omega = \cos$ .

A aplicação do bilhar então está definida em  $X = [0, l) \times [0, \pi]$  e como dito no parágrafo anterior, eventualmente trocamos  $[0, \pi]$  por outro intervalo utilizando um difeomorfismo  $\omega$ . As vezes também é conveniente também utilizarmos coordenadas globais ao invés de coordenadas em  $S^1$ . Para isso, notamos que

$$\pi: \mathbb{R} \times [0, \pi] \rightarrow [0, l) \times [0, \pi]$$

é recobrimento universal. Assim, podemos considerar o levantamento  $\tilde{\Phi}$  de  $\Phi$ . Recordamos que  $\tilde{\Phi}$  satisfaz

$$\pi \circ \tilde{\Phi} = \Phi \circ \pi$$

A fim de fixar um único levantamento, costuma-se exigir também que  $\tilde{\Phi}(0, 0) \in [0, l) \times [0, \pi]$ . Observamos que em geral, não faremos distinção entre  $\tilde{\Phi}$  e  $\Phi$ .

## 2.2 Aplicação do Bilhar no Círculo

Se a curva  $\partial\Omega$  é uma circunferência de raio  $R$  uma parametrização é  $\mathbf{r}(s) = R(\cos s, \sin s)$  com  $s \in [0, 2\pi)$ . Então a aplicação do bilhar será dada por  $\Phi(s, \theta) = (s + 2\theta, \theta)$ . De fato, seja  $\mathbf{P} \in \partial\Omega$  é um ponto do círculo com coordenada  $s$ , a partir de onde a bola é lançada com ângulo  $\theta$  com a tangente. Esta atinge o ponto  $\mathbf{Q}$  de coordenada  $\tilde{s}$  formando um ângulo de medida  $\tilde{\theta}$  (figura 12). Queremos primeiro calcular  $\tilde{s}$  em função de  $s$  e  $\theta$ . Notamos que

$$\frac{\langle \mathbf{Q} - \mathbf{P}, \mathbf{r}'(s) \rangle}{\|\mathbf{Q} - \mathbf{P}\| \|\mathbf{r}'(s)\|} = \cos \theta$$

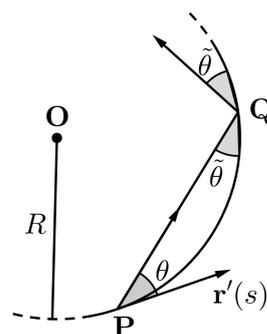


Figura 12: Bilhar no círculo

ou equivalentemente

$$\frac{\langle \mathbf{r}(\tilde{s}) - \mathbf{r}(s), \mathbf{r}'(s) \rangle}{\|\mathbf{r}(\tilde{s}) - \mathbf{r}(s)\| \|\mathbf{r}'(s)\|} = \cos \theta \quad 2.2$$

Como  $\mathbf{r}(s) = R(\cos s, \sin s)$  segue que

$$\frac{\sin(\tilde{s} - s)}{\sqrt{2 - 2\cos(\tilde{s} - s)}} = \cos \theta \implies \cos\left(\frac{\tilde{s} - s}{2}\right) = \cos \theta$$

Disso segue que  $\tilde{s} = s + 2\theta$ . De cálculos similares encontramos  $\theta' = \theta$ . Como afirmamos, temos portanto  $\Phi(s, \theta) = (s + 2\theta, \theta)$ . Usando a reparametrização  $h : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi R]$ ,  $h(s) = Rs$  de acordo com a equação 2.1 obtemos a aplicação

$$\Phi(s, \theta) = (s + 2R\theta, \theta) \quad 2.3$$

com parametrização  $\mathbf{x}(s) = R(\cos(s/R), \sin(s/R))$ , onde  $s \in \mathbb{R}/2\pi R$  é o comprimento do arco.

Considerando essa segunda aplicação, seja  $x_0 = (s_0, \theta_0) \in X$ . Todo os pontos de  $\mathcal{O}(x_0)$  estão contidos na reta horizontal  $\theta = \theta_0$ . Observamos que se  $x_0$  é ponto periódico, i.e, existe  $n$  tal que  $\Phi^n(x) = x$ , então  $\mathcal{O}(x)$  é finito. Neste caso, temos  $s_0 + 2nR\theta = s_0 \pmod{2\pi R}$ , e portanto  $\theta = \alpha\pi$  com  $\alpha \in \mathbb{Q}$ . Por outro lado, se  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ , notamos que  $\mathcal{O}(x_0)$  é invariante por translações  $(2Rn\theta, 0)$ . Como  $\{n\alpha \pmod{1}; n \in \mathbb{Z}\}$  é denso em  $[0, 1]$  segue que  $\mathcal{O}(x_0)$  é denso na reta  $\theta = \theta_0$ .

Cada  $x \in X$  corresponde a uma reta orientada na mesa do bilhar e existe uma única circunferência com centro na origem tangente a tal reta. Como  $\mathcal{T}(x)$  é invariante por rotações, já que  $\mathcal{O}(x)$  está contido em uma reta, cada um dos segmentos de  $\mathcal{T}(x)$  é tangente a esta circunferência. Fisicamente, isso pode ser visto da seguinte forma: a partícula tem o momento angular preservado a cada colisão com o bordo.

## 2.3 Função Geratriz e a Derivada da Aplicação do Bilhar

A partir dessa seção,  $s$  denotará o parâmetro comprimento de arco para a parametrização  $\mathbf{r}$  do bordo do bilhar. Dados  $s, \tilde{s}$  seja  $H(s, \tilde{s}) = \|\mathbf{r}(\tilde{s}) - \mathbf{r}(s)\|$ , chamada de **função geratriz** (alguns autores usam a função  $-H$ ). Na seção anterior, a equação 2.2 utilizada para calcularmos a aplicação do bilhar para círculos, vale para qualquer curva  $\mathbf{r}$  e pode ser escrita como

$$\frac{\partial H(s, \tilde{s})}{\partial s} = -\cos \theta \quad 2.4$$

Da simetria  $H(s, \tilde{s}) = H(\tilde{s}, s)$  vem que

$$\frac{\partial H(s, \tilde{s})}{\partial \tilde{s}} = \frac{\partial H(\tilde{s}, s)}{\partial \tilde{s}} = -\cos(\pi - \tilde{\theta}) = \cos \tilde{\theta} \quad 2.5$$

Essas equações permitem estabelecer um critério para decidir quando três pontos pertencem a uma órbita. Suponha por exemplo que  $(s_2, \theta_2) = \Phi(s_1, \theta_1)$  e  $(s_3, \theta_3) = \Phi^2(s_1, \theta_1)$ . Assim

$$\frac{\partial H(s_1, s_2)}{\partial \tilde{s}} + \frac{\partial H(s_2, s_3)}{\partial s} = \cos \theta_2 - \cos \theta_2 = 0$$

De maneira geral, se  $s_1, \dots, s_n$  formam uma órbita de período  $n$  (mais precisamente, existem  $\theta_1, \dots, \theta_n$  tais que  $\Phi^{k-1}(s_1, \theta_1) = (s_k, \theta_k)$  para  $k = 1, \dots, n$  e  $\Phi^n(s_1, \theta_1) = (s_1, \theta_1)$ ) então  $(s_1, \dots, s_n)$  é ponto crítico de

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n H(x_k, x_{k+1}) \quad 2.6$$

com  $s_{n+1} = s_1$ . De fato

$$\nabla F(s_1, \dots, s_n) = \left( \frac{\partial H(s_n, s_1)}{\partial s'} + \frac{\partial H(s_1, s_2)}{\partial s}, \dots, \frac{\partial H(s_{n-1}, s_n)}{\partial s'} + \frac{\partial H(s_n, s_1)}{\partial s} \right)$$

das equações 2.4 e 2.5, teremos

$$\nabla F(s_1, \dots, s_n) = (\cos\theta_1 - \cos\theta_1, \dots, \cos\theta_n - \cos\theta_n) = (0, \dots, 0)$$

Observando as equações 2.4 e 2.5, vamos usar a mudança de coordenadas  $r = -\cos\theta$ . Dai temos  $\Phi(s, r) = (\tilde{s}, \tilde{r}) = (\mathcal{S}(s, r), \mathcal{R}(s, r))$ . Reescrevendo as equações, temos

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial s} = r \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \tilde{s}} = -\tilde{r} \quad 2.7$$

**Proposição 14.** Nesse sistema de coordenadas,  $\Phi$  preserva área e orientação.

**Demonstração:** Para mostrar que  $\det \Phi = 1$ , o truque é definir  $\bar{H}(s, r) = H(s, \mathcal{S}(s, r))$  e calcular  $\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial s \partial r}$  de duas maneiras distintas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{H}}{\partial s} &= \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial \tilde{s}} \cdot \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial s} = r - \mathcal{R} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial s} \\ \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial r \partial s} &= 1 - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial s} - \mathcal{R} \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial r \partial s} \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{H}}{\partial r} &= \frac{\partial H}{\partial \tilde{s}} \cdot \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial r} = -\mathcal{R} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial r} \\ \frac{\partial \bar{H}}{\partial s \partial r} &= -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial r} - \mathcal{R} \frac{\partial^2 \mathcal{S}}{\partial s \partial r} \end{aligned}$$

Logo, obtemos

$$1 - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial s} = -\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial r} \implies \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial s} & \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial r} \\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial s} & \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial r} \end{vmatrix} = 1$$

Uma outra prova desse resultado pode ser encontrada em [19]. Basta notar que

$$dH = \frac{\partial H}{\partial s} ds + \frac{\partial H}{\partial \tilde{s}} d\tilde{s} = -\cos\theta ds + \cos\tilde{\theta} d\tilde{s}$$

Como  $d^2 H = 0$  obtemos

$$0 = -\sin\theta d\theta \wedge ds + \sin\tilde{\theta} d\tilde{\theta} \wedge d\tilde{s} \implies -\sin\theta ds \wedge d\theta = -\sin\tilde{\theta} d\tilde{s} \wedge d\tilde{\theta}$$

Ou seja,  $ds \wedge dr = d\tilde{s} \wedge d\tilde{r}$  como queríamos. ■

**Teorema 3.** Se  $\mathbf{r}$  é uma aplicação  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \geq 2$ , então a aplicação do bilhar tem classe  $\mathcal{C}^{k-1}$

**Demonstração:** Consideremos a função

$$F((s, r), (\tilde{s}, \tilde{r})) = \left( \frac{\partial H}{\partial s}(s, \tilde{s}) - r, \frac{\partial H}{\partial \tilde{s}}(s, \tilde{s}) + \tilde{r} \right)$$

para  $-1 < r < 1$ . Pelo Teorema da Função Implícita existe  $G$  tal que  $F((s, r), G(s, r)) = 0$ . Por 2.7,  $G$  é precisamente  $\Phi$ . Como o bordo tem classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $H$  também, e logo  $\Phi$  é  $\mathcal{C}^{k-1}$ .

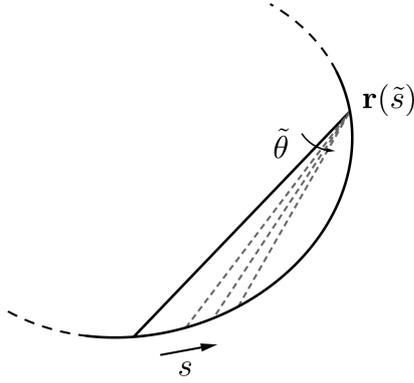


Figura 13: Prova do teorema 3

Agora que já sabemos que  $\Phi$  é derivável, vamos calcular explicitamente sua derivada. Escrevendo  $\Phi$  em coordenadas  $(s, \theta)$ ,  $\Phi(s, \theta) = (\mathcal{S}(s, \theta), \mathcal{O}(s, \theta))$ . Notamos que o vetor velocidade  $\mathbf{v}$  forma um ângulo  $\theta$  com a tangente em  $\mathbf{r}(s)$ . Por outro lado,  $\mathbf{v}$  é paralelo a  $\mathbf{r}(\tilde{s}) - \mathbf{r}(s)$ . Temos, sendo  $\mathbf{n}$  o vetor normal

$$\frac{\mathbf{r}(\tilde{s}) - \mathbf{r}(s)}{\|\mathbf{r}(\tilde{s}) - \mathbf{r}(s)\|} = \cos \theta \mathbf{r}'(s) + \sin \theta \mathbf{n}(s)$$

Considerando as funções  $\Theta(s, \tilde{s}) = \theta$  e  $\bar{\Theta}(s, \tilde{s}) = \tilde{\theta}$  temos ainda

$$\mathbf{r}(\tilde{s}) - \mathbf{r}(s) = H(s, \tilde{s}) [\cos \Theta(s, \tilde{s}) \mathbf{r}'(s) + \sin \Theta(s, \tilde{s}) \mathbf{n}(s)] \quad 2.8$$

Tomando a derivada em relação a  $s$

$$\begin{aligned} -\mathbf{r}'(s) &= \frac{\partial H}{\partial s} (\cos \Theta \mathbf{r}'(s) + \sin \Theta \mathbf{n}(s)) + \\ &+ H \left( -\sin \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial s} \mathbf{r}'(s) + \cos \Theta \kappa(s) \mathbf{n}(s) + \cos \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial s} \mathbf{n}(s) - \sin \Theta \kappa(s) \mathbf{r}'(s) \right) \end{aligned}$$

Tomando o produto interno com  $\mathbf{n}(s)$  obtemos

$$\frac{\partial H}{\partial s} \sin \Theta + H \kappa(s) \cos \Theta + H \cos \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial s} = 0$$

Usando a relação 2.4 temos

$$\frac{\partial \Theta}{\partial s} = \frac{\sin \Theta}{H} - \kappa(s)$$

Derivando agora a equação 2.8 em relação a  $\tilde{s}$  teremos

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(\tilde{s}) &= \frac{\partial H}{\partial \tilde{s}} (\cos \Theta \mathbf{r}'(s) + \sin \Theta \mathbf{n}(s)) + \\ &+ H \left( -\sin \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{s}} \mathbf{r}'(s) + \cos \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{s}} \mathbf{n}(s) \right) \end{aligned}$$

Por outro lado, como  $\mathbf{r}(\tilde{s}) = \cos(\theta + \tilde{\theta}) \mathbf{r}'(s) + \sin(\theta + \tilde{\theta}) \mathbf{n}(s)$ , comparando com a equação acima advém

$$\frac{\partial H}{\partial \tilde{s}} \sin \Theta + H \cos \Theta \frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{s}} = \sin \Theta \cos \bar{\Theta} + \sin \bar{\Theta} \cos \Theta$$

e portanto

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tilde{s}} = \frac{\sin \bar{\Theta}}{H}$$

Para concluir basta apenas mostrar que  $\partial_2 F$  é invertível, para satisfazer as hipóteses do Teorema da Função Implícita. Temos então:

$$\det \partial_2 F = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial \tilde{s} \partial s}(s, \tilde{s}) & 0 \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \tilde{s}^2}(s, \tilde{s}) & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial \tilde{r}}{\partial s}$$

Geometricamente, fixado  $\tilde{s}$ , ao aumentarmos  $s$ ,  $\tilde{\theta}$  decresce e vale que  $\frac{\partial \tilde{r}}{\partial s} < 0$  (figura 13). Concluimos assim a prova do teorema 3. ■

Como  $\bar{\Theta}(s, \bar{s}) = \pi - \Theta(\bar{s}, s)$  segue que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial s}(s, \bar{s}) &= -\frac{\partial \Theta}{\partial \bar{s}}(\bar{s}, s) = -\frac{\sin \Theta}{H} \\ \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{s}}(s, \bar{s}) &= -\frac{\partial \Theta}{\partial s}(\bar{s}, s) = -\frac{\sin \bar{\Theta}}{H} + \kappa(\bar{s})\end{aligned}$$

Por fim temos

$$\Theta(s, \mathcal{S}(s, \theta)) = \theta \implies \begin{cases} \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{s}} \cdot \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} = 1 \\ \frac{\partial \Theta}{\partial s} + \frac{\partial \Theta}{\partial \bar{s}} \cdot \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial s} = 0 \end{cases}$$

e também

$$\bar{\Theta}(s, \mathcal{S}(s, \theta)) = \mathcal{O}(s, \theta) \implies \begin{cases} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial s} + \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{s}} \cdot \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial s} = \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial s} \\ \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial \bar{s}} \cdot \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial \theta} \end{cases}$$

Com essas equações finalmente obtemos a matriz da derivada da aplicação do bilhar

$$d\Phi_{(s,\theta)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial s} & \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial s} & \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{H\kappa(s) - \sin \theta}{\sin \bar{\theta}} & \frac{H}{\sin \bar{\theta}} \\ \kappa(\bar{s}) \frac{H\kappa(s) - \sin \theta}{\sin \bar{\theta}} - \kappa(s) & \frac{H\kappa(\bar{s})}{\sin \bar{\theta}} - 1 \end{bmatrix} \quad 2.9$$

## 2.4 Aplicações Twist

Tendo já calculado a derivada da aplicação do bilhar, vamos observar o seguinte: fixado uma posição no bordo do bilhar, e aumentando  $\theta$  a partir de 0, atingimos um ponto cada vez mais distante. Mais precisamente, a função  $\theta \mapsto \mathcal{S}(s, \theta)$  é crescente, para  $s$  fixo. De fato,  $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} = \frac{H}{\sin \bar{\theta}} > 0$  para  $\theta \in (0, \pi)$ . Essa é uma condição geométrica importante que será usada posteriormente.

**Definição 11.** Seja  $\mathcal{H}$  um homeomorfismo de  $X = S^1 \times [0, 1]$  em  $X$ . Diremos que  $\mathcal{H}$  é um **twist** se algum de seus levantamentos satisfizer as condições:

- (a)  $(x+1, y) = (1, 0) + \mathcal{H}(x, y)$
- (b)  $\mathcal{H}$  preserva  $S^1 \times \{0\}, S^1 \times \{1\}$  e preserva orientação
- (c) Sendo  $\mathcal{H}(x, y) = (\bar{x}(x, y), \bar{y}(x, y))$  então  $y \mapsto \bar{x}(x, y)$  é monótona.

O twist é dito **positivo** ou **negativo** conforme  $y \mapsto \bar{x}(x, y)$  é crescente ou decrescente. Se  $\mathcal{H}$  é twist positivo então  $\mathcal{H}^{-1}$  é negativo, e vice-versa. Por isso suporemos que todos os twists são positivos. Para bilhares, essa condição quer dizer que a imagem da reta vertical  $\{(x, y); x = \text{constante}\}$  pela aplicação  $\mathcal{H}$  é uma curva inclinada para a direita (figura 14).

Observamos que já que  $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} > 0$ , podemos escrever  $\bar{\theta}$  em função de  $\bar{s}$ . Quer dizer, a imagem de  $\{(x, y); x = \text{constante}\}$  é um gráfico. Quando esse gráfico é lipschitziano, dizemos que é um **twist uniforme**.

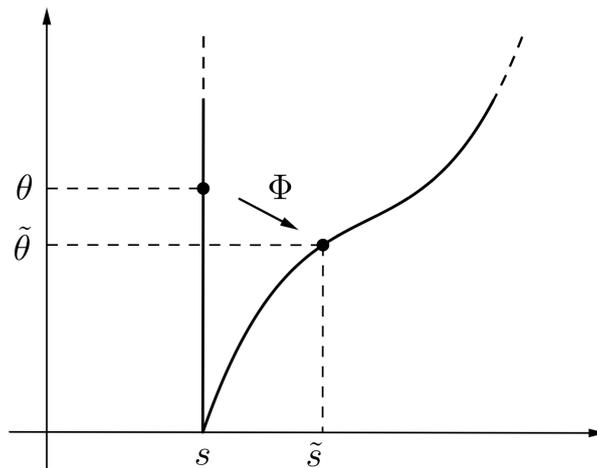


Figura 14: Bilhar: uma aplicação twist

**Proposição 15.** A aplicação do bilhar é um twist. Se  $\partial\Omega$  é  $\mathcal{C}^2$  com curvatura  $\kappa > 0$  o twist é uniforme.

**Demonstração:** Como observamos anteriormente,  $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} > 0$  implica a condição de twist. Para a uniformidade, precisamos que a razão entre  $\frac{\partial S}{\partial \theta}$  e  $\frac{\partial \mathcal{O}}{\partial \theta}$  seja limitada. De 2.9, resta apenas verificar o que ocorre quando  $\theta \rightarrow 0$ .

Suponha então que a curvatura em  $s$  é não nula. Nesse caso, numa vizinhança de  $s$  esta é limitada e podemos escrever  $0 < m < \kappa < M$ . Para  $\theta$  pequeno, temos (figura 15)

$$2M^{-1} \sin \theta < H < 2m^{-1} \theta$$

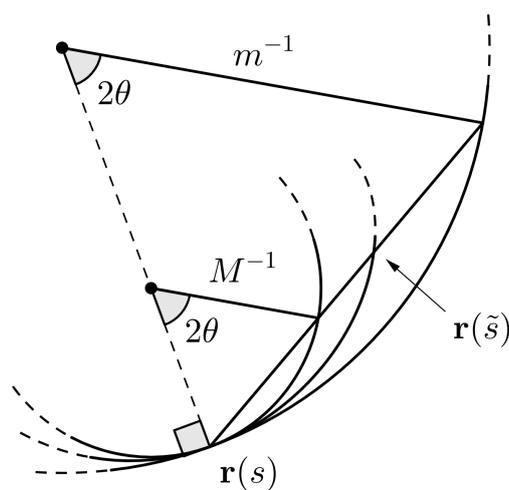


Figura 15: O bilhar é twist uniforme

Daí, concluímos

$$\frac{2M^{-1} \sin \theta}{\sin \tilde{\theta}} < \frac{H}{\sin \tilde{\theta}} < \frac{2m^{-1} \sin \theta}{\sin \tilde{\theta}} \Rightarrow 2M^{-1} \leq \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} \leq 2m^{-1}$$

Tomando vizinhanças cada vez menores,  $m, M \rightarrow \kappa(s)^{-1}$ . Logo

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta} = 2\kappa(s)^{-1}$$

Similarmente, obtemos

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \theta} = 1$$

Com isso concluímos que  $\Phi$  é um twist uniforme. ■

## 2.5 Bilhar na Elipse

### 2.5.1 Trajetórias focais

A aplicação do bilhar em uma elipse  $\mathcal{E}$  tem duas órbitas periódicas de período dois. De fato, observamos que as intersecções dos eixos com a elipse são pontos de máximo global e mínimo local para  $H(s, \tilde{s})$ . Ou seja, temos pontos críticos para a função  $F$  da seção anterior ( em **2.6**). As trajetórias de tais órbitas são os eixos maior e menor de  $\mathcal{E}$ .

A proposição **10** nos diz, por continuidade, que se um segmento da trajetória corta o segmento focal então todos os outros segmentos também o cortam. E se um segmento da trajetória corta o eixo maior sem passar pelo segmento focal, então o mesmo vale para os demais segmentos.

Vamos observar essa propriedade no espaço de fase. Fixado  $s$ , existem duas retas passando por  $\mathbf{r}(s)$  e pelos focos  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ . Daí, em  $X$  temos dois pontos  $(s, \theta_1), (s, \theta_2)$  correspondentes a essas retas. Observamos que  $\theta_1$  e  $\theta_2$  variam diferenciavelmente com  $s$ . De fato, temos

$$\frac{\mathbf{F}_1 - \mathbf{r}(s)}{\|\mathbf{F}_1 - \mathbf{r}(s)\|} = \cos \theta_1 \mathbf{r}'(s) + \sin \theta_1 \mathbf{n}(s)$$

ou seja

$$\cos \theta_1 = \frac{\langle \mathbf{F}_1 - \mathbf{r}(s), \mathbf{r}'(s) \rangle}{\|\mathbf{F}_1 - \mathbf{r}(s)\|}$$

Portanto os conjuntos  $\mathcal{S}_1 = \{(s, \theta_1(s)) \in X; s \in [0, l]\}$  e  $\mathcal{S}_2 = \{(s, \theta_2(s)) \in X; s \in [0, l]\}$  são gráficos de curvas  $\mathcal{C}^1$ . Observamos que se  $x \in \mathcal{S}_1$ , então  $\Phi(x) \in \mathcal{S}_2$ , pela proposição **10**.  $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$  corresponde a reta que passa simultaneamente por ambos os focos (que é trajetória de uma das duas órbitas de período dois que encontramos anteriormente). Assim,  $\mathcal{S}_1$  e  $\mathcal{S}_2$  dividem o espaço de fase em duas regiões, uma que chamaremos de interna, e referente a pontos compreendidos entre  $\mathcal{S}_1$  e  $\mathcal{S}_2$  (isto é, vale  $\theta_1(s) < \theta < \theta_2(s)$  ou  $\theta_2(s) < \theta < \theta_1(s)$ ). A outra denominaremos externa e possui os pontos  $(s, \theta)$  satisfazendo  $\theta > \theta_1(s), \theta_2(s)$  ou  $\theta < \theta_1(s), \theta_2(s)$ . Se  $x$  é um ponto da região interna, então a reta orientada correspondente corta o eixo focal, e vale a recíproca. Daí,  $\mathcal{O}(x)$  está totalmente contido na região interna. E temos também propriedades análogas para a região externa.

Outra maneira de percebermos tal fato é notar que  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$  é invariante por  $\Phi$ . Dessa forma, como  $\mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$  possui apenas dois pontos,  $\mathcal{I}$  divide o espaço de fase  $X$  em 4 regiões conexas, duas das quais formam a parte externa. Cada uma dessas regiões contém uma das retas  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ , que são invariantes por  $\Phi$ . Assim, como  $\Phi$  é homeomorfismo, segue que cada componente da parte externa é invariante. Logo, a parte interna também será invariante. Em cada componente conexa da região interna, temos um dos pontos da órbita de período dois correspondente ao eixo maior. Assim, a região interna como um todo é invariante, mas cada uma de suas componentes conexas é levada à outra por  $\Phi$  (figura 16)

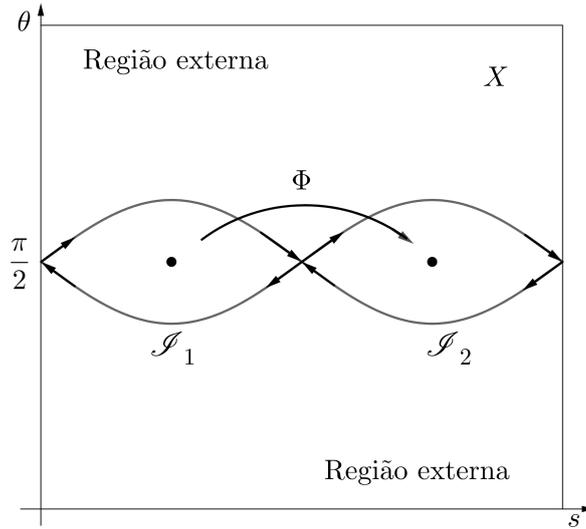


Figura 16: Pontos periódicos elípticos e hiperbólicos e variedades estável e instável

**Proposição 16.** A órbita periódica cuja trajetória é o eixo maior da elipse é hiperbólica.

**Demonstração:** De fato, basta calcularmos os autovalores de  $\Phi$  nos pontos correspondentes a trajetória do eixo maior. O comprimento  $H$  é  $2a$ , os ângulos são  $\theta = \theta' = \pi/2$  e a curvatura é  $\kappa(s) = \kappa(s') = a/b^2$ . Assim, a matriz  $d\Phi$  é (como obtivemos em 2.9)

$$\begin{bmatrix} \frac{a^2 + c^2}{b^2} & 2a \\ \frac{2ac^2}{b^4} & \frac{a^2 + c^2}{b^2} \end{bmatrix}$$

Como o determinante é 1 e o traço é  $t = \frac{2(a^2 + c^2)}{b^2}$ , os autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$  são raízes de  $x^2 - tx + 1 = 0$ . Já que  $t^2 - 4 > 0$ , temos duas raízes reais distintas. Por outro lado, como seu produto é positivo, elas possuem mesmo sinal. Por fim, como  $t > 0$ ,  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ . Já que  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$  concluímos que  $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$ . Da simetria, o mesmo vale para os autovalores de  $d\Phi^2$ . Assim, tal órbita é hiperbólica. ■

**Proposição 17.**  $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$  são as variedades estável e instável da órbita periódica hiperbólica de período 2.

**Demonstração:** Vamos admitir que a elipse está num sistema de coordenadas de forma que seus focos estão sobre o eixo  $x$  e o seu centro é a origem. Sejam  $F_1$  e  $F_2$  os focos, de forma que  $F_1$

tem abscissa negativa (quer dizer,  $\mathbf{f}$  está a esquerda). Consideremos então uma parametrização  $\mathbf{r}$  no sentido positivo. Sem perda de generalidade, seja  $(s_0, \theta_0) \in \mathcal{S}_1$ , de forma que  $\mathbf{r}(s_0)$  tem ordenada positiva. Logo, temos também  $\theta_0 < \pi/2$ . Como usual,  $(s_n, \theta_n)$  denotará  $\Phi^{(n)}(s_0, \theta_0)$ .

Observamos que se  $\mathbf{r}(s_0)$  tem ordenada positiva, então  $\mathbf{r}(s_1)$  terá ordenada negativa. De fato, a reta orientada correspondente a  $(s_0, \theta_0)$  passa por  $\mathbf{F}_1$  e portanto, cruza o eixo  $x$ . Assim,  $\mathbf{r}(s_{2n})$  tem sempre ordenada positiva. Seja então  $x_n$  o ângulo formado por  $\mathbf{r}(s_{2n})\mathbf{F}_1$  e o eixo  $x$  (figura 17). Como a reta orientada correspondente a  $(s_{2n}, \theta_{2n})$  divide o plano em dois semiplanos, dos quais  $\mathbf{r}(s_{2n+2})$  deve estar do mesmo lado que o foco  $\mathbf{F}_2$ , segue que  $x_{n+1} < x_n$ .

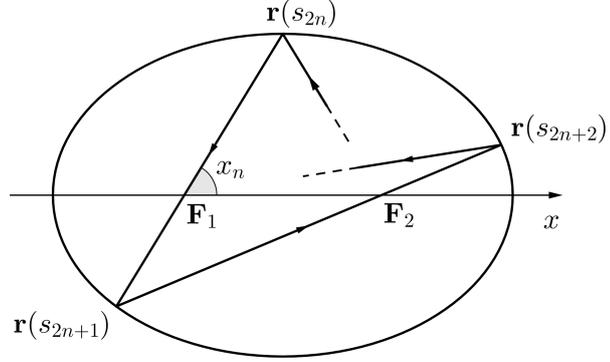


Figura 17: O ângulo  $x_n$

A sequência  $(x_n)$  é decrescente, e limitada inferiormente por 0 (já que  $\mathbf{r}(s_{2n})$  tem ordenada positiva). Caso seja  $\lim x_n = 0$ , o problema acabou. Caso contrário, suponha que  $\lim x_n = \vartheta > 0$ . Nessa situação, digamos que  $(s, \theta) \in \mathcal{S}_1$  é tal que  $\overline{\mathbf{r}(s)\mathbf{F}_1}$  forma o ângulo  $\vartheta$  com a horizontal. Como  $\Phi$  é homeomorfismo, existe  $(\tilde{s}, \tilde{\theta}) = \Phi^{-2}(s, \theta)$ , de forma que  $\overline{\mathbf{r}(\tilde{s})\mathbf{F}_1}$  forma um ângulo  $\tilde{\vartheta} > \vartheta$  com a horizontal. Daí, existe  $x_n$  tal que  $\tilde{\vartheta} > x_n > \vartheta$ , e por continuidade segue que  $x_{n+1} < \vartheta$  (veja figura 18). Logo, concluímos que a única possibilidade é  $\lim x_n = 0$  e portanto, a trajetória de  $(s_0, \theta_0)$  aproxima do eixo maior da elipse. ■

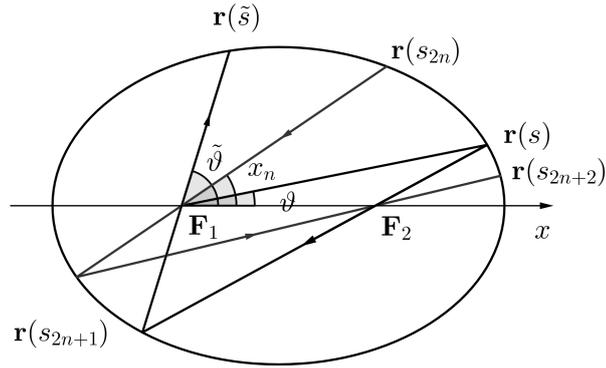


Figura 18:  $(x_n) \rightarrow 0$

### 2.5.2 Integrabilidade

A proposição 10 também permite associar a cada  $x \in X$  um invariante, que introduzimos a seguir. Usaremos a abordagem de [19] Cada  $x \in X$  corresponde a um ponto  $\mathbf{x}$  de  $\partial\Omega$  e uma velocidade  $\mathbf{v}$  (unitária). Escolhendo um sistema de coordenadas como o usado em 1.1 e sendo  $\mathbf{x} = (x, y)$  e  $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ , a elipse terá equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Então podemos descrevê-la por  $\langle B\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1$ , onde  $B$  é a matriz diagonal com entradas  $1/a^2$  e  $1/b^2$ . Sejam então  $\tilde{\mathbf{x}}$  e  $\tilde{\mathbf{v}}$  correspondentes a  $\Phi(x)$ . Provaremos que  $\langle B\mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = \langle B\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle$ . Ou seja, que

$$\frac{xv_x}{a^2} + \frac{yv_y}{b^2}$$

é invariante. Como  $\mathbf{x}$  e  $\tilde{\mathbf{x}}$  são pontos da elipse, temos  $\langle B\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle B\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{x}} \rangle = 1$ . Além disso, sendo  $B$  simétrica, obtemos  $\langle B(\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{x}}), (\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) \rangle = 0$ . Já que  $\mathbf{v}$  e  $\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$  são paralelos, segue que

$$\langle B\mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = -\langle B\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{v} \rangle$$

Por outro lado, o vetor  $2B\mathbf{x}$  é gradiente da função  $\langle B\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$  donde segue que  $B\mathbf{x}'$  é ortogonal a elipse no ponto  $\tilde{\mathbf{x}}$ . Como  $\mathbf{v} + \tilde{\mathbf{v}}$  é tangente a elipse,  $\langle B\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{v} + \tilde{\mathbf{v}} \rangle = 0$  e portanto

$$\langle B\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{v} \rangle = -\langle B\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle$$

Combinando os resultados, temos o desejado:

$$\langle B\mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle = \langle B\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle$$

Assim, para a elipse existe uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo  $f(x) = f(\Phi(x))$ . Neste caso, dizemos que o bilhar é integrável.

**Definição 12.** Se existe  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  suave, não constante em nenhum aberto de  $X$  e satisfazendo

$$f(x) = f(\Phi(x))$$

dizemos que o bilhar (ou  $\Phi$ ) é **integrável** e que  $f$  é uma **integral**.

Dessa forma o espaço de fase é folheado por curvas invariantes pela aplicação do Bilhar. Bilhares integráveis são tão raros que o único com bordo suave conhecido é o da elipse (incluindo também o círculo). Veja [17] para alguns bilhares integráveis  $\mathcal{C}^1$  por partes.

**Conjectura (Birkhoff).** Os únicos bilhares suaves integráveis são elipses.

### 2.5.3 Cáusticas

**Definição 13.** Uma **cáustica** é uma curva  $\vartheta$  suave por partes com a seguinte propriedade: se um segmento da trajetória de  $x \in X$  é tangente a  $\vartheta$ , então todos os segmentos o são.

**Teorema 4.** No bilhar elíptico, seja  $x \in X$  tal que algum segmento  $r$  da trajetória de  $x$  não passe pelos focos. Então todos os segmentos de  $\mathcal{T}(x)$  são tangentes a uma mesma cônica confocal ao bordo do bilhar. Se o  $r$  passa pelo segmento focal tal cônica é uma hipérbole. Caso contrário é uma elipse.

**Demonstração:** Consideremos os três pontos  $(s_0, \theta_0)$ ,  $(s_1, \theta_1)$  e  $(s_2, \theta_2)$  consecutivos de uma órbita. Temos então dois casos.

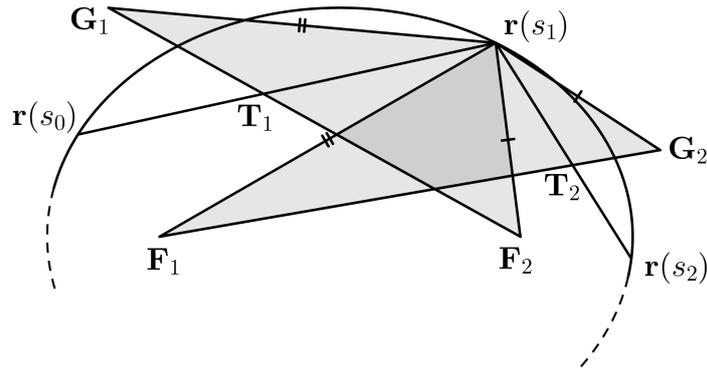


Figura 19: Primeiro caso

**1º caso:** O segmento  $\overline{r(s_0)r(s_1)}$  não passa pelo segmento focal.

Nessa situação, existe uma única elipse confocal tangente a este segmento. O ponto de tangência ocorre no mínimo de  $\|X - F_1\| + \|X - F_2\|$ , onde  $X$  está no segmento. Consideremos então  $G_1$  a reflexão de  $F_1$  pelo segmento  $\overline{r(s_0)r(s_1)}$ , e seja  $T_1$  a intersecção deste segmento com a reta passando por  $G_1$  e  $F_2$ . Este é o ponto que minimiza a expressão  $\|X - F_1\| + \|X - F_2\|$ . De fato, por multiplicadores de Lagrange, é neste ponto que seu gradiente é perpendicular a  $r(s_1) - r(s_0)$ . Similarmente, seja  $G_2$  a reflexão de  $F_2$  pelo segmento  $\overline{r(s_1)r(s_2)}$ , e  $T_2$  a intersecção deste com  $\overline{F_1G_2}$ .

Notamos que os triângulos  $G_1r(s_1)F_2$  e  $F_1r(s_1)G_2$  são congruentes (caso lado ângulo lado). De fato,  $F_1, G_1$  e  $F_2, G_2$  formam ângulos iguais com  $r(s_1)$  pela proposição 10. Logo,  $\|F_1 - G_2\| = \|G_1 - F_2\|$ . Portanto

$$\|T_1 - F_1\| + \|T_1 - F_2\| = \|T_2 - F_1\| + \|T_2 - F_2\|$$

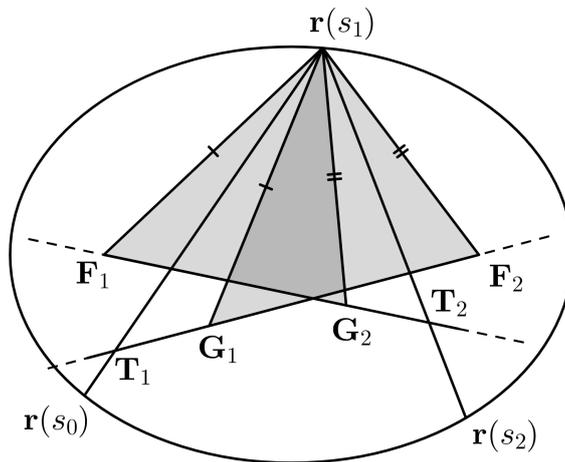


Figura 20: Segundo caso

**2º caso:** O segmento  $\overline{r(s_0)r(s_1)}$  passa pelo segmento focal.

Antes de analisar essa situação, recordamos que uma hipérbole é o lugar geométrico dos pontos  $X$  satisfazendo  $|\|X - F_1\| - \|X - F_2\|| = 2a$ , onde  $F_1$  e  $F_2$  são os focos e  $a$  uma constante. Similarmente à elipse, a tangente à hipérbole também é bissetriz dos segmentos focais. Dito

isto, dado o segmento  $\overline{\mathbf{r}(s_0)\mathbf{r}(s_1)}$ , para encontrarmos a hipérbole tangente e o ponto de tangência, procedemos assim. Conforme a figura 20, seja  $\mathbf{G}_1$  a reflexão de  $\mathbf{F}_1$  pelo segmento  $\overline{\mathbf{r}(s_0)\mathbf{r}(s_1)}$ . E tomemos  $\mathbf{T}_1$  a intersecção deste segmento com a reta passando por  $\mathbf{G}_1$  e  $\mathbf{F}_2$ . Daí,  $\mathbf{T}_1$  é o ponto de tangência procurado. Similarmente, seja  $\mathbf{G}_2$  a reflexão de  $\mathbf{F}_2$  por  $\overline{\mathbf{r}(s_1)\mathbf{r}(s_2)}$ , e  $\mathbf{T}_2$  a intersecção deste com a reta passando por  $\mathbf{F}_1$  e  $\mathbf{G}_2$ . Pela construção temos  $\|\mathbf{r}(s_1) - \mathbf{F}_1\| = \|\mathbf{r}(s_1) - \mathbf{G}_1\|$  e  $\|\mathbf{r}(s_1) - \mathbf{F}_2\| = \|\mathbf{r}(s_1) - \mathbf{G}_2\|$ . Pela proposição 10, os triângulos  $\mathbf{F}_1\mathbf{r}(s_1)\mathbf{G}_2$  e  $\mathbf{G}_1\mathbf{r}(s_1)\mathbf{F}_2$  são congruentes (caso lado ângulo lado). Logo,  $\|\mathbf{F}_1 - \mathbf{G}_2\| = \|\mathbf{F}_2 - \mathbf{G}_1\|$ . Portanto

$$\|\mathbf{T}_1 - \mathbf{F}_2\| - \|\mathbf{T}_1 - \mathbf{F}_1\| = \|\mathbf{T}_2 - \mathbf{F}_1\| - \|\mathbf{T}_2 - \mathbf{F}_2\|$$

Como queríamos. ■

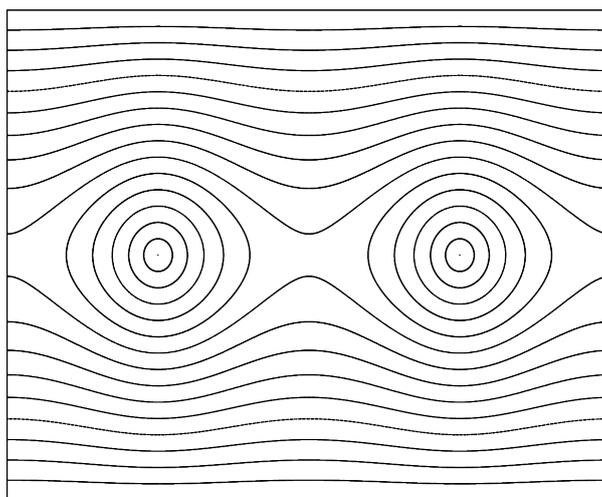


Figura 21: Retrato de fase do Bilhar na elipse

Já temos agora uma noção do que ocorre no retrato de fase do bilhar na elipse (figura 21). Essa imagem foi obtida fixando várias pontos iniciais de  $X$  e iterando tais pontos com a aplicação do bilhar. Temos a presença de várias curvas invariantes, cada curva representa uma família de retas orientadas (trajetórias) tangentes a uma cáustica. A curva em formato de  $\infty$ , chamada separatriz, correspondente às variedades estáveis e instáveis da órbita de período 2 hiperbólica. A outra órbita de período dois é elíptica, e são os pontos dentro da separatriz. Os círculos dentro do  $\infty$  correspondem a cáusticas hiperbólicas, e as demais curvas correspondem a cáusticas elípticas.

## 2.6 Bilhar Hexagonal Elíptico

Nosso grande interesse no bilhar hexagonal elíptico, se deve a figura 22. Essa imagem foi feita por Fetter [6] com métodos computacionais, e sugere a existência de muitas curvas invariantes e até uma possível integrabilidade de  $\Phi$ .

Pela imagem, parecem haver muitas órbitas periódicas isoladas no período, ao contrário do que ocorre em elipses. Vamos analisar as órbitas que tangenciam o hexágono, dentre as quais duas de período 3 (essencialmente uma, se considerarmos a simetria). Recordamos as notações:  $\gamma$  representa toda a curva com parametrização  $\mathbf{r}(s)$ , e  $\gamma_k$  são cada um dos arcos de elipses,

para  $k = 1, \dots, 6$ . Os focos de cada elipse são  $F_k$  e  $F_{k+2}$ . Os pontos  $A_k = F_k + F_{k+1}$  são onde ocorrem a colagem dos arcos de elipse. Cada uma das elipses tem parâmetros  $a = 3/2$ ,  $b = \sqrt{6}/2$  e  $c = \sqrt{3}/2$ . O lado do hexágono é  $L = 1$ .

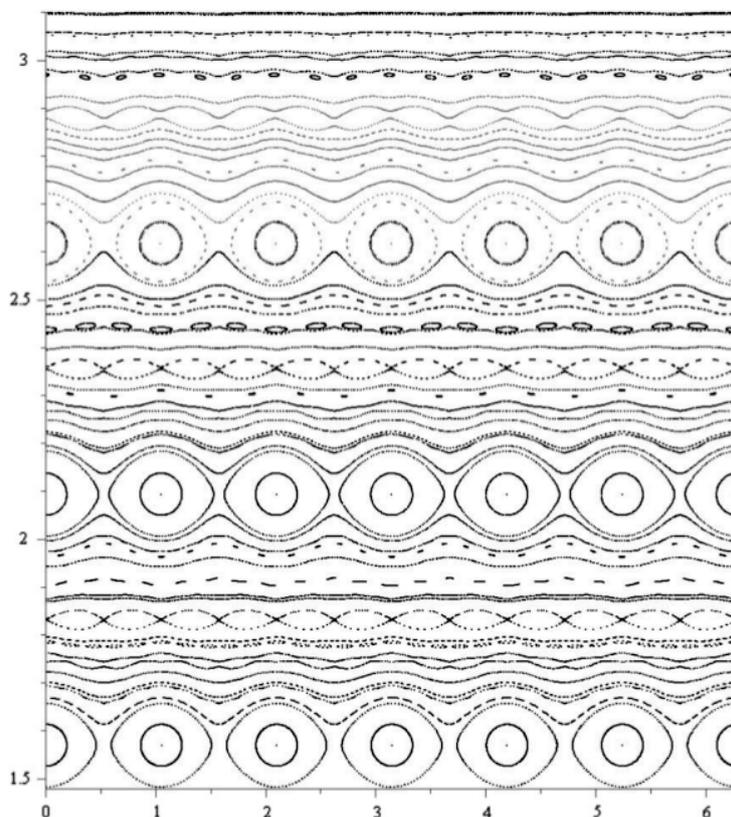


Figura 22: Retrato de fase do hexagonal string billiard

Primeiro notamos que se um ponto  $x = (s, \theta)$  é tal que o segmento de trajetória  $\ell$  correspondente atravessa o hexágono, então todos os segmentos da trajetória de  $x$  também o fazem. Similarmente, se  $\ell$  não atravessa, o mesmo ocorre com os demais segmentos de  $\mathcal{O}(x)$ . De fato se a bola passa por dentro do hexágono e atinge o arco de elipse  $\gamma_k$ , então a reta orientada corta o segmento ligando  $F_k$  e  $F_{k+2}$ . Daí, pela proposição 10, o raio refletido também o faz. Análogamente ocorre se  $\ell$  não passa pelo hexágono.

Cada ponto  $\mathbf{r}(s)$  de  $\gamma$  está em um dos seis arcos de elipse, então podemos considerar os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  de forma que as retas orientadas correspondentes a  $(s, \theta_1)$  e  $(s, \theta_2)$  passem pelos focos do respectivo arco de elipse. Vamos supor que  $\theta_1 \leq \pi/2 \leq \theta_2$ . Como vimos na seção anterior,  $\theta_1$  e  $\theta_2$  variam de forma  $\mathcal{C}^1$  com  $s$  dentro de um arco de elipse, e como nos pontos  $A_k$ , que pertencem a dois arcos de elipse, as retas que passam pelos focos de uma das elipses também passam pelos da outra, segue que  $\theta_1$  e  $\theta_2$  variam continuamente para todo  $s$ .

Consideremos então os conjuntos  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  dos pontos da forma  $(s, \theta_1)$  e  $(s, \theta_2)$ , respectivamente. Notamos que  $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$  constituem todos os pontos cuja reta orientada correspondente tangencia o hexágono. Já sabemos então que tal conjunto é invariante por  $\Phi$  (proposição 13). Nesses conjuntos destacam-se duas órbitas periódicas, uma cuja trajetória liga os pontos  $A_1, A_3$  e  $A_5$  e a outra unindo os pontos  $A_2, A_4$  e  $A_6$ . Devido a simetria, vamos analisar a primeira.

**Proposição 18.** A órbita periódica cuja trajetória liga os pontos  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3$  e  $\mathbf{A}_5$  é hipérbolica.

**Demonstração:** Para mostrarmos isso, basta usarmos a fórmula para a derivada apresentada em 2.9. A curvatura nos pontos  $\mathbf{A}_k$  já foi calculada em 1.17:  $\kappa = (3\sqrt{3})/8$ . Por fim, o ângulo de saída é  $\pi/3$ , e a distância  $\|\mathbf{A}_{k+2} - \mathbf{A}_k\|$  é 3. Logo, a matriz em qualquer um dos três pontos da órbita é

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 2\sqrt{3} \\ \frac{3\sqrt{3}}{32} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

Como o determinante é 1, os autovalores são raízes de  $x^2 - 5x/2 + 1 = 0$ . Visto que o discriminante é positivo temos autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$  satisfazendo  $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$ . A matriz derivada é a mesma em cada ponto da órbita, e portanto os autovalores de  $\Phi^3$  nestes pontos são  $0 < \lambda_1^3 < 1 < \lambda_2^3$ . Assim, essa órbita é hiperbólica. ■

**Proposição 19.** Os conjuntos  $\mathcal{S}_1$  e  $\mathcal{S}_2$  estão contidos nas órbitas periódicas cuja trajetória liga os pontos  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3$  e  $\mathbf{A}_5$ .

**Demonstração:**

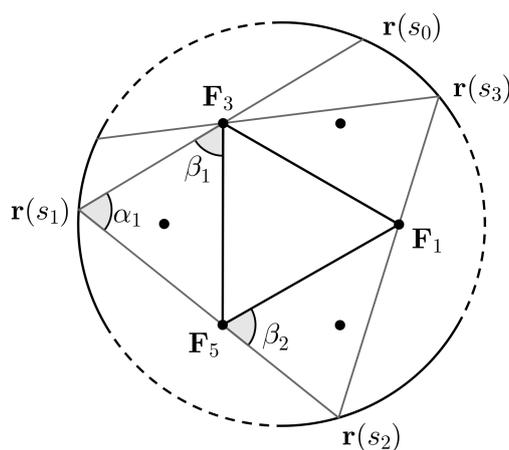


Figura 23: Os ângulos  $\alpha_k$  e  $\beta_k$

Sem perda de generalidade, consideremos um ponto  $(s_0, \theta_0) \in \mathcal{S}_1$ , com  $\mathbf{r}(s_0)$  pertencendo a  $\gamma_1$ . Como usual,  $s_n$  é a abcissa de  $\Phi^n(s_0, \theta_0)$ .  $\ell_n$  indicará o segmento  $\overline{\mathbf{r}(s_{k-1})\mathbf{r}(s_k)}$  da trajetória de  $(s_0, \theta_0)$ . Dessa forma,  $\ell_1$  intersecta o hexágono no vértice  $\mathbf{F}_3$ ,  $\ell_2$  em  $\mathbf{F}_5$ , e assim sucessivamente.

Como na figura 23, seja  $\alpha_k$  o ângulo formado por  $\ell_k$  e  $\ell_{k+1}$ , e  $\beta_k$  o ângulo formado por  $\ell_k$  e um dos lados do triângulo de vértices  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_3$  e  $\mathbf{F}_5$ . Já que os segmentos  $\ell_k$  devem passar pelos focos ímpares, segue que  $\pi/6 \leq \beta_k \leq \pi/2$ . Por outro lado, a sequência  $(\beta_k)$  é crescente. De fato, no triângulo de vértices  $\mathbf{r}(s_1), \mathbf{F}_3$  e  $\mathbf{F}_5$ , pelo teorema do ângulo externo segue que

$$\alpha_k + \beta_k = \frac{\pi}{3} + \beta_{k+1} \Rightarrow \alpha_k - \frac{\pi}{3} = \beta_{k+1} - \beta_k$$

Daí, como  $\alpha_k$  é o ângulo formado pelo ponto  $\mathbf{r}(s_k)$  com os focos, temos  $\alpha_k \geq \pi/3$  (de fato, o lugar geométrico dos pontos que formam um determinado ângulo com um segmento é o arco

capaz, cujo centro está na mediatriz desse segmento. Assim sendo, devido a curvatura da elipse ser monótona em cada quadrante, o ângulo formado por um ponto da elipse com os focos é máximo sobre o eixo menor e diminui quando se aproxima do eixo maior). Logo,  $\beta_{k+1} > \beta_k$ .

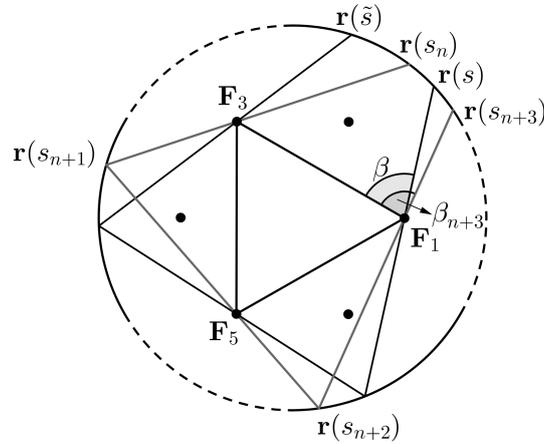


Figura 24: Trajetória atratora

Como no caso da elipse, caso seja  $\beta = \lim \beta_k < \pi/2$ , podemos usar a continuidade de  $\Phi$  para encontrar os pontos  $(s, \theta)$  e  $(\tilde{s}, \tilde{\theta}) = \Phi^{-3}(s, \theta)$  de  $\mathcal{I}_1$ , com o raio chegando a  $\mathbf{r}(s)$  formando o ângulo  $\beta$  com o triângulo  $F_1 F_3 F_5$  (figura 24). Com isto, existe  $s_n$  entre  $s$  e  $\tilde{s}$ , donde  $\beta_{s_{n+3}} > \beta$ . ■

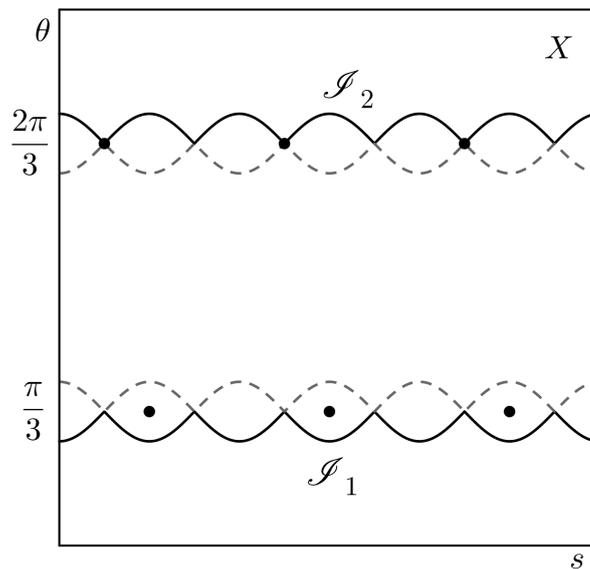


Figura 25: As curvas invariantes  $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$

Na figura 25 estão representados os conjuntos  $\mathcal{I}_1$  e  $\mathcal{I}_2$ . Observamos que esses conjuntos não são toda a variedade estável e instável. Deixamos em pontilhado onde supomos que estas variedades estão (em conformidade com os resultados experimentais na figura 22). Estão destacadas também uma órbita hiperbólica (pontos na parte superior) e uma órbita elíptica (ponto na parte inferior). Esta última por sua vez, faz um papel análogo a órbita cuja trajetória é o eixo menor na elipse. Provaremos a seguir que ela de fato é elíptica.

Visto que a trajetória une os pontos médios dos arcos  $\gamma_k$  alternadamente, já calculamos a curvatura em **1.16**. Da simetria, temos que os ângulos são de  $60^\circ$ ; resta calcular a distância entre duas colisões consecutivas. Após um pouco de trigonometria, podemos facilmente obter esse valor:

$$H = \frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{2}$$

Aplicando a fórmula **2.9** para a derivada, obtemos:

$$d\Phi = \begin{bmatrix} \frac{3+2\sqrt{6}}{9} & 1+\sqrt{6} \\ \frac{8-4\sqrt{6}}{27} & \frac{3+2\sqrt{6}}{9} \end{bmatrix}$$

Assim,  $\det d\Phi = 1$ , e portanto, os autovalores são raízes de  $x^2 - \text{tr}(d\Phi)x + 1 = 0$ . O discriminante dessa equação é negativo. Logo, temos autovalores complexos  $\lambda_1, \lambda_2$  e o mesmo vale para  $\lambda_1^3$  e  $\lambda_2^3$ . Portanto, a órbita é elíptica.

## Capítulo 3

# Cáusticas e Curvas Invariantes

### Introdução

Neste capítulo, buscamos ferramentas que possam auxiliar na compreensão da imagem **22**. Como ela foi produzida por simulações numéricas e gostaríamos de descobrir até que ponto esse cenário condiz com a realidade.

Na próxima seção trataremos da relação entre algumas curvas invariantes e cáusticas: a busca por esses dois objetos é a mesma. Na segunda seção apresentamos o teorema de Lazutkin e a seguir temos um exemplo de Halpern **[8]**. Na última seção falaremos de um teorema de Hubacher **[10]**.

Existem muitos outros resultados interessantes não abordados aqui. Se a curva do bilhar tem curvatura nula em algum ponto, então não existem curvas invariantes (globalmente) não homotopicamente triviais **[14]**. Num contexto mais geral de perturbações de aplicações analíticas, temos o teorema do twist de Moser **[16]** que estabelece condições para a existência de curvas invariantes circundando um ponto fixo elíptico. O teorema pode ser aplicado a bilhares, mas envolve o cálculo da terceira derivada de  $\Phi$ . Em **[2]** é demonstrado com essa ferramenta que para curvas convexas genéricas há a presença de tais curvas invariantes para órbitas de período 2 ("ilhas elípticas", na figura **21**, ou na figura contida no resumo).

### 3.1 Curvas Invariantes, Cáusticas e Teorema de Birkhoff

Consideremos  $X = [0, l) \times [0, \pi]$  e  $\Phi : X \rightarrow X$  uma aplicação de bilhar. Dada uma curva  $C \subset X$ , dizemos que  $C$  é uma curva invariante por  $\Phi$  se  $C$  é invariante como conjunto. Isto é,  $\Phi(C) = C$ . Como vemos na figura **21**, algumas curvas dão a volta no cilindro  $X$ , e outras são homotopicamente triviais. Diremos que uma curva é uma **curva rotacional invariante** caso ela não seja homotopicamente trivial.

**Proposição 20.** Cada curva rotacional invariante e diferenciável  $C$  contida no interior de  $[0, l) \times (0, \pi/2)$  ou  $[0, l) \times (\pi/2, \pi)$  está associada uma cáustica no bilhar.

**Demonstração:** Digamos que  $(s, \theta(s)) \in C$  com  $\theta(s) < \pi/2$ . Vamos demonstrar que existe uma curva  $\vartheta$  que é envoltória para as trajetórias de  $C$ . Quer dizer,  $\vartheta$  é tangente a reta orientada correspondente à  $(s, \theta(s))$ . Assim, tomamos  $\mathbf{v}$  o vetor com esta direção

$$\mathbf{v}(s) = \cos\theta(s) \mathbf{t}(s) + \sin\theta(s) \mathbf{n}(s) \quad 3.1$$

onde  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{n}$  são os vetores normal e tangente. Sendo  $\mathbf{y}(s) \in \vartheta$  o ponto de tangência, deve existir  $\lambda(s)$  que satisfaz (figura 26)

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{r}(s) + \lambda(s)\mathbf{v}(s) \quad 3.2$$

Devemos ter  $\mathbf{y}'(s)$  paralelo a  $\mathbf{v}$  para que  $\vartheta$  seja tangente a família de raios  $\mathbf{r} + \lambda\mathbf{v}$ . Logo, derivando e tomando o produto interno com  $\mathbf{v}'$  segue que

$$\langle \mathbf{y}'(s), \mathbf{v}'(s) \rangle = \langle \mathbf{r}'(s), \mathbf{v}'(s) \rangle + \lambda'(s) \langle \mathbf{v}(s), \mathbf{v}'(s) \rangle + \lambda(s) \langle \mathbf{v}'(s), \mathbf{v}(s) \rangle$$

Ou seja

$$0 = \langle \mathbf{r}'(s), \mathbf{v}'(s) \rangle + \lambda(s) \|\mathbf{v}'(s)\|^2$$

Retomando a equação 3.1 obtemos

$$\sin\theta(s) = \lambda(s)(\kappa(s) + \theta'(s))$$

Logo, como estamos supondo  $\theta(s) > 0$  não podemos ter  $\kappa(s) + \theta'(s) = 0$  (já que  $\gamma$  é estritamente convexa). Obtemos a cáustica

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{r}(s) + \frac{\sin(\theta(s))}{\kappa(s) + \theta'(s)} \mathbf{u}(s)$$

■

Por outro lado, dada uma cáustica convexa, pela equação 3.2 podemos obter

$$\theta(s) = \arccos \left\langle \frac{\mathbf{y}'(s) - \mathbf{r}(s)}{\|\mathbf{y}(s) - \mathbf{r}(s)\|}, \mathbf{r}'(s) \right\rangle$$

Assim, encontramos uma curva rotacional invariante correspondente.

Se um bilhar possui uma curva rotacional  $C$ , então o espaço de fase  $X$  fica dividido em duas regiões abertas  $U_1, U_2$  disjuntas, cada uma das quais invariante por  $\Phi$ . De fato, cada uma dessas regiões é limitada por  $C$  e por  $[0, l) \times \{0\}$ ,  $[0, l) \times \{1\}$  que também são curvas invariantes. Logo, pela continuidade de  $\Phi$  como a fronteira de  $U_1, U_2$  é preservada o mesmo ocorre com seu interior.

Observamos que a existência de conjuntos invariantes nos dá informação sobre a dinâmica de uma aplicação. Cada uma das órbitas fica confinada a essas regiões. Também, a aplicação  $\Phi$  não pode ser ergódica. No caso de bilhares a existência de um conjunto aberto invariante homeomorfo a  $[0, l) \times [0, \pi)$  indica que uma mesma órbita não pode estar arbitrariamente próxima de  $[0, l) \times \{0, \pi\}$ , por exemplo.

A seguir, temos o teorema de Birkhoff [1], que trata de curvas rotacionais invariantes em aplicações twist. Daremos uma prova concisa, maiores detalhes podem ser encontrados em [3] e [18], de onde essa demonstração foi baseada.

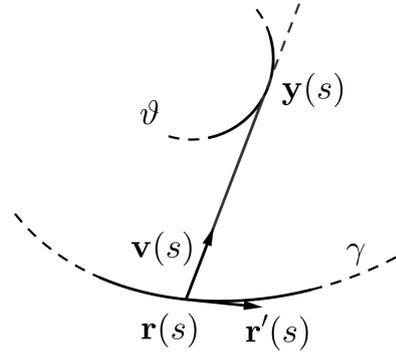


Figura 26:

Demonstração da proposição 20

**Teorema 5.** Seja  $\Phi$  um homeomorfismo twist do anel  $X = S^1 \times [0, 1]$  em si mesmo que preserva a orientação, preserva  $S^1 \times \{0\}$ ,  $S^1 \times \{1\}$  e preserva uma medida regular. Suponha que  $U$  é um aberto homeomorfo a  $S^1 \times [0, 1]$  tal que  $\partial U \cap S^1 \times \{1\} = \emptyset$ . Se  $U$  é invariante por  $\Phi$ , então  $\partial U$  é o gráfico de uma função de  $S^1 \rightarrow [0, 1]$ . Se o twist é uniforme, então a função é lipschitziana.

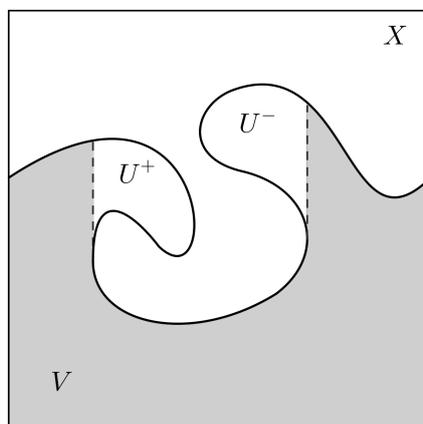


Figura 27: Conjunto dos pontos verticalmente acessíveis

A maior parte da demonstração do teorema consiste em descrever a topologia de  $U$ , considerando apenas que  $U$  é homeomorfo a  $S^1 \times [0, 1]$  e independentemente de ser invariante ou não por  $\Phi$ . Assim, deixaremos essa parte para o fim. Será mais conveniente usar o recobrimento universal  $\pi : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times [0, 1]$  e trabalhar com um levantamento de  $\Phi$  (poderemos falar de 'esquerda' e 'direita'). Escreveremos também  $\pi_x(x, y) = x$ .

Consideremos então o conjunto  $V = \{(x, y) \in U; (x, \tilde{y}) \in U \forall \tilde{y} < y\}$ . Ou seja,  $V$  é a união dos segmentos verticais partindo do eixo  $x$  que estão contidos em  $U$ . Por hora, vamos assumir que  $\partial V \cap U$  é formado por uma quantidade enumerável de segmentos de reta verticais  $S_k$ . Cada um desses segmentos é isolado dos demais e divide  $U$  em duas componentes conexas, uma contendo  $V$ . A outra denotaremos  $U_k^-$  caso esteja a esquerda de  $S_k$ , ou  $U_k^+$  caso contrário.  $U^+$  é a união de todas as componentes  $U_k^+$ , e analogamente tem-se  $U^-$  (veja figura 27). Além disso, notamos que  $\partial U$  é conexo.

Vericaremos o que acontece com cada um desses conjuntos sob a ação de  $\Phi$ . Intuitivamente, uma aplicação twist desvia pontos de uma reta horizontal para a direita. Assim, a imagem de  $V \cup (\overline{U^+} \cap U)$  está supostamente dentro de si mesmo. Usando isso como guia, temos o lema seguinte:

**Lema 1.** Com a notação acima, se  $\Phi$  é uma aplicação twist então

$$\begin{aligned} \Phi(V) \cap \overline{U_k^-} &= \emptyset \\ \Phi^{-1}(V) \cap \overline{U_k^+} &= \emptyset \end{aligned} \tag{3.3}$$

**Demonstração:** Provaremos apenas a primeira equação, pois a outra é análoga. Por contradição, caso  $(x, y)$  fosse um elemento da intersecção, a curva  $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = \Phi(x, ty)$  é tal que  $y(t)$  é crescente, pela condição twist. Por outro lado,  $\gamma(1)$  é um ponto de  $\overline{U_k^-}$ , e

está a direita de algum segmento  $S_k$  (ou no próprio). Em todo caso, podemos prolongar tal curva a partir de  $\gamma(1)$  de forma a encontrarmos  $S_k$ . Continuando o prolongamento encontramos pontos de  $V$ . Assim, podemos obter uma curva fechada simples tomando  $\gamma$ , seu prolongamento, um segmento vertical e o eixo  $x$ . Entretanto, tal curva fechada contém um dos extremos de  $S_k$  e não contém o outro (figura 28). Como tais extremos são pontos de  $\partial U$ , isso é impossível pelo teorema da curva de Jordan (já que  $\partial U$  é conexo). ■

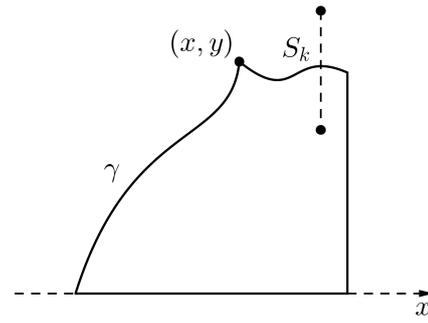


Figura 28: Lema 1

Do lema, segue também que  $\Phi(\overline{U}^+) \cap \overline{U}^- = \emptyset$ . De fato, caso fosse verdadeira para alguma componente  $\overline{U}_i^-$  e  $\overline{U}_j^+$  de  $\overline{U}^-$  e  $\overline{U}^+$  teríamos  $\Phi(\overline{U}_j^+) \cap \overline{U}_i^- \neq \emptyset$ . Pela primeira equação de 3.3 a única possibilidade é que  $\Phi^{-1}(\overline{U}_i^-) \subset \overline{U}_j^+$  (já que cada uma das componentes  $(\overline{U}_k^- \cap U)$  e  $(\overline{U}_k^+ \cap U)$  de  $U \setminus V$  é conexa e disjunta das demais).

Sendo  $S_i = \partial U_i^- \cap U$  e  $S_j = \partial U_j^+ \cap U$ , observamos que  $\Phi(S_j)$  é uma curva inclinada para a direita (pela propriedade de twist). Mas isso implica que algum ponto de  $\Phi(S_j)$  está no interior de  $\overline{U}_i^-$  e portanto  $\Phi^{-1}(V) \cap (\overline{U}_j^+) \neq \emptyset$  (figura 29) contrariando a segunda equação de 3.3. Com isso concluímos que  $\Phi(\overline{U}^+) \cap \overline{U}^- = \emptyset$ . Finalmente, de  $U = V \cup (\overline{U}^- \cap U) \cup (\overline{U}^+ \cap U)$  obtemos  $\Phi^{-1}(\overline{U}^-) \subset \overline{U}^-$  e  $\Phi(\overline{U}^+) \subset \overline{U}^+$ .

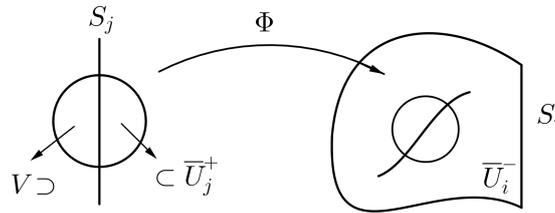


Figura 29:  $\Phi(\overline{U}^+) \cap \overline{U}^- = \emptyset$

Como  $\Phi$  preserva medida, existe um subconjunto de medida total em  $\overline{U}^+$  invariante por  $\Phi$ : basta tomar  $\bigcap_{n \geq 0} \Phi^n(\overline{U}^+)$ . Como  $\Phi(V \cup \overline{U}^+ \cap U) \subset V \cup \overline{U}^+ \cap U$ , o mesmo vale para  $V$ . Mas dado um segmento  $S_k$  de  $\partial V \cap U$ , de forma que  $V$  esteja a direita de  $S_k$ , observamos que a imagem de  $S_k$  é uma curva inclinada para a esquerda. E já que a medida é regular, existe  $\mathbf{v} \in V$  tão próxima quanto se queira de  $S_k$  com  $\Phi(\mathbf{v}) \in V$ . Mas isso implica que todos os pontos abaixo de  $\Phi(\mathbf{v})$  (incluindo os abaixo de  $\Phi(S_k)$ ) estão em  $V$ , o que não é possível pela segunda equação de 3.3. Logo, as únicas possibilidades são  $V = \emptyset$  (que claramente não ocorre) ou  $U^+ = \emptyset$ . De maneira similar, temos também  $U^- = \emptyset$ . Assim,  $V = U$  e  $\partial U$  é gráfico de uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ .

Caso o twist seja uniforme, precisamos mostrar que  $f$  é lipschitziana. Digamos então que a constante de Lipschitz do twist é  $K$ . Então  $f$  também tem essa mesma constante. Primeiro observamos que se  $x \leq \tilde{x}$  então  $\pi_x \Phi(x, f(x)) \leq \pi_x \Phi(\tilde{x}, f(\tilde{x}))$ . Daí, sem perda de generalidade, digamos que existem  $x < \tilde{x}$  tais que  $f(x) < f(\tilde{x})$  e  $f(\tilde{x}) - f(x) \geq K(\tilde{x} - x)$ . Mas isso implica que  $\pi_x \Phi^{-1}(x, f(x)) \geq \pi_x \Phi^{-1}(\tilde{x}, f(\tilde{x}))$ . De fato, seja  $x_0 = \pi_x \Phi^{-1}(x, f(x))$ . Daí a imagem de  $\{(x_0, t); 0 \leq t \leq 1\}$  é o gráfico de uma função lipschitziana com constante  $K$ , passando por  $(x, f(x))$  e com extremos nas retas  $y = 0$  e  $y = 1$ . Como  $\Phi$  preserva a orientação e tais retas, e já que  $(\tilde{x}, f(\tilde{x}))$  está acima de tal curva segue que  $\pi_x \Phi^{-1}(\tilde{x}, f(\tilde{x})) < x_0$ , o que é uma contradição.

Para finalizar o teorema, precisamos mostrar os fatos topológicos que usamos anteriormente. Observamos que  $U$  e  $\partial U$  são conexos por caminhos já que são homeomorfos a  $S^1 \times [0, 1]$ . Primeiramente provaremos que  $\partial V \cap U$  é formado pelos segmentos  $S_k$ . Usaremos a seguinte notação:  $([x_1, x_2], y)$  denota o segmento de reta (fechado) com extremos nos pontos  $(x_1, y)$  e  $(x_2, y)$ . Similarmente temos  $(x, [y_1, y_2])$ .

Para cada  $x \in \mathbb{R}$  consideremos o conjunto  $S_k(x)$ , intersecção de  $(x, [0, 1])$  com  $U$ . Então  $S_k(x)$  é formado por segmentos de reta verticais  $S_k(x)$  cujos extremos são pontos de  $\partial U$ . Se  $\partial V$  contém o ponto  $(x, y) \in S(x)$ , então também contém toda a componente  $S(x)$ . Por outro lado,  $V$  não pode conter pontos de ambos os lados de  $S_k(x)$  (numa vizinhança). De fato, caso fosse  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  em  $V$  com  $x_1 < x < x_2$  os segmentos  $(x_1, [0, \min\{y_1, y_2\}])$ ,  $([x_1, x_2], \min\{y_1, y_2\})$  e  $(x_2, [0, \min\{y_1, y_2\}])$  estariam contidos em  $U$ . Mas estes formam uma curva fechada com o eixo  $x$ , e não podem conter pontos de  $\partial U$  em ambas as componentes conexas de seu complementar, pelo teorema da curva de Jordan. Assim,  $\partial V$  é formado por segmentos de reta verticais  $S_k$ , isolados uns dos outros. Cada segmento  $S_k$  da fronteira de  $V$  divide  $U$  em duas componentes conexas, uma das quais é disjunta de  $V$  e cuja fronteira está contida em  $\partial U$  e  $S_k$ . De fato, seja  $\tilde{U}$  a componente de  $U \setminus S_k$  que não contém  $V$  e suponha por absurdo que a fronteira de  $\tilde{U}$  contém algum ponto de  $S_j$  com  $j \neq k$ . Então existe um caminho em  $U$  unindo um ponto nas proximidades de  $S_k$  a outro ponto nas proximidades de  $S_j$ . Similarmente ao que fizemos ao lema 1, extendemos esse caminho até encontrarmos  $V$  e obtemos uma curva fechada simples que contém pontos de  $\partial U$  em ambos lados, contrariando o teorema da curva de Jordan. Com isso terminamos a descrição que precisávamos de  $U$  e a demonstração do teorema 5.

### 3.2 Teorema de Lazutkin

Na seção 3.4, encontremos uma expressão (equação 3.15) para a aplicação do bilhar nas proximidades de  $\partial\Omega$ . Nessa região  $\Phi$  se comporta aproximadamente como o bilhar no círculo. Essa propriedade é essencial para aplicar a teoria KAM (que dá condições para que curvas invariantes sobrevivam a uma perturbação de uma aplicação integrável, veja [15]). Lazutkin utilizou aspectos geométricos para melhorar a expressão 3.15. Primeiro observamos que se a curva é suficientemente diferenciável, podemos escrever

$$\begin{aligned} s' &= s + a_1(s)\theta + a_2(s)\theta^2 + a_3(s)\theta^3 + o(\theta^3) \\ \theta' &= \theta + b_2(s)\theta^2 + b_3(s)\theta^3 + o(\theta^3) \end{aligned}$$

onde as funções  $a_k$  e  $b_k$  são

$$\begin{aligned} a_1(s) &= 2\rho(s), & a_2(s) &= \frac{4}{3}\rho(s)\rho'(s), & a_3(s) &= \frac{2}{3}\rho(s)^2\rho''(s) + \frac{4}{9}\rho(s)\rho'(s)^2 \\ b_2(s) &= -\frac{2}{3}\rho'(s), & b_3(s) &= -\frac{2}{3}\rho(s)\rho''(s) + \frac{4}{9}\rho'(s)^2 \end{aligned}$$

e  $\rho(s) = \kappa(s)^{-1}$  é o raio de curvatura. Utilizando uma mudança de coordenadas apropriada (baseada no parâmetro da string construction, como vimos da 1.2) Lazutkin reescreveu a aplicação do bilhar como

$$\begin{aligned} x &= x + y + o(y^2) \\ y &= y + o(y^3) \end{aligned}$$

Com isso, provou o seguinte teorema:

**Teorema 6.** Se o bordo do bilhar for estritamente convexo e suficientemente diferenciável (de classe  $\mathcal{C}^k$  com  $k \geq 6$ ) então existe uma família de cáusticas numa vizinhança do bordo, cuja união tem medida positiva.

O teorema foi provado inicialmente para curvas de classe  $\mathcal{C}^k$  com  $k \geq 553$ . O resultado para  $K \geq 6$  se deve a Douady [5]. Conjectura-se que  $k = 4$  já é suficiente.

### 3.3 Teorema de Halpern

Em [8] Halpern apresenta um exemplo de bilhar convexo de classe  $\mathcal{C}^2$  (existe a terceira derivada, mas esta não é limitada) com curvatura não nula onde não existem cáusticas próximas do bordo. Observamos que nessa seção e na seguinte a parametrização da curva do bilhar será denotada por  $\mathbf{r}$ .

Para falar acerca desse exemplo, relembremos o fluxo do bilhar. Se  $\bar{\Omega}$  é a mesa de bilhar seja  $T\bar{\Omega}$  seu fibrado tangente. Como estamos assumindo que a velocidade da bola é constante, é possível usar  $\bar{\Omega} \times S^1$  ao invés (ou seja, precisamos saber apenas a direção e sentido da velocidade). Como em cada colisão da bola com o bordo temos uma mudança abrupta na velocidade, vamos identificar os pontos da forma  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  e  $(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{v}})$  onde  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  e  $\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}$  indicam a velocidade antes e após o impacto (maiores detalhes em [4]). Nessa nova topologia, o fluxo  $\mathcal{F}_t : \bar{\Omega} \times S^1 \rightarrow \bar{\Omega} \times S^1$  é contínuo, e aparentemente, bem definido. Entretanto, não sabemos o que acontece quando tomamos um ponto  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  com velocidade  $\mathbf{v}$  na direção da tangente. Assumiremos que a partícula continua na direção da tangente? Ou então, continua sobre  $\partial\Omega$  contornando a mesa do bilhar? A princípio, parece que tais questões não são importante já que as trajetórias que formam um ângulo de medida nula com a tangente são apenas as que começam em  $\partial\Omega$  com esse ângulo. Surpreendentemente isso não é verdade. É possível haver infinitas colisões num tempo finito, com a partícula indo para essa situação. Ou seja, se definirmos que a trajetória de um ponto  $\mathbf{x}$  com direção inicial igual a tangente é a reta tangente (ou seja, fora de  $\Omega$ ), então é possível lançar a bola de dentro da mesa e atingir um ponto fora. No artigo de Halpern, há um exemplo onde essa situação ocorre (que trabalhamos a seguir). Além disso, ele dá condições suficiente para evitar tais problemas.

Para construirmos o exemplo, procedemos da seguinte forma. Numa circunferência unitária  $S$  centrada na origem, escolhemos primeiro os pontos de impacto. Será mais conveniente usarmos coordenadas polares. Digamos que os pontos são  $\mathbf{s}_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  de forma que o argumento de  $\mathbf{s}_n$  é  $\theta_n = n^{-1/2}$ . Dada a poligonal ligando esses pontos, já sabemos qual é a tangente, pela lei da reflexão. Consideremos então as circunferências unitárias  $\gamma_n$ , de forma que  $\gamma_n$  passe por  $\mathbf{s}_n$ , e sua tangente coincida com a tangente obtida na poligonal. Assim, a curva do bilhar  $\gamma$  procurada será exatamente  $\gamma_n$  numa vizinhança de  $\mathbf{s}_n$ . Entre  $\mathbf{s}_n$  e  $\mathbf{s}_{n+1}$  faremos uma transição, e nas demais regiões  $\gamma$  coincidirá com  $S$ . Digamos que em coordenadas polares, cada uma das circunferências  $\gamma_n$  tem equação  $r = \rho_n(\theta)$ . Então  $\gamma$  terá equação  $r = \rho(\theta)$ , definida como

$$\rho(\theta) = \rho_n(\theta) + \alpha_n(\theta)(\rho_{n+1}(\theta) - \rho_n(\theta)) \quad 3.4$$

para  $\theta \in [\theta_{n+1}, \theta_n]$ .  $\alpha_n : [\theta_{n+1}, \theta_n] \rightarrow [0, 1]$  é definida por

$$\alpha_n(\theta) = \alpha \left( \frac{\theta - \theta_{n+1}}{\theta_n - \theta_{n+1}} \right)$$

e  $\alpha : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  é uma função não crescente  $\mathcal{C}^\infty$  com  $\alpha(x) = 1$  se  $x \leq 1/3$  e  $\alpha(x) = 0$  se  $x \geq 2/3$ . Posteriormente, escolheremos  $n_0$  e trocaremos  $\gamma_{n_0}$  por  $S$ . Logo, a fórmula 3.4 valerá para  $n \geq n_0$  e fora de  $(0, \theta_{n_0})$  teremos  $\rho(\theta) = 1$ . Assim definido,  $\gamma$  é  $\mathcal{C}^\infty$  em  $(0, 2\pi)$  e só temos que nos preocupar com o que ocorre em 0. Tudo o que resta a fazer agora são algumas contas para verificarmos que existe a terceira derivada em 0 (apesar de existir, é descontínua nesse ponto) e a curvatura é sempre positiva.

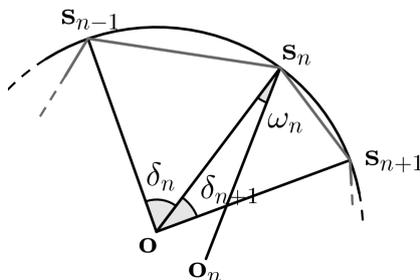


Figura 30: Os ângulos  $\delta_n$  e  $\omega_n$

O ângulo formado por  $s_n$  e  $s_{n-1}$  com a origem  $o$  é  $\delta_n = \theta_{n-1} - \theta_n$ . Se o centro de  $\gamma_n$  é  $o_n$ , então o ângulo formado por  $o_n$  e  $o$  com  $s_n$  é (veja figura 30)

$$\omega_n = \frac{\pi - \delta_{n+1}}{2} - \frac{\pi - \delta_n}{2} = \frac{\delta_n - \delta_{n+1}}{4}$$

Vamos analisar como esses ângulos se comportam quando  $n \rightarrow \infty$ . Temos

$$\delta_n = \theta_{n-1} - \theta_n = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n^2 - n}} = \frac{1}{\sqrt{n^2 - n}(\sqrt{n-1} + \sqrt{n})}$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n n^{3/2} = \frac{1}{2} \quad 3.5$$

Similarmente,

$$4\omega_n = \frac{\sqrt{n}\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n-1}\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\sqrt{n-1}}{\sqrt{(n-1)n(n+1)}}$$

sendo  $x(n) = \sqrt{n}\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\sqrt{n-1}$ ,  $y(n) = 2\sqrt{n-1}\sqrt{n+1}$  e  $z(n) = \sqrt{n(n-1)(n+1)}$  temos

$$\begin{aligned} 4\omega_n &= \frac{x(n)^2 - y(n)^2}{z(n)(x(n) + y(n))} = \frac{ny(n) - 2n^2 + 4}{z(n)(x(n) + y(n))} \\ &= \frac{n^2 y(n)^2 - (2n^2 - 4)^2}{z(n)(x(n) + y(n))(ny(n) + 2n^2 - 4)} \\ &= \frac{12n^2 - 16}{z(n)(x(n) + y(n))(ny(n) + 2n^2 - 4)} \end{aligned}$$

Daí, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n n^{5/2} = \frac{3}{16} \quad 3.6$$

Seja  $g$  a função que associa a cada par  $(\theta, \omega)$  a distância do ponto de argumento  $\theta$  da circunferência unitária  $\tilde{S}$  que passa por  $(1, 0)$  e faz um ângulo de  $\omega$  com  $S$ .  $g$  está bem definida para

valores pequenos de  $\omega$  e  $\theta$  e é diferenciável ( $\mathcal{C}^\infty$ ). Vamos calcular sua expressão. Seja  $\tilde{\mathbf{o}}$  o centro de  $\tilde{S}$ , e  $\mathbf{p} \in \tilde{S}$  o ponto com argumento  $\theta$  que procuramos. Como o ângulo formado por  $\mathbf{o}$  e  $\tilde{\mathbf{o}}$  com  $(1, 0)$  é  $\omega$ , segue que  $\|\tilde{\mathbf{o}}\| = 2 \sin(\omega/2)$ . Daí, pela lei dos cossenos obtemos (figura 31)

$$1 = g(\theta, \omega)^2 + 4 \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - 4 \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) g(\theta, \omega) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2} + \theta\right)$$

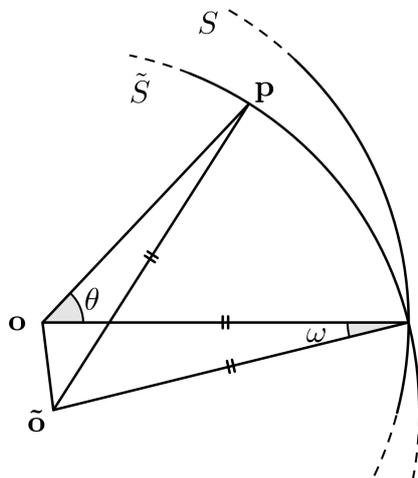


Figura 31: Calculando a expressão de  $g$

Como  $\omega$  é pequeno (vamos supor  $\omega < \pi/6$ ), temos  $4 \sin^2(\omega/2) - 1 < 0$ . Daí a equação acima tem uma solução negativa. A raiz que nos interessa portanto é

$$g(\theta, \omega) = 2 \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega}{2} - \theta\right) + \sqrt{1 - 4 \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\omega}{2} - \theta\right)}$$

O que importa dessa expressão é que  $g$  é diferenciável, em  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ . Também temos  $g(0, \omega) = g(\theta, 0) = 1$ .

Agora finalmente vamos estimar o que acontece com as derivadas de  $\gamma$ . Seja  $c$  uma cota para  $|\alpha'(t)|$  e  $|\alpha''(t)|$ ,  $t \in [0, 1]$ . De 3.5 e se  $\theta \in [\theta_{n+1}, \theta_n]$

$$|\alpha'_n(\theta)| \leq \frac{c}{\delta_{n+1}} \leq 3cn^{3/2}$$

$$|\alpha''_n(\theta)| \leq \frac{c}{\delta_{n+1}^2} \leq 5cn^3$$

para  $n$  suficientemente grande. Seja  $e$  uma cota para  $g_{\theta\omega}$  e  $g_{\theta\theta\omega}$  simultaneamente. Lembrando que  $g(0, \omega) = g(\theta, 0) = 1$ , pelo teorema do valor médio obtemos:

$$|g_\theta(\theta, \omega) - g_\theta(\theta, 0)| \leq e|\omega| \Rightarrow |g_\theta(\theta, \omega)| \leq e|\omega|$$

$$|g_{\theta\theta}(\theta, \omega) - g_{\theta\theta}(\theta, 0)| \leq e|\omega| \Rightarrow |g_{\theta\theta}(\theta, \omega)| \leq e|\omega|$$

$$|g(\theta, \omega) - g(0, \omega)| \leq \max_{\tilde{\theta} \in [0, \theta]} |g_\theta(\tilde{\theta}, \omega)| |\theta| \Rightarrow |g(\theta, \omega) - 1| \leq e|\omega| |\theta|$$

Com isso, praticamente terminamos. Observando que  $\rho_n(\theta) = (\theta - \theta_n, \omega_n)$  obtemos para  $n$  grande e  $\theta \in [\theta_{n+1}, \theta_{n-1}]$

$$|\rho'_n(\theta)| \leq e|\omega_n| \leq en^{-5/2}$$

$$|\rho''_n(\theta)| \leq e|\omega_n| \leq en^{-5/2}$$

$$|\rho_n(\theta) - 1| \leq e|\omega_n| |\delta_n| \leq en^{-4}$$

Escolhendo  $n_0$  grande suficiente para valerem essas estimativas, mudamos  $\gamma_{n_0}$  para  $S$ . Isto é,  $\rho_{n_0}(\theta) = 1$ . Logo, para  $n \geq n_0$  e  $\theta \in [\theta_{n+1}, \theta_n]$  advém

$$\begin{aligned} |\rho(\theta) - 1| &\leq 3en^{-4} \\ |\rho'(\theta)| &\leq en^{-5/2} + 2en^{-5/2} + 3cn^{3/2}2en^{-4} \leq (3e + 6ce)n^{-5/2} \\ |\rho''(\theta)| &\leq en^{-5/2} + 2en^{-5/2} + 2.3cn^{3/2}2en^{-5/2} + 5cn^32en^{-4} \leq (3e + 22ce)n^{-1} \\ \left| \frac{\rho''(\theta)}{\theta} \right| &\leq \frac{(3e + 22ce)n^{-1}}{(n+1)^{-1/2}} \end{aligned}$$

Com isso, concluímos que a primeira e segunda derivadas de  $\rho$  existem e são contínuas. Temos  $\rho'(0) = \rho''(0) = 0$ , e  $\rho(0) = 1$ . Da última equação temos também  $\rho'''(0) = 0$ , embora essa derivada não é limitada numa vizinhança de 0. Recordando a equação 1.9, da expressão da curvatura, segue que  $\kappa > 0$  se  $n_0$  é grande o suficiente.

Agora que já conhecemos o exemplo, vamos ver as condições que Halpern encontrou para evitar tal situação.

**Teorema 7.** Se a curva do bilhar possui a terceira derivada limitada e curvatura não nula, então o fluxo  $\mathcal{F}_t(\mathbf{p}, \mathbf{v})$  está bem definido para todo  $(\mathbf{p}, \mathbf{v}) \in \Omega \times S^1$ .

Digamos que a curva do bilhar é  $\gamma$  com parametrização (por comprimento de arco)  $\mathbf{x}$ . Como usual,  $(s_n, \theta_n)$  denota  $\Phi(s_0, \theta_0)$ . Começamos com um lema de cálculo que precisaremos para a demonstração.

**Lema 2.** Seja  $(a_n)$  uma sequência de forma que para  $n$  suficientemente grande podemos escrever

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + b_n \quad 3.7$$

onde  $(b_n)$  é tal que  $\sum b_n$  é absolutamente convergente. Então  $\sum a_n$  é divergente.

**Demonstração:** Sem perda de generalidade, suponha que a expressão 3.7 vale para todo  $n$ . Consideremos a sequência  $(\bar{a}_n)$  definida por  $\bar{a}_{n+1} = \bar{a}_n(1 + |b_n|)$  e  $\bar{a}_0 = a_0$ . A sequência  $\sum \bar{a}_n$  é claramente divergente. Por outro lado, as sequências  $\prod(1 + b_n)$  e  $\prod(1 + |b_n|)$  são convergentes. De fato, basta notar que (supondo  $|b_n| < 1$ , visto que  $|b_n| \rightarrow 0$ )

$$(1 + b_0) \cdots (1 + b_n) \leq (1 + |b_0|) \cdots (1 + |b_n|) \leq \exp(|b_0| + \cdots + |b_n|)$$

Assim, temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\bar{a}_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 \prod_{k=0}^{n-1} (1 + b_k)}{a_0 \prod_{k=0}^n (1 + |b_k|)} = \frac{\prod(1 + b_n)}{\prod(1 + |b_n|)}$$

Ou seja, as séries  $\sum a_n$  e  $\sum \bar{a}_n$  tem o mesmo comportamento assintótico. Como  $\sum \bar{a}_n$  diverge, podemos dizer o mesmo de  $\sum a_n$ . ■

**Lema 3.** Se a curva do bilhar é  $\mathcal{C}^1$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$  então:

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0$  ou  $\pi$ ;

$$(b) \sum \theta_n < \infty \text{ ou } \sum \pi - \theta_n < \infty;$$

$$(c) \sum \|\mathbf{x}(s_{n+1}) - \mathbf{x}(s_n)\| < \infty.$$

**Demonstração:** Podemos supor por uma reparametrização que  $s = 0$ . Consideremos um sistema de coordenadas cuja origem é  $\mathbf{x}(0)$  e os eixos  $x, y$  são as direções tangentes e normal. Logo,  $\gamma$  é localmente o gráfico de uma função  $y = f(x)$ , com  $f'(0) = 0$ . Já que  $(s_n) \rightarrow 0$ , para  $n$  grande o suficiente temos

$$\mathbf{x}(s_n) = (x_n, f(x_n))$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que a expressão acima vale para todo  $n$ . Tomando uma vizinhança pequena o suficiente, podemos supor também que  $|f'(x)| < \varepsilon$ , pois  $f'(0) = 0$ . Afirmamos que nessa situação  $(x_n)$  é monótona. Geometricamente, isso é claro já que o sua negação indica que a tangente está próxima da direção do eixo  $y$  (figura 32). Vamos verificar isso mais formalmente. Pelo teorema do valor médio a condição  $|f'(x)| < \varepsilon$  implica que

$$-\varepsilon < \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} < \varepsilon \quad 3.8$$

Por contradição, digamos por exemplo que  $x_{n-1} < x_{n+1} < x_n$ . Sejam  $\mathbf{v} = \mathbf{x}(s_n) - \mathbf{x}(s_{n-1})$  e  $\tilde{\mathbf{v}} =$

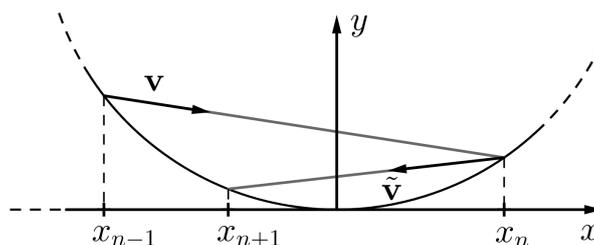


Figura 32:  $(x_n)$  é monótona

$\mathbf{x}(s_{n+1}) - \mathbf{x}(s_n)$ . Daí temos

$$\mathbf{v} = (x_n - x_{n-1}, f(x_n) - f(x_{n-1}))$$

$$\tilde{\mathbf{v}} = (x_{n+1} - x_n, f(x_{n+1}) - f(x_n))$$

Sendo  $\mathbf{t} = (1, f'(x_n))$  um vetor tangente em  $\mathbf{x}(s_n)$ , pela lei da reflexão obtemos

$$\frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{t} \rangle}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\langle \tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{t} \rangle}{\|\tilde{\mathbf{v}}\|}$$

Tomamos então  $\Delta = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$ ,  $\tilde{\Delta} = \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$ ,  $m = \sqrt{1 + \Delta^2}$  e  $\tilde{m} = \sqrt{1 + \tilde{\Delta}^2}$ . Com cuidado para não trocar o sentido de  $\mathbf{v}$  ou  $\mathbf{v}'$  a equação anterior torna-se

$$\frac{\langle (1, \Delta), (1, f'(x_n)) \rangle}{m} = \frac{\langle (-1, \tilde{\Delta}), (1, f'(x_n)) \rangle}{\tilde{m}}$$

Portanto, obtemos

$$f'(x_n) = \frac{m + \tilde{m}}{m\tilde{\Delta} - \tilde{m}\Delta}$$

Por outro lado, a equação 3.8 nos diz que  $|\Delta| < \varepsilon$ . E também temos  $1 \leq m < 1 + \varepsilon$ . Com isso, concluímos

$$f'(x_2) > \frac{2}{\varepsilon(1+\varepsilon) + \varepsilon(1+\varepsilon)} = \frac{1}{\varepsilon(1+\varepsilon)}$$

Mas isso contradiz  $|f'(x)| < \varepsilon$  para  $\varepsilon$  pequeno. Logo, a sequência  $(x_n)$  é monótona. Outra maneira de mostrar tal fato para um bilhar  $\mathcal{C}^2$  com curvatura positiva, é diretamente observar a expressão 3.15. Quando  $\theta$  é suficientemente pequeno,  $\tilde{s} - s > R > 0$ .

De qualquer forma,  $(x_n)$  é monótona e limitada. Digamos que  $x_n < 0$  e daí,  $\theta_n \rightarrow 0$ . Observando que a cada reflexão da bola no bilhar a direção de movimento altera-se em  $2\theta_n$  pela lei da reflexão, então  $\sum_{n=0}^k 2\theta_n$  mede apenas a mudança de inclinação na direção de lançamento e a  $k$ -ésima reflexão. Logo,  $\sum \theta_n < \infty$ . Análogamente, caso seja  $x_n > 0$ , teremos  $\theta_n \rightarrow \pi$  e  $\sum(\pi - \theta_n) < \infty$ . Para a terceira afirmação do Lema, basta observar que  $\|\mathbf{x}(s_n) - \mathbf{x}(s_n)\| \leq |s_{n+1} - s_n|$  e que  $(s_n)$  é monótona para  $n$  grande. ■

**Lema 4.** Num bilhar  $\mathcal{C}^1$ , seja  $(s_0, \theta_0) \in S^1 \times (0, \pi)$  e  $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{x}(s_1) - \mathbf{x}(s_0)}{\|\mathbf{x}(s_1) - \mathbf{x}(s_0)\|}$ . Então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a)  $\mathcal{F}_t(\mathbf{x}(s_0), \mathbf{v})$  está bem definido para todo  $t \geq 0$ ;
- (b) a sequência  $(s_n)$  diverge;
- (c)  $\sum \|\mathbf{x}(s_{n+1}) - \mathbf{x}(s_n)\| = \infty$ .

**Demonstração:** Primeiro observamos que (a)  $\Rightarrow$  (b). De fato, caso (b) fosse falsa, pelo lema 3 teríamos  $\theta_n \rightarrow 0$  (ou  $\pi$ ) num tempo finito  $t_0$ . Daí,  $\mathcal{F}_t$  não estaria bem definido para  $t > t_0$ . Também pelo lema anterior, temos (b)  $\Rightarrow$  (c). Para ver que (c)  $\Rightarrow$  (a), basta notar que nessa situação a bola não faz infinitas reflexões num tempo finito. ■

Com esses lemas, finalmente estamos aptos a provar o teorema 7. Vamos proceder por contradição. Caso  $\mathcal{F}_t$  não esteja bem definido, pelo lema 4 deve existir uma sequência  $(s_n)$  convergente e pelo lema 3,  $\sum \theta_n < \infty$ . Mas com isso e sob as hipóteses do teorema 7, é possível encontrar  $d_n$ , com  $|d_n| < L$  tal que

$$\frac{\theta_{n+1}}{\theta_n} = 1 + d_n \theta_n \tag{3.9}$$

Assim, sendo  $\sum \theta_n$  convergente, segue que  $\sum d_n \theta_n$  também é, e pelo lema 2 a série  $\theta_n$  é divergente. Temos uma contradição e portanto,  $\mathcal{F}_t$  está bem definido.

Resta provarmos a equação 3.9. Digamos que  $\Phi(s, \theta) = (s', \theta')$ . Expandindo  $\mathbf{x}$  em série de Taylor, obtemos:

$$\mathbf{x}(s') = \mathbf{x}(s) + \mathbf{x}'(s)(s' - s) + \frac{\mathbf{x}''(s)}{2}(s' - s)^2 + \frac{\mathbf{x}'''(s)}{6}(s' - s)^3 + o((s' - s)^3)$$

Em geral, só podemos dizer que  $\mathbf{x}'''(s)(s' - s)^3$  é  $o((s' - s)^2)$ . Mas como a derivada é limitada,  $\mathbf{x}'''(s)(s' - s)^3$  é  $O((s' - s)^3)$ . Com isso, usando que  $\langle \mathbf{x}'(s), \mathbf{x}''(s) \rangle = 0$  e assumindo  $s' > s$  temos

$$\|\mathbf{x}(s') - \mathbf{x}(s)\| = \sqrt{(s' - s)^2 + \frac{(s' - s)^4}{4} + O((s' - s)^4)} = (s' - s) \sqrt{1 + O((s' - s)^2)}$$

Logo, lembrando que  $\mathbf{x}''(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$  temos:

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \frac{\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{x}(s') - \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s') - \mathbf{x}(s)\|} = \frac{\frac{\kappa(s)}{2}(s' - s)^2 + O((s' - s)^3)}{(s' - s)\sqrt{1 + O((s' - s)^2)}} \\ &= \left( \frac{\kappa(s)}{2}(s' - s) + O((s' - s)^2) \right) (1 + O((s' - s)^2)) \\ &= \frac{\kappa(s)}{2}(s' - s) + O((s' - s)^2)\end{aligned}$$

como a derivada do seno em 0 é 1, segue que

$$\theta = \frac{\kappa(s)}{2}(s' - s) + O((s' - s)^2)$$

De maneira análoga, podemos obter também

$$\theta' = \frac{\kappa(s')}{2}(s' - s) + O((s' - s)^2)$$

Pelo teorema do valor médio, existe  $\tilde{s}$  com  $s < \tilde{s} < s'$  tal que  $(s' - s)\kappa'(\tilde{s}) = \kappa(s') - \kappa(s)$ . Assim, das equações acima advém

$$\begin{aligned}\theta' - \theta &= \frac{\kappa(s') - \kappa(s)}{2}(s' - s) + O((s' - s)^2) \\ &= \frac{\kappa'(\tilde{s})}{2}(s' - s)^2 + O((s' - s)^2)\end{aligned}$$

Como  $\mathbf{x}'''$  é limitado, segue que  $\kappa'$  também é. Por outro lado, recordando **3.15** temos  $s' - s = \theta + o(\theta)$ . Assim, para  $|\theta' - \theta|$  pequeno o suficiente, vale que

$$|\theta' - \theta| < L\theta^2$$

para algum  $L$ . Já que  $\sum \theta_n$  é convergente, para  $n$  suficientemente grande, temos

$$\theta_{n+1} = \theta_n + d_n \theta_n^2$$

com  $|d_n| < L$ , e obtemos a equação **3.7** encerrando a prova do teorema. ■

Finalizamos essa seção com outro resultado interessante de Halpern, cuja prova pode ser encontrada no mesmo artigo **[8]**:

**Teorema 8.** Em qualquer mesa de bilhar  $\Omega$ ,  $\mathcal{F}_t$  está bem definida para quase todo ponto.

### 3.4 Teorema de Hubacher

Nessa seção falaremos sobre um Teorema devido a Hubacher **[10]** enunciado a seguir

**Teorema 9.** Suponha que  $\gamma$  é o bordo de uma mesa de bilhar  $\mathcal{C}^2$  exceto num numero finito de pontos, onde existem os limites laterais da curvatura. Suponha também que a curvatura é uniformemente limitada e  $\kappa > \epsilon > 0$ . Então  $S^1 \times \{0\}$  é uma curva invariante isolada de  $S^1 \times [0, \pi]$  pela aplicação do bilhar. Ou seja, não existem cáusticas numa vizinhança de  $\gamma$ .

O primeiro passo para a demonstração do teorema, é observarmos o comportamento do bilhar numa vizinhança do ponto onde ocorre uma descontinuidade da curvatura. Como existem os limites laterais, usaremos os círculos osculadores. Notamos que nessa seção, assim como na seção anterior  $\mathbf{x}$  denotará a parametrização da curva do bilhar.

Digamos então que a curvatura é descontínua em  $s = 0$ . Como esta é uniformemente limitada, os limites laterais em 0 também são positivos. Sem perda de generalidade podemos supor  $\kappa(0-) > \kappa(0+)$ . Os raios dos círculos osculadores então serão  $r = \kappa(0-)^{-1} < \kappa(0+)^{-1} = R$ . Como vimos na equação 2.3 a aplicação do bilhar na circunferência é  $\Phi(s, \theta) = (s + 2R\theta, \theta)$ . Isto é, restrita a cada uma das folhas  $S^1 \times \{\theta\}$ ,  $\Phi$  é uma rotação.

Numa vizinhança de  $s = 0$  e para  $s < 0$  o comportamento do bilhar é semelhante ao de um bilhar com uma circunferência de raio  $r$ . E para  $s > 0$ , o comportamento é semelhante ao de uma circunferência de raio  $R$ . Assim, para uma condição inicial  $(s_0, \theta_0)$  com  $s_0 < 0$  e  $\theta_0$  pequeno, as primeiras iterações da aplicação do bilhar serão próximas a  $(s_k, \theta_k) = \Phi^k(s_0, \theta_0) \approx (s_0 + 2kR\theta_0, \theta_0)$ . Observamos que temos  $\theta_k$  aproximadamente constante nessa situação. Em algum instante (digamos após  $n$  iterações), a bola passa pelo ponto onde há descontinuidade da curvatura. Assim, a partir desse momento, o bilhar é semelhante ao da circunferência com raio  $R$  e há possivelmente uma mudança abrupta de  $\theta_{n-1}$  para  $\theta_n$ . A figura 33 retrata essa hipótese.

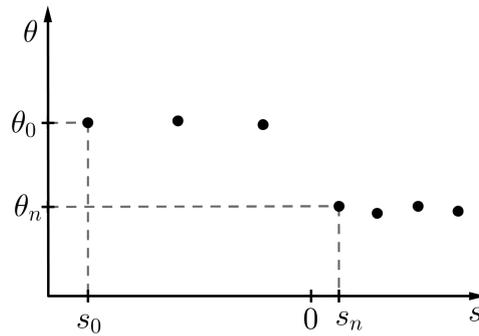


Figura 33: Mudança abrupta no ângulo

Com isso em mente, a abordagem será a seguinte: suporemos a existência de uma curva invariante, e tomaremos uma órbita particular dessa curva invariante. Em seguida, vamos estimar a mudança que ocorre em  $\theta$  ao ultrapassarmos o ponto de descontinuidade da curvatura. Veremos por fim que esse salto em  $\theta$  é grande e impossibilita a existência da cáustica. Convém relembrar que usaremos o levantamento de  $\Phi$ , também denotado por  $\Phi$ .

Suponha então que para qualquer vizinhança de  $(0, 0)$  passa um círculo invariante  $C$ . Observamos que por continuidade existe um ponto de  $C$  cuja reta orientada  $l$  correspondente corta perpendicularmente a reta normal ao bilhar no ponto  $\mathbf{x}(0)$ . Seja  $(s_0, \theta_0)$  tal ponto e  $\Phi(s_0, \theta_0) = (s_1, \theta_1)$ . Dessa forma,  $s_0 < 0$  e  $s_1 > 0$ . Sejam  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  os ângulos formados por  $l$  e os círculos osculadores de raios  $r$  e  $R$  respectivamente. Notamos que podemos achar uma relação entre  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  e que  $\alpha_0 \approx \theta_0$  e  $\alpha_1 \approx \theta_1$ . Na figura 34,  $\mathbf{o}_0$  e  $\mathbf{o}_1$  são os centros dos círculos osculadores e  $\mathbf{a}_0$  e  $\mathbf{a}_1$  os pontos de encontro da reta  $l$  com estes. Por fim,  $\mathbf{o}$  é o encontro de  $l$  com a normal ao bordo do bilhar. Observamos que  $d(\mathbf{o}_0, \mathbf{o}_1) = d(\mathbf{o}, \mathbf{o}_1) - d(\mathbf{o}, \mathbf{o}_0)$ . Disso, obtemos:

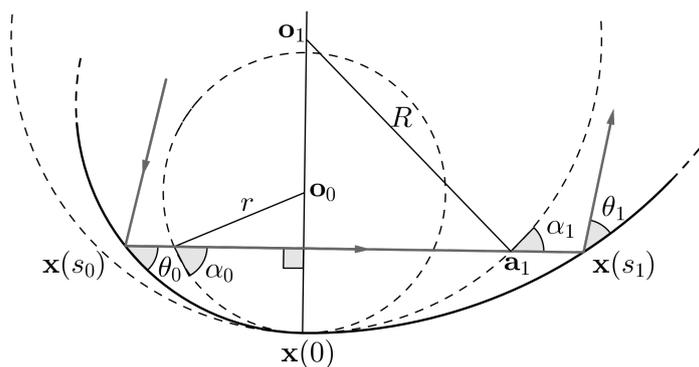


Figura 34: Círculos osculadores

$$R - r = R \cos \alpha_1 - r \cos \alpha_0$$

Com essa equação calculamos  $\alpha_1$  em função de  $\alpha_0$  para estimar a diferença entre  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$

$$\alpha_1 = \arccos \left( 1 - \frac{r}{R} + \frac{r}{R} \cos \alpha_0 \right)$$

Sendo  $f(x) = \arccos(1 - (r/R) + (r/R) \cos x)$  temos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(r/R) \sin x}{\sqrt{1 - (1 - (r/R) + (r/R) \cos x)^2}} \\ &= \frac{(r/R) \sin x}{\sqrt{-(2r/R)(-1 + \cos x) + (r^2/R^2)(-1 + \cos x)^2}} \end{aligned}$$

Como  $\sin x \tan(x/2) = (1 - \cos x)$  segue que

$$f'(x) = \frac{\sqrt{r/R}}{\sqrt{2 \frac{\tan(x/2)}{\sin x} + \frac{r}{R} \tan^2 \frac{x}{2}}}$$

Recordando também da identidade  $\sin x = (2 \tan(x/2)) / (1 + \tan^2(x/2))$  advém

$$f'(x) = \frac{\sqrt{r/R}}{\sqrt{1 + (1 + (r/R)) \tan^2(x/2)}} < \sqrt{\frac{r}{R}}$$

Com isso já temos a estimativa para a derivada, concluímos

$$\alpha_1 = f(\alpha_0) \Rightarrow \alpha_1 < \sqrt{\frac{r}{R}} \alpha_0 \quad 3.10$$

Iremos agora precisar quão próximos  $\alpha_0, \alpha_1, \theta_0, \theta_1$  estão para dar sentido as expressões  $\theta_0 \approx \alpha_0$  e  $\theta_1 \approx \alpha_1$ . Usaremos  $o(x)$  para denotar uma função tal que  $o(x)/x \rightarrow 0$  quando  $x \rightarrow 0$

**Lema 5.** Sejam duas curvas com parametrizações  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  por comprimento do arco. Suponha que essas curvas possuem um contato de grau 2 em  $s = 0$  (quer dizer,  $\mathbf{x}^{(k)}(0) = \mathbf{y}^{(k)}(0)$  para  $k = 0, 1, 2$ ) e curvatura positiva nesse ponto. Se  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  são as respectivas aplicações do bilhar, com  $\Phi_1(0, \theta) = (s_1, \theta_1)$  e  $\Phi_2(0, \theta) = (s_2, \theta_2)$ , para  $\theta$  pequeno vale

$$\begin{aligned} s_2 &= s_1 + o(\theta) \\ \theta_2 &= \theta_1 + o(\theta) \end{aligned} \quad 3.11$$

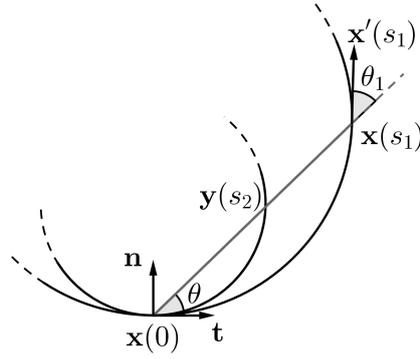


Figura 35: Prova do lema 5

**Demonstração:** Sem perda de generalidade, podemos supor que  $y$  é uma circunferência. Vamos escolher um sistema de coordenadas de forma que  $x(0)$  seja a origem. Digamos que curvatura no ponto de contato é  $R^{-1}$ . Assim, temos  $s_2 = 2R\theta$

Usaremos coordenadas polares para reparametrizar  $x$ . Consideremos então o vetor  $v$  que forma um ângulo de medida  $\theta$  com a tangente as curvas na origem.

$$v(\theta) = \cos\theta \mathbf{t} + \sin\theta \mathbf{n}$$

onde  $\mathbf{t}, \mathbf{n}$  são os vetores tangente e normal a  $x$  em 0. Assim, podemos reparametrizar  $x$  em função de  $\theta$ . Existe uma função  $\rho$  satisfazendo  $\bar{x}(\theta) = \rho(\theta)v(\theta)$  e por outro lado, temos também  $\bar{x}(\theta) = x(s_1(\theta))$ . Comparando essas equações e derivando duas vezes obtemos

$$\begin{aligned} \rho'(\theta)v(\theta) + \rho(\theta)v'(\theta) &= x'(s_1(\theta))s_1'(\theta) \\ (\rho''(\theta) - \rho(\theta))v(\theta) + 2\rho'(\theta)v'(\theta) &= x''(s_1(\theta))s_1'(\theta)^2 + x'(s_1(\theta))s_1''(\theta) \end{aligned} \quad 3.12$$

Na primeira equação, se  $\theta = 0$ , como  $v(0) = x'(0) = \mathbf{t}$ , segue que

$$s_1'(0) = \rho'(0) \quad 3.13$$

Por outro lado na segunda equação de 3.12, lembrando que  $x''(0) = R^{-1}\mathbf{n}$  e usando 3.13 concluimos

$$2\rho'(0) = R^{-1}s_1'(0)^2 \Rightarrow s_1'(0) = \rho'(0) = 2R$$

Expandindo  $s_1(\theta)$  em série de Taylor, obtemos

$$s_1 = 2R\theta + o(\theta) \quad 3.14$$

Como  $y$  é um círculo, segue que  $s_2 = 2R\theta$ , e assim obtemos a primeira equação de 3.11. Para obtermos a segunda, observamos que  $\bar{x}'(\theta)$  forma um ângulo de medida  $\theta + \theta_1$  com a direção  $\mathbf{t}$ . Daí,

$$\theta_1 + \theta = \arctan\left(\frac{\langle \bar{x}'(\theta), \mathbf{n} \rangle}{\langle \bar{x}'(\theta), \mathbf{t} \rangle}\right)$$

Usando que  $\bar{x}(\theta) = \rho(\theta)v(\theta)$  obtemos

$$\frac{\langle \bar{x}'(\theta), \mathbf{n} \rangle}{\langle \bar{x}'(\theta), \mathbf{t} \rangle} = \frac{\rho'(\theta) \sin\theta + \rho(\theta) \cos\theta}{\rho'(\theta) \cos\theta - \rho(\theta) \sin\theta}$$

Lembrando que  $\rho$  também tem expansão em série de Taylor similar a 3.14, e que  $\sin \theta = \theta + o(\theta^2)$ ,  $\cos \theta = 1 + o(\theta)$  segue que  $(O(x))$  denota uma função tal que  $O(x)/x$  é limitado quando  $x \rightarrow 0$ )

$$\frac{\langle \bar{\mathbf{x}}'(\theta), \mathbf{n} \rangle}{\langle \bar{\mathbf{x}}'(\theta), \mathbf{t} \rangle} = \frac{4R\theta + o(\theta)}{2R + O(\theta)} = (2\theta + o(\theta)) \left( \frac{1}{1 + O(\theta)} \right)$$

Usando a série de Taylor de  $1/(1+x)$  ficamos com

$$\frac{\langle \bar{\mathbf{x}}'(\theta), \mathbf{n} \rangle}{\langle \bar{\mathbf{x}}'(\theta), \mathbf{t} \rangle} = (2\theta + o(\theta))(1 + O(\theta)) = 2\theta + o(\theta)$$

Finalmente, como a primeira derivada da tangente em 0 é 1, concluímos

$$\theta_1 + \theta = 2\theta + o(\theta) \Rightarrow \theta_1 = \theta + o(\theta)$$

■

Como consequência desse lema, se um bilhar tem classe  $\mathcal{C}^2$  com curvatura  $\kappa(\bar{s}) > 0$  em  $s$ , então numa vizinhança de  $(\bar{s}, 0)$  a aplicação do bilhar se escreve como

$$\Phi(s, \theta) = (s + 2\kappa(\bar{s})^{-1}\theta + o(\theta), \theta + o(\theta)) \quad 3.15$$

Voltando agora a equação 3.10 o lema 5 nos diz que  $\alpha_0 = \theta_0 + o(\theta_0)$  e  $\theta_1 = \alpha_1 + o(\alpha_1)$  e daí temos

$$\theta_1 < \sqrt{\frac{r}{R}}\theta_0 + o(t_0) \quad 3.16$$

Agora que já temos a estimativa para as diferenças entre  $\theta_0$  e  $\theta_1$ , vamos verificar que essa diferença é 'grande demais'. Seja  $(s'_0, \theta'_0)$  um ponto da círculo invariante  $C$  tal que  $s'_0 = 0$ , e  $(s'_n, \theta'_n) = \Phi(s'_0, \theta'_0)$ . Dessa forma temos  $s_0 < s'_0$ .

Pelo Teorema de Birkhoff, como  $(s_0, \theta_0)$  e  $(s'_0, \theta'_0)$  são dois pontos da mesma curva invariante, devemos ter  $s_n < s'_n$  para todo  $n$ . Devido a isso e a  $\Phi$  ser twist uniforme (pois o bordo é  $\mathcal{C}^2$  por partes com curvatura longe de zero, conforme seção 2.3), podemos encontrar condições sobre os possíveis valores de  $\theta'_0$ . Temos o seguinte lema:

**Lema 6.** Para qualquer  $\delta > 0$  existe uma vizinhança  $V$  de  $(0, 0)$  tal que a condição

$$\|\theta'_0 - \theta_1\| < \delta\theta_1 \quad 3.17$$

é necessária a fim de que  $s_n < s'_n$  (em  $V$ ), para  $n > 0$  e a condição

$$\|\theta'_0 - \theta_0\| < \delta\theta_0 \quad 3.18$$

e necessária para que  $s_n < s'_n$ , com  $n < 0$ .

**Demonstração:** Vamos provar o primeiro item do lema; o segundo decorre analogamente. Podemos restringir então nossa vizinhança para  $V_+ = V \cap \{s > 0\}$ . Por 3.15 a expressão assintótica de  $\Phi$  em  $V_+$  é

$$\begin{cases} s_1 = s_0 + 2\kappa(s_0)^{-1}\theta_0 + o(\theta_0) \\ \theta_1 = \theta_0 + o(\theta_0) \end{cases} \quad 3.19$$

para  $\theta_0$  pequeno. Fixado  $n$  previamente, então se os ângulos  $\theta_0$  e  $\theta'_0$  são pequenos,  $(s_i, \theta_i)$  e  $(s'_i, \theta'_i)$  permanecem em  $V_+$  para  $i = 1, \dots, n$ . Usando a primeira equação de expressão 3.19 obtemos para  $1 \leq i \leq n$

$$s_{i+1} - s_i = 2\kappa(s_i)^{-1}\theta_i + o(\theta_i)$$

Considerando agora a segunda equação de 3.19 a equação anterior torna-se

$$s_{i+1} - s_i = 2\kappa(s_i)^{-1}\theta_1 + o(\theta_1)$$

Somando essas equações advém

$$s_n - s_1 = 2\theta_1 \sum_{i=1}^{n-1} \kappa(s_i)^{-1} + o(\theta_1) \quad 3.20$$

Analogamente temos

$$s'_n - s'_0 = 2\theta'_0 \sum_{i=0}^{n-1} \kappa(s'_i)^{-1} + o(\theta'_0) \quad 3.21$$

e também

$$s'_{n-1} - s'_0 = 2\theta'_0 \sum_{i=0}^{n-2} \kappa(s_i)^{-1} + o(\theta'_0) \quad 3.22$$

Supondo que a condição 3.17 do lema é falsa, temos  $\theta'_0 \leq (1-\delta)\theta_1$  ou  $\theta'_0 \geq (1+\delta)\theta_1$ . Na primeira situação, consideremos  $m = \inf 2\kappa(s)^{-1}$  e  $M = \sup 2\kappa(s)^{-1}$ , tomados em  $V_+$ . Fixado  $0 < \delta < 1$ , e como a curvatura é  $k > \varepsilon > 0$  então, podemos supor  $m - (1-\delta)M > 0$ . Escolhemos  $n = \left\lceil \frac{2m}{m - (1-\delta)M} \right\rceil$ . Neste caso, a equação 3.20 nos provê

$$s_n > s_n - s_1 > \theta_1(n-1)m + o(\theta_1)$$

e a equação 3.21 juntamente com a condição  $\theta'_0 \leq (1-\delta)\theta_1$  dá

$$s'_n = s'_n - s'_0 \leq \theta_1(1-\delta)nM + o(\theta_1)$$

Do  $n$  escolhido, segue que  $n(m - (1-\delta)M) \geq 2m \Rightarrow (n-2)m \geq (1-\delta)nM$  e portanto,  $s_n > s'_n$ . Similarmente, caso seja  $\theta'_0 \geq (1+\delta)\theta_1$ , a equação 3.20 nos traz

$$s_n < s_1 + (n-1)M\theta_1 + o(\theta_1) < \theta_1 nM + o(\theta_1)$$

E da equação 3.22 aliada à relação  $\theta'_0 \geq (1+\delta)\theta_1$  concluímos que

$$s'_{n-1} > (n-1)m(1+\delta)\theta_1 + o(\theta_1)$$

Dessa forma, tomando  $V_+$  tal que  $(1+\delta)m - M > 0$  e  $n = \left\lceil \frac{(1+\delta)m}{m(1+\delta) - M} \right\rceil$  segue que  $s'_{n-1} > s_n$ . Isso conclui a demonstração do lema. ■

Para finalizarmos a demonstração do teorema, basta notar que da desigualdade 3.16 segue que para pequenos ângulos

$$\theta_1 < \sqrt{\frac{r}{R}}\theta_0 + o(\theta_0) \Rightarrow \theta_0 - \theta_1 > \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{r}{R}}\right)\theta_0 > \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{r}{R}}\right)\theta_1$$

Dessa forma, tomando  $\delta = (1 - \sqrt{r/R})/4$ , e supondo a primeira condição do lema válida, temos

$$\|\theta'_0 - \theta_0\| \geq \|\theta_0 - \theta_1\| - \|\theta'_0 - \theta_1\| > 2\delta\theta_0 - \delta\theta_1 > \delta\theta_0 \quad 3.23$$

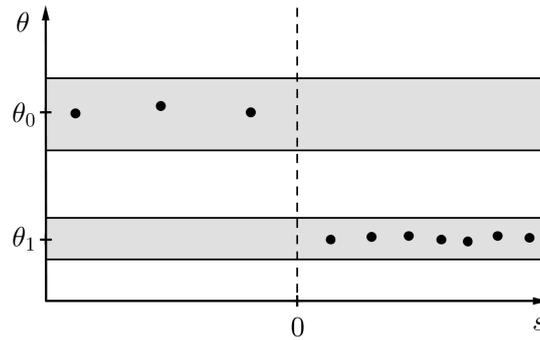


Figura 36:  $\theta'_0$  não pode estar próximo de  $\theta_0$  e  $\theta_1$  simultaneamente

Ou seja, a segunda condição do lema não vale. Similarmente, se a segunda condição ocorre, a primeira não. Dessa forma, qualquer que seja  $\theta'_0$ , temos  $s_n > s'_n$  para algum  $n$ , o que contradiz o teorema de Birkhoff. Concluimos que não existe nenhuma curva invariante numa vizinhança do ponto  $(0, 0)$ .

Observamos na figura 36 um esboço do que acontece quando juntamos o lema 6 com a desigualdade 3.16. Ao exigirmos que as órbitas não se cruzem, devemos ter os ângulos próximos (pois devido a condição twist, pontos com ângulos menores 'movem-se' mais vagarosamente). Entretanto, a desigualdade nos indica que ao passarmos pelo ponto de descontinuidade da curvatura, há uma mudança brusca no ângulo, que impossibilita  $\theta'_0$  de estar próximo de  $\theta_0$  e  $\theta_1$  simultaneamente.

Até agora já sabemos que numa vizinhança de um ponto de descontinuidade da curvatura não passam curvas rotacionais invariantes. Para concluir, queremos mostrar que numa vizinhança de  $\{s = 0\}$  não existem círculos invariantes. De fato, caso não fosse verdade, existe um ponto do bordo que é ponto de acumulação de curvas invariantes. Como cada uma dessas curvas invariantes é lipschitziana (pelo teorema de Birkhoff), existe uma subsequência convergente. O limite dessa sequência é uma curva invariante que possui pontos do bordo - mas não pode ser o próprio bordo, já que numa vizinhança do ponto de descontinuidade da curvatura não existem círculos invariantes. Como  $\Phi$  preserva uma medida regular e é twist, tal situação não pode ocorrer (veja figura 37), o que conclui a prova do teorema 9.

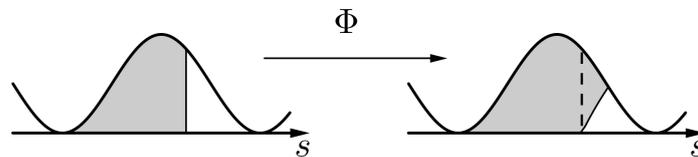


Figura 37: Uma curva que não pode ser invariante

Com o teorema de Hubacher podemos analisar alguns casos da String Construction. Como vimos na seção 1.3, quando usamos um polígono regular obtemos um bilhar de classe apenas  $\mathcal{C}^1$  (o bilhar tem classe  $\mathcal{C}^\infty$  exceto numa quantidade finita de pontos). Assim, o teorema acima nos diz que nesses casos não existem curvas rotacionais invariantes próximos do bordo. Com um valor específico para a corda da string construction temos um bilhar com bordo de classe  $\mathcal{C}^2$ , onde o teorema não se aplica. E é nesse caso que se inclui o hexagonal String Billiard.

Tentamos imitar a demonstração do teorema 9 da seguinte forma. O Hexagonal String Billiard é

formado pela colagem de vários pedaços de elipses, que são bilhares integráveis. Como vimos acima, a ideia de Hubacher é aproximar o bordo nos pontos de descontinuidade da curvatura por circunferências, que são bilhares integráveis, e analisar o que ocorre numa vizinhança desse ponto. No caso, a partícula ao passar de uma circunferência para a outra, sai de uma curva invariante  $\theta = \theta_0$  (considerando o bilhar nesta circunferência) e chega numa curva rotacional invariante  $\theta = \theta_1$  (considerando agora o bilhar na segunda circunferência). Entretanto, a diferença entre  $\theta_0$  e  $\theta_1$  em alguns casos é tão grande que impossibilita a existência de um círculo invariante. No Hexagonal String Billiard, temos uma situação similar; entretanto, não conseguimos encontrar uma estimativa boa o suficiente para o salto (isto é, algo similar à desigualdade 3.16).

### 3.5 Conclusão

Fetter diz em [6] que no retrato de fase de um bilhar, tipicamente encontramos vários tipos de órbitas presentes, sendo raros os demais casos. Apesar de nada estar provado, não pudemos encontrar indícios de órbitas caóticas. Então a questão é 'precisamente, quão excepcional o bilhar hexagonal elíptico é?' Embora vários resultados apontem para a validação da conjectura de Birkhoff e caso isso se concretize, uma pergunta interessante por si só seria explicar porque não observamos numericamente tais órbitas nesse bilhar. De qualquer forma o problema permanece aberto e sua solução, afirmativa ou negativa, trará novas luzes ao estudo de bilhares. Esperamos que esse trabalho instigue a curiosidade do leitor em busca de tais soluções.

# Bibliografia

- 1 G. Birkhoff. *Dynamical Systems*. American Mathematical Society, 1927.
- 2 M. J. D. Carneiro, S. O. Kamphorst, and S. P. De Carvalho. Elliptic islands in strictly convex billiards. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 23(03):799–812, 2003.
- 3 M. J. D. Carneiro, C. G. Ragazzo, and S. A. Zanata. *Introdução à dinâmica de aplicações do tipo twist*. Impa, 2005.
- 4 N. Chernov and R. Markarian. *Chaotic billiards*. Number 127. American Mathematical Soc., 2006.
- 5 R. Douady. Application du théoreme des tores invariants. *These 3eme cycle, Université Paris VII*, 1982.
- 6 H. L. Fetter. Numerical exploration of a hexagonal string billiard. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 241(8):830–846, 2012.
- 7 E. Gutkin and O. Knill. Billiards that share a triangular caustic. *World Sci. Publ., River Edge, NJ*, pages 199–213, 1996.
- 8 B. Halpern. Strange billiard tables. *Transactions of the American Mathematical Society*, 232: 297–305, 1977.
- 9 B. Hasselblatt and A. Katok. *A first course in dynamics: with a panorama of recent developments*. Cambridge University Press, 2003.
- 10 A. Hubacher. Instability of the boundary in the billiard ball problem. *Communications in Mathematical Physics*, 108(3):483–488, 1987.
- 11 A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, volume 54. Cambridge university press, 1997.
- 12 O. Knill. On nonconvex caustics of convex billiards. *Elemente der Mathematik*, 53(3):89–106, 1998.
- 13 V. F. Lazutkin. The existence of caustics for a billiard problem in a convex domain. *Izvestiya: Mathematics*, 7(1):185–214, 1973.
- 14 J. N. Mather. Glancing billiards. *Ergodic theory and dynamical systems*, 2(3-4):397–403, 1982.
- 15 J. Möser. On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II*, pages 1–20, 1962.

- 16 J. Moser. Stable and random motions in dynamical systems: Princeton univ. *Pr., Princeton, NJ*, 1973.
- 17 D. Poet and R. Poet. Confocal conic billiards. *Physics Letters A*, 271(4):277–284, 2000.
- 18 S. Tabachnikov. Billiards, société mathématique de france,“. *Panoramas et Synthèses*, 1, 1995.
- 19 S. Tabachnikov. *Geometry and billiards*, volume 30. American Mathematical Soc., 2005.
- 20 S. G. d. A. Vasconcelos. Instabilidade da fronteira no problema da bola de bilhar. Master's thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, 1997.