

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS
Curso de Especialização em Análise e Dimensionamento de
Estruturas de Concreto Armado e Aço

Felipe Augusto Ribeiro de Matos

ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DA INÉRCIA DAS VIGAS DE APOIO DE LAJE
MACIÇA EM CONCRETO ARMADO NA DETERMINAÇÃO DOS ESFORÇOS E
DESLOCAMENTOS

Belo Horizonte
2019

Felipe Augusto Ribeiro de Matos

**ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DA INÉRCIA DAS VIGAS DE APOIO DE LAJE
MACIÇA EM CONCRETO ARMADO NA DETERMINAÇÃO DOS ESFORÇOS E
DESLOCAMENTOS**

Versão final

Monografia de especialização apresentada ao Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Especialista em Estruturas".

Orientador: Prof. Ney Amorim Silva, D.Sc.
DEES – UFMG

Coorientador: Prof. Fernando Amorim de Paula, D.Sc. DEES – UFMG

Belo Horizonte
2019



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
*Curso de Especialização em Análise e Dimensionamento de
Estruturas de Concreto Armado e Aço*

ATA DA DEFESA

**“Análise da Influência da Rigidez das Vigas de Apoio de Laje Maciça
em Concreto Armado na Determinação dos Esforços e
Deslocamentos”**

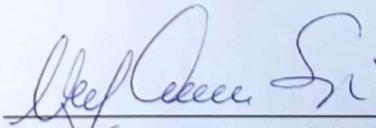
FELIPE AUGUSTO RIBEIRO DE MATOS

Trabalho Final defendido perante a banca examinadora, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de “Especialista em Análise e Dimensionamento de Estruturas de Concreto Armado e Aço”

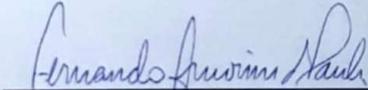
Aprovada em 02 de agosto de 2019.

Por:

Prof. Dr. Ney Amorim Silva
Avaliador 1 – Orientador


Nota: 95 (NOVUTA E CURSO)

Prof. Dr. Fernando Amorim de Paula
Avaliador 2


Nota: 95 (NOVUTA E CURSO)

RESUMO

Em edificações reais, os pavimentos constituídos por lajes são apoiados em elementos de vigas que apresentam um determinado grau de flexibilidade. As placas que compõem os pavimentos são calculadas através de método simplificado, desprezando-se a rigidez das vigas, com o uso de tabelas ou com programas específicos de cálculo. O presente trabalho apresenta um estudo da influência da rigidez dos apoios (vigas) na determinação dos esforços e deslocamentos em lajes maciças integradas e isoladas em concreto armado, para os diversos tipos de apoios, através do Método dos Elementos Finitos (MEF). Adicionalmente é apresentada a comparação da convergência dos resultados obtidos no cálculo de placas isoladas pelo método simplificado com a utilização de tabelas, nas quais os apoios são considerados infinitamente rígidos. Trata-se de um estudo comparativo, com a aplicação de duas metodologias distintas de cálculo para a análise de diferentes modelos de placas apoiadas em elementos de vigas, considerando a variação das suas rigidezes à flexão.

Palavras-chave: lajes; concreto armado; placas; elementos finitos; engenharia estruturas

ABSTRACT

In real buildings the slab are supported by beam elements that have a certain degree of flexibility. The present work presents a study of the influence of the stiffness of the supports in the determination of the forces and displacements in integrated and isolated reinforced concrete slabs for the various types of supports, through the Finite Element Analysis, and the comparison of the convergence of the results obtained in the calculation of isolated plates by the simplified method using tables, which consider the supports infinitely rigid. This is a comparative study, applying two different calculation methodologies for the analysis of different slabs models supported on beam elements, with stiffness variation.

Keywords: slab; finite element analysis; structure.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	7
2	OBJETIVO	8
3	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	9
4	METODOLOGIA	10
5	CÁLCULO DAS LAJES	12
5.1	Dados Gerais das Lajes	12
5.2	Cálculo pelo Método das Tabelas (TEPEDINO) – Regime Elástico	13
5.2.1	Momentos fletores máximos e flecha.....	14
5.2.2	Resumo dos resultados obtidos pelo método de tabelas (TEPEDINO).....	20
5.4	Cálculo pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) utilizando o Programa SAP2000	20
6	ANÁLISE DOS RESULTADOS	23
6.1	Geral.....	23
6.2	Modelos 1A e 1B.....	24
6.3	Modelos 2, 3, 4, 5 e 6 (MEF x Tepedino)	28
6.4	Cálculo do modelo de laje isolada Tipo F (MEF x Tabelas).....	30
7	CONCLUSÕES	32
8	BIBLIOGRAFIA	34
	APÊNDICE A	35
A.1	Laje Integrada Modelo 1A	36
A.2	Laje Integrada Modelo 1B.....	38
A.3	Laje Integrada Modelo 2	40
A.4	Laje integrada Modelo 3	42
A.5	Laje Integrada Modelo 4	44
A.6	Laje Integrada Modelo 5	46
A.7	Laje Integrada Modelo 6	48
	ANEXO A	50
	Tabelas de Lajes (Tepedino)	50

1 INTRODUÇÃO

Ao longo de muitos anos, o cálculo de elementos de placas de concreto, conhecidas como lajes, em edifícios com estruturas integradas, era realizado com a utilização de tabelas, considerando-se as lajes como elementos isolados e os apoios infinitamente rígidos. Essas tabelas eram elaboradas com base na teoria da elasticidade, através da integração numérica ou séries compostas.

Com o uso de tabelas, seja pelo regime rígido-plástico ou pelo regime elástico, as continuidades entre as lajes são tratadas de forma simplificada, desprezando-se qualquer tipo de interação entre as placas. Neste caso, a análise de lajes integradas através do método simplificado, consiste em isolar cada placa do sistema, onde a interação entre lajes são analisadas através da relação de compensação dos momentos positivos e negativos.

As primeiras tabelas desenvolvidas para o cálculo de lajes foram produzidas por Marcus através do método simplificado, tendo como base a substituição de placa por uma grelha, com vigas ou faixas unitárias perpendiculares e independentes entre si (SILVA, 2014).

Posteriormente, o avanço científico e tecnológico, possibilitou a utilização de programas computacionais, através do Método dos Elementos Finitos (MEF), onde é possível obter resultados de esforços e deslocamentos independentes, em diversos pontos de uma estrutura.

É de suma importância considerar a influência da rigidez dos apoios no dimensionamento e análise estrutural dos elementos de placas, tendo em vista que, em edificações reais, os pavimentos são apoiados em elementos de vigas que se deformam sob a ação dos carregamentos que lhes são aplicados, alterando significadamente o cálculo dos esforços e deslocamentos nos pavimentos calculados considerando apoios infinitamente rígidos.

O software utilizado na análise é o SAP2000, *Structural Analysis Program*, desenvolvido pela *CSI Computers and Structures, Inc.*, que tem como base o Método dos Elementos Finitos (MEF) para obtenção dos esforços e deslocamentos decorrentes da ação das cargas nas estruturas (CSI, 2016).

2 OBJETIVO

O trabalho proposto, objetiva analisar a influência da rigidez dos apoios (vigas) na determinação dos esforços e deslocamentos em lajes maciças integradas e isoladas em concreto armado, para os diversos tipos de apoios, através do Método dos Elementos Finitos (MEF), e a comparação dos resultados obtidos no cálculo pelo método simplificado com a utilização de tabelas, as quais consideram os apoios infinitamente rígidos.

Neste estudo buscou-se, à luz da engenharia, analisar o cálculo de placas isoladas e integradas no intuito de alertar o profissional de que o modelo simplificado através de tabelas, o qual não considera a rigidez real dos apoios, poderá levar a grandes erros em função do modelo estrutural adotado.

Trata-se de um estudo comparativo, com a aplicação de duas metodologias distintas de cálculo para a análise de diferentes modelos de placas apoiadas em elementos de vigas com variação das suas rigidezes à flexão.

3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Inicialmente foi realizada uma revisão bibliográfica visando obter informações disponíveis na bibliografia técnica, no que se refere ao tema objeto deste estudo.

O Método dos Elementos Finitos representa atualmente o método mais utilizado para solucionar problemas de engenharia com as mais diversas geometrias, materiais e modelos estruturais. No entanto, ainda é comum o uso de métodos simplificados com a utilização de tabelas para a análise estrutural de elementos de placas.

De acordo com DUARTE (1998) os dois aspectos principais no que tange ao Método dos Elementos Finitos, são a subdivisão da estrutura em partes finitas (elementos), interligadas entre si através de um número discreto de pontos em sua periferia (nós) e a escolha da função que descreve o comportamento interno desses elementos. O autor ressalta que esta última representa a mais fundamental das características, tendo em vista que o bom ou mau comportamento do elemento é que vai viabilizar ou não o uso do método.

No que se refere à avaliação dos resultados obtidos com o Método dos Elementos Finitos em comparação aos métodos simplificados para a análise estrutural, destaca-se o trabalho de ARAÚJO (2009), no qual o autor procura mostrar em seu estudo que o método de cálculo com utilização de tabelas, que consiste em considerar as lajes isoladas com engaste perfeito nas lajes vizinhas, não é adequado para a análise de lajes apoiadas em vigas deformáveis. Salienta-se que esse método é satisfatório quando as lajes são apoiadas em paredes ou em vigas muito rígidas. O autor destaca ainda, que nos modelos de lajes apoiadas em vigas deformáveis, típico de pavimentos de edifícios de concreto armado, o método por tabelas superestima os momentos negativos e subestima os momentos positivos e as flechas das lajes.

REIS (2007) evidencia, em seu estudo, a sensibilidade dos resultados dos esforços e deslocamentos obtidos nas lajes a partir da variação da rigidez à flexão das vigas dos apoios. Os resultados obtidos pelo autor mostram que, em elementos de vigas onde as alturas equivalem aproximadamente a 10% do vão, são obtidos esforços com valores aproximados em comparação aos métodos das teorias clássicas (tabelas), que consideram os apoios indeformáveis.

BUENO (2013) analisa a influência da flexibilidade das vigas de apoio no projeto de tabuleiros formados por elementos de lajes maciças e vigas de concreto armado, utilizando o

Método dos Elementos Finitos e o método numérico de analogia de grelha para a análise integrada. Para verificação inicial dos momentos fletores e deslocamentos nas lajes, o autor faz o uso também do método tradicional de cálculo de lajes com a utilização de tabelas. O autor destaca ainda, que a rigidez das vigas também pode afetar expressivamente a parcela de carga transmitida diretamente para os pilares. Após a avaliação de diversos modelos de placas em concreto armado submetidas a carregamentos estáticos e dinâmicos, o autor conclui que a rigidez das vigas de apoio de lajes maciças, tem fundamental importância e contribuição na rigidez da placa.

4 METODOLOGIA

Primeiramente foi realizada a determinação dos esforços solicitantes e deslocamentos das lajes isoladas através do método simplificado com a utilização de tabelas. As tabelas utilizadas nas análises foram geradas para lajes retangulares armadas em duas direções, submetidas a uma carga constante uniformemente distribuída (SILVA, apud TEPEDINO, 1980).

Posteriormente foi realizada a análise do comportamento dos elementos de laje e a obtenção dos esforços e deslocamentos (flechas elásticas) atuantes a partir da variação da rigidez dos apoios, representados por elementos de vigas, através do Método dos Elementos Finitos (MEF) no programa SAP2000. Nas análises foram adotadas lajes maciças retangulares em concreto armado com espessura de 10 cm e integradas em diferentes tipos de modelos, apoiadas em vigas retangulares, que por sua vez são apoiadas em pilares. Para os elementos de vigas, procurou-se manter a base (b) constante de 20 cm, variando a altura (h) em 20, 40, 60, 80 e 100 cm.

A Figura 4.1 apresenta a discretização das lajes isoladas com a representação das condições de contorno para cada tipo de modelo de placas abordadas neste estudo.

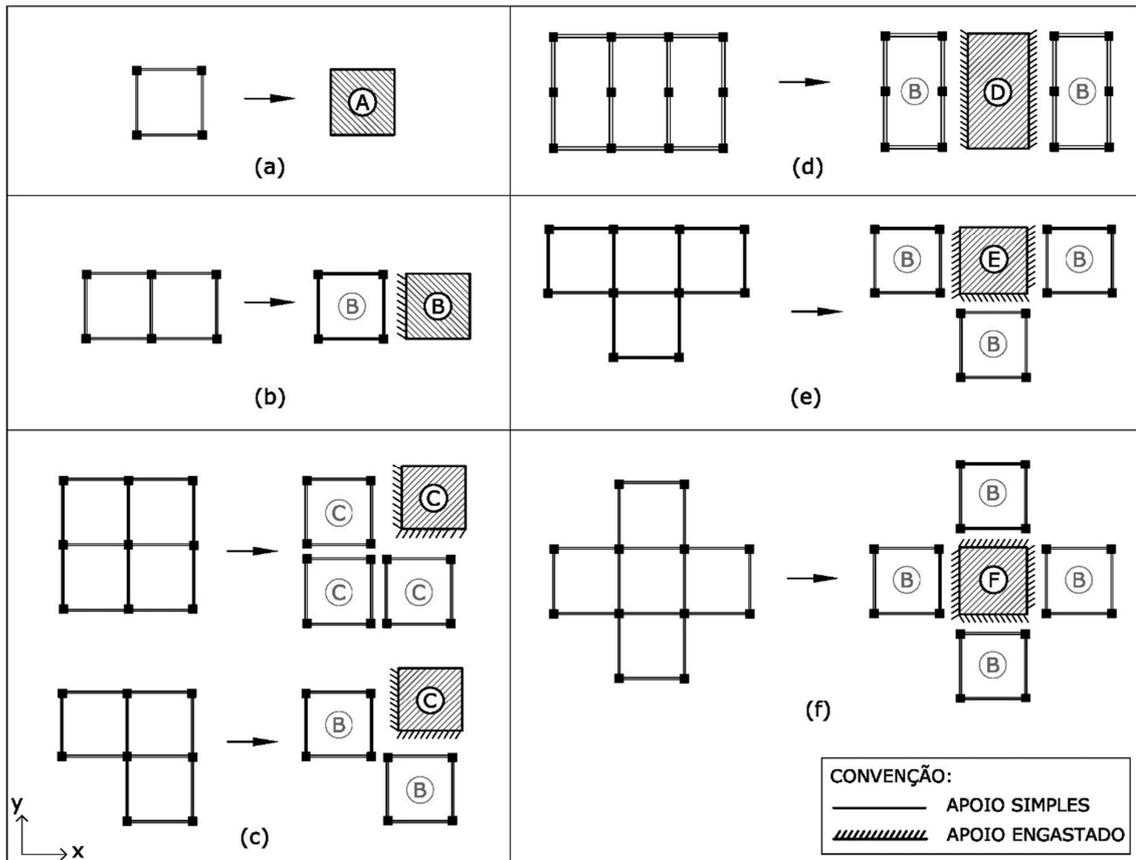


Figura 4.1 – Discretização das lajes isoladas analisadas (Fonte: Autor)

Nota-se que a laje discretizada em destaque (Figura 4.1), pode ser desvinculada do sistema integrado e calculada através do método simplificado com a utilização de tabelas, mantendo a condição de contorno original para cada modelo. Dessa forma, considera-se que os apoios de bordo são infinitamente rígidos, desprezando as continuidades entre as lajes.

Ainda na Figura 4.1(c), observa-se também que a laje isolada tipo “C”, oriunda de dois sistemas de lajes integradas distintos, ao ser discretizada, assume as mesmas características estruturais de contorno, possibilitando a utilização do método simplificado para o cálculo.

5 CÁLCULO DAS LAJES

Inicialmente foi realizado o cálculo dos momentos fletores e flechas elásticas pelo método de tabelas aplicadas para lajes retangulares isoladas. Posteriormente, foi realizada a determinação dos esforços e deformações pelo Método de Elementos Finitos (MEF) no programa SAP2000, considerando as lajes retangulares integradas apoiadas em elementos de vigas. Ressalta-se que não é objetivo deste estudo o cálculo e a análise das reações de apoio e esforços nos elementos de vigas e pilares.

Neste estudo as dimensões apresentadas de cada direção e os respectivos esforços obtidos nas lajes analisadas pelo método simplificado são denominados com os índices “a” e “b”, conforme designado nas tabelas de cálculo. Já as lajes analisadas pelo MEF (SAP2000) apresentam denominações com os índices “x” e “y”. Para efeito de comparação dos resultados obtidos em ambos os casos para os momentos fletores, neste trabalho são consideradas as igualdades $M_x=M_a$ e $M_y=M_b$.

5.1 Dados Gerais das Lajes

Neste estudo considerou-se as mesmas cargas uniformemente distribuídas atuantes para todas as lajes, sendo:

- Dados

$$f_{ck} = 25 \text{ MPa} / \text{Aço CA 50}$$

Brita Gnaisse

- Cargas Permanentes (g):

$$\text{Peso próprio da laje} = 0,10\text{m} \times 1,0\text{m} \times 1,0\text{m} \times 25 \text{ kN/m}^3 = 2,5 \text{ kN} = 2,5 \text{ kN/m}^2 \text{ (peso da laje por m}^2\text{)}$$

$$\text{Revestimento (total)} = 1,00 \text{ kN/m}^2$$

$$\text{Total cargas permanentes: } g = 3,50 \text{ kN/m}^2$$

- Cargas Acidentais (q):

$$\text{Carga acidental (sobrecarga): } q = 2,00 \text{ kgf/m}^2$$

- A carga total (p): $p = g + q$

$$p = 3,50 \text{ kN/m}^2 + 2,00 \text{ kN/m}^2$$

$$p = 5,50 \text{ kN/m}^2$$

- Determinação do E_{cs} (Módulo de elasticidade secante do concreto):

$$E_{cs} = \alpha_i \cdot E_{ci} \text{ onde: } \alpha_i = 0,8 + 0,2 \left(\frac{25}{80} \right) = 0,863 \leq 1,0$$

$$E_{ci} = \alpha_e \times 5600 (f_{ck})^{\frac{1}{2}} = 1,0 \times 5600 \times (25)^{\frac{1}{2}} = 28000 \text{ MPa} = 2,80 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$$

$$E_{cs} = 0,863 \times 2,80 \times 10^7 = 2,42 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$$

- Coeficiente de Poisson (ν) e Módulo de elasticidade transversal (G_c) (dados de entrada no SAP2000):

$$\nu = 0,2$$

$$G_c \cong 0,42 \times E_{cs}$$

5.2 Cálculo pelo Método das Tabelas (TEPEDINO) – Regime Elástico

Para a determinação dos esforços e flechas elásticas foram utilizadas as tabelas de cálculo do Prof. José de Miranda Tepedino, baseadas na teoria clássica, apresentadas no Anexo A. As referidas tabelas são aplicadas para lajes retangulares com relações (b/a) variando de 0,5 a 2,0, sendo “a” o vão cuja direção apresenta maior número de engastes. Quando as duas direções apresentam os mesmo número de engastes, o vão “a” é o menor. A Figura 5.1 a seguir apresenta os modelos de placas isoladas adotadas neste estudo.

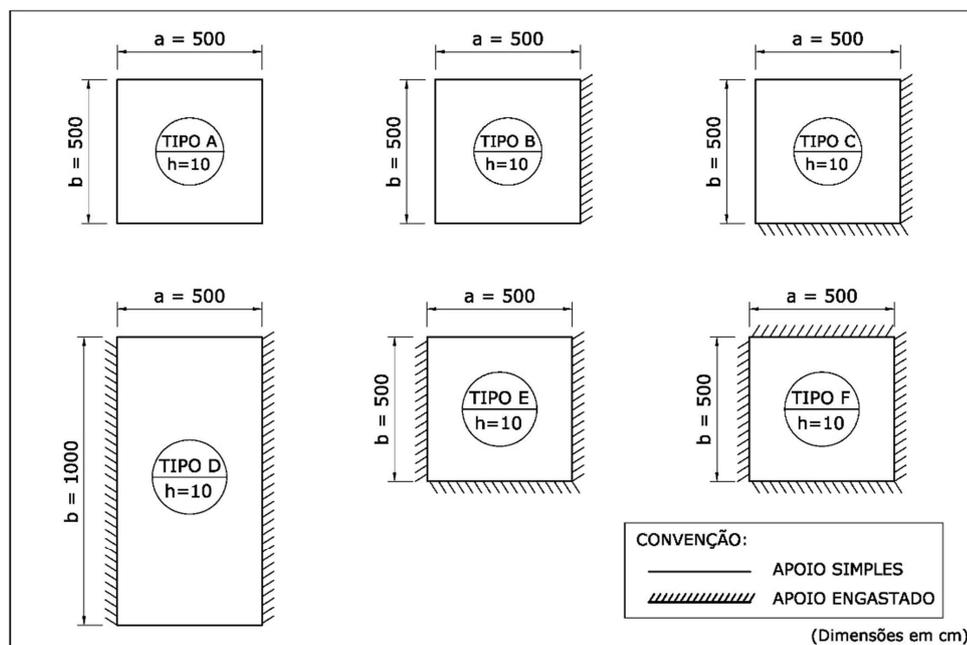


Figura 5.1 – Geometria das lajes isoladas (Fonte: Autor)

5.2.1 Momentos fletores máximos e flecha

a) Modelo 1 - Laje tipo A

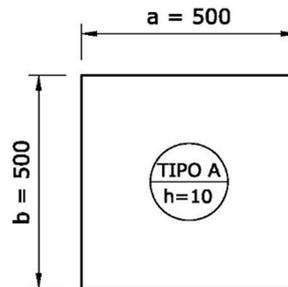


Figura 5.2 – Modelo estrutural da Laje 1 (Tipo A)

$$\text{Laje tipo A} \rightarrow b/a \rightarrow b/a = 500/500 = 1,00$$

- **Momentos Fletores**

$$m_a = 23,6; m_b = 23,6 \text{ (valores tabelados para } b/a)$$

$$M_a = \frac{p \times a^2}{m_a} = \frac{5,50 \times 5,00^2}{23,6} \qquad M_b = \frac{p \times a^2}{m_b} = \frac{5,50 \times 5,00^2}{23,6} =$$

$$M_a = 5,83 \text{ kN.m/m}$$

$$M_b = 5,83 \text{ kN.m/m}$$

- **Flecha Elástica (*)**

$$f_1 = 0,048 \text{ (valor tabelado para } b/a)$$

$$f = f_1 \frac{p \cdot a^4}{E_{cs} \cdot h^3} = 0,048 \times \frac{5,50 \times 5,00^4}{2,42 \times 10^7 \times 0,1^3} = 0,0068 \text{ m} = 0,68 \text{ cm}$$

$$f_{adm} = 500/250 = 2,00 \text{ cm} \rightarrow 0,68 \text{ cm} < 2,00 \text{ cm OK!}$$

(*) Obs.: A flecha acima calculada refere-se à flecha elástica inicial (nominal). Este estudo não leva em conta a carga em serviço e a parcela da flecha deferida no tempo, além de considerar a rigidez bruta da seção de concreto (Estádio I). Esta premissa vale também para o cálculo das demais lajes apresentadas a seguir.

b) Modelo 2 - Laje tipo B

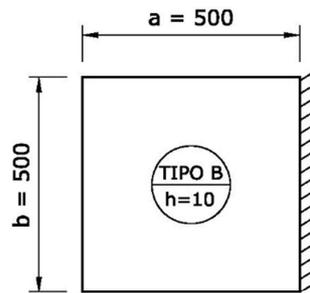


Figura 5.3 – Modelo estrutural da Laje 2 (Tipo B)

$$\text{Laje tipo B} \rightarrow b/a \rightarrow b/a = 500/500 = 1,00$$

• **Momentos Fletores**

$$m_a = 28,2; m_b = 34,4; n_a = 11,9$$

$$M_a = \frac{5,50 \times 5,00^2}{28,2} = 4,88 \text{ kN.m/m}$$

$$X_a = \frac{p \times a^2}{n_a} = \frac{5,50 \times 5,00^2}{11,9} =$$

$$M_b = \frac{5,50 \times 5,00^2}{34,4} = 4,00 \text{ kN.m/m}$$

$$X_a = 11,55 \text{ kN.m/m}$$

• **Flecha Elástica (*)**

$$f_1 = 0,033$$

$$f = f_1 \frac{p \cdot a^4}{E_{cs} \cdot h^3} = 0,033 \times \frac{5,50 \times 5,00^4}{2,42 \times 10^7 \times 0,1^3} = 0,0047 \text{ m} = 0,47 \text{ cm}$$

$$f_{adm} = 500/250 = 2,00 \text{ cm} \rightarrow 0,47 \text{ cm} < 2,00 \text{ cm} \text{ OK!}$$

(*) Ver observação no Modelo 1 (Laje tipo A).

c) Modelo 3 - Laje tipo C

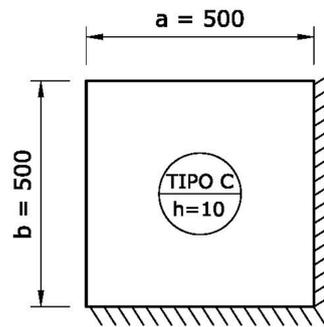


Figura 5.4 – Modelo estrutural da Laje 3 (Tipo C)

Laje tipo C $\rightarrow b/a \rightarrow b/a = 500/500 = 1,00$

• Momentos Fletores

$$m_a = 37,2; m_b = 37,2; n_a = 14,3; n_b = 14,3$$

$$M_a = \frac{5,50 \times 5,00^2}{37,2} = 3,70 \text{ kN. m/m}$$

$$X_a = \frac{5,50 \times 5,00^2}{14,3} = 9,62 \text{ kN. m/m}$$

$$M_b = \frac{5,50 \times 5,00^2}{37,2} = 3,70 \text{ kN. m/m}$$

$$X_b = \frac{p \times a^2}{n_b} = \frac{5,50 \times 5,00^2}{14,3} =$$

$$X_b = 9,62 \text{ kN. m/m}$$

• Flecha Elástica (*)

$$f_1 = 0,025$$

$$f = f_1 \frac{p \cdot a^4}{E_{cs} \cdot h^3} = 0,025 \times \frac{5,50 \times 5,00^4}{2,42 \times 10^7 \times 0,1^3} = 0,0036 \text{ m} = 0,36 \text{ cm}$$

$$f_{adm} = 500/250 = 2,00 \text{ cm} \rightarrow 0,36 \text{ cm} < 2,00 \text{ cm} \text{ OK!}$$

(*) Ver observação no Modelo 1 (Laje tipo A).

d) Modelo 4 - Laje tipo D

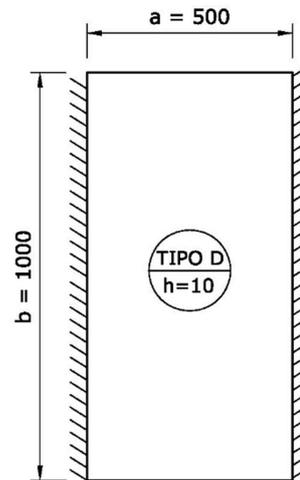


Figura 5.5 – Modelo estrutural da Laje 4 (Tipo D)

Laje tipo D $\rightarrow b/a \rightarrow b/a = 1000/500 = 2,00$

- Momentos Fletores

$$m_a = 32,4; m_b = 49,8; n_a = 14,3$$

$$M_a = \frac{5,50 \times 5,00^2}{32,4} = 4,24 \text{ kN. m/m}$$

$$X_a = \frac{7,50 \times 5,00^2}{14,3} = 13,11 \text{ kN. m/m}$$

$$M_b = \frac{5,50 \times 10,00^2}{49,8} = 11,04 \text{ kN. m/m}$$

- Flecha Elástica (*)

$$f_1 = 0,023$$

$$f = f_1 \frac{p \cdot a^4}{E_{cs} \cdot h^3} = 0,023 \times \frac{5,50 \times 5,00^4}{2,42 \times 10^7 \times 0,1^3} = 0,0033 \text{ m} = 0,33 \text{ cm}$$

$$f_{adm} = 500/250 = 2,00 \text{ cm} \rightarrow 0,33 \text{ cm} < 2,00 \text{ cm} \text{ OK!}$$

(*) Ver observação no Modelo 1 (Laje tipo A).

e) **Modelo 5 - Laje tipo E**

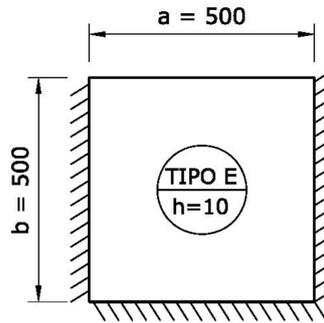


Figura 5.6 – Modelo estrutural da Laje 5 (Tipo E)

Laje tipo E $\rightarrow b/a \rightarrow b/a = 500/500 = 1,00$

- **Momentos Fletores**

$$m_a = 39,7; m_b = 49,5; n_b = 16,2; nb = 18,3$$

$$M_a = \frac{5,50 \times 5,00^2}{39,7} = 4,72 \text{ kN.m/m}$$

$$X_a = \frac{5,50 \times 5,00^2}{16,2} = 11,57 \text{ kN.m/m}$$

$$M_b = \frac{5,50 \times 5,00^2}{49,5} = 3,79 \text{ kN.m/m}$$

$$X_b = \frac{5,50 \times 5,00^2}{18,3} = 10,25 \text{ kN.m/m}$$

- **Flecha Elástica (*)**

$$f_1 = 0,018$$

$$f = f_1 \frac{p \cdot a^4}{E_{cs} \cdot h^3} = 0,018 \times \frac{5,50 \times 5,00^4}{2,42 \times 10^7 \times 0,1^3} = 0,0026 \text{ m} = 0,26 \text{ cm}$$

$$f_{adm} = 500/250 = 2,00 \text{ cm} \rightarrow 0,26 \text{ cm} < 2,00 \text{ cm} \text{ OK!}$$

(*) Ver observação no Modelo 1 (Laje tipo A).

f) Modelo 6 - Laje tipo F

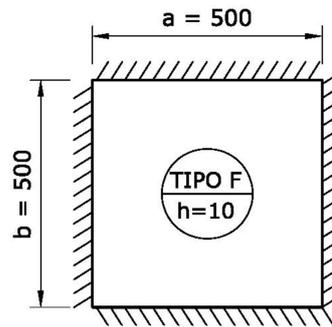


Figura 5.7 – Modelo estrutural da Laje 6 (Tipo F)

$$\text{Laje tipo F} \rightarrow b/a \rightarrow b/a = 500/500 = 1,00$$

• Momentos Fletores

$$m_a = 49,5; m_b = 49,5; n_a = 19,4; n_b = 19,4$$

$$M_a = \frac{5,50 \times 5,00^2}{49,5} = 2,78 \text{ kN.m/m}$$

$$X_a = \frac{5,50 \times 5,00^2}{19,4} = 7,09 \text{ kN.m/m}$$

$$M_b = \frac{5,50 \times 5,00^2}{49,5} = 2,78 \text{ kN.m/m}$$

$$X_b = \frac{5,50 \times 5,00^2}{19,4} = 7,09 \text{ kN.m/m}$$

• Flecha Elástica (*)

$$f_1 = 0,015 \text{ (Tabela 3.10)}$$

$$f = f_1 \frac{p \cdot a^4}{E_{cs} \cdot h^3} = 0,015 \times \frac{5,50 \times 5,00^4}{2,42 \times 10^7 \times 0,1^3} = 0,0021 \text{ m} = 0,21 \text{ cm}$$

$$f_{adm} = 500/250 = 2,00 \text{ cm} \rightarrow 0,21 \text{ cm} < 2,00 \text{ cm OK!}$$

(*) Ver observação no Modelo 1 (Laje tipo A).

5.2.2 Resumo dos resultados obtidos pelo método de tabelas (TEPEDINO)

A Tabela 5.1 apresenta um resumo dos resultados para os momentos fletores máximos e flecha elástica imediata para lajes isoladas, obtidos através do cálculo utilizando as tabelas de Tepedino.

Tabela 5.1 – Momentos fletores máximos e flecha elástica utilizando as tabelas de Tepedino

Laje Tipo	Espessura (cm)	Carga (kN/m ²)	Momentos Positivos		Momentos Negativos		Flecha (cm)
			M _a (kN.m/m)	M _b (kN.m/m)	X _a (kN.m/m)	X _b (kN.m/m)	
A	10	5,50	5,83	5,83	-	-	0,68
B	10	5,50	4,88	4,00	11,55	-	0,47
C	10	5,50	3,70	3,70	9,62	9,62	0,36
D	10	5,50	4,24	11,04	13,11	-	0,33
E	10	5,50	4,72	3,79	11,57	10,25	0,26
F	10	5,50	2,78	2,78	7,09	7,09	0,21

5.4 Cálculo pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) utilizando o Programa SAP2000

Para análise do modelo no SAP2000 foram considerados 7 modelos de lajes maciças em concreto armado com espessura de 10 cm, apoiadas em elementos de vigas, conforme apresentado na Figura 5.8. A análise consistiu em avaliar o comportamento estrutural da placa considerando os apoios deformáveis, com variação da altura das vigas para os valores de 20, 40, 60, 80 e 100 cm.

Com o objetivo de demonstrar a relação entre a altura da viga com o vão adotado, na análise da laje integrada Modelo 1A foi analisada também a viga com seção 20x50 cm, que corresponde à uma altura de 10% do vão (L=5,00 m).

Os modelos de laje integrada 1A e 1B são compostos por um sistema de 4 lajes simétricas com dimensões de 5 x 5 m, apoiadas em vigas. Salienta-se que, para o modelo de laje integrada 1A, foi realizada a análise considerando a presença de um pilar central no cruzamento das vigas. Já para o modelo de laje integrada 1B, o pilar central foi desprezado, conforme ilustrado na Figura 5.8 a seguir.

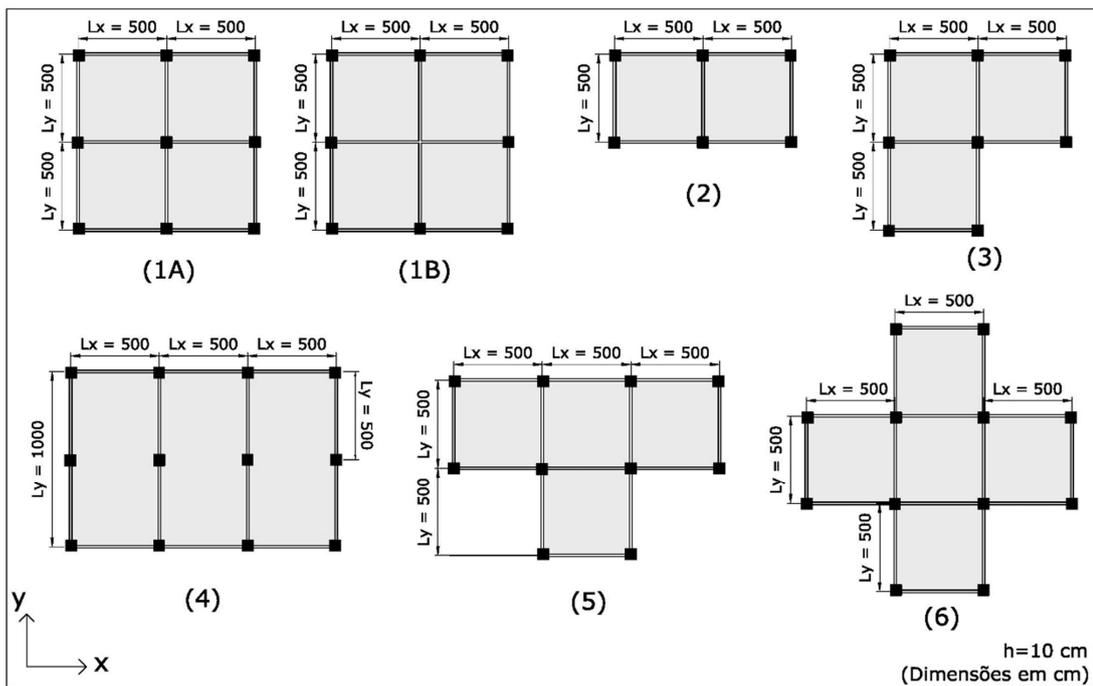


Figura 5.8 – Modelos de laje integrada analisados: (1A), (1B), (3) e (4) laje com duas continuidades, (2) laje com uma continuidade, (5) laje com três continuidades e (6) laje com quatro continuidades. (Fonte: Autor)

Em apenas dois nós, correspondente a pilares, foram impedidos deslocamentos lineares no plano XY do plano médio da placa, sendo um nó na direção X e outro na direção Y. Em todos os pilares foram impedidos deslocamentos verticais (Z), mantendo livres os três deslocamentos angulares.

Na modelagem foi adotada malha da laje com elementos “shell” de 50x50 cm no plano XY, conforme ilustrada na Figura 5.9.

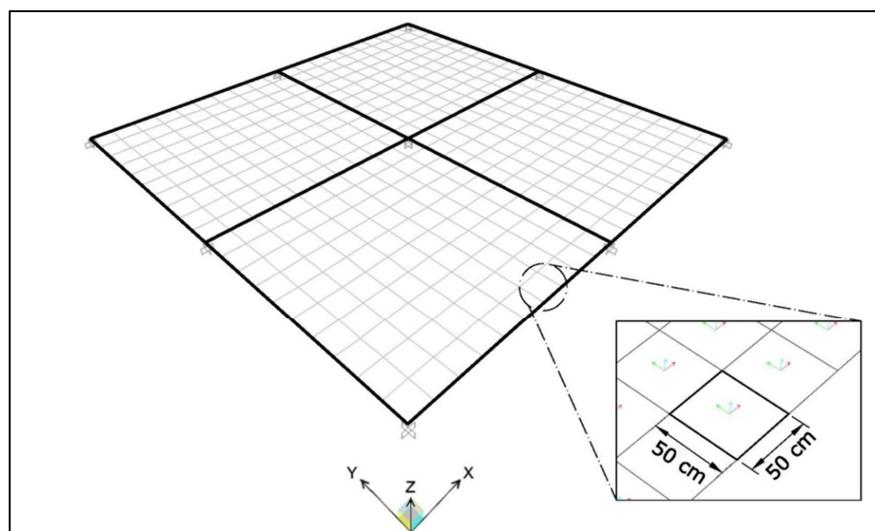


Figura 5.9 – Malha da laje (Fonte: Autor)

Os resultados obtidos para os modelos de laje integrada analisados pelo MEF são apresentados na Tabela 5.2. São apresentados também os resultados obtidos para a laje isolada correspondente, calculada por tabelas (Tepedino). Os diagramas dos momentos fletores e dos deslocamentos obtidos no programa SAP2000 são apresentados no Apêndice A.

Tabela 5.2 – Resultados obtidos nas lajes integradas utilizando MEF

Espessura Laje (cm)	Carga (kN/m ²)	Seção Viga (cm)	Momentos Positivos (kN.m/m)		Momentos Negativos (kN.m/m)		Flecha (cm)
			M _x	M _y	X _x	X _y	
MODELO 1A (com pilar central) (Tepedino - Laje Tipo "C": M_a=M_b=3,70 / X_a=X_b=9,62 / f=0,36)							
10	5,50	20 x 20	8,42	8,42	-28,86	-28,86	1,21
10	5,50	20 x 40	4,88	4,88	-8,39	-8,39	0,57
10	5,50	20 x 50	4,44	4,44	-7,89	-7,89	0,46
10	5,50	20 x 60	4,18	4,18	-8,16	-8,16	0,39
10	5,50	20 x 80	3,90	3,90	-8,31	-8,31	0,34
10	5,50	20 x 100	3,75	3,75	-8,30	-8,30	0,31
MODELO 1B (sem pilar central) (Tepedino - Laje Tipo "C": M_a=M_b=3,70 / X_a=X_b=9,62 / f=0,36)							
10	5,50	20 x 20	22,77	22,77	-26,70	-26,70	9,95
10	5,50	20 x 40	11,81	11,81	-5,61	-5,61	4,98
10	5,50	20 x 60	6,14	6,14	-3,93	-3,93	2,26
10	5,50	20 x 80	4,84	4,84	-6,02	-6,02	1,14
10	5,50	20 x 100	4,27	4,27	-6,99	-6,99	0,65
MODELO 2 (Tepedino - Laje Tipo "B": M_a=4,88 / M_b=4,00 / X_a=11,55 / f=0,47)							
10	5,50	20 x 20	7,45	13,83	-17,27	-4,21	1,97
10	5,50	20 x 40	5,29	5,29	-6,10	-6,09	0,87
10	5,50	20 x 60	4,82	5,05	-8,40	-1,65	0,55
10	5,50	20 x 80	4,56	4,36	-9,05	-2,29	0,44
10	5,50	20 x 100	4,37	4,04	-9,18	-2,76	0,39
MODELO 3 (Tepedino - Laje Tipo "C": M_a=M_b=3,70 / X_a=X_b=9,62 / f=0,36)							
10	5,50	20 x 20	10,67	10,67	-25,35	-25,35	1,57
10	5,50	20 x 40	6,10	6,10	-7,60	-7,60	0,72
10	5,50	20 x 60	4,78	4,78	-8,61	-8,61	0,50
10	5,50	20 x 80	4,55	4,55	-8,87	-8,87	0,42
10	5,50	20 x 100	4,37	4,37	-8,87	-8,87	0,38
MODELO 4 (Tepedino - Laje Tipo "D": M_a=4,24 / M_b=11,04 / X_a=13,11 / f=0,33)							
10	5,50	20 x 20	8,90	11,11	-22,90	-6,47	1,29
10	5,50	20 x 40	7,81	6,03	-21,75	-1,15	0,67
10	5,50	20 x 60	7,52	4,25	-21,00	-0,39	0,49
10	5,50	20 x 80	7,48	3,63	-20,36	-0,20	0,45
10	5,50	20 x 100	7,54	3,38	-19,65	-0,10	0,44
MODELO 5 (Tepedino - Laje Tipo "E": M_a=4,72 / M_b=3,79 / X_a=11,57 / X_b=10,25 / f=0,26)							
10	5,50	20 x 20	9,59	10,43	-22,74	-23,51	1,66
10	5,50	20 x 40	5,65	6,12	-6,97	-8,04	0,76
10	5,50	20 x 60	4,89	4,81	-8,14	-8,49	0,52
10	5,50	20 x 80	4,60	4,54	-8,47	-8,51	0,43
10	5,50	20 x 100	4,40	4,37	-8,54	-8,45	0,39
MODELO 6 (Tepedino - Laje Tipo "F": M_a=M_b=2,78 / X_a=X_b=7,09 / f=0,21)							
10	5,50	20 x 20	9,74	9,74	-20,88	-20,87	1,38
10	5,50	20 x 40	5,69	5,69	-7,29	-7,29	0,67
10	5,50	20 x 60	4,86	4,86	-7,97	-7,97	0,49
10	5,50	20 x 80	4,59	4,59	-8,12	-8,12	0,42
10	5,50	20 x 100	4,40	4,40	-8,14	-8,14	0,39

6 ANÁLISE DOS RESULTADOS

6.1 Geral

Neste item é apresentada uma análise dos resultados obtidos para cada modelo com a variação da rigidez dos apoios e uma análise comparativa com os resultados obtidos através do método simplificado (Tepedino). Para efeito de comparação, foi realizada a correspondência entre os tipos de lajes isoladas com os modelos de lajes integradas, conforme apresentado no Quadro 6.1 a seguir, e ilustrado na Figura 4.1 (item 4). De forma análoga, os resultados obtidos para os modelos de laje integrada foram comparados com os resultados calculados para as lajes isoladas correspondentes.

Quadro 6.1 – Modelos equivalentes de laje (MEF x Tepedino)

Laje Integrada (MEF)	Laje Isolada Correspondente (TEPEDINO)
Modelo 1A	Laje Tipo C
Modelo 1B	
Modelo 3	
Modelo 2	Laje Tipo B
Modelo 4	Laje Tipo D
Modelo 5	Laje Tipo E
Modelo 6	Laje Tipo F

A Tabela 5.2 (item 5) apresenta um resumo geral dos resultados obtidos para todos os modelos de laje integrada analisados neste estudo pelo Método dos Elementos Finitos (MEF).

É importante destacar que os deslocamentos e esforços máximos calculados pelo MEF para o conjunto de lajes integradas do Modelo 1B (sem pilar central), foram obtidos na região do cruzamento das vigas de apoio central (ver Apêndice A.2). Dessa forma, a ausência do pilar central neste modelo, faz que com o sistema de placas integradas apresente um comportamento estrutural similar ao de uma laje com dimensões 10 x 10 m. Já para o modelo de laje isolada correspondente, Tipo C, analisado pelo método simplificado (Tepedino), os deslocamentos e esforços máximos obtidos ocorrem no centro da laje. Desse modo, os resultados apresentados em ambos os casos, foram obtidos a partir de pontos distintos em cada estrutura. No entanto, observa-se que, à medida que se enrijece as vigas de apoio, nota-se

que os resultados dos deslocamentos e dos esforços máximos do conjunto (Modelo 1B), aproximam-se dos resultados obtidos para a laje isolada (Tipo C) analisada pelo método simplificado.

Nas lajes integradas Modelos “2” e “4” analisados pelo MEF (Tabela 5.2) observa-se que foram obtidos momentos negativos (X_x e X_y) entre as placas no apoio central (viga). Esse efeito deve-se à influência do coeficiente de Poisson ($\nu=0,2$) que relaciona a deformação transversal e a longitudinal para o concreto. Desse modo, quando há momento na direção “x”, o efeito de Poisson faz com que apareça momento também na direção ‘y’. Segundo o item 8.2.9 da NBR-6118:2014 para tensões de compressão inferiores a 50% de f_c (ruptura à compressão) e para tensões inferiores a resistência à tração f_{ct} , o coeficiente de Poisson e o módulo de elasticidade transversal são dados respectivamente por: $\nu=0,2$ e $G \cong 0,42 \times E_{cs}$. O mesmo não ocorre para as lajes isoladas Tipos “A”, “B” e “D” analisadas pelo método simplificado (Tabela 5.1), tendo em vista que o cálculo por tabelas (Tepedino) desconsidera os efeitos de Poisson.

6.2 Modelos 1A e 1B

A Tabela 6.1 apresenta os resultados obtidos para a laje integrada Modelo 1A e para laje isolada Tipo C. Nesse caso de laje integrada com o pilar central, com o aumento da rigidez das vigas, pode-se observar que os momentos positivos máximos obtidos no centro das lajes nas direções “x” e “y”, apresentaram variação de 8,42 kN.m/m para 3,75 kN.m/m, com a diferença de 4,67 kN.m/m que corresponde à uma redução de 55,5% em relação ao valor máximo. Os momentos negativos sofreram variação de -28,86 kN.m/m para -8,30 kN.m/m, com a diferença de 20,56 kN.m/m, correspondente a 74,4% de redução em relação ao valor máximo. Já as flechas máximas obtidas no centro da laje, sofreram variação de 1,21 cm para 0,31 cm, com a diferença de 0,9 cm, que correspondente à uma redução de 74,4% em relação ao valor máximo. O comportamento estrutural desta placa é comparável ao modelo de laje cogumelo, conforme evidenciado nos diagramas apresentados no Apêndice A.1 (Figura A.1) para a situação com vigas com altura $h=20$ cm.

Tabela 6.1 – Resultados obtidos para laje integrada Modelo 1A (MEF) e para laje isolada Tipo C (Tepedino)

Espessura Laje (cm)	Carga (kN/m ²)	Seção Viga (cm)	Momentos Positivos		Momentos Negativos		Flecha (cm)
			M _x (kN.m/m)	M _y (kN.m/m)	X _x (kN.m/m)	X _y (kN.m/m)	
LAJE INTEGRADA MODELO 1A (MEF)							
10	5,50	20 x 20	8,42	8,42	-28,86	-28,86	1,21
10	5,50	20 x 40	4,88	4,88	-8,39	-8,39	0,57
10	5,50	20 x 50	4,44	4,44	-7,89	-7,89	0,46
10	5,50	20 x 60	4,18	4,18	-8,16	-8,16	0,39
10	5,50	20 x 80	3,90	3,90	-8,31	-8,31	0,34
10	5,50	20 x 100	3,75	3,75	-8,30	-8,30	0,31
LAJE ISOLADA TIPO C (TEPEDINO)							
10	5,50	-	3,70	3,70	-9,62	-9,62	0,36

Em comparação com o cálculo pelo método simplificado, é possível constatar que os momentos fletores positivos máximos obtidos pelo MEF, considerando as vigas de apoio com seção a partir de 20x60 cm, apresentam pouca variação dos resultados em relação à laje isolada Tipo C (Tabela 6.1, Tepedino). Já os momentos fletores negativos máximos obtidos na análise MEF apresentam valores inferiores, cerca de 15% em relação à laje isolada correspondente (Tipo C). A variação dos valores dos momentos fletores e deslocamentos máximos obtidos com o MEF e um comparativo com as tabelas de Tepedino, em função da variação da altura (H) dos apoios, é mostrados nos respectivos gráficos das figuras 6.1 e 6.2. Ressalta-se que devido à simetria deste modelo de placas, os momentos fletores máximos nas direções “x” e “y” são equivalentes.

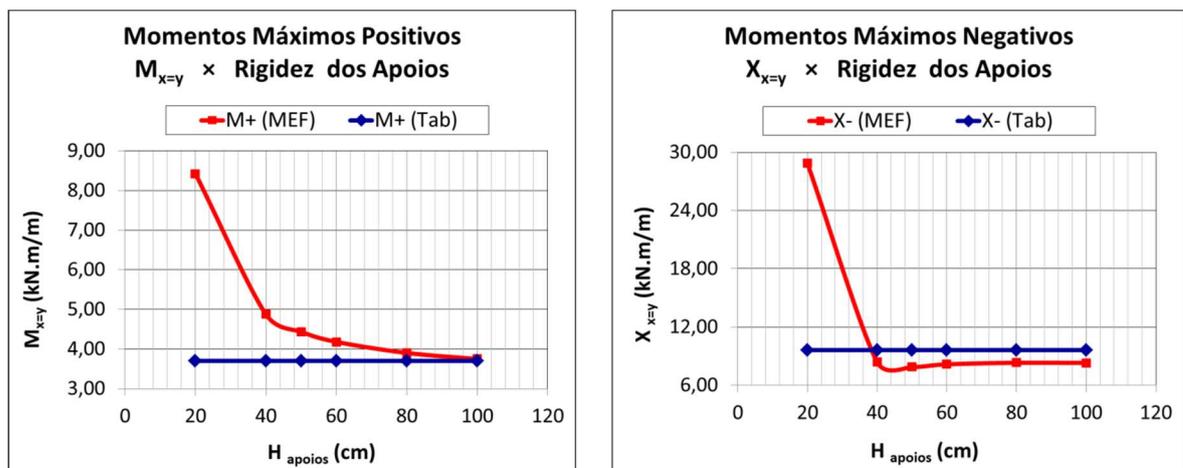


Figura 6.1 – Momentos positivos (E) e negativos (D) máximos x Rigidez dos apoios (Modelo 1A)

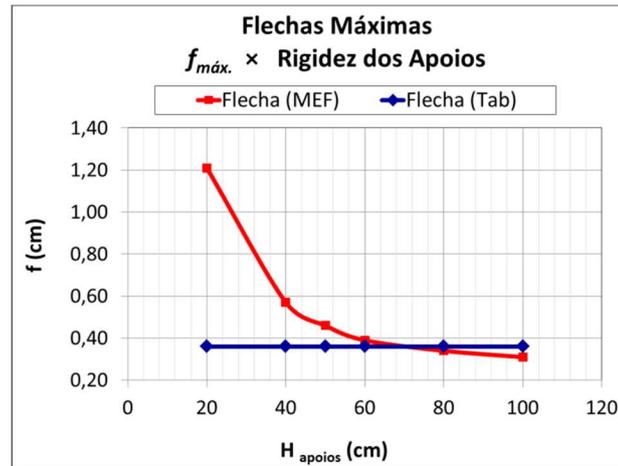


Figura 6.2 – Deslocamentos máximos x Rigidez dos apoios (Modelo 1A)

A Tabela 6.2 apresenta os resultados obtidos para a laje integrada Modelo 1B (sem o pilar central) e para laje isolada Tipo C. Nesse caso de laje integrada sem o pilar central, com o aumento da rigidez das vigas, pode-se observar que os momentos positivos máximos obtidos no centro das lajes nas direções “x” e “y”, apresentaram variação de 22,77 kN.m/m para 4,27 kN.m/m, com a diferença de 18,5 kN.m/m que corresponde à uma redução de 81,2% em relação ao valor máximo. Os momentos negativos sofreram variação de -26,7 kN.m/m para -6,99 kN.m/m, com a diferença de 19,71 kN.m/m, correspondente a 73,8% em relação ao valor máximo. Já as flechas máximas obtidas no centro da laje, sofreram variação de 9,95 cm para 0,65 cm, com a diferença de 9,3 cm, correspondente à uma redução de 93,5% em relação ao valor inicial. O comportamento estrutural desta placa é comparável ao modelo de laje cogumelo, conforme evidenciado nos diagramas apresentados no Apêndice A.2 (Figura A.2) para a situação com vigas com altura $h=20$ cm.

Tabela 6.2 – Resultados obtidos para laje integrada Modelo 1B (MEF) e para laje isolada Tipo C (Tepedino)

Espessura Laje (cm)	Carga (kN/m ²)	Seção Viga (cm)	Momentos Positivos		Momentos Negativos		Flecha (cm)
			M _x (kN.m/m)	M _y (kN.m/m)	X _x (kN.m/m)	X _y (kN.m/m)	
LAJE INTEGRADA MODELO 1B (MEF)							
10	5,50	20 x 20	22,77	22,77	-26,70	-26,70	9,95
10	5,50	20 x 40	11,81	11,81	-5,61	-5,61	4,98
10	5,50	20 x 60	6,14	6,14	-3,93	-3,93	2,26
10	5,50	20 x 80	4,84	4,84	-6,02	-6,02	1,14
10	5,50	20 x 100	4,27	4,27	-6,99	-6,99	0,65
LAJE ISOLADA TIPO C (TEPEDINO)							
10	5,50	-	3,70	3,70	-9,62	-9,62	0,36

Assim como no modelo com o pilar central (Modelo 1A) apresentado anteriormente, é possível constatar que os momentos fletores máximos obtidos na análise MEF, considerando a laje apoiada em vigas com seção de 20x100 cm, permanecem com resultados superiores em relação à laje isolada Tipo C (Tabela 6.2, Tepedino). Já os momentos fletores negativos máximos obtidos na análise MEF apresentam valores inferiores, cerca de 15% em relação à laje isolada correspondente (Tipo C). A variação dos valores dos momentos fletores e deslocamentos máximos obtidos com o MEF e um comparativo com as tabelas de Tepedino, em função da variação da altura (H) dos apoios, são mostrados nos respectivos gráficos das Figuras 6.3 e 6.4. Ressalta-se que devido à simetria deste modelo de placas, os momentos fletores máximos nas direções “x” e “y” são equivalentes.

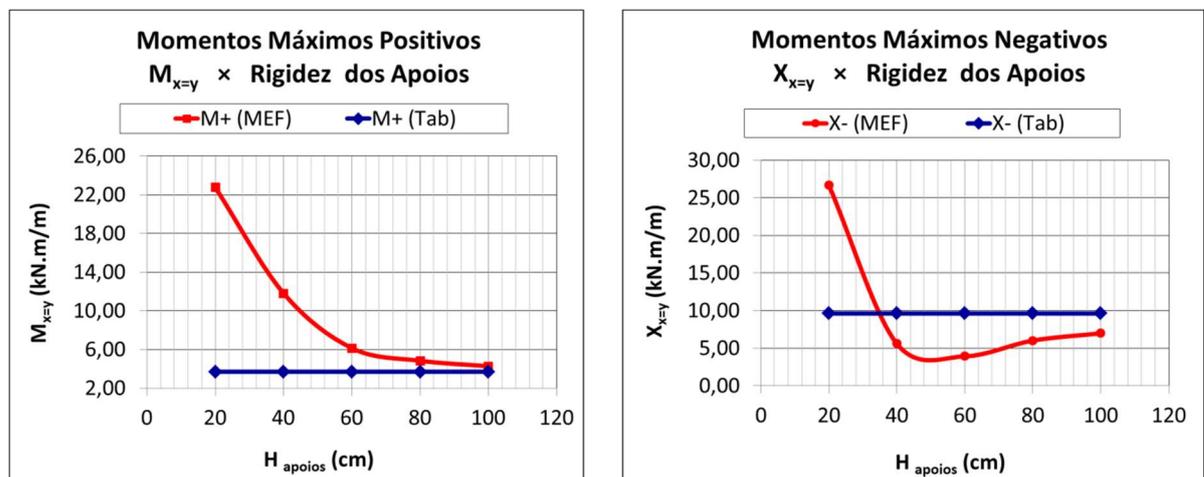


Figura 6.3 – Momentos positivos (E) e negativos (D) máximos x Rigidez dos apoios (Modelo 1B)

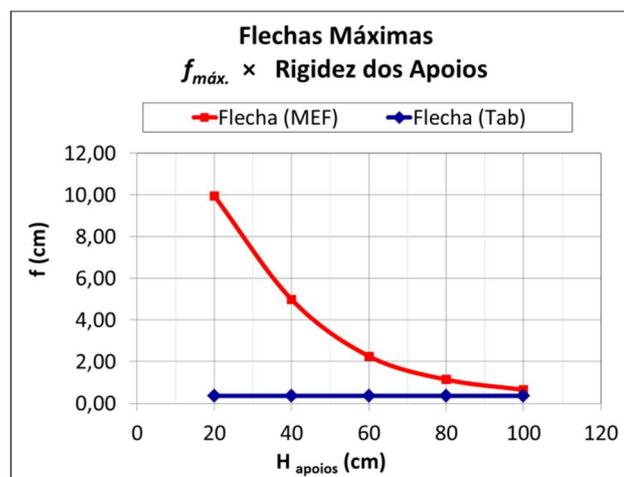


Figura 6.4 – Momentos e deslocamentos máximos x Rigidez dos apoios (Laje Modelo 1B)

As Figuras 6.5 e 6.6 apresentam a deformada para as lajes integradas modelos 1A e 1B modeladas em Elementos Finitos, obtida com os apoios com seção 20x20 cm e 20x100 cm.

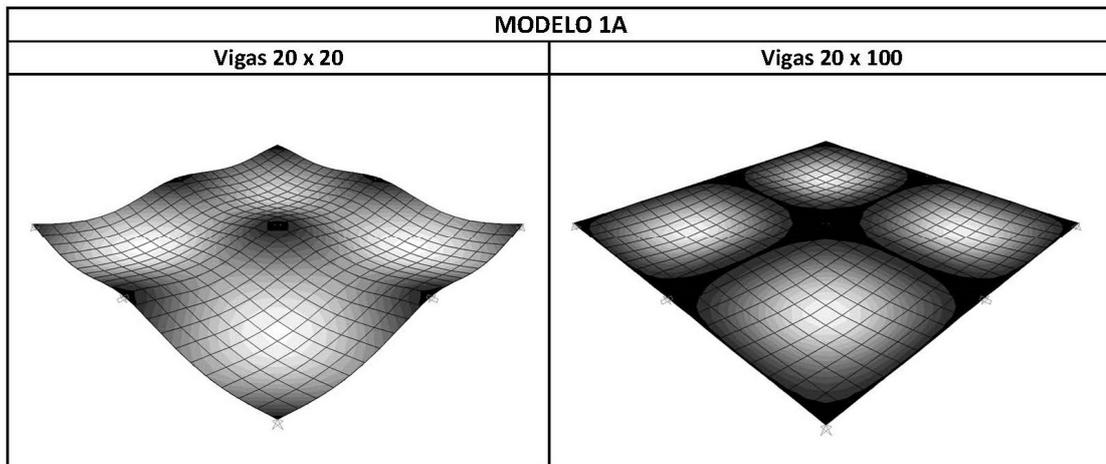


Figura 6.5 – Deformada das lajes Modelo 1A (com pilar central) (Fonte: Autor)

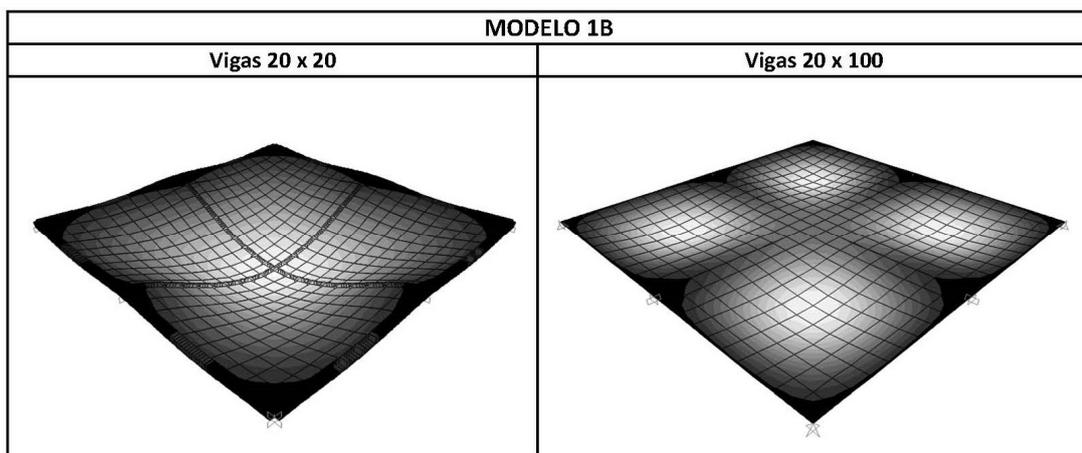


Figura 6.6 – Deformada das lajes Modelo 1B (sem pilar central) (Fonte: Autor)

6.3 Modelos 2, 3, 4, 5 e 6 (MEF x Tepedino)

Nas Tabelas 6.3 a 6.5 a seguir, são apresentados os resultados obtidos pelo MEF para os modelos de laje integrada 2, 3, 4, 5 e 6. Os valores dos momentos e deslocamentos máximos, assim como a variação dos resultados mostrados nas tabelas, referem-se aos modelos considerando os apoios (vigas) com seção de 20x20 cm e 20x100 cm. O delta (Δ) apresentado nas referidas tabelas corresponde à diferença entre os valores máximo e mínimo. Ressalta-se que os resultados para os demais tipos de apoios são apresentados na Tabela 5.2.

Tabela 6.3 – Resultados obtidos para momentos máximos positivos (MEF)

Modelo de Laje	Seção Viga (cm)	M_x (kN.m/m)	Diferença entre maior e menor valor	Δ (%)	M_y (kN.m/m)	Diferença entre maior e menor valor	Δ (%)
2	20 x 20	7,45	3,08	41,3	13,83	9,79	70,8
	20 x 100	5,29			5,29		
3	20 x 20	10,67	6,30	59,0	10,67	6,30	59,0
	20 x 100	6,10			6,10		
4	20 x 20	8,90	1,36	15,3	11,11	7,73	69,6
	20 x 100	7,54			3,38		
5	20 x 20	9,59	5,19	54,1	10,43	6,06	58,1
	20 x 100	5,65			6,12		
6	20 x 20	9,74	5,34	54,8	9,74	5,34	54,8
	20 x 100	5,69			5,69		

Tabela 6.4 – Resultados obtidos para momentos máximos negativos (MEF)

Modelo de Laje	Seção Viga (cm)	X_x (kN.m/m)	Diferença entre maior e menor valor	Δ (%)	X_y (kN.m/m)	Diferença entre maior e menor valor	Δ (%)
2	20 x 20	-17,27	8,09	46,8	-4,21	1,45	34,4
	20 x 100	-9,18			-2,76		
3	20 x 20	-25,35	16,48	65,0	-25,35	16,48	65,0
	20 x 100	-8,87			-8,87		
4	20 x 20	-22,90	3,25	14,2	-6,47	6,37	98,5
	20 x 100	-19,65			-0,10		
5	20 x 20	-22,74	14,20	62,4	-23,51	15,06	64,1
	20 x 100	-8,54			-8,45		
6	20 x 20	-20,88	12,74	61,0	-20,87	12,73	61,0
	20 x 100	-8,14			-8,14		

Tabela 6.5 – Resultados obtidos para deslocamentos máximos (MEF)

Modelo de Laje	Seção Viga (cm)	Flecha (cm)	Diferença entre maior e menor valor	Δ (%)
2	20 x 20	1,97	1,58	80,2
	20 x 100	0,39		
3	20 x 20	1,57	1,19	75,8
	20 x 100	0,38		
4	20 x 20	1,29	0,85	65,9
	20 x 100	0,44		
5	20 x 20	1,66	1,27	76,5
	20 x 100	0,39		
6	20 x 20	1,38	0,99	71,7
	20 x 100	0,39		

De modo geral, os resultados obtidos para todos os modelos de laje isolada analisados neste estudo, pelo método simplificado (Tepedino), apresentam resultados de momentos fletores

negativos máximos superiores e momentos fletores positivos máximos com valores inferiores em relação aos resultados obtidos para os modelos correspondentes de laje integrada utilizando o MEF. Já os deslocamentos máximos, nota-se uma tendência para convergência dos resultados obtidos (MEF x Tepedino) a medida que se aumenta a rigidez das vigas.

Os gráficos comparativos (MEF x Tepedino) e os diagramas dos momentos fletores e deslocamentos para todos os modelos de laje são apresentados no Apêndice A.

6.4 Cálculo do modelo de laje isolada Tipo F (MEF x Tabelas)

Foi realizada a análise da laje isolada Tipo F (Figura 6.9) pelo Método dos Elementos Finitos, considerando os pontos nodais periféricos correspondentes aos apoios (vigas e pilares), com translação e rotação impedidos nas três direções (X, Y e Z), caracterizando-os como engaste perfeito.

Essa análise tem como objetivo comparar os resultados obtidos com o MEF em relação ao método simplificado (Tepedino). Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 6.7 a seguir.

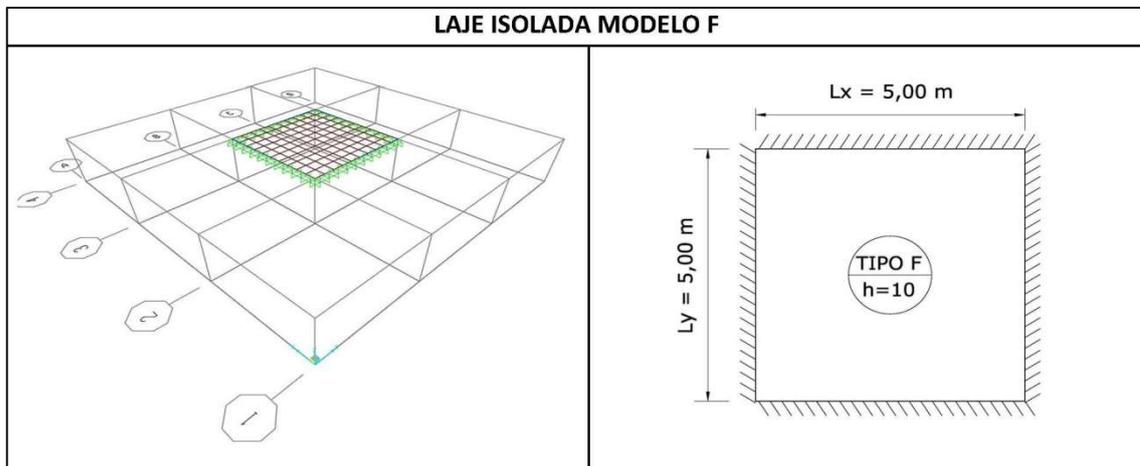


Figura 6.9 – Laje isolada Tipo F – MEF x Tepedino (Fonte: Autor)

Tabela 6.7 – Resultados obtidos para laje isolada Tipo F utilizando MEF e Tepedino

Espessura Laje (cm)	Carga (kN/m ²)	Seção Viga (cm)	Momentos Positivos		Momentos Negativos		Flecha (cm)
			Mx (kN.m/m)	My (kN.m/m)	Xx (kN.m/m)	Xy (kN.m/m)	
LAJE ISOLADA TIPO F (MEF)							
10	5,50	20 x 100	3,02	3,02	7,00	7,00	0,20
LAJE ISOLADA TIPO F (TEPEDINO)							
10	5,50	-	2,78	2,78	7,09	7,09	0,21

A partir da análise dos resultados obtidos (Tabela 6.5), percebe-se uma variação em torno de 10% nos momentos fletores e cerca de 5% nos deslocamentos.

7 CONCLUSÕES

A partir deste estudo, pode-se concluir que nos diversos modelos estruturais de placas analisados pelo Método dos Elementos Finitos fica evidente a influência da rigidez dos apoios (vigas) na determinação dos esforços e deslocamentos nas lajes. Tal observação não seria possível através do método simplificado (tabelas), uma vez que o mesmo despreza qualquer tipo de interação entre as placas ou mesmo com os apoios.

Para o cálculo de laje através do método simplificado (tabelas), admite-se que a mesma esteja apoiada em elementos extremamente rígidos ou simplesmente indeformáveis. Conforme apresentado neste estudo, a condição de rigidez da borda das placas é alcançada com o aumento da inércia das vigas de apoio, demonstrada na modelagem pelo MEF. Dessa forma, nas análises realizadas, à medida que se aumenta a rigidez das vigas de apoio, nota-se a redução da diferença entre os resultados obtidos (momentos fletores e deslocamentos) com o uso de tabelas e em relação ao MEF, conforme ilustrado nos gráficos comparativos no Apêndice A.

Em condições normais, o critério inicial comumente adotado para a escolha da altura da viga (H) em concreto armado seria 10% do vão adotado. Para o Modelo 1A (com o pilar central) analisado neste estudo, com vãos de 5,0 metros, a altura $H \geq L/10$ representou um parâmetro adequado, tendo em vista que os resultados obtidos são satisfatórios na análise estrutural. Já para o Modelo 1B, com a retirada do pilar central, esse critério representaria uma altura $H=L/10=1,00$ m para as vigas centrais, enquanto para as vigas periféricas permaneceriam com altura $H=50$ cm.

O critério de $H \geq L/10$ para definição da altura da viga, pode ser aplicado em modelos de placas integradas que apresentam pilares nos cruzamentos de vigas. Quando isso não ocorre (Modelo 1B), essa análise precisa ser mais bem estudada.

É importante ressaltar a importância da influência dos apoios na determinação dos esforços de elementos de placas integradas, tendo em vista que quanto mais rigidez nos apoios no modelo estrutural, mais os resultados aproximam do modelo de placa isolada, e conseqüentemente minimizam as deformações.

Com a utilização do Método dos Elementos Finitos nos diversos modelos analisados é possível notar a participação mais efetiva das lajes na interação dos esforços e deslocamentos com os elementos de apoio (vigas).

8 BIBLIOGRAFIA

ARAÚJO, J. M. de. Método simplificado para cálculo de lajes maciças apoiadas em vigas flexíveis: validação por meio da análise não linear. Revista Teoria e Prática na Engenharia Civil, volume 9, n. 14, Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2009. Disponível em <http://www.editoradunas.com.br/revistatpec/Art8_N14.pdf>.

BUENO, Jeferson Rafael. Influência da Flexibilidade de Vigas de Apoio no Projeto de Lajes Maciças de Concreto Armado. Dissertação (mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PPGEC, da Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013.

CSI, *Computers and Structures INC*. Manual do software SAP2000 “*CSI Analysis Reference Manual*”, versão 16.0.0, Berkeley, California, USA, 2016.

DUARTE, Heraldo. Aspectos da Análise Estrutural das Lajes de Edifícios de Concreto Armado. Dissertação (mestrado) - da Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, 1998.

GONZALES, Rogério Luciano Miziara. Análise de Lajes pela Teoria das Charneiras Plásticas e Comparação de Custos entre Lajes Maciças e Lajes Treliçadas. 159 f. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, 1997.

NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

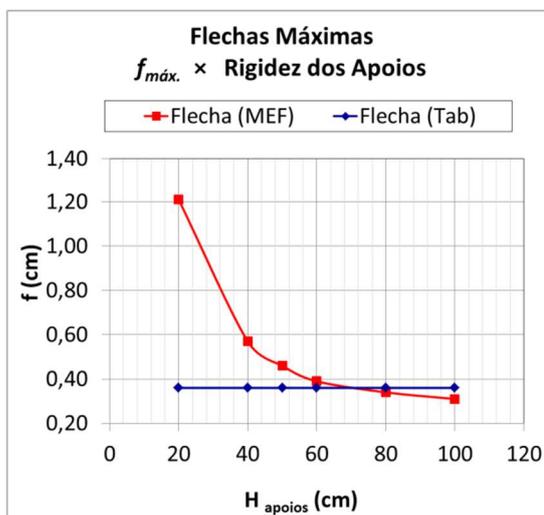
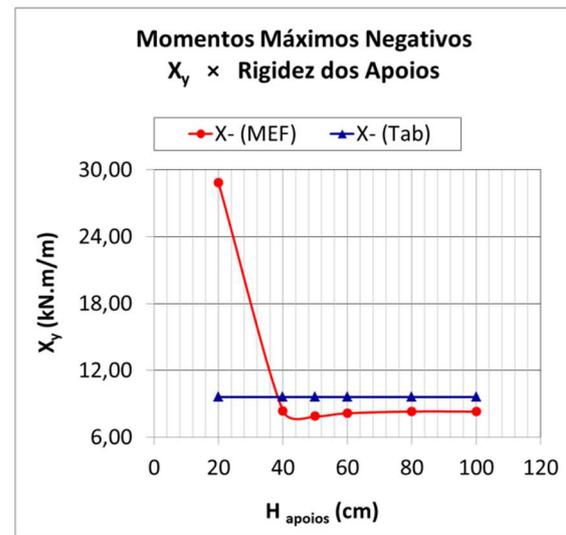
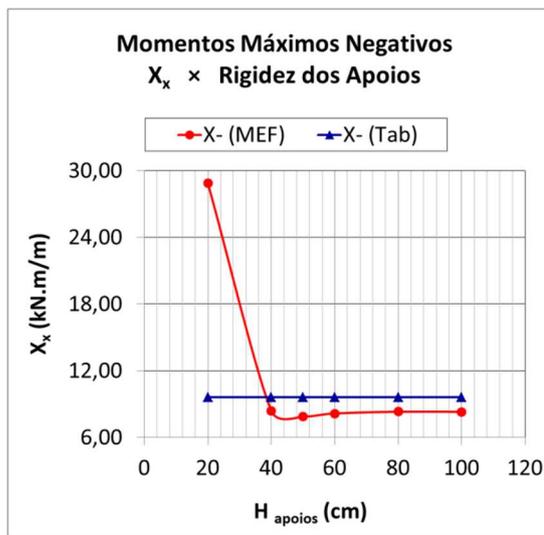
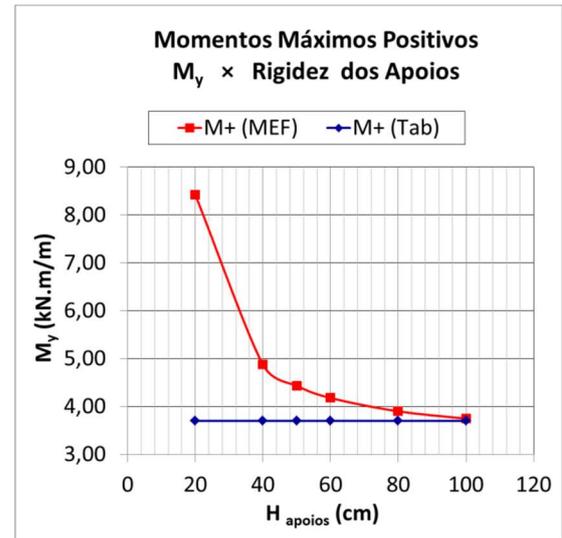
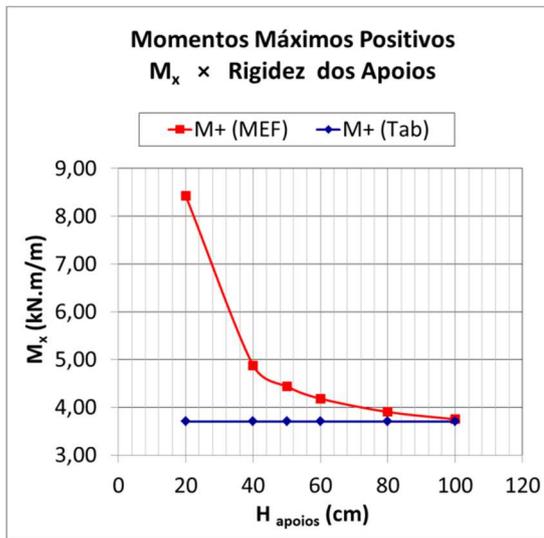
REIS, E. M. Dos. Análise de pavimentos de edifícios utilizando a analogia de grelha. 139 f. Dissertação (mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - PPGEC, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2007.

SILVA, Ney Amorim; Apostila do Curso de Especialização em Estruturas – Concreto Armado I. Universidade Federal de Minas Gerais UFMG. Belo Horizonte, 2015. *apud* TEPEDINO, José Miranda – Tabelas par Cálculo de Lajes (1980).

APÊNDICE A

No presente Apêndice são apresentados os gráficos comparativos com os resultados obtidos nas análises das lajes maciças em concreto armado pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) e pelo método simplificado (Tepedino). São apresentados também os diagramas dos momentos fletores positivos (M_x e M_y) e negativos (X_x e X_y), e os deslocamentos ($f_{máx.}$) para os modelos de laje integrada, obtidos através do MEF no programa SAP2000 (Figuras A.1 a A.7).

A.1 Laje Integrada Modelo 1A



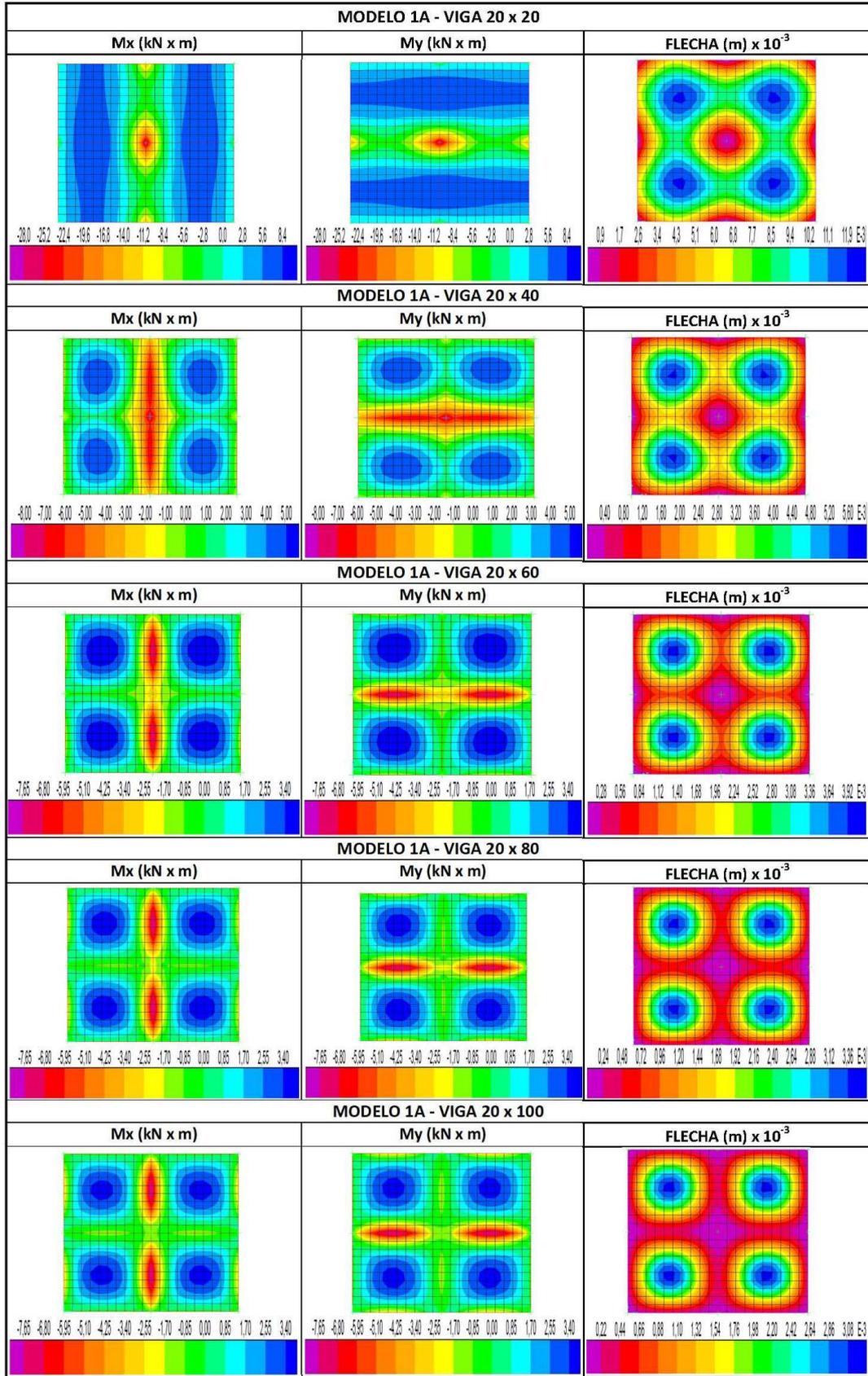
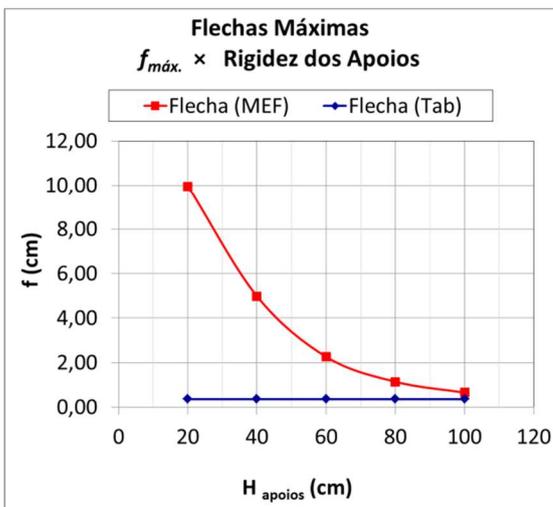
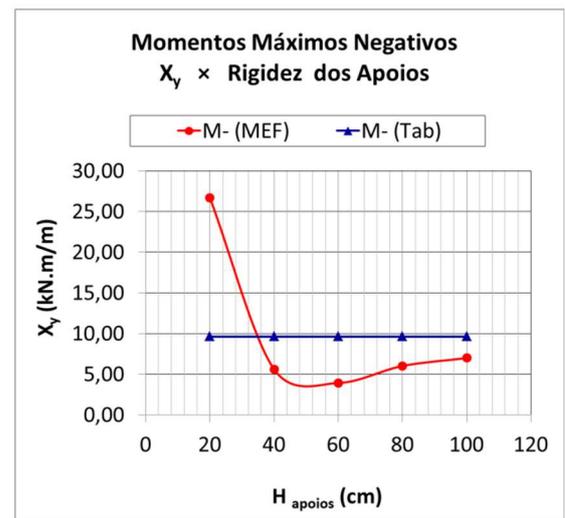
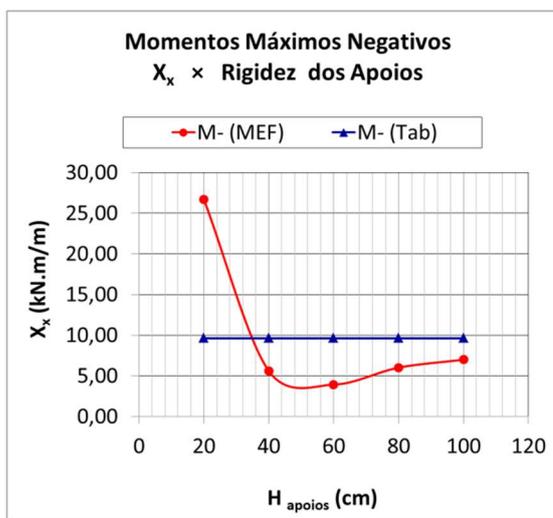
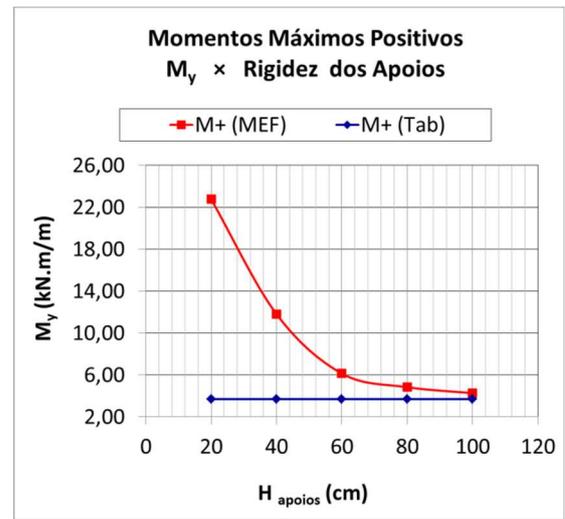
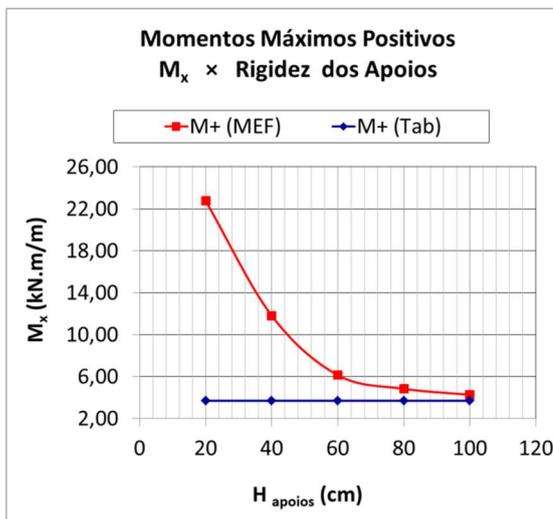


Figura A.1 - Laje Integrada Modelo 1A – Diagramas

A.2 Laje Integrada Modelo 1B



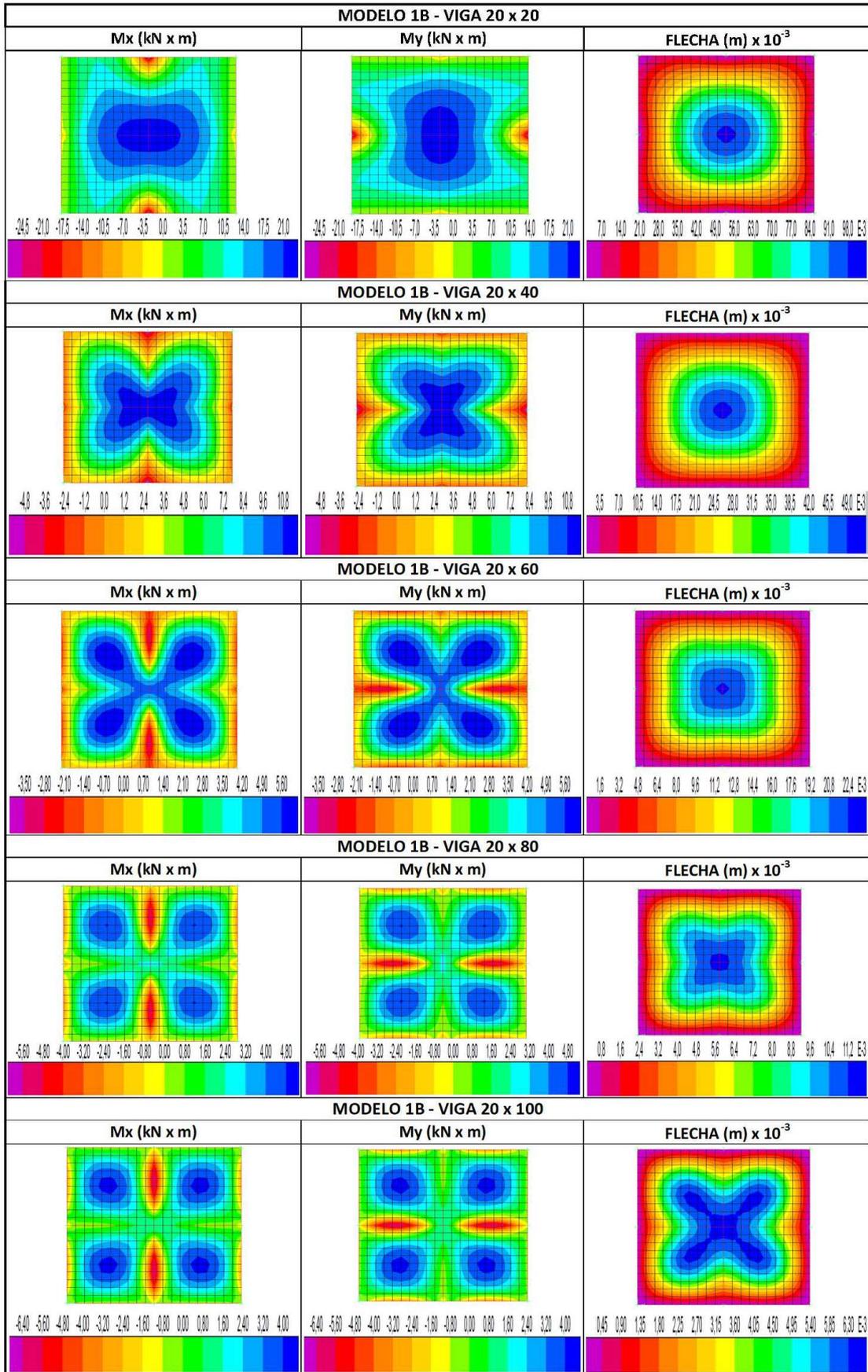
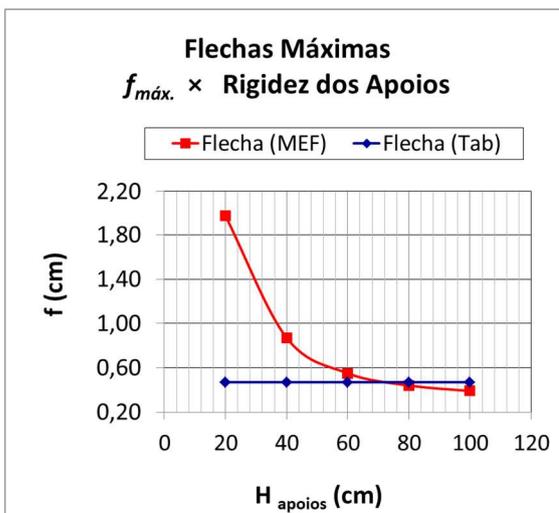
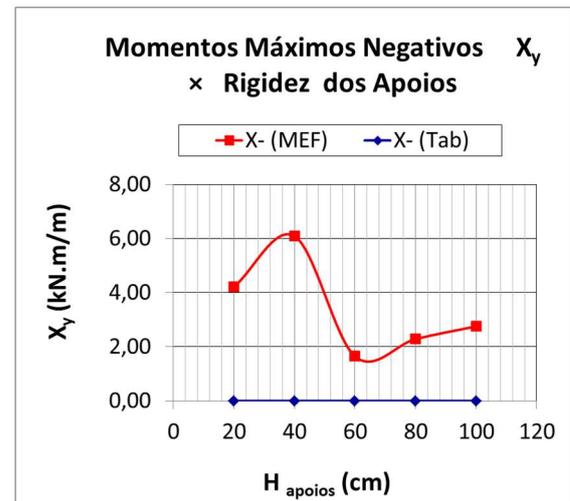
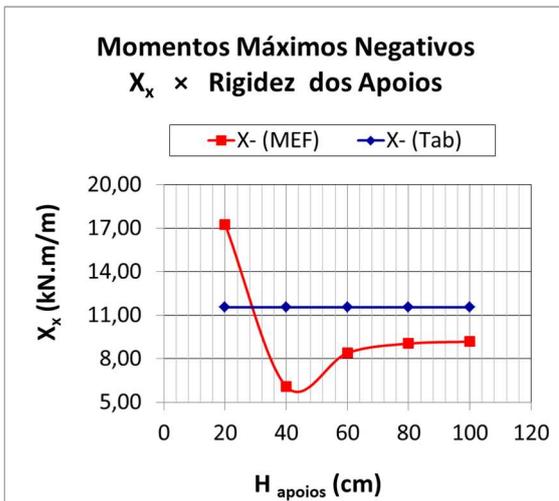
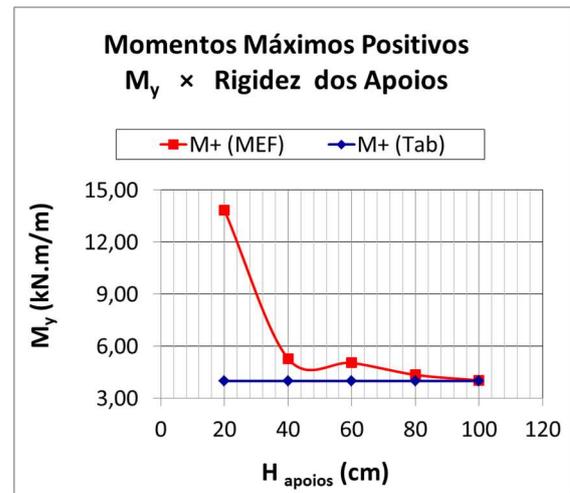
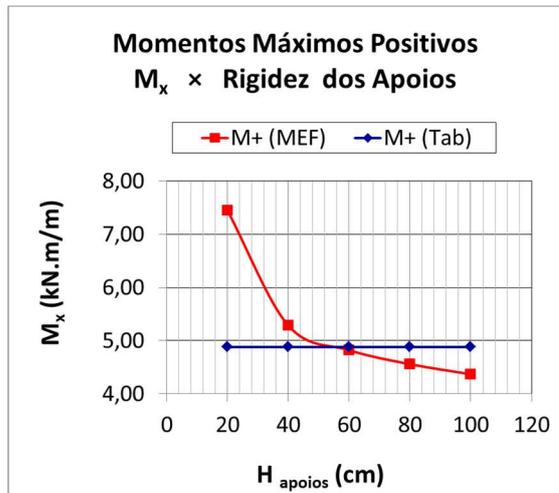


Figura A.2 - Laje Integrada Modelo 1B – Diagramas

A.3 Laje Integrada Modelo 2



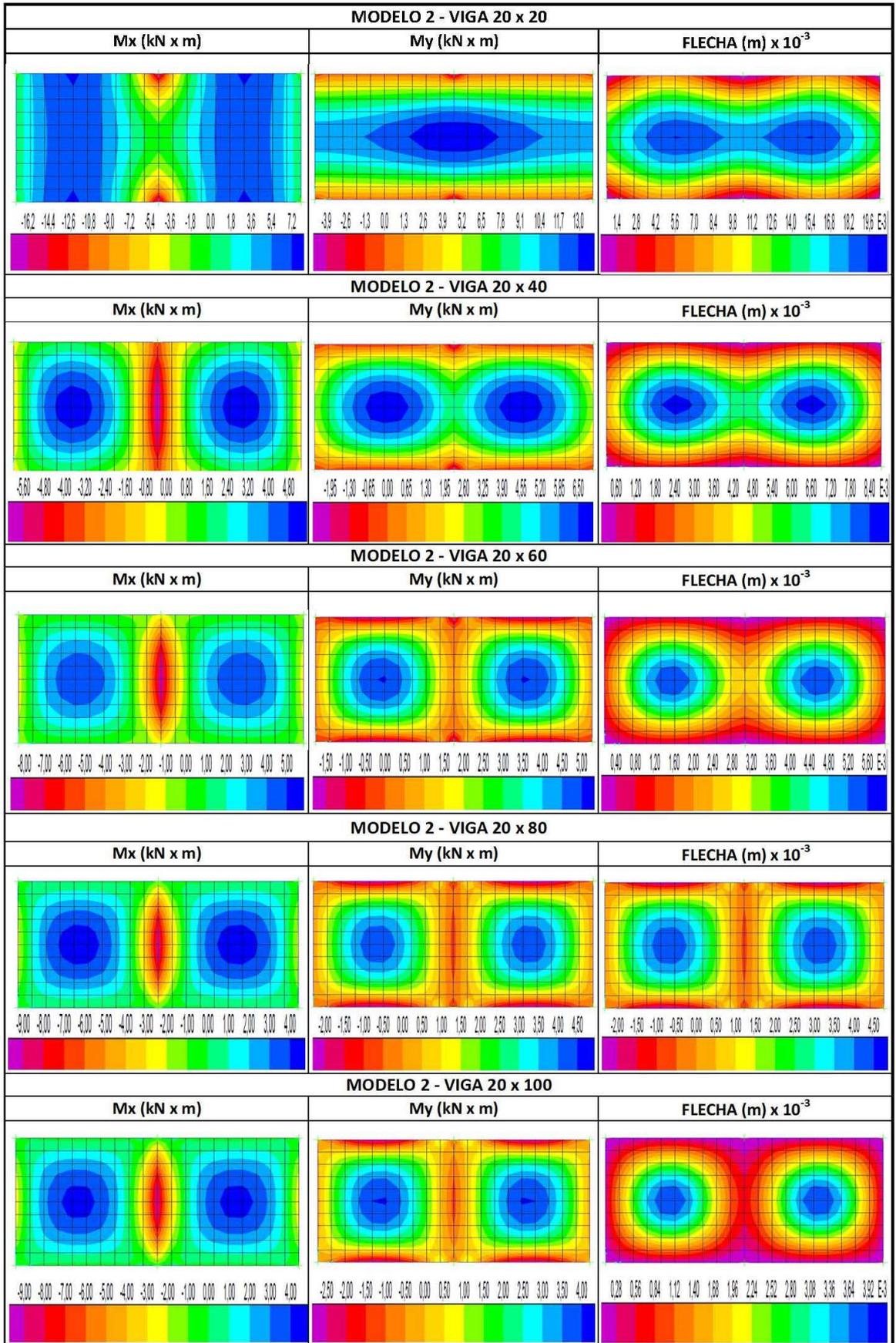
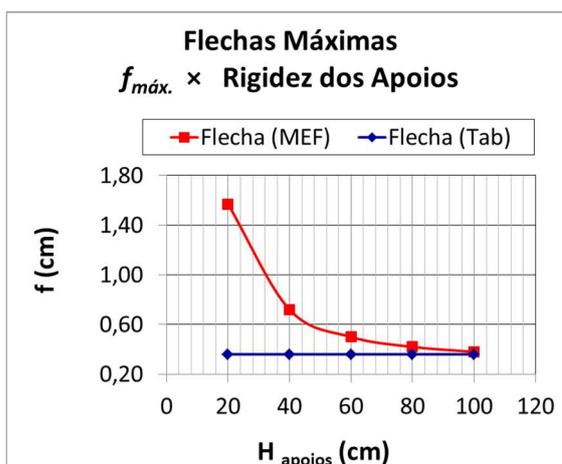
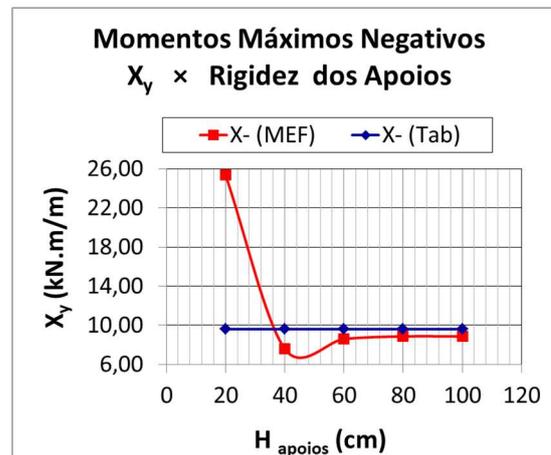
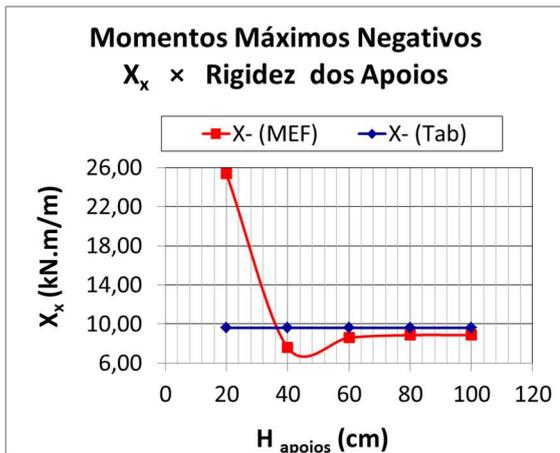
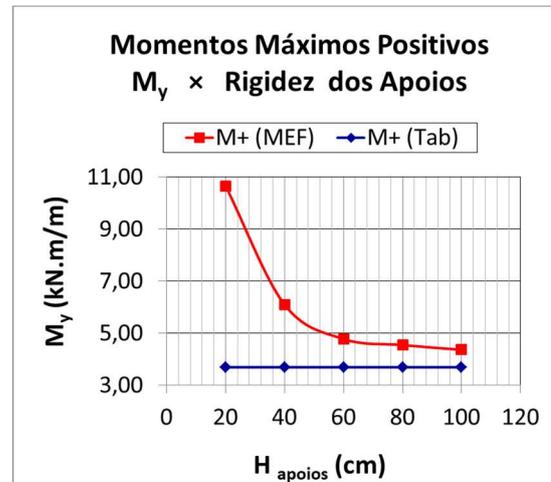
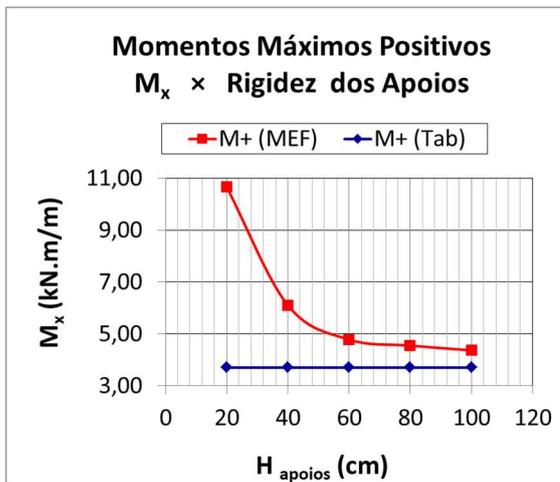


Figura A.3 - Laje Integrada Modelo 2 – Diagramas

A.4 Laje integrada Modelo 3



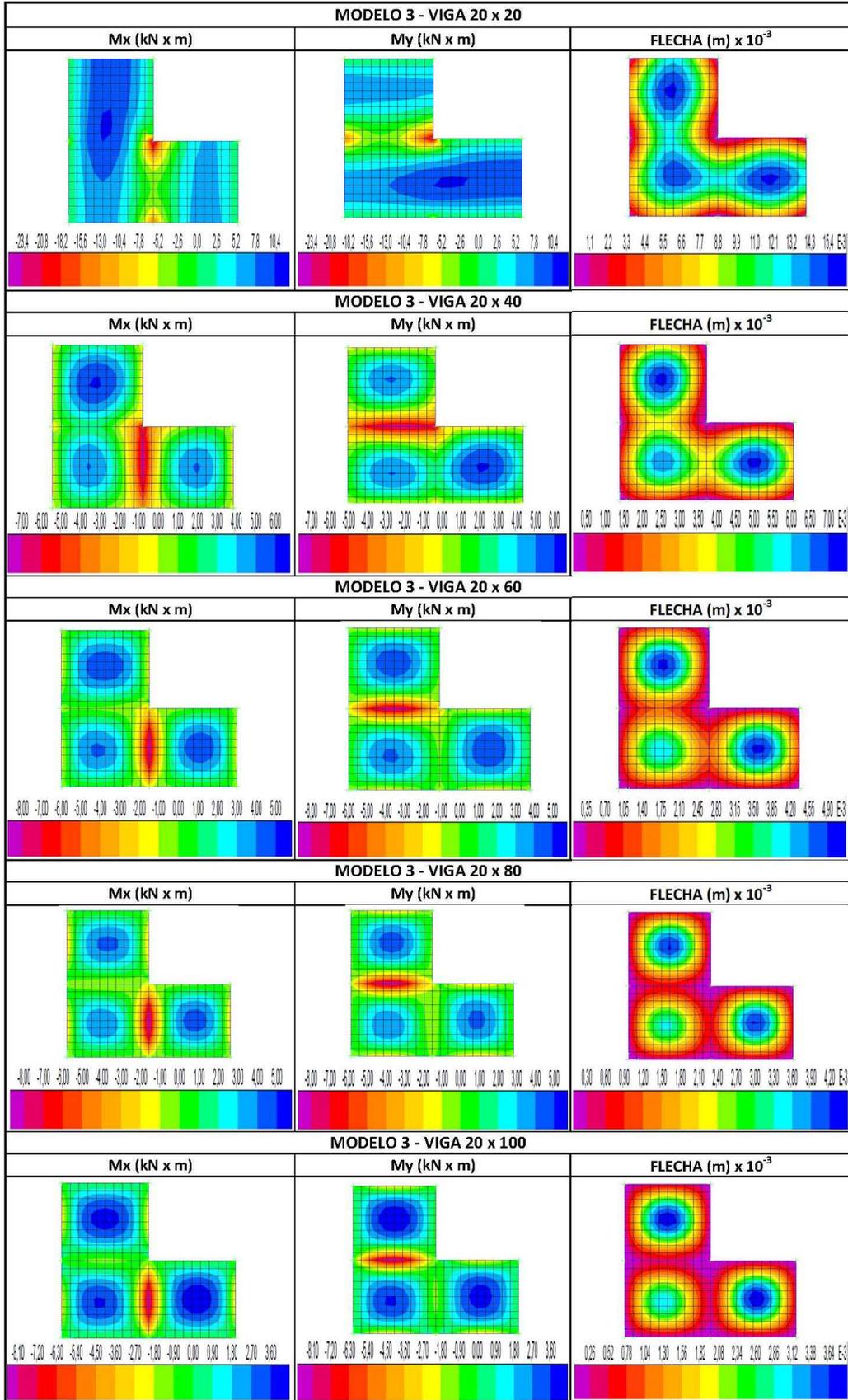
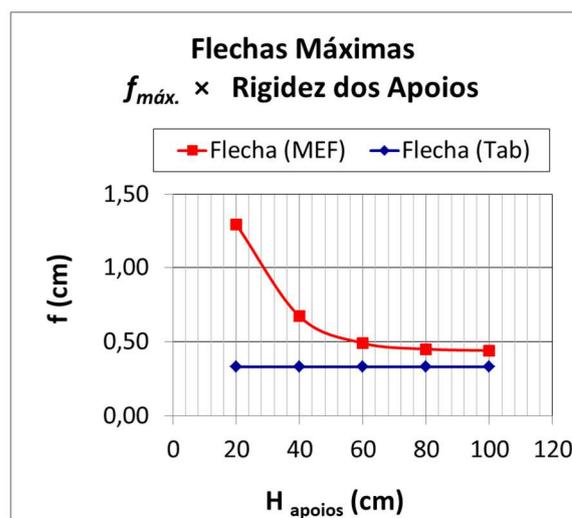
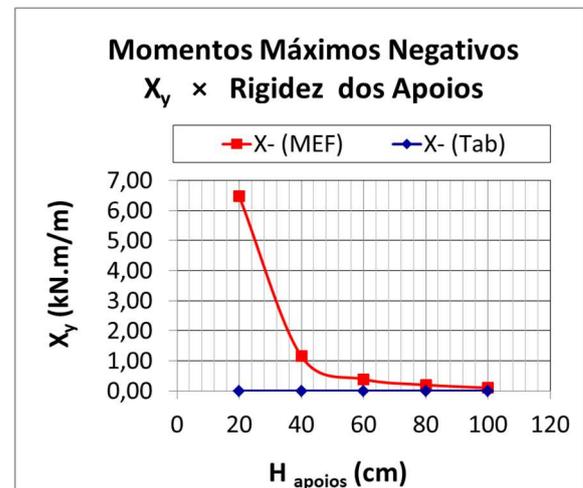
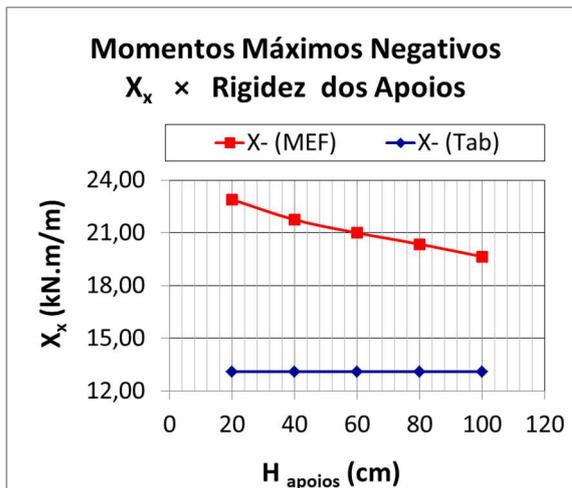
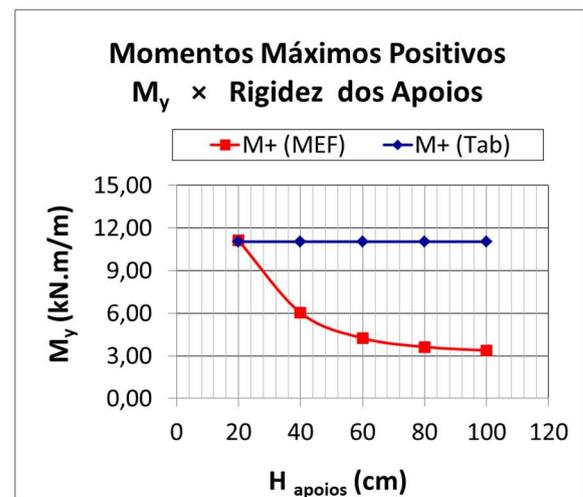
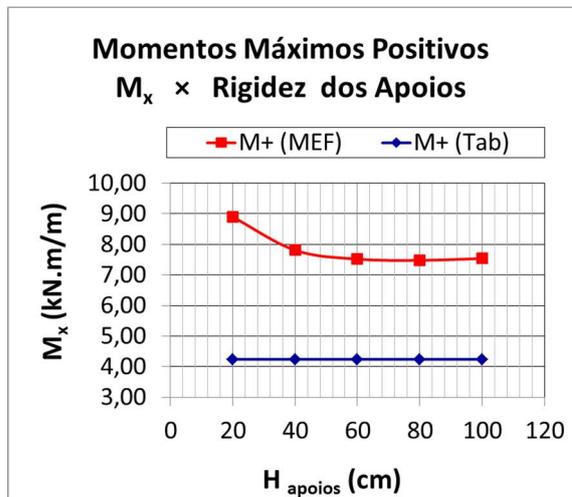


Figura A.4 - Laje integrada Modelo 3 –Diagramas

A.5 Laje Integrada Modelo 4



(*). Obs.: Os resultados dos momentos máximos (M_x , M_y , X_x e X_y) foram obtidos na região do vão entre os pilares da laje central. Já os deslocamentos máximos ($f_{máx.}$) foram obtidos no centro da laje central.

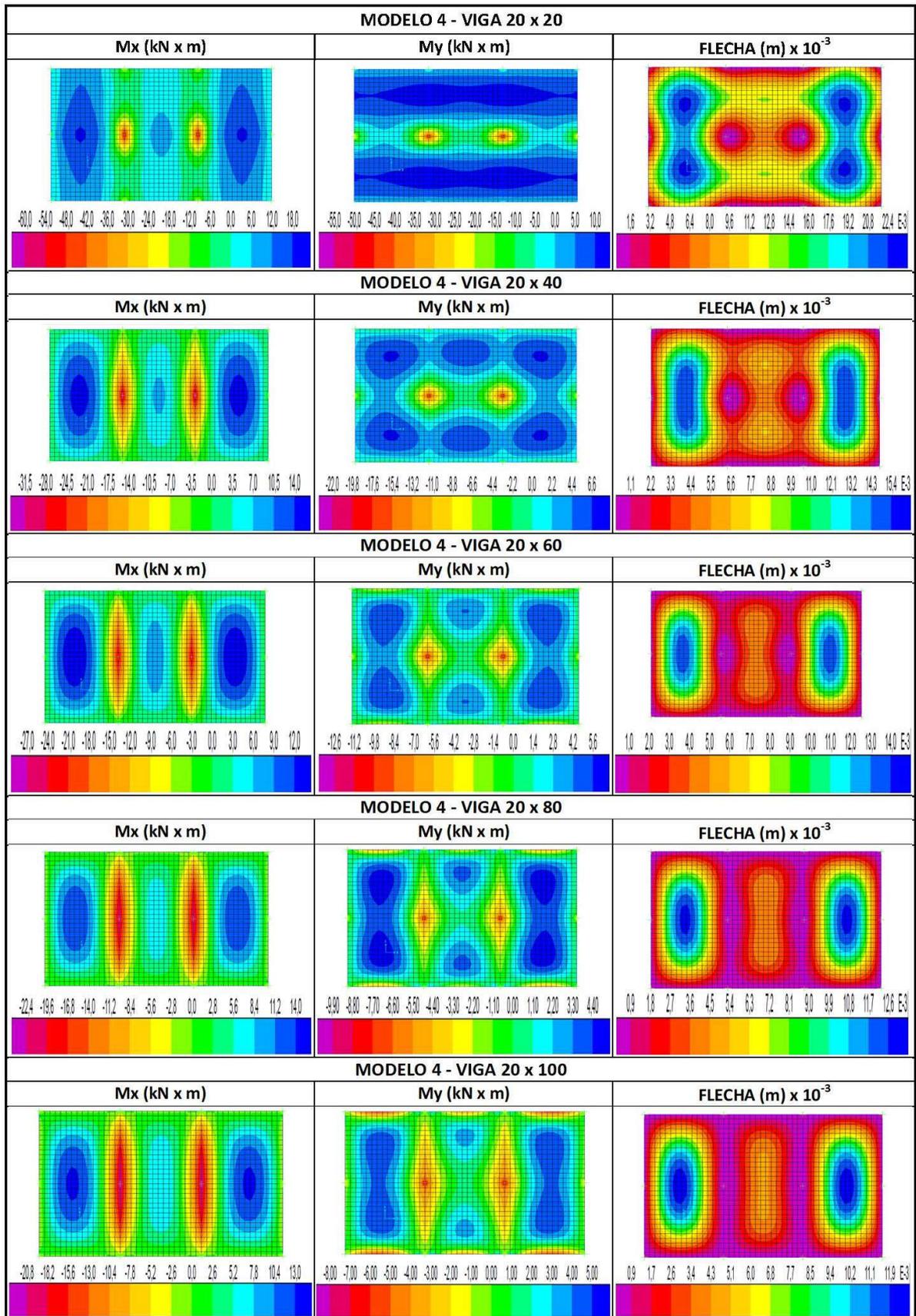
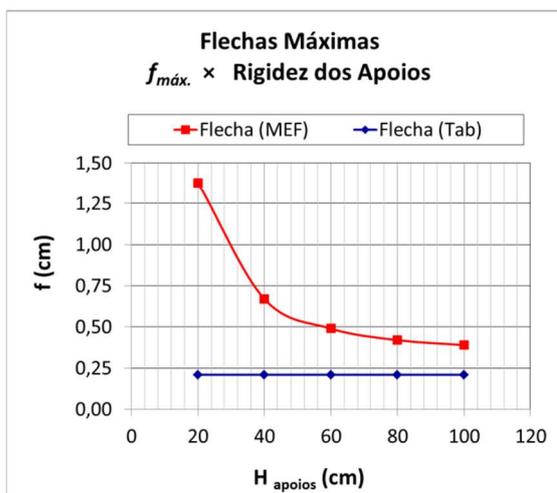
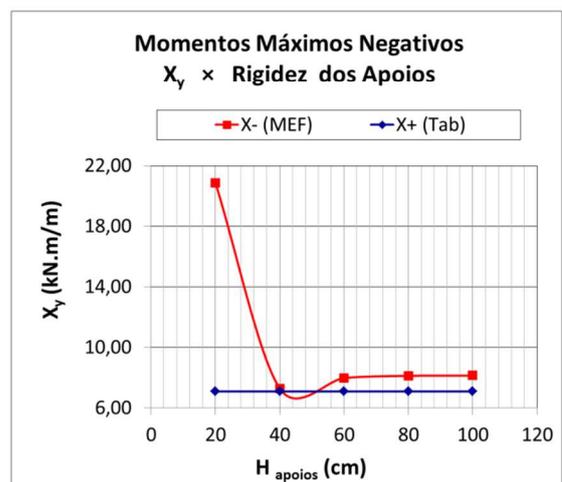
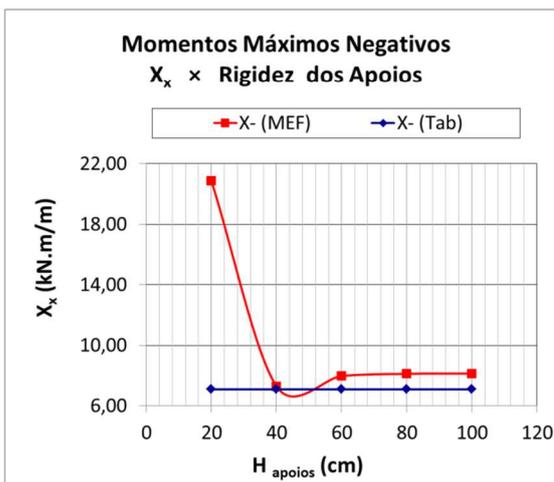
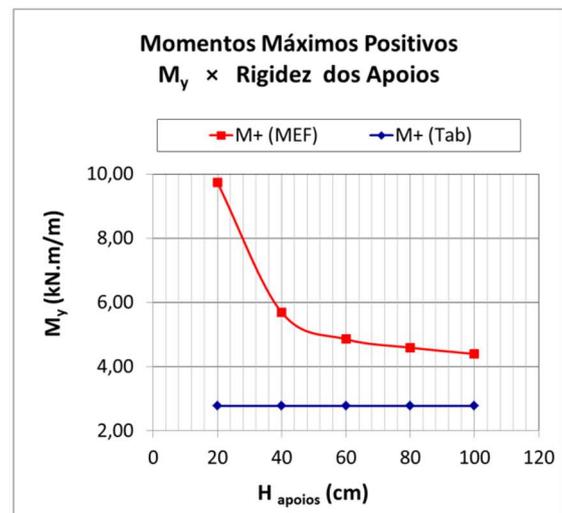
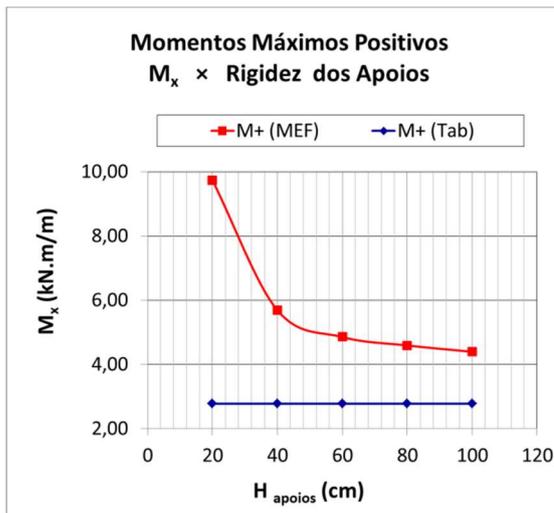


Figura A.5 - Laje Integrada Modelo 4 – Diagramas

A.6 Laje Integrada Modelo 5



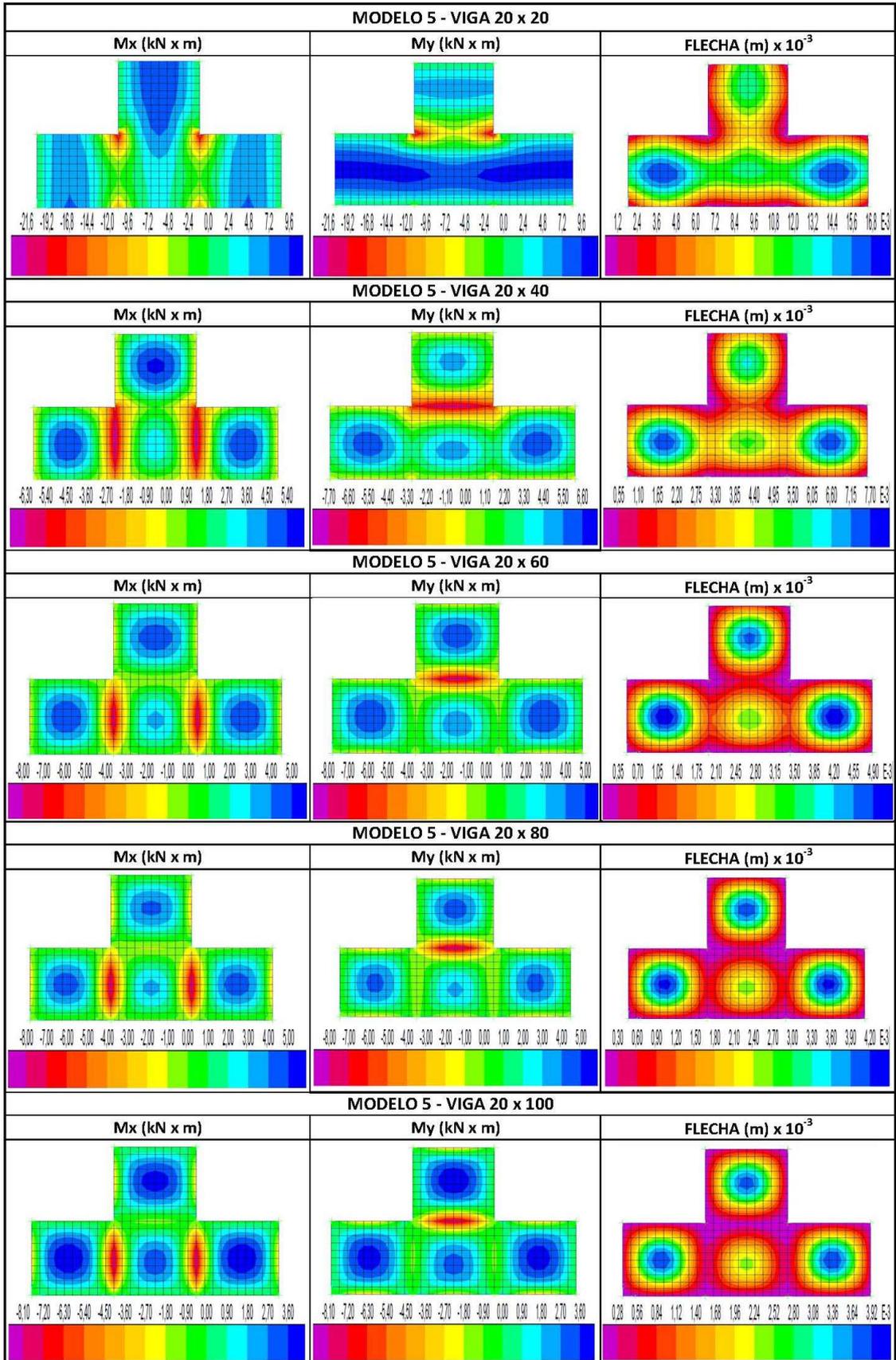
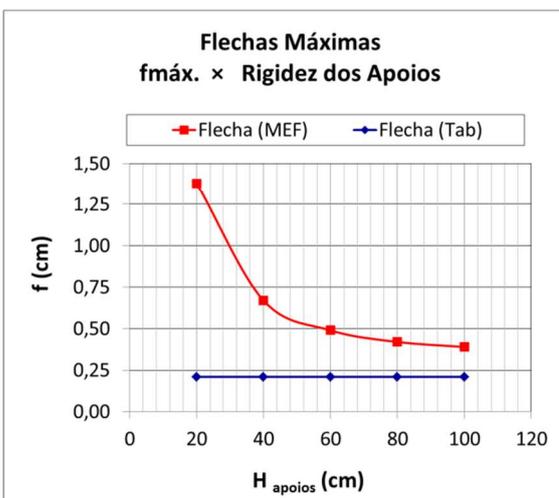
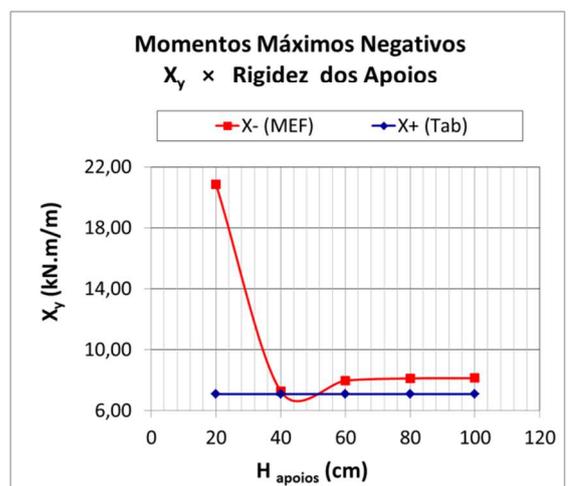
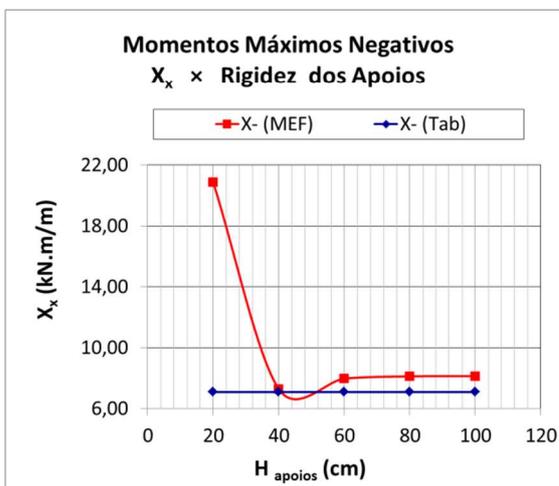
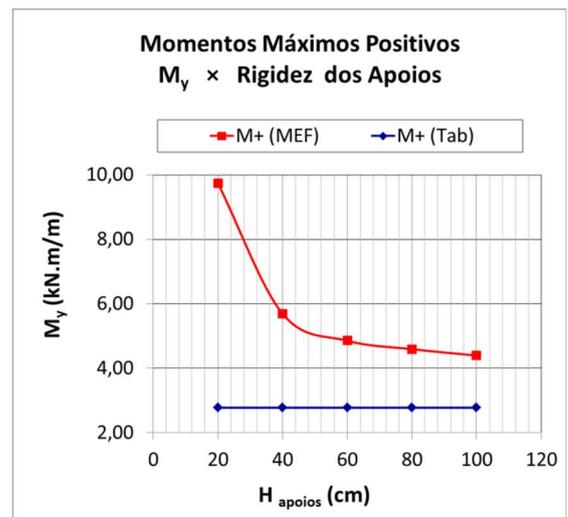
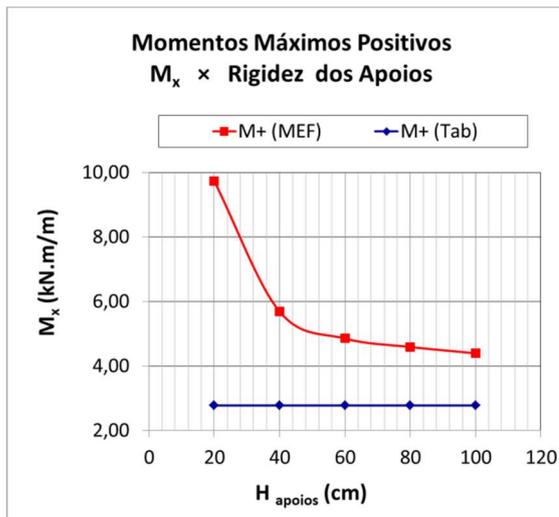


Figura A.6 - Laje Integrada Modelo 5 – Diagramas

A.7 Laje Integrada Modelo 6



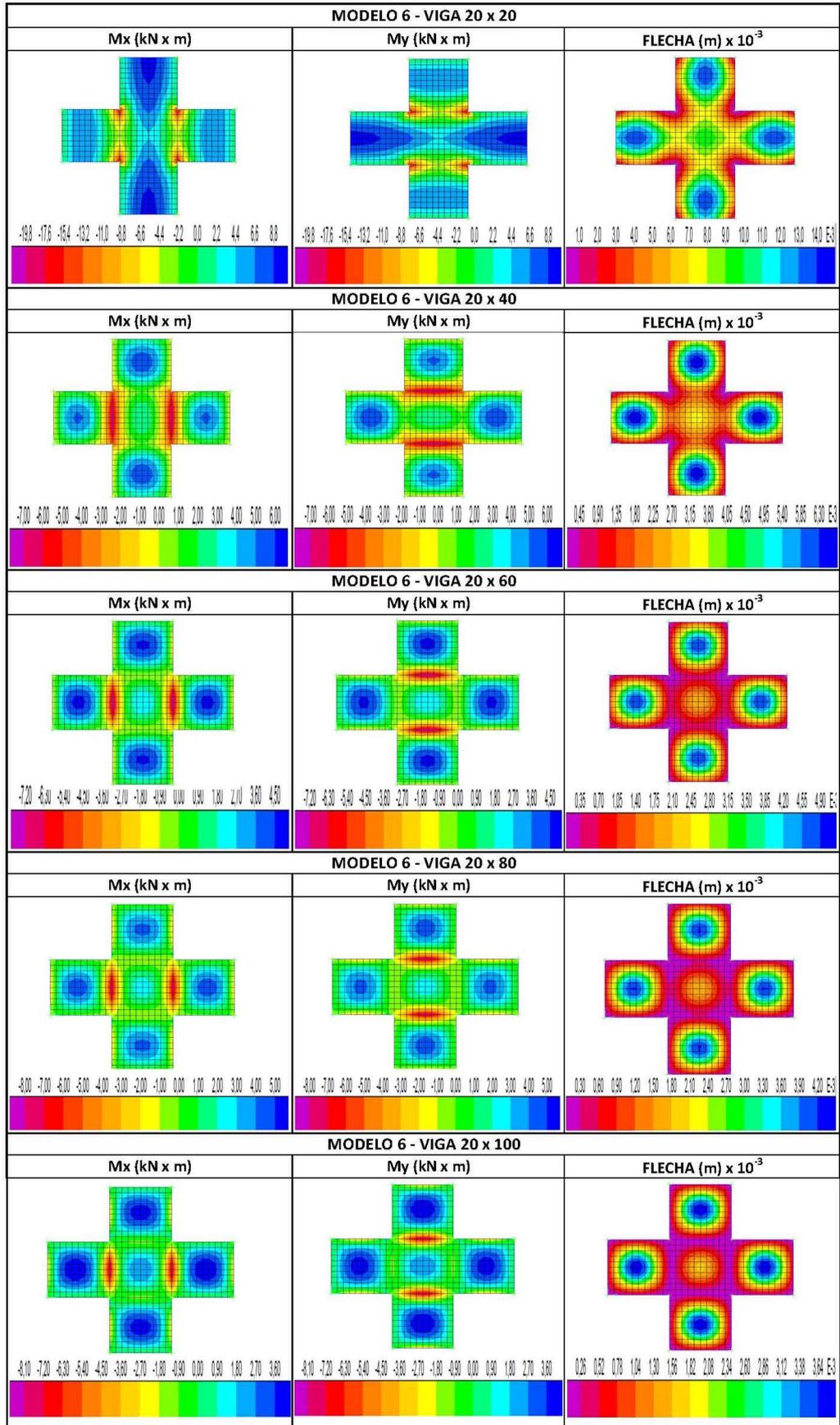


Figura A.7 - Laje Integrada Modelo 6

ANEXO A

Tabelas de Lajes (Tepedino)

Tabela 3.10 – Flecha elástica em lajes retangulares, carga uniforme (Tepedino)						
Tipo						
b/a	f_1	f_1	f_1	f_1	f_1	f_1
0,50	-	0,0068	-	0,0062	0,0033	-
0,55	-	0,0090	-	0,0080	0,0045	-
0,60	-	0,011	-	0,0098	0,0058	-
0,65	-	0,014	-	0,012	0,0073	-
0,70	-	0,017	-	0,014	0,0090	-
0,75	-	0,020	-	0,015	0,011	-
0,80	-	0,022	-	0,017	0,012	-
0,85	-	0,025	-	0,019	0,014	-
0,90	-	0,028	-	0,020	0,015	-
0,95	-	0,030	-	0,021	0,017	-
1,00	0,048	0,033	0,025	0,023	0,018	0,015
1,05	0,053	0,035	0,027	0,024	0,020	0,016
1,10	0,057	0,037	0,029	0,024	0,021	0,018
1,15	0,062	0,039	0,032	0,025	0,022	0,019
1,20	0,066	0,041	0,034	0,026	0,023	0,020
1,25	0,071	0,043	0,036	0,027	0,024	0,021
1,30	0,075	0,044	0,038	0,027	0,025	0,022
1,35	0,079	0,046	0,040	0,028	0,026	0,023
1,40	0,083	0,047	0,041	0,028	0,026	0,024
1,45	0,087	0,049	0,043	0,029	0,027	0,025
1,50	0,090	0,050	0,045	0,029	0,027	0,026
1,55	0,094	0,051	0,046	0,029	0,028	0,027
1,60	0,097	0,052	0,047	0,029	0,028	0,027
1,65	0,100	0,053	0,048	0,030	0,028	0,027
1,70	0,103	0,053	0,049	0,030	0,028	0,028
1,75	0,106	0,054	0,050	0,030	0,028	0,028
1,80	0,109	0,055	0,050	0,030	0,028	0,028
1,85	0,112	0,056	0,051	0,030	0,029	0,029
1,90	0,114	0,056	0,052	0,030	0,029	0,029
1,95	0,116	0,057	0,054	0,030	0,029	0,029
2,00	0,119	0,058	0,055	0,030	0,029	0,029

O valor da flecha é dada por: $f = f_1 (p \cdot a^4) / (E_{cs} h^3)$
 a é o vão com o maior número de engaste. Caso o número de engaste seja o mesmo nas duas direções, a é o menor vão.

Tabela 3.11 A – Momentos fletores, regime elástico, carga uniforme (Tepedino)									
Tipo	A		B			C			
	m_a	m_b	m_a	m_b	n_a	m_a	m_b	n_a	n_b
0,50	-	-	119,0	44,1	32,8	-	-	-	-
0,55	-	-	91,7	40,0	27,6	-	-	-	-
0,60	-	-	74,1	37,2	23,8	-	-	-	-
0,65	-	-	61,7	35,3	20,9	-	-	-	-
0,70	-	-	52,1	34,1	18,6	-	-	-	-
0,75	-	-	45,2	33,4	16,8	-	-	-	-
0,80	-	-	40,2	33,1	15,4	-	-	-	-
0,85	-	-	36,1	33,2	14,2	-	-	-	-
0,90	-	-	32,9	33,5	13,3	-	-	-	-
0,95	-	-	30,3	33,9	12,5	-	-	-	-
1,00	23,6	23,6	28,2	34,4	11,9	37,2	37,2	14,3	14,3
1,10	20,0	23,6	25,1	36,2	10,9	31,3	37,4	12,7	13,6
1,20	17,4	23,7	22,8	38,6	10,2	27,4	38,2	11,5	13,1
1,30	15,5	24,2	21,2	41,4	9,7	24,6	40,0	10,7	12,8
1,40	14,1	25,0	20,0	44,4	9,3	22,6	41,8	10,1	12,6
1,50	13,0	25,7	19,1	47,3	9,0	21,1	44,4	9,6	12,4
1,60	12,1	26,8	18,4	51,4	8,8	20,0	48,2	9,2	12,3
1,70	11,4	27,9	17,8	55,8	8,6	19,2	52,4	9,0	12,3
1,80	10,9	28,8	17,4	59,4	8,4	18,5	56,1	8,7	12,2
1,90	10,5	30,4	17,1	63,0	8,3	18,0	60,2	8,6	12,2
2,00	10,1	31,6	16,8	67,6	8,2	17,5	62,5	8,4	12,2

O valor do momento **positivo** é dado por: $M = pa^2/m$ e do **negativo** por $X = pa^2/n$
a é o vão com o maior número de engaste. Caso o número de engaste seja o mesmo nas duas direções, **a** é o menor vão.

Tabela 3.11 B – Momentos fletores, regime elástico, carga uniforme (Tepedino)											
Tipo	D			E				F			
	b/a	m _a	m _b	n _a	m _a	m _b	n _a	n _b	m _a	m _b	n _a
0,50	113,6	47,9	33,7	222,2	72,7	49,3	35,2	-	-	-	-
0,55	88,5	44,8	28,6	161,3	64,3	40,5	30,7	-	-	-	-
0,60	73,0	42,9	25,0	123,5	58,4	34,4	27,2	-	-	-	-
0,65	60,2	42,0	22,2	99,0	54,3	29,8	24,6	-	-	-	-
0,70	53,5	41,7	20,1	82,0	51,3	26,2	22,5	-	-	-	-
0,75	47,2	42,0	18,5	69,0	49,5	23,4	21,0	-	-	-	-
0,80	42,9	43,0	17,3	59,2	48,4	21,2	19,7	-	-	-	-
0,85	39,4	44,2	16,3	52,4	47,9	19,5	19,2	-	-	-	-
0,90	36,5	45,7	15,5	47,4	48,0	18,1	18,7	-	-	-	-
0,95	34,2	47,8	14,8	43,1	48,6	17,1	18,4	-	-	-	-
1,00	32,4	49,8	14,3	39,7	49,5	16,2	18,3	49,5	49,5	19,4	19,4
1,10	29,9	54,7	13,5	34,8	52,3	14,8	17,7	41,3	50,4	17,1	18,4
1,20	28,0	61,5	13,0	31,6	56,5	13,9	17,4	34,8	53,0	15,6	17,9
1,30	26,7	67,2	12,6	29,4	61,6	13,2	17,4	32,7	56,4	14,5	17,6
1,40	25,8	75,0	12,3	27,9	68,0	12,8	17,4	30,1	60,7	13,7	17,5
1,50	25,3	83,9	12,3	26,7	74,1	12,5	17,5	28,3	67,3	13,2	17,5
1,60	24,8	93,0	12,1	25,9	81,4	12,3	17,7	27,1	73,7	12,8	17,5
1,70	24,4	101,8	12,0	25,3	88,7	12,1	17,9	26,1	82,4	12,5	17,5
1,80	24,2	110,2	12,0	24,9	99,6	12,0	18,0	25,5	88,2	12,3	17,5
1,90	24,0	120,4	12,0	24,5	106,5	12,0	18,0	25,1	98,9	12,1	17,5
2,00	24,0	131,6	12,0	24,3	113,6	12,0	18,0	24,7	104,2	12,0	17,5

O valor do momento positivo é dado por: $M = pa^2/m$ e do negativo por $X = pa^2/n$
a é o vão com o maior número de engaste. Caso o número de engaste seja o mesmo nas duas direções, a é o menor vão.