

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

Leticia da Silva Assunção

ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE AS PRESCRIÇÕES DE CÁLCULO
ESTABELECIDAS NAS PRINCIPAIS NORMAS PARA PUNÇÃO EM LAJES
COGUMELO

Belo Horizonte

2022

Letícia da Silva Assunção

Análise comparativa entre as prescrições de cálculo estabelecidas nas principais normas para punção em lajes cogumelo

Dissertação apresentada ao Programa de especialização em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Especialista em Engenharia de Estruturas.

Orientador: Gabriel de Oliveira Ribeiro

Belo Horizonte

2022

A581a	<p>Assunção, Letícia da Silva. Análise comparativa entre as prescrições de cálculo estabelecidas nas principais normas para punção em lajes cogumelo [recurso eletrônico] / Letícia da Silva Assunção. – 2022. 1 recurso online (92 f. : il., color.) : pdf.</p> <p>Orientador: Gabriel de Oliveira Ribeiro.</p> <p>“Monografia apresentada à Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Especialista em Estruturas</p> <p>Bibliografia: f. 91-92. Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.</p> <p>1. Engenharia de estruturas. 2. Lajes. 3. Normas Técnicas (Engenharia). I. Ribeiro, Gabriel de Oliveira. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDU: 624</p>
-------	--



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ESTRUTURAS

ATA DA DEFESA DA ALUNA LETÍCIA DA SILVA ASSUNÇÃO

ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE AS PRESCRIÇÕES DE CÁLCULO ESTABELECIDAS NAS PRINCIPAIS NORMAS PARA PUNÇÃO EM LAJES COGUMELO

Trabalho Final submetido à Banca Examinadora, como parte dos requisitos necessários para obtenção do certificado de Especialista em ESTRUTURAS.

Prof. Gabriel de Oliveira Ribeiro - Universidade Federal de Minas Gerais

Avaliador 1 - Orientador Nota: 95

Prof. Pedro Vianna Pessoa de Mendonça - Universidade Federal de Minas Gerais

Avaliador 2 Nota: 95

A aluna Letícia foi considerada aprovada.

Aprovada em 19 de janeiro de 2022.



Documento assinado eletronicamente por **Gabriel de Oliveira Ribeiro, Professor Magistério Superior - Voluntário**, em 19/01/2022, às 14:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Pedro Vianna Pessoa de Mendonça, Professor do Magistério Superior**, em 19/01/2022, às 16:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1200829** e o código CRC **328B8733**.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por me acompanhar sempre, orientando meus caminhos e a me ajudar a conquistar meus objetivos.

Aos meus pais, José e Perpetua por estarem sempre ao meu lado me incentivando e apoiando em minhas decisões e por me permitirem ser a pessoa que me tornei hoje.

Ao Prof. Doutor Gabriel de Oliveira Ribeiro, pela disponibilidade em me orientar e por todo o apoio dado neste trabalho.

A meus familiares, amigos, companheiro e todos que de certa forma contribuíram para que eu chegasse até aqui.

RESUMO

As lajes cogumelo ou lisas são estruturas que se apoiam diretamente sobre os pilares e, apesar das vantagens que possuem, apresentam maior flexibilidade que as lajes que se apoiam sobre vigas, por isto, devem receber atenção especial quanto ao risco de punção na ligação laje-pilar. O fenômeno da punção ocorre em função da concentração de cargas em pequenas superfícies ocasionando a ruptura na ligação laje-pilar, devido às forças de cisalhamento. Para evitar esta ruína pode-se reduzir os vãos das lajes, utilizar capitéis ou “*drop panels*” e usar armaduras de combate à punção. O dimensionamento e detalhamento das lajes quanto à punção é estabelecido em normas como ABNT NBR 6118, EUROCODE2, CEB-FIB MC 90 e ACI 318-11. Esta pesquisa tem como objetivo analisar as preconizações das normas citadas através de exemplos práticos. Inicialmente foi utilizado um exemplo padrão que foi calculado para um pilar interno, um de borda e um de canto, para cada uma das quatro normatizações. Em seguida, a partir dos dados deste exemplo, foram desenvolvidas planilhas onde o valor da altura útil da laje foi variado de modo a permitir a comparação dos valores obtidos e a verificar a influência desta altura no dimensionamento à punção.

Palavras-chave: Laje cogumelo. Punção. Normatizações.

Abstract

Waffle or ribbed or flat slabs are structures that support directly on the columns and, despite the advantages they have, they are more flexible than slabs supported on beams, therefore, they must receive special attention regarding the risk of punching in the slab-column connection. The punching phenomenon occurs due to the concentration of loads on small surfaces causing the slab-column connection to rupture, due to shear forces. To avoid this ruin, it is possible to reduce the spans of the slabs use columns capitals or drop panels and use shear reinforcement. The sizing and detailing of the slabs regarding punching is established in codes such as ABNT NBR 6118, EUROCODE2, CEB-FIB MC 90 and ACI 318-11. This research aims to analyze the recommendations of the codes mentioned through practical examples. First, a standard example was used, which was calculated for an internal column, an edge column and a corner column, for each of the four regulations. Then, based on the data in this example, spreadsheets were developed where the value of the effective depth of the slab was varied in order to allow the comparison of the values obtained and to verify the influence of this effective depth in punching sizing.

Keywords: Waffle slabs. Punching. Regulations.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1- Semelhança entre a laje cogumelo e um cogumelo real	15
Figura 2- Desenvolvimento de fissuras	17
Figura 3- Superfície de ruína	18
Figura 4- Capitél e “drop panels”	18
Figura 5- Tipos de estribos	19
Figura 6- Barras dobradas	19
Figura 7- Conectores tipo pino	20
Figura 8- Segmento de perfil I	21
Figura 9- <i>Shearband</i>	21
Figura 10- “ <i>Shearheads</i> ”- perfil U	22
Figura 11- Perímetro crítico de pilares internos	24
Figura 12- Perímetro crítico de pilares de borda	25
Figura 13- Perímetro crítico de pilares de canto	26
Figura 14- Distribuição das armaduras e superfície C”	28
Figura 15- Distribuição das armaduras em corte	29
Figura 16- Armadura contra colapso progressivo	30
Figura 17- Armadura de punção	30
Figura 18- Modelo ideal para verificação da falha por punção no estado limite último	31
Figura 19- Perímetros críticos	32
Figura 20- Valores de β	35
Figura 21- Perímetro mais externo	37
Figura 22- Espaçamentos dos estribos	38
Figura 23- Espaçamento das barras dobradas	38
Figura 24- Perímetro crítico	40
Figura 25- Cisalhamento distribuído	41
Figura 26- Perímetro crítico para pilares de borda, sendo (a) u_1 e (b) $u_1 *$	42
Figura 27- Perímetro crítico para pilares de canto, sendo (a) u_1 e (b) $u_1 *$	42
Figura 28- Perímetro crítico u_n	46
Figura 29- Armadura de cisalhamento em pilares de borda e de canto	46
Figura 30- Distribuição de estribos em pilares internos e de borda. Fonte: ACI 318-11	50
Figura 31- Distribuição de conectores tipo pino	51
Figura 32- Laje cogumelo maciça e distribuição de carregamentos	52
Figura 33- Detalhamento da armadura do pilar interno	55
Figura 34- Detalhamento da armadura do pilar de borda	59
Figura 35- Detalhamento da armadura do pilar de canto	62
Figura 36- Detalhamento da armadura do pilar interno	64
Figura 37- Detalhamento da armadura do pilar de borda	66
Figura 38- Detalhamento da armadura do pilar de borda	67
Figura 39- Detalhamento da armadura do pilar de canto	69
Figura 40- Detalhamento da armadura do pilar de canto	70
Figura 41- Detalhamento da armadura do pilar interno	73
Figura 42- Detalhamento da armadura do pilar de borda	75
Figura 43- Detalhamento da armadura do pilar de canto	77
Figura 44- Detalhamento da armadura do pilar interno	80
Figura 45- Detalhamento da armadura do pilar de borda	83
Figura 46- Detalhamento da armadura do pilar de canto	86

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Coeficiente K.....	24
Tabela 2 – Coeficiente K.....	33
Tabela 3 – Coeficiente K.....	41

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	12
2. OBJETIVO	14
3. REVISÃO DA LITERATURA	15
3.1. LAJES QUE TRASMITEM AS CARGAS DIRETAMENTE AOS PILARES	15
3.2. FENÔMENO DA PUNÇÃO	16
3.3. PRESCRIÇÕES DAS NORMAS	22
3.3.1. ABNT NBR 6118:2014.....	22
3.3.1.1. Tensões de cisalhamento solicitantes para superfícies C e C'	23
3.3.1.2. Tensões de cisalhamento resistentes para superfícies C e C'	26
3.3.1.3. Armadura de punção obrigatória.....	29
3.3.1.4. Colapso progressivo	29
3.3.1.5. Armaduras	30
3.3.2. EUROCODE 2	31
3.3.2.1. Perímetro crítico.....	31
3.3.2.2. Cálculo da tensão de cisalhamento na punção	32
3.3.2.3. Tensão de cisalhamento resistente para lajes sem armadura de punção.....	35
3.3.2.4. Tensão de cisalhamento resistente para lajes com armadura de punção	36
3.3.3. CEB FIB MC 90.....	39
3.3.3.1. Tensão solicitante de cálculo.....	40
3.3.3.2. Tensão resistente de cálculo	43
3.3.3.3. Resistência máxima.....	43
3.3.3.4. Lajes com armadura de cisalhamento	44
3.3.3.5. Armadura de punção	47
3.3.4. ACI 318-11.....	47
3.3.4.1. Especificações de armaduras.....	49
4. ANÁLISES E RESULTADOS	52
4.1. DIMENSIONAMENTO CONFORME A ABNT NBR 6118:2014	53
4.1.1. PILAR INTERNO.....	54
4.1.2. PILAR DE BORDA	57
4.1.3. PILAR DE CANTO	59
4.2. DIMENSIONAMENTO CONFORME O EUROCODE 2.....	63

4.2.1.	PILAR INTERNO.....	63
4.2.2.	PILAR DE BORDA	65
4.2.3.	PILAR DE CANTO	67
4.3.	DIMENSIONAMENTO CONFORME O CEB FIB MC 90	71
4.3.1.	PILAR INTERNO.....	71
4.3.2.	PILAR DE BORDA	73
4.3.3.	PILAR DE CANTO	76
4.4.	DIMENSIONAMENTO CONFORME O ACI 318-11	78
4.4.1.	PILAR INTERNO.....	78
4.4.2.	PILAR DE BORDA	81
4.4.3.	PILAR DE CANTO	84
4.6.	CÁLCULOS COM A VARIAÇÃO DO VALOR DA ALTURA ÚTIL	87
5.	CONCLUSÃO	100
6.	REFERÊNCIAS	102

1. INTRODUÇÃO

As estruturas de concreto armado são amplamente empregadas no país, sendo as mais utilizadas no Brasil. Elas são uma combinação de concreto, que resiste bem à compressão e de aço, que resiste bem à tração, justificando assim a grande difusão de seu uso. É necessário também, que haja entre estes dois materiais aderência, que garanta que ambos os materiais trabalhem em conjunto e absorvam os esforços nas estruturas.

Essas estruturas têm a finalidade de sustentar os esforços a que são submetidas. O sistema convencional típico de um edifício é composto por lajes, vigas, pilares e fundação. Neste sistema estrutural os carregamentos de utilização são aplicados nas lajes, que descarregam nas vigas, que por sua vez as transmitem aos pilares e estes às fundações.

As lajes são estruturas planas, bidimensionais, em que duas dimensões, no caso a largura e o comprimento são muito maiores que sua espessura e suportam cargas perpendiculares ao seu plano.

As lajes cogumelo ou lisas são lajes que se apoiam diretamente nos pilares, consistindo em um subsistema horizontal, no qual não existem vigas. Os pilares podem ter capitéis no topo, tornando-os parecidos com cogumelos. Os capitéis têm a função suavizar a transmissão dos esforços da laje.

As lajes possuem como principal vantagem o fato de vencer vãos, tendo face lisa e plana, permitindo uma melhor ventilação, iluminação e maior flexibilidade do projeto arquitetônico. Esta solução propicia maior facilidade de instalação de tubulações e dutos, reduzem a altura do edifício, apresentam maior produtividade no processo construtivo, tanto na confecção da fôrma como na montagem da armadura e concretagem.

Apesar das vantagens citadas, algumas questões devem receber certa atenção durante a escolha do sistema estrutural em laje cogumelo, como por exemplo, o fato desta estrutura ser mais flexível que as lajes que apresentam um sistema constituído por vigas e pilares, podendo acarretar maiores flechas, além de haver redução da estabilidade global da estrutura, devido à inexistência de vigas e criando também a possibilidade de punção na ligação entre a laje e o pilar.

O fenômeno da punção consiste em uma tendência de perfuração na interligação da laje com o pilar, com ruptura em forma de tronco de pirâmide, que pode acontecer de forma abrupta e repentina devido a elevadas tensões de cisalhamento que atuam nesta ligação. Para combater a punção algumas medidas devem ser tomadas, como aumentar o tamanho do pilar ou a espessura total da laje, reduzir os vãos ou carregamentos atuantes, utilizar capitéis (aumento da seção transversal do pilar), “*drop panels*” (aumento localizado da espessura da laje) ou previsão de armaduras de cisalhamento específicas para evitar o fenômeno da punção.

As armaduras potencializam a resistência da ligação e podem permitir maior ductibilidade à ligação laje-pilar, evitando desta forma o rompimento abrupto da estrutura, possibilitando deformações significativas antes do rompimento. As armaduras mais utilizadas são os estribos, barras dobradas, “*shearheads*”, conectores tipo pino (“*studs*”), segmentos de perfil metálico e sistema “*shearband*”.

O dimensionamento das armaduras e a verificação da resistência ao cisalhamento podem ser realizados através das especificações contidas em normas como a ABNT NBR 6118, EUROCODE 2, CEB-FIB MC 90 e ACI 318-11. Estas normas apresentam detalhes específicos tanto quanto aos modelos de cálculo, quanto ao dimensionamento e detalhamento das armaduras.

2. OBJETIVO

O fenômeno da punção pode ocorrer de forma abrupta, comprometendo a estrutura e podendo inclusive levá-la ao colapso global, se não for abordado de maneira adequada no projeto estrutural e na execução. Por isto, é de suma importância que o Engenheiro tenha o conhecimento acerca deste fenômeno e a compreensão das providências necessárias à sua abordagem no projeto estrutural.

O objetivo deste trabalho consiste em estudar os critérios de dimensionamento e verificação das ligações entre laje e pilar por meio das especificações preconizadas pelas normas ABNT NBR 6118, EUROCODE2, CEB-FIB MC 90 e ACI 318. Propõe-se avaliar e comparar os resultados obtidos no cálculo e dimensionamento através de exemplos práticos visando analisar as diferenças entre os modelos de cálculo propostos e outros aspectos específicos do dimensionamento e detalhamento, de forma a permitir a análise da estrutura como um todo e avaliar a distribuição de tensões na região da ligação.

3. REVISÃO DA LITERATURA

3.1. LAJES QUE TRASMITEM AS CARGAS DIRETAMENTE AOS PILARES

A ABNT NBR 6118:2014 preconiza que lajes cogumelo são aquelas se apoiam diretamente sobre pilares com capitéis, diferenciando-se das lisas, que são diretamente apoiadas em pilares que não possuem capitéis.

A origem do nome dessas lajes se deve ao fato de se assemelharem com cogumelos, como pode ser visto na FIG. 1. Sua estrutura foi baseada em cogumelos, que são formados por uma base, uma haste e a parte superior que é o chapéu, constituído por lamelas (nervuras radiais), que garantem a rigidez e resistência do chapéu.

Figura 1- Semelhança entre a laje cogumelo e um cogumelo real



Fonte: Mapio e Wikipédia.

O primeiro edifício construído com lajes cogumelo foi executado pelo pioneiro C.A.P Turner, em 1905 em Mineápolis, Minnesota, nos Estados Unidos, o Bovey Building.

Conforme GUARDA (1995), inicialmente era comum a utilização de lajes, pilares e capitéis em conjunto, porém, o uso de capitéis foi caindo em desuso, pela necessidade estética de se obter tetos lisos, bem como pela necessidade de simplificar a fôrma da laje.

A análise estrutural deste tipo de laje, segundo a NBR 6118, deve ser efetuada com base em métodos numéricos apropriados, como método dos elementos finito ou elementos de contorno, por exemplo. Pode-se ainda, no caso de pilares ordenados ortogonalmente, de forma

regular e com vãos semelhantes, executar os cálculos através de um modelo elástico simplificado, com redistribuição, ou seja, são empregados pórticos múltiplos em cada direção, de forma a se avaliar os esforços atuantes.

Este sistema apresenta muitas vantagens, entre elas:

- a) Instalação simples, garantindo assim maior produtividade;
- b) Redução do número de fôrmas utilizadas;
- c) Facilidade na instalação de dutos e tubulações;
- d) Capacidade de vencer grandes vãos, permitindo uma maior ventilação, iluminação e maior versatilidade no projeto arquitetônico;
- e) Possibilidade de economia no consumo de concreto e aço;
- f) Redução da altura total do edifício;

Porém, apresenta também alguns aspectos negativos, como:

- a) É uma estrutura mais flexível do que o sistema tradicional com lajes que se apoiam em vigas, podendo acarretar maiores flechas;
- b) A espessura da laje, em algumas situações, pode ser um problema;
- c) Apresenta inconveniente quanto à instabilidade global da estrutura, uma vez que apresentam baixa rigidez às ações horizontais, podendo neste caso serem vinculadas a um núcleo estrutural rígido, como é o caso de poços de elevadores e escadas, por exemplo;
- d) Em função da inexistência de vigas, aumenta-se o risco de punção que deve ser adequadamente avaliado na análise e dimensionamento.

3.2. FENÔMENO DA PUNÇÃO

Conforme MELGUES (2001), o fenômeno da punção se dá pela incidência direta de cargas concentradas ou que agem em pequenas áreas, nas lajes, ocasionando uma ruptura na ligação laje-pilar, onde o pilar perfura a laje. Esta ruína ocorre devido a forças de cisalhamento e ela pode ocorrer de forma brusca e repentina, ou seja, é uma ruína frágil, podendo acarretar em um colapso progressivo da estrutura. A punção pode acontecer também em caixas d'água e

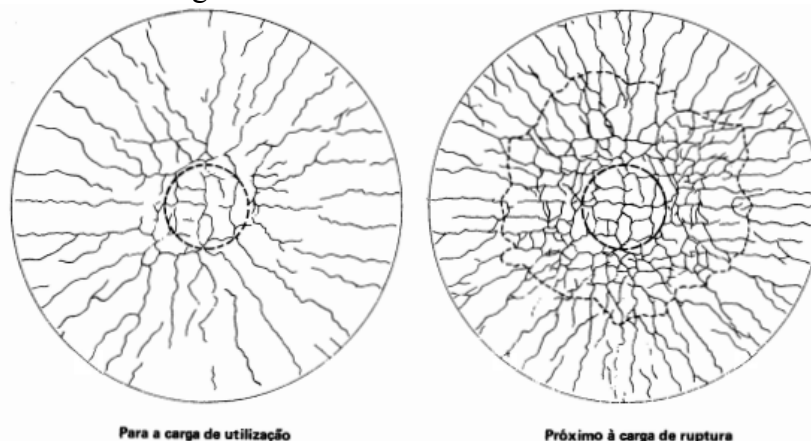
pisos de pavimentos que se apoiam em estacas, fundações flexíveis, lajes de fundações sobre pilares, dentre outras situações.

Segundo ROGRIGUES (2009) os primeiros estudos relacionados à punção foram feitos por Talbot em 1913. Os estudos foram relacionados a sapatas e ele percebeu que a ruína ocorria em forma tronco-cônica ou tronco-piramidal, com superfície de ruptura inclinada em 45° em relação à superfície horizontal, além de que as sapatas que apresentavam quantidade maior de armadura de flexão, apresentavam maior resistência à punção.

LEONHARDT & MÖNNIG (1978) citam que, no caso de pilares internos, a força cortante aumenta, de forma hiperbólica, de modo que cargas elevadas coincidam com os momentos negativos nas duas direções. Já para pilares de canto e de borda a análise é ainda mais crítica, pois os momentos fletores longitudinais e transversais são muito diferentes junto à borda.

A partir de ensaios realizados percebeu-se que, a princípio, as deformações tangenciais eram maiores que as radiais, aparecendo desta forma algumas fissuras radiais e apenas com o aumento do carregamento surgiram algumas circulares. Quando surgem estas fissuras circulares, as deformações radiais da armadura são maiores que as tangenciais, como se pode ver na FIG. 2. A superfície de ruptura por cisalhamento apresenta um formato cônico com inclinação entre 30° e 35° . Conforme CORDOVIL (1997) *apud*. KOVALCZUK (2014) acredita-se que, à medida que o carregamento se eleva muito, surgem fissuras tangenciais, o que significa que surgiram fissuras internas, ocasionadas por tração diagonal.

Figura 2- Desenvolvimento de fissuras

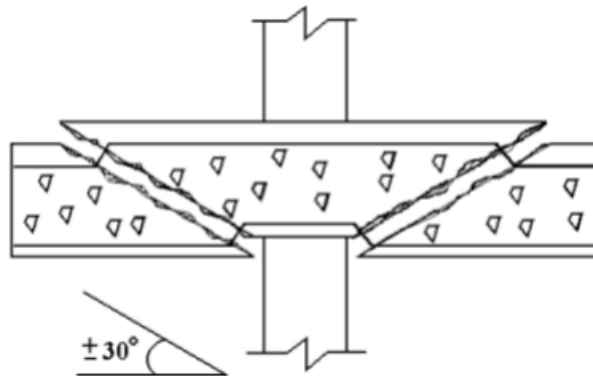


Fonte: LEONHARDT & MÖNNIG (1978)

Em TAKEYA (1981), é possível perceber que a ruptura apresenta uma inclinação de 30° a 35° em relação ao plano médio da laje. MELGUES (2001) acredita que esta inclinação esteja

relacionada apenas a pilares internos, onde tanto a laje quanto os carregamentos são simétricos. Já a norma CEB-FIB MC 90 afirma que a ruína vai da borda carregada da laje até a face oposta através de uma inclinação média de 25° a 35° . De um modo geral, pode-se perceber que esta inclinação varia em torno de 30° . A forma da ruptura pode ser observada na FIG.3 abaixo.

Figura 3- Superfície de ruína

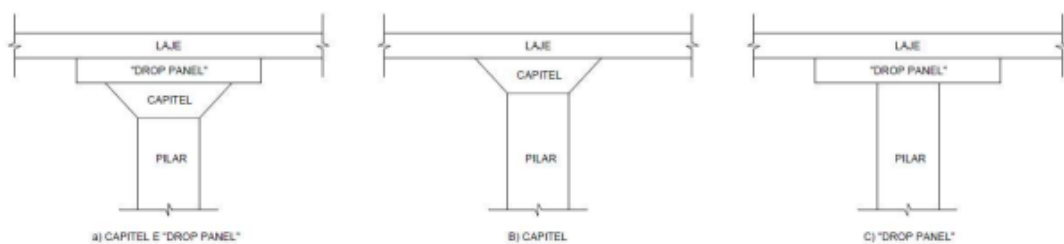


Fonte: CEB-FIB MC 90

As características do concreto, as taxas de armaduras de flexão e transversal da laje, o formato, posição e dimensão do pilar, a espessura ou altura útil da laje, a relação momento fletor/força cortante, os carregamentos atuantes e as armaduras de punção são algumas das características que afetam a resistência à punção das lajes.

Para amenizar os efeitos da punção, PILAKOUTAS & LI (1997) *apud.* MELGUES (2001) afirmam que pode-se reduzir os vãos das lajes, utilizar capitéis (aumento da seção do pilar) ou “*drop panels*” (aumento da espessura da laje) e usar armaduras de combate à punção. O capitel e “*drop panel*” são ilustrados na FIG.4 abaixo.

Figura 4- Capitel e “*drop panels*”



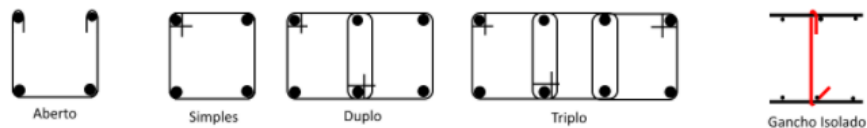
Fonte: Hennrichs (2003) *apud.* Batista (2018).

As armaduras de punção permitem aumento da resistência entre a ligação laje-pilar, bem como a ductilidade desta ligação, garantindo que a estrutura antes de romper se deforme de forma muito acentuada. As armaduras mais comuns para combater a punção são:

a) Estribos

São barras de aço nervuradas utilizadas transversalmente às armaduras longitudinais para combater e absorver os esforços de cisalhamento. Podem ser em formato de gancho, abertos em forma de U, fechados simples ou múltiplos, como pode ser visto na FIG.5, sendo o primeiro aquele que menos afeta a colocação das demais armaduras.

Figura 5- Tipos de estribos.



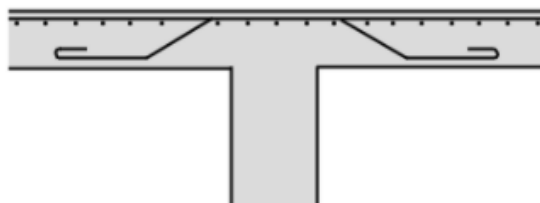
Fonte: AltoQI.

Conforme MELGUES (2001), o gancho quando utilizado para combate à punção só é eficaz quando está em contato com a face superior das armaduras de flexão.

b) Barras dobradas

Estas barras são uma extensão da armadura negativa de flexão que é ancorada na face inferior da laje. Conforme TAKEYA (1981) estas armadura apresentam problema quanto à ancoragem, principalmente em lajes de pequena espessura, além disto, não realizam a costura da região fissurada. Este tipo de armadura pode ser visualizada na FIG.6.

Figura 6- Barras dobradas.

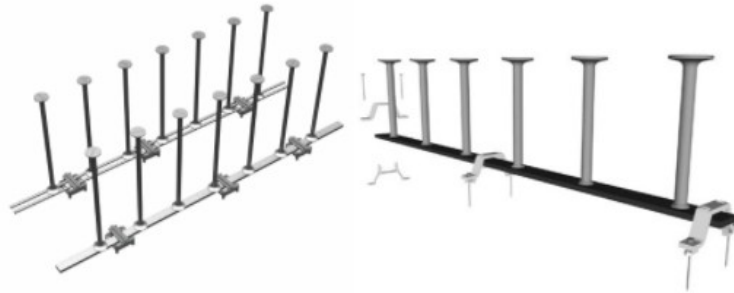


Fonte: AltoQI.

c) Conectores tipo “*studs*”

Conforme CORDOVIL (1997) apud. VIEIRA (2018), os conectores tipo *studs* ou tipo pino são constituídos por chapas de aço soldadas às extremidades de uma haste, formando como o próprio nome diz um pino. Como pode ser visto na FIG.7 abaixo.

Figura 7- Conectores tipo pino.



Fonte: AltoQI.

A IBRACON (2003) apud. WERNECK (2017) afirma que estes conectores apresentam simples manejo, transporte, são fáceis de montar e não comprometem a disposição das armaduras de flexão da laje. Além de aumentar a ductilidade e a capacidade de resistir ao cisalhamento da ligação.

A ABNT NBR 6118:2014 preconiza que as extremidades dos conectores devem ser ancoradas fora do plano da armadura de flexão, além de que a armadura de punção deve conter no mínimo três linhas de conectores.

d) Segmentos de perfis metálicos

São muito parecidos com os conectores tipo pino, podendo substituí-los. Eles são porções de perfis metálicos I com furos na mesa inferior que permitem a fixação na fôrma. Como pode ser visto na FIG.8.

Figura 8- Segmento de perfil I.



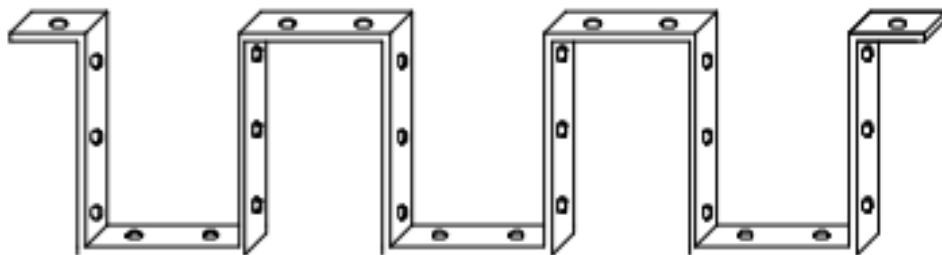
Fonte: Carvalho e Pinheiros (2009) apud. Vieira (2018).

e) “*Shearbands*”

Conforme PILAKOUTAS & LI(1997) apud. MELGUES (2001) esta solução é constituída por faixas metálicas de grande ductilidade e resistência, que podem ser adaptadas a diversos formatos. Ela pode ser disposta em cima da armadura de flexão, devido a sua pequena espessura, sem apresentar, contudo, perdas significativas de cobertura.

Segundo RABELLO (2010) apud. VIEIRA (2018) apresentam facilidade na sua disposição na ligação, além de ter furos que facilitam a sua ancoragem. Como pode ser visualizado na FIG.9.

Figura 9- *Shearband*.



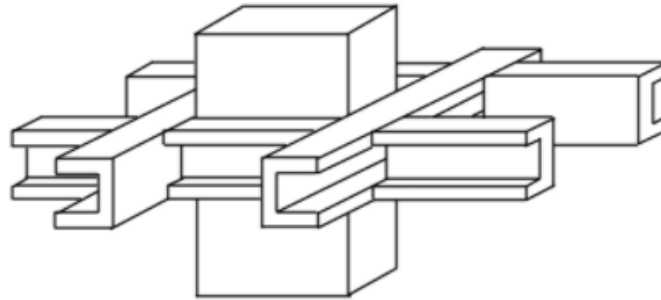
Fonte: Melgues (2001).

f) “*Shearheads*”

Conforme CACHIM (2004) apud. FERREIRA (2009), “*shearheads*” são perfis de aços, I ou U, colocados na ligação laje-pilar, na parte interna das lajes, para aumentar sua resistência ao

cisalhamento. Os perfis I atravessam a região da ligação e são dispostos em cruz, já os perfis U são dispostos adjacentes ao pilar, como indicado na FIG.10 abaixo.

Figura 10- “*Shearheads*”- perfil U.



Fonte: AltoQI.

Em MELGUES (2001) é possível perceber que esta armadura aumenta a resistência à punção e até certo ponto, a sua ductilidade. Apesar de eficiente, é um reforço caro e pesado, além do fato de aumentarem a resistência à flexão, tornando a ruptura do tipo frágil.

3.3. PRESCRIÇÕES DAS NORMAS

O dimensionamento da laje quanto à punção é especificado em diversas normas, apresentando algumas peculiaridades. Conforme MELGUES (2001) o modelo de cálculo que serviu para o desenvolvimento das especificações das normas de referência neste trabalho foi o da superfície de controle, que se baseia no cálculo de uma tensão de cisalhamento uniforme que age em uma superfície crítica e normal ao plano da laje, a uma distância específica do pilar ou área carregada. A seguir serão especificados os modelos de cálculo, bem como as armaduras recomendadas por algumas normas, a saber: ABNT NBR 6118, EUROCODE2, CEB-FIB MC 90 e ACI 318-11.

3.3.1. ABNT NBR 6118:2014

A ABNT NBR 6118:2014, preconiza que a verificação ao cisalhamento deve ser realizada em duas ou mais superfícies críticas, situadas ao redor das forças concentradas. Estas superfícies são:

- a) Contorno **C**: é a primeira superfície crítica, da carga ou do pilar, na qual se verifica, de forma indireta, a tensão de compressão diagonal do concreto por meio da tensão de cisalhamento média ao longo da espessura da laje.
- b) Contorno **C'**: é a segunda superfície crítica, situada a uma distância **2d** do pilar ou da carga concentrada, em que é verificada a capacidade da ligação da punção, que se relaciona com a resistência à tração diagonal. Também é verificada através de uma tensão de cisalhamento neste contorno.
- c) Contorno **C''**: terceira superfície crítica, que só será verificada caso haja a necessidade de armadura transversal.

A força cortante solicitante utilizada para verificação nos contornos é aquela obtida na análise global da estrutura. Além disto, a tensão cisalhante nas superfícies dependerá da posição do pilar e do carregamento aplicado.

3.3.1.1. Tensões de cisalhamento solicitantes para superfícies C e C'

a) Pilar interno com carregamento simétrico

A tensão de cisalhamento solicitante de cálculo (τ_{sd}) será igual a:

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u d} \quad (3.1)$$

Com:

d: altura útil da laje e igual a $d = \frac{(d_x + d_y)}{2}$, sendo **d_x** e **d_y** alturas úteis nas direções ortogonais;

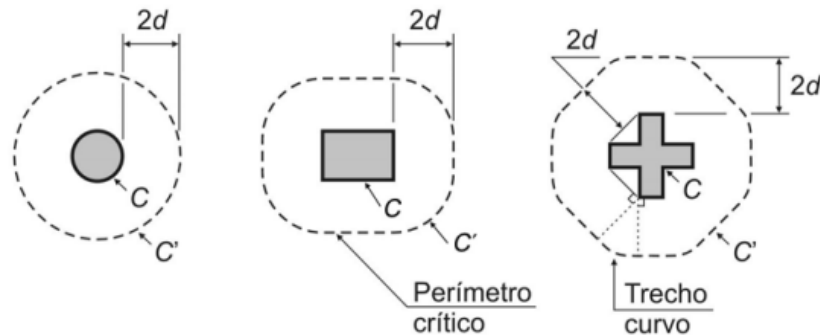
F_{sd}: força/reação concentrada de cálculo

u: perímetro do contorno crítico

ud: área da superfície crítica

O perímetro crítico para pilares internos é ilustrado na FIG.11.

Figura 11- Perímetro crítico de pilares internos.



Fonte: ABNT NBR 6118:2014.

b) Pilar interno com efeito de momento

Nesta situação deve-se levar em conta o efeito de assimetria, por existirem além de forças verticais, momentos atuantes. Desta forma, a tensão de cisalhamento será igual a:

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u d} + \frac{K M_{sd}}{W_p d} \quad (3.2)$$

Onde:

M_{sd} = momento solicitante de cálculo

K = coeficiente que permite encontrar a parcela do momento solicitante transferida ao pilar por cisalhamento. Este valor é tabelado e depende da relação entre C_1 (dimensão do pilar paralela à excentricidade da força) e C_2 (dimensão do pilar perpendicular à excentricidade da força), como indicado na TAB.1 abaixo. Já para pilares circulares $K=0,6$. Para pilares de canto, C_1 é a dimensão do pilar perpendicular e C_2 paralelo à borda livre analisada.

Tabela 1 – Coeficiente K

C_1/C_2	0,5	1,0	2,0	3,0
K	0,45	0,60	0,70	0,80

Fonte: ABNT NBR 6118:2014

W_p : módulo de resistência plástica do perímetro crítico u , que vai variar conforme a seção:

- Retangular: $W_p = \frac{C_1^2}{2} + C_1 C_2 + 4C_2 d + 16 d^2 + 2 \pi d C_1$

-Circular: $W_p = (D + 4d)^2$

Com d : diâmetro do pilar

Ou ainda: $W_p = \int_0^u |e| d\ell$, desprezando-se a curvatura dos cantos do perímetro crítico.

e : distância de $d\ell$ ao eixo que passa pelo centro do pilar onde atua o momento M_{sd}

$d\ell$: comprimento infinitesimal no perímetro u

c) Pilar de borda sem momento atuando no plano paralelo à borda livre

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u^* d} + \frac{K_1 M_{sd1}}{W_{p1} d} \quad (3.3)$$

Com:

u^* : perímetro crítico reduzido

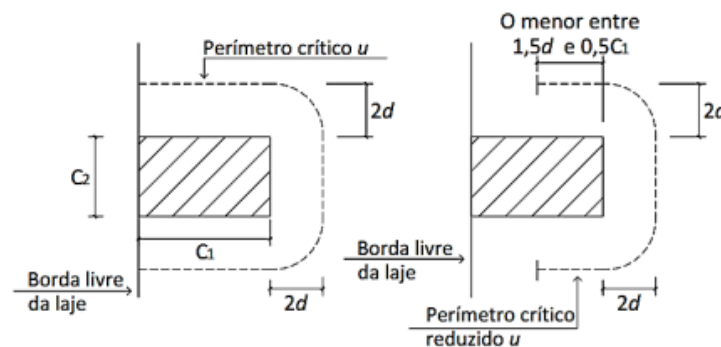
K_1 = coeficiente obtido da mesma forma que K

M_{sd1} : momento solicitante de cálculo perpendicular à borda livre e igual a $M_{sd1} = (M_{sd} - M_{sd}^*)$ e M_{sd}^* : momento solicitante de cálculo devido à excentricidade do perímetro crítico reduzido u^* em relação ao centro do pilar

W_{p1} : módulo de resistência plástica do perímetro crítico u , perpendicular à borda livre

O perímetro crítico para pilares de borda pode ser visualizado na FIG.12.

Figura 12- Perímetro crítico de pilares de borda.



Fonte: ABNT NBR 6118:2014.

c) Pilar de borda com momento atuando no plano paralelo à borda livre

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u^* d} + \frac{K_1 M_{sd1}}{W_{p1} d} + \frac{K_2 M_{sd2}}{W_{p2} d} \quad (3.4)$$

Sendo:

W_{p2} : módulo de resistência plástica do perímetro crítico u , paralela à borda livre

M_{sd2} : momento solicitante de cálculo paralelo à borda livre

Os valores de K_2 podem ser encontrados na tabela de K , porém a relação C_1/C_2 passará a ser $C_1/2C_2$

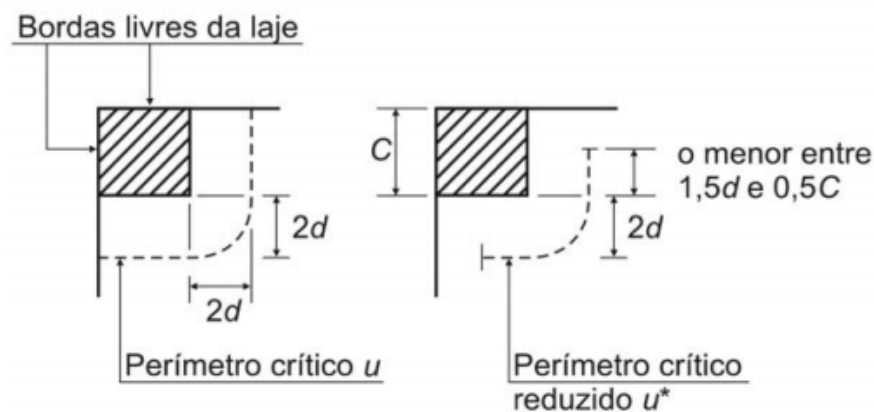
As equações de verificação acima, independente do tipo de pilar e de carregamento, devem ser usadas tanto para a superfície C quanto para C' .

d) Pilar de canto

Quando não houver momento atuando na direção paralela à borda, usam-se as mesmas equações do pilar de borda. Além disto, devem ser verificadas ambas as bordas isoladamente, levando em conta o momento que atua na direção perpendicular ao plano analisado. Para o coeficiente K deve ser utilizada a relação C_1/C_2 .

O perímetro crítico para pilares de canto pode ser visualizado na FIG.13.

Figura 13- Perímetro crítico de pilares de canto.



Fonte: ABNT NBR 6118:2014.

3.3.1.2. Tensões de cisalhamento resistentes para superfícies C e C'

Na superfície C a tensão de cisalhamento de cálculo (τ_{sd}) deve ser limitada à resistência ao cisalhamento resistente (τ_{rd2}) conforme a relação seguinte:

$$\tau_{sd} \leq \tau_{rd2} = 0,27\alpha_v f_{cd} \quad (3.5)$$

E:

τ_{rd2} : tensão de cisalhamento resistente de cálculo para verificação da compressão diagonal do concreto na ligação laje-pilar

$\alpha_v = (1 - \frac{f_{ck}}{250})$ e f_{ck} dado em MPa

f_{ck} : resistência característica à compressão do concreto

f_{cd} : resistência de cálculo à compressão do concreto

Podendo este valor ser ampliado em 20%.

Para a superfície C' sem armadura de punção a resistência (τ_{rd1}) é dada por:

$$\tau_{sd} \leq \tau_{rd1} = 0,13 \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}} \right) (100\rho f_{ck})^{\frac{1}{3}} + 0,1\sigma_{cp} \quad (3.6)$$

Com:

τ_{rd1} : tensão de cisalhamento resistente de cálculo-limite, para que uma laje possa prescindir de armadura transversal para resistir à força cortante

ρ : taxa geométrica da armadura de flexão aderente = $\sqrt{\rho_x \rho_y}$, sendo ρ_x e ρ_y as taxas de armadura nas duas direções e são: - na largura será igual à dimensão ou área acrescida de $3d$ para cada lado;

- na proximidade com a borda prevalece a distância até a borda, se esta for menor que $3d$.

σ_{cp} : tensão inicial do concreto

Já para o cálculo da tensão resistente para a superfície C' com armadura de punção, pode-se utilizar a seguinte equação:

$$\tau_{sd} \leq \tau_{rd1} = 0,13 \left(1 + \sqrt{\frac{20}{d}} \right) (100\rho f_{ck})^{\frac{1}{3}} + 0,1\sigma_{cp} + 1,5 \frac{d A_{sw} f_{ywd} \sin \alpha}{s_r u d} \quad (3.7)$$

E:

s_r : espaçamento radial das linhas da armadura de punção $\leq 0,75d$

A_{sw} : área da armadura de punção no contorno paralelo a C'

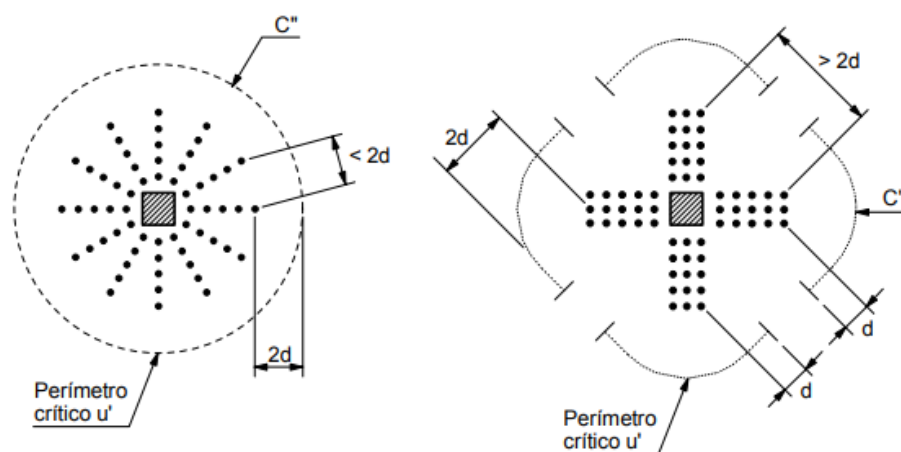
f_{ywd} : resistência de cálculo da armadura de punção: $f_{ywd} \leq 300\text{MPa}$ para o caso de conectores. Para estribos, com lajes até 15 cm este valor deve ser $f_{ywd} \leq 250\text{MPa}$ e $f_{ywd} \leq 435\text{MPa}$ para lajes com mais de 35cm, para lajes com valor intermediário este valor deve ser interpolado

α : ângulo de inclinação situado entre o plano da laje e o eixo da armadura de punção

Sendo a armadura utilizada composta por no mínimo três linhas de conectores tipo pino e colocadas de forma radial no perímetro do pilar, além disto, sua ancoragem deve ser feita fora do campo da armadura de flexão.

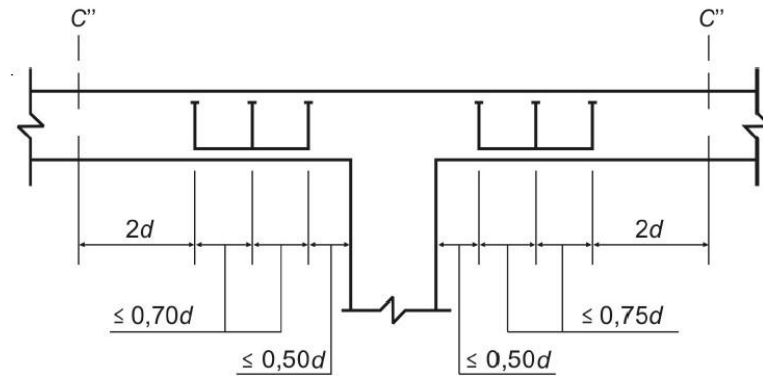
A superfície crítica C'' deve ser encontrada quando houver a necessidade de armadura de punção e se situa paralelamente ao contorno C' e será definido um contorno C'' situado a uma distância $2d$ do último contorno de armadura até que $\tau_{sd} \leq \tau_{rd1}$. Conforme ilustrado visto nas FIG.14 e FIG.15 abaixo. Além disto, devem ser realizadas três verificações, uma para tensão resistente do contorno C , uma para a tensão resistente no contorno C' , levando em conta a armadura de punção e outra para tensão resistente no contorno C'' , sem armadura de punção.

Figura 14- Distribuição das armaduras e superfície C'' .



Fonte: ABNT NBR 6118:2014.

Figura 15- Distribuição das armaduras em corte.



Fonte: ABNT NBR 6118:2014.

3.3.1.3. Armadura de punção obrigatória

Se a estabilidade global da estrutura for dependente da resistência da laje à punção, é necessária a colocação de armadura mesmo que $\tau_{sd} \leq \tau_{rd1}$, sendo imprescindível que esta suporte pelo menos 50% da força concentrada de cálculo.

3.3.1.4. Colapso progressivo

A armadura de flexão que atravessa a superfície C precisa ser ancorada além de C' ou C'' e é igual a:

$$f_{yd}A_{s,ccp} \geq 1,5 F_{sd} \quad (3.8)$$

Sendo,

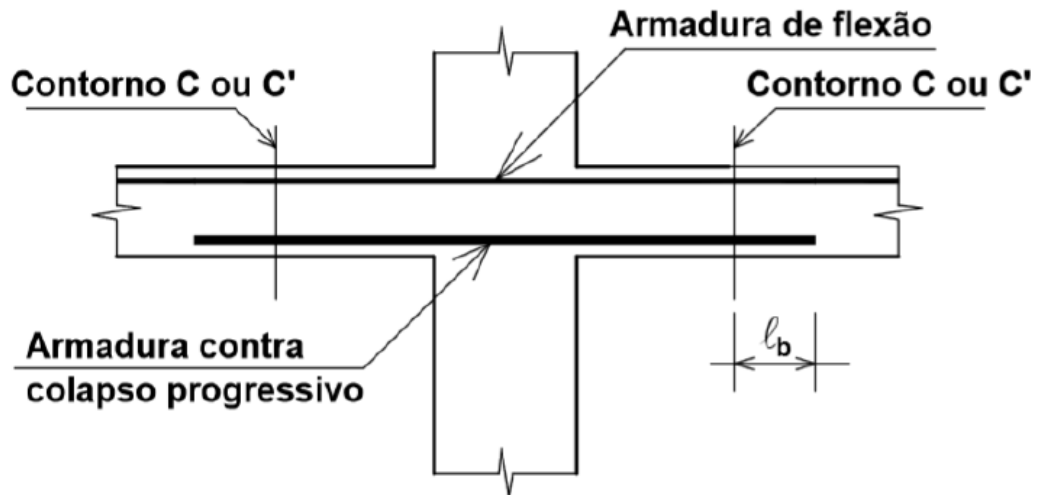
f_{yd} = resistência de cálculo do aço

$A_{s,ccp}$: soma das áreas das barras inferiores que atravessam cada face do pilar

F_{sd} : calculado com $\gamma_f = 1,2$

O posicionamento desta armadura se encontra na FIG.16.

Figura 16- Armadura contra colapso progressivo.

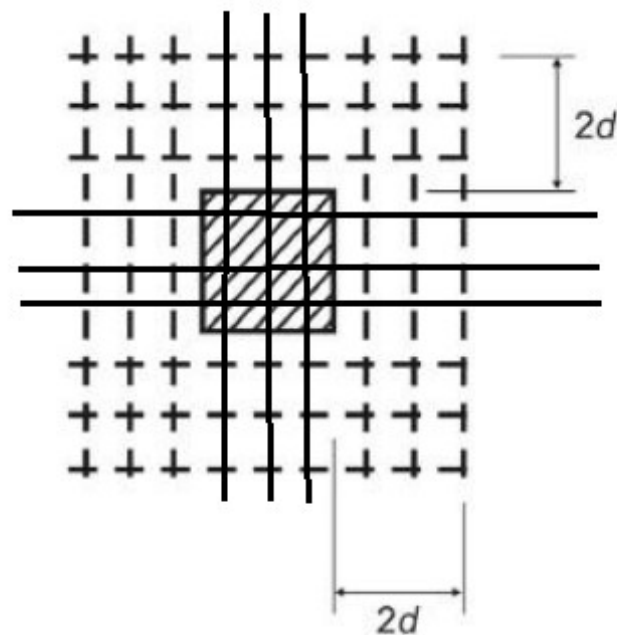


Fonte: ABNT NBR 6118:2014.

3.3.1.5. Armaduras

A ABNT NBR 6118:2014 recomenda a utilização preferencialmente de conectores tipo pino (tipo studs) ou ainda estribos, devendo este último ter diâmetro $\leq h/20$ da laje, havendo contato dos cantos dos estribos com as barra longitudinais. A FIG.17 abaixo indica os locais onde devem ser distribuídas as armaduras de punção e as distâncias a serem respeitadas.

Figura 17- Armadura de punção.

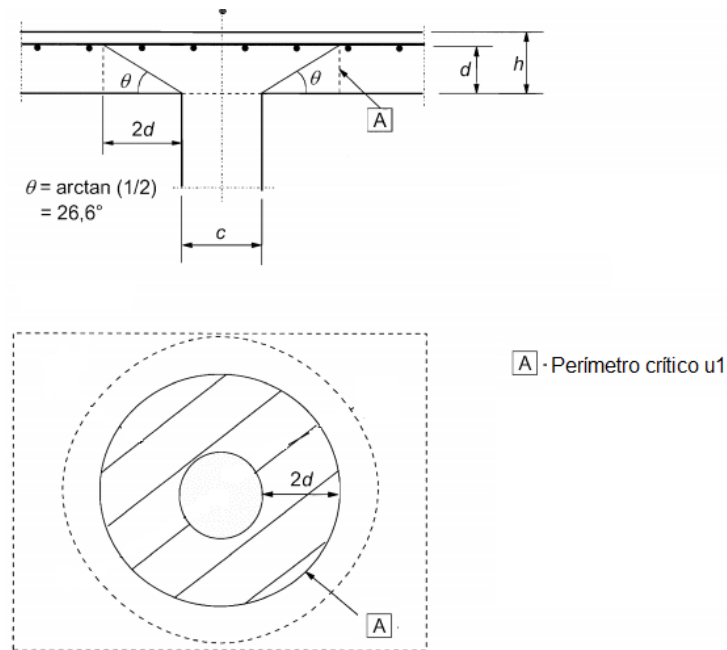


Fonte: ABNT NBR 6118:2014.

3.3.2. EUROCODE 2

O EUROCODE 2 cita que a punção pode resultar de uma carga concentrada ou da atuação de uma reação em uma área relativamente pequena chamada de área carregada de uma laje ou fundação A_{load} . A FIG.18 abaixo representa um modelo adequado para verificação da falha por punção no estado limite último em corte e no plano.

Figura 18- Modelo ideal para verificação da falha por punção no estado limite último.



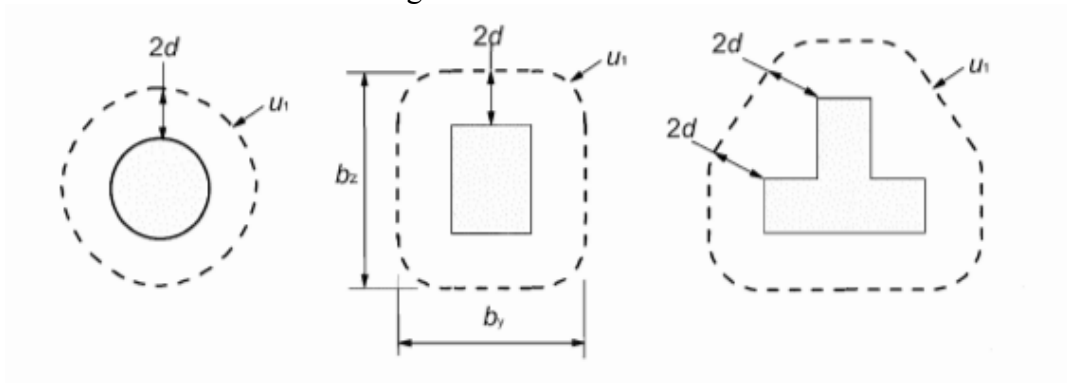
Fonte: EUROCODE 2 (2004).

A resistência ao cisalhamento deve ser verificada na face do pilar e no perímetro crítico u_1 . Caso seja necessário utilizar armaduras, um novo perímetro $u_{out,ef}$ deve ser encontrado até que a armadura de cisalhamento não seja mais necessária.

3.3.2.1. Perímetro crítico

O perímetro crítico u_1 , geralmente, está situado a uma distância $2d$ da área de carregamento, como indicado na FIG.19 e deve ser avaliado de modo a minimizar seu comprimento.

Figura 19- Perímetros críticos.



EUROCODE 2 (2004).

Fonte:

A altura útil será igual a:

$$d = \frac{(d_y + d_z)}{2}$$

Sendo d_y e d_z as alturas úteis de reforço nas duas direções ortogonais.

Além disto, esta norma especifica os casos especiais em que o perímetro de contorno será diferente de $2d$, como áreas com aberturas, áreas situadas em bordas, dentre outras.

3.3.2.2. Cálculo da tensão de cisalhamento na punção

Consiste em verificar a face do pilar e o perímetro crítico u_1 . No caso da necessidade de armadura de punção será verificado também o perímetro $u_{out,ef}$ até que o reforço de cisalhamento não seja mais necessário. As tensões de cisalhamento nestas regiões são definidas como:

$V_{Rd,c}$: tensão de cisalhamento resistente de cálculo da laje sem reforço de armadura de punção ao longo da seção considerada.

$V_{Rd,cs}$: tensão de cisalhamento resistente de cálculo da laje com reforço de armadura de punção ao longo da seção considerada.

$V_{Rd,max}$: tensão de cisalhamento resistente de cálculo máxima ao longo da seção considerada.

Devem ser feitas verificações: no perímetro do pilar ou no perímetro da área carregada (perímetro crítico). A máxima tensão de cisalhamento (V_{Ed}) não deve ultrapassar:

$$V_{Ed} \leq V_{Rd,max}$$

Além disto, a armadura de punção não será necessária se:

$$V_{Ed} \leq V_{Rd,c}$$

Caso contrário será necessária armadura de combate à punção.

A máxima tensão de cisalhamento, V_{Ed} , no caso de reação excêntrica no perímetro de controle, será de:

$$V_{Ed} = \beta \frac{V_{Ed}}{u_1 d} \quad (3.9)$$

Sendo β um coeficiente igual a $\beta = 1 + k \frac{M_{ED}}{V_{ED}} \frac{u_1}{W_1}$.

Podendo ainda ser $\beta = 1 + 0,6\pi \frac{e}{D+4d}$, para pilares circulares internos. Onde D é o diâmetro

do pilar e “ e ” a excentricidade, igual a $e = \frac{M_{ED}}{V_{ED}}$. Ou ainda $\beta = 1 + 1,8 \sqrt{\left(\frac{e_y}{b_z}\right)^2 + \left(\frac{e_z}{b_y}\right)^2}$, sendo

e_y e e_z as excentricidades nas direções y e z e b_y e b_z as dimensões dos perímetros críticos.

d : altura útil

u_1 : perímetro crítico

M_{ED} : momento de projeto de flexão interno

k : coeficiente que depende do raio entre os pilares de dimensão c_1 e c_2 e pode ser encontrado na TAB.2 abaixo:

Tabela 2 – Coeficiente K

c_1/c_2	$\leq 0,5$	1,0	2,0	$\geq 3,0$
k	0,45	0,60	0,70	0,80

Fonte: EUROCODE 2 (2004).

W_1 : corresponde à distribuição de cisalhamento e é uma função do perímetro crítico:

$$W_1 = \int_0^{u_1} |e| dl$$

dl : comprimento de incremento do perímetro

e : é a distância de dl no eixo sobre o qual o momento M_{ED} atua

Assim como na NBR 6118, para seção retangular:

$$W_1 = \frac{c_1^2}{2} + c_1 c_2 + 4c_2 d + 16 d^2 + 2 \pi d c_1$$

Sendo c_1 a dimensão do pilar paralela ao carregamento excêntrico e c_2 a dimensão do pilar perpendicular ao carregamento excêntrico.

Para pilares de bordas, onde a excentricidade perpendicular à borda está direcionada para o interior e sem excentricidade paralela à borda, a força de punção será considerada uniforme em todo o perímetro crítico. As excentricidades em ambas as bordas ortogonais podem ser encontradas através de:

$$\beta = \frac{u_1}{u_1^*} + k \frac{u_1}{W_1} e_{par}$$

Com,

u_1^* : perímetro crítico reduzido

e_{par} : é a excentricidade paralela à borda da laje resultante de um momento em torno de um eixo perpendicular à borda da laje do pilar de borda

E W_1 para pilar retangular igual a:

$$W_1 = \frac{c_2^2}{2} + c_1 c_2 + 4c_1 d + 8 d^2 + \pi d c_2$$

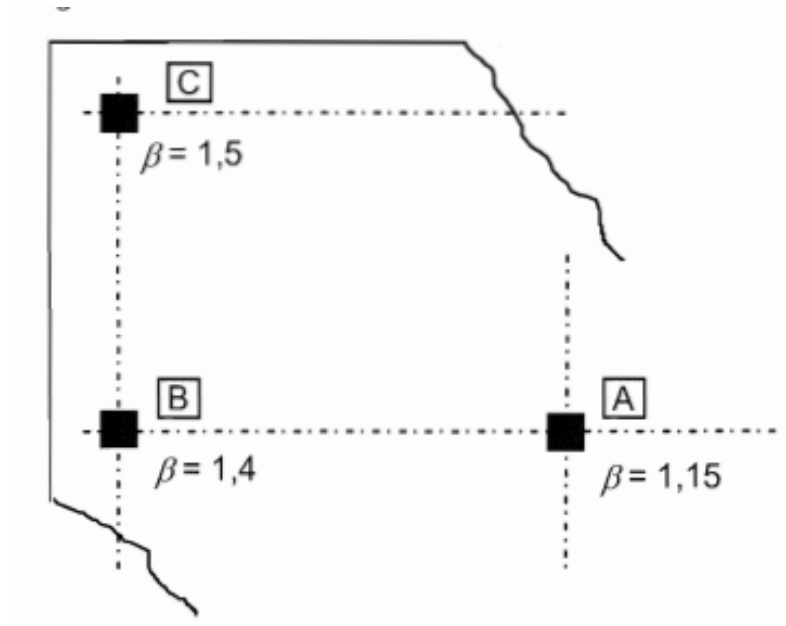
Caso a excentricidade seja perpendicular à borda e não esteja direcionada para o interior,

$$\beta = 1 + k \frac{M_{ED}}{V_{ED}} \frac{u_1}{W_1}$$

Já para pilares de canto, onde a excentricidade se dá em direção ao interior da laje, considera-se que a força de punção esta uniformemente distribuída sobre o perímetro crítico reduzido e

$$\beta = \frac{u_1}{u_1^*}. \text{ Caso a excentricidade ocorra em direção ao exterior usar } \beta = 1 + k \frac{M_{ED}}{V_{ED}} \frac{u_1}{W_1}.$$

Para estruturas onde a estabilidade lateral não depende da interação laje-pilar e onde os comprimentos dos vãos adjacentes não diferem em mais de 25%, podem ser usados os valores de β da FIG.20 abaixo.

Figura 20- Valores de β .

Fonte: EUROCODE 2 (2004).

3.3.2.3. Tensão de cisalhamento resistente para lajes sem armadura de punção

A tensão de cisalhamento resistente de punção ($V_{Rd,c}$) pode ser calculada por:

$$V_{Rd,c} = C_{Rd,c} k (100\rho_l f_{ck})^{1/3} + k_1 \sigma_{cp} \geq (v_{min} + \sigma_{cp}) \quad (3.10)$$

Sendo:

f_{ck} em MPa

$C_{Rd,c}$ tem valor recomendado de $0,18/\gamma_c$

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2, \text{ com } d \text{ em mm}$$

$\rho_l = \sqrt{\rho_{ly} + \rho_{lz}} \leq 0,02$, referente à tensão do aço nas direções y e z e devem ser calculados levando em conta a largura da laje igual a largura da laje mais $3d$ de cada lado.

$$k_1 = 0,1$$

$\sigma_{cp} = (\sigma_{cy} + \sigma_{cz})/2$, com $\sigma_{cy} = \frac{N_{Ed,y}}{A_{cy}}$ e $\sigma_{cz} = \frac{N_{Ed,z}}{A_{cz}}$, sendo $N_{Ed,y}$ e $N_{Ed,z}$ as forças longitudinais e A_c a área de concreto

$$v_{min} = 0,035k^{3/2} k^{1/2}$$

A resistência à punção dos pilares deve ser verificada em um perímetro de $2d$ ao redor do pilar. Para carregamento concentrado, a força será:

$$V_{ED,red} = V_{ED} - \Delta V_{ED} \quad (3.11)$$

Sendo V_{ED} a força de cisalhamento aplicada e ΔV_{ED} a pressão do solo menos o peso próprio da base.

$$V_{ED} = V_{ED,red}/ud \quad (3.12)$$

$$V_{Rd} = C_{Rd,c} k (100\rho_l f_{ck})^{1/3} 2d/a \geq (v_{min} 2d/a) \quad (3.13)$$

Com:

a : distância da periferia do pilar até o perímetro crítico considerado.

Para carregamento excêntrico

$$V_{ED} = V_{ED,red}/ud \left[1 + k \frac{M_{Ed} u}{V_{ED,red} W} \right] \quad (3.14)$$

Sendo W calculado como W_1 , mas para o perímetro u .

3.3.2.4. Tensão de cisalhamento resistente para lajes com armadura de punção

Para os casos em que a armadura de cisalhamento será necessária, a tensão de cisalhamento resistente ($V_{Rd,cs}$) será igual a :

$$V_{Rd,cs} = 0,75V_{Rd,c} + 1,5(d/s_r)A_{sw}f_{ywd,ef}(1/(u_1d)) \sin \alpha \quad (3.15)$$

Com

A_{sw} : área de um perímetro de armadura de cisalhamento ao redor do pilar

s_r : distância radial do perímetro da armadura de cisalhamento

$f_{ywd,ef}$: tensão da armadura de cisalhamento efetiva. $f_{ywd,ef} = 250 + 0,25d \leq f_{ywd}$ em MPa.

α : ângulo entre a armadura de cisalhamento e o plano da laje

No caso de um único contorno com barras dobradas, a relação d/s_r será 0,67.

Adjacente ao pilar, a resistência de punção será:

$$V_{ED} = \frac{\beta V_{ED}}{u_0 d} \leq V_{Rd,max} \quad (3.16)$$

Com

u_0 : perímetro crítico

- para pilares internos = cercando o perímetro mínimo
- para pilares de borda = $c_2 + 3d \leq c_2 + 2c_1$
- para pilares de canto = $3d \leq c_1 + c_2$

$V_{Rd,max}$: variação conforme a região, mas recomenda-se $0,4vf_{cd}$, com

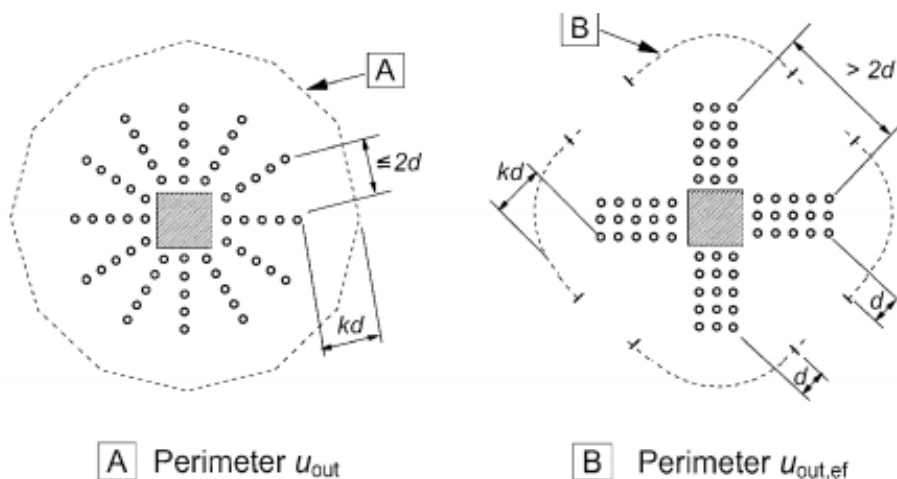
$$v = 0,6 \left[1 - \frac{f_{ck}}{250} \right], \text{ em MPa}$$

O perímetro crítico onde não será mais necessário colocação de armadura de punção será igual a:

$$u_{out} = \beta V_{ED} / V_{Rd,c} d$$

O perímetro mais externo não deverá ser colocado a uma distância maior que kd dentro de u_{out} como demonstrado na FIG.21 abaixo, sendo valor de k recomendado igual a 1,5.

Figura 21- Perímetro mais externo.

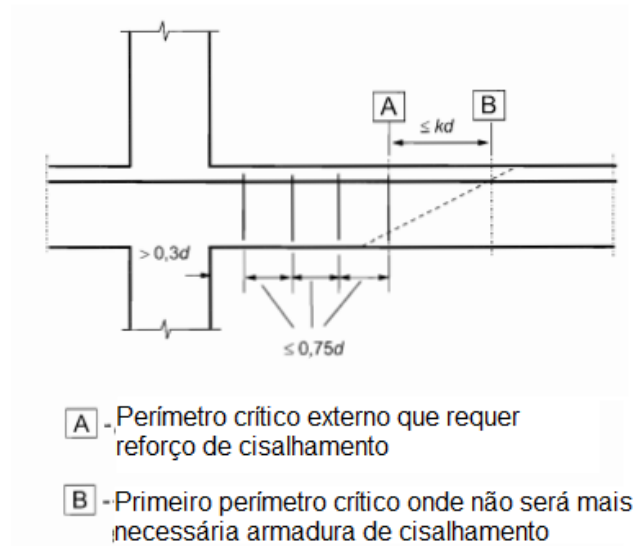


Fonte:EUROCODE 2 (2004).

Esta norma recomenda como armaduras de cisalhamento os estribos e as barras dobradas. A armadura deverá ser colocada dentro do limite do pilar até uma distância kd até que não seja mais necessário o reforço. Deverão ser colocados pelo menos dois perímetros de estribos, sendo que o espaçamento entre eles não deve exceder $0,75d$. Além disto, não devem distar

mais que $1,5d$ do primeiro contorno crítico e $2d$ entre as linhas de conectores externas ao perímetro crítico, desde que esta região contribua para o cisalhamento. Como indicado na FIG.22 abaixo.

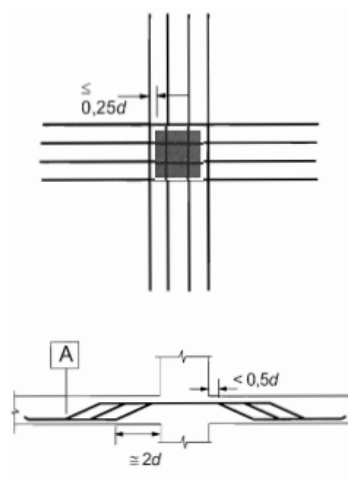
Figura 22- Espaçamentos dos estribos.



Fonte: EUROCODE 2 (2004).

Para barras dobradas, um perímetro pode ser considerado suficiente, como na FIG. 23.

Figura 23- Espaçamento das barras dobradas.



Fonte: EUROCODE 2 (2004).

A área de estribos será:

$$A_{\min}(1,5 \sin \alpha + \cos \alpha)/(s_r s_t) \geq 0,08 \frac{\sqrt{f_{ck}}}{f_{yk}} \quad (3.17)$$

Sendo

A_{min} = área mínima de armadura de cisalhamento

α : ângulo entre o reforço de cisalhamento e a armadura principal

s_r : espaçamento dos estribos na direção radial

s_t : espaçamento dos estribos na direção tangencial

f_{yk} : resistência característica ao escoamento do aço

Barras dobradas que atravessem a região carregada ou a uma distância $0,25d$ desta área podem ser usadas como armadura de punção. Além disto, a distância entre uma face de suporte ou uma área carregada e a área de cisalhamento mais próxima não deverá exceder $d/2$, devendo esta distância ser considerada em relação à armadura de tração.

3.3.3. CEB FIB MC 90

A resistência de punção ocasionada por forças concentradas atuando na laje sem reforços de cisalhamento pode ser verificada em função das tensões de cisalhamento atuantes no perímetro crítico. Assim a tensão de cisalhamento de cálculo deve estar limitada à resistência do concreto, de acordo com:

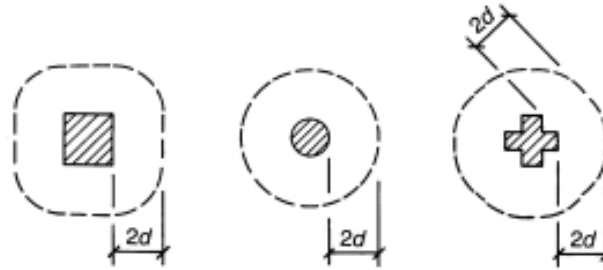
$$\tau_{sd} \leq \tau_{rd}$$

τ_{sd} = tensão solicitante de cálculo

τ_{rd} = tensão resistente de cálculo

A menos que a força concentrada seja influenciada por uma alta pressão distribuída ou pelo efeito de um carregamento ou reação a uma distância igual a $2d$ da periferia da área de aplicação da força, o perímetro crítico u_1 pode ser tomado a uma distância $2d$ desta periferia e deverá ser construído de forma a minimizar seu comprimento. A FIG.24 apresenta o perímetro crítico para alguns tipos de pilares.

Figura 24- Perímetro crítico.



Fonte: CEB-FIB MC 90.

A altura útil será calculada como:

$$d = \frac{(d_x + d_y)}{2}$$

Sendo d_x e d_y as alturas úteis de reforço nas duas direções ortogonais.

3.3.3.1. Tensão solicitante de cálculo

a) Para carregamento simétrico

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u_1 d} \quad (3.18)$$

Sendo:

F_{sd} é a força concentrada

u_1 , o comprimento do perímetro crítico

b) Para pilares internos com transferência de momento (não simétrico com momento)

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u_1 d} + \frac{KM_{sd}}{W_l d} \quad (3.19)$$

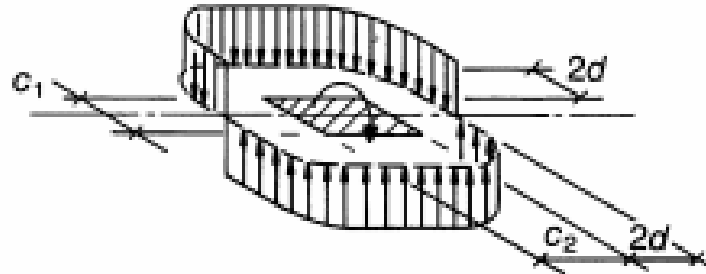
Sendo que a notação utilizada denota o seguinte:

M_{sd} : momento solicitante de cálculo

W_l : é um parâmetro do perímetro crítico u_1 , correspondente ao carregamento de cisalhamento distribuído, como pode ser visto na FIG. 25 e será igual a $W_l = \int_0^u |e| dl$, onde dl é o comprimento elementar do perímetro e e é a distância de dl do eixo sobre o qual o momento

atua. Para pilar retangular: $W_1 = \frac{c_1^2}{2} + c_1 c_2 + 4c_2 d + 16d^2 + 2\pi d c_1$, com c_1 e c_2 sendo as dimensões, paralela e perpendicular, respectivamente, ao carregamento excêntrico.

Figura 25-Cisalhamento distribuído.



Fonte: CEB-FIB MC 90.

K denota o coeficiente que depende do raio entre a dimensão do pilar c_1 paralela à excentricidade M_{Sd}/F_{Sd} e c_2 perpendicular à excentricidade e pode ser obtido na TAB.3 abaixo:

Tabela 3 – Coeficiente K

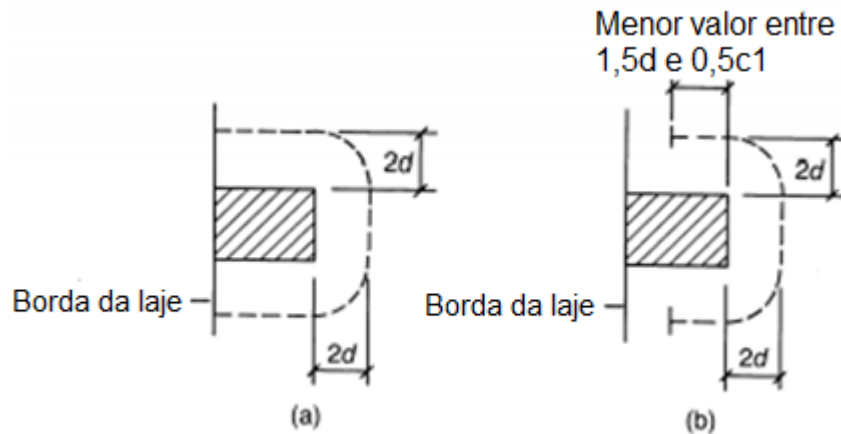
c_1/c_2	0.5	1.0	2.0	3.0
K	0.45	0.60	0.70	0.80

Fonte: CEB-FIB MC 90.

c) Para pilares de borda

Inicialmente a distribuição do cisalhamento ao redor do perímetro indicado na FIG.26-a deverá ser determinada para se calcular a tensão solitante, porém, desde que a excentricidade do carregamento na direção perpendicular à borda da laje esteja em direção ao interior da laje e não haja excentricidade na direção paralela à borda, a tensão solitante deverá ser calculada em função de um cisalhamento uniforme no perímetro u_1^* , como demonstrado na FIG.26-b.

Figura 26- Perímetro crítico para pilares de borda, sendo (a) u_1 e (b) u_1^* .

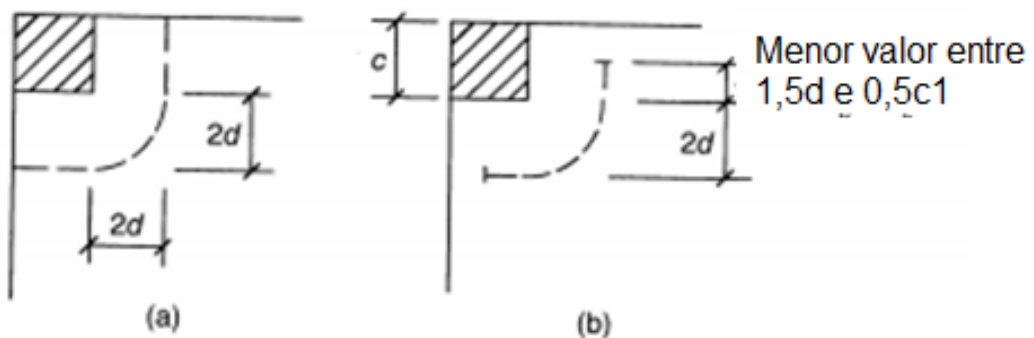


Fonte: CEB-FIB MC 90.

c) Para pilares de canto

Inicialmente a distribuição do cisalhamento ao redor do perímetro indicado na FIG.27-a deverá ser determinada para se calcular a tensão solicitante, porém, desde que a excentricidade do carregamento ocorra em direção ao interior da laje, a tensão solicitante deverá ser calculada em função de um cisalhamento uniforme no perímetro u_1^* , como demonstrado na FIG.27-b.

Figura 27- Perímetro crítico para pilares de canto, sendo (a) u_1 e (b) u_1^* .



Fonte: CEB-FIB MC 90.

A tensão de cisalhamento solicitante para ambos os casos será:

$$\tau_{sd} = \frac{F_{Sd}}{u_1^* d} + \frac{KM_{Sd}}{W_1 d} \quad (3.20)$$

Sendo o valor de K encontrado na tabela anterior, porém, a relação c_1/c_2 passará a ser $c_1/2c_2$.

W_1 é calculado para o perímetro completo u_1 .

3.3.3.2. Tensão resistente de cálculo

$$\tau_{Rd,c} = 0,12 \xi (100\rho f_{ck})^{1/3} \quad (3.21)$$

Sendo

$$\xi = 1 + \sqrt{200/d}, \text{ com } d \text{ em mm}$$

f_{ck} limitado a 50 MPa, a menos que evidências experimentais relevantes estejam disponíveis para o concreto em questão

$\rho = \sqrt{\rho_x \rho_y}$, em cada direção ρ deverá ser calculada para uma largura igual dimensão lateral do pilar (área carregada) adicionada de $3d$ para cada lado dele ou para a borda da laje se estiver mais próximo.

3.3.3.3. Resistência máxima

O carregamento máximo utilizado nos cálculos é limitado por:

$$F_{Sd,ef}/u_o d \leq 0,5f_{cd2} \quad (3.22)$$

Sendo

f_{cd2} = tensão de compressão

$F_{Sd,ef}$: é a carga de punção aprimorada para permitir os efeitos de um momento eventual transferido para uma coluna para uma carga interna ou coluna

u_o : para um carregamento ou pilar interno será o comprimento do perímetro do carregamento ou do pilar

$$\text{Para pilar de borda } u_o = c_z + 3d \leq c_x + 2d$$

$$\text{Para pilar de canto } u_o = 3d \leq c_x + c_y$$

c_x e c_y são respectivamente as dimensões do pilar paralela e perpendicular à borda da laje

Assim:

Para um pilar interno:

$$F_{Sd,ef} = F_{Sd} \left[1 + K \frac{M_{Sd} u_1}{F_{Sd} W_1} \right] \quad (3.23)$$

Para um pilar de borda:

$$F_{Sd,ef} = F_{Sd} \left[1 + K \frac{M_{Sd} u_1^*}{F_{Sd} W_1} \right] \quad (3.24)$$

Sendo M_{Sd} o momento paralelo à borda da laje.

Para um pilar de canto:

$$F_{Sd,ef} = F_{Sd} \quad (3.25)$$

3.3.3.4. Lajes com armadura de cisalhamento

A resistência à punção de lajes com armadura de cisalhamento será verificada em três zonas:

- a) zona imediatamente adjacente ao pilar ou área carregada
- b) zona em que a armadura de cisalhamento é colocada
- c) zona fora da armadura de cisalhamento

Nos pilares internos, onde as conexões estão sujeitas a carregamento simétrico, nos pilares de borda, onde existe uma excentricidade paralela à borda da laje e uma excentricidade perpendicular a ela em direção ao interior da laje e nos pilares de canto, onde a excentricidade das reações ocorre em direção ao interior das lajes, a verificação pode ser feita conforme as especificações abaixo:

- a) Adjacente ao pilar

$$F_{Sd} \leq u_o d (0,5 f_{cd2}) \quad (3.26)$$

Com:

u_o : Para pilar interno: $u_o =$ comprimento da periferia do pilar

Para pilar de borda: $u_o = c_x + 3d \leq c_x + 2c_y$, sendo c_x a dimensão do pilar paralela à borda da laje

Para pilar de canto: $u_o = 3d \leq c_x + c_y$

- b) na zona com armadura de cisalhamento

$$F_{Sd} \leq 0,09\xi (100\rho f_{ck})^{1/3}u_1d + 1,5 \frac{d}{s_r} A_{sw} f_{ywd} \sin \alpha \quad (3.27)$$

Onde:

f_{ywd} : resistência de projeto do reforço de cisalhamento

A_{sw} : é a área de armadura de cisalhamento na camada ao redor do pilar

s_r : é o raio da camada de armadura de cisalhamento

α : é o ângulo entre a armadura de cisalhamento e o plano da laje

Além disto, $1,5 \frac{d}{s_r} A_{sw} f_{ywd} \sin \alpha \geq 0,03(100\rho f_{ck})^{1/3}u_1d$. Com f_{ywd} menor que 300 MPa.

Para pilares de borda e de canto, a menos que uma análise de distribuição de cisalhamento seja feita, o perímetro u_1^* deve ser usado para u_1 .

c) zona fora da armadura de cisalhamento

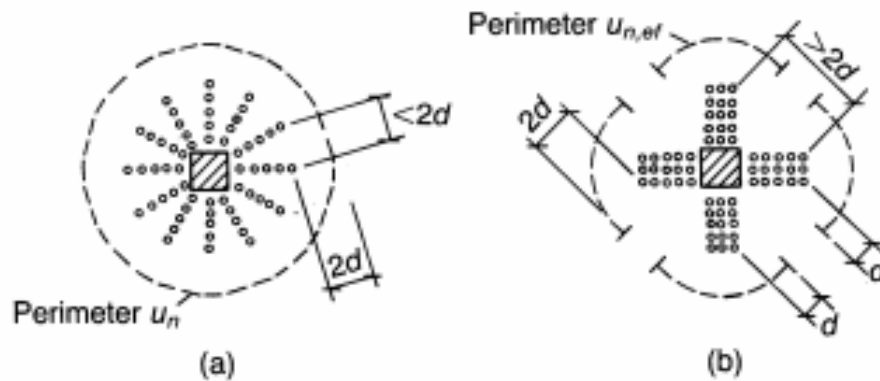
$$F_{Sd} \leq 0,12\xi (100\rho f_{ck})^{1/3}u_{n,ef}d \quad (3.28)$$

Onde:

$u_{n,ef}$: é o comprimento efetivo do perímetro construído a uma distância $2d$ fora da armadura de cisalhamento externo

ρ : é calculado para a armadura cruzando $u_{n,ef}$

Se o espaçamento circunferencial da armadura de cisalhamento mais externa exceder $2d$, $u_{n,ef}$ é a soma dos comprimentos dos perímetros correspondentes às partes da periferia da armadura de cisalhamento dentro das distâncias $2d$ dos elementos da armadura de cisalhamento. A FIG.28 representa o perímetro u_n .

Figura 28- Perímetro crítico u_n .

Fonte: CEB-FIB MC 90.

Além disto, os requisitos abaixo devem ser seguidos:

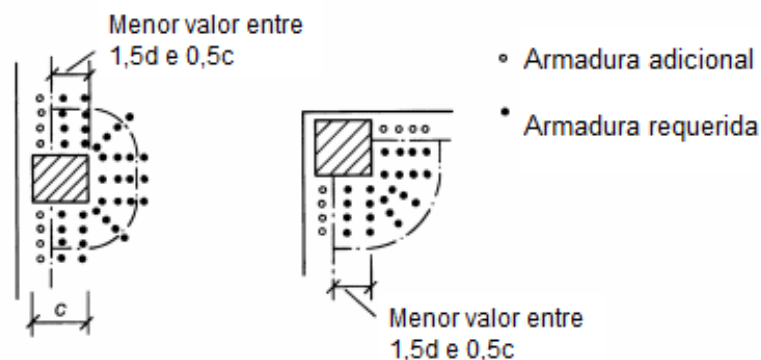
A distância entre a armadura mais interna e a periferia do pilar não pode exceder βd , com

$$\beta = \frac{\text{capacidade da laje sem armadura de cisalhamento}}{\text{capacidade necessária}} \leq 0,5$$

A distância das armaduras de cisalhamento não deverá exceder $0,75d$.

Para pilares de borda e de canto, a armadura de cisalhamento deverá ser colocada dentro da região indicada na FIG. 29.

Figura 29- Armadura de cisalhamento em pilares de borda e de canto.



Fonte: CEB-FIB MC 90.

Nos pilares internos em que momentos são transferidos e em pilar de borda onde há excentricidade de carregamento paralelo à borda, a força F_{sd} deve ser ampliada para $F_{sd,ef}$ para permitir a influência do momento transferido. Assim:

Adjacente ao pilar e na zona com armadura de cisalhamento:

$$F_{Sd,ef} = F_{Sd} \left[1 + K \frac{M_{Sd}}{F_{Sd}} \frac{u_1}{W_1} \right] \quad (3.29)$$

Fora da armadura de cisalhamento

$$F_{Sd,ef} = F_{Sd} \left[1 + K \frac{M_{Sd}}{F_{Sd}} \frac{u_{n,ef}}{W_{n,ef}} \right] \quad (3.30)$$

A verificação deve então ser feita como conexão sem excentricidade de carregamento e a armadura de cisalhamento deve ser colocada uniformemente ao redor do pilar.

3.3.3.5. Armadura de punção

Conforme a norma CEB-FIP MC 90 pode ser usada como armadura de punção:

- a) Estribos, colocados a uma distância que não ultrapasse $2d$ e 800mm da área carregada e o espaçamento entre eles deve ser:

$$s \leq 0,75d(1 + \cos \alpha)$$

- b) Barras dobradas que passem acima da área definida por uma linha de contorno localizada a uma distância $d/4$ da linha de contorno da área carregada.

3.3.4. ACI 318-11

Esta norma preconiza que a análise das tensões de cisalhamento será realizada dentro de um perímetro b_o , localizado a no máximo $d/2$ das bordas ou cantos dos pilares ou área carregadas.

A verificação do cisalhamento será realizada em função da seguinte inequação:

$$\phi V_n \geq V_u$$

Onde:

V_u = força resistente de cálculo

ϕ = fator de redução = 0,85

V_n = força atuante de cálculo = $V_c + V_s$, com V_c : resistência nominal ao cisalhamento do concreto e V_s : resistência nominal ao cisalhamento do aço (caso seja necessário o reforço com armadura de cisalhamento).

O valor de V_c será o menor entre:

$$V_c = 0,17 \left(1 + \frac{2}{\beta} \right) \lambda \sqrt{f_c'} \quad (3.31)$$

Ou

$$V_c = 0,083 \left(2 + \frac{\alpha_s d}{b_o} \right) \lambda \sqrt{f_c'} \quad (3.32)$$

Ou

$$V_c = 0,33 \lambda \sqrt{f_c'} \quad (3.33)$$

Com

β : razão entre os comprimentos do maior e o menor lado do pilar

f_c' : resistência característica à compressão do concreto em MPa

d : altura útil da laje

α_s : 40 para pilares internos

30 para pilares de borda

20 para pilares de canto

$\lambda = 1$

Quando V_u exceder ϕV_n (ϕV_c), será necessário armadura de cisalhamento e a parcela V_s de resistência nominal ao cisalhamento do aço entra no cálculo de V_n . Além disto, V_c deverá ser limitado a:

$$V_c = 0,17 \sqrt{f_c'} \quad (3.34)$$

E V_n deverá ser limitado a:

$$V_n = 0,5 \sqrt{f_c'} \quad (3.35)$$

O valor de V_s será obtido através de:

$V_s = \frac{A_v f_{yt}}{s b_o}$, para armadura perpendicular ao eixo em questão.

$V_s = \frac{A_v f_{yt} (\sin \alpha + \cos \alpha) d}{s}$, para estribos inclinados ou para uma série ou grupo de barras paralelas dobradas a diferentes distâncias do suporte.

$V_s = A_v f_y \sin \alpha \leq 0,25 \sqrt{f'_c} b_w d$, para reforço com barras únicas ou grupo único de barras paralelas, dobradas, à mesma distância do suporte.

Além disto, $V_s \leq 0,66 \sqrt{f'_c} b_w d$.

Sendo:

b_o = perímetro da seção crítica para cisalhamento em lajes

A_v : área da armadura de cisalhamento dentro do espaçamento s .

f_{yt} : resistência ao escoamento do aço

f_y : resistência característica ao escoamento do aço

α : ângulo entre os estribos inclinados e o plano da laje

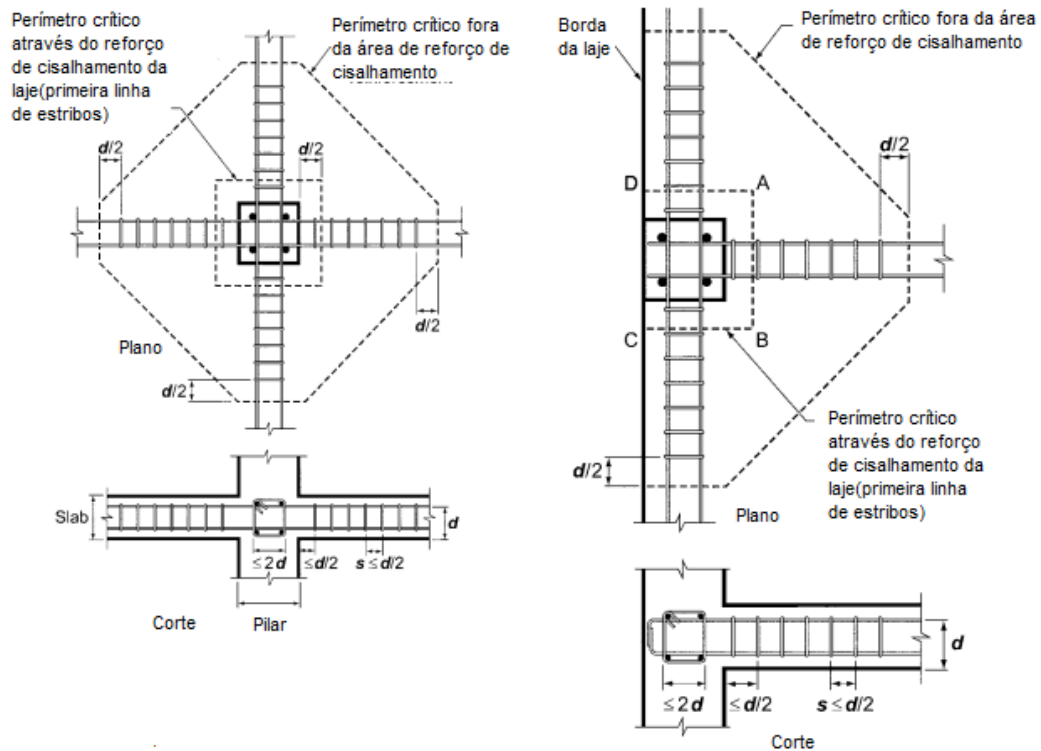
s : espaçamento

b_w : largura da laje

3.3.4.1. Especificações de armaduras

A distância entre a face do pilar e a primeira linha de estribos que circundam o pilar não deve exceder $d/2$ e o espaçamento entre esta primeira linha e a linha de estribos adjacente não deve exceder $2d$ medido em direção paralela à face do pilar. O espaçamento entre sucessivas linhas de armadura de cisalhamento que circundam o pilar não deve exceder $d/2$ medido em uma direção perpendicular à face do pilar. Como pode ser visto na FIG.30.

Figura 30- Distribuição de estribos em pilares internos e de borda.



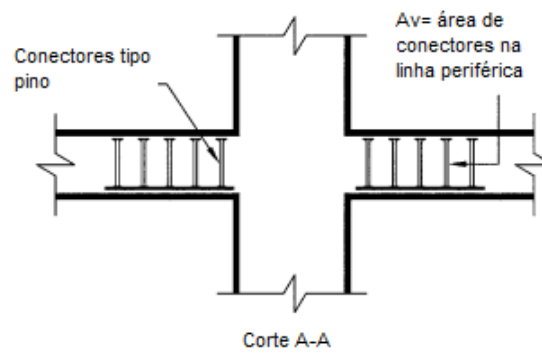
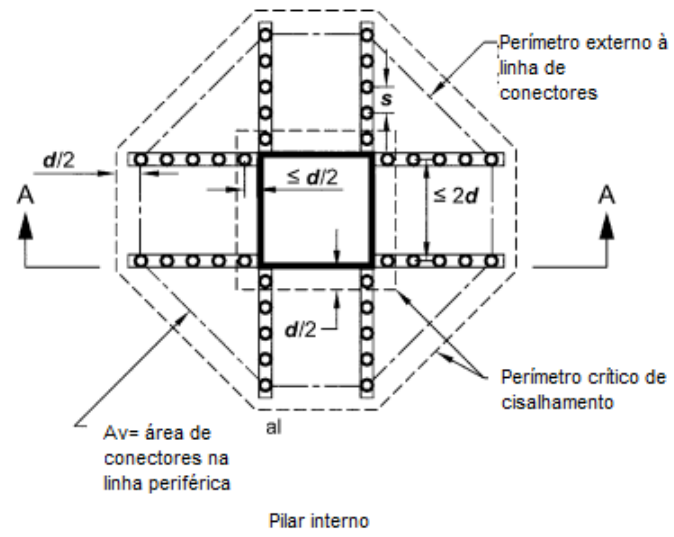
ACI 318-11.

Fonte:

É permitido o uso de reforços de aço estrutural ou *shearheads* (perfis metálicos), além de conectores tipo pino. Para este último o valor de $V_c \leq 0,25\sqrt{f'_c} b_o d$, $V_n \leq 0,166\sqrt{f'_c} b_o d$ e $V_s = \frac{A_v f_{yt} d}{s}$, com A_v igual à área da seção transversal de todas as armaduras de cisalhamento contidas em uma linha periférica.

A distância entre a face do pilar e a primeira linha de conectores não deve ultrapassar $d/2$ e o espaçamento entre os conectores adjacentes medido a partir da primeira linha de conectores não deve exceder $2d$. Como pode ser visualizado na FIG.31 abaixo.

Figura 31- Distribuição de conectores tipo pino.



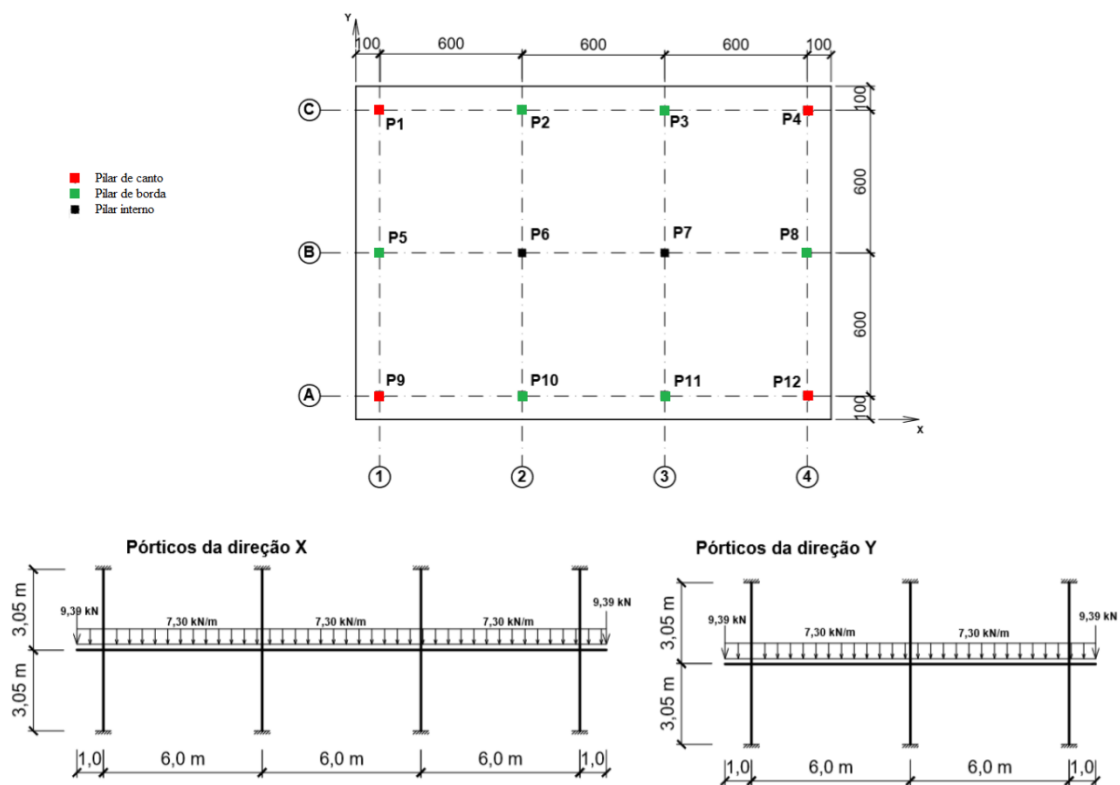
Fonte: ACI 318-11.

4. ANÁLISES E RESULTADOS

Como citado anteriormente serão apresentados exemplos numéricos práticos, onde para uma determinada laje, com dimensões padronizadas serão calculados o efeito da punção para pilares internos, de borda e de canto, com e sem armadura de punção. Os cálculos serão realizados conforme os critérios apresentados acima para cada uma das normas citadas e na sequência os resultados obtidos serão comparados.

A laje utilizada será uma laje cogumelo maciça de piso, em um edifício residencial de um edifício com vários andares e pé direito de 3,05m, conforme ilustrado na FIG. 32 abaixo, juntamente com a distribuição das cargas nas duas direções.

Figura 32- Laje cogumelo maciça e distribuição de carregamentos.



Fonte:

Adaptado de Apostila de Concreto Armado II (2018).

Esta laje suporta uma alvenaria de vedação, de $\gamma=13\text{kN/m}^3$ em todo seu contorno, além de uma carga uniformemente distribuída devido ao peso distribuído das paredes internas de $g_{alv} = 1\text{kN/m}^2$. Demais dados estão listados a seguir:

- $f_{ck} = 30\text{MPa}$
- Aço CA50

- $h=16\text{cm}$
- Altura livre= $305-16=289\text{cm}$
- Pilares de seção $20\text{cm}\times 30\text{cm}$
- Cobrimento nominal= 2cm
- Carregamentos:

}	Peso próprio	$1\times 1\times 0,16\times 25= 4\text{kN/m}^2$
	Revestimento	$= 0,8\text{kN/m}^2$
	Alvenaria distribuída na laje	$= 1\text{kN/m}^2$
	Carga permanente	$g = 5,8\text{kN/m}^2$
	Sobrecarga (edifício res.)	$q = 1,5\text{kN/m}^2$
	Carga total	$p = 7,3\text{kN/m}^2$
- | | |
|---|---|
| } | Carga de alvenaria no contorno da laje: |
| | $P= 1\times 0,25\times 2,89\times 13=9,39\text{kN/m}$ |
- Reações

}	Pilares de canto	$R=100\text{kN}$
	Pilares de borda	$R=146,4\text{kN}$
	Pilares internos	$R=200\text{kN}$
- $\rho_x = 6,135\times 10^{-3}$ e $d_x = 13,375\text{cm}$
- $\rho_y = 6,972\times 10^{-3}$ e $d_y = 12,125\text{cm}$
- $\rho = 6,540\times 10^{-3}$ e $d \cong 13\text{cm}$
- $M_{sdx}=10\text{kN.m}=1000\text{kN.cm}$
- $M_{sdy} =12\text{kN.m}=1200\text{kN.cm}$
- Armaduras negativas de flexão

}	Pilar interno: Direção x: $\emptyset=12,5\text{mm c}/12,5$ Área= $1,227\text{cm}^2$
	Direção y: $\emptyset=12,5\text{mm c}/11$ Área= $1,227\text{cm}^2$
- Armadura de cisalhamento: $\emptyset=6,3\text{mm}$

4.1. DIMENSIONAMENTO CONFORME A ABNT NBR 6118:2014

As equações utilizadas para a obtenção dos perímetros críticos foram obtidas a partir da Apostila de Concreto II (2018), do professor Ney Amorim Silva, do curso de Especialização em Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais.

4.1.1. PILAR INTERNO

Dimensionamento conforme a ABNT NBR 6118:2014			
Superfície verificada	Pilar interno		
C	F_{sd}	kN	280
	C_1	(cm)	20
	C_2	(cm)	30
	u	(cm)	100
	τ_{rd2} (kN/cm ²)		0,509
	K_1	1)	0,476
	K_2	1)	0,65
	W_{p1}	2)	800
	W_{p2}	2)	1050
	τ_{sd} (kN/cm ²) ³⁾		0,318
	$\tau_{sd} \leq \tau_{rd2}$		Atende
C'	u (cm)		263,36
	W_{p1}	4)	6697,63
	W_{p2}	4)	7244,45
	τ_{sd} (kN/cm ²)		0,0955
	τ_{rd1} (kN/cm ²)		0,0786
	$\tau_{sd} \leq \tau_{rd1}$		Armar
C' (com armadura) 7)	$1,5 \frac{A_s}{A_c}$ 5)		2
	f_{ywd} 6) (Mpa)		259
	A_{sw} 8) (cm ²)		5,12
	τ_{rd1} (kN/cm ²)		0,156
	$\tau_{sd} \leq \tau_{rd1}$		Atende
C''	p (cm)		26
	u (cm)		426,73
	W_1	9)	18003,26
	W_2	9)	18846,88
	τ_{sd} (kN/cm ²)		0,0557
	τ_{rd1} (kN/cm ²)		0,0786
	$\tau_{sd} \leq \tau_{rd1}$		Atende
Colapso progressivo	F_{sd}	kN	240
	$A_{s,ccp}$	(cm ²)	8,28 10)
	l_b	(cm)	45

Observações:

1) Os valores de K_1 e K_2 foram interpolados conforme a TAB.1.

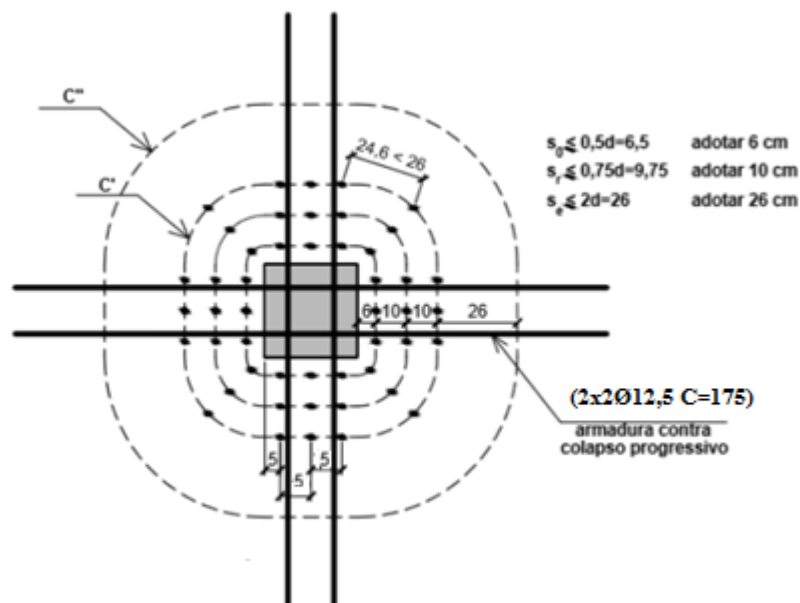
2) $W_{p1} = \frac{C_1^2}{2} + C_1 C_2 = 800$ e $W_{p2} = \frac{C_2^2}{2} + C_2 C_1 = 1050$

- 3) Por se tratar de um pilar interno com efeito de momento nas duas direções, τ_{sd} será calculado por:

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u d} + \frac{K_1 M_{sd1}}{W_{p1} d} + \frac{K_2 M_{sd2}}{W_{p2} d} \quad (4.1)$$

- 4) $W_{p1} = \frac{C_1^2}{2} + C_1 C_2 + 4C_2 d + 16d^2 + 2\pi d C_1 = 6697,63$ e $W_{p2} = \frac{C_2^2}{2} + C_2 C_1 + 4C_1 d + 16d^2 + 2\pi d C_2 = 7244,45$
- 5) O valor de s_r deve ser menor que $0,75d$, para isto, com a finalidade de manter uma situação à favor da segurança, a relação $1,5 \frac{d}{s_r}$ será igual a 2.
- 6) Com $h=16$ cm será necessário interpolar o valor de f_{ywd} . Assim $f_{ywd} = 259$ MPa.
- 7) Conforme indicado na FIG. 14 e na FIG.15, o detalhamento da armadura deverá conter no mínimo 3 linhas de conectores por face, além disto, a distância entre os conectores situados nas extremidade das duas faces deve ser menor que $2d(26$ cm), sendo necessário três linhas na diagonal com conectores intermediários conforme FIG. 33. A distância entre a face do pilar e a primeira linha de conectores deve ser $\leq 0,5d \approx 6$ cm. A distância entre a primeira e a segunda linha de conectores, assim como da segunda para a terceira $\leq 0,75d \approx 10$ cm. E a distância da terceira linha até C'' deve ser $\leq 2d \approx 26$ cm.

Figura 33- Detalhamento da armadura do pilar interno



Fonte: Adaptado de Apostila de Concreto Armado II (2018).

- 8) A verificação do contorno C' com armadura de punção levará em conta a existência de 16 conectores com $\varnothing=6,3\text{mm}(0,32\text{cm}^2)$ e A_{sw} será igual a $5,12\text{cm}^2$.
- 9) $W_1 = \frac{C_1^2}{2} + C_1C_2 + 4C_2d + 16d^2 + 2\pi dC_1 + 2C_2p + 16dp + 4p^2 + \pi C_1p =$
 $18003,26$ e $W_2 = \frac{C_2^2}{2} + C_2C_1 + 4C_1d + 16d^2 + 2\pi dC_2 + 2C_1p + 16dp + 4p^2 +$
 $\pi C_2p = 18846,88$
- 10) $2 \times 2\varnothing 12,5\text{mm}$.

4.1.2.PILAR DE BORDA

Dimensionamento conforme a ABNT NBR 6118:2014			
Superfície verificada	Pilar de borda		
C	F_{sd}	kN	204,96
	C_1	(cm)	30
	C_2	1) (cm)	20
	u^*	(cm)	50
	W_{p1}	2) (cm)	750
	W_{p2}	2) (cm)	700
	M_{sd1}	(kN.cm)3)	0
	M_{sd2}	(kN.cm)	1200
	τ_{rd2}	(kN/cm ²)	0,509
	K_1	4)	0,65
	K_2	4)	0,476
	τ_{sd}	(kN/cm ²)5)	0,378
		$\tau_{sd} \leq \tau_{rd2}$	Atende
C'	u^*	(cm)	131,68
	W_{p1}	6) (cm)	3847,22
	W_{p2}	6) (cm)	3648,81
	M_{sd1}	(kN.cm)7)	0
	M_{sd2}	(kN.cm)	1200
	τ_{sd}	(kN/cm ²)	0,132
	τ_{rd1}	(kN/cm ²)	0,0786
		$\tau_{sd} \leq \tau_{rd1}$	Armar
C' (com armadura) 10)	$1,5 \frac{d}{s_r}$	8)	2
	f_{ywd}	9)(Mpa)	259
	A_{sw}	11) (cm ²)	3,52
	τ_{rd1}	(kN/cm ²)	0,185
		$\tau_{sd} \leq \tau_{rd1}$	Atende
C''	p	(cm)	26
	u	(cm)	213,36
	W_{p1}	12) (cm)	9648,44
	W_{p2}	12) (cm)	10081,63
	M_{sd1}	(kN.cm)13)	0
	M_{sd2}	(kN.cm)	1200
	τ_{sd}	(kN/cm ²)	0,0782
	τ_{rd1}	(kN/cm ²)	0,0786
		$\tau_{sd} \leq \tau_{rd1}$	Atende
Colapso progressivo	F_{sd}	kN	175,68
	$A_{s,ccp}$	(cm ²)	6,06 14)
	l_b	(cm)	35

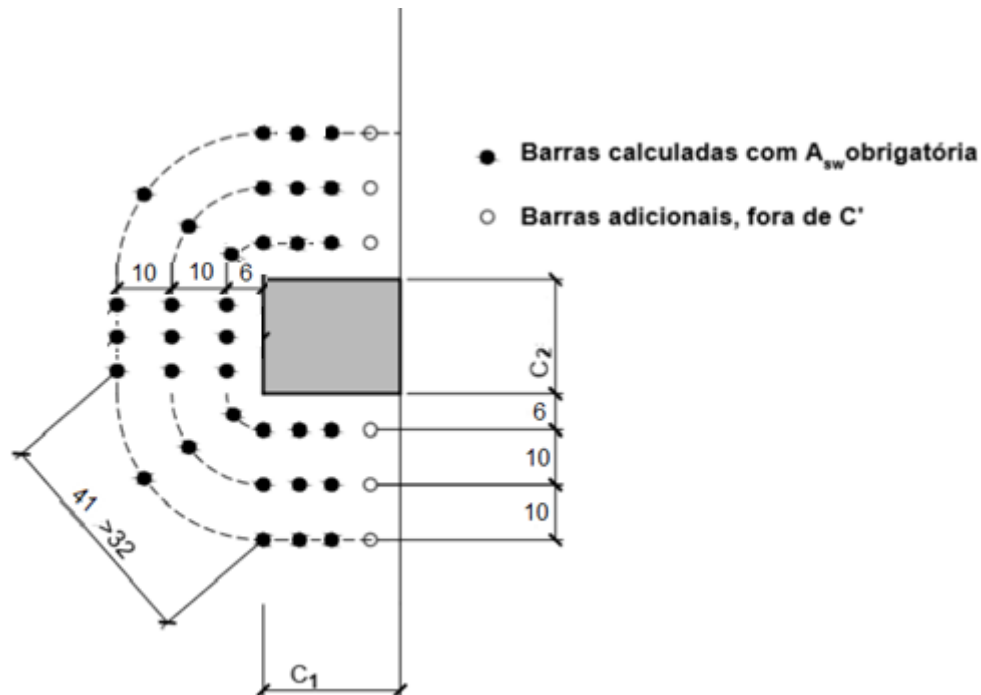
Observações:

- 1) $C_2=20\text{cm}$ será o lado do pilar paralelo à borda. Com M_x atuando na direção perpendicular à borda e M_y atuando na direção paralela à borda.
- 2) $W_{p1} = \frac{c_1^2}{2} + \frac{c_1 c_2}{2} = 750$ e $W_{p2} = \frac{c_2^2}{4} + C_2 C_1 = 700$
- 3) $M_{sd1} = (M_{sd} - M_{sd}^*)$
 $M_{sd}^* = F_{sd} e^* = 204,96 * 10,5 = 2152,08 \text{kN.cm}$
 $M_{sd1} = (1000 - 2152,08) < 0 \Rightarrow M_{sd1} = 0$
- 4) Os valores de K_1 e K_2 foram interpolados conforme a TAB.1.
- 5) Por se tratar de um pilar de borda com momento atuando no plano paralelo à borda, o valor de τ_{sd} será obtido através de:

$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u^* d} + \frac{K_1 M_{sd1}}{W_{p1} d} + \frac{K_2 M_{sd2}}{W_{p2} d} \quad (4.2)$$

- 6) $W_{p1} = \frac{c_1^2}{2} + \frac{c_1 c_2}{2} + 2C_2 d + 8d^2 + \pi d C_1 = 3847,22$ e $W_{p2} = \frac{c_2^2}{4} + C_2 C_1 + 2C_1 d + 8d^2 + \pi d C_2 = 3648,81$
- 7) $M_{sd1} = (M_{sd} - M_{sd}^*)$
 $M_{sd}^* = F_{sd} e^* = 204,96 * 27,51 = 5638,45 \text{kN.cm}$
 $M_{sd1} = (1000 - 5638,45) < 0 \Rightarrow M_{sd1} = 0$
- 8) O valor de s_r deve ser menor que $0,75d$, para isto, com a finalidade de manter uma situação à favor da segurança, a relação $1,5 \frac{d}{s_r}$ será igual a 2.
- 9) Com $h=16\text{cm}$ será necessário interpolar o valor de f_{ywd} . Assim $f_{ywd} = 259 \text{MPa}$.
- 10) Serão consideradas 3 linhas de conectores, dispostos conforme FIG.34, respeitando-se a distância máxima de $2d(26\text{cm})$ entre os conectores. Desta forma serão acrescentadas três linhas intermediárias na diagonal, de modo que a distância entre os conectores extremos seja menor que 26cm. Geralmente, são utilizadas barras adicionais paralelas à borda. A distância entre a face do pilar e a primeira linha de conectores deve ser $\leq 0,5d \approx 6\text{cm}$. A distância entre a primeira e a segunda linha de conectores, assim como da segunda para a terceira $\leq 0,75d \approx 10\text{cm}$. E a distância da terceira linha até C'' deve ser $\leq 2d \approx 26\text{cm}$.

Figura 34- Detalhamento da armadura do pilar de borda



Fonte: Adaptado de Apostila de Concreto Armado II (2018).

- 11) A verificação do contorno C' com armadura de punção levará em conta a existência de 11 conectores com $\varnothing=6,3\text{mm}(0,32\text{cm}^2)$ e A_{sw} será igual a $3,52\text{cm}^2$.
- 12) $W_{p1} = \frac{C_1^2}{2} + \frac{C_1 C_2}{2} + 2C_2 d + 8d^2 + \pi d C_1 + C_2 p + 8dp + \frac{\pi p C_1}{2} + 2p^2 = 9648,44$ e
 $W_{p2} = \frac{C_2^2}{4} + C_2 C_1 + 2C_1 d + 8d^2 + \pi d C_2 + 2C_1 p + 8dp + \frac{\pi p C_2}{2} + 2p^2 = 10081,63$
- 13) $M_{sd1} = (M_{sd} - M_{sd}^*)$
 $M_{sd}^* = F_{sd} e^* = 204,96 * 44,17 = 9053,08\text{kN.cm}$
 $M_{sd1} = (1000 - 9053,08) < 0 \Rightarrow M_{sd1} = 0$
- 14) 2x2Ø10mm.

4.1.3. PILAR DE CANTO

Por se tratar de pilar de canto, as duas bordas devem ser verificadas separadamente, ignorando a borda paralela ao eixo analisado, considerando o momento que atua perpendicular ao plano analisado.

O lado de comprimento 20cm é o lado paralelo ao eixo x e o de 30cm o lado paralelo ao eixo y.

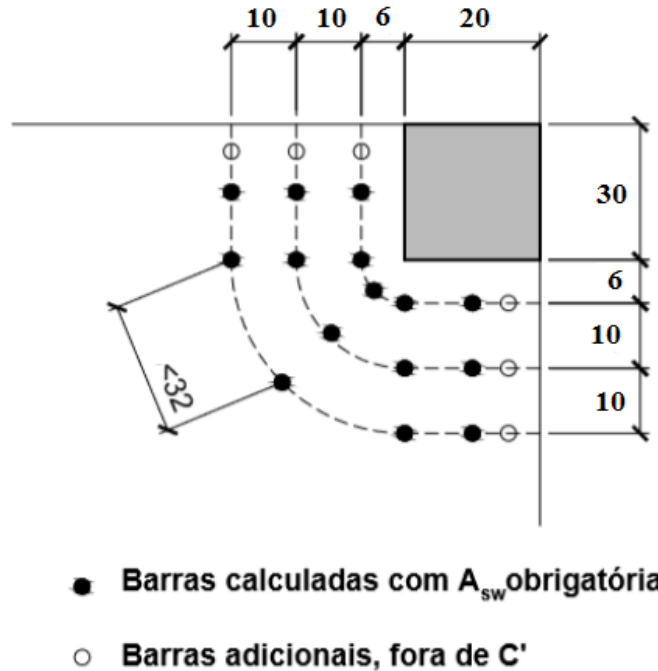
Dimensionamento conforme a ABNT NBR 6118:2014				
Superfície verificada	Pilar de borda			
C	F_{sd}	kN	105	
	u^*	(cm)	25	
	Ignorando a borda paralela à x	C_1	(cm)	20
		C_2	(cm)	30
		K_1	1)	0,476
		W_{plx}	2)	400
		M_{sd1}	(kN.cm)3)	160
		τ_{sdx}	(kN/cm ²)	0,338 6)
	Ignorando a borda paralela à y	C_1	(cm)	30
		C_2	(cm)	20
		K_1	1)	0,65
		W_{ply}	4)	525
		M_{sd1}	(kN.cm)5)	97,5
		τ_{sdy}	(kN/cm ²)	0,332
τ_{rd2}	(kN/cm ²)	0,509		
	$\tau_{sd} \leq \tau_{rd2}$		Atende	
C'	Ignorando a borda paralela à x	u^*	(cm)	65,84
		W_{plx}	7)	2264,41
		M_{sd1}	(kN.cm)8)	0
	Ignorando a borda paralela à y	τ_{sdx}	(kN/cm ²)	0,123 11)
		W_{ply}	9)	2333,61
		M_{sd1}	(kN.cm)10)	0
		τ_{sdy}	(kN/cm ²)	0,123
τ_{rd1}	(kN/cm ²)	0,0786		
	$\tau_{sd} \leq \tau_{rd1}$		Armar	
C' (com armadura) 14)	$1,5 \frac{A_s}{A_c}$	12)	2	
	f_{ywd}	13)(Mpa)	259	
	A_{sw}	15) (cm ²)	1,6	
	τ_{rd1}	(kN/cm ²)	0,175	
		$\tau_{sd} \leq \tau_{rd1}$		Atende
C''	p	(cm)	26	
	u^*	(cm)	106,68	
	Ignorando a borda paralela à x	W_{plx}	16)	5480,81
		M_{sd1}	(kN.cm)17)	0
		τ_{sdx}	(kN/cm ²)	0,076
	Ignorando a borda paralela à y	W_{ply}	18)	5494,22
		M_{sd1}	(kN.cm)19)	0
		τ_{sdy}	(kN/cm ²)	0,076
		$\tau_{sd} \leq \tau_{rd1}$		Atende
Colapso progressivo	F_{sd}	kN	90	
	$A_{s,ccp}$	(cm ²)	3,1 20)	
	l_b	(cm)	35	

Observações:

- 1) Os valores de K_1 foram interpolados conforme a TAB.1.
- 2) $W_{p1x} = \frac{c_1^2}{4} + \frac{c_1c_2}{2} = 400$
- 3) $M_{sd1} = (M_{sd} - M_{sd}^*)$
 $M_{sd}^* = F_{sd} e^* = 105 * 8 = 840 \text{ kN.cm}$
 $M_{sd1} = (1000 - 840) > 0 \Rightarrow M_{sd1} = 160$
- 4) $W_{p1y} = \frac{c_1^2}{4} + \frac{c_1c_2}{2} = 525$
- 5) $M_{sd1} = (M_{sd} - M_{sd}^*)$
 $M_{sd}^* = F_{sd} e^* = 105 * 10,5 = 1102,5 \text{ kN.cm}$
 $M_{sd1} = (1200 - 1102,5) > 0 \Rightarrow M_{sd1} = 97,5$
- 6) Será usado o valor mais crítico, ou seja, τ_{sdx} .
- 7) $W_{p1x} = \frac{c_1^2}{4} + \frac{c_1c_2}{2} + 2C_2d + 4d^2 + \frac{\pi d c_1}{2} = 2264,41$
- 8) $M_{sd1} = (M_{sd} - M_{sd}^*)$
 $M_{sd}^* = F_{sd} e^* = 105 * 25,43 = 2670,15 \text{ kN.cm}$
 $M_{sd1} = (1000 - 2670,15) < 0 \Rightarrow M_{sd1} = 0$
- 9) $W_{p1y} = \frac{c_1^2}{4} + \frac{c_1c_2}{2} + 2C_2d + 4d^2 + \frac{\pi d c_1}{2} = 2333,61$
- 10) $M_{sd1} = (M_{sd} - M_{sd}^*)$
 $M_{sd}^* = F_{sd} e^* = 105 * 27,51 = 2888,55 \text{ kN.cm}$
 $M_{sd1} = (1200 - 2888,55) < 0 \Rightarrow M_{sd1} = 0$
- 11) Deve-se utilizar o valor mais crítico, porém, nesta situação os dois valores são iguais.
- 12) O valor de s_r deve ser menor que $0,75d$, para isto, com a finalidade de manter uma situação à favor da segurança, a relação $1,5 \frac{d}{s_r}$ será igual a 2.
- 13) Com $h=16\text{cm}$ será necessário interpolar o valor de f_{ywd} . Assim $f_{ywd} = 259 \text{ MPa}$.
- 14) Serão consideradas 3 linhas de conectores, dispostos conforme FIG.35, respeitando-se a distância máxima de $2d(26\text{cm})$ entre os conectores. Desta forma serão acrescentadas três linhas intermediárias na diagonal, de modo que a distância entre os conectores extremos seja menor que 26cm. Geralmente, são utilizadas barras adicionais paralelas à borda, assim como no pilar de borda.
A distância entre a face do pilar e a primeira linha de conectores deve ser $\leq 0,5d \approx 6\text{cm}$.
A distância entre a primeira e a segunda linha de conectores, assim como da segunda

para a terceira $\leq 0,75d \approx 10\text{cm}$. E a distância da terceira linha até C'' deve ser $\leq 2d \approx 26\text{cm}$.

Figura 35- Detalhamento da armadura do pilar de canto



Fonte: Adaptado de Apostila de Concreto Armado II (2018).

15) A verificação do contorno C' com armadura de punção levará em conta a existência de 5 conectores com $\varnothing=6,3\text{mm}$ ($0,32\text{cm}^2$) e A_{sw} será igual a $1,6\text{cm}^2$. Com τ_{rd1} já calculado na verificação do contorno C' sem armadura de punção.

$$16) W_{p1x} = \frac{c_1^2}{4} + \frac{c_1 c_2}{2} + 2C_2 d + 4d^2 + \frac{\pi d c_1}{2} + C_2 p + 4dp + \frac{\pi p c_1}{4} + p^2 = 5480,81$$

$$17) M_{sd1} = (M_{sd} - M_{sd}^*)$$

$$M_{sd}^* = F_{sd} e^* = 105 * 42,19 = 4429,95 \text{ kN.cm}$$

$$M_{sd1} = (1000 - 4429,95) < 0 \Rightarrow M_{sd1} = 0$$

$$18) W_{p1y} = \frac{c_1^2}{4} + \frac{c_1 c_2}{2} + 2C_2 d + 4d^2 + \frac{\pi d c_1}{2} + C_2 p + 4dp + \frac{\pi p c_1}{4} + p^2 = 5494,22$$

$$19) M_{sd1} = (M_{sd} - M_{sd}^*)$$

$$M_{sd}^* = F_{sd} e^* = 105 * 44,17 = 4637,85 \text{ kN.cm}$$

$$M_{sd1} = (1000 - 4637,85) < 0 \Rightarrow M_{sd1} = 0$$

20) 2x2Ø10mm.

4.2. DIMENSIONAMENTO CONFORME O EUROCODE 2

Serão utilizados os mesmos dados referentes à laje e aos pilares utilizados anteriormente, porém dimensionados conforme o Eurocode 2. Nesta norma a recomendação é de que a laje tenha altura maior ou igual a 20, porém, para manter o padrão já utilizado a altura será 13cm. A resistência ao cisalhamento deve ser verificada na face do pilar e no perímetro crítico u_1 . Caso seja necessário utilizar armaduras, um novo perímetro $u_{out,ef}$ deve ser encontrado até que a armadura de cisalhamento não seja mais necessária.

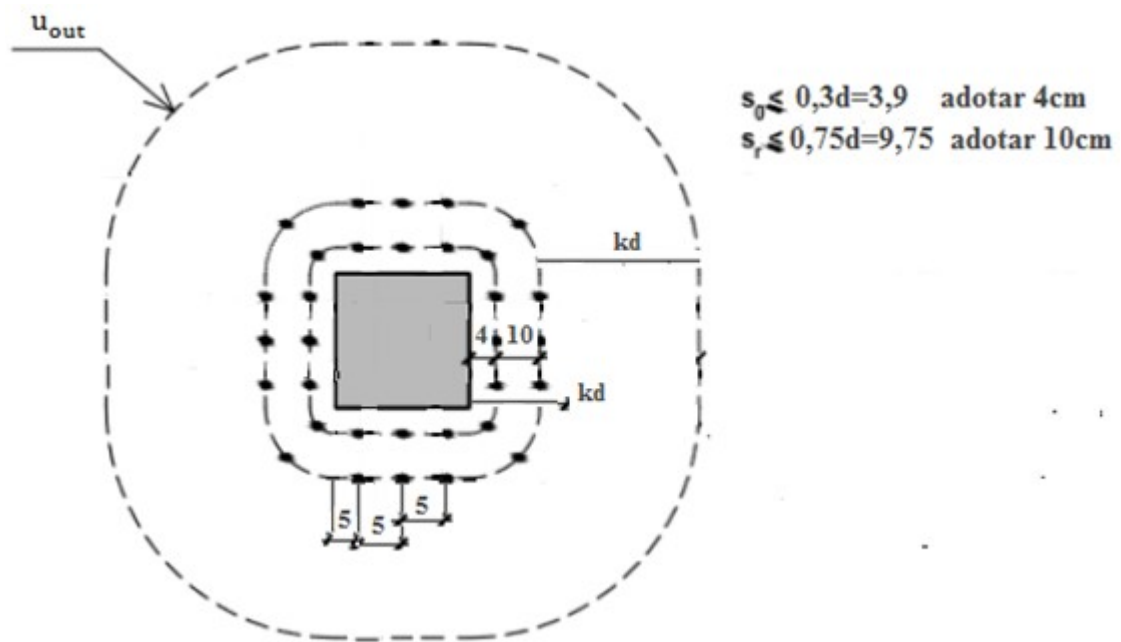
4.2.1. PILAR INTERNO

Dimensionamento conforme o EUROCODE 2		
Superfície verificada	Pilar interno	
Face do pilar	V_{Ed} (kN)	280
	β 1)	1,15
	u_0 (cm)	100
	V_{Ed} (kN/cm ²)	0,248
	$V_{Rd,max}$	0,533
	$V_{Ed} \leq V_{Rd,max}$	Atende
Perímetro crítico u_1	u_1 (cm)	222,52
	V_{Ed} (kN/cm ²)	0,111
	$V_{Rd,c}$	0,0701
	$V_{Ed} \leq V_{Rd,c}$	Armar
Região com armadura de punção 2)	A_{min} (cm ²)	0,03
	st (cm)	10
	st (cm)	5
	A_{sw} (cm ²)	5,12
	$f_{ywd,ef}$ (kN/cm ²) 3)	25,33
	$V_{Rd,cs}$ (kN/cm ²)	0,14
	$V_{Ed} \leq V_{Rd,sc}$	Atende
Região a 2d da região armada	$V_{Rd,c}$	0,0701
	k_1 4)	0,55
	k_2 4)	0,65
	u (cm)	426,73
	W_1 5)	18003,26
	W_2 5)	18846,88
	M_{Ed1} (kN.m)	1000
	M_{Ed2} (kN.m)	1200
	V_{Ed} (kN/cm ²)	0,056
	$V_{Ed} \leq V_{Rd,c}$	Atende

Observações:

- 1) O valor de β pode ser encontrado aproximadamente pela FIG.20, ou seja, $\beta = 1,15$.
- 2) Como indicado na FIG. 22, diferente da NBR, a armadura deverá ser colocada dentro do limite kd até que não seja mais necessária, sendo $k=1,5$, ou seja, $1,5d(19,5\text{cm})$. Além disto, deverão ser colocados pelo menos dois perímetros de estribos, sendo que o espaçamento entre eles não deve exceder $0,75d(\approx 10\text{cm})$ e a distância entre o primeiro perímetro de armaduras e a face do pilar deve ser maior que $0,3d(\approx 4\text{cm})$. A distância entre as linhas de conectores externas ao perímetro crítico deve ser menor que $2d(26\text{cm})$. Deste modo, o detalhamento da armadura pode ser visualizado na FIG.36.

Figura 36- Detalhamento da armadura do pilar interno



Fonte: Adaptado de Apostila de Concreto Armado II (2018).

- 3) $f_{ywd,ef} = 250 + 0,25d \leq f_{ywd}$
 $f_{ywd,ef} = 250 + 0,25 * 13 \leq 435; f_{ywd,ef} = 253,25\text{MPa} = 25,33\text{kN/cm}^2$
- 4) Os valores de K , podem ser interpolados da TAB.2.
- 5) $W_1 = \frac{C_1^2}{2} + C_1C_2 + 4C_2d + 16d^2 + 2\pi dC_1 + 2C_2p + 16dp + 4p^2 + \pi C_1p =$
 $18003,26$ e $W_2 = \frac{C_2^2}{2} + C_2C_1 + 4C_1d + 16d^2 + 2\pi dC_2 + 2C_1p + 16dp + 4p^2 +$
 $\pi C_2p = 18846,88$

4.2.2. PILAR DE BORDA

$c_2=20\text{cm}$ será o lado do pilar paralelo à borda. Com M_x atuando na direção perpendicular à borda e M_y atuando na direção paralela à borda.

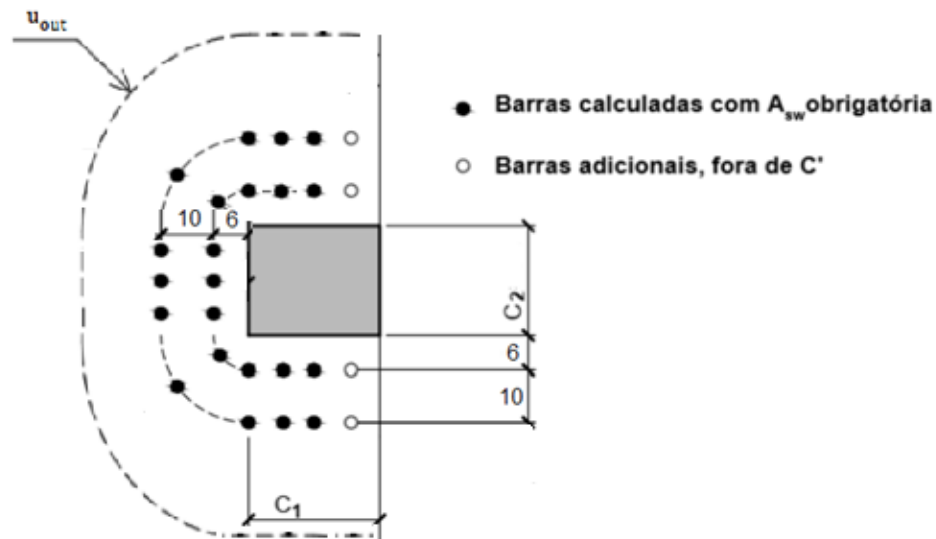
Dimensionamento conforme o EUROCODE 2		
Superfície verificada	Pilar de canto	
Face do pilar	V_{Ed} (kN)	204,96
	β ¹⁾	1,4
	u_0 (cm)	50
	V_{Ed} (kN/cm ²)	0,441
	$V_{Rd,max}$	0,533
	$V_{Ed} \leq V_{Rd,max}$	Atende
Perímetro crítico u_1	u_1 (cm)	111,26
	V_{Ed} (kN/cm ²)	0,198
	$V_{Rd,c}$	0,0701
	$V_{Ed} \leq V_{Rd,c}$	Armar
Região com armadura de punção ²⁾⁴⁾	A_{min} (cm ²)	0,03
	st (cm)	10
	st (cm)	5
	A_{sw} (cm ²)	3,52
	$f_{ywd,ef}$ (kN/cm ²) ³⁾	25,33
	$V_{Rd,cs}$ (kN/cm ²)	0,173
	$V_{Ed} \leq V_{Rd,sc}$	Ñ atende
	A_{sw} (cm ²)	4,16
	$V_{Rd,cs}$ (kN/cm ²)	0,195
	$V_{Ed} \leq V_{Rd,sc}$	Ñ atende
Região a 2d da região armada	$V_{Rd,c}$	0,0701
	k_1 ⁵⁾	0,65
	k_2 ⁵⁾	0,55
	u (cm)	213,36
	W_1 ⁶⁾	9648,44
	W_2 ⁶⁾	10081,63
	M_{Ed1} (kN.m)	1000
	M_{Ed2} (kN.m)	1200
	V_{Ed} (kN/cm ²)	0,084
	$V_{Ed} \leq V_{Rd,c}$ ⁷⁾	Ñ atende

Observações:

- 1) O valor de β pode ser encontrado aproximadamente pela FIG.20, ou seja, $\beta = 1,4$.

- 2) O pilar de borda, segue as mesmas recomendações do pilar interno, devendo a armadura ser colocada dentro do limite kd até que não seja mais necessária, sendo $k=1,5$, ou seja, $1,5d$ (19,5cm). Além disto, deverão ser colocados pelo menos dois perímetros de estribos, sendo que o espaçamento entre eles não deve exceder $0,75d$ (≈ 10 cm) e a distância entre o primeiro perímetro de armaduras e a face do pilar deve ser maior que $0,3d$ (≈ 4 cm). A distância entre as linhas de conectores externas ao perímetro crítico deve ser menor que $2d$ (26cm). A FIG.37 representa o detalhamento do pilar de borda.

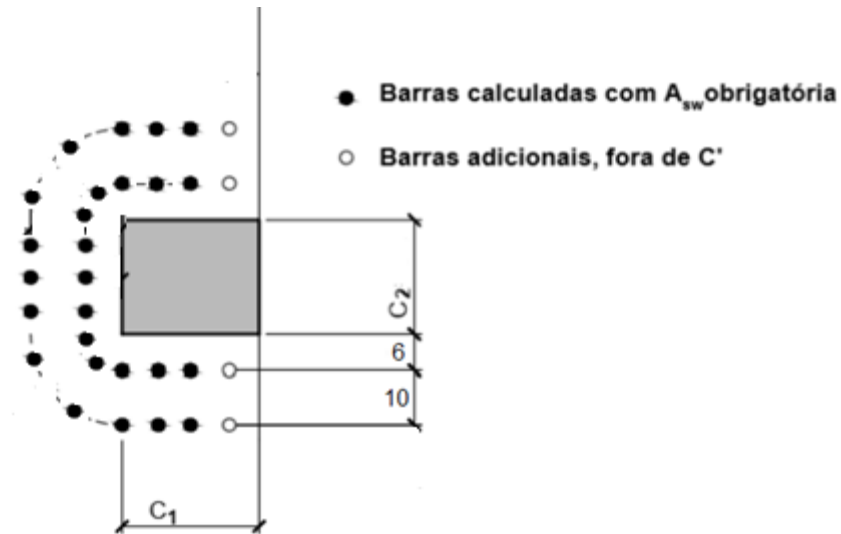
Figura 37- Detalhamento da armadura do pilar de borda



Fonte: Adaptado de Apostila de Concreto Armado II (2018).

- 3) $f_{ywd,ef} = 250 + 0,25d \leq f_{ywd}$
 $f_{ywd,ef} = 250 + 0,25 * 13 \leq 435$; $f_{ywd,ef} = 253,25MPa = 25,33kN/cm^2$
- 4) Utilizando a mesma armadura do pilar de borda calculado pela NBR 6118, a armadura não foi suficiente, portanto, será acrescentando mais duas linhas de conectores para que sejam suficientes, como indicado na FIG.38.

Figura 38- Detalhamento da armadura do pilar de borda



Fonte: Adaptado de Apostila de Concreto Armado II (2018).

- 5) Os valores de K , podem ser interpolados da TAB.2.
- 6) $W_1 = \frac{C_1^2}{2} + \frac{C_1 C_2}{2} + 2C_2 d + 8d^2 + \pi d C_1 + C_2 p + 8dp + \frac{\pi p C_1}{2} + 2p^2 = 9648,44$ e
- $$W_2 = \frac{C_2^2}{4} + C_2 C_1 + 2C_1 d + 8d^2 + \pi d C_2 + 2C_1 p + 8dp + \frac{\pi p C_2}{2} + 2p^2 = 10081,63$$
- 7) Diferente do cálculo do pilar de borda calculado pela NBR 6118, a armadura não foi suficiente, mesmo acrescentando mais linhas de conectores, além disto, a ligação não atendeu à verificação a $2d$ do contorno de armaduras. Para que esta situação fosse resolvida seria necessário alterações como: aumentar a espessura da laje, alterar a resistência do concreto, dos vãos, o posicionamento de pilares, dentre outras.

4.2.3. PILAR DE CANTO

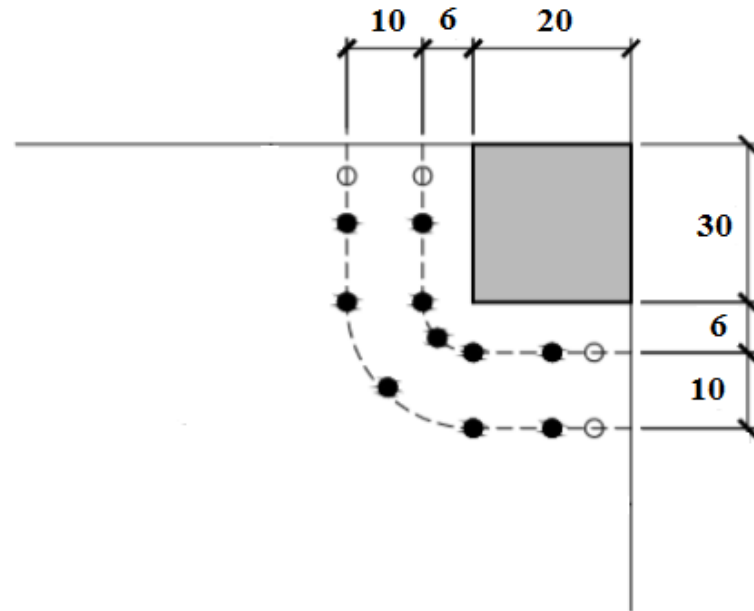
O lado de comprimento 20cm é o lado paralelo ao eixo x e o de 30cm o lado paralelo ao eixo y.

Dimensionamento conforme o EUROCODE 2		
Superfície verificada	Pilar de canto	
Face do pilar	V_{Ed} (kN)	105
	β	1,5 ¹⁾
	u_0 (cm)	25
	V_{Ed} (kN/cm ²)	0,485
	$V_{Rd,max}$	0,533
	$V_{Ed} \leq V_{Rd,max}$	Atende
Perímetro crítico u_1	u_1 (cm)	65,84
	V_{Ed} (kN/cm ²)	0,184
	$V_{Rd,c}$	0,0701
	$V_{Ed} \leq V_{Rd,c}$	Armar
Região com armadura de punção ²⁾⁴⁾	A_{min} (cm ²)	0,03
	s_r (cm)	10
	s_t (cm)	5
	A_{sw} (cm ²)	1,6
	$f_{ywd,ef}$ (kN/cm ²) ³⁾	25,33
	$V_{Rd,cs}$ (kN/cm ²)	0,145
	$V_{Ed} \leq V_{Rd,sc}$	Ñ atende
	A_{sw} (cm ²)	2,88
$V_{Rd,cs}$ (kN/cm ²)	0,219	
$V_{Ed} \leq V_{Rd,sc}$	Atende	
Região a 2d da região armada	$V_{Rd,c}$	0,0701
	k_1	0,65 ⁵⁾
	k_2	0,55 ⁵⁾
	u (cm)	106,68
	W_1	5480,81 ⁶⁾
	W_2	5494,22 ⁶⁾
	M_{Ed1} (kN.m)	1000
	M_{Ed2} (kN.m)	1200
	V_{Ed} (kN/cm ²)	0,094
	$V_{Ed} \leq V_{Rd,c}$ ⁷⁾	Ñ atende

- 1) O valor de β pode ser encontrado aproximadamente pela FIG.20, ou seja, $\beta = 1,5$.
- 2) O pilar de canto, segue as mesmas recomendações do pilar interno, devendo a armadura ser colocada dentro do limite kd até que não seja mais necessária, sendo $k=1,5$, ou seja, $1,5d(19,5cm)$. Além disto, deverão ser colocados pelo menos dois perímetros de estribos, sendo que o espaçamento entre eles não deve exceder $0,75d(\approx 10cm)$ e a distância entre o primeiro perímetro de armaduras e a face do pilar deve ser maior que $0,3d(\approx 4cm)$. A distância entre as linhas de conectores externas ao

perímetro crítico deve ser menor que $2d$ (26cm). A FIG.39 representa o detalhamento do pilar de borda.

Figura 39- Detalhamento da armadura do pilar de canto

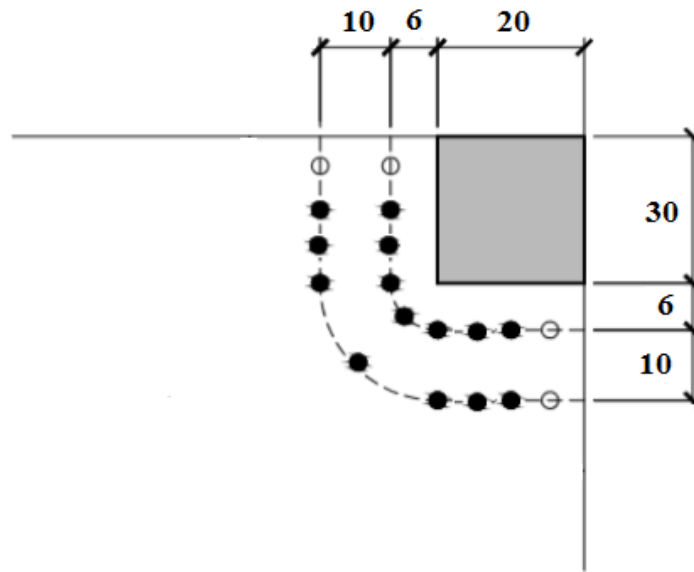


- Barras calculadas com A_{sw} obrigatória
- Barras adicionais, fora de C'

Fonte: Adaptado de Apostila de Concreto Armado II (2018).

- 3) $f_{ywd,ef} = 250 + 0,25d \leq f_{ywd}$
 $f_{ywd,ef} = 250 + 0,25 * 13 \leq 435; f_{ywd,ef} = 253,25MPa = 25,33kN/cm^2$
- 4) Utilizando a mesma armadura do pilar de canto calculado pela NBR 6118, a armadura não foi suficiente. Desprezando a recomendação de utilizar as armaduras adicionais e levando em consideração estas armaduras no cálculo, além de inserir mais duas linhas em cada lateral, conforme a FIG.40, o novo valor obtido será:

Figura 40- Detalhamento da armadura do pilar de canto



- Barras calculadas com A_{sw} obrigatória
- Barras adicionais, fora de C'

Fonte: Adaptado de Apostila de Concreto Armado II (2018).

5) Os valores de K podem ser interpolados da TAB.2.

$$6) W_1 = \frac{c_1^2}{4} + \frac{c_1 c_2}{2} + 2C_2 d + 4d^2 + \frac{\pi d c_1}{2} + C_2 p + 4dp + \frac{\pi p c_1}{4} + p^2 = 5480,81 \quad e$$

$$W_2 = \frac{c_2^2}{4} + \frac{c_1 c_2}{2} + 2C_1 d + 4d^2 + \frac{\pi d c_2}{2} + C_1 p + 4dp + \frac{\pi p c_2}{4} + p^2 = 5494,22$$

$$V_{ED} = \frac{105}{106,68 * 13} \left[1 + 0,55 \frac{1000 * 106,68}{105 * 5480,81} + 0,65 \frac{1200 * 106,68}{105 * 5494,22} \right]$$

$$= 0,094 kN/cm^2$$

$$V_{Ed} = 0,094 kN/cm^2 \leq V_{Rd,c} = 0,0701 kN/cm^2$$

7) Mesmo utilizando armadura de punção suficiente, a ligação laje pilar não se apresenta estável. Para que esta situação seja resolvida é necessário alterações como: aumentar a espessura da laje, alterar a resistência do concreto, dos vãos, o posicionamento de pilares, dentre outras.

4.3. DIMENSIONAMENTO CONFORME O CEB FIB MC 90

Serão utilizados os mesmos dados referentes à laje e aos pilares utilizados anteriormente, porém dimensionados conforme o CEB FIB MC 90. Esta norma apresenta muitas semelhanças com a NBR 6118, como será visto adiante.

4.3.1. PILAR INTERNO

Dimensionamento conforme o CEB FIB MC 90				
Superfície verificada	Pilar interno			
Perímetro crítico	F_{sd}	(kN)	280	
	C_1	(cm)	20	
	C_2	(cm)	30	
	u_1	(cm)	263,36	
	K_1	1)	0,5	
	K_2	1)	0,65	
	W_1	2)	6697,63	
	W_2	2)	7244,45	
	τ_{sd}	(kN/cm ²)3)	0,096	
	τ_{rd}	(kN/cm ²)	0,0725	
		$\tau_{sd} \leq \tau_{rd}$	Armar	
Resistência máxima	$F_{Sd,ef}$	(kN)4)	328,02	
	u_o	(cm)	100	
	$0,5f_{cd2}u_o d$		686,4	
	$F_{Sd,ef} \leq 0,5f_{cd2}u_o d$		Atende	
Região armada 5)	adjacente ao pilar	$F_{Sd,ef} \leq 0,5f_{cd2}u_o d$	Atende	
	zona com armadura de cisalhamento 6)	A_{sw}	(cm ²)	5,12
		f_{ywd}	(kN/cm ²)7)	30
			8)	1163,59
		$F_{Sd,ef} \leq 8)$		Atende
			9)	299,52
			10)	128,52
		9) \geq 10)	Atende	
	zona fora da armadura de cisalhamento	$u_{n,ef}$	(cm)	426,73
		$W_{n,ef1}$	11)	18003,26
		$W_{n,ef2}$	11)	18846,88
		$F_{Sd,ef}$	12)	309,51
			13)	1866,78
	$F_{Sd,ef} \leq 13)$	Atende		

Observações:

- 1) Com o valor K_1 e K_2 interpolados conforme a TAB.3.
- 2) $W_1 = \frac{c_1^2}{2} + C_1C_2 + 4C_2d + 16d^2 + 2\pi dC_1 = 6697,63$ e $W_2 = \frac{c_2^2}{2} + C_2C_1 + 4C_1d + 16d^2 + 2\pi dC_2 = 7244,45$
- 3) Assim como a NBR 6118, esta norma não apresenta uma equação específica para pilares internos com momento atuando nas duas direções, desta forma, assim como na NBR, a seguinte equação será utilizada:

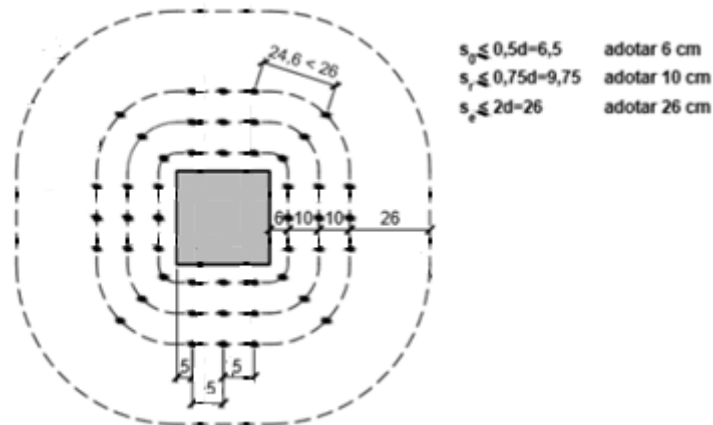
$$\tau_{sd} = \frac{F_{sd}}{u_1d} + \frac{K_1M_{sd1}}{W_1d} + \frac{K_2M_{sd2}}{W_2d} \quad (4.3)$$

- 4) $F_{sd,ef}$ calculado levando em consideração o momento nas duas direções:

$$F_{sd,ef} = F_{sd} \left[1 + K_1 \frac{M_{sd1}}{F_{sd}} \frac{u_1}{W_1} + K_2 \frac{M_{sd2}}{F_{sd}} \frac{u_1}{W_2} \right]$$

- 5) Como citado, a resistência à punção de lajes com armadura de cisalhamento será verificada em três zonas:
 - a) zona imediatamente adjacente ao pilar ou área carregada
 - b) zona em que a armadura de cisalhamento é colocada
 - c) zona fora da armadura de cisalhamento
 O valor de F_{sd} deverá ser $F_{sd,ef}$ para permitir a influência do momento transferido.
- 6) Como indicado na FIG. 29, a distância entre os conectores situados nas extremidades das duas faces deve ser menor que $2d(26\text{cm})$. A distância entre a armadura mais interna e a periferia do pilar não pode exceder βd , sendo $\beta \leq 0,5$ e a distância das armaduras de cisalhamento não deverá exceder $0,75d$. Deste modo, o detalhamento da armadura pode ser visualizado na FIG.41.

Figura 41- Detalhamento da armadura do pilar interno



Fonte: Adaptado de Apostila de Concreto Armado II (2018).

7) Máximo permitido

$$8) 0,09\xi (100\rho f_{ck})^{1/3}u_1d + 1,5 \frac{d}{s_r} A_{sw}f_{ywd} \sin \alpha$$

$$9) 1,5 \frac{d}{s_r} A_{sw}f_{ywd} \sin \alpha$$

$$10) 0,03(100\rho f_{ck})^{1/3}u_1d$$

$$11) W_{n,ef1} = \frac{c_1^2}{2} + C_1C_2 + 4C_2d + 16d^2 + 2\pi dC_1 + 2C_2p + 16dp + 4p^2 + \pi C_1p =$$

$$18003,26 \quad \text{e} \quad W_{n,ef2} = \frac{c_2^2}{2} + C_2C_1 + 4C_1d + 16d^2 + 2\pi dC_2 + 2C_1p + 16dp + 4p^2 + \pi C_2p = 18846,88$$

$$12) F_{Sd,ef} = F_{Sd} \left[1 + K_1 \frac{M_{Sd1}}{F_{Sd}} \frac{u_{n,ef}}{W_{n,ef1}} + K_2 \frac{M_{Sd2}}{F_{Sd}} \frac{u_{n,ef}}{W_{n,ef2}} \right]$$

$$13) 0,12\xi (100\rho f_{ck})^{1/3}u_{n,ef}d$$

4.3.2. PILAR DE BORDA

$c_2=20\text{cm}$ será o lado do pilar paralelo à borda. Com M_x atuando na direção perpendicular à borda e M_y atuando na direção paralela à borda.

Dimensionamento conforme o CEB FIB MC 90			
Superfície verificada	Pilar de borda		
Perímetro crítico	F_{sd} (kN)	204,96	
	C_1 (cm)	30	
	C_2 (cm)	20	
	u_1^*	131,68	
	K 1)	0,65	
	W_1 2)	3648,81	
	τ_{sd} (kN/cm ²)	0,136	
	τ_{rd} (kN/cm ²)	0,0725	
	$\tau_{sd} \leq \tau_{rd}$	Armar	
	Resistência máxima	$F_{sd,ef}$ (kN) 3)	233,11
u_o (cm)		56	
$0,5f_{cd2}u_o d$		384,38	
$F_{sd,ef} \leq 0,5f_{cd2}u_o d$		Atende	
Região armada 4)	adjacente ao pilar	$F_{sd,ef}$ (kN)	326
		$F_{sd,ef} \leq 0,5f_{cd2}u_o d$	Atende
	zona com armadura de cisalhamento 5)	A_{sw} (cm ²)	3,52
		f_{ywd} (kN/cm ²) 6)	30
		V 7)	637,96
		$F_{sd,ef}$ (kN)	233,11
		$F_{sd,ef} \leq 7)$	Atende
		8)	205,92
		9)	64,29
		$8) \geq 9)$	Atende
	zona fora da armadura de cisalhamento	$u_{n,ef}$ (cm)	213,36
		$W_{n,ef}$ 10)	10081,63
		$F_{sd,ef}$ 11)	221,47
		12)	933,37
$F_{sd,ef} \leq 12)$	Atende		

Observações:

- 1) Com o valor K interpolado conforme a Tab.3.
- 2) $W_1 = \frac{C_2^2}{4} + C_2C_1 + 2C_1d + 8d^2 + \pi dC_2 = 3648,81$
- 3) Com $F_{sd,ef}$ calculado levando em consideração o momento nas duas direções:

$$F_{sd,ef} = F_{sd} \left[1 + K \frac{M_{sd} u_1^*}{F_{sd} W_1} \right]$$

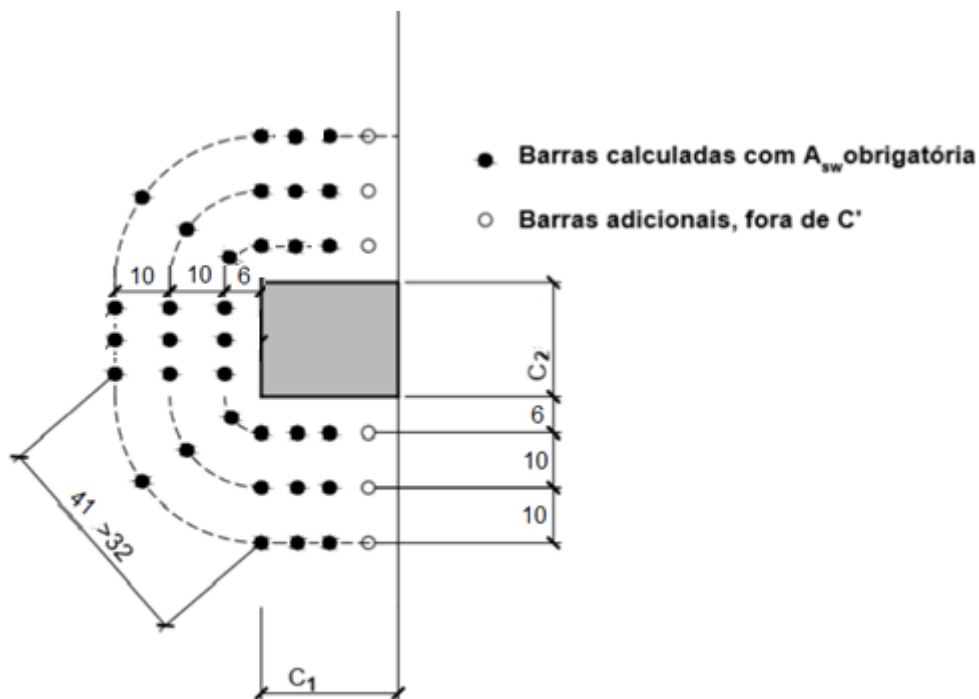
4) Como citado, a resistência à punção de lajes com armadura de cisalhamento será verificada em três zonas:

- zona imediatamente adjacente ao pilar ou área carregada
- zona em que a armadura de cisalhamento é colocada
- zona fora da armadura de cisalhamento

O valor de F_{Sd} deverá ser $F_{Sd,ef}$ para permitir a influência do momento transferido.

5) Como indicado na FIG. 29, a distância entre os conectores situados nas extremidades das duas faces deve ser menor que $2d$ (26cm). A distância entre a armadura mais interna e a periferia do pilar não pode exceder βd , sendo $\beta \leq 0,5$ e a distância das armaduras de cisalhamento não deverá exceder $0,75d$. Deste modo, o detalhamento da armadura pode ser visualizado na FIG.42.

Figura 42- Detalhamento da armadura do pilar de borda



Fonte: Adaptado de Apostila de Concreto Armado II (2018).

6) Máximo permitido.

$$7) 0,09\xi (100\rho f_{ck})^{1/3}u_1^*d + 1,5 \frac{d}{s_r} A_{sw}f_{ywd} \sin \alpha$$

$$8) 1,5 \frac{d}{s_r} A_{sw}f_{ywd} \sin \alpha$$

$$9) 0,03(100\rho f_{ck})^{1/3}u_1d$$

$$10) W_{n,ef} = \frac{C_2^2}{4} + C_2 C_1 + 2C_1 d + 8d^2 + \pi d C_2 + 2C_1 p + 8dp + \frac{\pi p C_2}{2} + 2p^2 = 10081,63$$

$$11) F_{Sd,ef} = F_{Sd} \left[1 + K \frac{M_{Sd} u_{n,ef}^*}{F_{Sd} W_{n,ef}} \right]$$

$$12) 0,12\xi (100\rho f_{ck})^{1/3} u_{n,ef} * d$$

4.3.3. PILAR DE CANTO

O lado de comprimento 20cm é o lado paralelo ao eixo x e o de 30cm o lado paralelo ao eixo y.

Dimensionamento conforme o CEB FIB MC 90			
Superfície verificada	Pilar de canto		
Perímetro crítico	F_{sd} (kN)	105	
	C_1 (cm)	30	
	C_2 (cm)	20	
	u_1^*	65,84	
	τ_{sd} (kN/cm ²) ¹⁾	0,123	
	τ_{rd} (kN/cm ²)	0,0725	
	$\tau_{sd} \leq \tau_{rd}$	Armar	
Resistência máxima	$F_{Sd,ef}$ (kN) ²⁾	105	
	u_o (cm)	39	
	$0,5f_{cd2}u_o d$	267,7	
	$F_{Sd,ef} \leq 0,5f_{cd2}u_o d$	Atende	
Região armada ³⁾	adjacente ao pilar	$F_{Sd,ef} \leq 0,5f_{cd2}u_o d$	Atende
	zona com armadura de cisalhamento ⁴⁾	A_{sw} (cm ²)	1,6
		f_{ywd} (kN/cm ²) ⁵⁾	30
		τ_{sd} (kN/cm ²) ⁶⁾	309,62
		$F_{Sd,ef}$ (kN)	105
		$F_{Sd,ef} \leq 6)$	Atende
		$\tau_{sd} \leq 7)$	93,6
		$\tau_{sd} \geq 8)$	32,15
	$7) \geq 8)$	Atende	
	zona fora da armadura de cisalhamento	$u_{n,ef}$ (cm)	106,68
$F_{Sd,ef}$		105	
$F_{Sd,ef} \leq 9)$		466,68 Atende	

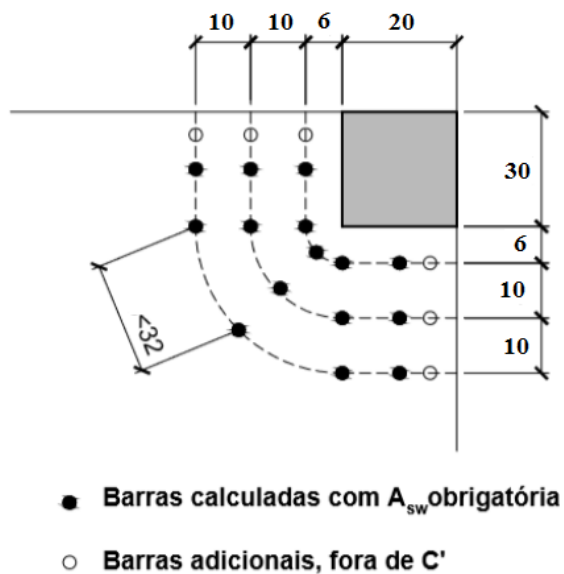
Observações:

- 1) Desde que a excentricidade do carregamento ocorra em direção ao interior da laje, a tensão solicitante deverá ser calculada em função de um cisalhamento uniforme no perímetro u_1^* .
- 2) $F_{Sd,ef} = F_{Sd} = 105kN$
- 3) Como citado, a resistência à punção de lajes com armadura de cisalhamento será verificada em três zonas:
 - a) zona imediatamente adjacente ao pilar ou área carregada
 - b) zona em que a armadura de cisalhamento é colocada
 - c) zona fora da armadura de cisalhamento

O valor de F_{Sd} deverá ser $F_{Sd,ef}$ para permitir a influência do momento transferido.

- 4) Como indicado na FIG. 29, a distância entre os conectores situados nas extremidades das duas faces deve ser menor que $2d$ (26cm). A distância entre a armadura mais interna e a periferia do pilar não pode exceder βd , sendo $\beta \leq 0,5$ e a distância das armaduras de cisalhamento não deverá exceder $0,75d$. Deste modo, o detalhamento da armadura pode ser visualizado na FIG.43.

Figura 43- Detalhamento da armadura do pilar de canto



Fonte: Adaptado de Apostila de Concreto Armado II (2018).

- 5) Máximo permitido.

- 6) $0,09\xi (100\rho f_{ck})^{1/3}u_1^*d + 1,5 \frac{d}{s_r} A_{sw}f_{ywd} \sin \alpha$
- 7) $1,5 \frac{d}{s_r} A_{sw}f_{ywd} \sin \alpha$
- 8) $0,03(100\rho f_{ck})^{1/3}u_1 d$
- 9) $0,12\xi (100\rho f_{ck})^{1/3}u_{n,ef} * d$

4.4. DIMENSIONAMENTO CONFORME O ACI 318-11

Serão utilizados os mesmos dados referentes à laje e aos pilares utilizados anteriormente, porém dimensionados conforme o ACI 318-11.

4.4.1. PILAR INTERNO

Dimensionamento conforme o ACI 318-11		
Pilar interno		
	ϕ	0,85
	β	1,5
V_c 1)	f'_c (Mpa)	30
	α_s	40
	b_o	152
	2) (kN/cm ²)	0,217
	3) (kN/cm ²)	0,246
	4) (kN/cm ²)	0,181
V_u	(kN/cm ²) 5)	0,176
ϕV_n	(kN/cm ²)	0,154
	$\phi V_n \geq V_u$	Armar
Verificação da região armada 6)	V_c (kN/cm ²) 7)	0,0931
	f_{yt} (kN/cm ²)	40
	V_s (kN/cm ²)	0,192
	V_n (kN/cm ²) 8)	0,274
	ϕV_n (kN/cm ²)	0,233
	$\phi V_n \geq V_u$	Atende
Verificação da região a d/2 da região armada	u (cm)	271,6
	V_u (kN/cm ²) 9)	0,087
	2) (kN/cm ²)	0,217
	3) (kN/cm ²)	0,178
	4) (kN/cm ²)	0,181
	ϕV_n (kN/cm ²)	0,151
	$\phi V_n \geq V_u$	Atende

Observações:

- 1) O valor de V_c será o menor entre as equações dos itens 2), 3) ou 4).
- 2) $V_c = 0,17 \left(1 + \frac{2}{\beta}\right) \lambda \sqrt{f'_c}$
- 3) $V_c = 0,083 \left(2 + \frac{\alpha_s d}{b_o}\right) \lambda \sqrt{f'_c}$
- 4) $V_c = 0,33 \lambda \sqrt{f'_c}$
- 5) Para o cálculo de V_u será utilizado a superposição das forças conforme equações abaixo:

$$V_u = \frac{v_u}{b_o d} + \frac{\gamma_x M_x C_{CD}}{J_x} + \frac{\gamma_y M_y C_{AD}}{J_y} \quad (4.4)$$

$$C_1 = 20cm \text{ e } C_2 = 30cm$$

$$b_1 = C_1 + d = 33cm$$

$$b_2 = C_2 + d = 43cm$$

$$C_{CD} = b_1/2 = 16,5cm$$

$$C_{AD} = b_2/2 = 21,5cm$$

$$\gamma_x = 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{3}\right) \sqrt{\frac{b_1}{b_2}}} = 0,369$$

$$\gamma_y = 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{3}\right) \sqrt{\frac{b_2}{b_1}}} = 0,432$$

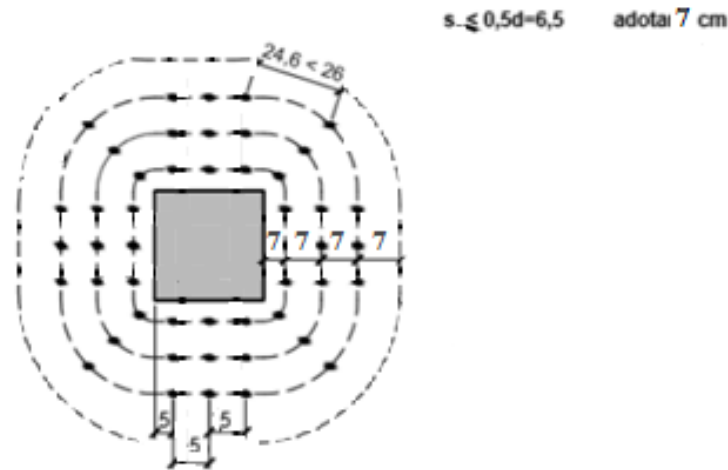
$$J_x = \frac{b_1^3 d}{6} + \frac{d^3 b_1}{6} + 2b_2 d \left(\frac{b_1}{2}\right)^2 = 394322,5$$

$$J_y = \frac{b_2^3 d}{6} + \frac{d^3 b_2}{6} + 2b_1 d \left(\frac{b_2}{2}\right)^2 = 584620,83$$

- 6) Uma vez que a armadura será necessária, a parcela V_s de resistência nominal ao cisalhamento do aço entra no cálculo de V_n . Será utilizada a mesma armadura utilizada para pilar interior nos dimensionamentos anteriores, logo, $A_v = 5,12cm^2$. Conforme as FIG.30 e FIG.31, a distância entre as linhas de conectores externas ao perímetro crítico deve ser menor que $2d(26cm)$. Além disto, esta norma especifica que

o espaçamento deve ser $0,5d$, ou seja, $s \approx 7\text{cm}$, diferente dos espaçamentos anteriores e que a distância entre o último contorno de armaduras e o perímetro crítico fora da área de reforço de armadura deve ser de $0,5d \approx 7\text{cm}$. O detalhamento do pilar interno encontra-se na FIG.44.

Figura 44- Detalhamento da armadura do pilar interno



Fonte: Adaptado de Apostila de Concreto Armado II (2018).

$$7) V_c = 0,17\sqrt{f'_c}$$

$$8) V_n = V_c + V_s = 0,285\text{kN/cm}^2 \leq 0,5\sqrt{30} = 0,274\text{kN/cm}^2$$

$$9) V_u = \frac{v_u}{u d} + \frac{\gamma_x M_x C_{CD}}{I_x} + \frac{\gamma_y M_y C_{AD}}{I_y}$$

$$C_1 = 20\text{cm} \text{ e } C_2 = 30\text{cm}$$

$$b_1 = C_1 + 2(3s) + d = 75\text{cm}$$

$$b_2 = C_2 + 2(3s) + d = 85\text{cm}$$

$$C_{CD} = b_1/2 = 37,5\text{cm}$$

$$C_{AD} = b_2/2 = 42,5\text{cm}$$

$$\gamma_x = 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)\sqrt{\frac{b_1}{b_2}}} = 0,385$$

$$\gamma_y = 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)\sqrt{\frac{b_2}{b_1}}} = 0,415$$

$$J_x = \frac{b_1^3 d}{6} + \frac{d^3 b_1}{6} + 2b_2 d \left(\frac{b_1}{2}\right)^2 = 4049337,5$$

$$J_y = \frac{b_2^3 d}{6} + \frac{d^3 b_2}{6} + 2b_1 d \left(\frac{b_2}{2}\right)^2 = 4883915,83$$

4.4.2. PILAR DE BORDA

$C_2=20\text{cm}$ será o lado do pilar paralelo à borda. Com M_x atuando na direção perpendicular à borda e M_y atuando na direção paralela à borda.

Dimensionamento conforme o ACI 318-11		
Pilar de borda		
	ϕ	0,85
	β	1,5
V_c 1)	f'_c (Mpa)	30
	α_s	30
	b_o	106
	2) (kN/cm ²)	0,217
	3) (kN/cm ²)	0,258
	4) (kN/cm ²)	0,181
	V_u (kN/cm ²) 5)	0,202
	ϕV_n (kN/cm ²)	0,154
	$\phi V_n \geq V_u$	Armar
Verificação da região armada 6)	V_c (kN/cm ²) 7)	0,0931
	f_{yt} (kN/cm ²)	40
	V_s (kN/cm ²)	0,19
	V_n (kN/cm ²) 8)	0,274
	ϕV_n (kN/cm ²)	0,233
	$\phi V_n \geq V_u$	Atende
Verificação da região a d/2 da região armada	u (cm)	166,1
	V_u (kN/cm ²) 9)	0,111
	2) (kN/cm ²)	0,217
	3) (kN/cm ²)	0,198
	4) (kN/cm ²)	0,181
	ϕV_n (kN/cm ²)	0,154
	$\phi V_n \geq V_u$	Atende

Observações:

- 1) O valor de V_c será o menor entre as equações dos itens 2), 3) ou 4).
- 2) $V_c = 0,17 \left(1 + \frac{2}{\beta}\right) \lambda \sqrt{f'_c}$
- 3) $V_c = 0,083 \left(2 + \frac{\alpha_s d}{b_o}\right) \lambda \sqrt{f'_c}$

$$4) V_c = 0,33\lambda\sqrt{f'_c}$$

5) Para o cálculo de V_u será utilizado a superposição das forças conforme equações abaixo:

$$V_u = \frac{v_u}{b_o d} + \frac{\gamma_x M_x C_{AB}}{J_x} + \frac{\gamma_y M_y C_{AD}}{J_y} \quad (4.5)$$

$$C_1 = 30cm \text{ e } C_2 = 20cm$$

$$b_1 = C_1 + d/2 = 36,5cm$$

$$b_2 = C_2 + d = 33cm$$

$$C_{AB} = \frac{b_1^2}{2b_1 + b_2} = 12,57cm$$

$$C_{AD} = b_2/2 = 16,5cm$$

$$\gamma_x = 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)\sqrt{\frac{b_1}{b_2}}} = 0,412$$

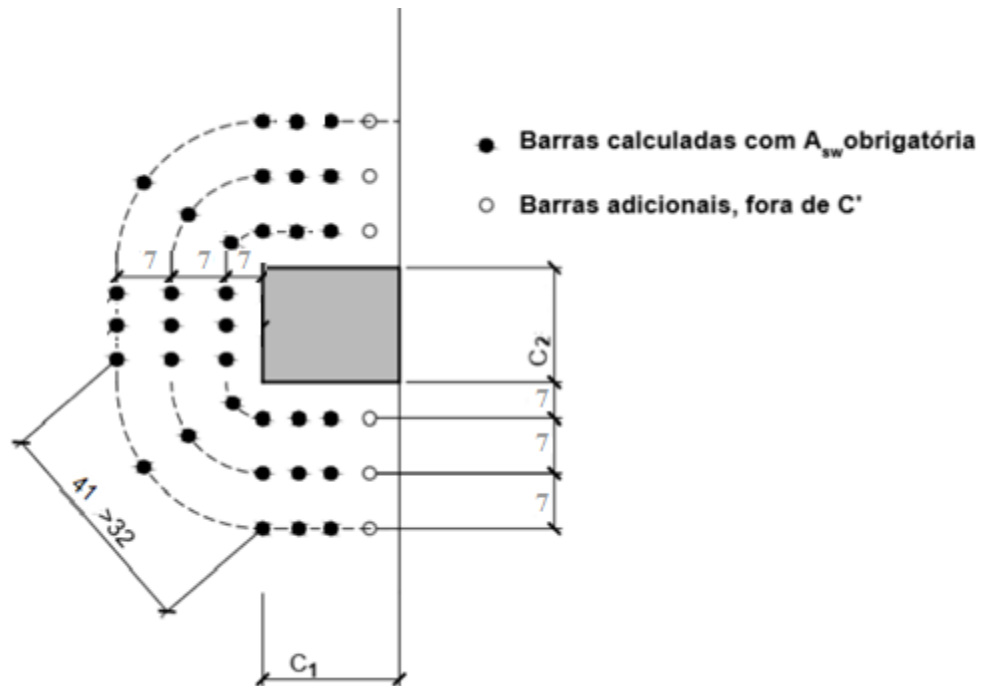
$$\gamma_y = 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)\sqrt{\frac{b_2}{b_1}}} = 0,388$$

$$J_x = \frac{b_1^3 d}{6} + \frac{d^3 b_1}{6} + \frac{b_1^3 b_2^2 d}{2(2b_1 + b_2)^2} + \frac{b_1^4 b_2 d}{2(2b_1 + b_2)^2} = 183241,57$$

$$J_y = \frac{b_2^3 d}{12} + \frac{d^3 b_2}{12} + \frac{b_1 b_2^2 d}{2} = 303338,75$$

6) Uma vez que a armadura será necessária, a parcela V_s de resistência nominal ao cisalhamento do aço entra no cálculo de V_n . Será utilizada a mesma armadura utilizada para pilar interior nos dimensionamentos anteriores, logo, $A_v = 3,52cm^2$. Conforme as FIG.30 e FIG.31, a distância entre as linhas de conectores externas ao perímetro crítico deve ser menor que $2d(26cm)$. Além disto, esta norma especifica que o espaçamento deve ser $0,5d$, ou seja, $s \approx 7cm$, diferente dos espaçamentos anteriores e que a distância entre o último contorno de armaduras e o perímetro crítico fora da área de reforço de armadura deve ser de $0,5d \approx 7cm$. O detalhamento do pilar de borda encontra-se na FIG.45.

Figura 45- Detalhamento da armadura do pilar de borda



Fonte: Adaptado de Apostila de Concreto Armado II (2018).

$$7) V_c = 0,17\sqrt{f_c'}$$

$$8) V_n = V_c + V_s = 0,283 \text{ kN/cm}^2 \leq 0,5\sqrt{30} = 0,274 \text{ kN/cm}^2$$

$$9) V_u = \frac{v_u}{u d} + \frac{\gamma_x M_x C_{AB}}{J_x} + \frac{\gamma_y M_y C_{AD}}{J_y}$$

$$C_1 = 30 \text{ cm e } C_2 = 20 \text{ cm}$$

$$b_1 = C_1 + 3s + d/2 = 57,5 \text{ cm}$$

$$b_2 = C_2 + 2(3s) + d = 75 \text{ cm}$$

$$C_{AB} = \frac{b_1^2}{2b_1 + b_2} = 17,4 \text{ cm}$$

$$C_{AD} = b_2/2 = 37,5 \text{ cm}$$

$$\gamma_x = 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)\sqrt{\frac{b_1}{b_2}}} = 0,369$$

$$\gamma_y = 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)\sqrt{\frac{b_2}{b_1}}} = 0,432$$

$$J_x = \frac{b_1^3 d}{6} + \frac{d^3 b_1}{6} + \frac{b_1^3 b_2^2 d}{2(2b_1 + b_2)^2} + \frac{b_1^4 b_2 d}{2(2b_1 + b_2)^2} = 773121,04$$

$$J_y = \frac{b_2^3 d}{12} + \frac{d^3 b_2}{12} + \frac{b_1 b_2^2 d}{2} = 2573106,25$$

4.4.3. PILAR DE CANTO

O lado de comprimento 20cm é o lado paralelo ao eixo x e o de 30cm o lado paralelo ao eixo y.

Dimensionamento conforme o ACI 318-11		
Pilar de canto		
	Φ	0,85
	β	1,5
V_c 1)	f'_c (Mpa)	30
	α_s	20
	b_o	63
	2) (kN/cm ²)	0,217
	3) (kN/cm ²)	0,279
	4) (kN/cm ²)	0,181
	V_u (kN/cm ²) 5)	0,205
	ΦV_n (kN/cm ²)	0,154
	$\Phi V_n \geq V_u$	Armar
Verificação da região armada 6)	V_c (kN/cm ²) 7)	0,0931
	f_{yt} (kN/cm ²)	40
	V_s (kN/cm ²)	0,145
	V_n (kN/cm ²) 8)	0,238
	ΦV_n (kN/cm ²)	0,202
	$\Phi V_n \geq V_u$	Ñ atende
	A_v (cm ²) 9)	1,92
	V_s (kN/cm ²)	0,305
	V_n (kN/cm ²) 10)	0,274
	ΦV_n (kN/cm ²)	0,233
	$\Phi V_n \geq V_u$	Atende
Verificação da região a d/2 da região armada	u (cm)	93,05
	V_u (kN/cm ²) 11)	0,116
	2) (kN/cm ²)	0,217
	3) (kN/cm ²)	0,218
	4) (kN/cm ²)	0,181
	ΦV_n (kN/cm ²)	0,154
	$\Phi V_n \geq V_u$	Atende

Observações:

- 1) O valor de V_c será o menor entre as equações dos itens 2), 3) ou 4).
- 2) $V_c = 0,17 \left(1 + \frac{2}{\beta}\right) \lambda \sqrt{f_c'}$
- 3) $V_c = 0,083 \left(2 + \frac{\alpha_s d}{b_o}\right) \lambda \sqrt{f_c'}$
- 4) $V_c = 0,33 \lambda \sqrt{f_c'}$
- 5) Para o cálculo de V_u será utilizado a superposição das forças conforme equações abaixo:

$$V_u = \frac{V_u}{b_o d} + \frac{\gamma_x M_x C_{AB}}{J_x} + \frac{\gamma_y M_y C_{AD}}{J_y} \quad (4.6)$$

$$C_1 = 30cm \text{ e } C_2 = 20cm$$

$$b_1 = C_1 + d/2 = 36,5cm$$

$$b_2 = C_2 + d/2 = 26,5cm$$

$$C_{AB} = \frac{b_1^2}{2(b_1 + b_2)} = 10,57cm$$

$$C_{CB} = \frac{b_2^2}{2(b_1 + b_2)} = 5,57cm$$

$$\gamma_x = 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{3}\right) \sqrt{\frac{b_1}{b_2}}} = 0,439$$

$$\gamma_y = 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{3}\right) \sqrt{\frac{b_2}{b_1}}} = 0,362$$

$$J_x = \frac{b_1^3 d}{12} + \frac{d^3 b_1}{12} + \frac{b_1^3 b_2^2 d}{4(b_1 + b_2)^2} + \frac{b_1^4 b_2 d}{4(b_1 + b_2)^2} = 125838,29$$

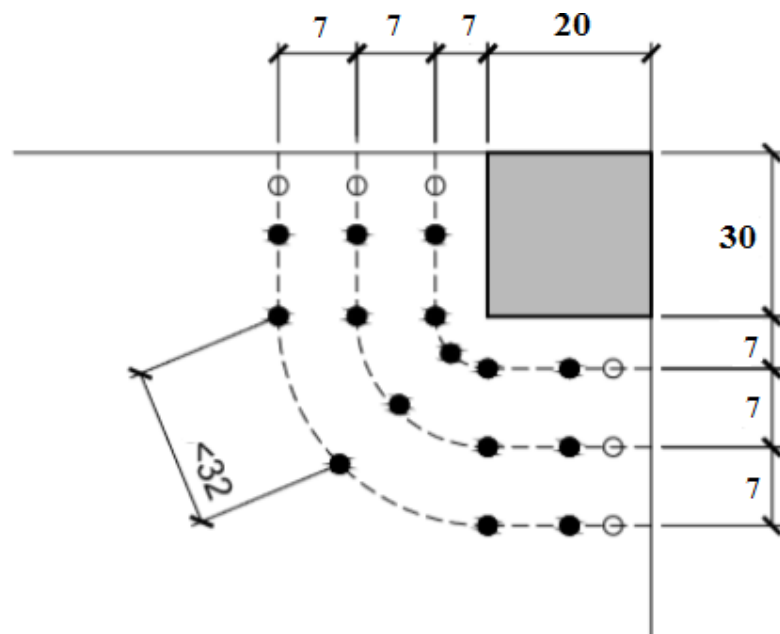
$$J_y = \frac{b_2^3 d}{12} + \frac{d^3 b_2}{12} + \frac{b_2^3 b_1^2 d}{4(b_1 + b_2)^2} + \frac{b_2^4 b_1 d}{4(b_1 + b_2)^2} = 60052,88$$

$$V_u = \frac{105}{63 \cdot 13} + \frac{0,439 \cdot 1000 \cdot 10,57}{125838,29} + \frac{0,362 \cdot 1200 \cdot 5,57}{60052,88} = 0,205 kN/cm^2$$

$$\phi V_n = 0,85 * 0,181 = 0,154 kN/cm^2 \geq V_u = 0,205 kN/cm^2$$

- 6) Uma vez que a armadura será necessária, a parcela V_s de resistência nominal ao cisalhamento do aço entra no cálculo de V_n . Será utilizada a mesma armadura utilizada para pilar interior nos dimensionamentos anteriores, logo, $A_v = 1,6\text{cm}^2$. Conforme as FIG.30 e FIG.31, a distância entre as linhas de conectores externas ao perímetro crítico deve ser menor que $2d$ (26cm). Além disto, esta norma especifica que o espaçamento deve ser $0,5d$, ou seja, $s \approx 7\text{cm}$, diferente dos espaçamentos anteriores e que a distância entre o último contorno de armaduras e o perímetro crítico fora da área de reforço de armadura deve ser de $0,5d \approx 7\text{cm}$. O detalhamento do pilar de canto encontra-se na FIG.46.

Figura 46- Detalhamento da armadura do pilar de canto



● **Barras calculadas com A_{sw} obrigatória**

○ **Barras adicionais, fora de C'**

Fonte: Adaptado de Apostila de Concreto Armado II (2018).

- 7) $V_c = 0,17\sqrt{f'_c}$
- 8) $V_n = V_c + V_s = 0,238\text{kN/cm}^2 \leq 0,5\sqrt{30} = 0,274\text{kN/cm}^2$
- 9) A armadura utilizada não foi suficiente, desta forma, será inserida mais uma linha de armaduras na diagonal e $A_v = 1,92\text{cm}^2$.
- 10) $V_n = V_c + V_s = 0,398\text{kN/cm}^2 \leq 0,5\sqrt{30} = 0,274\text{kN/cm}^2$

$$11) V_u = \frac{v_u}{u d} + \frac{\gamma_x M_x C_{AB}}{J_x} + \frac{\gamma_y M_y C_{CB}}{J_y}$$

$$C_1 = 30\text{cm} \text{ e } C_2 = 20\text{cm}$$

$$b_1 = C_1 + 3s + d/2 = 57,5\text{cm}$$

$$b_2 = C_2 + 3s + d/2 = 47,5\text{cm}$$

$$C_{AB} = \frac{b_1^2}{2(b_1 + b_2)} = 15,74\text{cm}$$

$$C_{CB} = \frac{b_2^2}{2(b_1 + b_2)} = 10,74\text{cm}$$

$$\gamma_x = 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{3}\right) \sqrt{\frac{b_1}{b_2}}} = 0,423$$

$$\gamma_y = 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{3}\right) \sqrt{\frac{b_2}{b_1}}} = 0,377$$

$$J_x = \frac{b_1^3 d}{12} + \frac{d^3 b_1}{12} + \frac{b_1^3 b_2^2 d}{4(b_1 + b_2)^2} + \frac{b_1^4 b_2 d}{4(b_1 + b_2)^2} = 495985,16$$

$$J_y = \frac{b_2^3 d}{12} + \frac{d^3 b_2}{12} + \frac{b_2^3 b_1^2 d}{4(b_1 + b_2)^2} + \frac{b_2^4 b_1 d}{4(b_1 + b_2)^2} = 315539,74$$

4.5. CÁLCULOS COM A VARIAÇÃO DO VALOR DA ALTURA ÚTIL

A partir do detalhamento dos cálculos para as quatro normas do exemplo anterior, foram desenvolvidas planilhas com a variação do valor da altura útil e conseqüentemente da altura total da laje, mantendo-se os valores bases já utilizados. Os resultados obtidos encontram-se nas planilhas abaixo.

- $f_{ck} = 30\text{MPa}$ $M_{sdx} = 10\text{kN.m} = 1000\text{kN.cm}$
- Aço CA50 $M_{sdy} = 12\text{kN.m} = 1200\text{kN.cm}$
- Pilares de seção 20cmx30cm Armadura de cisalhamento: $\varnothing = 6,3\text{mm}$
- $\rho = 6,540 \times 10^{-3}$

ABNT NBR 6118:2014															
PILAR INTERNO(Fsd=280kN)															
Altura útil(d)	Verificação sem armadura de punção						Verificação com armadura de punção			Verificação além da região armada					
	perímetro crítico	W		Tensão Solicitante	Tensão Resistente	sd≤rd	Armadura por contorno-cm ² (Ø6,3mm)	Tensão Resistente	sd≤rd	perímetro crítico	W		sd	rd	sd≤rd
		w ₁	w ₂								w ₁	w ₂			
13	263,36	6697,63	7244,45	0,0955	0,0786	ARMAR	5,12	0,156	OK	426,73	18003,26	18846,90	0,0557	0,0786	OK
14	275,93	7375,30	7944,94	0,0841	0,0771	ARMAR	5,12	0,146	OK	451,86	20222,59	21111,89	0,0486	0,0771	OK
15	288,50	8084,96	8677,44	0,0746	0,0756	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-
16	301,06	8826,62	9441,94	0,0667	0,0743	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-
17	313,63	9600,29	10238,43	0,0599	0,0732	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-
18	326,20	10405,95	11066,93	0,0541	0,0721	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-
19	338,76	11243,62	11927,42	0,0492	0,0711	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-
20	351,33	12113,28	12819,92	0,0449	0,0702	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-
21	363,89	13014,94	13744,42	0,0411	0,0694	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-
22	376,46	13948,61	14700,91	0,0378	0,0686	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-
23	389,03	14914,27	15689,41	0,0348	0,0678	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-
24	401,59	15911,94	16709,90	0,0322	0,0671	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Legenda:rd=tensão resistente
sd=tensão solicitante

Percebe-se que nesta situação a armadura de cisalhamento só foi necessária para as alturas úteis de 13cm e 14cm, ou seja, para as alturas de 15cm e 24cm não houve esta necessidade, havendo estabilidade na ligação laje-pilar.

ABNT NBR 6118:2014														
PILAR DE BORDA(Fsd=204,96kN)														
Altura útil(d)	Verificação sem armadura de punção						Verificação com armadura de punção			Verificação além da região armada				
	perímetro crítico	W		Tensão Solicitante	Tensão Resistente	sd≤rd	Armadura por contorno-cm ² (Ø6,3mm)	Tensão Resistente	sd≤rd	perímetro crítico	w ₂	sd	rd	sd≤rd
		w ₁	w ₂											
13	131,68	3847,22	3648,82	0,132	0,0786	ARMAR	3,52	0,185	OK	213,36	10081,63	0,0783	0,0786	OK
14	137,96	4197,47	3987,65	0,116	0,0771	ARMAR	3,52	0,171	OK	225,93	11251,30	0,0684	0,0771	OK
15	144,25	4563,72	4342,48	0,103	0,0756	ARMAR	3,52	0,160	OK	238,50	12484,96	0,0603	0,0756	OK
16	150,53	4945,97	4713,31	0,093	0,0743	ARMAR	3,52	0,150	OK	251,06	13782,62	0,0536	0,0743	OK
17	156,81	5344,22	5100,14	0,083	0,0732	ARMAR	3,52	0,142	OK	263,63	15144,29	0,0480	0,0732	OK
18	163,10	5758,46	5502,98	0,076	0,0721	ARMAR	3,52	0,134	OK	276,20	16569,95	0,0431	0,0721	OK
19	169,38	6188,71	5921,81	0,069	0,0711	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-
20	175,66	6634,96	6356,64	0,063	0,0702	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-
21	181,95	7097,21	6807,47	0,058	0,0694	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-
22	188,23	7575,46	7274,30	0,053	0,0686	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-
23	194,51	8069,70	7757,14	0,049	0,0678	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-
24	200,80	8579,95	8255,97	0,045	0,0671	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-
Legenda:rd=tensão resistente sd=tensão solicitante														

Para o pilar de borda, entretanto, houve necessidade de armadura até a altura de 18cm. Além disto, a tensão solicitante para as primeiras alturas é praticamente o dobro da tensão resistente, mostrando que há uma grande sollicitação na região da ligação, justificando a necessidade de armadura de cisalhamento.

ABNT NBR 6118:2014											
PILAR DE CANTO(Fsd=105kN)											
Altura útil(d)	Verificação sem armadura de punção				Verificação com armadura de punção			Verificação além da região armada			
	perímetro crítico	Tensão Solicitante	Tensão Resistente	sd≤rd	Armadura por contorno-cm ² (Ø6,3mm)	Tensão Resistente	sd≤rd	perímetro crítico	sd	rd	sd≤rd
13	65,84	0,123	0,0786	ARMAR	1,6	0,175	OK	106,68	0,076	0,0786	OK
14	68,98	0,109	0,0771	ARMAR	1,6	0,163	OK	112,96	0,066	0,0771	OK
15	72,12	0,097	0,0756	ARMAR	1,6	0,152	OK	119,25	0,059	0,0756	OK
16	75,27	0,087	0,0743	ARMAR	1,6	0,143	OK	125,53	0,052	0,0743	OK
17	78,41	0,079	0,0732	ARMAR	1,6	0,135	OK	131,81	0,047	0,0732	OK
18	81,55	0,072	0,0721	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-
19	84,69	0,065	0,0711	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-
20	87,83	0,060	0,0702	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-
21	90,97	0,055	0,0694	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-
22	94,12	0,051	0,0686	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-
23	97,26	0,047	0,0678	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-
24	100,40	0,044	0,0671	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-
Legenda:rd=tensão resistente sd=tensão solicitante				obs.: a parcela de momento na equação de tensão solicitante é igual a zero, logo não foram inseridos os valores de W							

Para o pilar de canto as tensões solicitantes foram um pouco menores que as do pilar de borda, exigindo armaduras até as alturas de 17cm.

Nos três pilares dimensionados, todas as armaduras utilizadas satisfizeram o reforço da ligação.

EUROCODE 2														
PILAR INTERNO(Fsd=280kN)														
Altura útil(d)	Verificação sem armadura de punção					Verificação com armadura de punção			Verificação além da região armada					
	perímetro crítico	K	Tensão Solicitante	Tensão Resistente	sd≤rd	Armadura por contorno-cm ² (Ø6,3mm)	Tensão Resistente	sd≤rd	perímetro crítico	W		sd	Rd	sd≤rd
										w ₁	w ₂			
13	222,52	2,00	0,111	0,0701	ARMAR	5,12	0,140	OK	426,73	18003,26	18846,90	0,056	0,0701	OK
14	231,95	2,00	0,099	0,0701	ARMAR	5,12	0,133	OK	451,86	20222,59	21111,89	0,049	0,0701	OK
15	241,37	2,00	0,089	0,0701	ARMAR	5,12	0,124	OK	476,99	22569,92	23504,88	0,043	0,0701	OK
16	250,80	2,00	0,080	0,0701	ARMAR	5,12	0,117	OK	502,12	25045,25	26025,87	0,038	0,0701	OK
17	260,22	2,00	0,073	0,0701	ARMAR	5,12	0,111	OK	527,26	27648,58	28674,86	0,034	0,0701	OK
18	269,65	2,00	0,066	0,0701	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-
19	279,07	2,00	0,061	0,0701	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-
20	288,50	2,00	0,056	0,0701	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-
21	297,92	1,98	0,051	0,0693	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-
22	307,35	1,95	0,048	0,0685	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-
23	316,77	1,93	0,044	0,0678	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-
24	326,20	1,91	0,041	0,0671	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Legenda:rd=tensão resistente sd=tensão solicitante														

Diferente do pilar interno calculado pela norma anterior, foi necessário armar para as alturas de 13cm a 17cm e a área de aço utilizada satisfz a esta necessidade.

EUROCODE 2														
PILAR DE BORDA (Fsd=204,96kN)														
Altura útil(d)	Verificação sem armadura de punção					Verificação com armadura de punção			Verificação além da região armada					
	perímetro crítico	K	Tensão Solicitante	Tensão Resistente	sd≤rd	Armadura por contorno-cm ² (Ø6,3mm)	Tensão Resistente	sd≤rd	perímetro crítico	W		sd	Rd	sd≤rd
										w ₁	w ₂			
13	111,26	2,00	0,198	0,0701	ARMAR	3,52	0,173	ÑOK	213,36	9648,448	10081,63	0,084	0,0701	ÑOK
14	115,97	2,00	0,177	0,0701	ARMAR	3,52	0,163	ÑOK	225,93	10780,94	11251,30	0,073	0,0701	ÑOK
15	120,69	2,00	0,159	0,0701	ARMAR	3,52	0,151	ÑOK	238,50	11977,44	12484,96	0,064	0,0701	OK
16	125,40	2,00	0,143	0,0701	ARMAR	3,52	0,142	ÑOK	251,06	13237,94	13782,62	0,057	0,0701	OK
17	130,11	2,00	0,130	0,0701	ARMAR	3,52	0,134	OK	263,63	14562,43	15144,29	0,051	0,0701	OK
18	134,82	2,00	0,118	0,0701	ARMAR	3,52	0,126	OK	276,20	15950,93	16569,95	0,046	0,07012	OK
19	139,54	2,00	0,108	0,0701	ARMAR	3,52	0,120	OK	288,76	17403,42	18059,62	0,041	0,07012	OK
20	144,25	2,00	0,099	0,0701	ARMAR	3,52	0,115	OK	301,33	18919,92	19613,28	0,037	0,07012	OK
21	148,96	1,98	0,092	0,0693	ARMAR	3,52	0,109	OK	313,89	20500,42	21230,94	0,034	0,06928	OK
22	153,67	1,95	0,085	0,0685	ARMAR	3,52	0,105	OK	326,46	22144,91	22912,61	0,031	0,06849	OK
23	158,39	1,93	0,079	0,0678	ARMAR	3,52	0,100	OK	339,03	23853,41	24658,27	0,029	0,06775	OK
24	163,10	1,91	0,073	0,0671	ARMAR	3,52	0,096	OK	351,59	25625,9	26467,94	0,026	0,06707	OK
Legenda:rd=tensão resistente sd=tensão solicitante														

Nesta situação todas as alturas exigiram armaduras. Além disto, a área de aço utilizada não foi suficiente para garantir a estabilidade da ligação nas alturas de 13cm e 14cm. O que, em parte, se deve ao fato da altura mínima recomendada por esta norma ser de 20cm.

EUROCODE 2														
PILAR DE CANTO (Fsd=105kN)														
Altura útil(d)	Verificação sem armadura de punção					Verificação com armadura de punção			Verificação além da região armada					
	perímetro crítico	k	Tensão Solicitante	Tensão Resistente	sd≤rd	Armadura por contorno-cm ² (Ø6,3mm)	Tensão Resistente	sd≤rd	perímetro crítico	W		sd	rd	sd≤rd
										w ₁	w ₂			
13	65,84	2,00	0,184	0,0701	ARMAR	1,6	0,145	ÑOK	106,68	5480,82	5494,22	0,094	0,0701	ÑOK
14	68,98	2,00	0,163	0,0701	ARMAR	1,6	0,137	ÑOK	112,96	6095,65	6100,47	0,082	0,0701	ÑOK
15	72,12	2,00	0,146	0,0701	ARMAR	1,6	0,128	ÑOK	119,25	6742,48	6738,72	0,072	0,0701	ÑOK
16	75,27	2,00	0,131	0,0701	ARMAR	1,6	0,120	ÑOK	125,53	7421,31	7408,97	0,063	0,0701	OK
17	78,41	2,00	0,118	0,0701	ARMAR	1,6	0,114	ÑOK	131,81	8132,14	8111,22	0,056	0,0701	OK
18	81,55	2,00	0,107	0,0701	ARMAR	1,6	0,108	OK	138,10	8874,98	8845,46	0,051	0,07012	OK
19	84,69	2,00	0,098	0,0701	ARMAR	1,6	0,103	OK	144,38	9649,81	9611,71	0,046	0,07012	OK
20	87,83	2,00	0,090	0,0701	ARMAR	1,6	0,099	OK	150,66	10456,64	10409,96	0,041	0,07012	OK
21	90,97	1,98	0,082	0,0693	ARMAR	1,6	0,095	OK	156,95	11295,47	11240,21	0,037	0,06928	OK
22	94,12	1,95	0,076	0,0685	ARMAR	1,6	0,091	OK	163,23	12166,30	12102,46	0,034	0,06849	OK
23	97,26	1,93	0,070	0,0678	ARMAR	1,6	0,087	OK	169,51	13069,14	12996,70	0,031	0,06775	OK
24	100,40	1,91	0,065	0,0671	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Legenda:rd=tensão resistente sd=tensão solicitante														

Similar ao pilar anterior, esta situação só não exigiu armaduras de reforço para a altura de 24cm. A armadura não foi suficiente para as alturas de 13cm a 15cm e, assim como na situação anterior, as tensões solicitantes apresentaram valores muito elevados.

CEB FIB MC 90																
PILAR INTERNO(Fsd=280kN)																
Altura útil(d)	Verificação sem armadura de punção						Verificação com armadura de punção				Verificação além da região armada					
	perímetro crítico	W		Tensão Solicitante	Tensão Resistente	sd≤rd	Armadura por contorno-cm ² (Ø6,3mm)	F (Sd,ef)	Resistente	F(Sd,ef) ≤res	perímetro crítico	W		F (Sd,ef)	Res.	F(Sd,ef) ≤res
		w ₁	w ₂									w ₁	w ₂			
13	263,36	6697,63	7244,45	0,096	0,0725	ARMAR	5,12	328,02	1163,97	OK	426,73	18003,26	18846,90	309,51	1866,72	OK
14	275,93	7375,30	7944,94	0,084	0,0711	ARMAR	5,12	325,80	1262,92	OK	451,86	20222,59	21111,89	307,87	2085,84	OK
15	288,50	8084,96	8677,44	0,075	0,0697	ARMAR	5,12	323,77	1358,05	OK	476,99	22569,92	23504,88	306,40	2315,58	OK
16	301,06	8826,62	9441,94	0,067	0,0686	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
17	313,63	9600,29	10238,43	0,060	0,0675	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
18	326,20	10405,95	11066,93	0,054	0,0665	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
19	338,76	11243,62	11927,42	0,049	0,0656	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
20	351,33	12113,28	12819,92	0,045	0,0647	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
21	363,89	13014,94	13744,42	0,041	0,0640	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
22	376,46	13948,61	14700,91	0,038	0,0632	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
23	389,03	14914,27	15689,41	0,035	0,0626	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
24	401,59	15911,94	16709,90	0,032	0,0619	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Legenda:rd=tensão resistente sd=tensão solicitante																

Como visto anteriormente, a NBR e o CEB apresentaram resultados similares para a altura de 13 cm, o que se repete para as demais alturas, sendo necessário armar a ligação para alturas de 13cm a 15cm

CEB FIB MC 90														
PILAR DE BORDA(Fsd=204,96kN)														
Altura útil(d)	Verificação sem armadura de punção					Verificação com armadura de punção				Verificação além da região armada				
	perímetro crítico	w ₁	Tensão Solicitante	Tensão Resistente	sd≤rd	Armadura por contorno-cm ² (Ø6,3mm)	F(Sd,ef)	Resistente	F(Sd,ef) ≤res	perímetro crítico	w ₁	F(Sd,ef)	Res.	F(Sd,ef)
13	131,68	3648,82	0,136	0,0725	ARMAR	3,52	233,11	638,14	OK	213,36	10081,63	221,47	933,36	OK
14	137,96	3987,65	0,120	0,0711	ARMAR	3,52	231,95	689,06	OK	225,93	11251,30	220,62	1042,92	OK
15	144,25	4342,48	0,107	0,0697	ARMAR	3,52	230,87	736,63	OK	238,50	12484,96	219,86	1157,79	OK
16	150,53	4713,31	0,095	0,0686	ARMAR	3,52	229,87	786,11	OK	251,06	13782,62	219,17	1277,92	OK
17	156,81	5100,14	0,086	0,0675	ARMAR	3,52	228,94	837,51	OK	263,63	15144,29	218,54	1403,28	OK
18	163,10	5502,98	0,078	0,0665	ARMAR	3,52	228,08	890,82	OK	276,20	16569,95	217,96	1533,83	OK
19	169,38	5921,81	0,071	0,0656	ARMAR	3,52	227,27	946,01	OK	288,76	18059,62	217,43	1669,54	OK
20	175,66	6356,64	0,064	0,0647	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-
21	181,95	6807,47	0,059	0,0640	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-
22	188,23	7274,30	0,054	0,0632	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-
23	194,51	7757,14	0,050	0,0626	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-
24	200,80	8255,97	0,046	0,0619	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Legenda:rd=tensão resistente sd=tensão solicitante														

Nota-se que os valores das tensões solicitantes para o pilar de borda para esta norma e para a NBR foram muito parecidos, assim como as alturas úteis que exigiram armadura.

CEB FIB MC 90												
PILAR DE CANTO(Fsd=105kN)												
Altura útil(d)	Verificação sem armadura de punção				Verificação com armadura de punção				Verificação além da região armada			
	perímetro crítico	Tensão Solicitante	Tensão Resistente	sd≤rd	Armadura por contorno-cm ² (Ø6,3mm)	F(Sd,ef)	Resistente	F(Sd,ef) ≤res	perímetro crítico	F(Sd,ef)	Res.	F(Sd,ef) ≤res
13	65,84	0,123	0,0725	ARMAR	1,6	105	309,65	OK	106,68	105	466,68	OK
14	68,98	0,109	0,0711	ARMAR	1,6	105	334,87	OK	112,96	105	521,46	OK
15	72,12	0,097	0,0697	ARMAR	1,6	105	358,64	OK	119,25	105	578,89	OK
16	75,27	0,087	0,0686	ARMAR	1,6	105	383,38	OK	125,53	105	638,96	OK
17	78,41	0,079	0,0675	ARMAR	1,6	105	409,07	OK	131,81	105	701,64	OK
18	81,55	0,072	0,0665	ARMAR	1,6	105	435,72	OK	138,10	105	766,92	OK
19	84,69	0,065	0,0656	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-
20	87,83	0,060	0,0647	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-
21	90,97	0,055	0,0640	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-
22	94,12	0,051	0,0632	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-
23	97,26	0,047	0,0626	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-
24	100,40	0,044	0,0619	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-
Legenda:rd=tensão resistente sd=tensão solicitante												

Todas as situações que exigiram reforço foram satisfeitas com a área de aço utilizada.

ACI 318-11																			
PILAR DE CANTO(Fsd=105kN)																			
Altura útil(d)	Verificação sem armadura de punção							Verificação com armadura de punção					Verificação além da região armada						
	perímetro crítico	V_c			V_u	ΦV_n	$\Phi V_n \geq V_u$	Armadura por contorno-cm ² (Ø6,3mm)	V_n	$V_n \leq 0,274$	ΦV_n	$\Phi V_n \geq V_u$	perímetro crítico	V_c			V_u	ΦV_n	$\Phi V_n \geq V_u$
		V_{c1}	V_{c2}	V_{c3}										V_{c1}	V_{c2}	V_{c3}			
13	63	0,217	0,279	0,181	0,205	0,154	ARMAR	1,6	0,238	0,238	0,202	ÑOK	93,06	0,217	0,218	0,181	0,116	0,154	OK
14	64	0,217	0,389	0,181	0,186	0,154	ARMAR	1,6	0,236	0,236	0,201	OK	93,87	0,217	0,227	0,181	0,106	0,154	OK
15	65	0,217	0,406	0,181	0,169	0,154	ARMAR	1,6	0,224	0,224	0,191	OK	97,00	0,217	0,232	0,181	0,095	0,154	OK
16	66	0,217	0,422	0,181	0,155	0,154	ARMAR	1,6	0,214	0,214	0,182	OK	100,13	0,217	0,236	0,181	0,085	0,154	OK
17	67	0,217	0,437	0,181	0,143	0,154	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
18	68	0,217	0,452	0,181	0,132	0,154	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
19	69	0,217	0,466	0,181	0,122	0,154	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
20	70	0,217	0,481	0,181	0,113	0,154	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
21	71	0,217	0,494	0,181	0,106	0,154	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
22	72	0,217	0,508	0,181	0,099	0,154	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
23	73	0,217	0,521	0,181	0,092	0,154	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
24	74	0,217	0,533	0,181	0,087	0,154	Ñ ARMAR	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Para os três pilares analisados por esta norma, em todas as situações em que a armadura de cisalhamento foi necessária, a área de aço só não foi suficiente para o pilar de canto de d=13cm. Quando comparado com os dimensionamentos das outras normas, percebe-se que para os pilares de borda e de canto houve necessidade de armar somente para as primeiras alturas úteis, diferente dos demais.

5. CONCLUSÃO

A partir dos exemplos analisados e dos dimensionamentos realizados, assim como as planilhas com a variação da altura útil, são apresentadas as seguintes conclusões:

- Nos exemplos dimensionados nos itens 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4, a armadura utilizada foi suficiente para o pilar interno conforme as quatro normas e também atendeu a todas as verificações com a armadura. Porém, para o pilar de borda dimensionado conforme o Eurocode 2, a armadura não foi suficiente e não passou na verificação além da região armada. Já para o pilar de canto, a armadura não foi suficiente para o dimensionamento conforme o EUROCODE 2 e o ACI 318-11. Um fato que pode ter influenciado no EUROCODE 2 é a questão de que a altura útil é inferior à permitida nesta norma, comprometendo a região de ligação.
- Quanto às planilhas dimensionadas no item 4.5 percebe-se que em relação ao pilar interno, para a ABNT NBR 6118:2014 foi necessário armadura de cisalhamento para as alturas úteis de 13cm e 14cm. Enquanto para o EUROCODE 2 de 13cm a 17cm. O CEB FIB MC 90 para as alturas de 13cm a 15cm e para o ACI 318-11 de 13cm a 14cm. A área de aço de $5,12\text{cm}^2$ foi suficiente para estas alturas que necessitaram de armadura e todas as situações atenderam à verificação além da área armada.
- Para o pilar de borda foi necessário armar a ligação da ABNT NBR 6118:2014 para as alturas úteis de 13cm a 18cm. Já para o EUROCODE 2 de 13cm a 24cm. Todavia para o CEB FIB MC 90 foi necessário armadura de cisalhamento para as alturas de 13cm a 19cm e para o ACI 318-11 de 13cm a 15cm. A área de aço de $3,52\text{cm}^2$ não foi suficiente para as alturas de 13cm a 16cm pelo EUROCODE 2 e a verificação além da área armada não foi atendida para as alturas de 13cm e 14cm desta mesma norma.
- Para o pilar de canto, a armadura foi necessária para as alturas úteis 13cm a 17cm da ABNT NBR 6118:2014. Enquanto para o EUROCODE 2 de 13cm a 23cm. O CEB FIB MC 90 exigiu armaduras de cisalhamento para as alturas de 13cm a 18cm e de 13cm a 16cm do ACI 318-1. A área de aço de $1,6\text{cm}^2$ não foi suficiente para as alturas de 13cm a 17cm do EUROCODE 2 e de 13cm do ACI 318-11. Somente as alturas de 13cm a 15 do EUROCODE 2 não atenderam à verificação além da área armada.

Em relação à necessidade de armação e às verificações realizadas a ABNT NBR 6118:2014 e o ACI 318-11 apresentaram os resultados mais parecidos, assim como o CEB FIB MC 90. O

EUROCODE 2 por sua vez apresentou resultados mais conservadores, exigindo armadura para quase todas as alturas úteis, principalmente nos pilares de borda e de canto.

As lajes cogumelo e lisas são um sistema estrutural eficiente, que dispensa as vigas e é capaz de vencer grandes vãos, permitindo maior flexibilidade e liberdade na realização dos projetos arquitetônicos, além de facilitar a instalação dos sistemas hidráulicos e elétricos, bem como sua manutenção.

Apesar de ser um sistema mais instável e apresentar o risco de ruptura por punção, percebe-se, a partir das análises realizadas que os cálculos efetuados são de extrema importância para verificar a necessidade de reforço na ligação laje-pilar e para a garantia da estabilidade desta ligação. A utilização de armaduras de cisalhamento evita a ocorrência desta ruína, aumentando a resistência da ligação e prevenindo que ocorra uma ruptura brusca.

A altura útil da laje, as reações e momentos fletores atuando nos pilares e suas dimensões são alguns dos fatores que influenciam no dimensionamento à punção. Neste trabalho foi realizada a variação da altura útil da laje e foi possível ver como ela influencia na ligação laje-pilar, mostrando que à medida que a altura aumenta a ligação se torna mais estável, não necessitando de armadura.

Sugere-se para trabalhos futuros que seja realizada a variação das reações, momentos fletores e dimensões dos pilares, de forma a ampliar a análise sobre a ligação entre a laje e o pilar.

6. REFERÊNCIAS

ALTOQI. Desenvolvido por: AltoQI . Suporte na área de engenharia civil. Disponível em: <[https://suporte.altoqi.com.br/hc/pt-br/articles/115001346494-Quais-as-armaduras-utilizadas-para-resistir-a-esfor%C3%A7os-de-cisalhamento->](https://suporte.altoqi.com.br/hc/pt-br/articles/115001346494-Quais-as-armaduras-utilizadas-para-resistir-a-esfor%C3%A7os-de-cisalhamento-). Acesso em: 30 abr. 2021. Site.

AMERICAN CONCRETE STRUCTURE. **ACI 318-11**: Building Code Requirements for Structural Concrete. Estados Unidos da América, 2011. 503f.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto: Procedimento. Rio de Janeiro, 2014. 238 p.

BATISTA, Felipe Hundertmark. **Estudo comparativo de lajes planas de concreto armado e concreto protendido**: um estudo de caso. 2018. 91f. Trabalho de conclusão de curso (Bacharel em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2018. Disponível em <http://coral.ufsm.br/engcivil/images/PDF/1_2018/TCC_FELIPE%20HUNDERTMARK%20BATISTA.pdf>. Acesso em: 15 jun. 2021.

COMITE EURO-INTERNATIONAL DU BETON. **CEB FIB MC 90**. Suíça, 1993. 437f.

EUROPEAN STANDART. **EUROCODE 2**: Design of concrete structures - Part 1-1 : General rules and rules for buildings. Bélgica, 2004. 225f.

FERREIRA, Licínio Filipe Noivo Índio. **Reforço ao corte de elementos em betão armado com chapas metálicas**. 2009. 112 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade de Aveiro, Aveiro, 2009. Disponível em <<https://ria.ua.pt/bitstream/10773/2383/1/2010000002.pdf>>. Acesso em 15 jun. 2021.

GUARDA, Mônica Cristina Cardoso da. **Cálculo de lajes-cogumelo pelo teoria das charneiras plásticas**. 1995. 164f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 1995. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/18/18134/tde-25042018-112915/publico/Dissert_Guarda_MonicaCC.pdf>. Acesso em: 30 abr. 2021.

KOVALCZUK, Eduardo Felipe; MUNARETTO, Gabriel Augusto. **Punção em lajes lisas**: influência da altura útil da laje no dimensionamento. 2014. 114f. Trabalho de conclusão de curso (Engenharia Civil) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2014. Disponível em <<http://www.estruturas.ufpr.br/wp-content/uploads/2015/08/TFC-GabrielEduardo.pdf>>. Acesso em: 20 abr.2021.

LEONHARDT, Fritz; MÖNNIG, Eduard. **Construções de concreto**: casos especiais de dimensionamento de estruturas de concreto armado. Rio de Janeiro: Editora Interciência LTDA.,1978. 2v.

MAPIO. Desenvolvido por: Impressum. Fornece figuras diversas. Disponível em: <<https://mapio.net/pic/p-73647833/>>. Acesso em: 30 abr. 2021. Site.

MELGES, José Luiz Pinheiro. **Análise experimental da punção em lajes de concreto armado e protendido**. 2001. 414 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001. Disponível em <file:///C:/Users/Let%C3%ADcia/Downloads/2001DO_JoseLuizPMelges%20(1).pdf>. Acesso em: 16 abr. set. 2021.

RODRIGUES, David Rosa. **Comparação experimental entre tipos de armadura de cisalhamento para combate à punção em lajes cogumelo de concreto armado: “stud rails” e “double headed studs”**. 2009. 142 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2009. Disponível em <https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/683/1/David%20Rosa%20Rodrigues.pdf>. Acesso em: 16 abr.2021.

SILVA, Ney Amorim. **Concreto Armado II**. Versão Junho 2018. Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, 2018. 326 f. Destinada ao curso de especialização em estruturas da disciplina de concreto armado II. Apostila.

TAKEYA, Toshiaki. **Estudo experimental da ruína de ligações laje-pilar em bordas de lajes-cogumelo**. 1981. 250 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas)-Universidade de São Paulo, São Carlos, 1981. Disponível em <http://web.set.eesc.usp.br/static/media/producao/1982ME_ToshiakiTakeya_1.pdf>. Acesso em: 15 jun. abr. 2021.

VIEIRA, Cleber Silvano Cabral. **Verificação do efeito de punção em lajes lisas de concreto armado**. 2018. 96f. Trabalho de conclusão de curso (Bacharel em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2018. Disponível em <http://coral.ufsm.br/engcivil/images/PDF/1_2018/TCC_CLEBER%20SILVANO%20CABRAL%20VIEIRA.pdf>. Acesso em: 22 jun. 2021.

WERNECK, Priscila Pinheiro de Toledo. **Avaliação da punção em lajes lisas de concreto armado**. 2017. 138f. Trabalho de conclusão de curso (Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2017. Disponível em <http://repositorio.poli.ufjf.br/monografias/monopoli10022152.pdf >. Acesso em: 20 jun. 2021.

WIKIPÉDIA. Desenvolvido por: MediaWiki . Enciclopédia livre de amplo escopo construída por milhares de colaboradores de todas as partes do mundo. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Amanita_bisporigera>. Acesso em: 15 abr. 2021. Site.