UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-graduação em Matemática

Rafaella Ferreira dos Santos Siqueira

PROBLEMAS ELÍPTICOS SEMILINEARES COM POTENCIAIS QUE SE ANULAM NO INFINITO

Belo Horizonte
2020

Rafaella Ferreira dos Santos Siqueira

PROBLEMAS ELÍPTICOS SEMILINEARES COM POTENCIAIS QUE SE ANULAM NO INFINITO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Ronaldo Brasileiro Assunção.

Belo Horizonte
2020

Siqueira, Rafaella Ferreira dos Santos.

S618p Problemas elípticos semilineares com potenciais que se anulam no infinito [manuscrito] / Rafaella Ferreira dos Santos Siqueira – 2020.
90 f. il.

Orientador: Ronaldo Brasileiro Assunção.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f.86-88.

1. Matemática – Teses. 2. Teorema do passo da montanha – Teses. 3. Potenciais de Hardy – Teses. I. Assunção, Ronaldo Brasileiro. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51 (043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende Costa
CRB 6/1510 Universidade Federal de Minas Gerais - ICEx

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

Problemas elípticos semilineares com potenciais que anulam no infinito

RAFAELLA FERREIRA DOS SANTOS SIQUEIRA

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Ronaldo B. Assunção

Prof. Ronaldo Brasileiro Assunção
UFMG

Prof. Ezequiel Rodrigues Barbosa
UFMG

Gilberto de Assis Pereira

Prof. Gilberto de Assis Pereira
UFOP

Belo Horizonte, 30 de outubro de 2020.

Av. Antônio Carlos, 6627 – Campus Pampulha - Caixa Postal: 702
CEP-31270-901 - Belo Horizonte – Minas Gerais - Fone (31) 3409-5963
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br - home page: http://www.mat.ufmg.br/pgmat

Ao meu esposo Mateus, com todo amor.

Agradecimentos

A Deus, pois todas as coisas foram criadas por Ele, e tudo existe por meio Dele e para Ele. A Ele toda honra e toda glória.

Ao meu esposo, Mateus, pelo apoio e incentivo durante toda minha trajetória acadêmica. É uma honra fazer parte da sua vida e um privilégio ter você fazendo parte da minha. Muito obrigada pelas conversas, pelos conselhos e pela amizade. Você me motiva a crescer todos os dias e me inspira profissionalmente.

A minha tia, Cláudia, pelo exemplo de vida, o qual contribuiu para a construção do meu caráter e da minha personalidade. Obrigada pelo amor e carinho, pelo apoio constante, por sempre ficar ao meu lado nos momentos mais difíceis e por sua presença fundamental em toda minha vida.

Aos meus pais, Fernanda e Antônio, pela minha vida, por todo amor, por todo esforço para que eu conquistasse meus objetivos, por sempre acreditarem em mim e pelo constante incentivo e apoio.

A minha avó, Noeme, por ser a típica avó de novela, a qual me considera perfeita, mesmo eu não sendo; que está sempre preparada para me ouvir, independentemente da circunstância; que guarda todos os meus segredos, e me conta tudo.

A minha irmã, Alice, por sempre me motivar a ser um bom exemplo para ela e uma pessoa melhor.

As minhas tias, Dedé e Luciana, pela torcida e por sempre me acolherem tão bem em suas respectivas casas.

A todos que também fazem parte da minha família, como tios, primos, cunhada e sogros, por terem acompanhado minha caminhada e se alegrado com minhas conquistas. A todos estes, minha gratidão pelo apoio.

Ao meu orientador, Ronaldo Assunção, por todos os ensinamentos, pela paciência e pelo comprometimento comigo e com este trabalho. Obrigada por todo conhecimento que me transmitiu durante estes anos de convívio e por ter contribuído imensamente para o meu crescimento profissional.

Aos membros da minha banca de mestrado, Prof. Gilberto e Prof. Ezequiel, por terem aceitado o convite e pelas sugestões e contribuições dadas.

A todos os professores que tive no decorrer da minha vida, em especial aos da área da Matématica, pela inspiração e por todo o conhecimento trasmitido.

Às secretárias da pós, Andréa e Kelli, pela presteza e pela competência de sempre.

Ao CNPq, pela bolsa de estudos que possibilitou minha dedicação exclusiva ao programa de Pós-Graduação da UFMG.

Resumo

Nesta dissertação estudamos um resultado de existência de solução positiva $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ para a classe de equações diferenciais elípticas

$$-\Delta u + V(x)u = f(u) \qquad (x \in \mathbb{R}^N)$$

em que $N \geqslant 3$, a não linearidade $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é função contínua com crescimento subcrítico ou crítico no sentido das imersões de Sobolev e o potencial $V\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é função contínua não negativa que pode se anular no infinito, ou seja, $V(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$.

Também estudamos um resultado de existência de solução positiva ground state $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ para a classe de equações diferenciais elípticas

$$-\Delta u + V(x)u = K(x)f(u) \qquad (x \in \mathbb{R}^N)$$

em que $N \geqslant 3$, a não linearidade $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é função contínua com crescimento quase crítico e V, $K\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, não negativas, o potencial V pode se anular no infinito e K verifica condições de crescimento dependentes de V.

Palavras-chave Potencial que se anula no infinito, método de penalização, esquema de iteração de Moser, teorema do passo da montanha, desigualdade de Hardy.

Abstract

In this dissertation, we study a result of existence of positive solution $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ for the following class of elliptic equations

$$-\Delta u + V(x)u = f(u) \qquad (x \in \mathbb{R}^N)$$

where the nonlinearity $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a continuous function having a subcritical or critical growth in the sense of Sobolev embeddings and the potential $V\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ is a continuous, non-negative function which can vanish at infinity, that is, $V(x) \to 0$ as $|x| \to \infty$.

We also study a result of existence of positive ground state solution $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ for the following class of elliptic equations

$$-\Delta u + V(x)u = K(x)f(u)(x \in \mathbb{R}^N)$$

where $N \geqslant 3$, the nonlinearity $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a continuous function having a quasi critical growth, and $V,\ K\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ are continuous, non-negative functions, the potential V can vanish at infinity and K verifies growth conditions dependent on V.

Key-words Potential vanishing at infinity, penalization method, Moser iteration scheme, mountain pass theorem, Hardy-type inequality.

Sumário

1 Introdução e resultados principais **10**

- 1.1 Equações elípticas semilineares 10
- 1.2 O conceito de solução fraca 12
- 1.3 Soluções fracas e pontos críticos de funcionais 16
- 1.4 Breve histórico sobre problemas elípticos semilineares 17
- 1.5 Resultados principais sobre potenciais que se anulam 22
  - 1.5.1 Primeiro teorema 23
  - 1.5.2 Segundo teorema 24

2 Demonstração do primeiro teorema **26**

- 2.1 Estrutura variacional do problema semilinear 26
- 2.2 A geometria do passo da montanha 31
- 2.3 O problema auxiliar 34
- 2.4 Estimativa para a solução do problema auxiliar 44
- 2.5 Conclusão da demonstração do primeiro teorema 53

3 Demonstração do segundo teorema **54**

- 3.1 Estrutura variacional do problem semilinear 54
- 3.2 A geometria do passo da montanha 58
- 3.3 Resultados de compacidade 60
- 3.4 A limitação das sequências de Cerami 65
- 3.5 Conclusão da demonstração do segundo teorema 72
- 3.6 Comentários finais 74

A Resultados auxiliares **75**

- A.1 Espaços de funções 75
- A.2 Desigualdades 76
- A.3 Resultados de Análise e de Análise Funcional 78
- A.4 Operadores diferenciáveis 80
- A.5 Teorema do passo da montanha 81

Referências Bibliográficas **82**

Índice Remissivo **85**

Capítulo 1

Introdução e resultados principais

Neste capítulo apresentamos alguns exemplos de equações elípticas semilineares e de suas aplicações às outras ciências. Definimos os conceitos de solução clássica e de solução fraca, relacionamos esses dois conceitos e também estabelecemos a conexão entre solução fraca de um problema elíptico semilinear e pontos críticos de funcionais de Euler-Lagrange. Em seguida, listamos alguns trabalhos recentes relacionados com existência e não existência de soluções para algumas dessas classes de problemas, enfatizando as hipóteses que têm sido usadas a respeito das não linearidades e principalmente a respeito dos potenciais. Depois, apresentamos os problemas elípticos semilineares com potenciais que se anulam no infinito e que estudamos detalhadamente nesta dissertação. Por fim, enunciamos os dois resultados principais, cujas demonstrações encontram-se nos próximos capítulos.

1.1 Equações elípticas semilineares

A equação de Schrödinger unidimensional dependente do tempo

$$ih\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} - V(x)\psi(x,t) \tag{1.1}$$

é uma das equações mais importantes da mecânica quântica. Essa equação ou suas variantes aparecem também no estudo de diversos outros ramos da física, tais como física de plasma, física da matéria condensada, optica não linear, etc. O primeiro termo do lado direito da equação, em que aparece a constante de Planck h, está relacionado com a energia cinética de uma partícula de massa m; o segundo termo, em que aparece o potencial $V(x)$, está relacionado com sua energia potencial; o lado esquerdo, em que aparece a unidade imaginária i, está relacionado com a energia total da partícula sujeita a um movimento unidimensional. Lembramos que nesse caso $\psi(x,t)$ indica a função de onda, que representa a densidade de probabilidade de que no instante t a partícula esteja localizada no ponto x. A função $\psi(x,t) \equiv 0$ é sempre uma solução trivial da equação (1.1); mas naturalmente estamos interessados em soluções não triviais, isto é, soluções tais que $\psi(x,t) \not\equiv 0$.

Uma estratégia utilizada para estudar fenômenos descritos por essa equação consiste em procurar soluções $\psi\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ da forma $\psi(x,t) = u(x)\exp(-iEt/h)$, em que E representa a energia total da partícula. Após manipulações algébricas e analíticas elementares, segue-se que a função real $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deve ser solução da equação diferencial ordinária

$$-\frac{h^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2}+V(x)u(x)=Eu(x)\qquad(x\in\mathbb{R})\tag{1.2}$$

conhecida como equação de Schrödinger unidimensional independente do tempo. Consequentemente, uma parte importante do estudo da equação de Schrödinger unidimensional dependente do tempo (1.1) é demonstrar a existência de pelo menos uma solução positiva para a correspondente equação de Schrödinger unidimensional independente do tempo (1.2).

Em dimensões superiores, a equação de Schrödinger dependente do tempo tem basicamente a mesma forma da equação (1.1) e pode ser escrita como

$$ih\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=-\frac{h^2}{2m}\Delta\psi(x,t)-V(x)\psi(x,t)\tag{1.3}$$

em que, para uma função $\psi\colon \mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, o operador diferencial $\Delta\psi(x,t)$ no ponto $(x,t)=(x_1,x_2,\ldots,x_N,t)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}$ é definido por

$$\Delta\psi(x,t):=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x_i^2}=\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x_N^2}$$

e é denominado operador *laplaciano*.

Para estudar a equação diferencial (1.3) também procuramos solução no mesmo formato anteriormente utilizado, isto é, como produto de uma função dependente da variável espacial por uma função exponencial dependente apenas da variável temporal. Isso conduz à equação diferencial parcial

$$-\frac{h^2}{2m}\Delta u(x)+V(x)u(x)=Eu(x)\qquad(x\in\mathbb{R}^N).\tag{1.4}$$

As equações diferenciais (1.2) e (1.4) são equações elípticas semilineares. Uma generalização dessas equações, em que por comodidade não mais escrevemos as constantes físicas e matemáticas envolvidas e por simplicidade consideramos um domínio aberto e limitado $\Omega\subset\mathbb{R}^N$, tem a forma geral

$$-\Delta u(x)+V(x)u(x)=f(u(x))\qquad(x\in\Omega\subset\mathbb{R}^N).\tag{1.5}$$

No caso em que $f(s)=s$ a equação diferencial (1.5) é denominada *linear*; no caso em que $f(s)=|s|^{p-2}s$ para $p\neq 2$ ou no caso mais geral em que f não tem a forma de uma potência pura a equação diferencial (1.5) é denominada *semilinear* e a nova parcela $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ introduzida no lado direito da equação (1.5) é denominada *não linearidade* do problema. A função $V\colon\Omega\subset\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ é conhecida como *potencial*.

Um problema comum associado a essa equação diferencial é

$$\begin{cases}-\Delta u(x)+V(x)u(x)=f(u(x)) & x\in\Omega\subset\mathbb{R}^N\\ u(x)=0 & x\in\partial\Omega\subset\mathbb{R}^N\end{cases}\tag{1.6}$$

em que $\partial\Omega$ indica a fronteira de $\Omega\subset\mathbb{R}^N$. Esse problema, denominado *problema homogêneo de Dirichlet*, consiste de uma equação diferencial parcial juntamente com uma condição de contorno que especifica os valores da função incógnita $u\colon \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ em sua fronteira $\partial\Omega$.

Uma *solução clássica* do problema de Dirichlet (1.6) é uma função $u\colon \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ com derivadas primeira e segunda contínuas, o que denotamos por $u \in C^2(\overline{\Omega})$, e que torna a equação diferencial uma identidade para cada ponto do conjunto $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^N$.

Em geral, garantir a existência de solução clássica para o problema (1.6) é um problema bem difícil. Isso se deve, entre outros fatores, ao fato de o problema ser definido em todo o espaço $\mathbb{R}^N$, à não reflexividade do espaço de funções $C^2(\mathbb{R}^N)$ e à ausência de compacidade das imersões de Sobolev.

Uma estratégia comum utilizada para demonstrar resultados de existência de solução clássica para a classe de problemas elípticos (1.6) consiste de duas etapas. Inicialmente demonstramos a existência de uma solução em um sentido mais fraco do que a solução clássica, denominada solução fraca, cujo conceito apresentamos na próxima seção. A etapa seguinte consiste em usar a teoria de regularidade de equações diferenciais elípticas para deduzir que uma solução fraca e suficientemente regular é de fato uma solução clássica.

1.2 O conceito de solução fraca

Para estabelecer o conceito de solução fraca vamos nos limitar à descrição das ideias envolvidas em torno do problema de Dirichlet (1.6) e também da equação específica que estudamos detalhadamente nesta dissertação, que é a equação diferencial elíptica semilinear (1.5). Isso simplifica a exposição, já que a cada tipo de equação diferencial podemos associar uma, e por vezes até mais de uma, noção de solução fraca. Mais detalhes podem ser encontrados nos livros de Badiale e Serra [9], no qual nos inspiramos, e de Willem [33].

Começamos com uma função $u\colon \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ que é solução clássica do problema (1.6). Consideramos uma função $\phi\colon \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciável, isto é, uma função que possui derivadas parciais contínuas de primeira ordem; supomos também que ϕ tem suporte compacto, isto é, a função ϕ anula-se no complementar de um subconjunto compacto contido em $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Nesse caso, escrevemos $\phi \in C_0^1(\Omega)$ e denominamos essa função de *função teste*.

Agora multiplicamos ambos os lados da equação diferencial do problema de Dirichlet (1.6) por ϕ,

$$-\Delta u(x)\phi(x) + V(x)u(x)\phi(x) = f(u(x))\phi(x) \qquad (x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N)$$

e integramos em todo o subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$,

$$-\int_\Omega \Delta u(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega V(x)u(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(u(x))\phi(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Para uma função diferenciável $u\colon \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, o *gradiente* em um ponto $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ é o vetor $\nabla u(x) = (\partial u(x)/\partial x_1\,, \partial u(x)/\partial x_2\,, \ldots, \partial u(x)/\partial x_N\,)$. Aplicando o Teorema A.7 da pág. 78 a respeito da fórmula de Green, obtemos

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla \phi(x)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega V(x)u(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(u(x))\phi(x)\,\mathrm{d}x \qquad (\forall\ \phi \in C_0^1(\Omega)), \tag{1.7}$$

em que o termo de fronteira não está presente porque a função teste se anula na fronteira do domínio.

Observamos que para essa fórmula fazer sentido é suficiente a condição $u \in C^1(\Omega)$, ou seja, é suficiente que a função u seja continuamente diferenciável; não é necessário que a função u seja duas vezes continuamente diferenciável como supomos no caso de uma solução clássica.

As condições sobre a regularidade das funções u e ϕ podem ser enfraquecidas mais ainda. Para apresentá-las, introduzimos algumas notações. Consideramos o espaço $\mathbb{R}^N$ munido da medida de Lebesgue $\mathrm{d}x$ e interpretamos todas as integrais no sentido da teoria de integração de Lebesgue. Agora definimos o espaço das funções de quadrado Lebesgue integráveis,

$$L^2(\Omega) \coloneqq \left\{ u \colon \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \;\middle|\; \int_\Omega |u(x)|^2 \,\mathrm{d}x < +\infty \right\}$$

do produto escalar $(\,\cdot\,|\,\cdot\,) \colon L^2(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dado por

$$(u|v) \coloneqq \int_{\mathbb{R}^N} u(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

e da correspondente norma

$$\|u\|_2 \coloneqq \sqrt{(u|u)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{1/2}.$$

Assim, para que as integrais envolvidas na igualdade (1.7) sejam finitas começamos supondo que $u, v \in L^2(\Omega)$.

Outra condição que podemos utilizar é que $\partial u(x)/\partial x_i$, $\partial v(x)/\partial x_i \in L^2(\Omega)$, para todo índice $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$, ou seja, é suficiente que todas essas derivadas parciais sejam de quadrado Lebesgue integráveis. Por simplicidade, para identificar essas funções usamos as notações usuais para espaços de funções. Começamos com o espaço de Sobolev $H^1(\Omega)$ definido por

$$H^1(\Omega) \coloneqq \left\{ u \in L^2(\Omega) \;\middle|\; \partial u(x)/\partial x_i \in L^2(\mathbb{R}^N), i \in \{1, 2, \ldots, N\} \right\},$$

em que $\partial u(x)/\partial x_i$ denota a derivada no sentido das distribuições, isto é, a única função $\partial u(x)/\partial x_i$ tal que

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x = - \int_\Omega \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \,\mathrm{d}x \qquad (\forall\, \phi \in C_0^\infty(\Omega)), \tag{1.8}$$

em que $C_0^\infty(\Omega)$ denota a classe de funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto.

Este espaço de Sobolev é um exemplo importante de espaço de Hilbert quando munido do produto escalar $(\,\cdot\,|\,\cdot\,) \colon H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dado por

$$(u|v) \coloneqq \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

e da correspondente norma

$$\|u\| \coloneqq \sqrt{(u|u)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u(x)|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{1/2}.$$

Também definimos o espaço $H_0^1(\Omega)$ como o fecho do espaço $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$, isto é, $H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}$ em que consideramos o fecho na norma do espaço de Hilbert $H^1(\Omega)$.

As funções do espaço $H_0^1(\Omega)$ são imaginadas como funções que se anulam na fronteira $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Mas como $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^N$ tem medida zero em $\mathbb{R}^N$, uma justificativa precisa dessa afirmativa somente pode ser realizada com o uso da teoria do traço apresentada, por exemplo, em Evans [21, Section 5.5]; veja também as Proposições A.20 e A.22. Entretanto, se a função u é suficientemente regular, então existe uma equivalência completa: Para uma função $u \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e para um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com fronteira $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^N$ diferenciável, $u \in H_0^1(\Omega)$ se, e somente se, $u(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Dessa forma, no conceito de solução fraca que procuramos definir podemos substituir a condição $u \in C^1(\overline{\Omega})$ pela condição menos restritiva $u \in H_0^1(\Omega)$.

Quanto ao potencial $V\colon \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ podemos supor inicialmente que $V(x) \geqslant 0$ para todo $x \in \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^N$ e notamos que não é necessário supor que $V \in C^0(\overline{\Omega})$; basta supor que $V \in L^\infty(\overline{\Omega})$, em que denotamos o espaço das funções essencialmente limitadas por

$$L^\infty(\Omega) := \left\{u\colon \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \;\middle|\; \operatorname{sup\,ess} |u(x)| < +\infty\right\}$$

com o supremo essencial definido por

$$\operatorname{sup\,ess} |u(x)| := \inf\{c \in \mathbb{R}_+ \;\big|\; |u(x)| < c \ \text{ q.t.p. } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N\}.$$

A norma do espaço $L^\infty(\Omega)$ é definida por

$$\|u\|_\infty := \operatorname{sup\,ess} |u(x)|.$$

Lembramos ainda que uma propriedade é válida *em quase todo ponto* em $\mathbb{R}^N$ se existe um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^N$ com medida de Lebesgue $|M| = 0$ tal que a propriedade seja válida em todo ponto de $\mathbb{R}^N \backslash M$. Para esse caso, a notação padrão é que a propriedade em questão vale q.t.p. em algum conjunto apropriado.

Por fim, quanto à não linearidade $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, podemos usar alguma hipótese sobre o tipo de crescimento dessa função, como por exemplo a existência de constantes positivas $a, b \in \mathbb{R}_+$ tais que $|f(s)| \leqslant a + b|s|^{2^*-1}$ para todo $s \in \mathbb{R}$ em que o expoente crítico de Sobolev é definido por $2^* = 2N/(N-2)$ se $N \geqslant 3$ e $2^* = +\infty$ se $N = 1$ ou $N = 2$.

Novas hipóteses sobre o potencial V e sobre a não linearidade f são apresentadas nas seções seguintes.

Tudo o que foi apresentado acima serve de motivação para a seguinte definição fundamental.

Definição 1.1 (Solução fraca)**.** Suponhamos que o potencial $V\colon \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ verifica a hipótese $V \in L^\infty(\Omega)$ e que a não linearidade $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifica a hipótese $|f(s)| \leqslant a + b|s|^{2^*-1}$ para todo $s \in \mathbb{R}$ em que $a, b \in \mathbb{R}_+$. Uma *solução fraca* para o problema

$$-\Delta u(x) + V(x)u(x) = f(u(x)) \qquad (x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N)$$

é uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ que verifica a identidade integral

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla \phi(x)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega V(x)u(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(u(x))\phi(x)\,\mathrm{d}x \qquad (\forall\ \phi \in H_0^1(\Omega)). \tag{1.9}$$

Observação 1.2. Como supomos $u \in H_0^1(\Omega)$ e já que o espaço das funções continuamente diferenciáveis e de suporte compacto $C_0^1(\Omega)$ é denso no espaço de Hilbert $H_0^1(\Omega)$, isto é, $\overline{C_0^1(\Omega)} = H_0^1(\Omega)$, segue-se que para testar se vale a identidade integral (1.9) é suficiente testar a identidade integral (1.7).

Ao definir o conceito de solução fraca, queremos estender a noção de solução de uma equação diferencial; logo, a princípio uma solução clássica de uma equação deveria ser também uma solução fraca dessa mesma equação. Isso é o que de fato ocorre, como agora passamos a mostrar. Seja $u\colon \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma solução clássica da equação diferencial do problema (1.6). Então $u \in C^2(\overline{\Omega})$ e isso significa que $u \in H^1(\Omega)$. Além disso, a função u é contínua em $\overline{\Omega}$ e $u(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$; logo, $u \in H_0^1(\Omega)$ e a função u pertence ao espaço correto da Definição 1.1 de solução fraca. A seguir, como por hipótese vale a identidade integral (1.7) e já que $C_0^1(\Omega)$ é denso em $H_0^1(\Omega)$, para qualquer função fixada $\phi \in H_0^1(\Omega)$ podemos encontrar uma sequência $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^1(\Omega)$ tal que $\phi_n \to \phi$ na topologia de $H_0^1(\Omega)$ quando $n \to +\infty$. Assim, passando ao limite quando $n \to +\infty$ deduzimos que vale a identidade integral (1.7) também para toda função $\phi \in H_0^1(\Omega)$, que é exatamente a identidade integral (1.9). Logo, toda solução clássica $u\colon \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ da equação diferencial do problema (1.6) é também solução fraca desse mesmo problema.

Notamos que na Definição 1.1 não especificamos condições de fronteira. Na verdade, as condições homogêneas de fronteira do problema de Dirichlet ficam englobadas na própria definição do espaço de funções selecionado, ou seja, todas as funções do espaço $H_0^1(\Omega)$ já verificam a condição $u(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Esta é uma das grandes vantagens da noção de solução fraca.

Suponhamos agora que $u \in H_0^1(\Omega)$ é solução fraca do problema homogêneo de Dirichlet 1.6, de modo que u verifica a identidade integral (1.9). Devemos estabelecer condições sob as quais essa solução fraca u é também solução clássica do mesmo problema. As condições $V \in C^0(\Omega)$ e $f \in C^0(\Omega)$ são necessárias. A outra condição diz respeito apenas à regularidade da solução fraca u. Em outros termos, se u é solução fraca do problema (1.6) e se $u \in C^2(\overline{\Omega})$, então u é solução clássica. Para demonstrar essa afirmativa começamos observando que $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$ implica que $u(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$. A seguir, consideramos uma função teste $v \in C_0^1(\Omega)$ tal que vale a identidade integral (1.9); logo, também vale a identidade integral (1.7). Aplicamos o Teorema A.7 da pág. 78 a respeito da fórmula de Green,

$$\int_\Omega (-\Delta u(x))v(x)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega V(x)u(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(u(x))v(x)\,\mathrm{d}x \qquad (\forall\, v \in C_0^1(\Omega)),$$

e, consequentemente,

$$\int_\Omega (-\Delta u(x) + V(x)u(x) - f(u(x)))v(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (\forall\, v \in C_0^1(\Omega)).$$

E como o espaço de funções $C_0^1(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$, isto é, $\overline{C_0^1(\Omega)} = L^2(\Omega)$, deduzimos que $-\Delta u(x) + V(x)u(x) - f(u(x)) = 0$ q.t.p. em Ω e $u(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$, isto é, u é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u(x) + V(x)u(x) = f(u(x)) & \text{q.t.p. } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega \subset \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{1.10}$$

Finalmente, como por hipótese $u \in C^2(\Omega)$, deduzimos que toda solução fraca $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$ é também solução clássica do problema (1.6).

Toda essa discussão ilustra um aspecto fundamental da abordagem de solução fraca para um problema de equações diferenciais elípticas semilineares: o problema de demonstrar a existência de solução é completamente independente do problema da regularidade, isto é, da classe de diferenciabilidade a que a solução pertence. Portanto, podemos dividir o problema de equações elípticas semilineares em duas partes: (1) demonstramos a existência de solução fraca para o problema; e (2) tratamos separadamente da questão da regularidade dessa solução fraca.

Para completar todo o processo, na próxima seção mostramos como as soluções fracas estão relacionadas com pontos críticos de um funcional associado ao problema (1.6).

1.3 Soluções fracas e pontos críticos de funcionais

Da teoria do cálculo para funcionais reais definidos em espaços de funções abstratos (veja a seção A.4), sabemos que se $G, P\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ são funcionais definidos por

$$G(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \,\mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad P(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega V(x)|u(x)|^2 \,\mathrm{d}x\,,$$

então esses funcionais são formas quadráticas associadas a formas bilineares contínuas. Portanto, esses funcionais são diferenciáveis em todo o espaço $H^1(\Omega)$ e as derivadas de G e de P em $u \in H_0^1(\Omega)$ aplicadas a um elemento $\phi \in H_0^1(\Omega)$ são dadas por

$$G'(u)\phi = \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla\phi(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad P'(u)\phi = \int_\Omega V(x)u(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Por fim, sob a hipótese de que existem constantes positivas $a, b \in \mathbb{R}_+$ tais que $|f(s)| \leqslant a + b|s|^{2^*-1}$ para todo $s \in \mathbb{R}$, definimos a função $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$F(s) \coloneqq \int_0^s f(t)\,\mathrm{d}t$$

e consideramos o funcional $J\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J(u) = \int_\Omega F(u(x))\,\mathrm{d}x\,.$$

Então esse funcional também é diferenciável em todo o espaço $H_0^1(\Omega)$ e a derivada de J em $u \in H_0^1(\Omega)$ aplicada a um elemento $\phi \in H_0^1(\Omega)$ é dada por

$$J'(u)\phi = \int_\Omega f(u(x))\phi(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Para verificar esse resultado usamos o procedimento comum nesse tipo de situação: (1) mostramos que o funcional J é Gâteaux diferenciável e que sua derivada de Gâteaux $J_G\colon H_0^1(\Omega) \to (H_0^1(\Omega))^*$ é dada por $J_G(u)v = \int_\Omega f(u(x))v(x)\,\mathrm{d}x$; e (2) mostramos que J'_G é uma aplicação contínua, de modo que podemos utilizar a Proposição A.19 da pág. 80 sobre funcionais Gâteaux diferenciáveis com derivadas de Gâteaux contínuas e deduzir que J é um funcional Fréchet continuamente diferenciável, isto é, $J \in C^1(H_0^1(\Omega))$.

Agora combinamos essas três observações e definimos o funcional $I\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ pela fórmula

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega V(x)|u(x)|^2\,\mathrm{d}x - \int_\Omega F(u(x))\,\mathrm{d}x\,. \tag{1.11}$$

Esse funcional é continuamente diferenciável, isto é, $I \in C^1(H_0^1(\Omega))$, em vista das propriedades previamente listadas e sua derivada em $u \in H_0^1(\Omega)$ aplicada ao elemento $\phi \in H_0^1(\Omega)$ é dada por

$$I'(u)\phi = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla\phi(x)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega V(x)u(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f(u(x))\phi(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{1.12}$$

Sendo assim, uma função $u\colon \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é solução fraca do problema (1.6) se, e somente se, é *ponto crítico* do funcional I definido em (1.11), isto é, se, e somente se, $I'(u)\phi = 0$ para toda função $\phi \in H_0^1(\Omega)$.

O problema de demonstrar a existência de solução fraca para o problema (1.6) é, portanto, equivalente ao problema de determinar a existência de um ponto crítico para o funcional I, conhecido na literatura como *funcional de energia* ou *funcional de Euler-Lagrange*. Equivalentemente, podemos dizer que a equação diferencial (1.6) é a *equação de Euler-Lagrange* associada ao funcional de energia I. Nesse caso, dizemos também que o problema elíptico semilinear possui uma *estrutura variacional*.

Os pontos críticos podem ser pontos de mínimo, pontos de sela, ou pontos com a geometria do teorema do passo da montanha. Nesta dissertação, mostramos diretamente que o funcional de energia possui um ponto crítico do último tipo (veja o Teorema A.23 sobre o passo da montanha). Essa estratégia é denominada *método direto do cálculo das variações*.

1.4 Breve histórico sobre problemas elípticos semilineares

Na literatura sobre equações diferenciais encontramos resultados de existência, de não existência, de unicidade e de multiplicidade de soluções distintas para equações elípticas semilineares. A seguir, apresentamos um breve histórico a respeito dessa importante classe de problemas e listamos algumas hipóteses comumente utilizadas em seu estudo. Evidentemente, esse resumo não é exaustivo pois nos limitamos a citar apenas alguns artigos recentes.

O enfoque histórico é dado ao conjunto de hipóteses sobre a não linearidade f e principalmente sobre o potencial V. Antes, porém, fazemos um comentário sobre os tipos de domínios dos problemas elípticos semilineares.

Lembramos que existe uma grande diferença entre problemas de valores de fronteira para equações elípticas semilineares em domínios limitados e a mesma classe de problemas em domínios não limitados: a *perda de compacidade* das imersões de Sobolev no caso de domínios não limitados.

Para tornar as ideias mais claras, observamos que uma abordagem natural para determinar a existência de solução para o problema

$$-\Delta u(x) + V(x)u(x) = f(u(x)) \qquad (x \in \mathbb{R}^N), \tag{1.13}$$

que é o principal objeto de estudo desta dissertação, é aproximar uma solução do problema (1.13) por uma sequência de soluções da mesma equação diferencial definida em domínios limitados. Por exemplo, podemos considerar uma sequência de soluções $u \in H_0^1(\overline{B_R})$ do problema $-\Delta u_R(x) + V(x)u_R(x) = f(x)$ em B_R, com a condição de fronteira

$u_R(x) = 0$ para todo $x \in \partial B_R$, em que $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$ denota a bola aberta de raio R centrada na origem e $\partial B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| = R\}$ denota sua fronteira. Posteriormente, avaliamos o limite dessa sequência de funções fazendo a passagem ao limite quando $R \to +\infty$. Uma das dificuldades dessa abordagem do problema (1.13) pode ser a ausência de uma estimativa *a priori* independente de R. Isso significa que a partir de sequências limitadas no espaço de funções $H_0^1(\overline{B_R})$ nem sempre é possível extrair subsequências convergentes em algum sentido apropriado e fazer a passagem ao limite para obter uma solução para o problema (1.13) no espaço de funções $H_0^1(\mathbb{R}^N)$. Sendo assim, devido à perda de compacidade dos problemas semilineares definidos em todo o espaço $\mathbb{R}^N$, estes são mais difíceis de estudar do que os mesmos problemas definidos em domínios abertos e limitados.

Outra dificuldade associada à classe de problemas (1.13) é a escolha do espaço de funções mais adequado para formular o problema de minimização do funcional de energia. No caso do problema (1.13) é comum a escolha do espaço de Sobolev $H_0^1(\mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}^N)$, mas outros espaços também são usados, como apresentamos nos próximos capítulos.

Quanto à hipóteses sobre a não linearidade $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sobre o potencial $V\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ começamos o histórico citando o artido de Berestycki e Lions [13], que estudaram a existência de solução positiva $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ para o problema

$$-\Delta u + mu = \lambda |u|^{p-2}u \qquad (x \in \mathbb{R}^N), \tag{1.14}$$

em que $m, \lambda \in \mathbb{R}_+$ são constantes positivas e $p \in \mathbb{R}$ é tal que $p > 2$. Nesse caso, a não linearidade $f(s) \coloneqq \lambda |s|^{p-2}s$ é do tipo potência pura e o potencial $V(x) \coloneqq m$ é constante.

Essa equação foi estudada também por Pohožaev [29], que demonstrou que o problema (1.14) possui solução se, e somente se, $2 < p < 2^* = 2N/(N-2)$. O fato de que o problema não possui solução para $p \geqslant 2^*$ segue da conhecida identidade de Pohožaev, que relembramos no Teorema A.15, pág. 79. O método de Pohožaev consiste em maximizar o funcional $J\colon H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ definido por $J(u) \coloneqq \frac{\lambda}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \,\mathrm{d}x$ restrita ao vínculo $X = \bigl\{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{m}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \,\mathrm{d}x = 1\bigr\}$.

Esse vínculo envolve o aparecimento do multiplicador de Lagrange $\theta \in \mathbb{R}$ e obtemos uma solução positiva da equação $-\Delta u(x) + V(x)u = \lambda\theta |u|^{p-2}u$. O multiplicador de Lagrange $\theta \in \mathbb{R}_+$ é positivo e, devido à homogeneidade da equação (1.14), pode ser removido por uma mudança de variáveis $v(x) = \sigma v(x)$ em que $\sigma \in \mathbb{R}_+$. A abordagem utilizada em [13] consiste em usar métodos variacionais, trabalhando com um vínculo apropriado de forma a recuperar alguma compacidade para o problema. Esse vínculo pode ser tornado aparente devido ao caráter autônomo da equação (1.14) e também ao fato de que o problema é invariante por homotetias. As principais restrições desse método são a presença de uma não linearidade $f(s) = \lambda |s|^{p-2}s$ do tipo potência pura, juntamente com a presença do operador laplaciano (ou de um outro operador elíptico com coeficientes constantes).

Outro problema tratado em [13] é demonstrar a existência de solução positiva $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ para o problema

$$-\Delta u + mu = \lambda |u|^{p-2}u - \mu |u|^{q-2}u \qquad (x \in \mathbb{R}^N), \tag{1.15}$$

em que $m, \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ são constantes positivas, $p, q \in \mathbb{R}$ são tais que $p, q > 2$, $p \neq q$. Novamente nesse caso o potencial $V(x) \coloneqq m$ é constante, a não linearidade tem a forma mais geral $f(s) = \lambda |s|^{p-2}s - \mu |s|^{q-2}s$ e as hipóteses sobre os expoentes são $2 < p <$

$\max\{2^*, q\}$. Uma condição adicional para determinar uma solução para esse problema é a existência de $\zeta \in \mathbb{R}_+$ tal que $G(\zeta) := \frac{\lambda}{p}\zeta^p - \frac{\mu}{q}\zeta^q - \frac{m}{2}\zeta^2 > 0$. Essa condição é automaticamente verificada no caso em que $q < p$ e existe solução para o problema (1.15) quando $2 < q < p < 2^*$. No caso em que $q \leqslant 2^* \leqslant p$, pela identidade de Pohožaev não existe solução não trivial para o problema (1.15). O caso em que $2^* < q < p$, tanto quanto conhecemos, permanece uma questão em aberto: não se sabe se e sob quais hipóteses existe solução para o problema (1.15). Finalmente, quando $p < q$, existe solução se a desigualdade $G(\zeta) > 0$ for verificada para algum $\zeta \in \mathbb{R}_+$. Novamente pela identidade de Pohožaev, é possível demonstrar que a equação (1.15) não possui solução se $G(\zeta) \leqslant 0$ para todo $\zeta \in \mathbb{R}_+$. Logo, a condição $G(\zeta) > 0$ para algum $\zeta \in \mathbb{R}_+$ é necessária e suficiente. Essa condição significa, em particular, que para $m, \mu \in \mathbb{R}_+$ fixados, existe $\lambda^* \in \mathbb{R}_+$ tal que o problema (1.15) não possui solução para $0 < \lambda \leqslant \lambda^*$ e que possui solução para $\lambda > \lambda^*$.

Posteriormente, Pankov [27] estudou o problema

$$-\Delta u + V(x)u = \pm f(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{1.16}$$

com uma não linearidade $f\colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifica a condição de Carathéodory, ou seja, $f(x,s)$ é mensurável em $x \in \mathbb{R}^N$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e $f(x,s)$ é contínua em $s \in \mathbb{R}$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$. Essa hipótese é frequentemente usada para que o funcional de energia associado ao problema (1.16) esteja bem definido. Outra hipótese comum usada sobre a não linearidade é $f(x,0) = 0$ para que a função identicamente nula $u(x) \equiv 0$ seja solução trivial do problema. Além da condição $\operatorname{sup\,ess}_{x\in\mathbb{R}^N} |f(x,s)| = o(|s|)$ quando $s \to 0$, a respeito do crescimento da não linearidade, também são usadas as condições $|f(x,s)| \leqslant C(1 + |s|^{p-1})$ com $2 < p < 2^*$ em que $2^* := 2N/(N-2)$ se $N \geqslant 3$ e $2^* := +\infty$ se $N = 1, 2$ e também a existência de uma constante $\theta > 2$ tal que $0 < \theta F(x,s) \leqslant sf(x,s)$ para $u \neq 0$ em que $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\,\mathrm{d}t$. Essas duas últimas condições significam que a não linearidade tem crescimento subcrítico na origem e superlinear no infinito. Por fim, tanto a não linearidade f quanto o potencial $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ são funções periódicas com período unitário em cada variável, isto é, $f(x+z,s) = f(x,s)$ e $V(x+z) = V(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, para todo $s \in \mathbb{R}$ e com $z \in \mathbb{Z}^N$. O principal resultado em [27] trata da existência de solução fraca, contínua e não trivial $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ da equação (1.16) e tal que $\lim_{x\to+\infty} u(x) = 0$.

Para outros artigos tratando problemas semilineares com potenciais periódicos também citamos Coti-Zelati e Rabinowitz [18], Pankov e Pflüger [28], e Kryszewski e Szulkin [23].

Zhu e Yang [34, 35] estudaram, entre outros problemas, a existência de solução positiva $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ para o problema semilinear

$$-\Delta u + V(x)u = \lambda u^{q-1} + u^{p-1} \tag{1.17}$$

em que $N \geqslant 3$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ é um parâmetro real positivo, $2 < q < p \leqslant 2^*$ com $2^* = 2N/(N-2)$ e com um potencial V assintótico a uma constante positiva, isto é, existe $V_\infty \in \mathbb{R}_+$ tal que $|V(x) - V_\infty| \to 0$ quando $|x| \to +\infty$ e também $V(x) \leqslant V_\infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, em que a última desigualdade é estrita em um subconjunto de medida positiva em $\mathbb{R}^N$. Um exemplo para esse tipo de potencial é a função $V(x) = \exp(-1/|x|)$ definida para $x \in \mathbb{R}$ juntamente com $V_\infty = 1$. Notamos que $V(x) \leqslant 1$ e que $|V(x) - 1| \to 0$ quando $|x| \to \infty$. Em termos gerais, o problema não autônomo (1.17) é tratado como uma perturbação do problema de existência de solução positiva $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ para a equação autônoma

$$-\Delta u + V_\infty u = \lambda u^{q-1} + u^{p-1} \qquad (x \in \mathbb{R}^N), \tag{1.18}$$

em que $N \geqslant 3$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ é um parâmetro positivo, $2 < q < p \leqslant 2^*$ e $V_\infty \in \mathbb{R}_+$.

Posteriormente, Alves, Carrião e Miyagaki [4] estenderam alguns resultados em [34, 35] e demonstraram a existência de solução positiva $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ para o problema elíptico semilinear envolvendo o expoente crítico de Sobolev

$$-\Delta u + V(x)u = \lambda u^{q-1} + u^{2^*-1} \qquad (x \in \mathbb{R}^N), \tag{1.19}$$

em que $N \geqslant 3$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ é um parâmetro real positivo, $2 < q < 2^*$ em que $2^* := 2N/(N-2)$ e o potencial $V\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função continuamente diferenciável, positiva e periódica, isto é, $V(x+z) = V(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ em que $z \in \mathbb{Z}^N$; além disso, usaram a existência de uma constante $V_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $V(x) \geqslant V_0 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Nesse caso, as hipóteses sobre o expoente q são as seguintes: (1) $q > 2$, $N \geqslant 4$ e $\lambda \in \mathbb{R}_+$; ou (2) $4 < q < 6$, $N = 3$ e $\lambda \in \mathbb{R}_+$; ou ainda (3) $2 < q \leqslant 4$, $N = 3$ e λ suficientemente grande. Esse resultado estende, para o caso de não linearidades críticas de Sobolev, diversos outros resultados até então já conhecidos mas apenas para não linearidades subcríticas.

A partir da existência de solução para o problema crítico (1.19) no artigo [4] também encontramos um resultado de existência de solução positiva $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ para um problema crítico

$$-\Delta u + V_\alpha(x)u = \lambda u^{q-1} + u^{2^*-1} \qquad (x \in \mathbb{R}^N), \tag{1.20}$$

em que $N \geqslant 3$ e $\lambda \in \mathbb{R}_+$ é um parâmetro real positivo. Nesse caso, o potencial não periódico $V_\alpha\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, é uma pequena perturbação do potencial periódico V. Mais precisamente, o potencial não periódico V_α é tal que existem uma constante positiva $W_0 \in \mathbb{R}_+$ e uma função não negativa $W\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ com $W \in L^{N/2}(\mathbb{R}^N)$ tais que $V_\alpha(x) = V(x) - W(x) \geqslant W_0$, com $W(x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e a última desigualdade é estrita em um subconjunto com medida positiva em $\mathbb{R}^N$. Também nesse caso as hipóteses sobre o expoente q são as as mesmas listadas no parágrafo anterior. Esse resultado estende os artigos [34, 35] no sentido de que usa hipóteses menos restritivas do que a periodicidade do potencial. Como comentário adicional, o artigo [4] trata o potencial V como sendo assintoticamente periódico, ou seja, existe uma função periódica $V_p\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tal que $V(x) \leqslant V_p(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $|V(x) - V_p(x)| \to 0$ quando $|x| \to +\infty$.

Bartsch e Wang [11] estudaram a equação elíptica semilinear

$$-\Delta u(x) + V(x)u = f(x,u) \qquad (x \in \mathbb{R}^N) \tag{1.21}$$

em que $N \geqslant 3$, a não linearidade $f\colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, $f \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$, e é função ímpar no segundo argumento, isto é, $f(x,-s) = -f(x,s)$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e para todo $s \in \mathbb{R}$. Além disso, o potencial V é estritamente positivo e a medida de Lebesgue do conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N : V(x) \leqslant M\}$ é finita para todo $M \in \mathbb{R}_+$. Sob essas hipótese, em [11] encontramos um resultado de existência e de multiplicidade de soluções para o problema (1.21).

Para o caso de um potencial $V\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ coercivo, isto é, $\lim_{|x|\to+\infty} V(x) = +\infty$, citamos os artigos de Costa [17] e Miyagaki [25]. Para o caso de um potencial $V\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ radial, isto é, $V(x) = W(r)$ em que $W\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ e $r = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, citamos o artigo de Alves, de Morais Filho e Souto [1]. Rabinowitz [30] introduziu uma nova condição sobre o potencial $V\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tratando do ínfimo do potencial e de seu limite inferior, $0 < \inf_{x\in\mathbb{R}^N} V(x) < \liminf_{|x|\to+\infty} V(x)$. Posteriormente, del Pino e Felmer [19] consideraram uma condição ainda mais fraca sobre o potencial $V\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ a respeito da existência de um conjunto aberto e limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ tal que $\min_{x\in\bar{\Omega}} V(x) < \min_{x\in\partial\Omega} V(x)$. Em todos esses casos, os autores obtiveram resultados de existência de solução para problemas elípticos semilineares.

Para finalizar esse histórico citamos o trabalho de Ambrosetti, Felli e Malchiodi [7]. Nesse influente artigo, encontramos um resultado de existência de solução positiva ground state $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ para o problema semilinear estacionário de Schrödinger

$$-h^2\Delta u(x) + V(x)u(x) = K(x)|u(x)|^{p-1} \qquad (x \in \mathbb{R}^N) \tag{1.22}$$

tal que $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$, em que $N \geqslant 3$ e $2 < p < 2^* = 2N/(N-2)$.

Lembramos que uma solução $u\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é denominada *solução ground state* se $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ tem norma finita em nesse espaço, $|u|_2 < +\infty$; essas são as soluções mais relevantes do ponto de vista das aplicações. E uma solução $u\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é denominada *solução ground state* se $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é um ponto crítico do funcional de energia com a geometria do teorema do passo da montanha, Teorema A.23. Nesse caso é possível demonstrar que $\lim_{|x|\to+\infty} u(x) = 0$ e isso implica que as soluções estão bem localizadas no espaço.

Analogamente à situação que já mencionamos previamente, se $u\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é solução do problema (1.22), então a função $\psi\colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\psi(x,t) = u(x)\exp(i\lambda t/h)$ representa a função de onda estacionária da equação de Schrödinger não linear

$$ih\,\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\epsilon^2\Delta\psi(x,t) + (V(x)-\lambda)\psi(x,t) - K(x)|\psi(x,t)|^{p-2}\psi(x,t),$$

em que h é a constante de Planck e i é a unidade imaginária.

Com a possível exceção de apenas dois artigos citados em [7], Noussair e Swanson [26] e Schneider [31], todos os trabalhos previamente mencionados bem como suas referências utilizam a hipótese de que $\lim_{|x|\to+\infty} V(x) > 0$. O principal mérito de [7] é que trata de um problema elíptico semilinear com o potenciais $V\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ que podem decair a zero no infinito, isto é, $\lim_{|x|\to+\infty} V(x) = 0$, caso também conhecido na literatura como *massa zero*.

É importante ressaltar que nesse caso os métodos variacionais no espaço de funções $H^1(\mathbb{R}^N)$ usados nos trabalhos já citados não podem ser empregados para demonstrar a existência de solução ground state para o problema (1.22). Tampouco os métodos de perturbação podem ser utilizados. Para resolver essas dificuldades, o problema variacional associado à equação (1.22) é estruturado em uma classe de espaços de Sobolev com peso,

$$E_h = \left\{ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\colon \int_{\mathbb{R}^N} h^2|\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u(x)|^2\,\mathrm{d}x < +\infty \right\}.$$

Esse espaço de Sobolev é outro exemplo de espaço de Hilbert quando munido do produto escalar $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)_{E_h}\colon H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dado por

$$(u|v)_{E_h} := \int_{\mathbb{R}^N} h^2\nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

e da correspondente norma

$$\|u\|_{E_h} := \sqrt{(u|u)_{E_h}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} h^2|\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u(x)|^2\,\mathrm{d}x \right)^{1/2}.$$

Na definição de E_h usamos a notação $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ para indicar o espaço

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \coloneqq \left\{ u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) \colon \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^N),\ i \in \{1, 2, \ldots, N\} \right\}.$$

Esse espaço de Sobolev também é um espaço de Hilbert quando munido do produto escalar $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)_{D^{1,2}} \colon L^{2^*}(\mathbb{R}^N) \times L^{2^*}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dado por

$$(u|v)_{D^{1,2}} \coloneqq \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, \mathrm{d}x$$

e da correspondente norma

$$\|u\|_{D^{1,2}} \coloneqq \sqrt{(u|u)_{D^{1,2}}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2}.$$

No espaço E_h o termo $\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|u(x)|^p \, \mathrm{d}x$ fica bem definido sob as seguintes hipóteses: (1) $V(x) = O(|x|^{-\alpha})$ para $0 < \alpha < 2$ quando $h \to 0$; (2) $K(x) = O(|x|^{-\beta})$ para $\beta > 0$ quando $h \to 0$; e (3) $\sigma < p < (N+2)/(N-2)$, em que $\sigma = \sigma_{N,\alpha,\beta} = 2^* - \frac{4\alpha}{\alpha(N-2)}$ se $0 < \beta < \alpha$ e $\sigma = \sigma_{N,\alpha,\beta} = 2$ nos demais casos.

Além disso, sob essas hipóteses o funcional $I_h \colon E_h \to \mathbb{R}$ de Euler-Lagrange associado ao problema (1.22) e definido por

$$I_h(u) \coloneqq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} h^2 |\nabla u(x)|^2 \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u(x)|^2 \, \mathrm{d}x - \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|u(x)|^p \, \mathrm{d}x \tag{1.23}$$

está bem definido para todo $h \in \mathbb{R}_+$ sob as hipóteses adicionais: (4) $V \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e existem constantes $\alpha, a, A \in \mathbb{R}_+$ tais que $a/(1+|x|^\alpha) \leqslant V(x) \leqslant A$; e (5) $K \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e existem constantes $\beta, k \in \mathbb{R}_+$ tais que $0 < K(x) \leqslant k/(1+|x|^\beta)$.

Esse funcional também é Fréchet diferenciável, $I_h \in C^1(E_h)$, e a derivada de I_h em $u \in E_h$ aplicada ao elemento $\phi \in E_h$ é dada por

$$I'_h(u)\phi = \int_{\mathbb{R}^N} h^2 \nabla u(x) \nabla \phi(x) \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u(x) \phi(x) \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|u(x)|^{p-2} u(x) \phi(x) \, \mathrm{d}x. \tag{1.24}$$

Sendo assim, um ponto crítico $u \in E_h$ do funcional I_h é solução fraca do problema (1.22).

Mais ainda, o funcional I_h verifica a condição de compacidade de Palais-Smale em E_h (veja a Definição 2.8) e isso permite a demonstração de um resultado de existência de solução para esse problema. Entretanto, como o interesse principal é demonstrar o resultado de existência de uma solução $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ que decai a zero no infinito, outras estimativas mais refinadas ainda são demonstradas.

Para outros trabalhos que tratam desse tipo de potencial citamos os artigos de Ambrosetti e Wang [6], Berestycki e Lions [13], Benci, Grisanti e Micheletti [12] e Alves e Souto [2, 3].

1.5 Resultados principais sobre potenciais que se anulam

Motivados pelos artigos anteriormente citados, principalmente por aqueles relacionados com o potencial V que se anula no infinito, esta dissertação tem como principal objetivo estudar detalhadamente dois artigos de Alves e Souto [2, 3]. Nesses artigos são demonstrados resultados de existência de soluções positivas para duas classes de equações elípticas semilineares com potenciais que se anulam no infinito.

1.5.1 Primeiro teorema

No capítulo 2 estudamos o artigo de Alves e Souto [2], intitulado *Existence of solutions for a class of elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$ *with vanishing potentials* no qual os autores estabelecem um resultado de existência de solução positiva para uma classe de equações elípticas semilineares de Schrödinger envolvendo o operador laplaciano e potenciais que se anulam. Mais especificamente, o artigo trata do problema não linear estacionário de Schrödinger

$$-\Delta u(x) + V(x)u(x) = f(u(x)) \qquad (x \in \mathbb{R}^N) \tag{1.25}$$

em que $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, $u(x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $N \geqslant 3$.

A não linearidade $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é função contínua, possui um comportamento subcrítico e verifica as hipóteses seguintes.

(f_1) $\limsup\limits_{s\to 0^+} sf(s)/s^{2^*} < +\infty$ em que $2^* \coloneqq 2N/(N-2)$ é o expoente crítico de Sobolev.

(f_2) Existe um número real $p \in (2, 2^*)$ tal que $\limsup\limits_{s\to +\infty} sf(s)/s^p = 0$.

(f_3) Existe um número real $\theta > 2$ tal que $0 \leqslant \theta F(s) \leqslant sf(s)$ para todo $s \in \mathbb{R}^+$, em que usamos a notação $F(s) \coloneqq \int_0^s f(t)\,\mathrm{d}t$.

(f_4) $f(t) = 0$ para todo $t \leqslant 0$.

O potencial $V\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é contínuo, não negativo e verifica as hipóteses seguintes.

(V_1) $V(x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

(V_2) $V(x) \leqslant V_\infty$ para todo $x \in B_1(0)$, em que $V_\infty \in \mathbb{R}^+$ é uma constante positiva e $B_1(0)$ denota a bola unitária centrada na origem das coordenadas.

(V_3) Existem constantes $\Lambda \in \mathbb{R}^+$ e $R > 1$ tais que $\inf_{|x|\geqslant R} |x|^4 V(x)/R^4 \geqslant \Lambda$.

Agora estamos preparados para enunciar o primeiro teorema da dissertação.

Teorema 1.3. *Sejam válidas as hipóteses (V_1), (V_2) e (V_3) sobre o potencial $V\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e também as hipóteses (f_1), (f_2), (f_3) e (f_4) sobre a não linearidade $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Então existe uma constante $\Lambda^* = \Lambda^*(V_\infty, \theta, p, c_0)$ tal que o problema (1.25) possui solução positiva para todo $\Lambda \geqslant \Lambda^*$.*

Lançando mão das hipóteses sobre o potencial V, temos que, em particular, é possível seu anulamento no infinito com uma ordem de decrescimento não superior a $|x|^{-4}$. Essa hipótese sobre o potencial do problema cria uma série de dificuldades para a demonstração do Teorema 1.3. Para contorná-las, seguimos Alves e Souto [2] (veja tambám Alves, Assunção e Miyagaki [5]) e utilizamos uma variação do método de penalização desenvolvido por del Pino e Felmer [19] e que pode ser descrito sucintamente da forma seguinte. Primeiro, consideramos um problema auxiliar e demonstramos que o funcional de energia associado a esse problema auxiliar verifica a geometria do teorema do passo da montanha (veja o Teorema A.23); em seguida, usando a condição de Ambrosetti-Rabinowitz demonstramos que as sequências de Palais-Smale são limitadas em um espaço de Sobolev apropriado; depois, demonstramos que o problema auxiliar possui uma solução positiva. Todas essas etapas visam contornar o problema da ausência de compacidade. Finalmente, utilizamos o método de iteração de Moser e demonstramos uma estimativa, no espaço $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, da norma da solução do problema auxiliar; e através dessa estimativa, demonstramos que a solução do problema auxiliar é também solução do problema original.

1.5.2 Segundo teorema

No capítulo 3 estudamos um artigo subsequente de Alves e Souto [3], intitulado *Existence of solutions for a class of nonlinear Schrödinger equations with potential vanishing at infinity*. Nesse artigo os autores estabelecem outro resultado de existência de solução positiva para uma classe de equações elípticas semilineares de Schrödinger envolvendo o operador laplaciano e potenciais que se anulam; porém, a não linearidade é um pouco mais geral do que no caso anterior. Mais especificamente, o artigo trata do problema não linear estacionário de Schrödinger

$$-\Delta u(x) + V(x)u(x) = K(x)f(u(x)) \qquad (x \in \mathbb{R}^N) \tag{1.26}$$

em que $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, $u(x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $N \geqslant 3$. A respeito do potencial $V\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e da função $K\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ usamos as hipóteses seguintes.

(K_1) $V(x) > 0$ e $K(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $K \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

(K_2) Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ é uma sequência de conjuntos de Borel tais que $|A_n| \leqslant R$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para algum $R > 0$, então

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{A_n \cap B_r^c(0)} K(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{(uniformemente em } n \in \mathbb{N}\text{)}. \tag{1.27}$$

Uma das condições a seguir é válida:

(K_3) $V/K \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ ou

(K_4) existe $p \in (2, 2^*)$ tal que $K(x)/[V(x)]^{(2^*-p)/(2^*-2)} \to 0$ quando $|x| \to +\infty$.

A respeito da não linearidade $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ usamos as hipóteses seguintes.

(f_5) $\limsup\limits_{s\to 0} f(s)/s = 0$ se vale (K_3) ou $\limsup_{s\to 0^+} |f(s)|/s^{p-1} < +\infty$ se vale (K_4).

(f_6) f possui crescimento quase crítico, isto é, $\limsup_{s\to+\infty} f(s)/s^{2^*-1} = 0$ em que $2^* = 2N/(N-2)$ é o expoente crítico de Sobolev.

(f_7) $f(s)/s$ é função não decrescente em $\mathbb{R}_+$ e sua primitiva F é superquadrática no infinito, isto é, $\lim_{s\to+\infty} F(s)/s^2 = +\infty$.

Agora estamos preparados para enunciar o segundo teorema da dissertação.

Teorema 1.4. *Sejam válidas as hipóteses* (K_1), (K_2) *e* (K_3) *ou* (K_1), (K_2) *e* (K_4) *sobre as funções* $V, K \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, *como também as hipóteses* (f_5), (f_6) *e* (f_7) *sobre a função* $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Então o problema* (1.26) *possui solução positiva do tipo* ground state, *isto é, uma solução positiva* $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ *com energia igual ao nível do passo da montanha associado ao funcional de energia.*

Assim como no caso do Teorema 1.3, também no caso do Teorema 1.4 existe a perda da compacidade das imersões de Sobolev. Porém, as demonstrações utilizam técnicas diferentes. No caso do Teorema 1.4 seguimos Alves e Souto [3] (veja também Vieira [32]) e mostramos, sem usar a condição de Ambrosetti-Rabinowitz, que o funcional de energia sssociado ao problema (1.26) verifica a geometria do teorema do passo da montanha (Teorema A.23); depois, usamos as condições sobre as funções V e K para demonstrar uma desigualdade do tipo de Hardy que conduz a um resultado de imersão compacta; em seguida, demonstramos que as sequências de Cerami associadas ao nível de minimax do funcional de energia são limitadas. Finalmente, utilizamos todos os passos citados acima para mostrar que existe uma solução $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ do tipo ground state para o problema.

Capítulo 2

Demonstração do primeiro teorema

O resultado principal deste capítulo é o teorema de existência do artigo de Alves e Souto [2], intitulado *Existence of solutions for a class of elliptic equations in* $\mathbb{R}^N$ *with vanishing potentials*. Para melhor comodidade do leitor, repetimos as hipóteses sobre a não linearidade f e sobre o potencial V, juntamente com alguns comentários e exemplos para essas funções; também reenunciamos o primeiro teorema. Em seguida, apresentamos a estrutura variacional do problema, incluindo a definição de um espaço de funções onde definimos o funcional de Euler-Lagrange. Antecipando uma estimativa para o nível de energia abaixo do qual é possível recuperar a perda de compacidade do problema, definimos um novo funcional de energia associado a um problema autônomo, em que substituímos o potencial dependente da variável espacial por uma constante. Na etapa seguinte, definimos um problema auxiliar através de uma variante do método de penalização. Em seguida, demonstramos a existência de solução fraca para esse problema auxiliar. Depois usamos tanto a estimativa previamente estabelecida com a ajuda da condição de Ambrosetti-Rabinowitz quanto o esquema de iteração de Moser para demonstrar uma estimativa para a norma da solução do problema auxiliar no espaço das funções essencialmente limitadas. Por fim, concluímos que a solução do problema auxiliar é também solução fraca do problema original.

2.1 Estrutura variacional do problema semilinear

Nosso objetivo neste capítulo é estudar a existência de solução fraca para o problema elíptico semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(u) & (x \in \mathbb{R}^N), \\ u(x) > 0 & (x \in \mathbb{R}^N), \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{2.1}$$

em que $N \geqslant 3$. O espaço de Hilbert $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é definido por

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) := \left\{ u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) \colon \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^N),\ i \in \{1, \cdots, N\} \right\},$$

e está munido do produto escalar $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)_{D^{1,2}} \colon L^{2^*}(\mathbb{R}^N) \times L^{2^*}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dado por

$$(u|v)_{D^{1,2}} := \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, \mathrm{d}x$$

e com a correspondente norma

$$\|u\|_{D^{1,2}} := \sqrt{(u|u)_{D^{1,2}}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 \, \mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

A não linearidade $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e o potencial $V\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são funções contínuas. Supomos que f possui um comportamento subcrítico e verifica as hipóteses seguintes.

(f_1) $\limsup_{s\to 0^+} sf(s)/s^{2^*} < +\infty$ em que $2^* = 2N/(N-2)$ é o *expoente crítico* de Sobolev.

(f_2) Existe um número real $p \in (2, 2^*)$ tal que $\limsup_{s\to +\infty} sf(s)/s^p = 0$.

(f_3) Existe um número real $\theta > 2$ tal que $0 \leqslant \theta F(s) \leqslant sf(s)$ para todo $s \in \mathbb{R}^+$, em que usamos F é a primitiva de f, isto é, $F(s) := \int_0^s f(t)\,\mathrm{d}t$.

(f_4) $f(t) = 0$ para todo $t \leqslant 0$.

Observação 2.1. 1. Em relação à hipótese (f_1), existe $c_1 \in \mathbb{R}^+$ tal que $|sf(s)| \leqslant c_1|s|^{2^*}$ para s próximo a zero; e em relação à hipótese (f_2), existe $c_2 \in \mathbb{R}^+$ tal que $|sf(s)| \leqslant c_2|s|^p$ para s suficientemente grande. Combinando essas duas desigualdades e definindo $c_0 := \max\{c_1, c_2\}$, obtemos o par de desigualdades

$$|sf(s)| \leqslant c_0|s|^{2^*} \qquad \text{e} \qquad |sf(s)| \leqslant c_0|s|^p \qquad (\forall s \in \mathbb{R}). \tag{2.2}$$

2. A hipótese (f_3) é conhecida como condição de Ambrosetti-Rabinowitz. Essa hipótese é importante para assegurar que o funcional de Euler-Lagrange associado ao problema (2.1) tem a geometria do teorema do passo da montanha e também para garantir que as sequências de Palais-Smale para esse funcional são limitadas. Para isso, reescrevemos a desigualdade de (f_3) na forma $f(s)/F(s) \geqslant \theta/s$ e, após integração, deduzimos que existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$F(s) \geqslant C|s|^\theta. \tag{2.3}$$

3. Um exemplo de não linearidade $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifica o conjunto de hipóteses acima é

$$f(s) = \begin{cases} 0, & \text{se } s \leqslant 0, \\ s^{q-1}, & \text{se } 0 < s < 1, \\ s^{p-1}, & \text{se } s \geqslant 1, \end{cases}$$

em que $q > 2^*$ e $2 < p < 2^*$.

Além disso, V é função não negativa e verifica as hipóteses seguintes.

(V_1) $V(x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

(V_2) $V(x) \leqslant V_\infty$ para todo $x \in B_1(0)$, em que $V_\infty \in \mathbb{R}^+$ é uma constante positiva e $B_1(0)$ denota a bola unitária centrada na origem das coordenadas.

(V_3) Existem constantes $\Lambda \in \mathbb{R}^+$ e $R > 1$ tais que $\inf_{|x|\geqslant R} |x|^4 V(x)/R^4 \geqslant \Lambda$.

Observação 2.2. 1. Notamos que pela hipótese (V_3) é possível o anulamento da função potencial V no infinito com uma ordem descrescimento não superior a $|x|^4$.

2. Um exemplo de função potencial $V\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ que verifica o conjunto de hipóteses acima é

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } |x| \leqslant R-1, \\ \Lambda R^{-4}(|x| - R + 1), & \text{se } R-1 < |x| < R, \\ \Lambda |x|^{-4} R^4, & \text{se } R \leqslant |x|, \end{cases}$$

em que $\Lambda > 0$ e $R > 1$ são dados por (V_3).

Com essas hipóteses, estamos preparados para demonstrar o primeiro teorema desta dissertação, que reenunciamos a seguir.

Teorema 1.3. *Sejam válidas as hipóteses* (V_1), (V_2) *e* (V_3) *sobre o potencial* V *e também as hipóteses* (f_1), (f_2), (f_3) *e* (f_4) *sobre a não linearidade* f. *Então existe uma constante* $\Lambda^* = \Lambda^*(V_\infty, \theta, p, c_0)$ *tal que o problema* (2.1) *possui solução positiva para todo* $\Lambda \geqslant \Lambda^*$.

Como já mencionamos no capítulo 1, a estratégia que adotamos é a de definir o conceito de solução fraca para o problema (2.1) e demonstrar a existência dessa solução. Com este intuito, consideramos inicialmente uma função teste $v \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$. Multiplicamos ambos os lados da equação diferencial do problema (2.1) por v,

$$-\Delta u(x)v(x) + V(x)u(x)v(x) = f(u(x))v(x) \quad (x \in \mathbb{R}^N)$$

e integramos em todo o espaço $\mathbb{R}^N$,

$$-\int_{\mathbb{R}^N} \Delta u(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} f(u(x))v(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Aplicando Teorema A.7 de Green, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} f(u(x))v(x)\,\mathrm{d}x \qquad (v \in C_0^1(\mathbb{R}^N)) \tag{2.4}$$

em que o termo de fronteira não está presente porque a função teste se anula no exterior de algum conjunto compacto.

Como é comum em equações elípticas semilineares com estrutura variacional, a escolha do espaço de funções onde procuramos a solução do problema é uma questão não trivial. No caso presente, em decorrência da possibilidade de anulamento do potencial no infinito, devemos procurar a solução em um espaço de Sobolev que contém propriamente o espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$. Dessa forma, usando uma ideia similar àquela do artigo de Ambrosetti, Felli e Malchiodi [8] definimos o espaço de funções

$$E = \left\{ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)\colon \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2\,\mathrm{d}x < +\infty \right\}.$$

Esse espaço de Sobolev é também um espaço de Hilbert quando munido do produto escalar $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)_E\colon D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dado por

$$(u|v)_E \coloneqq \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

e da correspondente norma

$$\|u\|_E := \sqrt{(u|u)_E} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

Já que essa é a norma mais importante da dissertação, deste ponto em diante denotamos simplesmente por $\|u\| = \|u\|_E$ sem o subscrito.

O problema (2.1) pode então ser reformulado como um problema de minimização para o funcional $I : E \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u(x)^2 \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} F(u(x)) \,\mathrm{d}x\,, \tag{2.5}$$

em que $F(s) := \int_0^s f(t)\,\mathrm{d}t$.

De fato, como mostramos a seguir no Lema 2.4, o funcional I dado por (2.5) está bem definido e é continuamente Fréchet diferenciável, $I \in C^1(E)$, e sua derivada em $u \in E$ aplicada ao elemento $v \in E$ é dada por

$$I'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u(x)\cdot\nabla v(x) \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u(x)v(x) \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} f(u(x))v(x) \,\mathrm{d}x \quad (v \in E) \tag{2.6}$$

Sendo assim, reconhecemos que $u \in E$ é solução fraca do problema (2.1) se, e somente se, $u \in E$ é ponto crítico do funcional de Euler-Lagrange $I \in C^1(E)$ definido em (2.5).

Observação 2.3. Para simplificar as notações e seguindo a prática comum, de agora em diante escrevemos u no lugar de $u(x)$, $f(u)$ no lugar de $f(u(x))$, etc. Também denotamos por $C \in \mathbb{R}_+$ uma constante real positiva, que pode ter valores diferentes de uma passagem para outra.

Lema 2.4. *O funcional $I\colon E \to \mathbb{R}$ dado por*

$$\begin{aligned} I(u) &:= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} F(u) \,\mathrm{d}x \\ &:= \frac{1}{2}||u||^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u) \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

está bem definido. Além disso, sua derivada de Gâteaux em $u \in E$ aplicada ao elemento $v \in E$ é dada por

$$I'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u(x)\cdot\nabla v(x) \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u(x)v(x) \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} f(u(x))v(x) \,\mathrm{d}x\,.$$

Mais ainda, essa derivada de Gâteaux é contínua; portanto, o funcional I é Fréchet diferenciável, $I \in C^1(E)$.

Demonstração. Começamos definindo os três funcionais $I_1, I_2, I_3\colon E \to \mathbb{R}$ por

$$I_1(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\,, \qquad I_2(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 \,\mathrm{d}x\,, \qquad I_3(u) := \int_{\mathbb{R}^N} F(u) \,\mathrm{d}x\,.$$

Os dois primeiros funcionais estão bem definidos em decorrência da escolha do espaço de Hilbert E; portanto, apresentamos apenas os detalhes relativos ao funcional I_3.

Para mostrar que o terceiro funcional está bem definido usamos a primeira desigualdade em (2.2) e deduzimos que existe $c > 0$ tal que

$$F(s) \leqslant c|s|^{2^*} \qquad (\forall\, s \in \mathbb{R}); \tag{2.7}$$

também usamos a desigualdade de Sobolev,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2^*}} \leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.8}$$

Dessa forma, por (2.7) e (2.8) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u)\,\mathrm{d}x \leqslant c\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}\,\mathrm{d}x \leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2^*}{2}} < +\infty,$$

o que garante a boa definição do funcional I_3.

Consequentemente, o funcional I está bem definido no espaço de Hilbert E.

As derivadas desses três funcionais em $u \in E$ aplicadas a um elemento $v \in E$ são dadas por

$$I'_{1,G}(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v\,\mathrm{d}x\,, \quad I'_{2,G}(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} V(x)uv\,\mathrm{d}x\,, \quad I'_{3,G}(u)v := \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v\,\mathrm{d}x\,.$$

A justificativa para os dois primeiros funcionais é de que ambos são formas quadráticas associadas a formas bilineares contínuas. Logo, esses dois primeiros funcionais são Gâteaux diferenciáveis e suas derivadas são conforme apresentado. Além disso, essas derivadas de Gâteaux são contínuas; portanto os dois primeiros funcionais são Fréchet diferenciáveis, $I_1, I_2 \in C^1(E)$. A seguir apresentamos os detalhes relativos à diferenciabilidade do terceiro funcional: primeiro, mostramos que a derivada de Gâteaux de I_3 é dada pela fórmula acima; em seguida, mostramos que essa derivada de Gâteaux é contínua.

Com este intuito, usando o teorema do valor médio, deduzimos que existe $\theta \in [0, 1]$ tal que

$$\begin{aligned}\frac{F(u(x)+tv(x)) - F(u(x))}{t} &= \frac{F'(u(x)+\theta tv(x))tv(x)}{t}\\ &= f(u(x)+\theta tv(x))v(x),\end{aligned}$$

em que na última passagem usamos a definição $F(u) := \int_0^u f(t)\,\mathrm{d}t$. Por (2.2), isto é, $f(s) \leqslant c_0|s|^{2^*-1}$, e pela desigualdade $(a+b)^r \leqslant 2^{r-1}(a^r + b^r)$, obtemos

$$\begin{aligned} f(u(x)+\theta tv(x))v(x) &\leqslant c_0|u(x)+\theta tv(x)|^{2^*-1}v(x)\\ &\leqslant c(|u(x)|^{2^*-1} + |\theta tv(x)|^{2^*-1})v(x)\\ &\leqslant c(|u(x)|^{2^*-1} + |v(x)|^{2^*-1})v(x)\\ &= c|u(x)|^{2^*-1}v(x) + c|v(x)|^{2^*}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Para estimar as parcelas acima, usamos a desigualdade de Sobolev e obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2^*}\,\mathrm{d}x &\leqslant S^{2^*}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2^*}{2}}\\ &\leqslant S^{2^*}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2\right)^{\frac{2^*}{2}}\\ &\leqslant S^{2^*}||v||^{2^*} < \infty.\end{aligned} \tag{2.10}$$

A seguir usamos a desigualdade de Hölder A.2 com os expoentes conjugados $\alpha = 2^*/(2^*-1)$ e $\alpha' = 2^*$ e obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*-1}|v|\,\mathrm{d}x &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left||u|^{2^*-1}\right|^{\alpha}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{\alpha'}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\alpha'}} \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2^*}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2^*}} \\
&\leqslant S^{2^*}||u||^{2^*-1}||v|| < \infty, \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

em que na última passagem aplicamos a desigualdade (2.10).

Dessa forma, por (2.10) e (2.11) deduzimos que

$$
c|u(x)|^{2^*-1}v(x) + c|v(x)|^{2^*} \in L^1(\mathbb{R}^N).
$$

Agora usamos o Teorema A.11 da Convergência Dominada e obtemos

$$
\begin{aligned}
I'_{3,G}(u)v &= \lim_{t\to 0} \frac{I_3(u+tv) - I_3(u)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{[F(u+tv) - F(u)]}{t}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} f(u+\theta tv)v\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{t\to 0} f(u+\theta tv)v\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v\,\mathrm{d}x\,. \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

Portanto, a derivada de Gâteaux de I_3 em u aplicada ao elemento $v \in E$ é dada por $I'_{3,G}(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)v\,\mathrm{d}x$.

Por fim, para verificar a continuidade da derivada de Gâteaux, partimos de uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ e de um elemento $u \in E$ tais que $u_n \to u$ em E quando $n \to +\infty$. Devemos mostrar que

$$
\lim_{n\to+\infty} (I'_{3,G}(u_n) - I'_{3,G}(u))v = 0
$$

em que $v \in E$ é tal que $\|v\| \leqslant 1$. Entretanto, a desigualdade (2.11) garante que $I_{3,G}$ é um funcional contínuo. Esse fato, juntamente com a Proposição A.19 garantem que $I_{3,G}$ é Fréchet diferenciável, $I_{3,G} \in C^1(E)$.

Finalmente, como $I_1, I_2, I_3 \in C^1(E)$ e já que $I = I_1 + I_2 - I_3$, concluímos que $I \in C^1(E)$ e o lema fica demonstrado. □

Por meio do Lema 2.4 deduzimos que os pontos críticos do funcional I de fato correspondem às soluções fracas do problema (2.1).

2.2 A geometria do passo da montanha

Como o problema (2.1) envolve todo o espaço $\mathbb{R}^N$, existe a perda de compacidade das imersões de Sobolev. E isso causa uma série de dificuldades para a demonstração do resultado de existência de solução fraca. Uma das formas de contornar essas dificuldades é tentar identificar um possível nível de energia do funcional de Euler-Lagrange abaixo do qual é possível recuperar a compacidade das sequências de Palais-Smale; veja a Definição 2.8.

Entretanto, devido ao fato de o potencial V poder se anular no infinito, acreditamos que não é possível trabalhar diretamente com o funcional I para identificar esse nível de energia. Sendo assim, definimos um novo funcional no qual o potencial V é substituído por uma constante conveniente. Mais especificamente, definimos o funcional $I_\infty : H_0^1(B_1) \to \mathbb{R}$ pela fórmula

$$I_\infty(u) \coloneqq \frac{1}{2}\int_{B_1} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{B_1} V_\infty u^2 \,\mathrm{d}x - \int_{B_1} F(u)\,\mathrm{d}x\,, \tag{2.13}$$

em que $V_\infty > 0$ é a constante dada em (V_2); como é usual, B_1 denota a bola unitária centrada na origem. A boa definição do funcional I_∞ segue exatamente os mesmos passos já apresentados no Lema 2.4 e por isso omitimos a demonstração.

O próximo resultado garante que o funcional I_∞ tem a geometria do passo da montanha; veja o Teorema A.23.

Lema 2.5. *O funcional $I_\infty : H_0^1(B_1) \to \mathbb{R}$ definido em (2.13) verifica a geometria do teorema do passo da montanha. Mais precisamente, as propriedades abaixo são válidas.*

1. *Existem $r_0 \in \mathbb{R}_+$ e $\mu_0 \in \mathbb{R}_+$ tais que $I_\infty(u) \geqslant \mu_0$ para toda função $u \in H_0^1(B_1)$ com $\|u\| = r_0$;*
2. *Existe $e_0 \in H_0^1(B_1)\backslash\{0\}$ tal que $I_\infty(e_0) < 0$.*

Demonstração. 1. Para verificar o primeiro item, começamos usando a hipótese (f_3) para deduzir a desigualdade

$$\begin{aligned} I_\infty(u) &\coloneqq \frac{1}{2}\int_{B_1} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{B_1} V_\infty u^2 \,\mathrm{d}x - \int_{B_1} F(u)\,\mathrm{d}x \\ &\geqslant \frac{1}{2}\int_{B_1} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{B_1} V_\infty u^2 \,\mathrm{d}x - \int_{B_1} \frac{uf(u)}{\theta}\,\mathrm{d}x\,, \end{aligned}$$

Além disso, usando a primeira desigualdade em (2.2), deduzimos que

$$\begin{aligned} I_\infty(u) &\geqslant \frac{1}{2}\int_{B_1} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{B_1} V_\infty u^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{\theta}\int_{B_1} |uf(u)|\,\mathrm{d}x \\ &\geqslant \frac{1}{2}\int_{B_1} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{V_\infty}{2}\int_{B_1} u^2 \,\mathrm{d}x - \frac{c_0}{\theta}\int_{B_1} |u|^{2^*}\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade A.3 de Poincaré, obtemos

$$\begin{aligned} I_\infty(u) &\geqslant \frac{1}{2M}\int_{B_1} u^2 \,\mathrm{d}x + \frac{V_\infty}{2}\int_{B_1} u^2 \,\mathrm{d}x - \frac{c_0}{\theta}\int_{B_1} |u|^{2^*}\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{1}{2M} + \frac{V_\infty}{2}\right)\int_{B_1} u^2 \,\mathrm{d}x - \frac{c_0}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

E aplicando a desigualdade (A.1) de Sobolev,

$$\|u\|_{2^*}^{2^*} \coloneqq \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}\,\mathrm{d}x \leqslant S\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2^*}{2}},$$

obtemos

$$\begin{aligned} I_\infty(u) &\geqslant \left(\frac{1}{2M} + \frac{V_\infty}{2}\right) \int_{B_1} u^2 \,\mathrm{d}x - \frac{c_0}{\theta} S^{2^*} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2^*}{2}} \\ &\geqslant \left(\frac{1}{2M} + \frac{V_\infty}{2}\right) \int_{B_1} u^2 \,\mathrm{d}x - \frac{c_0}{\theta} S^{2^*} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2^*}{2}} \\ &\geqslant \left(\frac{1}{2M} + \frac{V_\infty}{2}\right) \int_{B_1} u^2 \,\mathrm{d}x - \frac{c_0}{\theta} S^{2^*} \|u\|_{2^*}^{2^*}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Agora notamos que $H_0^1(B_1) \hookrightarrow L^2(B_1)$ é uma imersão compacta; portanto, existe uma constante $C \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\begin{aligned} \left(\int_{B_1} u^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} &\leqslant C \left(\int_{B_1} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{B_1} V(x) u^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= C\|u\|. \end{aligned}$$

Substituindo a desigualdade precedente em (2.14), obtemos

$$I_\infty(u) \geqslant C^2 \left(\frac{1}{2M} + \frac{V_\infty}{2}\right) \|u\|^2 - \frac{c_0}{\theta} S^{2^*} \|u\|^{2^*}.$$

Assim, considerando $\|u\|$ suficientemente pequeno, segue-se que a primeira parcela do lado direito da desigualdade precedente com o fator $\|u\|^2$ domina a segunda parcela com o fator $||u||^{2^*}$. Por esta razão, obtemos a existência de $r_0 \in \mathbb{R}_+$ e de $\mu_0 \in \mathbb{R}^+$ tais que $I_\infty(u) \geqslant \mu_0$ para toda função $u \in E$ com $\|u\| = r_0$. Com isso concluímos a demonstração do primeiro item.

2. Pela desigualdade (2.3), temos que para $u \in H_0^1(B_1)\backslash\{0\}$,

$$\begin{aligned} I_\infty(tu) &= \frac{1}{2}|t|^2 \int_{B_1} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}|t|^2 \int_{B_1} V_\infty u^2 \,\mathrm{d}x - \int_{B_1} F(tu) \,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{1}{2}|t|^2 \int_{B_1} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}|t|^2 \int_{B_1} V_\infty u^2 \,\mathrm{d}x - C|t|^\theta \int_{B_1} |u|^\theta \,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Como $\theta > 2$, existe $t_u \in \mathbb{R}^+$ suficientemente grande tal que, definindo $e_0 = t_u u$, obtemos $||e_0|| \geqslant r_0$ e $I_\infty(e_0) < 0$. Assim, concluímos a demonstração do segundo item. □

Denotamos por d_∞ o nível de energia do passo da montanha associado ao funcional I_∞, isto é,

$$d_\infty \coloneqq \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_\infty(\gamma(t)),$$

em que

$$\Gamma \coloneqq \left\{\gamma \in C\left([0,1], H_0^1(B_1)\right) : \gamma(0) = 0 \text{ } e \text{ } \gamma(1) = e_0\right\}$$

é a classe de caminhos unindo a origem ao elemento $e_0 \in H_0^1(B_1)\backslash\{0\}$ vericando a desigualdade $I_\infty(e_0) < 0$ e determinado no Lema 2.5.

Observação 2.6. A constante d_∞ depende somente de V_∞, de θ e de f.

2.3 O problema auxiliar

Com o intuito de obtermos soluções positivas para o problema (2.1), aplicamos uma variante do método de penalização desenvolvido por del Pino e Felmer [19] e apresentamos um novo problema. Para isso, fixamos algumas notações.

Para $K = 2\theta/(\theta-2) > 2$ e para $R > 1$, consideramos a função $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{f}(x,t) \coloneqq \begin{cases} f(t), & \text{se } Kf(t) \leqslant V(x)t, \\ \dfrac{V(x)}{K}t, & \text{se } Kf(t) > V(x)t. \end{cases} \tag{2.15}$$

Também definimos a função $g\colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$g(x,t) \coloneqq \begin{cases} f(t), & \text{se } |x| \leqslant R, \\ \tilde{f}(x,t), & \text{se } |x| > R \end{cases} \tag{2.16}$$

e a função $G\colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $G(x,t) \coloneqq \int_0^t g(x,s)\,\mathrm{d}s$.

Antes de apresentar o problema auxiliar estabelecemos algumas desigualdades que são úteis nas demonstrações.

Se $Kf(t) \leqslant V(x)t$, então $\tilde{f}(x,t) = f(t) \leqslant V(x)t/K$; e se $kf(t) > V(x)t$, então $\tilde{f}(x,t) = V(x)t/K < f(t)$. Combinando esses dois casos, deduzimos que

$$\tilde{f}(x,t) \leqslant f(t), \qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^N).$$

Além disso, se $|x| \leqslant R$, então $g(x,t) = f(t)$ e $G(x,t) = F(x,t)$. E se $|x| > R$, então $g(x,t) = \tilde{f}(x,t)$ e há duas possibilidades: se $Kf(t) \leqslant V(x)t$, então $\tilde{f}(x,t) = f(t)$ e $G(x,t) = F(t)$; e se $Kf(t) > V(x)t$, então $\tilde{f}(x,t) = V(x)t/K$ e $G(x,t) = V(x)t^2/2K$. Combinando esses casos, deduzimos que

$$g(x,t) \leqslant \frac{V(x)t}{K}, \qquad (\forall\, |x| \geqslant R). \tag{2.17}$$

Mais ainda, deduzimos que

$$G(x,t) = F(t) \qquad (\forall\, |x| \leqslant R) \tag{2.18}$$

e que

$$G(x,t) \leqslant \frac{V(x)t^2}{2K}, \qquad (\forall\, |x| > R). \tag{2.19}$$

A partir das funções $\tilde{f}$ e g apresentamos o problema auxiliar,

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = g(x,u) & (x \in \mathbb{R}^N) \\ \quad u(x) > 0 & (x \in \mathbb{R}^N) \\ \quad u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{2.20}$$

O funcional $J\colon E \to \mathbb{R}$ de Euler-Lagrange associado ao problema (2.20) é definido por

$$\begin{aligned} J(u) \coloneqq& \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)\,\mathrm{d}x \\ \coloneqq& \frac{1}{2}||u||^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Seguindo os mesmos passos da demonstração do Lema 2.4 é possível demonstrar que esse funcional é continuamente Fréchet diferenciável, $J \in C^1(E)$, e que sua derivada em $u \in E$ aplicada ao elemento $v \in E$ é dada por

$$J'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)uv \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)v \, \mathrm{d}x \quad (\forall\, v \in E). \tag{2.22}$$

Portanto, essa equação nos permite caracterizar os pontos críticos do funcional J de Euler-Lagrange como soluções fracas do problema elíptico semilinear (2.20). Assim, se podemos deduzir alguma propriedade dos pontos críticos do funcional J, então esse conhecimento pode ser transferido para a solução da equação elíptica semilinear. Essa discussão pode ser estendida para uma classe mais ampla de equações diferenciais mas nesta dissertação tratamos apenas das equações semilineares.

O próximo resultado trata da geometria do funcional de energia J associado a esse problema auxiliar.

Lema 2.7. *O funcional $J\colon E \to \mathbb{R}$ definido em (2.21) verifica a geometria do teorema do passo da montanha. Mais precisamente, as propriedades abaixo são válidas.*

1. *Existem $r_1 \in \mathbb{R}_+$ e $\mu_1 \in \mathbb{R}_+$ tais que $J(u) \geqslant \mu_1$ para toda função $u \in E$ com $\|u\| = r_1$;*
2. *Existe $e_1 \in E\backslash\{0\}$ tal que $J(e_1) < 0$.*

Demonstração. 1. Pela definição de G, sabemos que

$$\begin{aligned} J(u) &\coloneqq \frac{1}{2}||u||^2 - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u)\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}||u||^2 - \int_{|x|\leqslant R} G(x,u)\, \mathrm{d}x - \int_{|x|>R} G(x,u)\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}||u||^2 - \int_{|x|\leqslant R} F(t)\, \mathrm{d}x - \int_{|x|>R} G(x,u)\, \mathrm{d}x\,, \end{aligned}$$

em que na passagem anterior usamos a igualdade (2.18). Em seguida, aplicando a desigualdade (2.19) e a hipótese (f_3), obtemos

$$\begin{aligned} J(u) \geqslant& \frac{1}{2}||u||^2 - \int_{|x|\leqslant R} F(u)\, \mathrm{d}x - \int_{|x|>R} \frac{V(x)u^2}{2K}\, \mathrm{d}x \\ \geqslant& \frac{1}{2}||u||^2 - \int_{|x|\leqslant R} \frac{uf(u)}{\theta}\, \mathrm{d}x - \int_{|x|>R} \frac{V(x)u^2}{2K}\, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Agora usamos a primeira desigualdade em (2.2) e obtemos

$$\begin{aligned}
J(u) &\geqslant \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{c_0}{\theta}\int_{|x|\leqslant R}|u|^{2^*}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2K}\int_{|x|>R}V(x)u^2\,\mathrm{d}x\\
&\geqslant \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{c_0}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2K}\int_{|x|>R}V(x)u^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2K}\int_{|x|>R}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\\
&\geqslant \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{c_0}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2K}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)u^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2K}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}||u||^2 - \frac{c_0}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2K}||u||^2\\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2K}\right)||u||^2 - \frac{c_0}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^*}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Sobolev à integral do lado direito da desigualdade precedente, obtemos

$$\begin{aligned}
J(u) &\geqslant \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2K}\right)||u||^2 - \frac{c_0}{\theta}S^{2^*}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2^*}{2}}\\
&\geqslant \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2K}\right)||u||^2 - \frac{c_0}{\theta}S^{2^*}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N}V(x)u^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2^*}{2}}\\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2K}\right)||u||^2 - \frac{c_0}{\theta}S^{2^*}||u||^{2^*}.
\end{aligned}$$

Assim, considerando $\|u\|$ suficientemente pequeno, segue-se que a primeira parcela do lado direito da desigualdade precedente com o fator $\|u\|^2$ domina a segunda parcela com o fator $||u||^{2^*}$. Por esta razão, obtemos a existência de $r_1 \in \mathbb{R}_+$ e de $\mu_1 \in \mathbb{R}^+$ tais que $J(u) \geqslant \mu_1$ para toda função $u \in E$ com $||u|| = r_1$. Com isso concluímos a demonstração do primeiro item.

2. Notamos que se $u \in H_0^1(B_1)\backslash\{0\}$ e $t \in \mathbb{R}_+$, então

$$\begin{aligned}
J(tu) &= \frac{1}{2}t^2\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}t^2\int_{\mathbb{R}^N}V(x)u^2\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N}G(x,tu)\,\mathrm{d}x\\
&\leqslant \frac{1}{2}t^2\int_{B_1}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}t^2\int_{B_1}V(x)u^2\,\mathrm{d}x - \int_{B_1}G(x,tu)\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Das hipóteses (V_2) e (V_3) e da igualdade (2.18), obtemos

$$\begin{aligned}
J(tu) &\leqslant \frac{1}{2}t^2\int_{B_1}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}t^2V_\infty\int_{B_1}u^2\,\mathrm{d}x - \int_{B_1}G(x,tu)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}t^2\int_{B_1}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}t^2V_\infty\int_{B_1}u^2\,\mathrm{d}x - \int_{B_1}F(tu)\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade (2.3), deduzimos que

$$J(tu) \leqslant \frac{1}{2}t^2\int_{B_1}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}t^2V_\infty\int_{B_1}u^2\,\mathrm{d}x - C_0|t|^\theta\int_{B_1}|u|^\theta\,\mathrm{d}x\,.$$

Como $\theta > 2$, existe $t_u \in \mathbb{R}_+$ suficientemente grande tal que, definindo $e_1 = t_u u$, obtemos $\|e_1\| \geqslant r_1$ e $J(e_1) < 0$. Assim, concluímos a demonstração do segundo item. $\square$

A seguir definimos os importantes conceitos de sequência de Palais-Smale e de condição de Palais-Smale.

Definição 2.8. Dizemos que uma sequência de funções $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ é uma *sequência de Palais-Smale* para o funcional J no nível c se

$$J(u_n) \to c \qquad \text{e} \qquad J'(u_n) \to 0$$

quando $n \to \infty$. E dizemos que um funcional $J\colon E \to \mathbb{R}$ verifica a *condição de Palais-Smale*, (ou simplesmente: J verifica a condição (PS)) se toda sequência de Palais-Smale para J tem uma subsequência $(u_{n_j})_{j\in\mathbb{N}} \subset E$ fortemente convergente em E, $u_{n_j} \to u \in E$ quando $j \to +\infty$. Também dizemos que J verifica a condição de Palais-Smale no nível $c \in \mathbb{R}$ (ou simplesmente: J verifica a condição $(PS)_c$) se toda sequência de Palais-Smale no nível c tem uma subsequência convergente em E. Além disso, dizemos simplesmente que J verifica a condição de Palais-Smale se J verifica a condição de Palais-Smale no nível c para todo $c \in \mathbb{R}$.

Como o funcional J tem a geometria do teorema do passo da montanha, usando Willem [33, Teorema 1.15], obtemos uma sequência de Palais-Smale $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ para esse funcional no nível c, isto é, uma sequência tal que

$$J(u_n) \to c \qquad \text{e} \qquad J'(u_n) \to 0$$

em que $c \in \mathbb{R}_+$ é o nível do passo da montanha associado a J (nível de minimax), isto é,

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)),$$

e

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H_0^1(B) : \gamma(0) = 0 \ \text{ e } \ \gamma(1) = e_1\},$$

é a classe de caminhos unindo a origem ao elemento $e_1 \in H_0^1(B)\backslash\{0\}$ verificando a desigualdade $J(e_1) < 0$ e determinado no Lema 2.5.

Agora vamos comparar os níveis de minimax d_∞ e c associados aos funcionais I_∞ e J, respectivamente dados por (2.13) e (2.21). Se $u \in H_0^1(B_1)$, então $G(x,u) = F(u)$, pela igualdade (2.18); além disso, $V(x) \leqslant V_\infty$, por (V_2). Logo, $J(u) \leqslant I_\infty(u)$, para todo $u \in H_0^1(B)$. Da definição de c e d_∞, concluímos que

$$c \leqslant d_\infty. \tag{2.23}$$

No próximo lema mostramos que as sequências de Palais-Smale para o funcional J são limitadas.

Lema 2.9. *Suponhamos que seja válida a hipóteses (V_1) sobre o potencial e as hipóteses (f_1), (f_2), (f_3) e (f_4) sobre a não linearidade. Se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ é uma sequência de Palais-Smale para o funcional J, então $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ é limitada em E.*

Demonstração. Devemos mostrar que a sequência $(\|u_n\|)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é limitada. E como é usual em problemas elípticos semilineares, é importante estimar o termo

$$\begin{aligned} J(u_n) - \frac{1}{\theta}J'(u_n)u_n = {} & \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u_n^2 \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} G(x,u_n)\,\mathrm{d}x \\ & - \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)u_n^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{\theta}\int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_n)u_n \,\mathrm{d}x\,, \end{aligned}$$

em todo o espaço $\mathbb{R}^N$.

Tendo em vista as definições das funções g e G, inicialmente avaliamos a expressão $J(u_n) - \frac{1}{\theta}J'(u_n)u_n$ no conjunto

$$A \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^N\colon |x| \leqslant R \text{ ou } f(u(x)) \leqslant V(x)u(x)/K\}.$$

Pela definição de G segue-se que se $x \in A$ então $G(x,u) = F(u)$. Assim, usando (f_3), concluímos que existe $\theta > 2$ tal que

$$-G(x,u) + \frac{1}{\theta}uf(u) \geqslant 0 \quad (\forall\, x \in A).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_A |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_A V(x)u^2\,\mathrm{d}x - \int_A G(x,u)\,\mathrm{d}x \\
&\quad - \frac{1}{\theta}\int_A |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\theta}\int_A V(x)u^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\theta}\int_A g(x,u)u\,\mathrm{d}x \\
&\qquad \geqslant \frac{1}{2}\int_A |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_A V(x)u^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\theta}\int_A f(u)u\,\mathrm{d}x \\
&\qquad\quad - \frac{1}{\theta}\int_A |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\theta}\int_A V(x)u^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\theta}\int_A g(x,u)u\,\mathrm{d}x\,,
\end{aligned}$$

Pela definição de g dada em (2.16), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_A |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_A V(x)u^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\theta}\int_A f(u)u\,\mathrm{d}x \\
&\quad - \frac{1}{\theta}\int_A |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\theta}\int_A V(x)u^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\theta}\int_A g(x,u)u\,\mathrm{d}x \\
&\qquad \geqslant \frac{1}{2}\int_A |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_A V(x)u^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\theta}\int_A f(u)u\,\mathrm{d}x \\
&\qquad\quad - \frac{1}{\theta}\int_A |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\theta}\int_A V(x)u^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\theta}\int_A f(u)u\,\mathrm{d}x \\
&\qquad = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta}\right)\left(\int_A |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x + \int_A V(x)u^2\,\mathrm{d}x\right) \\
&\qquad \geqslant \left(\frac{\theta-2}{4\theta}\right)\left(\int_A |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x + \int_A V(x)u^2\,\mathrm{d}x\right).
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Agora, continuamos a estimar o termo $J(u_n) - \frac{1}{\theta}J'(u_n)u_n$ no complementar do subconjunto A,

$$A^c = \{x \in \mathbb{R}^N\colon |x| > R \text{ e } f(u(x)) > V(x)u(x)/K\}.$$

Pelas definições de $\tilde{f}(x,t)$ e de $g(x,t)$, dadas respectivamente em (2.15) e em (2.16), se $x \in A^c$, então $g(x,u) = \tilde{f}(x,u) = V(x)u(x)/K$ e $G(x,u) = V(x)u^2(x)/2K$. Dessa forma,

$$\int_{A^c} g(x,u)u\,\mathrm{d}x = \int_{A^c} \frac{V(x)u^2(x)}{K}\,\mathrm{d}x > 0 \tag{2.25}$$

e

$$\int_{A^c} G(x,u)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{A^c} g(x,u)u\,\mathrm{d}x\,. \tag{2.26}$$

Logo, usando (2.25), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{A^c}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{A^c}V(x)u^2\,\mathrm{d}x-\int_{A^c}G(x,u)\,\mathrm{d}x\\
&\quad-\frac{1}{\theta}\int_{A^c}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x-\frac{1}{\theta}\int_{A^c}V(x)u^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\theta}\int_{A^c}g(x,u)u\,\mathrm{d}x\\
&\quad\geqslant\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)\left(\int_{A^c}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+\int_{A^c}V(x)u^2\,\mathrm{d}x\right)-\int_{A^c}G(x,u)\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Da Definição (2.16), se $|x|>R$, então $g(x,t)=\tilde{f}(x,t)$. Além disso, da Definição (2.15), se $Kf(t)>V(x)t$, então $\tilde{f}(x,t)=V(x)t/K$ e $G(x,t)=V(x)t^2/2K$. Assim, para $x\in A^c$, temos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{A^c}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{A^c}V(x)u^2\,\mathrm{d}x-\int_{A^c}G(x,u)\,\mathrm{d}x\\
&\quad-\frac{1}{\theta}\int_{A^c}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x-\frac{1}{\theta}\int_{A^c}V(x)u^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\theta}\int_{A^c}g(x,u)u\,\mathrm{d}x\\
&\quad=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)\left(\int_{A^c}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+\int_{A^c}V(x)u^2\,\mathrm{d}x\right)-\frac{1}{2K}\int_{A^c}V(x)u^2\,\mathrm{d}x\\
&\quad\geqslant\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)\left(\int_{A^c}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+\int_{A^c}V(x)u^2\,\mathrm{d}x\right)-\frac{1}{2K}\left(\int_{A^c}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+\int_{A^c}V(x)u^2\,\mathrm{d}x\right)\\
&\quad=\left(\frac{\theta-2}{4\theta}\right)\left(\int_{A^c}|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x+\int_{A^c}V(x)u^2\,\mathrm{d}x\right),
\end{aligned}\tag{2.27}$$

em que na última passagem usando o fato de que $K=2\theta/(\theta-2)$.

Combinando as desigualdades (2.24) e (2.27), obtemos

$$J(u_n)-\frac{1}{\theta}J'(u_n)u_n\geqslant\left(\frac{\theta-2}{4\theta}\right)||u_n||^2=\frac{1}{2K}||u_n||^2.\tag{2.28}$$

Observamos que, pela definição de sequência de Palais-Smale,

$$J(u_n)\to c\qquad\text{e}\qquad J'(u_n)\frac{u_n}{||u_n||}\to 0$$

pois $J'(u_n)\to 0$ por hipótese; logo, existe uma constante $C>0$ tal que

$$J(u_n)-\frac{1}{\theta}J'(u_n)u_n\leqslant C+\frac{1}{\theta}||u_n||\leqslant C+||u_n||.\tag{2.29}$$

Usando as desigualdades (2.29) e (2.28), deduzimos que $(1/2K)\|u_n\|^2\leqslant C+\|u_n\|$ ou seja, $\|u_n\|(\|u_n\|-2K)\leqslant 2KC$.

Para mostrar que a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset E$ é limitada argumentamos por contradição. Se existir uma subsequência, ainda denotada da mesma forma, tal que $\|u_n\|\to+\infty$, então pela desigualdade acima deduzimos que $(\|u_n\|-2K)\to 0$, isto é, $\|u_n\|\to 2K$, o que é uma contradição. Portanto, a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset E$ é limitada em E. Isso conclui a demonstração do lema. □

Observação 2.10. 1. Notamos que na demonstração do Lema 2.9 utilizamos a condição de Ambrosetti-Rabinowitz, hipótese (f_3), para garantir a limitação da sequência de Palais-Smale.

2. Em decorrência da hipótese (f_4), sem perda de generalidade podemos considerar as sequências de Palais-Smale $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ formadas por funções não negativas.

Lema 2.11. *Sob as hipóteses do Lema 2.9, o funcional $J\colon E \to \mathbb{R}$ definido em (2.21) verifica a condição de Palais-Smale.*

Demonstração. Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ uma sequência de Palais-Smale no nível c para o funcional J, isto é,

$$J(u_n) \to c \qquad \text{e} \qquad J'(u_n) \to 0$$

quando $n \to \infty$. Pelo Lema 2.9, essa sequência é limitada. E como o espaço de Hilbert E é reflexivo, deduzimos que existe uma subsequência de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$, ainda denotada da mesma maneira, e existe $u \in E$, tais que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em E quando $n \to +\infty$.

Nosso objetivo agora é mostrar que $u_n \to u$ fortemente em E. Para isso, é suficiente mostrar que a sequência das normas é convergente, $\|u_n\| \to \|u\|$ quando $n \to +\infty$ pois já temos a convergência fraca $u \rightharpoonup u$ quando $n \to +\infty$. Para mais detalhes, veja o livro de DiBenedetto [20, Proposition V.11.1].

Com este intuito, dado $\epsilon \in \mathbb{R}_+$, existe um número real $r \in \mathbb{R}_+$ tal que $r > R > 1$ e que verifica a desigualdade

$$4C\left(1-\frac{1}{K}\right)^{-1}(\omega_N)^{\frac{1}{N}}\left(\int_{r\leqslant|x|\leqslant 2r}|u|^{2^*}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2^*}} < \epsilon, \tag{2.30}$$

em que $\omega_N = 2\pi^{\frac{N}{2}}/\Gamma(N/2)$ é o volume da bola unitária em $\mathbb{R}^N$ e $\Gamma(t) = \int_0^t x^{t-1}\exp(-x)\,\mathrm{d}x$ é a função de Euler.

Seja $\eta \in C_0^\infty(B_r^c)$ uma função corte tal que $0 \leqslant \eta \leqslant 1$; além disso, $\eta(x) = 1$ para todo $x \in B_{2r}^c$ e $|\nabla\eta| \leqslant 2/r$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Como a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ é limitada, a sequência $(\eta u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ também é limitada em E. Portanto, $J'(u_n)(\eta u_n) = o_n(1)$, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u_n\cdot\nabla(\eta u_n)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N}V(x)u_n(\eta u_n)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N}g(x,u_n)\eta u_n\,\mathrm{d}x + o_n(1). \tag{2.31}$$

Notamos que $\eta = 0$ em B_r e, consequentemente, $\eta = 0$ em B_R, pois $r > R$. Usando esses fatos na equação precedente, obtemos

$$\int_{|x|\geqslant r}\nabla u_n\cdot\nabla(\eta u_n)\,\mathrm{d}x + \int_{|x|\geqslant r}V(x)u_n(\eta u_n)\,\mathrm{d}x = \int_{|x|\geqslant r}g(x,u_n)\eta u_n\,\mathrm{d}x + o_n(1).$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geqslant r}\eta|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x + \int_{|x|\geqslant r}|\nabla u_n|u_n\nabla\eta\,\mathrm{d}x + \int_{|x|\geqslant r}\eta V(x){u_n}^2\,\mathrm{d}x \\ = \int_{|x|\geqslant r}\eta g(x,u_n)u_n\,\mathrm{d}x + o_n(1).\end{aligned}$$

Por outro lado, pela desigualdade (2.17),

$$\int_{|x|\geqslant r}\eta g(x,u_n)u_n\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{|x|\geqslant r}\eta\frac{V(x)}{K}u_n^2\,\mathrm{d}x\,;$$

logo,

$$\int_{|x|\geqslant r} \eta|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x + \int_{|x|\geqslant r} |\nabla u_n| u_n \nabla\eta\,\mathrm{d}x + \int_{|x|\geqslant r} \eta V(x) {u_n}^2\,\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \int_{|x|\geqslant r} \eta \frac{V(x)}{K} |u_n|^2\,\mathrm{d}x + o_n(1).$$

Após reagrupar os termos, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{|x|\geqslant r} \eta|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x + \left(1-\frac{1}{K}\right)\int_{|x|\geqslant r} \eta V(x)|u_n|^2\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant -\int_{|x|\geqslant r} |\nabla u_n| u_n \nabla\eta\,\mathrm{d}x + o_n(1) \\
&\leqslant \int_{|x|\geqslant r} |\nabla u_n||u_n||\nabla\eta|\,\mathrm{d}x + o_n(1) \\
&\leqslant \int_{r\leqslant|x|\leqslant 2r} |\nabla u_n||u_n||\nabla\eta|\,\mathrm{d}x + o_n(1) \\
&\leqslant \frac{2}{r}\int_{r\leqslant|x|\leqslant 2r} |\nabla u_n||u_n|\,\mathrm{d}x + o_n(1),
\end{aligned}$$

em que na última passagem usamos a desigualdade $|\nabla\eta| \leqslant 2/r$.

Subtraindo a parcela $(1/k)\int_{|x|\geqslant r}\eta|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x$ do lado esquerdo da desigualdade acima e agrupando as integrais, deduzimos que

$$\left(1-\frac{1}{K}\right)\left\{\int_{|x|\geqslant r} \eta|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x + \int_{|x|\geqslant r} \eta V(x)|u_n|^2\,\mathrm{d}x\right\} \leqslant \frac{2}{r}\int_{r\leqslant|x|\leqslant 2r} |\nabla u_n||u_n|\,\mathrm{d}x + o_n(1).$$

Pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\int_{r\leqslant|x|\leqslant 2r} |\nabla u_n||u_n|\,\mathrm{d}x &\leqslant \left(\int_{r\leqslant|x|\leqslant 2r} |u_n|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{r\leqslant|x|\leqslant 2r} |\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \left(\int_{r\leqslant|x|\leqslant 2r} |u_n|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} ||u_n||. \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

Pela imersão compacta $D^{1,2}(B_{2r}\backslash B_r) \hookrightarrow L^2(B_{2r}\backslash B_r)$, podemos extrair uma subsequência, ainda denotada da mesma forma, tal que $u_n \to u$ fortemente em $L^2(B_{2r}\backslash B_r)$ e evidentemente a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(B_{2r}\backslash B_r)$ é limitada. Além disso, como $(\eta u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, segue-se que

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{K}\right)\left(\int_{|x|\geqslant r} \eta|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x + \int_{|x|\geqslant r} \eta V(x)|u_n|^2\,\mathrm{d}x\right) \\
&\leqslant \frac{2}{r}\limsup_{n\to\infty}\int_{r\leqslant|x|\leqslant 2r} |\nabla u_n||u_n|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \frac{2}{r}\limsup_{n\to\infty}\left(\int_{r\leqslant|x|\leqslant 2r} |u_n|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \|u_n\| \\
&= \frac{2C}{r}\left(\int_{r\leqslant|x|\leqslant 2r} |u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (2.33)
\end{aligned}$$

Na penúltima passagem, usamos a desigualdade (2.32); na última passagem, usamos o fato de que a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D^{1,2}(B_{2r}\backslash B_r)$ é limitada por uma constante $C \in \mathbb{R}_+$.

Além disso, usando novamente a desigualdade de Hölder com os expoentes conjugados $p = N/2$ e $p' = N/(N-2)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\int_{r\leqslant|x|\leqslant 2r} u^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} &\leqslant \left(\int_{r\leqslant|x|\leqslant 2r} |u|^{\frac{2N}{N-2}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{N-2}{2N}} \left(\int_{r\leqslant|x|\leqslant 2r} 1^{\frac{N}{2}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{N}}\\
&\leqslant \left(\int_{r\leqslant|x|\leqslant 2r} u^{2^*}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2^*}} |B_{2r}\backslash B_r|^{\frac{1}{N}}\\
&\leqslant \left(\int_{r\leqslant|x|\leqslant 2r} u^{2^*}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2^*}} |B_{2r}|^{\frac{1}{N}}\\
&\leqslant \left(\int_{r\leqslant|x|\leqslant 2r} u^{2^*}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2^*}} (\omega_N)^{\frac{1}{N}} 2r
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Substituindo a desigualdade (2.34) em (2.33), obtemos

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{K}\right)\left(\int_{|x|\geqslant r}\eta|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x + \int_{|x|\geqslant r}\eta V(x)|u_n|^2\,\mathrm{d}x\right)\\
&\leqslant \frac{2C}{r}\left(\int_{r\leqslant|x|\leqslant 2r} u^{2^*}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2^*}} (\omega_N)^{\frac{1}{N}} 2r\\
&= 4C(\omega_N)^{\frac{1}{N}}\left(\int_{r\leqslant|x|\leqslant 2r} u^{2^*}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2^*}}.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Pela escolha de $r > 0$ e pelas desigualdades (2.30) e (2.35), segue-se que

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}\left(\int_{|x|\geqslant r}\eta|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x + \int_{|x|\geqslant r}\eta V(x)|u_n|^2\,\mathrm{d}x\right)\\
&\leqslant 4C\left(1-\frac{1}{K}\right)^{-1}\omega_N^{\frac{1}{N}}\left(\int_{r\leqslant|x|\leqslant 2r} u^{2^*}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2^*}} < \epsilon.
\end{aligned}$$

Em particular, como $\eta(x) = 1$ para todo $x \in B_{2r}^c$, segue-se que

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\int_{|x|\geqslant 2r}|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x + \int_{|x|\geqslant 2r} V(x){u_n}^2\,\mathrm{d}x\right) < \epsilon.$$

Combinando a desigualdade precedente com (2.31) e usando o fato de que $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ é arbitrário, deduzimos que

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{|x|\geqslant 2r} g(x,u_n)\,\mathrm{d}x u_n = 0. \tag{2.36}$$

Agora devemos fazer uma estimativa para a integral $\int_{|x|\leqslant 2r} g(x,u_n)u_n$ na bola $B_{2r} \subset \mathbb{R}^N$ de raio $2r$ centrada na origem. Como $E(B_{2r}) \subset D^{1,2}(B_{2r})$ e já que $D^{1,2}(B_{2r}) \hookrightarrow L^p(B_{2r})$ é uma imersão compacta, com $p \in [2,2^*)$, então $E(B_{2r})$ está imerso compactamente em $L^p(B_{2r})$. Assim, se $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $E(B_{2r})$, afirmamos que $u_n \to u$ fortemente em $L^p(B_{2r})$.

Pelo Teorema A.13, segue-se que

$$u_n(x) \to u(x) \quad \text{q.t.p. } B_{2r};$$

além disso, pelo mesmo teorema existe uma função $h \in L^p(B_{2r})$ tal que

$$|u_n(x)| \leqslant h(x) \quad \text{q.t.p. } B_{2r}.$$

Dessa forma, deduzimos que

$$u_n g(x, u_n) \to u g(x, u) \quad \text{q.t.p. } B_{2r}$$

e pela definição (2.16) de g e pela hipótese (f_2) sobre a não linearidade também deduzimos que

$$u_n g(x, u_n) \leqslant u_n f(u_n) \leqslant c_0 |u_n|^p \leqslant |h(x)|^p.$$

Com base nessas desigualdades, podemos aplicar o Teorema A.11 da Convergência Dominada para calcular

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_{|x|\leqslant 2r} g(x, u_n) u_n \, \mathrm{d}x &= \int_{|x|\leqslant 2r} \lim_{n\to\infty} g(x, u_n) u_n \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{|x|\leqslant 2r} g(x, u) u \, \mathrm{d}x \, . \end{aligned} \tag{2.37}$$

Portanto, a estimativa (2.36) e o limite (2.37) implicam que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n) u_n \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u) u \, \mathrm{d}x \, .$$

Prosseguindo, fazemos mais uma estimativa, dessa vez para a norma de $\|u_n - u\|$ no espaço E e obtemos

$$\begin{aligned} o_n(1) &= (J'(u_n) - J'(u))(u_n - u) \\ &= J'(u_n)u_n - J'(u_n)u - J'(u)u_n + J'(u)u \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) {u_n}^2 \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n) u_n \, \mathrm{d}x \\ &\quad - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \cdot \nabla u \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u_n u \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_n) u \, \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u) u_n \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2) \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u) u \, \mathrm{d}x \\ &= \|u_n - u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (g(x, u_n) - g(x, u))(u_n - u) \, \mathrm{d}x \\ &= ||u_n - u||^2 + o_n(1). \end{aligned}$$

Consequentemente, $\|u_n\| \to \|u\|$ quando $n \to +\infty$ e a demonstração está finalizada. $\square$

Usando o Lema 2.7, deduzimos que o funcional J tem a geometria do passo da montanha. E como já afirmamos, pelo resultado em Willem [33, Teorema 1.15], existe uma sequência de Palais-Smale $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ para esse funcional no nível c. Usando o Lema 2.9, sabemos que as sequências de Palais-Smale associadas a J são limitadas e pelo Lema 2.11 deduzimos que essas sequências possuem subsequências convergentes. Assim, concluímos que o problema auxiliar (2.20) possui solução positiva $u \in E$ tal que $J(u) = c > 0$ e $J'(u) = 0$.

2.4 Estimativa para a solução do problema auxiliar

Nesta seção mostramos que a solução do problema auxiliar (2.20) obtida anteriormente verifica uma importante estimativa. Para isso usamos alguns lemas.

Lema 2.12. *Para $R > 1$, qualquer solução positiva u do problema auxiliar (2.20) verifica a estimativa*

$$\|u\|^2 \leqslant 2Kd_\infty.$$

Demonstração. Combinando as desigualdades (2.23) e (2.28), segue-se que

$$\frac{(\theta-2)}{4\theta}||u||^2 = \frac{1}{2K}||u||^2 \leqslant J(u) - \frac{1}{\theta}J'(u)u = J(u) = c \leqslant d_\infty.$$

Logo, $\|u\|^2 \leqslant 2Kd_\infty$ e isso conclui a demonstração do lema. □

Observação 2.13. No lema anterior percebemos que $\|u\|$ é limitada por uma constante que depende somente de V_∞, de θ e de f. Essa constante não depende de $R > 1$.

A próxima proposição é fundamental em nossa argumentação, porque estabelece uma estimativa importante envolvendo a norma da solução u do problema (2.20) no espaço $L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Proposição 2.14. *Suponhamos que $v \in E \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é solução fraca do problema*

$$-\Delta v + b(x)v = H(x,v) \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}^N), \tag{2.38}$$

em que $H\colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua verificando a desigualdade

$$|H(x,s)| \leqslant h(x)|s| \qquad (\forall\, s \in \mathbb{R}_+), \tag{2.39}$$

com $h \in L^q(\mathbb{R}^N)$ para $q > N/2$ e $b\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função não negativa. Então existe uma constante $M = M(q, |h|_q) \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$\|v\|_\infty \leqslant M\|v\|_{2^*}. \tag{2.40}$$

Demonstração. Seja $v \in E \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ uma solução fraca do problema (2.38), isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \cdot \nabla w \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)w \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} H(x,v)w \,\mathrm{d}x \qquad (\forall\, w \in E).$$

Para cada número natural $m \in \mathbb{N}$ e para cada número real $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\beta > 1$, definimos os subconjuntos

$$A_m := \{x \in \mathbb{R}^N \colon |v|^{\beta-1} \leqslant m\} \qquad \text{e} \qquad B_m := \mathbb{R}^N \backslash A_m.$$

Também definimos uma sequência de funções $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ pelas fórmulas

$$v_m(x) := \begin{cases} v(x)|v(x)|^{2(\beta-1)}, & \text{se } x \in A_m, \\ m^2 v(x), & \text{se } x \in B_m. \end{cases} \tag{2.41}$$

Observamos que $v_m \in E$ para todo $m \in \mathbb{N}$. De fato,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|v_m|^2\,\mathrm{d}x &= \int_{A_m} V(x)|v_m|^2\,\mathrm{d}x + \int_{B_m} V(x)|v_m|^2\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{A_m} V(x)(v(x)|v(x)|^{2(\beta-1)})^2\,\mathrm{d}x + \int_{B_m} V(x)(m^2v(x))^2\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant \int_{A_m} V(x)v^2(x)m^4\,\mathrm{d}x + \int_{B_m} V(x)m^4v^2(x)\,\mathrm{d}x\\ &= m^4\int_{\mathbb{R}^N} V(x)v^2(x)\,\mathrm{d}x < +\infty,\end{aligned}$$

em que na primeira desigualdade usamos a definição do subconjunto A_m, e na última desigualdade usamos a hipótese de que $v \in E$. Dessa forma, concluímos que $v_m \in E$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Notamos que $v_m \leqslant |v|^{2\beta-1}$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. De fato,

- Se $x \in A_m$, então $v_m(x) = v(x)|v(x)|^{2(\beta-1)} \leqslant |v(x)||v(x)|^{2(\beta-1)} = |v(x)|^{2\beta-1}$.
- Se $x \in B_m$, então $v_m(x) = m^2v(x) \leqslant m^2|v(x)| < |v(x)|^{2\beta-2}|v(x)| = |v(x)|^{2\beta-1}$.

Além disso, o gradiente de v_m é dado por

$$\begin{cases}\nabla v_m = \nabla(v|v|^{2(\beta-1)}) = (2\beta-1)|v|^{2(\beta-1)}\nabla v, & \text{se } x \in A_m,\\ \nabla v_m = \nabla(m^2v) = m^2\nabla v, & \text{se } x \in B_m.\end{cases} \tag{2.42}$$

Multiplicando ambos os lados da equação (2.38) pela função teste v_m e integrando em todo o espaço $\mathbb{R}^N$, temos

$$-\int_{\mathbb{R}^N} \Delta v v_m\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)vv_m\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} H(x,v)v_m.$$

Usando o Teorema A.7 de Green no lado esquerdo, deduzimos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v\cdot\nabla v_m\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)vv_m\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} H(x,v)v_m\,\mathrm{d}x\,. \tag{2.43}$$

De (2.42), segue-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v\cdot\nabla v_m\,\mathrm{d}x = (2\beta-1)\int_{A_m} |v|^{2(\beta-1)}|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x + m^2\int_{B_m} |\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\,. \tag{2.44}$$

Além disso, pela definição (2.41) de v_m,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} b(x)vv_m\,\mathrm{d}x &= \int_{A_m} b(x)vv_m\,\mathrm{d}x + \int_{B_m} b(x)vv_m\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{A_m} b(x)v^2|v|^{2(\beta-1)}\,\mathrm{d}x + \int_{B_m} b(x)v^2m^2\,\mathrm{d}x > 0.\end{aligned} \tag{2.45}$$

De (2.44), obtemos

$$(2\beta-1)\int_{A_m} |v|^{2(\beta-1)}|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} \nabla v\cdot\nabla v_m\,\mathrm{d}x\,.$$

Assim, pela desigualdade anterior e por (2.45),

$$\begin{aligned}\int_{A_m} |v|^{2(\beta-1)}|\nabla v|^2 \,\mathrm{d}x \leqslant& (2\beta-1)^{-1}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v\cdot\nabla v_m \,\mathrm{d}x\\ \leqslant& (2\beta-1)^{-1}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v\cdot\nabla v_m \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)vv_m \,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}\tag{2.46}$$

Agora definimos outra sequência de funções $(w_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset E$ por

$$w_m(x) \coloneqq \begin{cases} v(x)|v(x)|^{(\beta-1)}, & \text{se } x\in A_m,\\ mv(x), & \text{se } x\in B_m.\end{cases}$$

O gradiente de w_m é dado por

$$\nabla w_m(x) = \begin{cases} \beta|v|^{(\beta-1)}\nabla v, & \text{se } x\in A_m,\\ m\nabla v, & \text{se } x\in B_m.\end{cases}\tag{2.47}$$

Isso implica que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_m|^2 \,\mathrm{d}x =& \int_{A_m} |\nabla w_m|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{B_m} |\nabla w_m|^2 \,\mathrm{d}x\\ =& \beta^2\int_{A_m} |v|^{2(\beta-1)}|\nabla v|^2 \,\mathrm{d}x + m^2\int_{B_m}|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}\tag{2.48}$$

De (2.44), (2.47) e (2.48),

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_m|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)w_m^2\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n}\nabla v\cdot\nabla v_m\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)vv_m\,\mathrm{d}x\\ &= \beta^2\int_{A_m}|v|^{2(\beta-1)}|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x + m^2\int_{B_m}|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x + \int_{A_m} b(x)v^2|v|^{2(\beta-1)}\,\mathrm{d}x\\ &\quad + \int_{B_m} b(x)m^2v^2\,\mathrm{d}x - (2\beta-1)\int_{A_m}|v|^{2(\beta-1)}|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\\ &\quad - m^2\int_{B_m}|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x - \int_{A_m} b(x)v^2|v|^{2(\beta-1)}\,\mathrm{d}x - \int_{B_m} b(x)m^2v^2\,\mathrm{d}x\\ &= (\beta-1)^2\int_{A_m}|v|^{2(\beta-1)}|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}\tag{2.49}$$

De (2.49),

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_m|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)w_m^2\,\mathrm{d}x\\ &\quad= \int_{\mathbb{R}^N}\nabla v\cdot\nabla v_m\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)vv_m\,\mathrm{d}x + (\beta-1)^2\int_{A_m}|v|^{2(\beta-1)}|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\\ &\quad\leqslant \int_{\mathbb{R}^N}\nabla v\cdot\nabla v_m\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)vv_m)\,\mathrm{d}x + \frac{(\beta-1)^2}{(2\beta-1)}\int_{\mathbb{R}^N}\nabla v\cdot\nabla v_m\,\mathrm{d}x\\ &\qquad + \frac{(\beta-1)^2}{(2\beta-1)}\int_{\mathbb{R}^N} b(x)vv_m\,\mathrm{d}x\,,\end{aligned}$$

em que na última passagem usamos a desigualdade (2.46). Consequentemente,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_m|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} b(x) w_m^2 \,\mathrm{d}x \\
&\quad \leqslant \left(\frac{(\beta-1)^2}{(2\beta-1)} + 1 \right) \left(\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \cdot \nabla v_m \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} b(x) v v_m \,\mathrm{d}x \right).
\end{aligned} \tag{2.50}$$

De (2.43) e do fato de que $\beta > 1$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_m|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} b(x) w_m^2 \,\mathrm{d}x &\leqslant \left(\frac{(\beta-1)^2}{(2\beta-1)} + 1 \right) \left(\int_{\mathbb{R}^N} \nabla v \cdot \nabla v_m \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} b(x) v v_m \,\mathrm{d}x \right) \\
&= \left(\frac{(\beta-1)^2}{(2\beta-1)} + 1 \right) \int_{\mathbb{R}^N} H(x,v) v_m \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\beta^2}{2\beta-1} \int_{\mathbb{R}^N} H(x,v) v_m \,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \beta^2 \int_{\mathbb{R}^N} H(x,v) v_m \,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

E pela desigualdade (A.1) de Sobolev,

$$\begin{aligned}
\left(\int_{A_m} |w_m|^{2^*} \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{N-2}{N}} &\leqslant S \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_m|^2 \,\mathrm{d}x \\
&\leqslant S \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_m|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} b(x) w_m^2 \,\mathrm{d}x \right),
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Agora, partindo da desigualdade (2.52) usamos respectivamente a desigualdade (2.51), a hipótese (2.39) e a definição de w_m para obter

$$\begin{aligned}
\left(\int_{A_m} |w_m|^{2^*} \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{N-2}{N}} &\leqslant S\beta^2 \int_{\mathbb{R}^N} H(x,v) v_m \,\mathrm{d}x \\
&\leqslant S\beta^2 \int_{\mathbb{R}^N} h(x) |v||v_m| \,\mathrm{d}x \\
&= S\beta^2 \left(\int_{A_m} h(x) |v||v||v|^{2(\beta-1)} \,\mathrm{d}x + \int_{B_m} h(x) |v| m^2 |v| \,\mathrm{d}x \right) \\
&= S\beta^2 \left(\int_{A_m} h(x) w_m^2 \,\mathrm{d}x + \int_{B_m} h(x) w_m^2 \,\mathrm{d}x \right) \\
&= S\beta^2 \int_{\mathbb{R}^N} h(x) w_m^2 \,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Sejam os expoentes conjugados $1/q + 1/p = 1$; pela desigualdade de Hölder aplicada à integral do lado direito da desigualdade (2.53),

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} h(x) w_m^2 \,\mathrm{d}x &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^N} |h(x)|^q \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |w_m(x)|^{2p} \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= ||h||_{L^q(\mathbb{R}^N)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |w_m|^{2p} \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Portanto, de (2.53) e de (2.54),

$$\left(\int_{A_m} |w_m|^{2^*} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{N-2}{N}} \leqslant S\beta^2 ||h||_{L^q(\mathbb{R}^N)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |w_m|^{2p} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.55}$$

Notamos agora que $|w_m| \leqslant |v|^\beta$ em $\mathbb{R}^N$. De fato,

- Se $x \in A_m$, então $w_m(x) \leqslant |w_m(x)| = |v(x)||v(x)|^{(\beta-1)} = |v(x)|^\beta$.
- Se $x \in B_m$, então $w_m(x) \leqslant |w_m(x)| = |mv(x)| < |v(x)|^{\beta-1}|v(x)| = |v(x)|^\beta$.

Como $|w_m| \leqslant |v|^\beta$ em $\mathbb{R}^N$ e $|w_m| = |v|^\beta$ em A_m, usando essas desigualdades em (2.52) deduzimos que

$$\begin{aligned}\left(\int_{A_m} |v|^{\beta 2^*} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{N-2}{N}} &= \left(\int_{A_m} |w_m|^{2^*} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{N-2}{N}} \\ &\leqslant S\beta^2 ||h||_{L^q(\mathbb{R}^N)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |w_m|^{2p} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant S\beta^2 ||h||_{L^q(\mathbb{R}^N)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2p\beta} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

Fazendo a passagem ao limite quando $m \to \infty$, obtemos $A_m \to \mathbb{R}^N$. E usando o Teorema (A.11) da Convergência Monótona juntamente com a desigualdade precedente, deduzimos que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{\beta 2^*} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{N-2}{N}} \leqslant S\beta^2 ||h||_{L^q(\mathbb{R}^N)} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{2p\beta} \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}},$$

ou seja,

$$||v||_{2^*\beta}^{2\beta} \leqslant S\beta^2 ||h||_{L^q(\mathbb{R}^N)} ||v||_{2p\beta}^{2\beta}.$$

Reescrevendo essa desigualdade, obtemos

$$||v||_{2^*\beta} \leqslant \beta^{\frac{1}{\beta}} (S||h||_{L^q(\mathbb{R}^N)})^{\frac{1}{2\beta}} ||v||_{2\beta p}. \tag{2.56}$$

Por hipótese, $2q > N$; e pela notação utilizada na desigualdade de Hölder acima, $1/q + 1/p = 1$. Logo, $p = q/(q-1) < N/(N-2)$. Dessa forma, podemos definir $\sigma := N/p(N-2) > 1$.

Agora começamos a aplicar o esquema de iteração de Moser. Quando $\beta = \sigma$, temos $2\beta p = 2p\frac{N}{p(N-2)} = 2^*$; substituindo em (2.56), resulta que

$$||v||_{2^*\sigma} \leqslant \sigma^{\frac{1}{\sigma}} (S||h||_{L^q(\mathbb{R}^N)})^{\frac{1}{2\sigma}} ||v||_{2^*}. \tag{2.57}$$

Quando $\beta = \sigma^2$, temos $2\beta p = 2p\frac{N^2}{p^2(N-2)^2} = 2^*\sigma$; substituindo em (2.56), resulta que

$$||v||_{2^*\sigma^2} \leqslant \sigma^{\frac{2}{\sigma^2}} (S||h||_{L^q(\mathbb{R}^N)})^{\frac{1}{2\sigma^2}} ||v||_{2^*\sigma}. \tag{2.58}$$

Dessa forma, combinando as desigualdades (2.57) e (2.58), obtemos

$$||v||_{2^*\sigma^2} \leqslant \sigma^{\left(\frac{1}{\sigma}+\frac{2}{\sigma^2}\right)} \left(S||h||_{L^q(\mathbb{R}^N)}\right)^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}\right)} ||v||_{2^*}.$$

Por iteração, quando $\beta = \sigma^j$, temos $2\beta p = 2p\frac{N^j}{p^j(N-2)^j} = 2^*\sigma^{j-1}$; substituindo em (2.56), resulta que

$$||v||_{2^*\sigma^j} \leqslant \sigma^{\left(\frac{1}{\sigma}+\frac{2}{\sigma^2}+\cdots+\frac{j}{\sigma^j}\right)}(S||h||_{L^q(\mathbb{R}^N)})^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}+\cdots+\frac{1}{\sigma^j}\right)}||v||_{2^*}. \tag{2.59}$$

Agora definimos $s_j = \frac{1}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^2}+\cdots+\frac{1}{\sigma^j}$ e $t_j = \frac{1}{\sigma}+\frac{2}{\sigma^2}+\cdots+\frac{j}{\sigma^j}$. Portanto,

$$\lim_{j\to+\infty} s_j = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma^j} = \frac{1}{(\sigma-1)} \qquad \text{e} \qquad \lim_{j\to+\infty} t_j = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{j}{\sigma^j} = \frac{\sigma}{(\sigma-1)^2}.$$

Finalmente, passando ao limite quando $j \to +\infty$ na desigualdade (2.59), obtemos

$$\begin{aligned} ||v||_\infty &= \lim_{j\to+\infty} ||v||_{2^*\sigma^j} \\ &\leqslant \sigma^{\frac{\sigma}{(\sigma-1)^2}}(S||h||_{L^q(\mathbb{R}^N)})^{\frac{1}{2(\sigma-1)}}||v||_{2^*} \\ &=: M||v||_{2^*}, \end{aligned}$$

em que $M = M(q, ||h||_{L^q(\mathbb{R}^N)})$. Como $\sigma = N/p(N-2)$ e $1/p + 1/q = 1$, obtemos $\sigma = N(q-1)/q(N-2)$. Isso conclui a demonstração da proposição. □

Observação 2.15. Notamos que a constante M obtida na proposição anterior não depende da função b.

Lema 2.16. *Para $R > 1$, qualquer solução fraca e positiva do problema (2.20) verifica a estimativa*

$$||u||_\infty \leqslant M(2SKd_\infty)^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração. Fixado $R > 1$, seja $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ uma solução positiva para o problema auxiliar (2.20). Agora, definimos a função $H\colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$H(x,t) := \begin{cases} f(t), & \text{se } |x| \leqslant R \text{ ou } Kf(t) \leqslant V(x)t, \\ 0, & \text{se } |x| > R \text{ e } Kf(t) > V(x)t. \end{cases}$$

Também definimos a função $b\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ por

$$b(x) := \begin{cases} V(x), & \text{se } |x| \leqslant R \text{ ou } Kf(u) \leqslant V(x)u, \\ (1-1/K)\,V(x), & \text{se } |x| > R \text{ e } Kf(u) > V(x)u. \end{cases}$$

Como por hipótese $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é solução fraca e positiva do problema auxiliar (2.20), pelas definições de H e de b deduzimos que u também é solução fraca do problema

$$-\Delta u + b(x)u = H(x,u) \qquad (x \in \mathbb{R}^N).$$

De fato, usando uma função teste $v \in E$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)uv \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} H(x,u)v \,\mathrm{d}x \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x + \int_{|x|\leqslant R} V(x)uv \,\mathrm{d}x \\
&\qquad + \left(1 - \frac{1}{K}\right) \int_{|x|>R} V(x)uv \,\mathrm{d}x - \int_{|x|\leqslant R} f(u)v \,\mathrm{d}x \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x + \int_{|x|\leqslant R} V(x)uv \,\mathrm{d}x + \int_{|x|>R} V(x)uv \,\mathrm{d}x \\
&\qquad - \frac{1}{K} \int_{|x|>R} V(x)uv \,\mathrm{d}x - \int_{|x|\leqslant R} f(u)v \,\mathrm{d}x \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)uv \,\mathrm{d}x - \frac{1}{K} \int_{|x|>R} V(x)uv \,\mathrm{d}x - \int_{|x|\leqslant R} f(u)v \,\mathrm{d}x \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)uv \,\mathrm{d}x - \int_{|x|>R} \tilde{f}(x,u)v \,\mathrm{d}x - \int_{|x|\leqslant R} f(u)v \,\mathrm{d}x\,,
\end{aligned}$$

em que na última igualdade usamos o fato de que $b(x) = (1 - 1/K)\, V(x)$ quando $Kf(u) > V(x)u$, juntamente com a definição de $\tilde{f}(x,u)$.

Utilizando agora a definição de $g(x,t)$ dada em (2.16), chegamos em

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} b(x)uv \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} H(x,u)v \,\mathrm{d}x \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)uv \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} g(x,u)v \,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Pela segunda desigualdade em (2.2), $|uf(u)| \leqslant c_0|u|^p$, e pela definição da função H, obtemos

$$|H(x,u)| \leqslant |f(u)| \leqslant c_0|u|^{p-1} = c_0|u|^{p-2}|u| =: h(x)|u|,$$

em que definimos a função $h\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ por $h(x) := c_0|u(x)|^{p-2}$.

Agora mostramos que $h \in L^q(\mathbb{R}^N)$ quando $q = 2^*/(p-2)$. De fato,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |h(x)|^q \,\mathrm{d}x \leqslant c_0^q \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{(p-2)q} \,\mathrm{d}x = c_0^q \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} \,\mathrm{d}x = c_0^q ||u||_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}^{2^*}. \tag{2.60}$$

Dessa forma, qualquer solução fraca e positiva $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ para o problema auxiliar (2.20) verifica as hipóteses da Proposição 2.14. Concluindo o argumento, da desigualdade de Sobolev obtemos

$$\begin{aligned}
||u||_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} &\leqslant S^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant S^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= S^{\frac{1}{2}} ||u||.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.12, $\|u\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leqslant (2SKd_\infty)^{\frac{1}{2}}$. Combinando essa desigualdade com (2.60),

$$\int_{\mathbb{R}^N} |h(x)|^q \,\mathrm{d}x \leqslant c_0^q (2SKd_\infty)^{\frac{2^*}{2}}.$$

Assim, $h \in L^q(\mathbb{R}^N)$, com $\|h\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leqslant c_0 (2SKd_\infty)^{\frac{2^*}{2q}} = c_0 (2SKd_\infty)^{\frac{p-2}{2}}$.

Finalmente, da Proposição (2.14), obtemos a estimativa

$$||u||_\infty \leqslant M||u||_{L^{2^*}} \leqslant M(2SKd_\infty)^{\frac{1}{2}},$$

o que conclui a demonstração do lema. $\square$

Observação 2.17. Da Proposição 2.14 e do Lema 2.16, observamos que a constante M depende somente de p, V_∞, θ e c_0.

Lema 2.18. *Para $R > 1$, qualquer solução fraca e positiva do problema auxiliar* (2.20) *verifica as desigualdades*

$$u(x) \leqslant \frac{R^{N-2}||u||_\infty}{|x|^{N-2}} \leqslant \frac{R^{N-2}M(2SKd_\infty)^{\frac{1}{2}}}{|x|^{N-2}} \qquad (\forall\ |x| \geqslant R).$$

Demonstração. Seja a função $v\colon \mathbb{R}^N \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$v(x) \coloneqq \frac{R^{N-2}M(2SKd_\infty)^{\frac{1}{2}}}{|x|^{N-2}}.$$

Essa função é infinitamente diferenciável fora da origem, $v \in C^\infty(\mathbb{R}^N \backslash \{0\})$; e v também é função harmônica. De fato, para $j \in \{1, 2, \ldots, N\}$ e para $x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} &= -(N-2)R^{N-2}M(2SKd_\infty)^{\frac{1}{2}} \frac{x_j}{|x|^N}; \\ \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_j^2} &= -(N-2)R^{N-2}M(2SKd_\infty)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{|x|^N} - \frac{N x_j^2}{|x|^{N+2}} \right). \end{aligned}$$

Dessa forma, para $x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ vale a igualdade

$$\Delta v(x) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^N -(N-2)R^{N-2}M(2SKd_\infty)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{|x|^N} - \frac{N x_j^2}{|x|^{N+2}} \right) = 0.$$

Do Lema 2.16 sabemos que $\|u\|_\infty \leqslant M(2SKd_\infty)^{\frac{1}{2}}$; portanto, se $|x| = R$, então $||u||_\infty \leqslant v(x)$. Dessa forma, pela própria definição de norma no L^∞, deduzimos que

$$u(x) \leqslant v(x) \qquad (\forall\ x \in \partial B_R).$$

Agora definimos a função $w\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ por

$$w(x) \coloneqq \begin{cases} 0, & \text{se } |x| \leqslant R, \\ (u-v)^+, & \text{se } |x| \geqslant R. \end{cases}$$

Dessa forma, $w \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$; além disso, $w \in E$, porque u, $v \in E$. Para completar a demonstração do lema, vamos mostrar que $(u-v)^+ = 0$ para $|x| \geqslant R$.

Como $u \leqslant v$ em ∂B_R, pela definição de w temos que $w(x) = 0$ para todo $x \in \partial B_R$ e $w \geqslant 0$.

Considerando w como função teste e usando a desigualdade (2.17), $g(x,t) \leqslant V(x)t/K$ para todo $|x| \geqslant R$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 \,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u-v)\cdot\nabla w \,\mathrm{d}x \\
&= \int_{|x|\geqslant R} (\nabla u\cdot\nabla w - \nabla v\cdot\nabla w)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{|x|\geqslant R} \nabla u\cdot\nabla w\,\mathrm{d}x - \int_{|x|\geqslant R} \nabla v\cdot\nabla w\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{|x|\geqslant R} (g(x,u)w - V(x)uw)\,\mathrm{d}x - \int_{|x|\geqslant R} \nabla v\cdot\nabla w\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_{|x|\geqslant R} \left(\frac{V(x)uw}{K} - V(x)uw\right)\mathrm{d}x - \int_{|x|\geqslant R} \nabla v\cdot\nabla w\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{1}{K} - 1\right)\int_{|x|\geqslant R} V(x)uw\,\mathrm{d}x - \int_{|x|\geqslant R} \nabla v\cdot\nabla w\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Usando o teorema de Green, obtemos

$$\int_{|x|\geqslant R} \nabla v\cdot\nabla w\,\mathrm{d}x = \int_{\partial B_R(0)} w(\sigma)\nabla v w\,\mathrm{d}x\,\sigma - \int_{|x|\geqslant R} w(x)\Delta v(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

E como v é uma função harmônica e já que $w = 0$ em ∂B_R, deduzimos que

$$\int_{|x|\geqslant R} \nabla v\cdot\nabla w\,\mathrm{d}x = 0.$$

Consequentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2\,\mathrm{d}x \leqslant \left(\frac{1}{K} - 1\right)\int_{|x|\geqslant R} V(x)uw\,\mathrm{d}x\,.$$

Por fim, como $K > 2$, segue-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2\,\mathrm{d}x \leqslant 0,$$

o que mostra que w é constante em $\mathbb{R}^N$. Entretanto, como $w(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ com $|x| \leqslant R$, segue-se que

$$w(x) = 0 \qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^N).$$

Portanto, $(u-v)^+ = 0$ para $|x| \geqslant R$ e, consequentemente, $u \leqslant v$ em $|x| \geqslant R$. Isso conclui a demonstração do lema. $\square$

2.5 Conclusão da demonstração do primeiro teorema

Para finalizar este capítulo, vamos mostrar que a solução do problema auxiliar (2.20) obtida anteriormente é uma solução do problema (2.1).

Demonstração do Teorema 1.3. Dos Lemas 2.9 e 2.11, sabemos que o problema (2.20) tem uma solução positiva u. Assim, para alcançar nosso objetivo é suficiente mostrar que u verifica a desigualdade

$$f(u) \leqslant \frac{V(x)}{K} u \qquad (\forall\, |x| \geqslant R). \tag{2.61}$$

Do Lema anterior e da primeira desigualdade dada em (2.2), obtemos

$$\frac{f(u)}{u} \leqslant c_0 |u|^{2^*-2} = c_0 |u|^{\frac{4}{N-2}} \leqslant c_0 (M(2SKd_\infty)^{\frac{1}{2}})^{\frac{4}{N-2}} \frac{R^4}{|x|^4} \qquad \forall\, |x| \geqslant R).$$

Agora definimos a constante

$$\Lambda^* := Kc_0 (M(2SKd_\infty)^{\frac{1}{2}})^{\frac{4}{N-2}}.$$

Considerando $\Lambda \geqslant \Lambda^*$, segue da hipótese (V_3) que

$$\frac{f(u)}{u} \leqslant c_0 (M(2SKd_\infty)^{\frac{1}{2}})^{\frac{4}{N-2}} \frac{R^4}{|x|^4} = \frac{\Lambda^*}{K} \frac{R^4}{|x|^4} \leqslant \frac{\Lambda}{K} \frac{R^4}{|x|^4} \leqslant \frac{V(x)}{K} \qquad \forall\, |x| \geqslant R).$$

Portanto, a demonstração do Teorema 1.3 está completa. □

Capítulo 3

Demonstração do segundo teorema

O resultado principal deste capítulo é o teorema de existência do artigo de Alves e Souto [3], intitulado *Existence of solutions for a class of nonlinear Schrödinger equations with potential vanishing at infinity.* Para melhor comodidade do leitor, repetimos as hipóteses sobre a não linearidade f, sobre o potencial V e sobre a função K, juntamente com alguns comentários e exemplos; também reenunciamos o segundo teorema. Em seguida, apresentamos a estrutura variacional do problema, incluindo a definição de um espaço de funções onde definimos o funcional de Euler-Lagrange. Também mostramos, sem usar a condição de Ambrosetti-Rabinowitz, que o funcional de energia associado tem a geometria do passo da montanha. A etapa seguinte consiste em demonstrar uma desigualdade do tipo de Hardy com o intuito de contornar a dificuldade causada pela ausência de compacidade das imersões de Sobolev. Finalmente, concluímos que existe uma solução fraca para o problema.

3.1 Estrutura variacional do problem semilinear

Nosso objetivo neste capítulo é estudar a existência de solução fraca para o problema elíptico semilinear

$$\begin{cases} -\Delta u + V(x)u = K(x)f(u) & (x \in \mathbb{R}^N), \\ u(x) > 0 & (x \in \mathbb{R}^N), \\ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N), \end{cases} \tag{3.1}$$

em que $N \geqslant 3$, o espaço de funções $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ já foi definido previamente nos capítulos 1 e 2 e $V, K \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas. Supomos inicialmente que o potencial $V \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e a função $K \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são funções não negativas e verificam as hipóteses seguintes.

(K_1) $V(x) > 0$ e $K(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $K \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

(K_2) Se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ é uma sequência de conjuntos de Borel tais que $|A_n| \leqslant R$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para algum $R > 0$, então

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{A_n \cap B_r^c} K(x)dx = 0 \quad \text{uniformemente em } n \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Lembramos que em um espaço topológico, um conjunto de Borel é um conjunto que pode ser formado por conjuntos abertos através de uniões enumeráveis e interseções enumeráveis e de conjuntos complementares.

Além disso, uma das condições a seguir é válida:

(K_3) $K/V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ ou

(K_4) existe $p \in (2, 2^*)$ tal que $K(x)/[V(x)]^{(2^*-p)/(2^*-2)} \to 0$ quando $|x| \to +\infty$.

Assim como no capítulo 2, para estudar o problema (3.1) também consideramos o espaço de Hilbert E definido por

$$E \coloneqq \left\{ u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \colon \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u^2 \, \mathrm{d}x < +\infty \right\} \tag{3.3}$$

munido do produto escalar $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)_E \colon D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \times D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dado por

$$(u|v)_E \coloneqq \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u(x) v(x) \, \mathrm{d}x$$

e da correspondente norma

$$\|u\|_E \coloneqq \sqrt{(u|u)_E} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) |u(x)|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2}.$$

Também denotamos essa norma simplesmente por $\|u\| = \|u\|_E$ sem o subscrito.

Observação 3.1. 1. Como mencionamos no histórico do capítulo 1, seção 1.4, Ambrosetti, Felli e Malchiodi [7] estudaram uma variante do problema (3.1) com uma não linearidade do tipo potência pura e subcrítica, $f(s) = s^{p-1}$ com $3 < p < 2^* = 2N/(N-2)$, incluindo funções $V, K \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ diferenciáveis e para as quais existem constantes reais positivas $\tau, \xi, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}_+$ tais que

$$\frac{a_1}{1+|x|^\tau} \leqslant V(x) \leqslant a_2 \qquad \text{e} \qquad 0 < K(x) \leqslant \frac{a_3}{1+|x|^\xi} \qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^N). \tag{3.4}$$

Adicionalmente, as constantes $\tau, \xi \in \mathbb{R}_+$ verificam as desigualdades $2^* - 4\xi/[\tau(N-2)] < p$ se $0 < \xi < \tau$ ou $p > 1$ se $\xi \geqslant \tau$.

A condição (3.4) tem grande interesse na teoria de equações elípticas semilineares, já que pode ser usada para demonstrar que o espaço de Hilbert E está compactamente imerso no espaço de Lebesgue com peso

$$L^p_K(\mathbb{R}^N) \coloneqq \left\{ u \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \;\middle|\; u \text{ é mensurável e } \int_{\mathbb{R}^N} K(x) |u(x)|^p \, \mathrm{d}x \right\},$$

isto é $E \hookrightarrow L^p_K(\mathbb{R}^N)$. Evidentemente, o interesse dessas imersões é que permitem o uso de métodos variacionais para demonstrar a existência de soluções para problemas elípticos semilineares.

2. As hipóteses aqui consideradas para o problema (3.1) são mais gerais do que a condição (3.4); em outros termos, as desigualdades em (3.4) podem ser compreeendidas como um caso particular das hipóteses (K_1), (K_2) juntamente com (K_3) ou (K_4).

3. A hipótese (K_1) é mais fraca do que qualquer uma das hipóteses seguintes:

(a) Existem constantes reais positivas $r, \rho \in \mathbb{R}_+$ tais que $r \geqslant 1$, $\rho \geqslant 0$ e $K \in L^r(\mathbb{R} \backslash B_\rho(0))$.

(b) $K(x) \to 0$ quando $|x| \to +\infty$.

(c) $K(x) = K_1(x) + K_2(x)$ em que K_1 e K_2 verificam as condições ((a)) e ((b)), respectivamente.

4. Se as funções $V, K \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ verificam a condição (3.4), então a função K verifica as hipóteses (K_1), (K_2) e (K_3) ou (K_1), (K_2) e (K_4). Entretanto, existem funções que V e K que verificam esses dois grupos de hipóteses mas que não verificam a condição (3.4). Por exemplo, seja $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ uma sequência disjunta de bolas abertas contradas em $\xi_n = (n, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^N$; e seja $K_3 \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uma função tal que $K_3(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N \backslash \bigcup_{j=n}^{\infty} B_j$ e $K_3(\xi_n) = 1$ e $\int_{B_n} K_3(x)\,\mathrm{d}x = 1/2^n$. Então as funções definidas por $V(x) = K(x) = K_3(x) + 1/\ln(2 + |x|)$ verificam as hipóteses (K_1), (K_2) e (K_3) ou (K_1), (K_2) e (K_4) mas não verificam a condição (3.4). O mesmo pode ser afirmado sobre as funções definidas por $K(x) = K_3(x) + 1/\ln(2 + |x|)$ e $V(x) = K_3(x) + (1/\ln(2 + |x|))^{(2^*-2)/(2^*-p)}$ para $2 < p < w^*$.

5. Exemplos de funções $V, K \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ que verificam as hipóteses (K_1), (K_2) e (K_3) como também as hipóteses (K_1), (K_2) e (K_4) incluem uma função potencial $V(x) = V$, em que $V \in \mathbb{R}_+$ é uma constante positiva e a função definida por

$$K(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| \leqslant 1, \\ e^{(1-|x|)}, & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

Com relação à não linearidade $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, supomos que essa função possui um comportamento quase crítico e verifica as hipóteses seguintes.

(f_4) $f(s) = 0$ para todo $s \leqslant 0$.

(f_5) $\limsup_{s \to 0} f(s)/s = 0$ se vale (K_3) ou $\limsup_{s \to 0^+} |f(s)|/s^{p-1} < +\infty$ se vale (K_4).

(f_6) f possui *crescimento quase crítico*, isto é, $\limsup_{s \to +\infty} f(s)/s^{2^*-1} = 0$ em que $2^* = 2N/(N-2)$ é o expoente crítico de Sobolev.

(f_7) $f(s)/s$ é função não decrescente em $\mathbb{R}_+$ e sua primitiva F é *superquadrática no infinito*, isto é, $\lim_{s \to +\infty} F(s)/s^2 = +\infty$.

Observação 3.2. 1. A hipótese (f_4) é comumente utilizada quando se pretende demonstrar a existência de soluções positivas para problemas elípticos semilineares.

2. Em relação à primeira parte da hipótese (f_5), existe $c_1 \in \mathbb{R}_+$ tal que $|f(s)| \leqslant c_1|s|$ para s próximo a zero; e em relação à segunda parte da hipótese (f_5), existe $c_2 \in \mathbb{R}_+$ tal que $|f(s)| \leqslant c_2|s|^{p-1} \leqslant c_2|s|$ para s próximo a zero. Portanto, definimos $c \coloneqq \max\{c_1, c_2\}$ e obtemos, para s suficientemente pequeno,

$$|f(s)| \leqslant c|s|. \tag{3.5}$$

3. A hipótese (f_7) é mais fraca que a condição de Ambrosetti-Rabinowitz dada por (f_3). Como já vimos pelo item 2 da Observação 2.1, a condição de Ambrosetti-Rabinowitz é muito importante para assegurar que o funcional de Euler-Lagrange associado ao problema (1.25) tem a geometria do passo da montanha, assim como também

é usada para garantir que a sequência de Palais-Smale associada a esse funcional é limitada. Entretanto, a hipótese (f_3) é muito restritiva; por isso, Alves e Souto substituíram a hipótese (f_3) pela hipótese (f_7).

A seguir apresentamos dois exemplos de não linearidades que verificam as hipóteses (f_4), (f_5), (f_6) e (f_7). Sejam as funções $f_1, f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

a) $f_1(s) = (s^+)$ em que $s^+ = \max\{s, 0\}$;

b) $f_2(s) = \log 2(s^+)^p$ se $s \leqslant 1$ e $f_2(s) = \log(1+s)s$ se $s > 1$. em que $2 < p < 2^*$. Notamos que a não linearidade f_2 não verifica a condição de Ambrosetti-Rabinowitz.

Com essas hipóteses, estamos preparados para demonstrar o segundo teorema desta dissertação, que reenunciamos a seguir.

Teorema 1.4. *Sejam válidas as hipóteses (K_1), (K_2) e (K_3) ou (K_1), (K_2) e (K_4) sobre as funções $V, K \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, como também as hipóteses (f_4), (f_5), (f_6) e (f_7) sobre a função $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Então o problema (3.1) possui solução positiva do tipo* ground state, *isto é, uma solução positiva $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ com energia igual ao nível do passo da montanha associado ao funcional de energia.*

Nosso objetivo é definir o conceito de solução fraca para o problema (3.1) e demonstrar a existência dessa solução. Com este intuito, consideramos uma função teste $v \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$. Multiplicamos ambos os lados da equação diferencial do problema (3.1) por v,

$$-\Delta u(x)v(x) + V(x)u(x)v(x) = K(x)f(u(x))v(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^N)$$

e integramos em todo o espaço $\mathbb{R}^N$,

$$-\int_{\mathbb{R}^N} \Delta u(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} K(x)f(u(x))v(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Aplicando Teorema A.7 de Green, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,\mathrm{d}x &+ \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} K(x)f(u(x))v(x)\,\mathrm{d}x \qquad (v \in C_0^1(\mathbb{R}^N))\end{aligned}$$

em que o termo de fronteira não está presente porque a função teste se anula no exterior de algum conjunto compacto.

O problema (3.1) pode então ser reformulado como um problema de minimização para o funcional $J \colon E \to \mathbb{R}$ definido por

$$J(u) \coloneqq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u(x)|^2\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(u(x))\,\mathrm{d}x\,. \tag{3.6}$$

De fato, seguindo os mesmos passos da demonstração do Lema 2.4 é possível mostrar que esse funcional é continuamente Fréchet diferenciável, $J \in C^1(E)$, e que sua derivada em $u \in E$ aplicada ao elemento $v \in E$ é dada por

$$\begin{aligned}J'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,\mathrm{d}x &+ \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} K(x)f(u(x))v(x)\,\mathrm{d}x \qquad (\forall v \in E).\end{aligned}$$

Portanto, essa equação nos permite caracterizar as soluções fracas do problema elíptico semilinear (3.1) como pontos críticos do funcional J de Euler-Lagrange.

Observação 3.3. Para simplificar as notações e seguindo a prática comum, de agora em diante escrevemos u no lugar de $u(x)$, $f(u)$ no lugar de $f(u(x))$, etc. Também denotamos por $C \in \mathbb{R}_+$ uma constante real positiva, que pode ter valores diferentes de uma passagem para outra.

3.2 A geometria do passo da montanha

Como o problem (3.1) envolve todo o espaço $\mathbb{R}^N$, existe a perda de compacidade das imersões de Sobolev e isso causa uma série de dificuldades para a demonstração do resultado de existência de solução fraca. Uma das formas de contornar essas dificuldades é tentar identificar um possível nível de energia do funcional de Euler-Lagrange, abaixo do qual é possível recuperar a compacidade das sequências de Cerami; veja a definição 3.5.

O próximo resultado garante que o funcional J tem a geometria do passo da montanha; veja o Teorema A.23.

Lema 3.4. *O funcional $J\colon E \to \mathbb{R}$ definido em (3.6) verifica a geometria do teorema do passo da montanha. Mais precisamente, as propriedades abaixo são válidas.*

1. *Existem $r \in \mathbb{R}_+$ e $\mu \in \mathbb{R}_+$ tais que $J(u) \geqslant \mu$ para toda função $u \in E$ com $\|u\| = r$;*
2. *Existe $e_2 \in E \backslash \{0\}$ tal que $J(e_2) < 0$.*

Demonstração. 1. Usando a hipótese (f_6), deduzimos que existe uma constante positiva $C \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$F(s) \leqslant C|s|^{2^*} \qquad (\forall\, s \in \mathbb{R}_+).$$

Usando essa desigualdade conjuntamente com a hipótese (K_1), obtemos

$$K(x)F(s) \leqslant C|s|^{2^*} \qquad (\forall\, s \in \mathbb{R}_+) \quad (\text{q.t.p. } x \in \mathbb{R}^N), \tag{3.7}$$

e aplicando a desigualdade de Sobolev,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} \,\mathrm{d}x\right) \leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2^*}{2}}. \tag{3.8}$$

Assim, por (3.7) e (3.8), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(u)\,\mathrm{d}x &\leqslant C\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2^*}{2}} \\
&\leqslant C\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2^*}{2}} \\
&\leqslant C\|u\|^{2^*}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Pela definição do funcional J dada em (3.6) e pela desigualdade (3.9), deduzimos que

$$J(u) \geqslant \frac{1}{2}\|u\|^2 - C\|u\|^{2^*}$$

Assim, considerando $\|u\|$ suficientemente pequeno, segue-se que a primeira parcela do lado direito da desigualdade precedente com o fator $\|u\|^2$ domina a segunda parcela com o fator $\|u\|^{2^*}$. Por esta razão, obtemos a existência de $r_0 \in \mathbb{R}_+$ e de $\mu_0 \in \mathbb{R}^+$ tais que $I_\infty(u) \geqslant \mu_0$ para toda função $u \in E$ com $\|u\| = r_0$. Com isso concluímos a demonstração do primeiro item.

2. Da hipótese (f_7) deduzimos que para todo número real $M \in \mathbb{R}_+$, existe um número real $s_M \in \mathbb{R}_+$ tal que $F(s) \geqslant Ms^2$ para todo $s > s_M$. Por outro lado, definindo $C_M \coloneqq \sup_{s\in[0,s_M]} F(s)$, temos que $C_M \in \mathbb{R}$. Combinando essas duas desigualdades, deduzimos que $F(s) \geqslant Ms^2 - C_M$ para todo $s \in \mathbb{R}_+^*$.

$$F(s) \geqslant Ms^2 - C_M \qquad (\forall\, s \in \mathbb{R}_+^*). \tag{3.10}$$

Fixando uma função $u \in E\backslash\{0\}$ e usando (3.10), obtemos

$$\begin{aligned} J(tu) &= \frac{1}{2}|t|^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}|t|^2 \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(tu)\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{1}{2}|t|^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}|t|^2 \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 \,\mathrm{d}x - |t|^2 \int_{\mathbb{R}^N} K(x)M|u|^2 \,\mathrm{d}x \\ &= |t|^2\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}|t|^2 \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 \,\mathrm{d}x - |t|^2 M \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|u|^2 \,\mathrm{d}x\,. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Na argumentação acima, a constante $M \in \mathbb{R}_+$ é fixa mas arbitrária. Fazendo M suficientemente grande, deduzimos que existe $t_u \in \mathbb{R}^+$ tal que, definindo $e_2 = t_u u$, obtemos $\|e_2\| \geqslant r$ e $I_\infty(e_2) < 0$. Assim, concluímos a demonstração do segundo item. □

A seguir definimos os conceitos de sequência de Cerami e de condição de Cerami.

Definição 3.5. Dizemos que uma sequência de funções $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ é uma *sequência de Cerami* para o funcional J no nível c se

$$J(u_n) \to c \qquad \text{e} \qquad (1 + \|u_n\|)J'(u_n) \to 0$$

quando $n \to +\infty$. E dizemos que um funcional $J\colon E \to \mathbb{R}$ verifica a *condição de Cerami* no nível c, (ou simplesmente: J verifia a condição $(C)_c$) se toda sequência de Cerami para J no nível c tem uma subsequência $(u_{n_j})_{j\in\mathbb{N}} \subset E$ fortemente convergente em E, $u_{n_j} \to u \in E$ quando $j \to +\infty$. Além disso, dizemos simplesmente que J verifica a condição de Cerami se J verifica a condição de Cerami no nível c para todo $c \in \mathbb{R}$.

Observação 3.6. A condição de Cerami é mais fraca do que a condição de Palais-Smale; veja a Definição 2.8. Entretanto, é possível mostrar que se $J \in C^1(E)$ é um funcional limitado inferiormente, então essas duas condições são de fato equivalentes. A condição de Cerami é uma condição de compacidade relativamente forte; por exemplo, as funções constantes não verificam essa condição.

O Lema 3.4 garante que J satisfaz a geometria do teorema do passo da montanha. Consequentemente, existe uma sequência de Cerami $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ para esse funcional no nível de minimax c, isto é, uma sequência tal que

$$J(u_n) \to c \qquad \text{e} \qquad (1 + \|u_n\|)\|J'(u_n)\| \to 0. \tag{3.12}$$

Lembramos que $c \in \mathbb{R}_+$ é o nível do passo da montanha associado a J (nível de minimax), isto é,

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t))$$

em que

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E) \colon \gamma(0) = 0 \ \text{ e } \ \gamma(1) = e_2\},$$

é a classe de caminhos unindo a origem ao elemento $e_2 \in E\backslash\{0\}$, verificando a desigualdade $J(e_2) < 0$ e determinado no Lema 3.4.

Observação 3.7. Em decorrência da hipótese (f_4), sem perda de generalidade podemos considerar as sequências de Cerami $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ formadas por funções não negativas.

3.3 Resultados de compacidade

Nosso objetivo nesta seção é contornar a perda de compacidade do problema (3.1). Para isso, mostramos um resultado de imersão compacta. Alves e Souto referem-se a essa proposição como desigualdade de Hardy.

Proposição 3.8 (Desigualdade de Hardy)**.** *Suponhamos que sejam válidas as hipóteses (K_1) e (K_2) sobre as funções $V, K \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.*

1. *Se vale (K_3) então $E \hookrightarrow L^q_K(\mathbb{R}^N)$ é imersão compacta para todo $q \in (2, 2^*)$*
2. *Se vale (K_4) então $E \hookrightarrow L^q_K(\mathbb{R}^N)$ é imersão compacta para algum $p \in (2, 2^*)$*

Demonstração. 1. Para demonstrar o primeiro item supomos que valem as hipóteses (K_1), (K_2) e (K_3). Notamos que, dado $\epsilon > 0$, como $2 < q < 2^*$ podemos encontrar $c \in \mathbb{R}$ e $s_0 \in \mathbb{R}_+$ tais que

$$|s|^q \leqslant \epsilon|s|^2, \text{ para } 0 \leqslant s \leqslant s_0,$$

de modo que, usando o fato de $K/V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, dado por (K_3), temos

$$K(x)|s|^q \leqslant \epsilon c V(x)|s|^2 \qquad (0 \leqslant s \leqslant s_0)\ (\forall\, x \in \mathbb{R}^N).$$

Já que $2 < q < 2^*$, dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar $s_1 > 1$ tal que

$$|s|^q \leqslant \epsilon|s|^{2^*} \qquad (\forall\, s \geqslant s_1),$$

de modo que, usando o item (K_1), temos

$$K(x)|s|^q \leqslant \epsilon c|s|^{2^*} \qquad (\forall\, s \geqslant s_1).$$

Pela continuidade das funções envolvidas, temos que existe $c > 0$ tal que

$$K(x)|s|^q \leqslant \epsilon c K(x)\chi_{[s_0,s_1]}(|s|)|s|^{2^*} \qquad (s_0 \leqslant s \leqslant s_1)\ (x \in \mathbb{R}^N).$$

Assim, para um dado $\epsilon > 0$, existem $C > 0$ e $0 < s_0 < s_1$ tais que

$$K(x)|s|^q \leqslant \epsilon C(V(x)|s|^2 + |s|^{2^*}) + CK(x)\chi_{[s_0,s_1]}(|s|)|s|^{2^*}. \tag{3.13}$$

Agora devemos fazer uma estimativa para a integral $\int_{B_r^c} K(x)|u|^q\,\mathrm{d}x$ no complementar da bola $B_r \subset \mathbb{R}^N$ de raio r centrada na origem. Com esse intuito, integrando a desigualdade (3.13) em B_r^c, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{B_r^c} K(x)|u|^q\,\mathrm{d}x &\leqslant \epsilon C \int_{B_r^c} (V(x)|u|^2 + |u|^{2^*})\,\mathrm{d}x + C\int_{B_r^c} K(x)\chi_{[s_0,s_1]}(|u|)|u|^{2^*}\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \epsilon C \int_{\mathbb{R}^N} \left(V(x)|u|^2 + |u|^{2^*}\right)\mathrm{d}x + C\int_{B_r^c} K(x)\chi_{[s_0,s_1]}(|u|)|u|^{2^*}\,\mathrm{d}x \\
&= \epsilon C Q(u) + C\int_{B_r^c} K(x)\chi_{[s_0,s_1]}(|u|)|u|^{2^*}\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \epsilon C Q(u) + C\int_{A\cap B_r^c} K(x)\,\mathrm{d}x \qquad (\forall\, u \in E),
\end{aligned} \tag{3.14}$$

em que

$$A \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^N \colon s_0 \leqslant |u(x)| \leqslant s_1\} \qquad \text{e} \qquad Q(u) \coloneqq \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}\,\mathrm{d}x\,.$$

Se $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ é uma sequência tal que $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em E quando $n \to +\infty$, então essa sequência é limitada em E, já que todo espaço de Hilbert é reflexivo. Portanto, existe uma constante $C \in \mathbb{R}_+$ tal que $\|v_n\| \leqslant C$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Da desigualdade de Sobolev, $\|v_n\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)} \leqslant S\|\nabla v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}$, temos que

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2^*}} &\leqslant S\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant S\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)v_n^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant SC.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*}\,\mathrm{d}x \leqslant (SC)^{2*}.$$

Agora definimos $M_1 \coloneqq \max\{(SC)^{2^*}, C^2\}$; dessa forma,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|v_n|^2\,\mathrm{d}x \leqslant M_1 \qquad \text{e} \qquad \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*}\,\mathrm{d}x \leqslant M_1 \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}),$$

e isso implica que a sequência $(Q(v_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é limitada.

Por outro lado, definimos a sequência de conjuntos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ por

$$A_n \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^N \colon s_0 \leqslant |v_n(x)| \leqslant s_1\}.$$

Dessa definição e da desigualdade $\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} \,\mathrm{d}x \leqslant M_1$, temos que

$$s_0^{2^*} \leqslant |v_n|^{2^*} \leqslant s_1^{2^*}.$$

Integrando a desigualdade precedente no conjunto A_n, obtemos

$$\int_{A_n} s_0^{2^*} \,\mathrm{d}x \leqslant \int_{A_n} |v_n|^{2^*} \,\mathrm{d}x \leqslant M_1.$$

Consequentemente,

$$s_0^{2^*} |A_n| \leqslant \int_{A_n} |v_n|^{2^*} \,\mathrm{d}x \leqslant M_1 \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}),$$

o que mostra que $\sup_{n\in\mathbb{N}} |A_n| < +\infty$. Portanto, pela hipótese (K_2) deduzimos que existe $r > 0$ tal que

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{A_n \cap B_r^c} K(x) \,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{uniformemente em } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, pela definição de convergência uniforme,

$$\int_{A_n \cap B_r^c} K(x) \,\mathrm{d}x < \frac{\epsilon}{C} \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}). \tag{3.15}$$

Sendo assim, (3.14) e (3.15) implicam que

$$\begin{aligned}
&\int_{B_r^c} K(x)|v_n|^q \,\mathrm{d}x \\
&\qquad \leqslant \epsilon C Q(v_n) + C \int_{A_n \cap B_r^c} K(x) \,\mathrm{d}x \\
&\qquad = \epsilon C \left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|v_n|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} \,\mathrm{d}x \right) + C \int_{A_n \cap B_r^c} K(x) \,\mathrm{d}x \\
&\qquad \leqslant \epsilon C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|v_n|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} \,\mathrm{d}x \right) + C \int_{A_n \cap B_r^c} K(x) \,\mathrm{d}x \\
&\qquad \leqslant 2\epsilon C M_1 + C \int_{A_n \cap B_r^c} K(x) \,\mathrm{d}x \\
&\qquad < 2\epsilon C M_1 + C \frac{\epsilon}{C} \\
&\qquad = \epsilon (2 C M_1 + 1).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Usando a desigualdade (3.16) e o fato de que $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ é arbitrário deduzimos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_r^c} K(x)|v_n|^q \,\mathrm{d}x = 0. \tag{3.17}$$

Agora devemos fazer uma estimativa para a integral $\int_{B_r} K(x)|v_n|^q \,\mathrm{d}x$ na bola $B_r \subset \mathbb{R}^N$ de raio r centrada na origem. Como $E(B_r) \subset D^{1,2}(B_r)$ e já que $D^{1,2}(B_r) \hookrightarrow L^q(B_r)$ é uma imersão compacta para todo $q \in (2, 2^*)$, então a imersão $E(B_r) \hookrightarrow L^q(B_r)$ é compacta. Assim, se $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $E(B_r)$ quando $n \to +\infty$, afirmamos que

$v_n \to v$ fortemente em $L^q(B_r)$, possivelmente após passagem a uma subsequência, que sempre denotamos da mesma forma. Naturalmente, com a notação $E(B_r)$ indicamos o conjunto das funções do espaço E com domínio na bola B_r; analogamente para os outros espaços.

Pelo Teorema A.13, segue-se que

$$v_n(x) \to v(x) \quad \text{q.t.p. } B_r;$$

além disso, pelo mesmo teorema, existe $h \in L^q(B_r)$ tal que

$$|v_n(x)| \leqslant h(x) \quad \text{q.t.p. } B_r.$$

Dessa forma, pela hipótese (K_1) e pelo fato de K ser contínua, deduzimos que

$$K(x)v_n(x) \to K(x)v(x) \quad \text{q.t.p. } B_r$$

e que

$$K(x)|v_n(x)|^q \leqslant K(x)h(x)^q \quad \text{q.t.p. } B_r.$$

Com base nesses fatos podemos aplicar o Teorema A.11 da Convergência Dominada para calcular

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_r} K(x)|v_n|^q \,\mathrm{d}x = \int_{B_r} K(x)|v|^q \,\mathrm{d}x\,. \tag{3.18}$$

Portanto, a estimativa (3.17) e o limite (3.18) implicam que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|v_n|^q \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|v|^q \,\mathrm{d}x\,.$$

Consequentemente, $v_n \to v$ fortemente em $L^q_K(\mathbb{R}^N)$ para todo $q \in (2, 2^*)$ e, portanto, $E \hookrightarrow L^q_K(\mathbb{R}^N)$ é uma imersão compacta para todo $q \in (2, 2^*)$.

2. Para demonstrar o segundo item supomos que valem as hipóteses (K_1), (K_2) e (K_4). Começamos observando que para cada $x \in \mathbb{R}^N$ fixado, a função $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(s) = V(x)s^{2-p} + s^{2^*-p}$$

tem valor mínimo dado por

$$\min_{s\in\mathbb{R}_+} g(s) = \left(\frac{2^*-2}{2^*-p}\right)\left(\frac{p-2}{2^*-p}\right)^{\frac{2-p}{2^*-2}} [V(x)]^{\frac{2^*-p}{2^*-2}} := C_p\,[V(x)]^{\frac{2^*-p}{2^*-2}}\,.$$

Consequentemente,

$$C_pV(x)^{\frac{2^*-p}{2^*-2}} \leqslant V(x)s^{2-p} + s^{2^*-p} \qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^N)\ (\forall s \in \mathbb{R}_+).$$

Agora vamos fazer uma estimativa para a integral $\int_{B_r^c} K(x)|v_n|^p \,\mathrm{d}x$ no complementar de uma bola $B_r \subset \mathbb{R}^N$ cujo raio definimos a seguir.

Combinando a desigualdade precedente com a hipótese (K_4), deduzimos que dado $\epsilon \in (0, C_p)$, existe $r > 0$ suficientemente grande tal que, pela definição de limite, $K(x)/V(x)^{\frac{2^*-p}{2^*-2}} \leqslant \epsilon$. Assim,

$$\frac{K(x)}{[V(x)]^{\frac{2^*-p}{2^*-2}}} C_p \, [V(x)]^{\frac{2^*-p}{2^*-2}} \leqslant \epsilon(V(x)|s|^{2-p} + |s|^{2^*-p}),$$

o que implica que

$$K(x)C_p|s|^p \leqslant \epsilon(V(x)|s|^2 + |s|^{2^*}).$$

Portanto, denotando $\tilde{\epsilon} = \epsilon/C_p$ obtemos

$$K(x)|s|^p \leqslant \tilde{\epsilon}(V(x)|s|^2 + |s|^{2^*}) \qquad (\forall\, s \in \mathbb{R}) \; (\forall\, |x| \geqslant r). \tag{3.19}$$

E integrando essa desigualdade no complementar da bola de raio r centrada na origem, temos que

$$\int_{B_r^c} K(x)|u|^p \,\mathrm{d}x \leqslant \tilde{\epsilon} \left(\int_{B_r^c} V(x)|u|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{B_r^c} |u|^{2^*} \,\mathrm{d}x \right) \qquad (\forall\, u \in E). \tag{3.20}$$

Se $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ é uma sequência tal que $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em E quando $n \to +\infty$, então essa sequência é limitada em E, ou seja, existe $C > 0$ tal que $\|v_n\| \leqslant C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Da desigualdade de Sobolev e da desigualdade anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2^*}} &\leqslant S \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant S \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) v_n^2) \,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant SC.
\end{aligned}$$

Assim, $\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} \,\mathrm{d}x \leqslant (SC)^{2*}$. Agora definimos $M_1 \coloneqq \max\{(SC)^{2^*}, C^2\}$; portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|v_n|^2 \,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|v_n|^2 \,\mathrm{d}x \leqslant M_1 \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N})$$

e também

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} \,\mathrm{d}x \leqslant M_1 \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}).$$

Combinando essas duas desigualdades com (3.20), temos que

$$\int_{B_r^c} K(x)|v_n|^p \,\mathrm{d}x \leqslant 2\tilde{\epsilon} M_1 \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}). \tag{3.21}$$

Usando a desigualdade (3.21) e o fato de que $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ é arbitrário, deduzimos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_r^c} K(x)|v_n|^p \,\mathrm{d}x = 0. \tag{3.22}$$

Agora devemos fazer uma estimativa para a integral $\int_{B_r} K(x)|v_n|^p \, dx$ na bola $B_r \subset \mathbb{R}^N$. Como $E(B_r) \subset D^{1,2}(B_r)$ e já que $D^{1,2}(B_r) \hookrightarrow L^p(B_r)$ é uma imersão compacta, para algum $p \in (2, 2^*)$, então $E(B_r)$ está imerso compactamente em $L^p(B_r)$. Assim, se $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em $E(B_r)$ quando $n \to +\infty$, afirmamos que $v_n \to v$ fortemente em $L^p(B_r)$, possivelmente após passagem a uma subsequência, que sempre denotamos da mesma forma.

De forma análoga ao que fizemos no primeiro item desta proposição, podemos aplicar o Teorema A.13 para obter subsequências que convergem em quase todo ponto e também para determinar uma função integrável que domina as funções da sequência. Pelo Teorema A.11 da Convergência Dominada deduzimos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_r} K(x)|v_n|^p \, dx = \int_{B_r} K(x)|v|^p \, dx \,. \tag{3.23}$$

Portanto, a estimativa (3.22) e o limite (3.23) implicam que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|v_n|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|v|^p \, dx \,.$$

Consequentemente, $v_n \to v$ fortemente em $L^p_K(\mathbb{R}^N)$ para algum $p \in (2, 2^*)$ e, finalmente, deduzimos que $E \hookrightarrow L^p_K(\mathbb{R}^N)$ é uma imersão compacta para algum $p \in (2, 2^*)$. □

3.4 A limitação das sequências de Cerami

O próximo lema é um passo importante para provar que as sequências de Cerami obtidas em (3.12) são limitadas.

Lema 3.9. *Suponhamos que as hipóteses (K_1), (K_2), (K_3) ou (K_1), (K_2), (K_4) sobre as funções $V, K \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sejam válidas; suponhamos também que valem as hipóteses (f_4), (f_5), (f_6) e (f_7) sobre a não linearidade $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Seja $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ uma sequência tal que $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em E quando $n \to +\infty$. Então*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(v_n) \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(v) \, dx \tag{3.24}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} K(x)f(v_n)v_n \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} K(x)f(v)v \, dx \,. \tag{3.25}$$

Demonstração. Demonstramos apenas o limite dado pela equação (3.24), pois a demonstração para o limite (3.25) é similar. A demonstração será feita em duas partes. Primeiramente consideramos o grupo de hipóteses que inclui (K_3) e depois o que inclui (K_4).

1. Suponhamos que as hipóteses (K_1), (K_2) e (K_3) sejam válidas. Usando a hipótese (f_5), deduzimos que existem $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ e $s_0 \in \mathbb{R}_+$ tais que

$$F(s) \leqslant \epsilon |s|^2 \qquad (\forall\, s \in [0, s_0]), \tag{3.26}$$

de modo que, usando (K_3), existe uma constante $c \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$K(x)F(s) \leqslant \epsilon c V(x)|s|^2 \qquad (\forall\, s \in [0, s_0]) \text{ (q.t.p. } x \in \mathbb{R}^N).$$

Pela hipótese (f_6), existem $\epsilon > 0$ e $s_1 > s_0$ tais que

$$F(s) \leqslant \epsilon |s|^{2^*} \qquad (s \geqslant s_1), \tag{3.27}$$

de modo que, usando (K_1), obtemos

$$K(x)F(s) \leqslant \epsilon c|s|^{2^*} \qquad (\forall\ s \geqslant s_1)\ (x \in \mathbb{R}^N).$$

Pela continuidade da função f, existe $c > 0$ tal que

$$K(x)F(s) \leqslant K(x)|s|^q \qquad (\forall\ s_0 \leqslant s \leqslant s_1)\ (x \in \mathbb{R}^N). \tag{3.28}$$

Combinando (3.26), (3.27) e (3.28), obtemos

$$|K(x)F(s)| \leqslant \epsilon C(V(x)|s|^2 + |s|^{2^*}) + K(x)|s|^q \qquad (\forall\ s \in \mathbb{R}). \tag{3.29}$$

Como $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em E quando $n \to +\infty$, então a sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ é limitada em E; portanto, existe $M_1 \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|v_n|^2 \,\mathrm{d}x \leqslant M_1 \qquad \text{e} \qquad \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*} \,\mathrm{d}x \leqslant M_1. \tag{3.30}$$

Observamos que o argumento para determinar a constante $M_1 \in \mathbb{R}_+$ usada logo acima é análogo ao apresentado na demonstração da Proposição 3.8. Por essa mesma proposição também deduzimos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x)|v_n|^q \,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N} K(x)|v|^q \,\mathrm{d}x \qquad (n \to +\infty).$$

Assim, existe $r \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$\int_{B_r^c} K(x)|v_n|^q \,\mathrm{d}x < \epsilon \qquad (\forall\ n \in \mathbb{N}). \tag{3.31}$$

Combinando (3.29), (3.30) e (3.31), obtemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_r^c} K(x)F(v_n) \,\mathrm{d}x \right| &\leqslant \int_{B_r^c} |K(x)F(v_n)| \,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \epsilon C \left(\int_{B_r^c} V(x)|v_n|^2 \,\mathrm{d}x + \int_{B_r^c} |v_n|^{2^*} \,\mathrm{d}x \right) + \int_{B_r^c} K(x)|v_n|^q \,\mathrm{d}x \\ &\leqslant 2\epsilon C M_1 + \epsilon \\ &= (2CM_1 + 1)\epsilon \qquad (\forall\ n \in \mathbb{N}). \end{aligned} \tag{3.32}$$

Como $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ é arbitrário, por (3.32) deduzimos que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{B_r^c} K(x)F(v_n) \,\mathrm{d}x = 0. \tag{3.33}$$

Além disso, pelo Teorema A.11 da Convergência Dominada,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{B_r} K(x)F(v_n) \,\mathrm{d}x = \int_{B_r} K(x)F(v) \,\mathrm{d}x\,. \tag{3.34}$$

De fato, a sequência de funções $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^{2^*}(B_r(0))$ é limitada e a hipótese (f_6) juntamente com a convergência em quase todo ponto garantem que é possível fazer a passagem ao limite dentro da integral; veja, por exemplo, Berestycki e Lions [13, Theorem A.1,p. 338].

Combinando os limites (3.33) e (3.34) deduzimos que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(v_n)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(v)\,\mathrm{d}x$$

e isso conclui a demonstração do limite (3.24) no primeiro caso.

2. Agora suponhamos que as hipóteses (K_1), (K_2) e (K_4) sejam válidas. Repetindo os mesmos argumentos da Proposição (3.8), dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, existe $r > 0$ suficientemente grande tal que

$$K(x) \leqslant \epsilon(V(x)|s|^{2-p} + |s|^{2^*-p}) \qquad (\forall\ s \in \mathbb{R})\ (\forall\ |x| \geqslant r).$$

Essa é, a menos de notação, a mesma desigualdade (3.19). Consequentemente,

$$K(x)|F(s)| \leqslant \epsilon(V(x)|F(s)||s|^{2-p} + |F(s)||s|^{2^*-p}) \qquad (\forall\ s \in \mathbb{R})\ (\forall\ |x| \geqslant r). \tag{3.35}$$

Da hipótese (f_5) deduzimos que existem constantes $C_1 > 0$ e $s_0 \in \mathbb{R}_+$ tais que

$$|F(s)| \leqslant C_1|s|^p \qquad (\forall s < s_0). \tag{3.36}$$

Logo, combinando (3.35) com (3.36), obtemos obtemos

$$\begin{aligned} K(x)|F(s)| &\leqslant \epsilon\left(V(x)|F(s)|\frac{|s|^2}{|s|^p} + |F(s)|\frac{|s|^{2^*}}{|s|^p}\right) \\ &\leqslant \epsilon\left(V(x)C_1|s|^p\frac{|s|^2}{|s|^p} + C_1|s|^p\frac{|s|^{2^*}}{|s|^p}\right) \\ &= \epsilon\left(V(x)C_1|s|^2 + C_1|s|^{2^*}\right) \\ &= C_1\epsilon(V(x)|s|^2 + |s|^{2^*}) \qquad (\forall\ s < s_0)\ (\forall\ |x| \geqslant r) \end{aligned} \tag{3.37}$$

Da hipótese (f_6) deduzimos que existem constantes $C_2 > 0$ e $s_1 \in \mathbb{R}_+$ tais que

$$|F(s)| \leqslant C_2|s|^{2^*} \qquad (\forall s > s_1). \tag{3.38}$$

Consequentemente, usando a hipótese (K_1) e a desigualdade (3.38), temos

$$\frac{K(x)|F(s)|}{V(x)|s|^2 + |s|^{2^*}} \leqslant C_3\frac{|F(s)|}{|s|^{2^*}} \leqslant C_3C_2 = C.$$

Dessa forma,

$$K(x)|F(s)| \leqslant C(V(x)|s|^2 + |s|^{2^*}) \qquad (\forall\ s > s_1)\ (\text{q.t.p.}|x| \geqslant r). \tag{3.39}$$

Assim, de (3.37) e de (3.39) deduzimos que

$$K(s)|F(s)| \leqslant \epsilon C(V(x)|s|^2 + |s|^{2^*}) \qquad (\forall\ s \in I)\ (|x| \geqslant r). \tag{3.40}$$

em que $I = \{s \in \mathbb{R} \colon |s| < s_0 \text{ ou } |s| > s_1\}$.

Portanto, usando a desigualdade (3.40) e avaliando a integral no complementar da bola $B_r(0)$ obtemos, para qualquer $u \in E$,

$$
\begin{aligned}
\int_{B_r^c} K(x)F(u)\,\mathrm{d}x &= \int_{A^c\cap B_r^c} K(x)F(u)\,\mathrm{d}x + \int_{A\cap B_r^c} K(x)F(u)\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant C\epsilon\left(\int_{B_r^c} V(x)|u|^2\,\mathrm{d}x + \int_{B_r^c} |u|^{2^*}\,\mathrm{d}x\right) + \int_{A\cap B_r^c} K(x)F(u)\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant C\epsilon\left(\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}\,\mathrm{d}x\right) + \int_{A\cap B_r^c} K(x)F(u)\,\mathrm{d}x \\
&=: C\epsilon Q(u) + \int_{A\cap B_r^c} K(x)F(u)\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant C\epsilon Q(u) + C\int_{A\cap B_r^c} K(x)\,\mathrm{d}x\,,
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

em que, por comodidade, relembramos as definições

$$
A \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^N \colon s_0 \leqslant |u(x)| \leqslant s_1\} \quad \text{e} \quad Q(u) \coloneqq \int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*}\,\mathrm{d}x\,.
$$

Como $v_n \rightharpoonup v$ fracamente em E quando $n \to +\infty$, então a sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em E. Logo, existe uma constante real positiva $M_1 \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$
\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|v_n|^2\,\mathrm{d}x \leqslant M_1 \qquad \text{e} \qquad \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^{2^*}\,\mathrm{d}x \leqslant M_1. \tag{3.42}
$$

Assim, de (3.41) e de (3.42) deduzimos que

$$
\int_{B_r^c} K(x)F(v_n)\,\mathrm{d}x \leqslant 2M_1C\epsilon + C\int_{A_n\cap B_r^c} K(x)\,\mathrm{d}x\,, \tag{3.43}
$$

em que $A_n \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^N \colon s_0 \leqslant |v_n(x)| \leqslant s_1\}$.

A seguir mostramos que $\int_{A_n\cap B_r^c} K(x)\,\mathrm{d}x \to 0$ quando $|x| \to +\infty$. Para isso, usamos a definição de A_n e a desigualdade (3.42); dessa forma,

$$
s_0^{2^*}|A_n| = \int_{A_n} s_0^{2^*}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{A_n} |v_n|^{2^*}\,\mathrm{d}x \leqslant M_1 \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}),
$$

e isso garante que $\sup_{n\in\mathbb{N}} |A_n| < +\infty$. Logo, da hipótese ($K_2$), existe $r > 0$ tal que

$$
\lim_{r\to\infty} \int_{A_n\cap B_r^c} K(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \text{uniformemente em } n \in \mathbb{N}.
$$

Portanto, pela definição de convergência uniforme,

$$
\int_{A_n\cap B_r^c} K(x)\,\mathrm{d}x < \frac{\epsilon}{C}, \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}).
$$

Dessa forma, combinando (3.43) com a desigualdade anterior resulta

$$\begin{aligned}\left|\int_{B_r^c} K(x)F(v_n)\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant 2M_1C\epsilon + C\int_{A_n\cap B_r} K(x)\,\mathrm{d}x\\ &< 2M_1C\epsilon + C\frac{\epsilon}{C} = \epsilon(2M_1C+1).\end{aligned} \tag{3.44}$$

Como $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ é arbitrário, por (3.44) deduzimos que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{B_r^c} K(x)F(v_n)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{3.45}$$

Usando os mesmos argumentos do final da demonstração da Proposição 3.8 deduzimos também que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{B_r} K(x)F(v_n)\,\mathrm{d}x = \int_{B_r} K(x)F(v)\,\mathrm{d}x\,. \tag{3.46}$$

Combinando os limites (3.45) e (3.46) deduzimos que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(v_n)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(v)\,\mathrm{d}x$$

e isso conclui a demonstração do limite (3.24) no segundo caso. □

No próximo lema mostramos que as sequências de Cerami para o funcional J são limitadas.

Lema 3.10. *Toda sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ de Cerami para o funcional J é limitada em E.*

Demonstração. Argumentamos por contradição e supomos que a sequência não é limitada. Dessa forma, após passagem a uma subsequência, ainda denotada da mesma forma, temos que

$$\lim_{n\to+\infty}\|u_n\| = \infty. \tag{3.47}$$

Por (3.11), para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos $t_n \geqslant 0$ tal que $J(t_nu_n) = \max_{t\geqslant 0} J(tu_n)$. Além disso, $t_n \in [0,1]$, pois, como podemos escolher M suficientemente grande, (3.47) e (3.11) nos garante que $t_n \leqslant 1$, para n suficientemente grande.

Agora vamos mostrar que a sequência $(J(t_nu_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é limitada superiormente. Para $t_n = 0$, temos que $(J(t_nu_n)) = (J(0))$ e, para $t_n = 1$, $(J(t_nu_n)) = (J(u_n))$. Em ambos os casos, temos a limitação, uma vez que $J(u_n) \to c$. Assim, podemos supor que $t_n \in (0,1)$; e como $J'(t_nu_n)t_nu_n = 0$, temos

$$\begin{aligned}2J(t_nu_n) &= 2J(t_nu_n) - J'(t_nu_n)t_nu_n\\ &= 2\frac{t_n^2}{2}\|u_n\|^2 - 2\int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(t_nu_n)\,\mathrm{d}x - t_n^2\|u_n\|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} K(x)f(t_nu_n)t_nu_n\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} K(x)\left[f(t_nu_n)t_nu_n - 2F(t_nu_n)\right]\mathrm{d}x\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} K(x)H(t_nu_n)\,\mathrm{d}x\,,\end{aligned}$$

em que $H(s) := sf(s) - 2F(s)$, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Agora vamos mostrar que a função H definida anteriormente é não descrescente. Primeiramente, calculamos a derivada de H,

$$\begin{aligned} H'(s) &= f(s) + sf'(s) - 2f(s) \\ &= sf'(s) - f(s) \\ &= s^2\left(\frac{f'(s)}{s} - \frac{f(s)}{s^2}\right). \end{aligned} \tag{3.48}$$

Com a hipótese (f_7), temos que

$$-\frac{f(s)}{s^2} + \frac{f'(s)}{s} \geqslant 0.$$

pois $s^{-1}f(s)$ é não decrescente. Aplicando a desigualdade anterior em (3.48), deduzimos que $H'(s) \geqslant 0$. Portanto, H é não decrescente.

Dessa forma,

$$\begin{aligned} 2J(t_n u_n) = \int_{\mathbb{R}^N} K(x)H(t_n u_n)\,\mathrm{d}x &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} K(x)H(u_n)\,\mathrm{d}x \\ &= 2J(u_n) - J'(u_n)u_n = 2J(u_n) + o_n(1). \end{aligned}$$

Sabemos que $J(u_n) \to c$. Logo, $(J(t_n u_n))$ é limitada superiormente, isto é,

$$J(t_n u_n) \leqslant c \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}). \tag{3.49}$$

Agora, estamos prontos para demonstrar que (u_n) é limitado. Com este intuito, vamos obter uma contradição entre (3.47) e (3.49).

Definimos a sequência de funções $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ por $w_n := u_n/\|u_n\|$. Portanto, $\|w_n\| = 1$, ou seja, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ é uma sequência limitada em E. Sabemos que E é um subespaço de $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, isto é, E é um subespaço de Hilbert; logo, E é um espaço reflexivo. Pelo Teorema A.16 de Banach-Alaoglu, a sequência $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ é relativamente compacta em E; isso significa que existe $w \in E$ e uma subsequência, que ainda denotamos da mesma forma, tais que $w_n \rightharpoonup w$ fracamente em E quando $n \to +\infty$. Agora fazemos uma afirmativa a respeito da função $w \in E$ cuja demonstração aparece no final da argumentação.

Afirmativa 1. $w(x) = 0$ q. t. p. $x \in \mathbb{R}^N$.

Prosseguindo com a demonstração do lema, notamos que para $B > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, temos $B/\|u_n\| \in [0, 1]$. Então

$$\begin{aligned} J(t_n u_n) = \max_{t\geqslant 0} J(tu_n) &\geqslant J\left(\frac{B}{\|u_n\|}u_n\right) \\ &= J(Bw_n) = \frac{\|Bw_n\|^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(Bw_n)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{B^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(Bw_n)\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Como $w_n \rightharpoonup 0$ fracamente em E quando $n \to +\infty$, pelo Lema 3.9 obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(Bw_n)\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(0)\,\mathrm{d}x = 0,$$

quando $n \to +\infty$, lembrando que $f(0) = 0$ pela hipótese (f_4).

Assim, temos que

$$\limsup_{n\to\infty} J(t_n u_n) \geqslant \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{B^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(Bw_n)\,\mathrm{d}x \right) = \frac{B^2}{2},$$

para todo $B > 0$, de modo que $(J(t_n u_n))$ é ilimitada superiormente, o que contradiz a desigualdade (3.49). Consequentemente, (u_n) é limitada em E. □

Demonstração da Afirmativa 1. Primeiramente, consideramos uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(\mathbb{R}^N)$ limitada. Então, $w_n = u_n(x)/\|u_n\| \leqslant c/\|u_n\| \to 0$, q.t.p. em $\mathbb{R}^N$, uma vez que $\|u_n\| \to +\infty$. Da imersão compacta de $E \hookrightarrow L^q_K(\mathbb{R}^N)$, temos que $w_n(x) \to w(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$. Logo,

$$w(x) = 0 \quad (\text{q.t.p. } x \in \mathbb{R}^N).$$

Agora consideramos uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(\mathbb{R}^N)$ ilimitada. Da mesma forma, definimos $w_n(x) = u_n(x)/\|u_n\|$ e também o subconjunto

$$\begin{aligned} \Omega &:= \left\{x \in \mathbb{R}^N \colon u_n(x) \neq 0\right\} \\ &:= \left\{x \in \mathbb{R}^N \colon w_n(x) \neq 0\right\}. \end{aligned}$$

Como por hipótese $J(u_n) \to c$ quando $n \to +\infty$, temos que

$$J(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)F(u_n)\,\mathrm{d}x = c + o_n(1);$$

assim, considerando a definição do subconjunto Ω, obtemos

$$J(u_n) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_{\Omega} K(x)F(u_n)\,\mathrm{d}x = c + o_n(1).$$

Portanto,

$$o_n(1) + \frac{1}{2} = \int_\Omega \frac{K(x)F(u_n)}{\|u_n\|^2}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{K(x)F(u_n)}{|u_n|^2}|w_n|^2\,\mathrm{d}x\,. \tag{3.50}$$

Dado $\tau > 0$, segue da hipótese (f_7) que existe $\xi > 0$ tal que $F(s)/|s|^2 \geqslant \tau$ para todo $|s| \geqslant \xi$. Agora denotamos por ψ_n e χ_n as funções características para $\{u_n \leqslant \xi\} = \{x \in \Omega \colon 0 \leqslant u_n(x) \leqslant \xi\}$ e $\{u_n > \xi\} = \{x \in \Omega \colon u_n(x) > \xi\}$, respectivamente. Aplicando essas definições à equação (3.50), obtemos

$$\begin{aligned} o_n(1) + \frac{1}{2} &= \int_{\{u_n \leqslant \xi\}} \frac{K(x)F(u_n)}{|u_n|^2}|w_n|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\{u_n > \xi\}} \frac{K(x)F(u_n)}{|u_n|^2}|w_n|^2\,\mathrm{d}x \\ &\geqslant \int_{\{u_n \leqslant \xi\}} \frac{K(x)F(u_n)}{|u_n|^2}|w_n|^2\,\mathrm{d}x + \tau \int_{\{u_n > \xi\}} K(x)|w_n|^2\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \psi_n(x)\frac{K(x)F(u_n)}{|u_n|^2}|w_n|^2\,\mathrm{d}x + \tau \int_\Omega \chi_n(x)K(x)|w_n|^2\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Seja Ω^- o conjunto limite de $\{u_n \leqslant \xi\}$; analogamente, seja Ω^+ o conjunto limite de $\{u_n > \xi\}$. Usando o mesmo argumento do primeiro parágrafo desta demonstração, temos $w_n(x) \to 0$ em $\{u_n \leqslant \xi\}$, de modo que

$$w(x) = 0 \qquad (\forall x \in \Omega^-).$$

Além disso, $K(x)F(u_n)/|u_n|^2$ é limitada em $\{u_n \leqslant \xi\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, quando $u_n(x) \to 0$ usamos (K_1) e a hipótese (f_5) para obter essa conclusão; quando $0 < \epsilon \leqslant u_n \leqslant \xi$, usamos (K_1) e a continuidade de F para obter a mesma conclusão. Assim, dessa limitação uniforme em relação a n concluímos que $K(x)F(u_n)/|u_n|^2$ é limitada em Ω^-.

Uma vez que $w_n(x) \to 0$ q.t.p. em Ω^- e $K(x)F(u_n)/|u_n|^2$ é limitada em Ω^-, concluímos que

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{K(x)F(u_n)}{|u_n|^2}|w_n|^2 = 0 \qquad (x \in \Omega^-),$$

de modo que, pela definição da função característica ψ_n, segue-se que

$$\limsup_{n\to+\infty} \psi_n(x)\frac{K(x)F(u_n)}{|u_n|^2}|w_n|^2 = 0 \qquad (x \in \Omega). \tag{3.52}$$

Agora usamos o limite (3.52) e o Lema A.9 de Fatou na desigualdade (3.51) e deduzimos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &\geqslant \limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega \psi_n(x)\frac{K(x)F(u_n)}{|u_n|^2}|w_n|^2\,\mathrm{d}x + \limsup_{n\to+\infty} \tau \int_\Omega \chi_n(x)K(x)|w_n|^2\,\mathrm{d}x \\
&\geqslant \int_\Omega \limsup_{n\to+\infty} \psi_n(x)\frac{K(x)F(u_n)}{|u_n|^2}|w_n|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \limsup_{n\to+\infty} \tau\chi_n(x)K(x)|w_n|^2\,\mathrm{d}x \\
&\geqslant \tau \int_{\Omega^+} K(x)|w|^2\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{2} \geqslant \tau \int_{\Omega^+} K(x)|w|^2\,\mathrm{d}x \qquad (\forall\, \tau > 0);$$

isso significa que

$$\int_{\Omega^+} K(x)|w|^2\,\mathrm{d}x = 0.$$

Por fim, como $K(x) > 0$ em $\mathbb{R}^N$, concluímos que $w := 0$ q.t.p. em Ω^+, o que completa a demonstração da afirmativa. $\square$

3.5 Conclusão da demonstração do segundo teorema

Nesta seção completamos a demonstração do segundo teorema desta dissertação.

Demonstração do Teorema 1.4. Consideramos a sequência de Cerami $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ para o funcional $J\colon E \to \mathbb{R}$. A existência dessa sequência foi estabelecida pelas aplicações do Lema 3.4 e do teorema do passo da montanha; dessa forma, temos

$$J(u_n) \to c \qquad \text{e} \qquad (1 + \|u_n\|)\|J'(u_n)\| \to 0,$$

em que c é nível de minimax associado a J.

Pelo Lema 3.10 essa sequência de Cerami $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ é limitada. Assim, existem uma subsequência de (u_n), que ainda denotamos por $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$, e uma função $u \in E$, tais que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em E quando $n \to +\infty$.

Dada a sequência de Cerami $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ e dado $\epsilon \in \mathbb{R}_+$, pela limitação de $u_n/\|u_n\|$ temos que $(1 + \|u_n\|)J'(u_n)u_n/\|u_n\| < \epsilon$ para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Dessa forma, $J'(u_n)u_n \leqslant \epsilon(\|u_n\|/(1 + \|u_n\|)) \leqslant \epsilon$. Como $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ é arbitrário, isso significa que $J'(u_n)u_n = o_n(1)$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \|u_n\|^2 &= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} K(x)f(u_n)u_n \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} K(x)f(u)u \, \mathrm{d}x\,, \end{aligned} \tag{3.53}$$

em que na última passagem aplicamos o limite (3.25) do Lema 3.9.

Além disso, como $J'(u_n)u = o_n(1)$, deduzimos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \cdot \nabla u \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u_n u \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} K(x)f(u_n)u \, \mathrm{d}x = o_n(1).$$

Agora notamos que o funcional $P\colon E \to \mathbb{R}$ definido por

$$P(u) \coloneqq \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \cdot \nabla u \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u_n u \, \mathrm{d}x$$

é contínuo e, dessa forma,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \cdot \nabla u \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u_n u \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 \, \mathrm{d}x = \|u\|^2.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u_n \cdot \nabla u \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u_n u \, \mathrm{d}x &= \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} K(x)f(u_n)u \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} K(x)f(u)u \, \mathrm{d}x\,,\end{aligned}$$

em que na última passagem aplicamos novamente o limite (3.25) do Lema 3.9. Assim,

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} K(x)f(u)u \, \mathrm{d}x\,. \tag{3.54}$$

Combinando (3.53) e (3.54), obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|^2 = \|u\|^2,$$

o que mostra que $u_n \to u$ fortemente em E pois já temos a convergência fraca $u \rightharpoonup u$ quando $n \to +\infty$; veja o livro de DiBenedetto [20, Proposition V.11.1].

Finalmente, pela continuidade de J deduzimos que $J(u) = c$; e pela continuidade de J' obtemos deduzimos que $J'(u) = 0$. Isso significa que u é uma solução do tipo *ground state* para o problema (3.1). Como $u_n \geqslant 0$, temos que $u \geqslant 0$ e $u \not\equiv 0$. A positividade de u pode ser obtida pela aplicação do princípio do máximo. $\square$

3.6 Comentários finais

Para concluir esta dissertação apresentamos novas hipóteses sobre a não linearidade $f\colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sobre as funções $V, K\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ que podem ser usadas para demonstrar resultados de existência de soluções $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ do tipo *ground state* para problemas elípticos semilineares.

Em relação à função $f\colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ citamos as hipóteses seguintes.

(f_8) $\limsup_{|s|\to 0} sf(x,s)/(|s|^{2^*} + V(x)|s|^2) = 0$, uniformemente em x, em que $2^* = 2N/(N-2)$ é o expoente crítico de Sobolev.

(f_9) f possui um *crescimento quase crítico*, isto é, $\limsup_{|s|\to+\infty} sf(x,s)/|s|^{2^*} = 0$, uniformemente em x.

(f_{10}) $s^{-1}f(x,s)$ é uma função não decrescente em $\mathbb{R}_+$ e não crescente em $\mathbb{R}_-$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e sua primitiva F é *superquadrática no infinito*, isto é, existe uma função positiva $G\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{|s|\to+\infty} F(x,s)/G(x)|s|^2 = +\infty$, uniformemente em x.

Com relação às funções $V, K\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, supomos que são funções não negativas e que se a hipótese (K_1) é verificada, então a função $K\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ verifica as hipóteses seguintes.

(K_5) $K(x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e existe um $p \in (2, 2^*)$ tal que $K \in L^{\eta_q}(\mathbb{R}^N \backslash \Omega)$, em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é o conjunto definido por $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^N\colon V(x) > 0\}$ e $\eta_q = 2^*/(2^* - q)$ para todo $q \in (2, p)$. Além disso, $K \in L^{r,\infty}(\mathbb{R}^N)$ para algum $r \geqslant 1$ verificando $p(1/2 - 1/N) + 1/r = 1$ e $|sf(x,s)| \leqslant K(x)|s|^{2^*}$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $s \in \mathbb{R}$.

(K_6) $W \in L^{\alpha'}(\Omega)$ para $\alpha' \geqslant 1$ e $1/\alpha' + 1/\alpha = 1$, em que $W\colon \Omega \to [0, +\infty)$ é a função dada por $W(x) = K(x)/[V(x)]^{\frac{1}{\alpha}}$, para algum $\alpha \geqslant 1$.

Com essas hipóteses é possível demonstrar resultados de imersões compactas $E \hookrightarrow L^q_K(\mathbb{R}^N)$ para todo $q \in (2, p)$, ou $E \hookrightarrow L^q_K(\mathbb{R}^N)$ para todo $q \in (2, 2^*)$, dependendo das hipóteses utilizadas. Além disso, com algumas modificações nos argumentos usados na demonstração do Teorema 1.4 é possível mostrar, com as hipóteses (f_8), (f_9) e (f_{10}) e também com as hipóteses (K_5) e (K_6), que o problema $-\Delta u + V(x)u = f(x,u)$, em que $x \in \mathbb{R}^N$, possui solução $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ do tipo *ground state*.

Apêndice A

Resultados auxiliares

A.1 Espaços de funções

- $C^k(\Omega)$, para $k = 1, 2, \cdots$ é o espaço das funções $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ que são k vezes diferenciáveis em Ω e tais que as k-ésimas derivadas são contínuas em Ω;
- $C^\infty(\Omega)$ é o espaço das funções $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ que são infinitamente diferenciáveis em Ω;
- $C_0^k(\Omega)$ é o subespaço das funções de $C^k(\Omega)$ que contém apenas as funções que possuem suporte compacto em Ω, isto é, o fecho (em $\mathbb{R}^N$) do conjunto $\{x \in \Omega\colon u(x) \neq 0\}$ é compacto;
- $C_0^\infty(\Omega)$ é o subespaço de $C^\infty(\Omega)$ das funções que possuem suporte compacto em Ω;
- $L^p(\Omega)$ é o espaço de Lebesgue das funções mensuráveis $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $\int_\Omega |u(x)|^p \,\mathrm{d}x < +\infty$, com a norma $\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$;
- $L^\infty(\Omega)$ é o espaço de Lebesgue das funções mensuráveis $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $\sup\operatorname{ess}_{x\in\Omega} |u(x)| < +\infty$, com a norma $\|u\|_\infty = \sup\operatorname{ess} |u(x)|$;
- $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ é o espaço das funções mensuráveis $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ tal que para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$, temos $\|u\|_{L^p(K)} < +\infty$;
- $H^1(\Omega)$ é o espaço de Sobolev definido por

  $$H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega)\colon \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i \in \{1, 2, \ldots, N\}\right\}$$

  em que $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ denotam as derivadas no sentido das distribuições, com a norma dada por

  $$\|u\|_{H^1(\Omega)} := \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \int_\Omega u^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}};$$

  ;
- $H_0^1(\Omega)$ é o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$.

- $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, para $N \geqslant 3$, é o espaço definido como

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^N), i = 1, \cdots, N \right\},$$

em que $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ denotam as derivadas no sentido das distribuições, com a norma

$$\|u\| := \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$

;

- $D(\Omega)$ é o espaço das funções teste, isto é, das funções em $C_0^\infty(\Omega)$ munido com a noção de convergência uniforme.

A.2 Desigualdades

Diversas demonstrações desta dissertação envolvem o uso da notação de Bachman-Landau, cujos significados são os seguintes:

1. A notação $f(x) = o(g(x))$ quando $x \to x_0$ significa que $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

2. A notação $f(x) = O(g(x))$ quando $x \to x_0$ significa que $\limsup\limits_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right|$ é finito.

Consulte o livro de Evans [21, Appendix A.5, pág. 620] para mais detalhes.

Proposição A.1. *1. Sejam a e b $\in \mathbb{R}$, se $0 < p \leqslant 1$, então $|a+b|^p \leqslant |a|^p + |b|^p$;*

2. Sejam a e b $\in \mathbb{R}^+$ e sejam p e p' expoentes conjugados, isto é, $1/p + 1/p' = 1$, então

$$(a+b)^p \leqslant 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Proposição A.2 (Desigualdade de Hölder)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio qualquer e sejam p, $p' \in \mathbb{R}^+$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Suponhamos que $f \in L^p(\Omega)$ e que $g \in L^{p'}(\Omega)$. Então $f.g \in L^1(\Omega$ e*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| \, \mathrm{d}x \leqslant \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g(x)|^{p'} \, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Demonstração. Consulte o livre de Brézis [15, Théorème IV. 6, pág. 56]. □

Teorema A.3 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e limitado. Seja a função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ em que $1 \leqslant p < N$. Então, vale a desigualdade*

$$||u||_{L^q(\Omega)} \leqslant M||\nabla u||_{L^p(\Omega)}$$

para todo $q \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leqslant q \leqslant p^*$ e a constante M depende somente de p, q, N e de Ω.

Demonstração. Consulte o livro de Evans [21, Teorema 3, pág. 265]. □

Teorema A.4 (Desigualdade de Sobolev)**.** *A desigualdade clássica de Sobolev afirma que para $1 < p < N$, existe uma constante $C(N,p)$ tal que se $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, então*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\frac{Np}{N-p}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{N-p}{N}} \leqslant C(N,p)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\,\mathrm{d}x\,. \tag{A.1}$$

A constante ótima na desigualdade acima, a qual denotamos por $C_{N,p}(\mathbb{R}^N)$, é chamada de constante de Sobolev. Se $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é o espaço de Sobolev das funções em $L^p(\mathbb{R}^N)$, cujas derivadas estão em $L^p(\mathbb{R}^N)$, então (A.1) implica que para $1 < p < N$, existe uma imersão contínua

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{\frac{Np}{N-p}}(\mathbb{R}^N).$$

Além disso, a constante da imersão é dada pela constante de Sobolev.

O valor preciso da constante de Sobolev foi determinado por Aubin e Talenti, os quais também mostraram que (A.1) acontece quando $C_{N,p}(\mathbb{R}^N) = C(N,p)$ se e somente se u é dado por

$$u_{a,b,x_0}(x) = \{a + b|x - x_0|^{\frac{p}{p-1}}\}^{1-\frac{N}{p}}, \tag{A.2}$$

em que $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e $a, b > 0$ são constantes.

Agora, suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ seja um domínio limitado. Podemos definir o espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ como fizemos para $\mathbb{R}^N$ e também denotamos $W_0^{1,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Se $C_{N,p}(\Omega)$ denota a constante ótima em (A.1) para $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, então $C_{N,p}(\Omega) = C_{N,p}(\mathbb{R}^N)$. Portanto, $C_{N,p}(\Omega)$ independe de Ω, vale ressaltar que este fato vem de uma propriedade importante das funções em (A.2). A saber, tome $x_0 \in \Omega$, então quando $a \to 0$ e $b \to \infty$, a função $u_{a,b,x_0}(x)$ vai se concentrar perto de x_0, isto é, $u_{a,b,x_0}(x_0) \to \infty$ enquanto $u_{a,b,x_0}(x) \to 0$ para todo $x \neq x_0$. Ao multiplicar por uma função corte,podemos facilmente construir funções $\tilde{u}_{a,b} \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\frac{\left(\displaystyle\int_{\Omega} |\tilde{u}_{a,b}|^{\frac{Np}{N-p}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{N-p}{N}}}{\displaystyle\int_{\Omega} |\nabla \tilde{u}_{a,b}|^p\,\mathrm{d}x} \to C_{N,p}(\mathbb{R}^N),$$

quando $a \to 0$ e $b \to \infty$.

Uma outra consequência desta construção é que existem sequências de funções que são limitadas em $W^{1,p}(\Omega)$, mas que não têm subsequências que convergem em $L^{\frac{Np}{N-p}}(\Omega)$; de fato, as funções $\tilde{u}_{a,b}$ convergem *q.t.p* para zero quando $a \to 0$ e $b \to \infty$. Um fato relacionado, mas menos óbvio, é que a constante ótima $C_{N,p}(\Omega)$ não é atingida. Se ela fosse atingida por uma função $v_\Omega \in W_0^{1,p}(\Omega)$, então v_Ω seria um extremal para a desigualdade (A.1) também. Isso significa que v_Ω seria da forma (A.2), mas essas funções não tem suporte compacto.

Teorema A.5 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)**.** *Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev. Suponha que $1 \leqslant p < N$. Existe uma constante C, dependendo somente de p e N, tal que*

$$||u||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C||\nabla u||_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

para todo $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Consulte o livro de Evans [21, Teorema 1, pág. 263]. □

A.3 Resultados de Análise e de Análise Funcional

Teorema A.6 (Teorema do valor médio)**.** *Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a,b), existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = [f(b) - f(a)]/(b-a)$.*

Demonstração. Consulte o livro de Lima [24, Teorema 7, pág.96]. □

Teorema A.7 (Fórmula de Green)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1 e u, $v \in C_c^2(\mathbb{R}^N)$. Então,*

$$-\int_\Omega v(x)\Delta u(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} v(\sigma)\nabla u.v\,\mathrm{d}\sigma\,.$$

Demonstração. Consulte o livro de Kavian [22, Corollaire 7.3, pág. 23]. □

Proposição A.8 (Fórmula de integração por partes)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^1. Se $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ é uma função real, então para $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leqslant i \leqslant N$ temos a fórmula de integração por partes*

$$\int_\Omega \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,.$$

em que $\mathrm{d}\sigma$ denota a medida $(N-1)$-dimensional. De forma equivalente, se $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ é uma função vetorial, denotamos $\operatorname{div} u := \sum_{i=1}^N \partial u_i(x)/\partial x_i$, temos

$$\int_\Omega \operatorname{div}(u(x))\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u(\sigma).v(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,.$$

Demonstração. Consulte o livro de Kavian [22, Théorème 7.2, pág. 20]. □

Lema A.9 (Lema de Fatou)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e seja a sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$. Suponhamos que as condições seguintes são válidas.*

1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ vale $f_n(x) \geqslant 0$ em quase todo ponto $x \in \Omega$.*
2. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x < \infty$.

Seja a funçãi $f(x) := \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)$; então $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Demonstração. Consulte o livro de Kavian [22, Lemme de Fatou 4.2, pág. 9]. □

Teorema A.10 (Teorema da convergência monótona)**.** *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência monótona crescente de funções mensuráveis positivas que converge para f. Então*

$$\int f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int f_n\,\mathrm{d}\mu\,.$$

Demonstração. Consulte o livro de Bartle [10, Teorema 4.6, pág. 31]. □

Teorema A.11 (Teorema da convergência dominada)**.** *Seja* (f_n) *uma sequência de funções integráveis que converge em quase todo ponto para uma função mensurável* f*. Se existe uma função integrável* g *tal que* $|f_n| \leqslant g$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, então* f *é integrável*

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu \, .$$

Demonstração. Consulte o livro de Bartle [10, Teorema 5.6, pág. 44]. □

Proposição A.12 (Sequências fracamente convergentes)**.** *Sejam* E *um espaço vetorial normado e* $(x_n)_{n\in N} \subset E$ *uma sequência. Então valem as seguintes afirmações:*

1. $x_n \rightharpoonup x$ *fracamente se, e somente se,* $f(x_n) \to f(x)$ *para todo* $f \in E^*$*.*
2. *Se* $x_n \to x$*, então* $x_n \rightharpoonup x$*.*
3. *Se* $x_n \rightharpoonup x$*, então a sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ *é limitada e, além disso,* $\|x\| \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \|x_n\|$.
4. *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *e* $f_n \to f$ *em* E^**, então* $f_n(x_n) \to f(x)$*.*

Demonstração. Consulte notas de aula de Biezuner [14, Proposição 5.11, pág. 57]. □

Teorema A.13 (Convergência em quase todo ponto)**.** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio aberto e sejam* (u_n) *uma sequência em* $L^p(\Omega)$*, com* $p \in [1, +\infty]$*, e* $u \in L^p(\Omega)$ *tais que* $u_n \to u$ *em* $L^p(\Omega)$ *quando* $n \to +\infty$*. Então existe uma subsequência, ainda denotada por* (u_n)*, e uma função* $h \in L^p(\Omega)$*, tais que*

1. $u_n(x) \to u(x)$ *q.t.p. em* Ω*;*
2. $|u_n(x)| \leqslant h(x)$ *q.t.p. em* Ω *e para todo* $n \in N$*.*

Demonstração. Consulte livro de Brézis [16, Teorema 4.9, pág. 94]. □

Teorema A.14 (Teorema de imersão de Rellich-Kondrachov)**.** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um conjunto com medida finita. Então a imersão*

$$H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$$

é contínua se $1 \leqslant p \leqslant 2^*$ *e é compacta se* $1 \leqslant p < 2^*$*.*

Demonstração. Consulte o livro de Brézis [16, Teorema 9.16, pag. 291]. □

Teorema A.15 (Identidade de Pohožaev)**.** *Seja* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e seja* $F(t) = \int_0^t f(s)\, \mathrm{d}s$*. Suponhamos que* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *seja um subconjunto aberto e limitado. Se* $u \in C^2(\Omega)$ *é solução do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{em } \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

então

$$\frac{N-2}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x - \frac{N}{2} \int_\Omega F(u) \, \mathrm{d}x = - \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 \nu(x) \cdot x \, \mathrm{d}\sigma \, .$$

Teorema A.16 (Teorema de Banach-Alaoglu)**.** *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Se $B \subset X$ é limitado, então B é relativamente compacto na topologia fraca de X.*

Demonstração. Consulte o livro de Badiale e Serra [9, Theorem 1.2.10, pág. 10] e suas referências. □

A.4 Operadores diferenciáveis

As definições e a proposição desta seção podem ser encontradas em [9, Section 1.3]. Seja X um espaço de Banach e X^* seu dual.

Definição A.17 (Diferencial de Fréchet)**.** Seja U um subconjunto aberto de X e seja $I\colon U \to \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que I é Fréchet diferenciável em $u \in U$, com derivada de Fréchet dada por $I'(u) \in X^*$, se

$$I(u+v) = I(u) + I'(u)v + o(||v||),$$

quando $||v|| \to 0$. Além disso, dizemos que se a derivada I' existe e é contínua em U, então $I \in C^1(U)$.

Definição A.18 (Diferencial de Gâteaux)**.** Seja U um subconjunto aberto de X e seja $I\colon U \to \mathbb{R}$ um funcional. Dizemos que I é Gâteaux diferenciável em $u \in U$, com derivada de Gâteaux dada por $I'_G(u) \in X^*$, se

$$\lim_{t\to 0} \frac{I(u+tv) - I(u)}{t} = I'_G(u)v, \qquad \forall\, v \in X.$$

Proposição A.19 (Funcionais de classe C^1)**.** *Suponha que U seja um subconjunto aberto de X tal que I é Gâteaux diferenciável em U e $I'_G(u)$ é contínua em $u \in U$. Então I também é diferenciável em u, e claro $I'_G(u) = I'(u)$.*

A seguir apresentamos o teorema do traço, que significa a restrição a dimensões inferiores; em particular, apresentamos apenas um resultado para a fronteira de um subconjunto.

Proposição A.20 (Teorema do traço)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e limitado com fronteira diferenciável, isto é, $\partial\Omega \in C^1$. Então existe um operador linear limitado $T\colon H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ tal que*

1. *$T(u) = u\big|_{\partial\Omega}$ se $u \in H^1(\Omega) \cap C(\tilde{\Omega})$.*
2. *$|T(u)|_{L^2(\partial\Omega)} \leqslant C\|u\|_{H^1(\Omega)}$ para toda função $u \in H^1(\Omega)$, em que a constante $c \in \mathbb{R}_+$ depende apenas de Ω.*

Demonstração. Consulte o livro de Evans [21, Section 5.5]. □

Observação A.21. 1. O operator T é denominado traço. O primeiro item indica a motivação para esse nome: T é a restrição da função $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ à fronteira $\partial\Omega$ quando isso deveria fazer sentido, isto é, quando u é função contínua. O Teorema A.20 apresenta uma forma de associar uma função em $L^2(\partial\Omega)$ a cada função de $H^1(\Omega)$ de modo que seja contínua nas normas apropriadas.

2. O segundo item é apenas uma forma de reafirmar que o operador é linear e limitado.

Como sempre existe grande interesse em resolver problemas com condições de fronteira do tipo de Dirichlet, devemos compreender exatamente o que significa o anulamento do traço de uma função do espaço $H^1(\Omega)$.

Proposição A.22. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e limitado com fronteira diferenciável, $\partial\Omega \in C^1$ e seja $u \in H^1(\Omega)$. Então $u \in H_0^1(\Omega)$ se, e somente se, $T(u) = 0$.*

Demonstração. Suponhamos que $u \in H_0^1(\Omega)$. Lembramos que $H_0^1(\Omega) = \widetilde{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|}$, em que $\|\cdot\|$ denota a norma do espaço $H^1(\Omega)$, isto é, $u \in H_0^1(\Omega)$ se, e somente se, existe uma sequência $(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ tal que $u_m \to u$ em $H^1(\Omega)$ quando $m \to +\infty$. Para $u_m \in C_0^\infty(\Omega)$, vale a propriedade $T(u_m) = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$, já que $T(v) = v\big|_{\partial\Omega}$ para $v \in C(\tilde{\Omega})$. Como $T\colon H^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ é um operador linear limitado, segue-se que T é contínuo, de modo que $u_m \to u$ em $H^1(\Omega)$ implica $T(u_m) \to T(u)$ em $L^2(\partial\Omega)$. □

A.5 Teorema do passo da montanha

Teorema A.23 (Teorema do passo da montanha)**.** *Seja X um espaço de Banach e seja $J\colon X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe $C^1(X)$ e verificando a condição de Palais-Smale. Suponha que J(0) = 0 e que sejam válidas as condições abaixo.*

1. *Existem números R, $a \in \mathbb{R}^+$ tais que sobre a esfera $\|u\| = R$ vale a desigualdade $J(u) \geqslant a$.*
2. *Existe $u_0 \in X$ tal que $\|u_0\| > R$ e $J(u_0) < a$.*

Então o funcional J possui um valor crítico c tal que $c \geqslant a$ e caracterizado por

$$c \coloneqq \inf_{A\in\Gamma} \max_{v\in A} J(v),$$

em que

$$\Gamma \coloneqq \left\{\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R} \,|\, \gamma \in C^1([0,1], \mathbb{R}), \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = u_0\right\}.$$

Demonstração. Consulte o livro de Willem [33, Theorem 2.10, pág. 42]. □

Observação A.24. Se um funcional de Euler-Lagrange $J\colon E \to \mathbb{R}$ verifica as hipóteses do Teorema A.23 do passo da montanha, então podemos garantir a existência de sequências de Palais-Smale para J. Se além disso vale a desigualdade $\max\{J(0), J(u_0)\} < \inf_{\|u\|=R} J(u)$, então podemos garantir a existência de sequências de Cerami para o funcional J.

Referências Bibliográficas

[1] C. O. Alves, D. C. de Morais Filho, and M. A. S. Souto, "Radially symmetric solutions for a class of critical exponent elliptic problems in $\mathbb{R}^N$," *Electron. J. Differential Equations*, pp. No. 07, approx. 12 pp. 1996.

[2] C. O. Alves and M. A. S. Souto, "Existence of solutions for a class of elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ with vanishing potentials," *J. Differential Equations*, vol. 252, no. 10, pp. 5555–5568, 2012. [Online]. Available: https://doi.org/10.1016/j.jde.2012.01.025

[3] ——, "Existence of solutions for a class of nonlinear Schrödinger equations with potential vanishing at infinity," *J. Differential Equations*, vol. 254, no. 4, pp. 1977–1991, 2013. [Online]. Available: https://doi.org/10.1016/j.jde.2012.11.013

[4] C. O. Alves, P. C. Carrião, and O. H. Miyagaki, "Nonlinear perturbations of a periodic elliptic problem with critical growth," *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 260, no. 1, pp. 133–146, 2001. [Online]. Available: https://doi.org/10.1006/jmaa.2001.7442

[5] M. J. Alves, R. B. Assunção, and O. H. Miyagaki, "Existence result for a class of quasilinear elliptic equations with $(p-q)$-Laplacian and vanishing potentials," *Illinois J. Math.*, vol. 59, no. 3, pp. 545–575, 2015. [Online]. Available: http://projecteuclid.org/euclid.ijm/1475266397

[6] A. Ambrosetti and Z.-Q. Wang, "Nonlinear Schrödinger equations with vanishing and decaying potentials," *Differential Integral Equations*, vol. 18, no. 12, pp. 1321–1332, 2005.

[7] A. Ambrosetti, V. Felli, and A. Malchiodi, "Ground states of nonlinear Schrödinger equations with potentials vanishing at infinity," *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, vol. 7, no. 1, pp. 117–144, 2005. [Online]. Available: https://doi.org/10.4171/JEMS/24

[8] ——, "Ground states of nonlinear Schrödinger equations with potentials vanishing at infinity," *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, vol. 7, no. 1, pp. 117–144, 2005. [Online]. Available: https://doi.org/10.4171/JEMS/24

[9] M. Badiale and E. Serra, *Semilinear elliptic equations for beginners*, ser. Universitext. Springer, London, 2011, existence results via the variational approach. [Online]. Available: https://doi.org/10.1007/978-0-85729-227-8

[10] R. G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, ser. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995, containing a corrected reprint of the 1966 original [The Elements of Integration, Wiley, New York, A Wiley-Interscience Publication]. [Online]. Available: https://doi.org/10.1002/9781118164471

[11] T. Bartsch and Z. Q. Wang, "Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic problems on $\mathbb{R}^N$," *Comm. Partial Differential Equations*, vol. 20, no. 9-10, pp. 1725–1741, 1995. [Online]. Available: https://doi.org/10.1080/03605309508821149

[12] V. Benci, C. R. Grisanti, and A. M. Micheletti, "Existence and non existence of the ground state solution for the nonlinear Schrodinger equations with $V(\infty) = 0$," *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, vol. 26, no. 2, pp. 203–219, 2005. [Online]. Available: https://doi.org/10.12775/TMNA.2005.031

[13] H. Berestycki and P.-L. Lions, "Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state," *Arch. Rational Mech. Anal.*, vol. 82, no. 4, pp. 313–345, 1983. [Online]. Available: https://doi.org/10.1007/BF00250555

[14] R. J. Biezuner, *Notas de Aula Análise Funcional*. Universidade Federal de Minas Gerais, 2009. [Online]. Available: http://arquivoescolar.org/bitstream/arquivo-e/136/1/analise_funcional.pdf

[15] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle*, ser. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983, théorie et applications. [Theory and applications].

[16] ——, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential equations*, ser. Universitext. Springer, New York, 2011.

[17] D. G. Costa, "On a class of elliptic systems in $\mathbb{R}^N$," *Electron. J. Differential Equations*, pp. No. 07, approx. 14 pp. 1994.

[18] V. Coti Zelati and P. H. Rabinowitz, "Homoclinic type solutions for a semilinear elliptic PDE on $\mathbb{R}^N$," *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 45, no. 10, pp. 1217–1269, 1992. [Online]. Available: https://doi.org/10.1002/cpa.3160451002

[19] M. del Pino and P. L. Felmer, "Local mountain passes for semilinear elliptic problems in unbounded domains," *Calc. Var. Partial Differential Equations*, vol. 4, no. 2, pp. 121–137, 1996. [Online]. Available: https://doi.org/10.1007/BF01189950

[20] E. DiBenedetto, *Real Analysis*, ser. Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher. Springer New York, 2016. [Online]. Available: https://books.google.com.br/books?id=xPsXDQAAQBAJ

[21] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, 2nd ed., ser. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010, vol. 19. [Online]. Available: https://doi.org/10.1090/gsm/019

[22] O. Kavian, *Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques*, ser. Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]. Springer-Verlag, Paris, 1993, vol. 13.

[23] W. Kryszewski and A. Szulkin, "Generalized linking theorem with an application to a semilinear Schrödinger equation," *Adv. Differential Equations*, vol. 3, no. 3, pp. 441–472, 1998.

[24] E. L. Lima, "Análise real. v. 1," *Rio de Janeiro: IMPA/CNPq*, 1993.

[25] O. H. Miyagaki, "On a class of semilinear elliptic problems in $\mathbb{R}^N$ with critical growth," *Nonlinear Anal.*, vol. 29, no. 7, pp. 773–781, 1997. [Online]. Available: https://doi.org/10.1016/S0362-546X(96)00087-9

[26] E. S. Noussair and C. A. Swanson, "Decaying solutions of semilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$," *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 20, no. 6, pp. 1336–1343, 1989. [Online]. Available: https://doi.org/10.1137/0520088

[27] A. Pankov, "Periodic nonlinear Schrödinger equation with application to photonic crystals," *Milan J. Math.*, vol. 73, pp. 259–287, 2005. [Online]. Available: https://doi.org/10.1007/s00032-005-0047-8

[28] A. A. Pankov and K. Pflüger, "On a semilinear Schrödinger equation with periodic potential," *Nonlinear Anal.*, vol. 33, no. 6, pp. 593–609, 1998. [Online]. Available: https://doi.org/10.1016/S0362-546X(97)00689-5

[29] S. I. Pohožaev, "On the eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$," *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 165, pp. 36–39, 1965.

[30] P. H. Rabinowitz, "On a class of nonlinear Schrödinger equations," *Z. Angew. Math. Phys.*, vol. 43, no. 2, pp. 270–291, 1992. [Online]. Available: https://doi.org/10.1007/BF00946631

[31] M. Schneider, "Entire solutions of semilinear elliptic problems with indefinite nonlinearities," Ph.D. dissertation, Universität Mainz, 2001.

[32] R. S. Vieira, "Problemas elípticos com potencial que pode tender a zero no infinito," Ph.D. dissertation, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, 2013. [Online]. Available: http://hdl.handle.net/11449/108920

[33] M. Willem, *Minimax Theorems*, ser. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996, vol. 24. [Online]. Available: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4146-1

[34] J. F. Yang and X. P. Zhu, "On the existence of nontrivial solution of a quasilinear elliptic boundary value problem for unbounded domains. II. Zero mass case," *Acta Math. Sci. (English Ed.)*, vol. 7, no. 4, pp. 447–459, 1987. [Online]. Available: https://doi.org/10.1016/S0252-9602(18)30466-1

[35] X. P. Zhu and J. F. Yang, "The quasilinear elliptic equation on unbounded domain involving critical Sobolev exponent," *J. Partial Differential Equations*, vol. 2, no. 2, pp. 53–64, 1989. [Online]. Available: https://pt.overleaf.com/project/5e6fb634f977c800012dc7f9

Índice Remissivo

Alaoglu
teorema de, 80

Bachman
notação de, 76
Banach
teorema de, 80

Carathéodory
função de, 19

derivada de
Fréchet, 80
Gâteaux, 80
desigualdade de
Gagliardo, 77
Hardy, 60
Hölder, 76
Nirenberg, 77
Poincaré, 76
Sobolev, 77
Dirichlet
problema de, 11

energia
cinética, 10
funcional de, 17
potencial, 10
equação
linear, 11
semilinear, 11
equação de
Schrödinger, 10, 11, 21, 23, 24
espaços de funções, 75
estrutura variacional, 17
Euler
funcional de, 17

Fatou
lema de, 78
Fréchet
derivada de, 80
funcional de
energia, 17
Euler-Lagrange, 17
função de
suporte compacto, 12
função teste, 12
fórmula de integração por partes, 78

Gagliardo
desigualdade de, 77
gradiente, 12
Green
teorema de, 78
Gâteaux
derivada de, 80

Hardy
desigualdade de, 60
Hölder
desigualdade de, 76

identidade de
Pohožaev, 18, 79
integração por partes
fórmula de, 78

Kondrachov
teorema de, 79

Lagrange
funcional de, 17
Landau
notação de, 76
Lema de
Fatou, 78

Nirenberg
desigualdade de, 77
notação de Bachman-Landau, 76
não linearidade, 11

operador traço, 80

passo da montanha
    teorema do, 81
Pohožaev
    identidade de, 18, 79
Poincaré
    desigualdade de, 76
ponto crítico, 17
potencial, 11
problema de
    Dirichlet, 11

regularidade, 16
Rellich
    teorema de, 79

Schrödinger
    equação de, 21, 23, 24
        dependente do tempo, 10
        independente do tempo, 11
Sobolev
    desigualdade de, 77
    teorema de, 77
solução
    bound state, 21
    clássica, 12
    fraca, 14
    ground state, 21, 25, 57

Teorema da
    convergência monótona, 78
    convergência dominada, 79
Teorema de
    Banach-Alaoglu, 80
    Green, 78
    Rellich-Kondrachov, 79
    Sobolev, 77
Teorema do
    passo da montanha, 81
    valor médio, 78
traço
    operador, 80