

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Departamento de Matemática (ICEx)
Especialização em Matemática



Washington Mariano Praxedes



CAMPO DE VETORES HÖLDER CONTÍNUO TANGENTE A VÁRIAS FOLHEAÇÕES

Belo Horizonte
2022

Washington Mariano Praxedes

CAMPO DE VETORES HÖLDER CONTÍNUO TANGENTE A VÁRIAS FOLHEAÇÕES

Versão Final

Monografia de especialização apresentada ao Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas (ICEx) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), como requisito parcial à obtenção do título de Especialista em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alberto Berly Sarmiento Vera

Belo Horizonte
2022

2022, Washington Mariano Praxedes
Todos os direitos reservados

:

Praxedes, Washington Mariano.

P919c Campo de vetores Hölder contínuo tangente a várias folheações [manuscrito] / Washington Mariano Praxedes. — 2022.
75.f. il.

Orientador: Alberto Berly Sarmiento Vera.
Monografia (especialização) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.

Referências: f. 74-75.

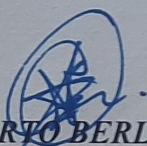
1. Matemática. 2. Campos vetoriais. 3 Folheações (Matemática). I. Sarmiento Vera, Alberto Berly. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática .III. Título.

CDU 51 (043)

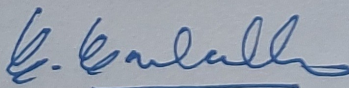
Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende Costa CRB 6/1510 Universidade Federal de Minas Gerais - ICEx

ATA DA DEFESA DE MONOGRAFIA DO ALUNO WASHINGTON MARIANO PRAXEDES, REGULARMENTE MATRICULADO NO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA, DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS, DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, REALIZADA NO DIA 23 DE MARÇO DE 2022.

Aos vinte e três dias do mês de março de 2022, às 14h00, em reunião pública virtual na Plataforma Google Meet pelo link https://teams.microsoft.com/l/meetup-join/19%3aJiujm7K9FGmjt1YWaCuyntopBCYu_y7Z2iMbp31-W-01%40thread.tacv2/1647455943460?context=%7b%22Tid%22%3a%2264126139-4352-4cd7-b1fb-2a971c6f69a6%22%2c%22Oid%22%3a%22e107b1dd-2cc9-4f3d-8030-c8f7af80d5f8%22%7d (conforme mensagem eletrônica da Pró-Reitoria de Pós-Graduação de 26/03/2020, com orientações para a atividade de defesas de trabalhos durante a vigência da Portaria nº 1819), reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pela Coordenação do curso de Especialização em Matemática, para julgar a defesa de monografia do aluno **Washington Mariano Praxedes**, intitulada: "*Campo de Vetores Holder contínuo tangente a várias folheações*", requisito final para obtenção do Grau de Especialista em Matemática. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Alberto Berly Sarmiento Vera, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares do trabalho final, passou a palavra ao aluno para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa do aluno. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se reservadamente sem a presença do aluno e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: o aluno foi considerado aprovado, sem ressalvas e por unanimidade, com nota 95 e conceito A. O resultado final foi comunicado publicamente ao aluno pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 23 de março de 2022.



PROF. DR. ALBERTO BERLY SARMIENTO VERA
Orientador (UFMG)



PROF. DR. CARLOS MARIA CARBALLO
Examinador (UFMG)



PROF. DR. JAVIER ALEXIS CORREA MAYOBRE
Examinador (UFMG)

Dedico este trabalho a todos que contribuem para o desenvolvimento e divulgação do
conhecimento matemático.

Também dedico a todos que acreditam na educação pública de qualidade, fornecendo
oportunidade para aqueles que dela necessitam.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus que me proporcionou o dom da vida para desfrutar dessa fantástica experiência.

Agradeço a todo corpo docente e demais funcionários da UFMG que se dedicam incessavelmente para que esta instituição seja sempre reconhecida por seu alto grau de excelência no desenvolvimento do conhecimento científico.

Resumo

O objetivo deste trabalho é trazer a resposta positiva apresentada por Bonatti e Franks à pergunta proposta por Wilkinson sobre a existência ou não de um campo vetorial não-singular contínuo de \mathbb{R}^2 tangente a mais de uma folheação. Com isso, como os fibrados centrais são sempre Hölder contínuos, Bonatti e Franks fornecem um exemplo de um campo vetorial contínuo Hölder em \mathbb{R}^2 com a propriedade de que existe uma família de folheações de classe C^1 distintas e tangente a cada folheação, sendo cada folha de cada folheação o gráfico de uma função de classe C^r de \mathbb{R} em \mathbb{R} .

Palavras chave: Funções Hölder contínuas, Conjunto de Cantor, Campo de vetores, Folheações.

Abstract

The objective of this work is to bring the positive answer presented by Bonatti and Franks to the question proposed by Wilkinson about the existence or not of a continuous non-singular vector field of \mathbb{R}^2 tangent to more than one foliation. Thus, as the central bundles are always continuous Hölder, Bonatti and Franks provide an example of a continuous vector field Hölder in \mathbb{R}^2 with the property that there is a family of foliations of class C^1 distinct and tangent to each foliation, with each leaf of each foliation being the graph of a function of class C^r from \mathbb{R} to \mathbb{R} .

Keywords: Hölder continuous functions, Cantor's set, Vectors field, Foliations.

Sumário

Resumo	6
1 Introdução	9
Introdução	9
2 Conceitos Preliminares	11
2.1 Resultados de Análise na Reta	11
2.2 Campos Vetoriais, Curvas Integrais e Folheações	20
2.2.1 Campos Vetoriais e Curvas Integrais	20
2.2.2 Folheações	25
3 Funções Hölder Contínuas: A Função de Cantor	29
3.1 Funções Hölder Contínuas	29
3.2 O Conjunto de Cantor	34
3.2.1 Representação de um Número Real na Base Ternária	34
3.2.2 Construção do Conjunto de Cantor	39
3.3 A Função de Cantor	44
4 Teorema de Bonatti-Franks	55
4.1 Demonstração do Teorema A	55
4.1.1 Construção da Função Fundamental g_r	56
4.1.2 Construção da Folheação Inicial \mathcal{F}_0	63
4.1.3 Construção do Campo de Vetores Hölder Contínuo X Tangente a \mathcal{F}_0	64
4.1.4 Construção das Infinitas Folheações Tangentes ao Campo de Vetores X	67
5 Considerações Finais	73
Considerações Finais	73
Referências	74

Introdução

Sistemas dinâmicos é o estudo do comportamento a longo prazo de sistemas em evolução. A teoria moderna dos sistemas dinâmicos originou-se no final do século XIX com Henry Poincaré com questões fundamentais relativas à estabilidade e evolução do sistema solar. As tentativas de responder a essas perguntas levaram ao desenvolvimento de um campo rico e poderoso com aplicações em física, biologia, meteorologia, astronomia, economia e outras áreas. Como resultado das pesquisas anteriores, a partir da década dos anos sessenta, S. Smale e colaboradores no oeste e D. Anosov, Ya. Sinai e V. Arnold no leste, chegaram a dar uma descrição detalhada em uma grande classe de sistemas, nascendo assim a Teoria Hiperbólica. Com isso, os Sistemas Dinâmicos ganham corpo de uma área de pesquisa que estuda a estabilidade estrutural, genericidade, densidade, etc.

Em termos gerais, um sistema dinâmico suave é chamado hiperbólico se o espaço tangente se decompõe em duas direções complementares invariantes, uma que se contrai e outra que se expande sob a ação do sistema. No caso clássico, chamado uniformemente hiperbólico, requer-se que as taxas de expansão e contração sejam uniformes. Ao longo dos anos, a noção de hiperbolicidade foi ampliada para hiperbolicidade não uniforme, parcialmente hiperbólico e decomposição dominada.

Nos sistemas parcialmente hiperbólicos, o espaço tangente se divide em três direções complementares, uma que se contrai uniformemente (chamada direção estável forte) e outra que se expande uniformemente (chamada direção instável forte) e a terceira é chamada de direção central. Cada uma destas três direções são Hölder contínuas. Argumentos dinâmicos comprovam a existência de folheações tangentes às direções estável forte e instável forte, isto é, são unicamente integráveis. Quando a direção central possui uma folheação tangente a

esta e é regular em certo sentido (veja Hirsch-Pugh-Shub [6] para a afirmação precisa) ela é estruturalmente estável, ou seja, cada pequena perturbação C^1 da dinâmica admite uma folheação central que é conjugada à inicial. Muitos trabalhos sobre essas classes de difeomorfismos assumem a existência de uma folheação central invariante.

A direção central ainda não é bem compreendida, a falta de conhecimento sobre a direção central é um problema importante nesta teoria. Em 2018, Bonatti e Franks (em [1]) conjecturaram que, se a direção central tiver dimensão maior que 2, ela pode ser não integrável. Se a direção central tiver dimensão 1, também não sabemos se é univocamente integrável, ou se existe uma folheação tangente a ela, ou se existe uma folheação invariante tangente a ela (se houver muitas folheações tangentes a ela, talvez nenhuma delas sera invariante). Em [1] é colocada a seguinte questão:

Pergunta. “Existem difeomorfismos robustamente transitivos ou ergódicos estáveis de uma 3-variedade fechada, tendo uma direção central unidimensional que não é tangente a uma folheação invariante única?”

Para resolver este problema, Wilkinson perguntou se existe um campo vetorial não-singular contínuo de \mathbb{R}^2 tangente a mais de uma folheação. Bonatti e Franks (em [1]) fornece uma resposta positiva a esta pergunta. Como os fibrados centrais são sempre Hölder contínuos, eles dão um exemplo Hölder contínuo, isto é, o seguinte teorema:

Teorema A ([1]): “Para todo $1 \leq r < \infty$ existe um campo vetorial Hölder contínuo X em \mathbb{R}^2 com a propriedade de que existe uma família de folheações \mathcal{F}_t de classe C^1 distintas aos pares para $t \in [0, 1]$ tal que X é tangente a cada folheação. Além disso, cada folha de cada folheação é o gráfico de uma função de classe C^r de \mathbb{R} em \mathbb{R} .”

O objetivo desta monografia é apresentar a prova completa deste teorema, para isto apresentamos no primeiro capítulo alguns conceitos preliminares sobre análise na reta, equações diferenciais e folheações. No segundo capítulo foi feita uma introdução do conceito de funções Hölder contínuas com a análise de alguns exemplos particulares, além da construção do conjunto e da função de Cantor, abordando as suas principais propriedades. Por fim, no terceiro capítulo provamos o teorema dos autores Bonatti e Franks sobre campo de vetores Hölder contínuo tangente a folheações, seguido das considerações finais.

Conceitos Preliminares

Neste capítulo apresentamos os resultados que usaremos nos próximos capítulos. Na Seção 2.1 vamos assumir que o leitor possui conhecimentos básicos da disciplina de análise na reta, como topologia na reta, limites, continuidade e diferenciação (recomendamos, se necessário, a leitura do livro do professor Elon Lima [8]). Na Seção 2.1 vamos apenas enunciar algumas definições e resultados que vamos utilizar nos próximos capítulos. Na Seção 2.2 apresentamos os conceitos básicos de equações diferenciais, campos de vetores, curvas integrais, o Teorema Fundamental de Existência e Unicidade e, finalmente, apresentamos o conceito de *folheações* em \mathbb{R}^n . Para isso, foram tomados como referências principais os textos de Elon Lima ([8] [9] [7]), Figueiredo-Neves [3] e Camacho-Neto [2].

2.1 Resultados de Análise na Reta

Como indicado na introdução, vamos apenas enunciar resultados que usaremos nos próximos capítulos.

O seguinte teorema fornece uma equivalência entre conjuntos abertos e fechados de números reais.

Teorema 2.1. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, seu complementar $\mathbb{R} \setminus X$ é aberto.*

Demonstração. (\Rightarrow) Seja um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ fechado. Logo, todo ponto aderente a X pertence a X . Considere o conjunto $A = \mathbb{R} \setminus X$. Então, para todo ponto $a \in A$, temos que $a \notin X$ e, conseqüentemente, a não é ponto aderente a X . Logo, para todo ponto $a \in A$, existe um intervalo aberto $I \subset A$ tal que $a \in I$ e $I \cap X = \emptyset$. Com isso, temos que todo ponto $a \in A$ é um ponto interior

de A . Portanto, conclui-se que $A = \mathbb{R} \setminus X$ é um conjunto aberto.

(\Leftarrow) A prova da recíproca é feita observando o sentido contrário da demonstração anterior, visto a equivalência das afirmações. \square

Definição 2.1. Uma cobertura de $X \subset \mathbb{R}$ é uma família $K = (K_\lambda)_{\lambda \in L}$ de conjuntos $K_\lambda \subset \mathbb{R}$ tais que $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} K_\lambda$, ou seja, para todo $x \in X$ existe algum $\lambda \in L$ tal que $x \in K_\lambda$. Uma subcobertura de K é uma subfamília $K' = (K_\lambda)_{\lambda \in L'}$, $L' \subset L$ em que ainda temos $X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} K_\lambda$.

Definição 2.2. Uma cobertura de $X \subset \mathbb{R}$ é uma família $K = (K_\lambda)_{\lambda \in L}$ de conjuntos $K_\lambda \subset \mathbb{R}$ tais que $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} K_\lambda$, ou seja, para todo $x \in X$ existe algum $\lambda \in L$ tal que $x \in K_\lambda$. Uma subcobertura de K é uma subfamília $K' = (K_\lambda)_{\lambda \in L'}$, $L' \subset L$ em que ainda temos $X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} K_\lambda$.

O Teorema de Borel-Lebesgue enunciado a seguir traz um resultado importante sobre coberturas de conjuntos compactos.

Teorema 2.2. (Borel-Lebesgue) Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto. Toda cobertura $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ de X feita por meio de abertos A_λ possui subcobertura finita $X \subset A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup \dots \cup A_{\lambda_n}$.

Demonstração. Considere um conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}$. Logo, o conjunto X é fechado e limitado. Então, pelo Teorema 2.1, tem-se que o complementar de X em \mathbb{R} dado por $A = \mathbb{R} \setminus X$ é um conjunto aberto. Como X é limitado, segue que existe um intervalo fechado e limitado $[a, b]$ que contém X . Seja $(I_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de intervalos abertos tais que $[a, b] \subset \bigcup_{\lambda \in L} I_\lambda$. Será provado inicialmente que o intervalo $[a, b]$ admite uma subcobertura finita de intervalos abertos I_λ . Considere o conjunto K dos pontos $k \in [a, b]$ tais que os intervalos $[a, k]$ podem ser cobertos por um número finito de intervalos I_λ , ou seja, $[a, k] \subset I_{\lambda_1} \cup I_{\lambda_2} \cup \dots \cup I_{\lambda_n}$. Logo, temos que $K \neq \emptyset$, pois $a \in K$. Dado $c = \sup(K)$, segue que $c \in [a, b]$ e, conseqüentemente, $c \in I_{\lambda_0} = (\alpha, \beta)$ para algum $\lambda_0 \in L$. Sendo $\alpha < c$ e $c = \sup(K)$ então existe $k \in K$ tal que $\alpha < k \leq c$. Com isso, temos que $k \in I_{\lambda_0}$. Mas, como $k \in K$ então $[a, k] \subset I_{\lambda_1} \cup I_{\lambda_2} \cup \dots \cup I_{\lambda_n}$ e $[a, c] \subset (I_{\lambda_1} \cup I_{\lambda_2} \cup \dots \cup I_{\lambda_n}) \cup I_{\lambda_0}$. Isso prova que $c \in K$. Agora, será provado que $c = b$. De fato, se tiver $c < b$ então existiria $c' \in I_{\lambda_0}$ tal que $c < c' < b$. Sendo assim, temos que $[a, c'] \subset I_{\lambda_1} \cup I_{\lambda_2} \cup \dots \cup I_{\lambda_n} \cup I_{\lambda_0}$ e, conseqüentemente, $c' \in K$, o que é um absurdo, pois $c' > c$ e $c = \sup(K)$. Portanto, segue que $c = b$ e $[a, b] \subset I_{\lambda_1} \cup I_{\lambda_2} \cup \dots \cup I_{\lambda_n}$, isto é, $[a, b]$ está contido numa reunião finita de intervalos I_λ . Por fim, como $\left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \right) \cup A = \mathbb{R}$, temos que $[a, b] = \left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda \right) \cup A$. Extraíndo-se uma subcobertura finita de

abertos de $[a, b]$ dada por $(A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup \dots \cup A_{\lambda_n}) \cup A$, verifica-se que $X \subset A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup \dots \cup A_{\lambda_n}$, visto que $X \cap A = \emptyset$, o que conclui a demonstração. \square

Definição 2.3. Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ possui medida nula se para qualquer número real $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente existir uma cobertura finita ou infinita enumerável de X dada por uma família de intervalos $(I_k)_{k \in L}$ com $I_k \subset \mathbb{R}$, ou seja, $X \subset \bigcup_{k \in L} I_k$ com $L \subset \mathbb{N}$ e $\sum_{k \in L} |I_k| < \varepsilon$.

A seguir, serão feitas considerações sobre algumas propriedades da união e interseção entre conjuntos e famílias de conjuntos de números reais.

Teorema 2.3. Sejam os conjuntos X_1, X_2, \dots, X_n com $X_i \subset \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Então,

$$(\mathbb{R} \setminus X_1) \cap (\mathbb{R} \setminus X_2) \cap \dots \cap (\mathbb{R} \setminus X_n) = \mathbb{R} \setminus (X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n).$$

Demonstração. Dado um ponto $x \in (\mathbb{R} \setminus X_1) \cap (\mathbb{R} \setminus X_2) \cap \dots \cap (\mathbb{R} \setminus X_n)$, então $x \in \mathbb{R} \setminus X_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Logo, x pertence ao complementar em \mathbb{R} de X_i para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Com isso, verificamos que $x \notin X_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ e, conseqüentemente, $x \in \mathbb{R} \setminus (X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n)$, ou seja, $(\mathbb{R} \setminus X_1) \cap (\mathbb{R} \setminus X_2) \cap \dots \cap (\mathbb{R} \setminus X_n) \subset \mathbb{R} \setminus (X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n)$. Agora, considere $x \in \mathbb{R} \setminus (X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n)$, então $x \notin X_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Sendo assim, temos que x pertence ao complementar em \mathbb{R} de X_i para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Portanto, x pertence à interseção dos complementares dos conjuntos X_i para todo $i = 1, 2, \dots, n$, ou seja, $x \in (\mathbb{R} \setminus X_1) \cap (\mathbb{R} \setminus X_2) \cap \dots \cap (\mathbb{R} \setminus X_n)$. Logo, concluímos que $\mathbb{R} \setminus (X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n) \subset (\mathbb{R} \setminus X_1) \cap (\mathbb{R} \setminus X_2) \cap \dots \cap (\mathbb{R} \setminus X_n)$. Portanto, temos que $(\mathbb{R} \setminus X_1) \cap (\mathbb{R} \setminus X_2) \cap \dots \cap (\mathbb{R} \setminus X_n) = \mathbb{R} \setminus (X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n)$. \square

Teorema 2.4. Sejam os conjuntos $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$ com $X_\lambda \subset \mathbb{R}$ para todo $\lambda \in L$. Então,

$$\bigcup_{\lambda \in L} (\mathbb{R} \setminus X_\lambda) = \mathbb{R} \setminus \bigcap_{\lambda \in L} X_\lambda.$$

Demonstração. Se $x \in \bigcup_{\lambda \in L} (\mathbb{R} \setminus X_\lambda)$, então x pertence ao complementar em \mathbb{R} de X_λ para algum $\lambda \in L$. Logo, existe $\lambda_0 \in L$ tal que $x \notin X_{\lambda_0}$. Se existir $\lambda_1 \in L$ tal que $x \in X_{\lambda_1}$, então $x \notin X_{\lambda_0} \cap X_{\lambda_1}$ e, conseqüentemente, $x \notin \bigcap_{\lambda \in L} X_\lambda$. Então, x pertence ao complementar em \mathbb{R} de $\bigcap_{\lambda \in L} X_\lambda$, ou seja, $x \in \mathbb{R} \setminus \bigcap_{\lambda \in L} X_\lambda$. Mas, se $x \notin X_\lambda$ para todo $\lambda \in L$, temos que $x \notin \bigcap_{\lambda \in L} X_\lambda$, isto é, x pertence ao complementar em \mathbb{R} de $\bigcap_{\lambda \in L} X_\lambda$. Com isso, concluímos que $x \in \mathbb{R} \setminus \bigcap_{\lambda \in L} X_\lambda$. Logo, em qualquer situação, temos que $x \in \mathbb{R} \setminus \bigcap_{\lambda \in L} X_\lambda$ e, portanto, $\bigcup_{\lambda \in L} (\mathbb{R} \setminus X_\lambda) \subset \mathbb{R} \setminus \bigcap_{\lambda \in L} X_\lambda$. Agora, considere

$x \in \mathbb{R} \setminus \bigcap_{\lambda \in L} X_\lambda$, então $x \notin \bigcap_{\lambda \in L} X_\lambda$. Logo, dados $\lambda_0, \lambda_1 \in L$, tem-se que $x \notin X_{\lambda_0} \cap X_{\lambda_1}$, ou seja, x não pode pertencer aos dois conjuntos simultaneamente. Se $x \in X_{\lambda_0}$ e $x \notin X_{\lambda_1}$, então x pertence ao complementar em \mathbb{R} de X_{λ_1} , ou seja, $x \in \mathbb{R} \setminus X_{\lambda_1}$ e, conseqüentemente, $x \in \bigcup_{\lambda \in L} (\mathbb{R} \setminus X_\lambda)$.

Da mesma forma, se $x \notin X_{\lambda_0}$ e $x \in X_{\lambda_1}$, segue que x pertence aos complementares em \mathbb{R} de X_{λ_0} e de X_{λ_1} , isto é, $x \in (\mathbb{R} \setminus X_{\lambda_0}) \cup (\mathbb{R} \setminus X_{\lambda_1})$ e, equivalentemente, $x \in \bigcup_{\lambda \in L} (\mathbb{R} \setminus X_\lambda)$. Com isso,

verificamos que, em todos os casos, $x \in \bigcup_{\lambda \in L} (\mathbb{R} \setminus X_\lambda)$ e, sendo assim, $\mathbb{R} \setminus \bigcap_{\lambda \in L} X_\lambda \subset \bigcup_{\lambda \in L} (\mathbb{R} \setminus X_\lambda)$.

Portanto, temos que $\bigcup_{\lambda \in L} (\mathbb{R} \setminus X_\lambda) = \mathbb{R} \setminus \bigcap_{\lambda \in L} X_\lambda$. \square

Teorema 2.5. a) O conjunto \mathbb{R} dos reais e o conjunto vazio \emptyset são abertos.

b) Se $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \subset \mathbb{R}$ são abertos, então $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n$ é aberto.

c) Seja $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família arbitrária de abertos $A_\lambda \subset \mathbb{R}$. A reunião $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um conjunto aberto.

Demonstração. a) Para todo $x \in \mathbb{R}$ existe um intervalo $I_x \subset \mathbb{R}$ tal que $x \in I_x$. Portanto, \mathbb{R} é aberto. De fato, um conjunto não é aberto se este possuir algum ponto que não seja interior a ele. Mas, como o conjunto vazio \emptyset não possui nenhum ponto, segue forçadamente, que ele não tem pontos que não sejam interiores a ele, ou seja, o conjunto vazio \emptyset é aberto.

b) Se $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n = \emptyset$, segue pelo item (a) que $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n$ é aberto. Se $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n \neq \emptyset$, então, dado $x \in A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n$, temos que $x \in A_i$ para todo $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Sendo $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ conjuntos abertos, então existem intervalos abertos $(a_i, b_i) \subset A_i$ tais que $x \in (a_i, b_i)$ para todo $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Tomando-se $a = \text{máximo}(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ e $b = \text{mínimo}(b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$, segue que

$$(a, b) \subset (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2) \cap (a_3, b_3) \cap \dots \cap (a_n, b_n) \subset A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n.$$

Portanto, todo ponto $x \in (a_1, b_1) \cap (a_2, b_2) \cap (a_3, b_3) \cap \dots \cap (a_n, b_n)$ pertence a um intervalo aberto contido em $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n$, permitindo concluir que o conjunto $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n$ é aberto.

- c) Considere um ponto $x \in A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$. Então, existe $\lambda \in L$ tal que $x \in A_\lambda$. Sendo A_λ aberto, segue que existe um intervalo aberto $(a, b) \subset A_\lambda$ tal que $x \in (a, b)$. Com isso, como $x \in (a, b) \subset A_\lambda \subset A$, temos que x é ponto interior de A . Portanto, concluímos que $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um conjunto aberto.

□

Teorema 2.6. a) O conjunto \mathbb{R} dos reais e o conjunto vazio \emptyset são fechados.

b) Se F_1, F_2, \dots, F_n , com $F_i \subset \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \dots, n$, são fechados então $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n$ é fechado.

c) Seja $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família qualquer de conjuntos fechados $F_\lambda \subset \mathbb{R}$ então a interseção $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ é um conjunto fechado.

Demonstração. a) Observe que $\mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$ e que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$. Logo, de acordo com o item (a) do Teorema 2.5, como \mathbb{R} e \emptyset são conjuntos abertos, pelo Teorema 2.1, segue que os conjuntos \mathbb{R} e \emptyset são fechados.

b) Sejam F_1, F_2, \dots, F_n , com $F_i \subset \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \dots, n$, conjuntos fechados. Então, pelo Teorema 2.1, segue que os conjuntos $(\mathbb{R} \setminus F_1), (\mathbb{R} \setminus F_2), \dots, (\mathbb{R} \setminus F_n)$ são conjuntos abertos. Logo, pelo item (b) do Teorema 2.5 temos que a interseção $(\mathbb{R} \setminus F_1) \cap (\mathbb{R} \setminus F_2) \cap \dots \cap (\mathbb{R} \setminus F_n)$ é um conjunto aberto. Mas, pelo Teorema 2.3, temos que

$$(\mathbb{R} \setminus F_1) \cap (\mathbb{R} \setminus F_2) \cap \dots \cap (\mathbb{R} \setminus F_n) = \mathbb{R} \setminus (F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n).$$

Portanto, pelo Teorema 2.1, concluímos que $F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n$ é fechado.

c) Considere $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família qualquer de conjuntos fechados $F_\lambda \subset \mathbb{R}$. Logo, como F_λ é fechado, pelo Teorema 2.1, temos que $\mathbb{R} \setminus F_\lambda$ é aberto para todo $\lambda \in L$. Mas, de acordo com o item (c) do Teorema 2.5, segue que $\bigcup_{\lambda \in L} (\mathbb{R} \setminus F_\lambda)$ é aberto. Com isso, pelo Teorema 2.4, observamos que $\bigcup_{\lambda \in L} (\mathbb{R} \setminus F_\lambda) = \mathbb{R} \setminus \left(\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda \right)$. Portanto, aplicando o Teorema 2.1, concluímos que $F = \bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ é um conjunto fechado.

□

Definição 2.4. *Seja uma função $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dados $x_1, x_2 \in X$, dizemos que f é:*

- *monótona estritamente crescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;*
- *monótona estritamente decrescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;*
- *monótona não-decrescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;*
- *monótona não-crescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.*

Nos casos em que f é estritamente monótona temos que f é injetiva.

A seguir, trataremos as definições de *funções uniformemente contínuas* e de *função lipschitziana* ou *lipschitz*.

Definição 2.5. *Uma função $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua quando, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\forall x, y \in X$ com $|x - y| < \delta$ implica que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

É evidente que toda função *uniformemente contínua* é *contínua*. Para isso, fixar y na definição de continuidade uniforme (lembramos que a continuidade depende do ponto). Mas a recíproca não é verdadeira. Para ver isso, seja a função $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com $X = (0, 1)$, dada por $f(x) = \frac{1}{x}$, que é claramente contínua. Vamos mostrar que f não é uniformemente contínua. De fato, suponha, por absurdo, que f é uniformemente contínua. Então, dado um $\varepsilon_0 > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que para $a \in X, x \in X$ e $|x - a| < \delta$ temos que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon_0$. Por outro lado, pela propriedade arquimediana, para qualquer $\delta > 0$ fixado existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \frac{\delta}{2}$. Tomando $a = \frac{1}{n_0}$ segue que

$$f(a) = f\left(\frac{1}{n_0}\right) = \frac{1}{\frac{1}{n_0}} = n_0$$

e, conseqüentemente, para $x \in X$ e $|x - a| = |x - \frac{1}{n_0}| < \delta$ temos $|f(x) - f(a)| = |f(x) - n_0| < \varepsilon_0$. Sendo $\frac{1}{n_0} < \frac{\delta}{2}$, então $\delta > \frac{2}{n_0}$ e, portanto, o intervalo que satisfaz $|x - \frac{1}{n_0}| < \delta$, dado por $\frac{1}{n_0} - \delta < x < \frac{1}{n_0} + \delta$, assume todos os valores positivos do domínio que estão próximos de zero, visto que $\frac{1}{n_0} - \delta < 0$, e para os quais temos $|f(x) - f(a)| = |f(x) - n_0| \gg \varepsilon_0$, ou seja, $f(x) \gg n_0 + \varepsilon_0$. Logo, isso é um absurdo, permitindo concluir que f não é uniformemente contínua.

Definição 2.6. Uma função $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é lipschitziana ou lipschitz quando existe uma constante real $c > 0$ tal que $x, y \in X$ implica em $|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|$.

Toda função lipschitziana é uniformemente contínua. Para mostrar isso, tome $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$. Em particular, como f é lipschitz, para $x, y \in X$ e $|x - y| < \delta$ temos que

$$|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y| \Rightarrow |f(x) - f(y)| < c \cdot \delta = c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

o que conclui a demonstração.

O teorema descrito a seguir fornece um importante resultado sobre funções contínuas com domínios compactos cuja demonstração pode ser encontrada em Elon Lima [8] (página 239).

Teorema 2.7 (Weierstrass). Seja D um conjunto compacto. Toda função contínua $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada e atinge os seus extremos, ou seja, existem $a, b \in D$ tais que $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ para todo $x \in D$. Em particular, f é limitada em D , ou seja,

$$\exists K > 0, |f(x)| < K \quad \forall x \in D.$$

Teorema 2.8. Seja X compacto. Toda função contínua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua.

Demonstração. Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, f é contínua em cada ponto $x \in X$. Logo, se $x_0 \in X$ então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\bar{\delta} \left(\frac{\varepsilon}{2}; x_0 \right)$ tal que para $x \in X$ e $|x - x_0| < \bar{\delta}$ temos $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Definindo $\delta_x = \frac{\bar{\delta}}{2} > 0$, obtemos

$$x \in X, |x - y| < 2\delta_x \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.1)$$

Com isso, sendo $I_x = (x - \delta_x, x + \delta_x)$, temos que $X \subset \bigcup_{x \in X} I_x$ e a família $\bigcup_{x \in X} I_x$ é uma cobertura de abertos de X que, pelo Teorema 2.2, assume uma subcobertura finita $X \subset I_{x_1} \cup I_{x_2} \cup \dots \cup I_{x_n}$,

pois X é compacto. Tomando $\delta = \inf(\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n})$, verificamos que $\delta > 0$, pois $\{\delta_{x_1}, \dots, \delta_{x_n}\}$ é um conjunto finito com todos os elementos $\delta_{x_i} > 0$, para $i = 1, 2, \dots, n$. Logo, considerando que para todo $x \in X$ temos que $x \in I_{x_j}$, para algum $j \in \{1, \dots, n\}$, então, pela Equação 2.1,

$$|x - x_j| < \delta_{x_j} < 2\delta_{x_j} \Rightarrow |f(x) - f(x_j)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.2)$$

Para $x, y \in X$ com $|x - y| < \delta$, considerando a Equação 2.1 e aplicando a desigualdade triangular, temos

$$|y - x_j| = |y - x + x - x_j| \leq |y - x| + |x - x_j| < \delta + \delta_{x_j} < 2\delta_{x_j} \Rightarrow |f(y) - f(x_j)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.3)$$

Sendo assim, pelas Equações 2.2 e 2.3, aplicando novamente a desigualdade triangular, segue que

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(x_j) + f(y) - f(x_j)| \leq |f(x) - f(x_j)| + |f(y) - f(x_j)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ou seja, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Portanto, f é uniformemente contínua. \square

Definição 2.7. Dados dois pontos $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, dizemos que uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é absolutamente contínua se para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente for possível encontrar $\delta > 0$ tal que para qualquer família finita de intervalos abertos dois a dois disjuntos (a_1, b_1) , (a_2, b_2) , ..., (a_n, b_n) , para algum $n \in \mathbb{N}$, com $(a_k, b_k) \subset [a, b]$ para $k = 1, 2, \dots, n$, se

$$\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$$

então

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

De fato, tomando $n = 1$, vemos que toda função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ absolutamente contínua é contínua em $[a, b]$.

A seguir introduzimos os conceitos de funções reais diferenciáveis e suas implicações.

Definição 2.8. Dado um intervalo I de números reais, uma função $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que f é derivável em um ponto $a \in I$ quando existir o limite

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

em que $f'(a)$ é dita derivada de f no ponto a .

Definição 2.9. Quando uma função $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possui derivada em todos os pontos do intervalo I , ou seja, se a função derivada $f' : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada elemento $x \in I$ à sua derivada $f'(x)$ correspondente ($x \mapsto f'(x)$) for contínua, dizemos que f é continuamente derivável no intervalo I , ou seja, dizemos que f é uma função de classe C^1 .

Definição 2.10. Uma função $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^n ($f \in C^n$) quando f é n vezes derivável em I , isto é, quando a função $f^{(n)} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que associa cada elemento do intervalo I à sua n -ésima derivada correspondente ($x \mapsto f^{(n)}(x)$) for contínua em I . Quando é possível derivar f quantas vezes desejar, ou seja, quando $f \in C^n$ para todo $n = 1, 2, 3, \dots$, dizemos que f é de classe C^∞ ou $f \in C^\infty$. Particularmente, $f \in C^0$ significa que f é contínua em I .

Particularmente, quando uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em um ponto $a \in \mathbb{R}$ temos que

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + r(h),$$

tal que $r(h)$ é o resto correspondente a um infinitésimo de ordem maior do que 1 em relação a h , ou seja, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$. Se $f \in C^n$ no ponto a então existe um polinômio p de grau menor ou igual a n , denominado *Polinômio de Taylor de f no ponto a* , tal que

$$f(a+h) = p(h) + r(h),$$

onde

$$p(h) = \sum_{i=0}^n f^{(i)}(a) \cdot h^i \text{ e } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0.$$

O teorema seguinte, encontrado em Elon Lima [8] (página 281), traz um resultado importante sobre o assunto.

Teorema 2.9. Seja $r : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n vezes derivável ($r \in C^n$) no ponto $0 \in I$. Então

$$r(0) = r'(0) = r''(0) = \dots = r^{(n)}(0) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{r(x)}{x^n} = 0.$$

O teorema a seguir trata da mudança de variável no processo de integração de funções.

Teorema 2.10 (Mudança de Variável na Integral). Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ um caminho contínuo e $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$ uma função com derivada integrável. Então

$$\int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x) dx = \int_c^d f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt.$$

2.2 Campos Vetoriais, Curvas Integrais e Folheações

Na sequência, serão introduzidos os conceitos de *campos de vetores*, de *curvas integrais* e de *folheações* em \mathbb{R}^n .

2.2.1 Campos Vetoriais e Curvas Integrais

Definição 2.11. *Um campo de vetores ou campo vetorial $X : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação de um aberto Ω do espaço \mathbb{R}^n que associa a cada ponto $p \in \Omega$ um vetor $X(p)$. O campo de vetores $X(p) = (f_1(p), f_2(p), \dots, f_n(p))$ é de classe C^k se cada componente $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^k ($k = 0, 1, 2, \dots, \infty$).*

Notação: O conjunto de vetores da base canônica $\{e_1, e_2, \dots, e_k, \dots, e_n\}$ em que

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0, 0), \quad \dots,$$

$$e_k = (0, 0, 0, \dots, 0, \underbrace{1}_{k\text{-ésima posição}}, 0, \dots, 0, 0, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 0, \underbrace{1}_{n\text{-ésima posição}})$$

será representado por

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\} \text{ tal que } e_k = \frac{\partial}{\partial x_k}, \text{ para todo } 1 \leq k \leq n.$$

Dessa forma, um campo vetorial em \mathbb{R}^n terá a sua representação dada por

$$X(p) = (f_1(p), f_2(p), \dots, f_n(p)) = f_1(p) \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2(p) \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + f_k(p) \frac{\partial}{\partial x_k} + \dots + f_n(p) \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Em particular, para \mathbb{R}^2 , temos

$$X(p) = (f(p), g(p)) = f(p) \frac{\partial}{\partial x_1} + g(p) \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Todo campo de vetores $X : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ está associado a uma equação diferencial da seguinte forma:

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x'_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ x'_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (2.4)$$

Vamos escrever este sistema simplesmente na forma vetorial $x' = X(x)$, $\forall x \in \Omega$.

Definição 2.12. Dados um ponto $p_0 \in \Omega$ e um campo vetorial $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k , chamamos curva integral do campo X , com condição inicial p_0 , a um caminho diferenciável $\lambda : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\lambda(0) = p_0$ e $\lambda'(t) = X(\lambda(t))$, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Isto é, $\lambda(t)$ satisfaz a Equação Diferencial (2.4). Assim, λ também é chamada de solução da EDO com condição inicial.

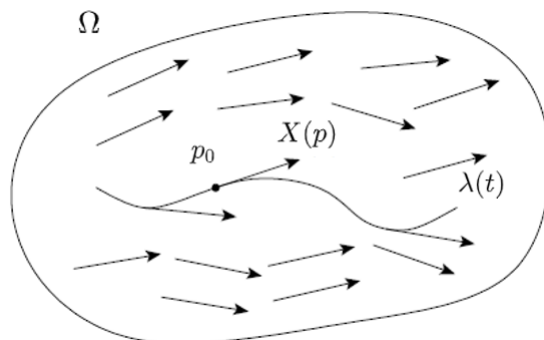


Figura 2.1 – Campo vetorial X associando o vetor $X(p) \in \mathbb{R}^n$ para todo $p \in \Omega$.

De fato, o vetor-velocidade de uma curva integral de X em um determinado ponto de Ω é dado pelo vetor associado a este ponto pelo campo vetorial X .

Exemplo 2.1. Considere o campo vetorial $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$X(x, y) = (1, 3y^{\frac{2}{3}}) = (1)e_1 + (3y^{\frac{2}{3}})e_2 = (1)\frac{\partial}{\partial x} + (3y^{\frac{2}{3}})\frac{\partial}{\partial y}$$

e que está associado à equação diferencial ordinária (EDO)

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 3y^{\frac{2}{3}} \end{cases} \quad (2.5)$$

A figura a seguir mostra o campo vetorial correspondente a X .

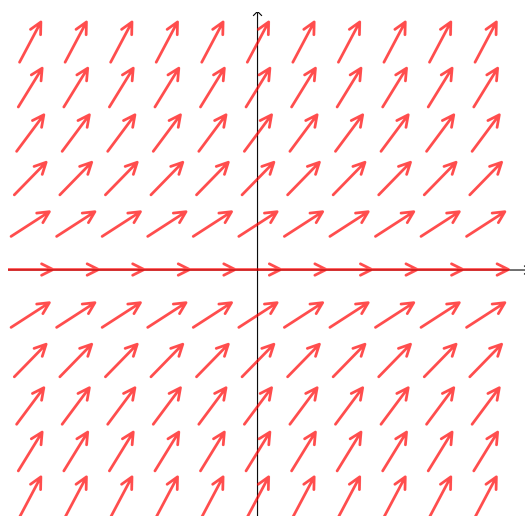


Figura 2.2 – Campo vetorial $X = (1) \frac{\partial}{\partial x} + (3y^{\frac{2}{3}}) \frac{\partial}{\partial y}$.

As soluções da EDO 2.5 são dadas pelas curvas integrais $\lambda(t) = (x(t), y(t))$ onde

$$\begin{cases} x(t) = t + c_1 \\ y(t) = (t + c_2)^3 \end{cases} \quad (2.6)$$

Logo, temos que

$$x'(t) = 1 \quad e \quad y'(t) = 3(t + c_2)^2 = 3[(t + c_2)^3]^{\frac{2}{3}} = 3y^{\frac{2}{3}}.$$

A figura seguinte mostra as curvas soluções da pela EDO 2.5.

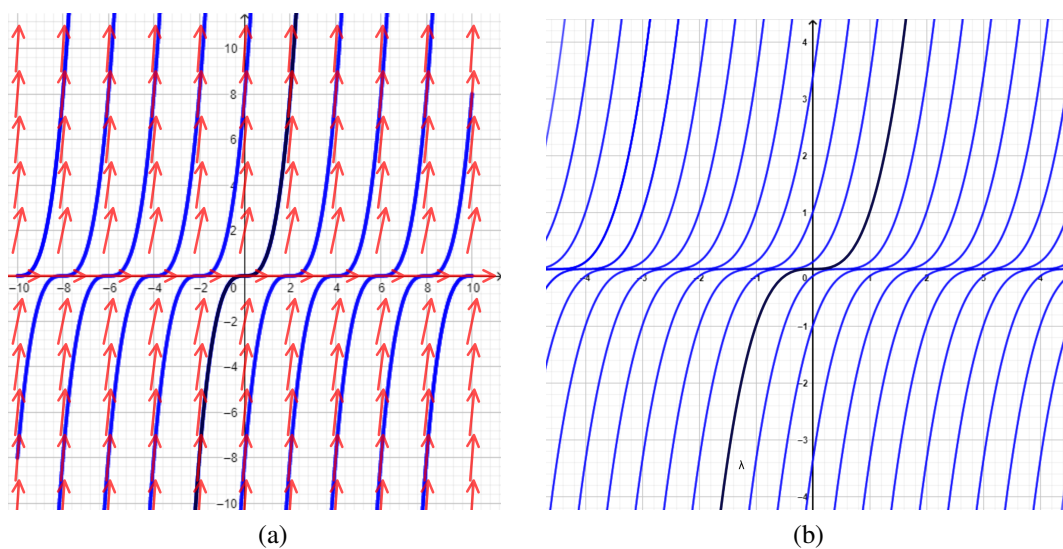


Figura 2.3 – Curvas soluções da EDO 2.5.

Em particular, a solução dada pela Equação 2.6 com condição inicial $\lambda(0) = (0,0)$ é $\lambda_1(t) = (t, t^3)$. Por outro lado, a curva $\lambda_2(t) = (t, 0)$ também satisfaz a EDO 2.5 e também tem condição inicial $\bar{\lambda}(0) = (0,0)$ (ver Figura 2.4a). Logo, temos que a EDO 2.5 não possui unicidade de soluções com condição inicial $p_0 = (0,0)$. Da mesma forma, para cada condição inicial $\lambda(0) = (c_1, 0)$ (sobre o eixo x) passam pelo menos duas soluções $\lambda_1(t) = (t + c_1, (t + c_1)^3)$ e $\bar{\lambda}(t) = (t + c_1, 0)$ (ver Figura 2.4b), ao contrário dos demais pontos fora dessa reta os quais possuem soluções únicas.

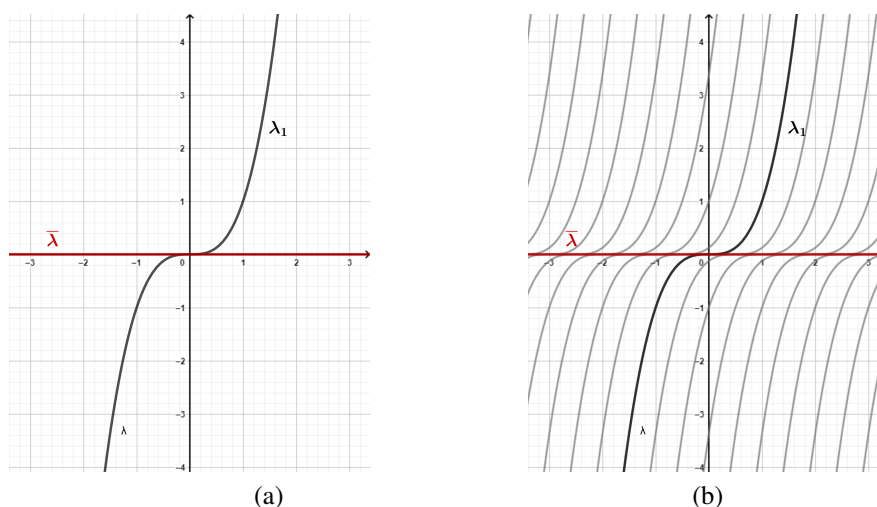


Figura 2.4 – Condições iniciais com duplas soluções da EDO 2.5.

Na verdade, considerando a solução da EDO 2.5 com condição inicial $p_0 = (0,0)$, além das duas soluções apontadas na Figura 2.4a, existem infinitas curvas soluções com essa mesma condição inicial geradas por combinações das curvas $\bar{\lambda}(t) = (t, 0)$ e $\lambda_1(t) = (t + c_1, (t + c_1)^3)$ de três formas distintas, como visto na Figura 2.5, o que é análogo para qualquer outra condição inicial sobre o eixo x .

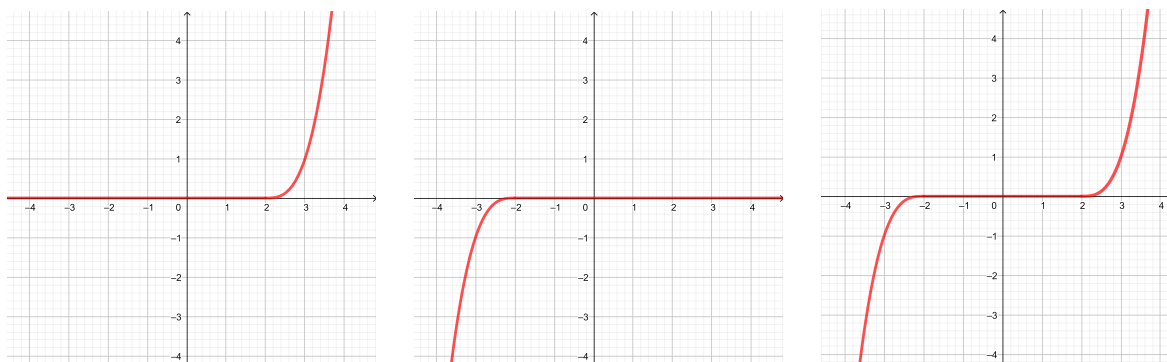


Figura 2.5 – Infinitas soluções da EDO 2.5 para p_0 pertencente à reta $y = 0$.

O Teorema da Existência e Unicidade enunciado a seguir, também conhecido como Teorema de Picard, traz um importante resultado sobre as curvas integrais cuja demonstração pode ser vista em Elon Lima [9] (página 28) ou em Sotomayor [10] (página 13).

Teorema 2.11 (Teorema da Existência e da Unicidade (Picard)). *Sejam Ω um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n e $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial Lipschitz. Dado qualquer ponto $p_0 \in \Omega$, existe uma curva integral $\lambda : (-c, c) \rightarrow \Omega$ do campo vetorial X com a condição inicial $\lambda(0) = p_0$. Se $\mu : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega$ for outra curva integral de X com $\mu(0) = p_0$, então $\lambda = \mu$ num intervalo $(-\delta, \delta) \subset (-c, c) \cap (-\varepsilon, \varepsilon)$.*

De fato, o campo vetorial abordado no Exemplo 2.1 não infringe o Teorema 2.11 de existência e unicidade de soluções, visto que o campo vetorial correspondente a ele não é Lipschitz, o que será visto no Exemplo 3.1 da Seção 3.1.

Definição 2.13. Um ponto $p \in \Omega$ é dito singular ou crítico se $X(p) = 0$.

Nesta situação, $\lambda(t) = p, \forall t \in \mathbb{R}$ é solução ou curva integral do sistema $x' = X(x)$. São chamados de *pontos estacionários*. A figura a seguir mostra o exemplo do dois campos vetoriais cujo único ponto singular de ambos consiste em $P = (0, 0)$.

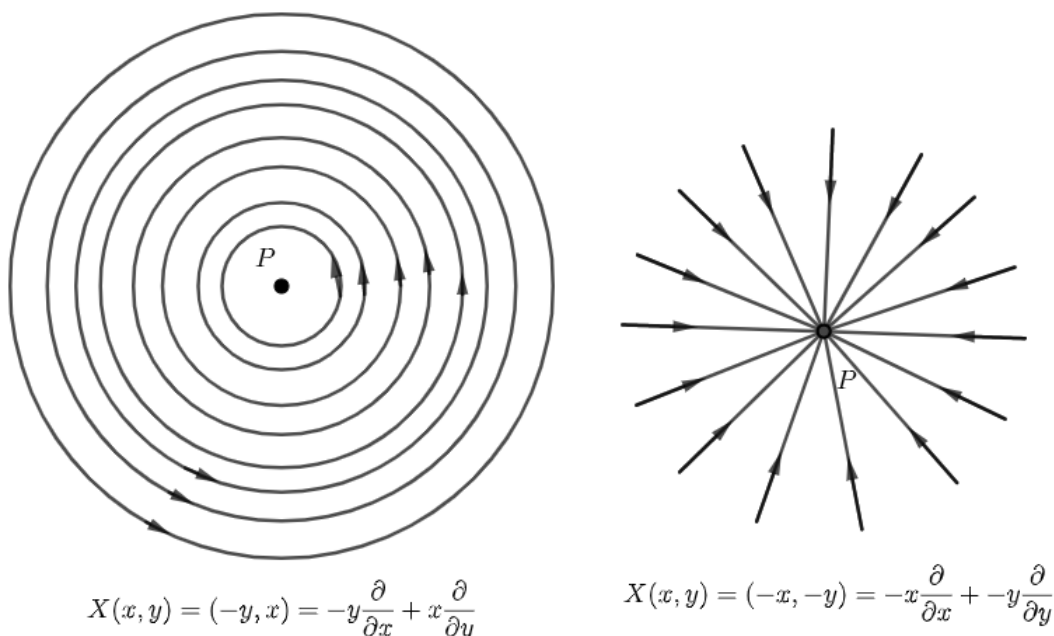


Figura 2.6 – Campos vetoriais com ponto singular na origem.

2.2.2 Folheações

Intuitivamente uma folheação (contínua) de dimensão 1 no plano \mathbb{R}^2 é uma decomposição (ou partição) do plano em curvas (contínuas) duas a duas disjuntas. Mais precisamente:

Definição 2.14. Uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ possui uma folheação se tem uma cobertura $\{U_i\}_{i \in \Delta}$ de Ω e a família de homeomorfismos $\{\varphi_i : U_i \rightarrow \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^2\}$ tal que $\{\varphi_i^{-1}((\mathbb{R} \times \{y\}) \cap \varphi_i(U_i)); y\}$ define arcos de curvas conexas em Ω . (Figura 2.7)

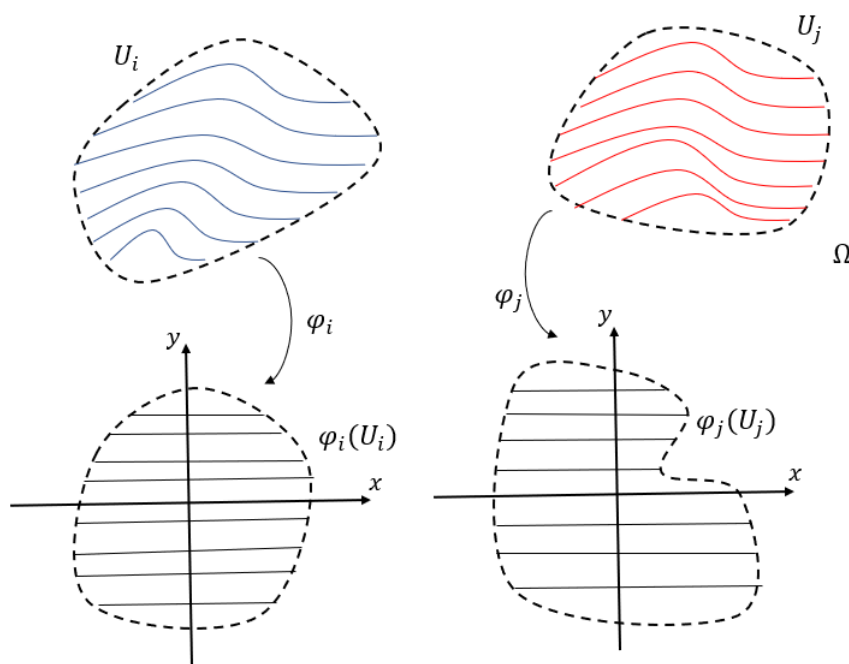


Figura 2.7 – Representação de conjuntos da cobertura $\{U_i\}_{i \in \Delta}$ de Ω com suas respectivas imagens.

A família $\{(U_i, \varphi_i)\}$ deve satisfazer a condição de transição (coerência ou compatibilidade). Isto é, $\forall i \neq j$ se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então

$$\varphi_{ij} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \text{ é da forma } \varphi_{ij}(x, y) = (\alpha_{ij}(x, y), \gamma_j(y)).$$

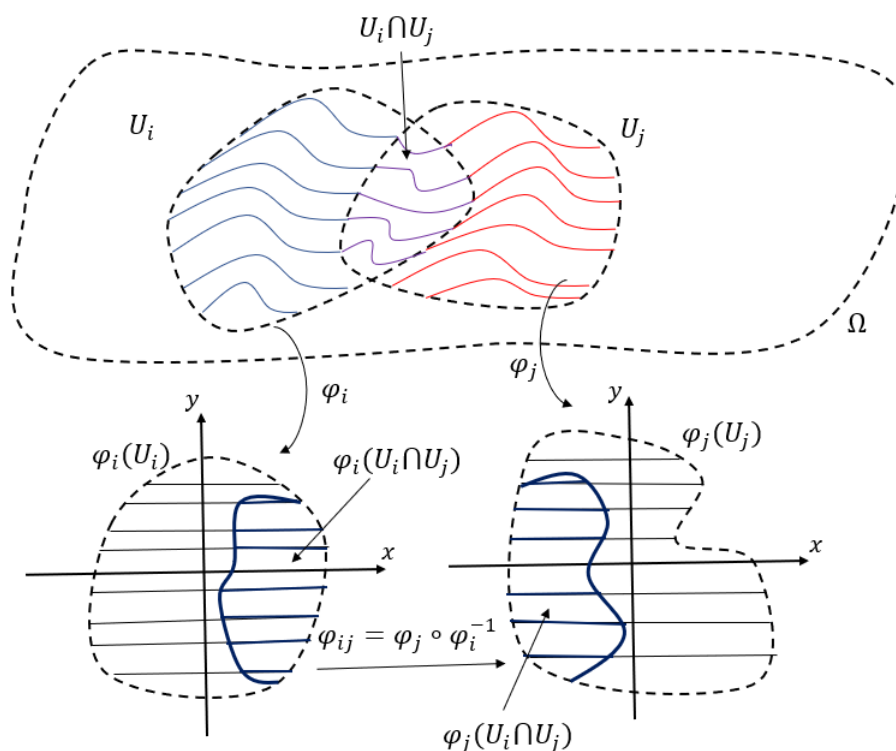


Figura 2.8 – Condição de transição entre os abertos da folheação.

O fato de que γ_j depende apenas da variável y faz com que os arcos de curvas conexas definidas por φ_i e os arcos de curvas conexas definidas por φ_j coincidam em $U_i \cap U_j$.

- Denotamos por $\mathcal{F} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \Delta}$ a folheação.

Os arcos de curvas conexas definidas por (U_i, φ_i) são chamados de *placas da folheação*. A união maximal de placas que se interceptam formam curvas conexas chamadas de *folhas da folheação*. Estas podem ser homeomorfas à reta ou círculos.

Uma folheação $\mathcal{F} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in \Delta}$ é de classe C^r com $0 \leq r \leq \infty$ se cada $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ são de classe C^r .

Exemplo 2.2. Seja $X : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um campo vetorial em \mathbb{R}^2 . Definimos o campo vetorial $X : \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $X(x,y) = (x, -y) = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$. (Figura 2.9)

Note que o único ponto $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $X(p) = 0$ é $p = (0,0)$. Logo X em $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ não possui singularidade.

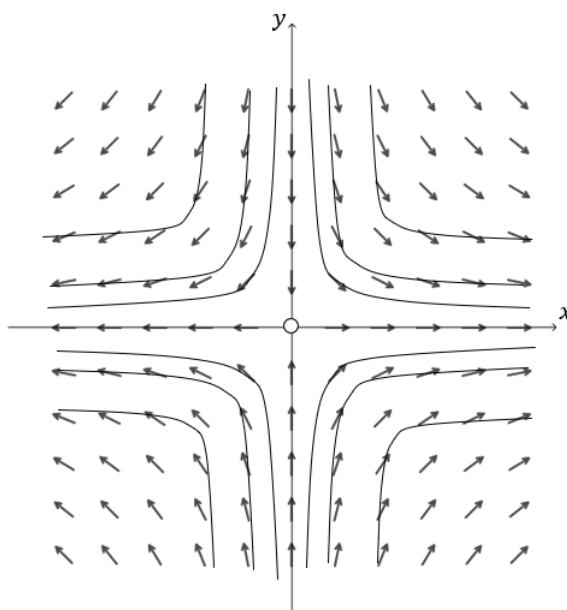


Figura 2.9 – Campo vetorial $X : \Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $X(x,y) = (x, -y)$.

Exemplo 2.3. *Seja uma função contínua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definimos uma folheação \mathcal{F} em \mathbb{R}^2 com suas folhas dadas pelas translações verticais de $y = f(x)$, ou seja, $l_c = f(x) + c$ para todo $c \in \mathbb{R}$, como mostrado na Figura 2.10.*

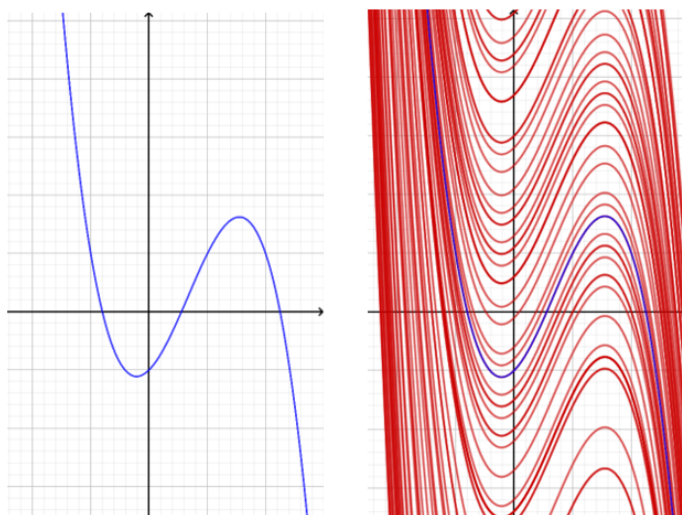


Figura 2.10 – Folheação \mathcal{F} dada por translações verticais de uma função f .

Note que translações horizontais da função representada na Figura 2.10 não definem uma folheação. De modo geral, as translações verticais de curvas planas que não definem uma função de x em y também não definem uma folheação, como é o caso da hipérbole $y^2 - x^2 = 1$.

Exemplo 2.4. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função estritamente crescente (ou estritamente decrescente) então podemos definir uma folheação \mathcal{F} em \mathbb{R}^2 com suas folhas dadas pelas translações verticais ou horizontais de $y = f(x)$, ou seja, $l_c = f(x + c)$ para todo $c \in \mathbb{R}$, como mostrado na Figura 2.11.

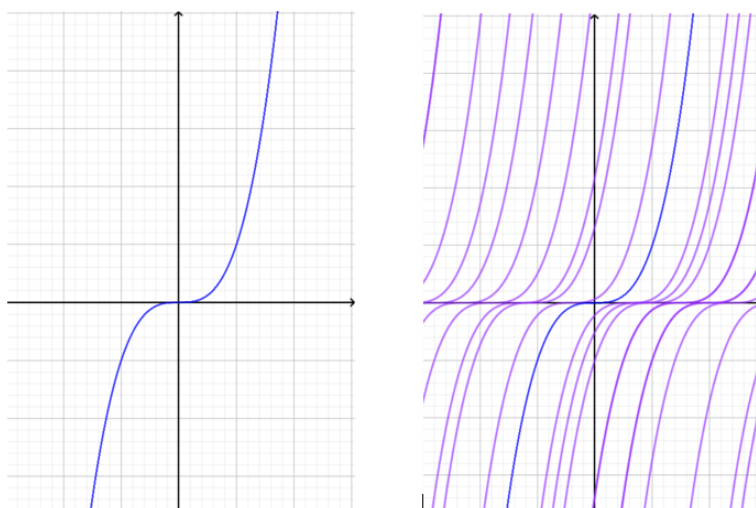


Figura 2.11 – Folheação \mathcal{F} dada por translações verticais ou horizontais de uma função f estritamente crescente.

Funções Hölder Contínuas: A Função de Cantor

O objetivo deste capítulo é introduzir o conceito de funções Hölder contínuas, o conjunto de Cantor e a função de Cantor. As referências principais utilizadas aqui abrangem os textos de Elon Lima [8] e Hille-Tamarkin [5].

3.1 Funções Hölder Contínuas

Sejam um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e uma função real $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ em que, para todo $x, y \in I$ com $x \neq y$ e $\alpha \geq 0$, o supremo dos quocientes $\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$ é finito, isto é, existe um número real $c \geq 0$ tal que $\sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \right\} = c$, para todo $x, y \in I$ com $x \neq y$ e $\alpha \geq 0$. Com isso, dizemos que tais funções obedecem a *condição Hölder* ou são *Hölder contínuas*. A seguir, temos uma definição formal para essas funções.

Definição 3.1. *Dado um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a condição Hölder ou é dita Hölder contínua quando existem constantes reais não-negativas c e α tais que, para todo $x, y \in I$ temos*

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha.$$

Nesta situação dizemos que f é Hölder contínua de expoente α , ou simplesmente função α -Hölder contínua.

De modo geral, é possível definir a *condição Hölder* para funções definidas entre

dois espaços métricos quaisquer. As funções α -Hölder contínuas apresentam propriedades interessantes como veremos a seguir.

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função α -Hölder contínua, logo, temos que:

1. Se $\alpha = 0$, então f é limitada.

De fato, como f é α -Hölder contínua e $\alpha = 0$, então existe uma constante não-negativa c tal que, para todo $x, y \in I$ com $x \neq y$, temos

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha = c|x - y|^0 = c \cdot 1 = c.$$

Com isso, fixando um ponto $y_0 \in I$ e aplicando a desigualdade triangular, temos que

$$|f(x)| - |f(y_0)| \leq |f(x) - f(y_0)| \leq c \Rightarrow |f(x)| \leq c + |f(y_0)|.$$

Tomando $L = c + |f(y_0)|$, que é uma constante real positiva, temos que $|f(x)| \leq L$ para todo $x \in I$, ou seja, f é limitada.

2. Se $\alpha = 1$, então f é lipschitziana.

De fato, sendo, f é α -Hölder contínua e $\alpha = 1$, então segue que existe uma constante não-negativa c tal que, para todo $x, y \in I$ com $x \neq y$, temos

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha = c|x - y|^1 = c|x - y| \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|,$$

isto é, f é lipschitziana.

3. Se $\alpha > 0$, então f é uniformemente contínua.

De fato, dado um valor real $\varepsilon > 0$ arbitrário e considerando $\delta = \left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Então, tomando $x, y \in I$ com $x \neq y$ e $|x - y| < \delta$, sendo f uma função α -Hölder contínua, temos que

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha < c \cdot \delta^\alpha = c \cdot \left(\left(\frac{\varepsilon}{c}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^\alpha = c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon,$$

ou seja, f é uniformemente contínua.

4. Se $\alpha > 1$, então f é constante.

Para ver isso, fixaremos um número $n \in \mathbb{N}$ arbitrário e sejam $a, b \in \mathbb{R}$ os extremos do intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Logo, tomando dois pontos quaisquer $x, y \in I$ com $x < y$, dividiremos o intervalo de extremos x e y em n partes de comprimentos iguais a $\frac{y-x}{n}$, como mostrado na Figura 3.1.

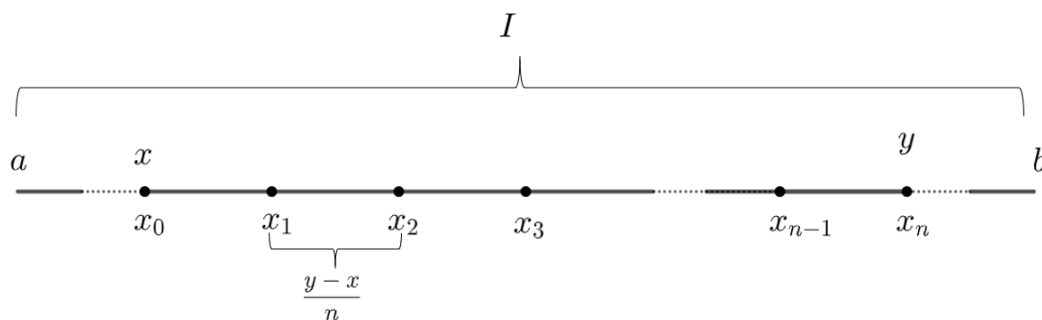


Figura 3.1 – Divisão do intervalo de extremos x e y em n intervalos congruentes.

Com isso, temos que $x = x_0$, $y = x_n$ e, conseqüentemente, $f(x) = f(x_0)$ e $f(y) = f(x_n)$. Logo, verificamos que

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= f(x_n) - f(x_0) \\ &= [f(x_n) - f(x_{n-1})] + [f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})] + \dots + [f(x_2) - f(x_1)] + [f(x_1) - f(x_0)]. \end{aligned}$$

Sendo assim, como f é α -Hölder contínua e aplicando a desigualdade triangular, vemos que

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq c \cdot \sum_{i=0}^{n-1} |x_{i+1} - x_i|^\alpha = c \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{y-x}{n}\right)^\alpha \\ &= c \cdot n \cdot \frac{(y-x)^\alpha}{n^\alpha} \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq c \cdot \left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \cdot (y-x)^\alpha. \end{aligned}$$

Como $\alpha > 1$, então $\alpha - 1 > 0$ e, dessa forma, $\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, temos que $|f(y) - f(x)| \leq 0$, ou seja, $|f(y) - f(x)| = 0$, isto é, $f(y) = f(x)$ para todo $x, y \in I$. Logo, concluímos que f é constante.

Portanto, vamos restringir ao caso de funções α -Hölder com $0 < \alpha \leq 1$. Assim temos a seguinte cadeia de inclusões de funções:

$$\text{Funções Lipschitz} \subset \text{Funções } \alpha\text{-Hölder Contínuas} \subset \text{Funções Uniformemente Contínuas}$$

Com isso, vemos que a condição Hölder de funções é um conceito entre as condições *lipschitz* e de *continuidade uniforme*.

Exemplo 3.1. A função $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^\beta$ para $0 < \beta \leq 1$ é uma função β -Hölder contínua.

Na Figura 3.2 temos os gráficos das distintas funções $h_\alpha(t) = t^\alpha$ com $t \in [0, 1]$ e $\alpha \in (0, 1)$.

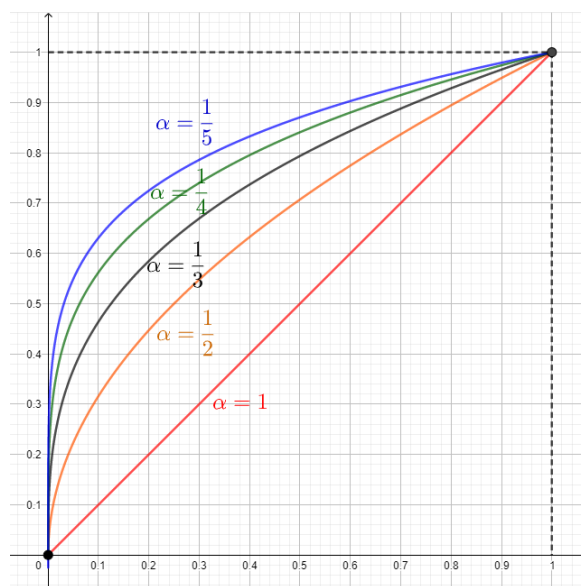


Figura 3.2 – Gráficos das funções $h_\alpha(t) = t^\alpha$ para $\alpha = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ definidas no intervalo $[0, 1]$.

Notemos que se $t \in [0, 1]$ e $\alpha \leq \beta$ temos $t^\alpha \geq t^\beta$.

De fato, tomando $x, y \in [0, \infty)$ com $x \neq y$, supondo $x < y$ temos que

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|^\beta} = \frac{|y^\beta - x^\beta|}{|y - x|^\beta} = \frac{|y^\beta - x^\beta| \cdot \frac{1}{|y|^\beta}}{|y - x|^\beta \cdot \frac{1}{|y|^\beta}} = \frac{\left| \frac{y^\beta}{y^\beta} - \frac{x^\beta}{y^\beta} \right|}{\left| \frac{y}{y} - \frac{x}{y} \right|^\beta}.$$

Seja $t = \frac{x}{y}$ e, assim, segue que $\frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|^\beta} = \frac{|1 - t^\beta|}{|1 - t|^\beta}$ sendo $0 < t < 1$ e $0 < \beta \leq 1$ então $t^\alpha \geq t$, conseqüentemente, $1 - t^\beta \leq 1 - t$ e $1 - t \leq (1 - t)^\beta$. Assim,

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|^\beta} \leq \frac{|1 - t|}{|1 - t|^\beta} \leq \frac{|1 - t|}{|1 - t|} = 1.$$

Notemos que se $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é β -Hölder contínua então para todo $I \subset D$, $f|_I$ é β -Hölder contínua.

Proposição 3.1. *Seja a função $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^\beta$ com $0 < \beta \leq 1$. Se $I \subset [0, \infty)$ é um conjunto compacto, então temos que para todo $0 < \alpha \leq \beta$ a função $f|_I$ é α -Hölder contínua.*

Demonstração. Do Exemplo 3.1 temos que $f(x) = x^\beta$, $f|_I$ é β -Hölder contínua. Então para todo $x, y \in I \exists \sup \left\{ \frac{f(y) - f(x)}{|y - x|^\beta} \right\} \leq c_1$.

Tomando $x, y \in I$ com $x \neq y$, supondo $x < y$ temos que

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|^\alpha} = \frac{|y^\beta - x^\beta|}{|y - x|^\alpha} = \frac{|y^\beta - x^\beta| \cdot \frac{1}{|y|^\beta}}{|y - x|^\alpha \cdot \frac{1}{|y|^\beta}} = \frac{\left| \frac{y^\beta}{y^\beta} - \frac{x^\beta}{y^\beta} \right|}{\left| \frac{y}{y^\frac{\beta}{\alpha}} - \frac{x}{y^\frac{\beta}{\alpha}} \right|^\alpha}.$$

Considerando $t = \frac{x}{y}$, temos que

$$\frac{|1 - t^\beta|}{\left| \frac{1}{y^\frac{\beta}{\alpha} - 1} \right|^\alpha \cdot |1 - t|^\alpha} = \frac{|y^\frac{\beta}{\alpha} - 1|^\alpha \cdot |1 - t^\beta|}{|1 - t|^\alpha}.$$

Como $0 < t < 1$ e $0 < \alpha < \beta \leq 1$ segue que $|1 - t|^\alpha > |1 - t|^\beta$, com isso temos que $\frac{1}{|1 - t|^\alpha} < \frac{1}{|1 - t|^\beta}$. Assim,

$$\frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|^\alpha} = \frac{|y^\beta - x^\beta|}{|y - x|^\alpha} \leq y^{\beta - \alpha} \cdot \frac{|1 - t^\beta|}{|1 - t|^\alpha} \leq |y|^{\beta - \alpha} \cdot \frac{|1^\beta - t^\beta|}{|1 - t|^\beta} \leq |y|^{\beta - \alpha} \cdot c_1,$$

pois $f(x) = x^\beta$ é β -Hölder contínua.

Dessa forma, como $\beta - \alpha > 0$ e $y \in I$, sendo I compacto, segue que $g(y) := |y|^{\beta - \alpha}$ é contínua. Logo, temos que $g(y)$ é limitada, ou seja, existe um número real $c_2 > 0$ tal que $|y|^{\beta - \alpha} \leq c_2, \forall x \in I$. Portanto,

$$\frac{|y^\beta - x^\beta|}{|y - x|^\alpha} \leq |y|^{\beta - \alpha} \cdot c_1 \leq c_1 \cdot c_2 = c,$$

ou seja, f é α -Hölder contínua. □

O teorema a seguir, demonstrado em Teschl [11] (página 38), mostra um resultado mais geral da proposição anterior.

Teorema 3.1. *Sejam $K \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto e a função $f : K \rightarrow \mathbb{R}$. Se $0 < \alpha < \beta \leq 1$ e f for β -Hölder contínua então f é α -Hölder contínua.*

Proposição 3.2. *Sejam $f, g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções α -Hölder contínuas então $f \pm g$ é α -Hölder contínua.*

Demonstração. Sendo as funções $f, g : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ α -Hölder contínuas e aplicando a desigualdade triangular, temos que

$$\begin{aligned} \frac{|(f \pm g)(y) - (f \pm g)(x)|}{|y - x|^\alpha} &= \frac{|(f(y) - f(x)) \pm (g(y) - g(x))|}{|y - x|^\alpha} \leq \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|^\alpha} + \frac{|g(y) - g(x)|}{|y - x|^\alpha} \\ &\leq c_1 + c_2 = c, \quad \forall x, y \in I, \quad c_1, c_2, c \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

□

De modo análogo podemos demonstrar a propriedade α -Hölder contínua para o produto e para o quociente entre funções.

3.2 O Conjunto de Cantor

Primeiramente, antes de definir formalmente o conjunto de Cantor, faremos algumas considerações sobre os sistemas numéricos e as suas representações, com foco na base ternária.

3.2.1 Representação de um Número Real na Base Ternária

A representação de um número real em um sistema de numeração na base $b \in \mathbb{N}$ é feita a partir da utilização de b algarismos. Se $b \leq 10$ podemos tomar emprestado os algarismos da base 10. Assim,

se $b = 7 \Rightarrow \mathcal{B}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

se $b = 3 \Rightarrow \mathcal{B}_3 = \{0, 1, 2\}$;

Se $b > 10$ será necessário acrescentar outros algarismos além dos decimais para complementar, isto pode ser feito com letras gregas. Por exemplo, na base 12 temos

$$\mathcal{B}_{12} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \alpha, \beta\}.$$

A representação dos números naturais como sistema posicional na base “ b ” segue a construção do sistema decimal. Assim, no que segue vamos escrever os números naturais na

base 3.

$$\mathbb{N}_{(3)} = \{0_3, 1_3, 2_3, 10_3, 11_3, 12_3, 20_3, 21_3, 22_3, 100_3, 101_3, 102_3, \dots\}.$$

Note que $10_3 = 3^1 = 3$, $100_3 = 3^2 = 9$, $1000_3 = 3^3 = 27$, ..., $10_3^n = 3^n$.

Dessa forma, temos que a representação dos inteiros e racionais

$$\mathbb{Z}_{(3)} = -\mathbb{N}_{(3)} \cup \mathbb{N}_{(3)} \quad \text{e} \quad \mathbb{Q}_{(3)} = \left\{ \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}_{(3)}, q \neq 0 \right\}.$$

Para construir um número real $x \in \mathbb{R}$ arbitrário, primeiramente notemos que $x = n + r$ com $n \in \mathbb{Z}_{(3)}$ e $r \in (0, 1)$. Assim basta representar os números reais em $(0, 1)$ na base 3.

Agora, iremos apresentar a construção geométrica da representação de um número real positivo $x \in [0, 1]$ na base 3 ou base ternária. Isto se faz de modo semelhante à construção da representação decimal.

Para isso, considere o intervalo fechado $I = [0, 1]$. Sendo assim, faremos a seguinte construção geométrica: na primeira etapa, o intervalo I será dividido em 3 intervalos fechados e congruentes que denotamos por I_0, I_1, I_2 de comprimentos iguais a $\frac{1}{3}$, isto é,

$$I = I_0 \cup I_1 \cup I_2 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Se $x \in I$, então, $x \in I_{j_1}$ para algum $j_1 \in \{0, 1, 2\}$. Dessa forma, a primeira aproximação do ponto x com uma casa (ternária) será:

$$\begin{cases} x \approx (0, 0)_3 = 0, & \text{se } x \in I_0 \\ x \approx (0, 1)_3 = \frac{1}{3}, & \text{se } x \in I_1 \\ x \approx (0, 2)_3 = \frac{2}{3}, & \text{se } x \in I_2 \end{cases}, \text{ isto é, } x \approx (0, j_1)_3 = j_1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{j_1}{3}, \quad j_1 \in \{0, 1, 2\}.$$

No passo seguinte, cada um dos três intervalos I_{j_1} serão subdivididos em três intervalos fechados e congruentes, ou seja:

$$\begin{aligned} - \text{ para } j_1 = 0 &\Rightarrow I_0 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] = I_{00} \cup I_{01} \cup I_{02}; \\ - \text{ para } j_1 = 1 &\Rightarrow I_1 = \left[\frac{1}{3}, \frac{4}{9}\right] \cup \left[\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right] \cup \left[\frac{5}{9}, \frac{2}{3}\right] = I_{10} \cup I_{11} \cup I_{12}; \\ - \text{ para } j_1 = 2 &\Rightarrow I_2 = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] = I_{20} \cup I_{21} \cup I_{22}. \end{aligned}$$

Assim, na decomposição temos $9 = 3^2$, cada intervalo de comprimento $\frac{1}{3^2}$.

Da mesma forma, agora podemos aproximar o ponto $x \in (0, 1)$ com duas casas (ternárias). Se $x \in I_{j_1} = I_{j_1 0} \cup I_{j_1 1} \cup I_{j_1 2}$ então temos que $x \in I_{j_1 j_2}$ para algum $j_2 \in \{0, 1, 2\}$. Então,

$$\text{se } x \in I_{j_1 j_2} \Rightarrow x \approx (0, j_1 j_2)_3 = j_1 \cdot \frac{1}{3} + j_2 \cdot \frac{1}{3^2} = \frac{j_1}{3} + \frac{j_2}{3^2}.$$

De maneira análoga, na terceira iteração desse processo, cada um dos nove intervalos $I_{j_1 j_2}$, $j_1, j_2 = 0, 1, 2$, serão subdivididos em três intervalos fechados originando $27 = 3^3$ intervalos fechados congruentes com comprimentos iguais a $\frac{1}{3^3}$

$$I_{j_1 j_2} = I_{j_1 j_2 0} \cup I_{j_1 j_2 1} \cup I_{j_1 j_2 2}, \quad j_1, j_2 \in \{0, 1, 2\}.$$

Assim, a terceira aproximação de x será dada por:

$$\text{se } x \in I_{j_1 j_2 j_3} \Rightarrow x \approx (0, j_1 j_2 j_3)_3 = j_1 \cdot \frac{1}{3} + j_2 \cdot \frac{1}{3^2} + j_3 \cdot \frac{1}{3^3} = \frac{j_1}{3} + \frac{j_2}{3^2} + \frac{j_3}{3^3}, \quad j_1, j_2, j_3 \in \{0, 1, 2\}.$$

A Figura 3.3 ilustra a terceira iteração desse processo de partições do intervalo $I = [0, 1]$.

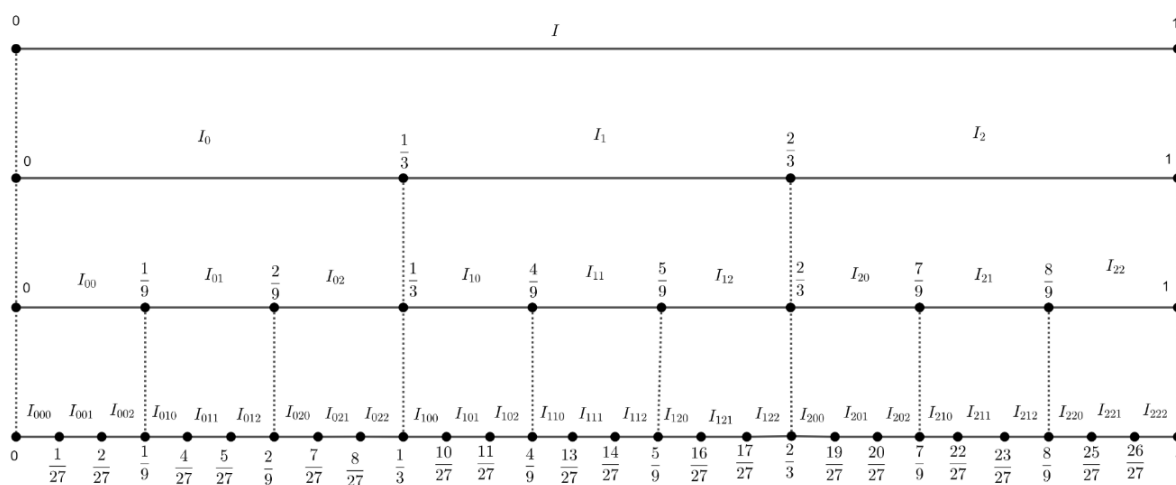


Figura 3.3 – Partições de $I = [0, 1]$ em 3^3 intervalos fechados com comprimentos iguais a $\frac{1}{3^3}$.

Com isso, seguindo os mesmos passos feitos anteriormente, de maneira indutiva, ocorrerá na n -ésima iteração desse processo a formação de 3^n intervalos fechados $I_{j_1 j_2 j_3 \dots j_n}$ com $j_k \in \{0, 1, 2\}$, todos os intervalos são de comprimento igual a $\frac{1}{3^n}$, de modo que

$$I_{j_1 j_2 j_3 \dots j_{n-1}} = I_{j_1 j_2 j_3 \dots j_{n-1} 0} \cup I_{j_1 j_2 j_3 \dots j_{n-1} 1} \cup I_{j_1 j_2 j_3 \dots j_{n-1} 2}$$

. Com isso, podemos encontrar para x uma aproximação com n casas (ternárias):

$$\text{se } x \in I_{j_1 j_2 j_3 \dots j_n} \Rightarrow x \approx (0, j_1 j_2 j_3 \dots j_n)_3 = \frac{j_1}{3} + \frac{j_2}{3^2} + \frac{j_3}{3^3} + \dots + \frac{j_n}{3^n} = \sum_{k=1}^n \frac{j_k}{3^k},$$

para $j_1, j_2, j_3, \dots, j_n \in \{0, 1, 2\}$.

Notemos que $I_{j_1 j_2 j_3 \dots j_n} = I_{j_1} \cap I_{j_1 j_2} \cap I_{j_1 j_2 j_3} \cap \dots \cap I_{j_1 j_2 j_3 \dots j_n}$ onde

$$I_{j_1} \supset I_{j_1 j_2} \supset I_{j_1 j_2 j_3} \supset \dots \supset I_{j_1 j_2 j_3 \dots j_n}.$$

Tal processo iterativo segue indefinidamente. Assim, dada uma sequência infinita

$J = (j_1 j_2 j_3 \dots j_n \dots)$ temos a seguinte notação:

$$I_{j_1 j_2 j_3 \dots j_n \dots} = I_{j_1} \cap I_{j_1 j_2} \cap I_{j_1 j_2 j_3} \cap \dots \cap I_{j_1 j_2 j_3 \dots j_n} \cap \dots$$

sendo o comprimento de cada intervalo fechado $I_{j_1 j_2 j_3 \dots j_n}$ dado por $|I_{j_1 j_2 j_3 \dots j_n}| = \frac{1}{3^n}$ e

$$I_{j_1} \supset I_{j_1 j_2} \supset I_{j_1 j_2 j_3} \supset \dots \supset I_{j_1 j_2 j_3 \dots j_n} \supset \dots$$

Dessa forma, podemos conseguir uma aproximação para $x \in [0, 1]$ com qualquer número finito de casas (ternárias).

Notemos que se $x \in I_{j_1 j_2 j_3 \dots j_n \dots} = I_J$ e $I_J = \bigcap_{k=1}^{\infty} I_{j_1 j_2 j_3 \dots j_k}$ com $|I_{j_1 j_2 j_3 \dots j_k}| = \frac{1}{3^k} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, assim, aplicando o *Teorema de Cantor dos Intervalos Encaixantes*, temos que $I_J = \bigcap_{k=1}^{\infty} I_{j_1 j_2 j_3 \dots j_k} = \{x\}$.

Portanto, a partir dessa construção geométrica, para cada sequência infinita J , está associado um único número real $x \in [0, 1]$ o qual possui uma representação ternária como definida abaixo.

Definição 3.2. A representação na base 3 ou base ternária de um número real $x \in [0, 1]$ é dada por

$$x = (0, j_1 j_2 j_3 \dots j_k \dots)_3 = \frac{j_1}{3} + \frac{j_2}{3^2} + \frac{j_3}{3^3} + \dots + \frac{j_k}{3^k} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{j_k}{3^k},$$

com $j_k \in \{0, 1, 2\}$.

Por exemplo, se $x = 0$ então $x \in I_{000\dots}$. Se $x = 1$ então $x \in I_{222\dots}$, isto é,

$$1 = (0, 2222\dots)_3 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \dots$$

Notemos que se x pertence ao extremo de um intervalo da construção, para fixar ideias digamos que $x \in I_{j_1 j_2 j_3 \dots j_{n-1} j_n} \cap I_{j_1 j_2 j_3 \dots j_{n-1} (j_n+1)}$ com $j_n \in \{0, 1\}$.

1º) Se na construção considerarmos x no intervalo esquerdo, isto é, x é o extremo direito do intervalo $I_{j_1 j_2 j_3 \dots j_{n-1} j_n}$. Então, nos seguintes iterados, x sempre vai pertencer ao terceiro intervalo de índice $j_k = 2$ para todo $k > n$, isto é, $x \in I_{j_1 j_2 j_3 \dots j_{n-1} j_n 222\dots}$. Logo, x terá uma representação ternária infinita dada por

$$x = (0, j_1 j_2 j_3 \dots j_{n-1} j_n 2222\dots)_3 = \frac{j_1}{3} + \frac{j_2}{3^2} + \frac{j_3}{3^3} + \dots + \frac{j_n}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{2}{3^{n+2}} + \frac{2}{3^{n+3}} \dots \quad (3.1)$$

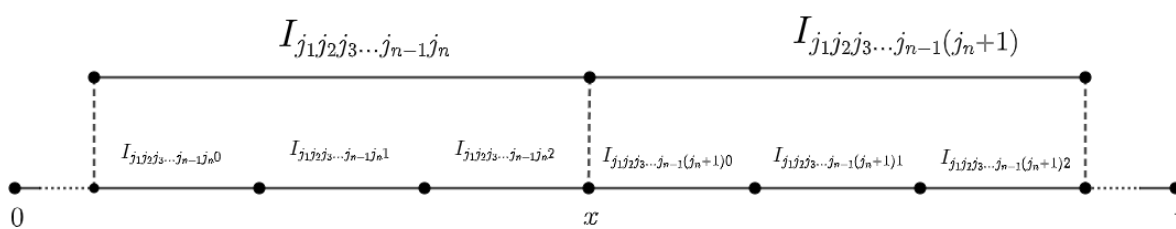


Figura 3.4 – Número $x \in [0, 1]$ pertencente aos extremos dos intervalos $I_{j_1 j_2 j_3 \dots j_{i-1} j_n}$ e $I_{j_1 j_2 j_3 \dots j_{n-1} (j_n+1)}$.

2º) Se na construção considerarmos x no intervalo da direita, $x \in I_{j_1 j_2 j_3 \dots j_{n-1} (j_n+1)}$, isto é, x é o extremo esquerdo deste intervalo. Então, nos próximos iterados x pertencerá sempre ao primeiro intervalo de índice $j_k = 0$ para todo $k > n$, ou seja, $x \in I_{j_1 j_2 j_3 \dots j_{n-1} (j_n+1) 000\dots}$. Com isso, a representação de x na base ternária será finita igual a

$$x = (0, j_1 j_2 j_3 \dots j_{n-1} (j_n+1))_3 = \frac{j_1}{3} + \frac{j_2}{3^2} + \frac{j_3}{3^3} + \dots + \frac{j_{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{(j_n+1)}{3^n} \quad (3.2)$$

Das observações anteriores, podemos afirmar que para alguns números $x \in [0, 1]$ temos duas representações distintas (ver 3.1 e 3.2).

Teorema 3.2. *Seja um número real $x \in [0, 1]$ com representação finita na base ternária dada por $x = (0, j_1 j_2 j_3 \dots j_{n-1} j_n)_3$ com $j_n \in \{1, 2\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então x tem a representação na base ternária da forma $x = (0, j_1 j_2 j_3 \dots j_{n-1} (j_n - 1) 2222\dots)_3$.*

3.2.2 Construção do Conjunto de Cantor

Descoberto por Henry John Stephen Smith em 1874 e introduzido por Georg Cantor em 1883, o conjunto de Cantor, definido em um segmento por meio de um limite de um processo iterativo. O conjunto de Cantor tem várias propriedades não intuitivas as quais serão exploradas nesta seção.

A construção geométrica do *conjunto de Cantor* é feita por meio de um processo iterativo. Inicialmente, retiramos o terço médio aberto do intervalo $I = [0, 1]$ e, na sequência, são retirados os terços médios dos intervalos fechados restantes, assim indefinidamente e de forma indutiva. Para isso, utilizaremos a mesma notação dos intervalos descritos na representação ternária.

Na primeira iteração desse processo, retiramos o terço médio aberto do intervalo $I = [0, 1]$, isto é, retiramos o intervalo aberto $\overset{\circ}{I}_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, denotemos por \mathcal{C}_1 os intervalos que ficaram:

$$\mathcal{C}_1 = I \setminus \overset{\circ}{I}_1 = I_0 \cup I_2 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Seguidamente, na segunda iteração, retiramos os terços médios dos intervalos de \mathcal{C}_1 , isto é, retiramos $\overset{\circ}{I}_{01} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ e $\overset{\circ}{I}_{21} = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$.

Denotamos por $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1 \setminus \{\overset{\circ}{I}_{01}, \overset{\circ}{I}_{21}\}$, notemos que \mathcal{C}_2 possui $4 = 2^2$ intervalos fechados cada um com comprimentos iguais a $\frac{1}{3^2}$, isto é,

$$\mathcal{C}_2 = (I_{00} \cup I_{02}) \cup (I_{20} \cup I_{22}) = \left(\left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]\right) \cup \left(\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]\right).$$

A Figura 3.5 mostra os conjuntos \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 das primeira e segunda iterações dessa construção.

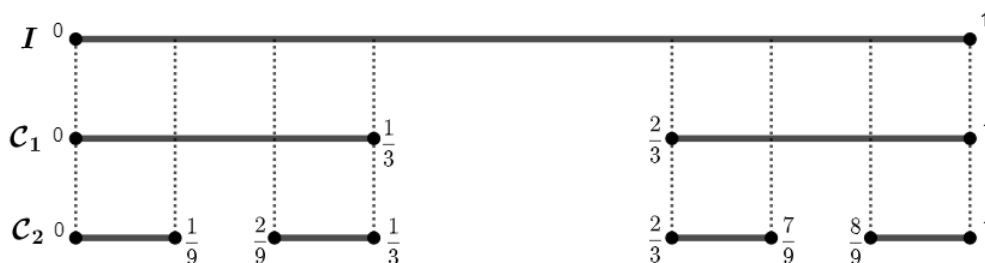


Figura 3.5 – Conjuntos \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 das primeira e segunda iterações.

Este processo segue indefinidamente. Denotamos por \mathcal{C}_n os intervalos que ficam depois de retirados os terços médios dos intervalos de \mathcal{C}_{n-1} .

De agora em diante vamos utilizar a notação $\delta_{n,k}$ para os intervalos abertos terços médios retirados, onde n é o número da iteração e k é o intervalo retirado em cada um dos intervalos de \mathcal{C}_{n-1} . Por exemplo:

- na primeira iteração: $\delta_{1,1} = \overset{\circ}{I}_1$ e $\mathcal{C}_1 = [0, 1] \setminus \delta_{1,1} = I_0 \cup I_2$;
- na segunda iteração: $\delta_{2,1} = \overset{\circ}{I}_{01}$, $\delta_{2,2} = \overset{\circ}{I}_{21}$ e $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1 \setminus \{\delta_{2,1}; \delta_{2,2}\} = I_{00} \cup I_{02} \cup I_{20} \cup I_{22}$;

Na terceira iteração, de maneira análoga, removeremos os terços médios abertos de cada um dos quatro intervalos fechados que compõem o conjunto \mathcal{C}_2 . Assim, temos que

$$\mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_2 \setminus \{\delta_{3,1}; \delta_{3,2}; \delta_{3,3}; \delta_{3,4}\}$$

e, na notação $\delta_{3,k}$, o índice k indica que o intervalo retirado é o k -ésimo intervalo de \mathcal{C}_2 , donde os intercalode me \mathcal{C}_2 ordenandos da esquerda para a direita. Então temos que

$$\delta_{3,1} \subset I_{00}, \quad \delta_{3,2} \subset I_{02}, \quad \delta_{3,3} \subset I_{20} \quad \text{e} \quad \delta_{3,4} \subset I_{22},$$

Notemos que em \mathcal{C}_2 foram retirados 2^2 intervalos de comprimento $\frac{1}{3^2}$ e o número de intervalos que compõem \mathcal{C}_3 é 2^3 e cada um de comprimento $\frac{1}{3^3}$.

Repetindo esse processo, a n -ésima iteração corresponde em remover o terço médio aberto ($\delta_{n,k}$) de cada um dos 2^{n-1} intervalos fechados do conjunto \mathcal{C}_{n-1} . Assim o conjunto \mathcal{C}_n correspondente à união de 2^n intervalos fechados com comprimentos iguais a $\frac{1}{3^n}$. Com isso, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_n &= \mathcal{C}_{n-1} \setminus \{\delta_{n,1}; \delta_{n,2}; \dots; \delta_{n,2^{n-1}}\} = \\ &= \left(\underbrace{I_{00\dots00}_0}_{n-1} \cup \underbrace{I_{00\dots00}_2}_{n-1} \right) \cup \left(\underbrace{I_{00\dots02}_0}_{n-1} \cup \underbrace{I_{00\dots02}_2}_{n-1} \right) \cup \dots \cup \left(\underbrace{I_{22\dots22}_0}_{n-1} \cup \underbrace{I_{22\dots22}_2}_{n-1} \right), \end{aligned}$$

ou seja, $I_{j_1 j_2 j_3 \dots j_n} \subset \mathcal{C}_n$ com $j_k \in \{0, 2\}$, para todo $1 \leq k \leq n$.

Observamos, também, na família de conjuntos $(\mathcal{C}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaz a cadeia de inclusões

$$I \supset \mathcal{C}_1 \supset \mathcal{C}_2 \supset \dots \supset \mathcal{C}_{n-1} \supset \mathcal{C}_n \supset \mathcal{C}_{n+1} \supset \dots$$

Assim, definimos o *conjunto de Cantor* como a interseção infinita dos conjuntos da família $(\mathcal{C}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Definição 3.3. Chamamos de *conjunto de Cantor* ao conjunto $\mathcal{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$.

É evidente que o conjunto de Cantor não é vazio, ou seja, $\mathcal{C} \neq \emptyset$. De fato, como o ponto $x = \frac{1}{3}$ é o extremo direito do intervalo $I_0 = \left[0, \frac{1}{3}\right]$ então pela construção x estará nos intervalos $I_{02}, I_{022}, I_{0222}, \dots, I_{02\dots2}, \dots$, logo temos que $x \in \mathcal{C}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, conseqüentemente, $x \in \mathcal{C}$. Da mesma forma, se $x \in [0, 1]$ é o extremo de algum intervalo de \mathcal{C}_n para algum n então $x \in \mathcal{C}$.

Uma observação de grande relevância com relação à representação dos elementos do conjunto de Cantor é que se $x \in \mathcal{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$, então $x \in \mathcal{C}_n$ para todo $n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in I_{j_1} \subset \mathcal{C}_1$ para algum $j_1 \in \{0, 2\}$ e $x \in I_{j_1 j_2} \subset \mathcal{C}_2$ para algum $j_2 \in \{0, 2\}$ e $I_{j_1 j_2} \subset I_{j_1}$. Assim,

$$x \in I_{j_1 j_2 \dots j_n}, \forall n \text{ com } j_1 j_2 \dots j_n \in \{0, 2\} \text{ e } I_{j_1} \supset I_{j_1 j_2} \supset \dots \supset I_{j_1 j_2 \dots j_n} \supset \dots; x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{j_1 j_2 \dots j_n}.$$

Da representação dos números reais na base ternária (Teorema 3.2) temos que a sequência infinita associada a $x \in \mathcal{C}$ é $(j_1 j_2 \dots j_n \dots)$ com $j_n \in \{0, 2\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e, assim

$$x = (0, j_1 j_2 j_3 \dots)_3 = \frac{j_1}{3} + \frac{j_2}{3^2} + \frac{j_3}{3^3} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{j_k}{3^k}; j_k \in \{0, 2\}.$$

Reciprocamente, dada qualquer sequência infinita $(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n \dots)$, $\mu_k \in \{0, 2\}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, temos que o número $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{3^k} := a$ pertence ao conjunto de Cantor. De fato, basta notar que os intervalos $I_{j_1} \supset I_{j_1 j_2} \supset \dots \supset I_{j_1 j_2 \dots j_n} \supset \dots$

$$\therefore a = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n = \mathcal{C}.$$

Desse modo, o Teorema 3.3 foi demonstrado e este traz uma formalização da representação na base ternária de todo elemento do conjunto de Cantor \mathcal{C} .

Teorema 3.3 (Caracterização dos elementos de \mathcal{C}). *Seja \mathcal{C} o conjunto de Cantor e $x \in [0, 1]$. Então $x \in \mathcal{C}$ se, e somente se, a expansão de x na base ternária pode ser escrita utilizando apenas os algarismos 0 e 2.*

De acordo com o teorema anterior, o conjunto de Cantor pode ser definido pela representação de seus elementos na base ternária como

$$\mathcal{C} = \left\{ x \in [0, 1] \mid x = (0, x_1 x_2 x_3 \dots)_3 = \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3^2} + \frac{x_3}{3^3} + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{3^j}; x_j \in \{0, 2\} \right\}.$$

Os teoremas que serão apresentados na sequência trazem propriedades do conjunto de Cantor relacionadas à sua cardinalidade e às características dos elementos que o compõe.

Teorema 3.4. *O conjunto de Cantor é compacto.*

Demonstração. Como o conjunto de Cantor está contido no intervalo $[0, 1]$, $\mathcal{C} \subset [0, 1]$, segue que \mathcal{C} é limitado, pois, para todo $x \in \mathcal{C}$, tem-se que $|x| \leq 1$. Logo, basta provar que \mathcal{C} é fechado. Para isso, considere a família de intervalos abertos $\left(\overset{\circ}{I}_{j_1 j_2 j_3 \dots j_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$, em que $j_k \in \{0, 1, 2\}$ e $j_k = 1$ para algum $1 \leq k \leq n$, referentes aos terços médios removidos na construção de cada conjunto \mathcal{C}_n . Pelo item (c) do Teorema 2.5 verificamos que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{I}_{j_1 j_2 j_3 \dots j_n}$ é aberto. Logo, de acordo com o Teorema 2.1, podemos concluir que $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{I}_{j_1 j_2 j_3 \dots j_n}$ é fechado. Com isso, observamos que \mathcal{C} é dado por uma interseção de conjuntos fechados, isto é,

$$\mathcal{C} = \left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{I}_{j_1 j_2 j_3 \dots j_n} \right) \cap [0, 1].$$

Portanto, pelo item (c) do Teorema 2.6, segue que \mathcal{C} é fechado. Por fim, temos que o conjunto \mathcal{C} é compacto. \square

Teorema 3.5. *O conjunto de Cantor é não enumerável (possui a mesma cardinalidade dos conjuntos $I = [0, 1]$ e \mathbb{R} dos reais).*

Demonstração. Sabemos que os conjuntos $I = [0, 1]$ e \mathbb{R} dos reais são não enumeráveis e possuem a mesma cardinalidade. Logo, para provar que \mathcal{C} é não enumerável, basta construir uma bijeção $\phi : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$. Como visto no Teorema 3.3, todo elemento $x \in \mathcal{C}$ possui uma representação na base ternária da forma $x = (0, x_1 x_2 x_3 \dots x_k \dots)_3$ composta apenas por algarismos 0 e 2, ou seja, $x_k \in \{0, 2\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, podendo sua representação ser finita ou infinita. Dado um número real $x \in [0, 1]$, de forma análoga à construção da sua representação ternária $x = (0, x_1 x_2 x_3 \dots x_k \dots)_3$, definimos a sua representação binária como

$$x = (0, y_1 y_2 y_3 \dots y_k \dots)_2 = \frac{y_1}{2} + \frac{y_2}{2^2} + \frac{y_3}{2^3} + \dots + \frac{y_k}{2^k} + \dots + \frac{y_n}{2^n} = \sum_{k=1}^n \frac{y_k}{2^k},$$

com $n \in \mathbb{N}$ e $y_k \in \{0, 1\}$ para todo $1 \leq k \leq n$. Sendo assim, a função ϕ irá estabelecer uma relação de correspondência entre a representação ternária dos elementos de \mathcal{C} com a representação binária dos elementos de $I = [0, 1]$, ou seja, dado $x \in \mathcal{C}$ com $x = (0, x_1 x_2 x_3 \dots x_k \dots)_3$, então $\phi(x) = (0, y_1 y_2 y_3 \dots y_k \dots)_2$, tal que

$$\phi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}.$$

De fato, como $x_k \in \{0, 2\}$ temos que $\begin{cases} \text{para } x_k = 0 \Rightarrow y_k = 0 \\ \text{para } x_k = 2 \Rightarrow y_k = 1 \end{cases}$. Logo, verifica-se que ϕ associa cada elemento $x \in \mathcal{C}$ representado na base ternária a um número real $y \in [0, 1]$ representado na sua base binária. De fato, ϕ é injetiva, pois, dados $x', x'' \in \mathcal{C}$ com $x' = (0, x'_1 x'_2 x'_3 \dots x'_k \dots)_3$ e $x'' = (0, x''_1 x''_2 x''_3 \dots x''_k \dots)_3$, se $x' \neq x''$ então $x'_k \neq x''_k$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Com isso, se $x'_k = 0$ temos que $x''_k = 2$, logo, $y'_k = 0$ e $y''_k = 1$, conseqüentemente, $\phi(x') \neq \phi(x'')$. De forma análoga, $x'_k = 2$ temos $x''_k = 0$, $y'_k = 1$, $y''_k = 0$, e $\phi(x') \neq \phi(x'')$. Para vermos que ϕ é sobrejetiva, considere um elemento do contradomínio de ϕ dado por $y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{2^k}$ com $y_k \in \{0, 1\}$. Tomando $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot y_k}{3^k}$, verificamos que x pertence ao domínio de ϕ , ou seja, $x \in \mathcal{C}$, e que $\phi(x) = y$. Logo, todo elemento do contradomínio de ϕ está associado a um elemento distinto do domínio de ϕ , o que garante a sua sobrejetividade. Portanto, ϕ é uma bijeção, o que mostra a equivalência entre as cardinalidades de \mathcal{C} e de $I = [0, 1]$ ou \mathbb{R} . Logo, pode-se afirmar que \mathcal{C} é não enumerável. \square

Teorema 3.6. *Todo ponto do conjunto de Cantor é ponto de acumulação.*

Demonstração. Seja um ponto $c \in \mathcal{C} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_n$, então $c \in \mathcal{C}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, considere o intervalo $I_{c_\varepsilon} = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ centrado em c e de comprimento 2ε . Pela propriedade arquimediana, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^{n_0}} < \varepsilon$. De fato, temos que $c \in \mathcal{C}_{n_0}$ e, conseqüentemente, existe um intervalo fechado $I_{j_1 j_2 j_3 \dots j_{n_0}} \subset \mathcal{C}_{n_0}$ tal que $c \in I_{j_1 j_2 j_3 \dots j_{n_0}}$. Sendo assim, temos que $I_{j_1 j_2 j_3 \dots j_{n_0}} \subset I_{c_\varepsilon}$ e, dessa forma, existe pelo menos mais um ponto $c_0 \in I_{j_1 j_2 j_3 \dots j_{n_0}}$ dado por um dos seus extremos com $c_0 \in \mathcal{C}$ e $c_0 \in I_{c_\varepsilon}$. Logo, de maneira indutiva, verificamos que para todo ponto $c \in \mathcal{C}$ existe uma seqüência de elementos $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ que converge para c . Portanto, concluímos que todo ponto do conjunto \mathcal{C} é ponto de acumulação. \square

Como consequência imediata do Teorema 3.6 temos o Corolário 3.1.

Corolário 3.1. *O conjunto de Cantor não possui pontos isolados.*

Teorema 3.7. *O conjunto de Cantor não possui pontos interiores, isto é, $\overset{\circ}{\mathcal{C}} = \emptyset$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\overset{\circ}{\mathcal{C}} \neq \emptyset$. Logo, existe $x \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}$ e $\delta > 0$ tais que o intervalo $(x - \delta, x + \delta)$ está contido em \mathcal{C} , ou seja, $(x - \delta, x + \delta) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_n$. Dessa forma, isso implica que $(x - \delta, x + \delta) \subset \mathcal{C}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela propriedade arquimediana, podemos tomar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^{n_0}} < \delta$. Sendo o comprimento do intervalo $(x - \delta, x + \delta)$ igual a 2δ e considerando o conjunto \mathcal{C}_{n_0} que é formado pela união de 2^{n_0} intervalos fechados disjuntos com comprimentos

iguais a $\frac{1}{3^{n_0}}$, verificamos que o intervalo $(x - \delta, x + \delta)$ não pode estar contido em \mathcal{C}_{n_0} e nem em nenhum \mathcal{C}_n com $n > n_0$, pois, $\frac{1}{3^{n_0}} < 2\delta$. Logo, o intervalo $(x - \delta, x + \delta)$ não pode estar contido em $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_n$, o que é um absurdo, pois, por hipótese, $(x - \delta, x + \delta) \subset \mathcal{C} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_n$. Portanto, \mathcal{C} não contém nenhum intervalo aberto, ou seja, $\overset{\circ}{\mathcal{C}} = \emptyset$. \square

Como consequência do Teorema 3.4 e do Teorema 3.6, podemos concluir que o conjunto de Cantor é um conjunto *perfeito* (fechado e sem pontos isolados).

Teorema 3.8. *O conjunto de Cantor possui medida nula.*

Demonstração. Como visto anteriormente, o conjunto \mathcal{C}_n da n -ésima iteração da construção de \mathcal{C} é dado pela união de 2^n intervalos todos de comprimento igual a $\frac{1}{3^n}$, ou seja, dado o conjunto composto pelas sequências de n índices $j_k \in \{0, 2\}$ dado por $\Delta = \{\sigma = j_1 j_2 j_3 \dots j_n ; j_k \in \{0, 2\}\}$, cuja cardinalidade é $\#\Delta = 2^n$, temos que $\mathcal{C}_n = \bigcup_{\sigma \in \Delta} I_\sigma$. Dessa forma, para todo $n \in \mathbb{N}$ é possível

tomar $\varepsilon > 2^n \cdot \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{\sigma \in \Delta} |I_\sigma|$. Portanto, conclui-se que \mathcal{C} possui medida nula. \square

3.3 A Função de Cantor

Definida por Georg Cantor em 1883, a *função de Cantor* foi utilizada por Cantor como contra-exemplo para algumas afirmações de Carl Harnack sobre extensões do Teorema Fundamental do Cálculo para funções descontínuas, de acordo com Dovgoshey, Martio, Ryazanov e Vuorinen [4]. Pelo fato de ser posteriormente utilizada por Henri Lebesgue em um trabalho sobre integração e localização de funções primitivas, tal função também ficou conhecida como *função de Lebesgue*. As generalizações da função de Cantor relacionadas à sua construção trouxe variadas motivações para o desenvolvimento de novas funções no estudo da análise real moderna.

Lembrando a construção do conjunto de Cantor, temos que $\delta_{n,1}, \delta_{n,2}, \delta_{n,3}, \dots, \delta_{n,k}, \dots, \delta_{n,2^{n-1}}$ são os 2^{n-1} intervalos disjuntos referentes aos terços médios abertos removidos dos intervalos de \mathcal{C}_{n-1} na n -ésima iteração da construção para obter \mathcal{C}_n o qual terá 2^n intervalos fechados disjuntos:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_n &= \mathcal{C}_{n-1} \setminus \{\delta_{n,1}; \delta_{n,2}; \dots; \delta_{n,2^{n-1}}\} \\ &= \left(\underbrace{I_{00\dots000}}_{k=1} \cup \underbrace{I_{00\dots002}}_{k=2} \right) \cup \left(\underbrace{I_{00\dots020}}_{k=3} \cup \underbrace{I_{00\dots022}}_{k=4} \right) \cup \dots \cup \left(\underbrace{I_{22\dots220}}_{k=2^{n-1}} \cup \underbrace{I_{22\dots222}}_{k=2^n} \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Para simplificar a notação na construção da função de Cantor vamos mudar a notação dos intervalos de \mathcal{C}_n , denotamos por $\eta_{n,k}$ o intervalo de \mathcal{C}_n da n -ésima iteração onde k é a posição do intervalo de \mathcal{C}_n na ordem acima (3.3) para todo $k = 1, 2, 3, \dots, 2^n$. Assim, temos que

$$\mathcal{C}_n = \eta_{n,1} \cup \eta_{n,2} \cup \eta_{n,3} \cup \dots \cup \eta_{n,k} \cup \dots \cup \eta_{n,2^n} = \bigcup_{k=1}^{2^n} \eta_{n,k}.$$

Logo, o conjunto dos intervalos retirados na n -ésima iteração é

$$\mathcal{A}_n = \delta_{n,1} \cup \delta_{n,2} \cup \delta_{n,3} \cup \dots \cup \delta_{n,k} \cup \dots \cup \delta_{n,2^{n-1}} = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} \delta_{n,k}$$

e denotamos por $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ a união de todos os intervalos retirados.

Assim $\mathcal{C}_n = \mathcal{C}_{n-1} \setminus \mathcal{A}_n$, portanto o conjunto de Cantor:

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n = [0, 1] \setminus \mathcal{A}.$$

Na sequência, definimos a *função de Cantor* no intervalo $[0, 1]$, para isto vamos usar a representação na base ternária.

Definição 3.4 (Função de Cantor). *Seja $x \in [0, 1] = \mathcal{C} \cup \mathcal{A}$ ($\mathcal{C} \cap \mathcal{A} = \emptyset$), denotamos por $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ a função de Cantor definida da seguinte forma:*

- Se $x \in \mathcal{C}$, com $x = (0, x_1 x_2 x_3 \dots x_k \dots)_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}$ tal que $x_k \in \{0, 2\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x_k}{2}\right)}{2^k}.$$

Denotando $y_k = \frac{x_k}{2} \in \{0, 1\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ então podemos considerar

$\psi(x) = (0, y_1 y_2 y_3 \dots y_k \dots)_2$ como uma expansão na base binária.

- Se $x \in \mathcal{A}$ então $\psi(x) = \sup \{ \psi(t) ; t \leq x, t \in \mathcal{C} \}$.

Vejamos alguns exemplos da função de Cantor para alguns valores.

1. Como $x = \frac{1}{4} = (0, 02020202\dots)_3 = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^6} + \frac{2}{3^8} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2k}}$ então $x = \frac{1}{4} \in \mathcal{C}$ e

$$\psi\left(\frac{1}{4}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = (0, 01010101\dots)_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + \dots = \frac{1}{3}.$$

$$2. \text{ Seja } x = \frac{1}{3} \in \mathcal{C} \text{ então } x = (0, 1)_3 = (0, 02222\dots)_3 = \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^5} + \dots = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{3^k},$$

$$\psi\left(\frac{1}{3}\right) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} = (0, 01111\dots)_2 = \frac{1}{2}.$$

$$3. \text{ Se } x = \frac{2}{3} \in \mathcal{C} \text{ em que } x = (0, 2)_3 = (0, 20000\dots)_3 = \frac{2}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \frac{0}{3^4} + \frac{0}{3^5} + \dots = \frac{2}{3},$$

$$\psi\left(\frac{2}{3}\right) = (0, 1)_2 = \frac{1}{2}.$$

Notemos que os extremos do intervalo terço médio $\delta_{1,1} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ que pertencem a \mathcal{C} possuem a mesma imagem $\left(\psi\left(\frac{2}{3}\right) = \psi\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\right)$. Mostraremos mais adiante que esta situação vale em cada intervalo $\delta_{n,k}$.

Lema 3.1. *A imagem da função ψ restrita ao conjunto de Cantor (\mathcal{C}) é todo o intervalo $[0, 1]$, ou seja, $\psi(\mathcal{C}) = [0, 1]$.*

Demonstração. De fato, mostraremos que $\psi|_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$ é sobrejetiva. Seja $y \in [0, 1]$ em que sua expansão binária é $y = (0, y_1y_2y_3\dots y_k\dots)_2$ com $y_k \in \{0, 1\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Tomemos $x = (0, x_1x_2x_3\dots x_k\dots)_3$ com $x_k = 2y_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ então $x_k \in \{0, 2\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e, portanto, $x \in \mathcal{C}$. Logo

$$\psi(x) = \psi\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2y_k/2)}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{2^k} = (0, y_1y_2y_3\dots y_k\dots)_2 = y,$$

ou seja, $\psi|_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$ é sobrejetiva. □

Lema 3.2. *A função $\psi|_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$ é não-decrescente.*

Demonstração. Seja $\psi|_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$ a função de Cantor ψ restrita ao conjunto \mathcal{C} de acordo com a definição dada anteriormente. Com isso, sejam $x', x'' \in \mathcal{C}$ tais que $x' = (0, x'_1x'_2x'_3\dots x'_k\dots)_3$ e $x'' = (0, x''_1x''_2x''_3\dots x''_k\dots)_3$. Supondo $x' < x''$ então temos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x'_{k_0} < x''_{k_0}$ e, como $x', x'' \in \mathcal{C}$, temos que $x'_k, x''_k \in \{0, 2\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, temos que $x'_{k_0} = 0$ e $x''_{k_0} = 2$, conseqüentemente, $\frac{x'_{k_0}}{2} = 0$ e $\frac{x''_{k_0}}{2} = 1$, implicando em $\psi(x') \leq \psi(x'')$, sendo válida a igualdade somente nos casos em que x' e x'' são extremos de um intervalo terço médio aberto removido de um conjunto \mathcal{C}_n em alguma iteração $n \in \mathbb{N}$ do processo de construção geométrica de \mathcal{C} . Portanto, temos que $\psi|_{\mathcal{C}}$ é não-decrescente. □

Exemplo 3.2. $\psi|_{\bar{\delta}_{1,1}}$ é constante.

De fato, seja x_0 com $\frac{1}{3} < x_0 < \frac{2}{3}$, então $x_0 \in I_1 = \delta_{1,1} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, ou seja, $x_0 \in \mathcal{A}$, como mostrado na figura abaixo.

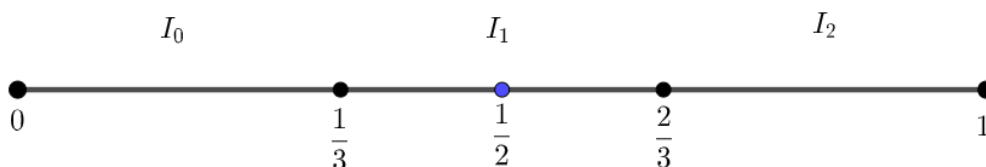


Figura 3.6 – Localização do ponto $x_0 = \frac{1}{2}$ no intervalo terço médio $\delta_{1,1}$.

Logo, por definição, temos que

$$\psi(x_0) = \sup\{\psi(t) ; t \leq x_0, t \in \mathcal{C}\}.$$

Como $\delta_{1,1} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ então $\delta_{1,1} \cap \mathcal{C} = \emptyset$ e $\sup\{t \leq x_0, t \in \mathcal{C}\} = \frac{1}{3}$. Com isso, sendo $\psi|_{\mathcal{C}}$ monótona não-decrescente, temos que

$$\psi(x_0) = \psi\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Sendo assim, para todo $x \in \delta_{1,1}$ temos

$$\psi(x) = \psi\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Portanto, ψ é constante sobre $I_1 = \bar{\delta}_{1,1}$, ou seja,

$$\psi(I_1) = \psi\left(\bar{\delta}_{1,1}\right) = \frac{1}{2}.$$

Tomando $x = \frac{1}{5}$, como $\frac{1}{9} < \frac{1}{5} < \frac{2}{9}$ então $\frac{1}{5} \in I_{01} = \delta_{2,1} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, isto é, $\frac{1}{5} \in \mathcal{A}$, de acordo com a figura a seguir.

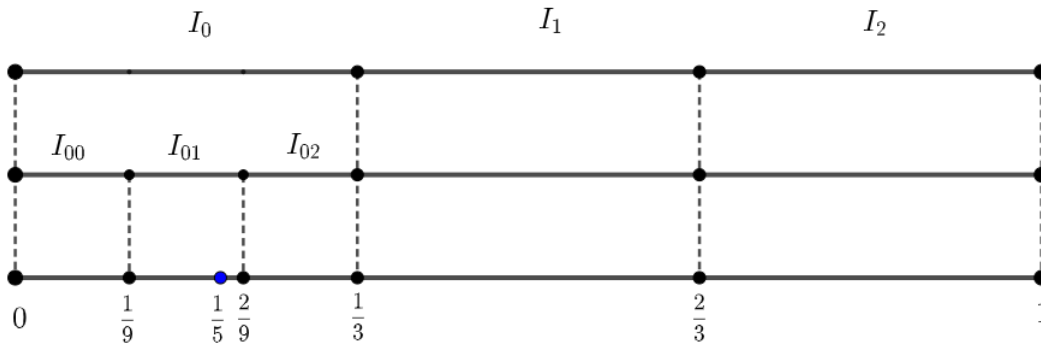


Figura 3.7 – Localização do ponto $x = \frac{1}{5}$ no intervalo terço médio $\delta_{2,1}$.

Com isso, temos que

$$\psi\left(\frac{1}{5}\right) = \sup\left\{\psi(t) ; t \leq \frac{1}{5}, t \in \mathcal{C}\right\}.$$

Da mesma forma, como $\delta_{2,1}$ é o terço médio removido de $I_0 = \left[0, \frac{1}{3}\right] = \eta_{1,1}$ na segunda iteração da construção geométrica de \mathcal{C} então $\delta_{2,1} \cap \mathcal{C} = \emptyset$ e $\sup\left\{t \leq \frac{1}{5}, t \in \mathcal{C}\right\} = \frac{1}{9}$. Sendo $\psi|_{\mathcal{C}}$ monótona não-decrescente, segue que

$$\psi\left(\frac{1}{5}\right) = \psi\left(\frac{1}{9}\right) = (0,010000\dots)_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

Analogamente, vemos que para todo $x \in \delta_{2,1}$ teremos

$$\psi(x) = \psi\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{4}.$$

Lema 3.3. Seja $\delta_{n,k} = (x_E, x_D)$ então $\psi(x_E) = \psi(x_D)$. Além disso, $\psi|_{\overline{\delta_{n,k}}}$ é constante e

$$\psi\left(\overline{\delta_{n,k}}\right) = \frac{2k-1}{2^n}, \text{ para } 1 \leq k \leq 2^{n-1}.$$

Demonstração. Seja $\delta_{n,k} = (x_E, x_D)$ então verificamos que

$$x_E = (0, j_1 j_2 j_3 \dots j_{n-1} 0 2 2 2 2 \dots)_3 \text{ e } x_D = (0, j_1 j_2 j_3 \dots j_{n-1} 2 0 0 0 0 \dots)_3$$

com $j_k \in \{0, 2\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sendo assim, como $\delta_{n,k}$ é um terço médio temos que $x_E, x_D \in \mathcal{C}$ e então

$$\psi(x_E) = \psi((0, j_1 j_2 j_3 \dots j_{n-1} 0 2 2 2 2 \dots)_3) = (0, j'_1 j'_2 j'_3 \dots j'_{n-1} 0 1 1 1 1 \dots)_2 = (0, j'_1 j'_2 j'_3 \dots j'_{n-1} 1)_2 \quad (3.4)$$

e que

$$\psi(x_D) = \psi((0, j_1 j_2 j_3 \dots j_{n-1} 20000 \dots)_3) = (0, j'_1 j'_2 j'_3 \dots j'_{n-1} 10000 \dots)_2 = (0, j'_1 j'_2 j'_3 \dots j'_{n-1} 1)_2, \quad (3.5)$$

com $j'_k = \frac{j_k}{2}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, pelas Equações 3.4 e 3.5, segue que

$$\bar{\psi}(x_E) = (0, j'_1 j'_2 j'_3 \dots j'_{n-1} 1)_2 = \psi(x_D).$$

Portanto, como $\psi|_C$ é monótona (Lema 3.2) concluímos que $\psi(x_E) = \psi(x_D)$.

De acordo com a definição da função ψ , temos que:

- para $n = 1$

$$\begin{aligned} k = 1 : \psi(\delta_{1,1}) &= \psi\left(\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right) = \psi\left(\frac{1}{3}\right) = \psi\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \psi(I_1) = \psi(\bar{\delta}_{1,1}) = \frac{1}{2}, \\ &\Rightarrow \psi(\bar{\delta}_{1,k}) = \frac{2k-1}{2^1}. \end{aligned}$$

- para $n = 2$

$$\begin{aligned} k = 1 : \psi(\delta_{2,1}) &= \psi\left(\left(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\right)\right) = \psi\left(\frac{1}{3^2}\right) = \psi\left(\frac{2}{3^2}\right) = \frac{1}{2^2} \Rightarrow \psi(I_{01}) = \psi(\bar{\delta}_{2,1}) = \frac{1}{2^2}, \\ k = 2 : \psi(\delta_{2,2}) &= \psi\left(\left(\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2}\right)\right) = \psi\left(\frac{7}{3^2}\right) = \psi\left(\frac{8}{3^2}\right) = \frac{3}{2^2} \Rightarrow \psi(I_{21}) = \psi(\bar{\delta}_{2,2}) = \frac{3}{2^2}, \\ &\Rightarrow \psi(\bar{\delta}_{2,k}) = \frac{2k-1}{2^2}, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

- para $n = 2 \Rightarrow \psi(\bar{\delta}_{3,k}) = \frac{2k-1}{2^3}$, $k = 1, 2, 3, 4$. Logo, nesta construção, por recorrência:

$$\psi(\bar{\delta}_{n,k}) = \frac{2k-1}{2^n} \text{ para } 1 \leq k \leq 2^{n-1}.$$

Portanto, podemos concluir que a imagem de ψ é constante no fecho de cada um dos intervalos correspondentes aos terços médios removidos. \square

Assim, observamos que a imagem da função de Cantor sobre o conjunto \mathcal{A} é dada por

$$\psi(\mathcal{A}) = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{2k-1}{2^n}, \dots \right\} \text{ com } 1 \leq k \leq 2^{n-1} \text{ e } \forall n \in \mathbb{N}.$$

A figura a seguir mostra o gráfico da função de Cantor $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

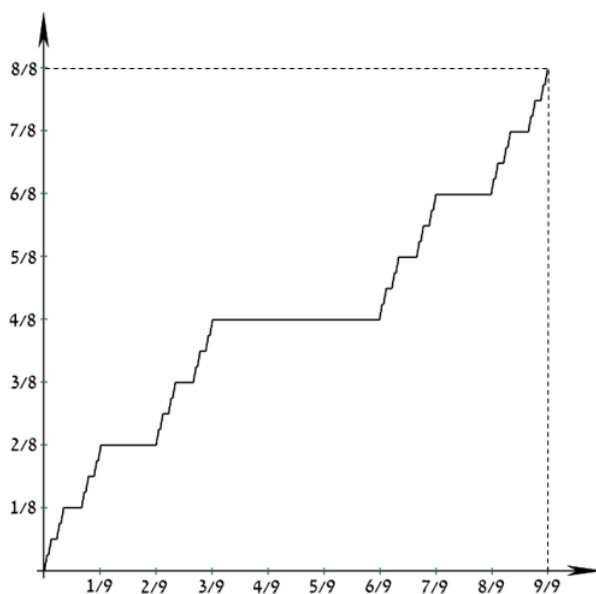


Figura 3.8 – Esboço da função $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

Os teoremas a seguir irão descrever propriedades relevantes sobre ψ .

Teorema 3.9. *A função $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é uma função sobrejetiva e monótona não-decrescente.*

Demonstração. Seja $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ a função de Cantor. ψ é sobrejetiva, de acordo com o Lema 3.1. Para provar que ψ é monótona não-decrescente, iremos considerar $x, y \in [0, 1]$ com $x < y$ e devemos mostrar que $\psi(x) \leq \psi(y)$. Para isso, iremos considerar os casos:

- Se $x, y \in \mathcal{C}$ então, pelo Lema 3.2, segue que $\psi(x) \leq \psi(y)$;
- Se $x, y \in \delta_{n_0, k_0}$ para $n_0, k_0 \in \mathbb{N}$ fixados então $\psi(x) = \psi(y)$, logo $\psi(x) \leq \psi(y)$;
- Se $x \in \mathcal{C}$ e $y \in \delta_{n_0, k_0} = (x_E, x_D)$ para $n_0, k_0 \in \mathbb{N}$ fixados então, como $x_E \in \mathcal{C}$ e $x \leq x_E < y$ então

$$\psi(x) \leq \psi(x_E) = \psi(y), \text{ isto é, } \psi(x) \leq \psi(y);$$

- Se $x \in \delta_{n, k} = (x_E, x_D)$ e $y \in \mathcal{C}$ então, analogamente, como $x_D \in \mathcal{C}$ e $x < x_D \leq y$, temos que

$$\psi(x) = \psi(x_E) \leq \psi(y), \text{ ou seja, } \psi(x) \leq \psi(y);$$

- Se $x \in \delta_{n_1, k_1} = (x_E, x_D)$ e $y \in \delta_{n_2, k_2} = (x'_E, x'_D)$ para $n_1, k_1, n_2, k_2 \in \mathbb{N}$ fixados então, como $x < y$,

$$x_D < x'_E \text{ e } \psi(x) = \psi(x_D) \leq \psi(x'_E) = \psi(y), \text{ isto é, } \psi(x) \leq \psi(y).$$

Logo, concluímos que ψ é não-decrescente. □

Teorema 3.10. A função $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é contínua.

Demonstração. Como ψ é localmente constante em \mathcal{A} , resta analisar a continuidade sobre \mathcal{C} . Logo, dado $x_0 \in \mathcal{C}$, devemos mostrar que ψ é contínua em x_0 . Foi visto que x_0 pode ser escrito na forma uma interseção infinita de intervalo $I_{j_1 j_2 j_2 \dots j_k}$, ou seja,

$$x_0 = \bigcap_{k=1}^{\infty} I_{j_1 j_2 j_2 \dots j_k} = I_{j_1} \cap I_{j_1 j_2} \cap I_{j_1 j_2 j_3} \cap \dots, \text{ com } |I_{j_1 j_2 j_2 \dots j_k}| = \frac{1}{3^k}.$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{n_0-1}} < \varepsilon$. Seja $\delta = \frac{1}{3^{n_0+1}}$ e considere a representação na base ternária de

$$x_0 = (0, x_1 x_2 x_3 \dots x_k \dots)_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}.$$

Tomando $x \in (0, 1)$ com $|x - x_0| < \delta$ tal que

$$x = (0, x'_1 x'_2 x'_3 \dots x'_k \dots)_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x'_k}{3^k}.$$

Logo, como $|x - x_0| < \frac{1}{3^{n_0+1}}$ então $x, x_0 \in I_{j_1 j_2 j_2 \dots j_{n_0}}$ e, dessa forma, $x_k = x'_k$ para $1 \leq k \leq n_0$. Sendo assim,

$$|x - x_0| = \left| \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{x'_k - x_k}{3^k} \right| \leq \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{|x'_k - x_k|}{3^k} = \frac{x''_{n_0+1}}{3^{n_0+1}} + \frac{x''_{n_0+2}}{3^{n_0+2}} + \frac{x''_{n_0+3}}{3^{n_0+3}} + \dots$$

com $x''_k = |x'_k - x_k| \in \{0, 1, 2\}$. Com isso, considerando o caso em que $x''_k = 2$ para todo $k \geq n_0 + 1$, temos

$$|\psi(x) - \psi(x_0)| \leq \left| \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{(x''_k/2)}{2^k} \right| \leq \frac{1}{2^{n_0}} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \right) = \frac{1}{2^{n_0}} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2^{n_0-1}} < \varepsilon.$$

Portanto, ψ é contínua em x_0 e, por consequência, ψ é contínua. \square

Teorema 3.11. A função $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ não é absolutamente contínua (Definição 2.7).

Demonstração. Para mostrar isso, iremos considerar o interior dos 2^n intervalos fechados e disjuntos $\eta_{n,k} = [\alpha_k, \beta_k]$ que compõem o conjunto \mathcal{C}_n da n -ésima iteração da construção geométrica de \mathcal{C} , ou seja, os intervalos $\overset{\circ}{\eta}_{n,k} = (\alpha_k, \beta_k) \subset [0, 1]$, para todo $1 \leq k \leq 2^n$. Vamos encontrar um $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ e

$$\sum_{k=1}^{2^n} (\beta_k - \alpha_k) < \delta \text{ implica em } \sum_{k=1}^{2^n} |\psi(\beta_k) - \psi(\alpha_k)| \geq \varepsilon_0.$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2^n} |\psi(\beta_k) - \psi(\alpha_k)| &= \sum_{k=1}^{2^n} (\psi(\beta_k) - \psi(\alpha_k)) \\
&= \left(\psi\left(\frac{1}{3^n}\right) - \psi(0) \right) + \left(\psi\left(\frac{3}{3^n}\right) - \psi\left(\frac{2}{3^n}\right) \right) + \dots + \left(\psi\left(\frac{k}{3^n}\right) - \psi\left(\frac{k-1}{3^n}\right) \right) + \dots \\
&\quad + \left(\psi\left(\frac{2^n-1}{3^n}\right) - \psi\left(\frac{2^n-2}{3^n}\right) \right) + \left(\psi(1) - \psi\left(\frac{2^n-1}{3^n}\right) \right) \\
&= \left(\frac{1}{2^n} - 0 \right) + \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n} \right) + \dots + \left(\frac{2k-1}{2^n} - \frac{2k-2}{2^n} \right) + \dots \\
&\quad + \left(\frac{2^n-1}{2^n} - \frac{2^n-2}{2^n} \right) + \left(1 - \frac{2^n-1}{2^n} \right) = 1,
\end{aligned}$$

e que

$$\sum_{k=1}^{2^n} (\beta_k - \alpha_k) = \sum |\dot{\eta}_{n,k}| = |\mathcal{C}_n| = 2^n \cdot \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

podendo o intervalo (α_k, β_k) ser extremamente pequeno ao tomar um n suficientemente grande,

ou seja, $\sum_{k=1}^{2^n} (\beta_k - \alpha_k) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Logo, para $0 < \varepsilon_0 \leq 1$ temos que, para qualquer

$\delta > 0$ tal que $\sum_{k=1}^{2^n} (\beta_k - \alpha_k) < \delta$, implica em $\sum_{k=1}^{2^n} |\psi(\beta_k) - \psi(\alpha_k)| = 1 \geq \varepsilon_0$. Portanto, concluímos que ψ não é absolutamente contínua. \square

Teorema 3.12. *A derivada ψ' da função de Cantor é igual a zero em quase todo ponto de $[0, 1]$, exceto para um conjunto de pontos de medida nula.*

Demonstração. De fato, isso é visto considerando que a função $\psi(x)$ é localmente constante em todos os intervalos disjuntos pertencentes ao conjunto $\mathcal{A} = [0, 1] \setminus \mathcal{C}$, os quais estão em toda parte do conjunto $[0, 1]$ e nos quais temos $\psi(x)' = 0$. \square

Teorema 3.13. *A função $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é α -Hölder contínua com o expoente $\alpha = \frac{\log 2}{\log 3}$.*

Demonstração. Vamos mostrar que existe $c \in \mathbb{R}_+$ tal que para todo $x, y \in [0, 1]$ temos:

$$\frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq c \text{ com } \alpha = \frac{\log 2}{\log 3}. \quad (3.6)$$

Primeiramente, vamos considerar $x, y \in \mathcal{C}$ com $x < y$ tais que

$$x = (0, x_1 x_2 x_3 \dots x_k \dots)_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}$$

e

$$y = (0, y_1 y_2 y_3 \dots y_k \dots)_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{3^k},$$

com $x_k, y_k \in \{0, 2\}$. Então existe $h \in \mathbb{R}_+$ tal que $y = x + h$ e, conseqüentemente, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_k = y_k$ para $k < n_0$ e $x_{n_0} < y_{n_0}$, ou seja, $x_{n_0} = 0$ e $y_{n_0} = 2$. Com isso, temos que

$$\begin{aligned} \psi(y) - \psi(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(y_k/2)}{2^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x_k/2)}{2^k} = \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{((y_k - x_k)/2)}{2^k} \\ &= \frac{((y_{n_0} - x_{n_0})/2)}{2^{n_0}} + \frac{((y_{n_0+1} - x_{n_0+1})/2)}{2^{n_0+1}} + \frac{((y_{n_0+2} - x_{n_0+2})/2)}{2^{n_0+2}} + \dots \\ &= \frac{1}{2^{n_0}} + \frac{((y_{n_0+1} - x_{n_0+1})/2)}{2^{n_0+1}} + \frac{((y_{n_0+2} - x_{n_0+2})/2)}{2^{n_0+2}} + \dots \leq \frac{1}{2^{n_0-1}} = 2^{-n_0+1} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} h = y - x &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{3^k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k} = \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{(y_k - x_k)}{3^k} \\ &= \frac{(y_{n_0} - x_{n_0})}{3^{n_0}} + \frac{(y_{n_0+1} - x_{n_0+1})}{3^{n_0+1}} + \frac{(y_{n_0+2} - x_{n_0+2})}{3^{n_0+2}} + \dots \\ &= \frac{2}{3^{n_0}} + \frac{(y_{n_0+1} - x_{n_0+1})}{3^{n_0+1}} + \frac{(y_{n_0+2} - x_{n_0+2})}{3^{n_0+2}} + \dots \geq \frac{1}{3^{n_0}} = 3^{-n_0}. \end{aligned}$$

Sendo assim, segue que

$$\frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{|x - y|^\alpha} = \frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{h^\alpha} \leq 2^{-n_0+1} \cdot 3^{\alpha n_0}.$$

Se $\alpha = \frac{\log 2}{\log 3}$ temos que $2^{-n_0+1} \cdot 3^{\alpha n_0} = 2 = c$. De fato:

$$2^{-n_0+1} \cdot 3^{\alpha n_0} = 2 \cdot \left(\frac{3^\alpha}{2}\right)^{n_0} = 2 \cdot \left(\frac{\log 3^\alpha}{\log 2}\right)^{n_0} = 2 \cdot \left(\alpha \cdot \frac{\log 3}{\log 2}\right)^{n_0} = 2 \cdot \underbrace{\left(\frac{\log 2}{\log 3} \cdot \frac{\log 3}{\log 2}\right)}_1^{n_0} = 2.$$

Logo,

$$\forall x, y \in \mathcal{C}, \quad \frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq 2 \text{ com } \alpha = \frac{\log 2}{\log 3}. \quad (3.7)$$

Seguidamente, suponhamos $x, y \in \mathcal{A}$ com $x < y$. Considere o conjunto $\mathcal{C}_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} \eta_{n,k}$ e sejam os intervalos terços médios abertos $\delta_{n,1}, \delta_{n,2}, \delta_{n,3}, \dots, \delta_{n,2^{n-1}}$ removidos dos intervalos de \mathcal{C}_{n-1} para obter o conjunto \mathcal{C}_n . Se $x, y \in \delta_{n_0, k_0}$ para $n_0, k_0 \in \mathbb{N}$ fixados então $\psi(x) = \psi(y)$, ou seja, $\psi(x) - \psi(y) = 0$, logo, a Equação 3.6 é satisfeita trivialmente. Agora, consideremos

$x \in \delta_{n_1, k_1} = (x_E, x_D)$ e $y \in \delta_{n_2, k_2} = (x'_E, x'_D)$ sendo $\delta_{n_1, k_1} \neq \delta_{n_2, k_2}$ com $n_1, k_1, n_2, k_2 \in \mathbb{N}$ fixados de modo que $|x - y| = h$ e $|x_D - x'_E| = \bar{h}$, de acordo com a Figura 3.9.

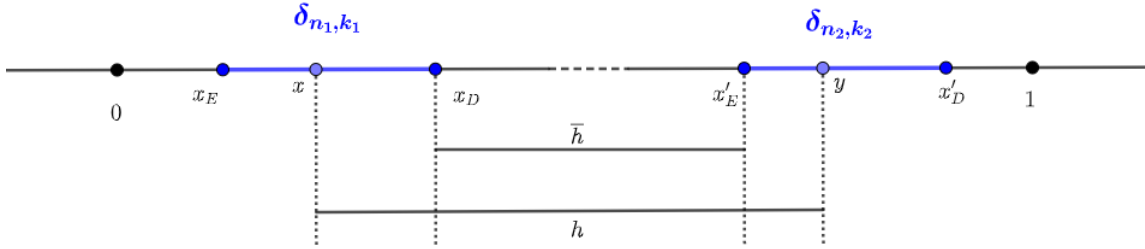


Figura 3.9 – Representação dos pontos $x \in \delta_{n_1, k_1}$ e $y \in \delta_{n_2, k_2}$.

Dessa forma, verificamos que

$$\frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{h^\alpha} = \frac{|\psi(x_D) - \psi(x'_E)|}{h^\alpha} \leq \frac{|\psi(x_D) - \psi(x'_E)|}{\bar{h}^\alpha} \quad (3.8)$$

Como $x_D, x'_E \in \mathcal{C}$ então, pelas Equações 3.7 e 3.8, para $\alpha = \frac{\log 2}{\log 3}$ temos que

$$\frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{h^\alpha} = \frac{|\psi(x_D) - \psi(x'_E)|}{h^\alpha} \leq 2.$$

De maneira análoga ao caso anterior, se $x \in \mathcal{C}$ e $y \in \mathcal{A}$, para $\alpha = \frac{\log 2}{\log 3}$, segue que

$$\frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq 2.$$

Portanto, ψ é α -Hölder contínua para $\alpha = \frac{\log 2}{\log 3}$. □

Teorema de Bonatti-Franks

Neste capítulo iremos apresentar a demonstração do trabalho desenvolvido por Bonatti-Franks [1] relacionado ao estudo dos campos vetoriais e às funções Hölder contínuas escrito na forma de teorema. Os autores provaram a existência de um campo vetorial contínuo não singular de \mathbb{R}^2 tangente a mais de uma folheação.

No Teorema A, que será demonstrado na sequência, foi estabelecida a construção de um campo vetorial Hölder contínuo tangente à uma família de folheações contínuas de classe C^1 . Tal resultado foi possível de ser obtido ao enfraquecer a propriedade lipschitz do campo vetorial para a condição Hölder, permitindo fugir das limitações impostas pelo Teorema da Existência e Unicidade 2.11.

Teorema A. *Para todo $1 \leq r < \infty$ existe um campo vetorial Hölder contínuo X em \mathbb{R}^2 com a propriedade de que existe uma família de folheações \mathcal{F}_t de classe C^1 distintas aos pares para $t \in [0, 1]$ tal que X é tangente à cada folheação. Além disso, cada folha de cada folheação é o gráfico de uma função de classe C^r de \mathbb{R} em \mathbb{R} .*

4.1 Demonstração do Teorema A

O objetivo inicial é construir uma função fundamental $g_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ estritamente crescente cujo gráfico, por translações horizontais, dá origem a uma folheação \mathcal{F}_0 . A partir de \mathcal{F}_0 encontramos um campo de vetores não nulos tangente a \mathcal{F}_0 o qual apenas é Hölder contínuo. Finalmente, na Seção 4.1.4, mostraremos que tal campo admite infinitas folheações tangentes.

4.1.1 Construção da Função Fundamental g_r

Considere a família de funções $\phi_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\phi_r(t) = t^{r+1}(1-t)^{r+1}, \quad \text{com } r \in \mathbb{N}$$

que são funções *lisas* ou *suaves*, ou seja, de classe C^∞ , e que apresenta as seguintes propriedades:

Proposição 4.1. *As r primeiras derivadas de ϕ_r se anulam nos pontos $t = 0$ e $t = 1$ para todo $r = 0, 1, 2, \dots$*

Demonstração. Notemos que $\phi_r^{(0)}(t) := \phi_r(t)$ então para todo r temos $\phi_r^{(0)}(0) = 0 = \phi_r^{(0)}(1)$.

A prova será feita por indução matemática em $r \geq 1$. Para $r = 1$ temos que

$$\begin{aligned} \phi_1(t) &= t^2 \cdot (1-t)^2 \quad \text{e} \quad \phi_1'(t) = (2t)(1-t)^2 + (t^2)(1-t) \\ &\Rightarrow \phi_1'(0) = \phi_1'(1) = 0. \end{aligned}$$

Hipótese de indução (vale para r). Isto é, as r primeiras derivadas de ϕ_r se anulam nos pontos $t = 0$ e $t = 1$, ou seja

$$\phi_r^{(j)}(0) = \phi_r^{(j)}(1) = 0 \quad \text{para todo } 1 \leq j \leq r,$$

provaremos que a hipótese também é válida para $r + 1$. De fato,

$$\phi_{r+1}(t) = t^{r+2}(1-t)^{r+2} = t(t-1)t^{r+1}(1-t)^{r+1} = (t-t^2)\phi_r(t),$$

logo

- $\phi_{r+1}'(t) = (1-2t)\phi_r(t) + (t-t^2)\phi_r'(t);$
- $\phi_{r+1}''(t) = -2\phi_r(t) + (1-2t)\phi_r'(t) + (1-2t)\phi_r'(t) + (t-t^2)\phi_r''(t)$
 $\Rightarrow \phi_{r+1}''(t) = -2\phi_r(t) + (2-4t)\phi_r'(t) + (t-t^2)\phi_r''(t);$
- $\phi_{r+1}'''(t) = -2\phi_r'(t) - 4\phi_r'(t) + (2-4t)\phi_r''(t) + (1-2t)\phi_r''(t) + (t-t^2)\phi_r'''(t)$
 $\Rightarrow \phi_{r+1}'''(t) = -6\phi_r'(t) + (3-6t)\phi_r''(t) + (t-t^2)\phi_r'''(t);$

...

$$\bullet \phi_{r+1}^{(k)}(t) = p_k(t)\phi_r^{(k-2)}(t) + q_k(t)\phi_r^{(k-1)}(t) + (t-t^2)\phi_r^{(k)}(t).$$

Dessa forma, pela Regra da Derivada do Produto, obtemos

$$\phi_{r+1}^{(r+1)}(t) = p_{r+1}(t)\phi_r^{(r-1)}(t) + q_{r+1}(t)\phi_r^{(r)}(t) + (t-t^2)\phi_r^{(r+1)}(t).$$

Sendo assim, temos que

$$\phi_{r+1}^{(r+1)}(0) = p_{r+1}(0)\phi_r^{(r-1)}(0) + q_{r+1}(0)\phi_r^{(r)}(0) + (0-0^2)\phi_r^{(r+1)}(0)$$

e

$$\phi_{r+1}^{(r+1)}(1) = p_{r+1}(1)\phi_r^{(r-1)}(1) + q_{r+1}(1)\phi_r^{(r)}(1) + (1-1^2)\phi_r^{(r+1)}(1)$$

Por hipótese de indução, como $\phi_r^{(j)}(0) = \phi_r^{(j)}(1) = 0$ para todo $0 \leq j \leq r$, concluímos que

$$\phi_{r+1}^{(r+1)}(0) = \phi_{r+1}^{(r+1)}(1) = 0.$$

Portanto, para todo $r = 0, 1, 2, \dots$ segue que $\phi_r^{(j)}(0) = \phi_r^{(j)}(1) = 0$ para qualquer $0 \leq j \leq r$. \square

Proposição 4.2. Existe $K_r > 0$ cota superior de $\phi_r, \phi_r', \phi_r'', \phi_r''', \phi_r^{(4)}, \dots, \phi_r^{(r)}$ em $[0, 1]$. Isto é,

$$\phi_r^{(j)}(x) \leq K_r, \forall x \in [0, 1], \forall j = 0, 1, 2, \dots, r.$$

Demonstração. Como $\phi_r^{(j)} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas no intervalo compacto $[0, 1]$ para todo $j = 0, 1, 2, \dots, r$, pelo Teorema 2.7, temos que $\phi_r^{(j)}$ é limitada $\forall j = 0, 1, 2, \dots, r$. Logo, existem constantes reais $K_{r,j} > 0$ tais que $|\phi_r^{(j)}| < K_{r,j}$ para todo $x \in [0, 1]$ e para todo $j = 0, 1, 2, \dots, r$. Seja

$$K_r = \sup\{K_{r,0}, K_{r,1}, K_{r,2}, \dots, K_{r,j}, K_{r,r}\} > 0.$$

Portanto,

$$|\phi_r^{(j)}| < K_r, \forall x \in [0, 1] \text{ e } \forall j = 0, 1, 2, \dots, r.$$

\square

Proposição 4.3. A área sob o gráfico de ϕ_r no intervalo $[0, 1]$ é positiva.

Demonstração. Podemos notar que $\phi_r(t)$ definida em $[0, 1]$ é uma função não negativa e que se anula apenas nos extremos, isto é,

$$\phi_r(t) > 0 \text{ para } t \in (0, 1) \text{ e } \phi_r(0) = \phi_r(1) = 0,$$

como podemos ver na Figura 4.1.

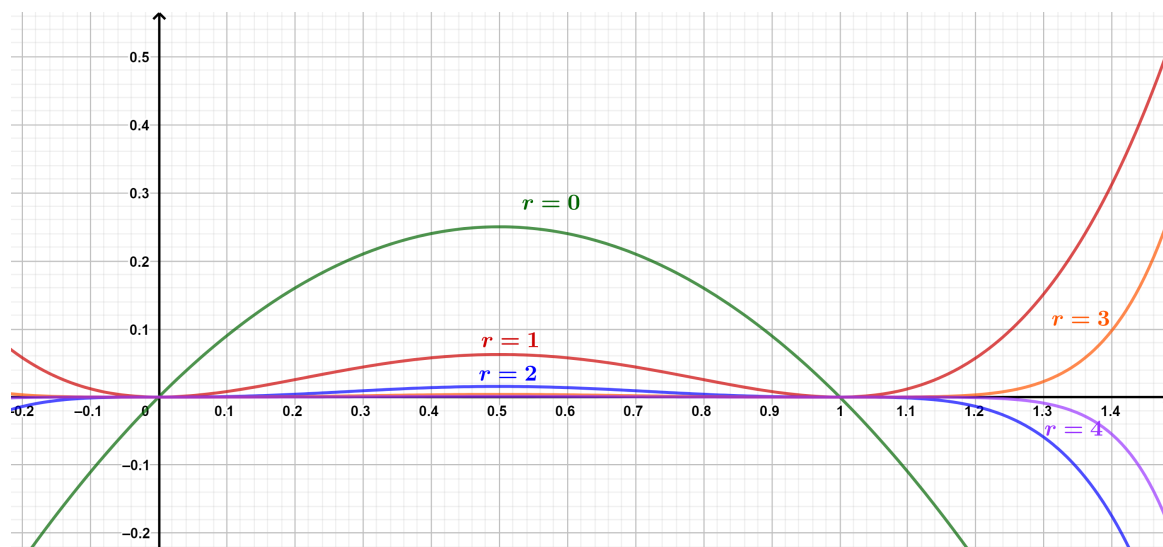


Figura 4.1 – Gráfico da função ϕ_r para $r = 0, 1, 2, 3, 4$.

Isso nos permite afirmar que a área A_r sob o gráfico de ϕ_r no intervalo $[0, 1]$ é positiva, ou seja,

$$A_r = \int_0^1 \phi_r(t) dt > 0.$$

□

Proposição 4.4. A função ϕ_r converge uniformemente para zero no intervalo $[0, 1]$.

Demonstração. Isso é visto considerando que a ϕ_r possui pontos críticos em $t = 0$, $t = 1$ e $t = \frac{1}{2}$, sendo os dois primeiros pontos de mínimo e o terceiro ponto de máximo, dado que ϕ_r cresce no intervalo $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ e decresce no intervalo $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, e

$$\phi_r\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{r+1} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{r+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2r+2},$$

que tende a zero quando r tende para o infinito. Logo, A_r também tende a zero quando r tende para o infinito, pois

$$0 < A_r = \int_0^1 \phi_r(t) dt < 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2r+2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2r+2},$$

chegando à essa conclusão a partir do Teorema do Confronto (Sanduíche). □

A Figura 4.2 ilustra esse resultado, visto que A_r sempre será menor do que a área do retângulo de base 1 e altura $\left(\frac{1}{2}\right)^{2r+2}$.

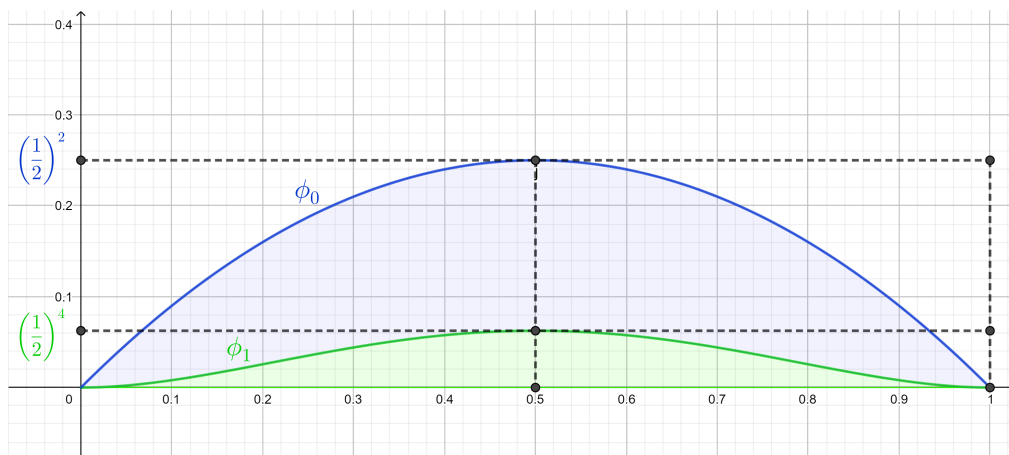


Figura 4.2 – Áreas sob os gráficos de ϕ_0 e ϕ_1 no intervalo $[0, 1]$.

Proposição 4.5 (Reescalonamento de ϕ_r). *Considere a mudança de variáveis ξ sobre o intervalo $(a, b) = \left(\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right)$, com $1 \leq k \leq 2^{n-1}$, dada por $\xi = 3^n(x - a)$. Então,*

$$A_r = 3^{(2r+1)n} \int_a^b \frac{\phi_r(3^n(x-a))}{3^{2rn}} dx. \quad (4.1)$$

Demonstração. Considere a composta:

$$\int_a^b \xrightarrow{\xi} \int_0^1 \xrightarrow{\phi_r} \mathbb{R} \quad \text{onde} \quad \xi(x) = 3^n(x-a).$$

Dessa forma, pelo Teorema 2.10, temos que

$$\begin{aligned} A_r &= \int_0^1 \phi_r(t) dt = \int_{\xi(a)}^{\xi(b)} \phi_r(t) dt = \int_a^b \phi_r(\xi(x)) \cdot \xi'(x) dx \\ &= 3^n \int_a^b \phi_r(3^n(x-a)) dx = 3^{(2r+1)n} \int_a^b \frac{\phi_r(3^n(x-a))}{3^{2rn}} dx. \end{aligned} \quad (4.2)$$

□

Com isso, definindo $h_{r,n,k}(x) := \frac{\phi_r(3^n(x-a))}{3^{2rn}}$, a partir da Equação 4.2 temos que

$$A_r = 3^{(2r+1)n} \int_a^b h_{r,n,k}(t) dt, \quad \text{logo,} \quad \int_a^b h_{r,n,k}(t) dt = \frac{A_r}{3^{(2r+1)n}}. \quad (4.3)$$

Agora, definimos uma família de funções indexadas em $r \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ e $k \in \{1, 2, \dots, 2^{n-1}\}$ dadas por

$$h_r : [0, 1] \rightarrow \left[0, \left(\frac{1}{2}\right)^{2r+2}\right],$$

tais que

$$h_r(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathcal{C} \\ h_{r,n,k}(x) = \frac{\phi_r(3^n(x-a))}{3^{2rn}}, & \text{se } x \in \delta_{n,k} = \left(\frac{k}{3^n}, \frac{(k+1)}{3^n}\right) \end{cases}. \quad (4.4)$$

A figura a seguir mostra uma ideia geral do gráfico da função $h_r(t)$.

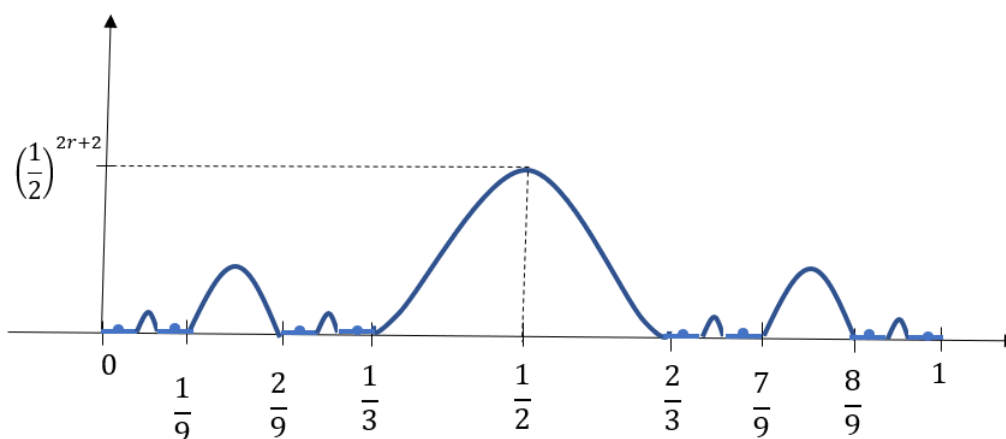


Figura 4.3 – Esboço da função $h_r(t)$.

Lema 4.1. $h_r(x)$ é uma função de classe C^r em $[0, 1]$ que se anula juntamente com as suas primeiras r derivadas para os pontos $x \in \mathcal{C}$.

Demonstração. Como $h_r(x) = h_{r,n,k}(x) = \frac{\phi_r(3^n(x-a))}{3^{2rn}} \forall x \in \delta_{n,k}$ são de classe C^∞ então $h_r(x)$ é de classe C^∞ em \mathcal{A} . Seja $x \in \mathcal{C}$ ($x \notin \mathcal{A}$). Pela Proposição 4.2, temos que todas as funções da família finita $\{\phi_r, \phi_r', \phi_r'', \phi_r''', \phi_r^{(4)}, \dots, \phi_r^{(r)}\}$ são limitadas. Visto que $h_r(x)$ é uma função definida no intervalo compacto $[0, 1]$ com suas r primeiras derivadas limitadas por

$$K_r \cdot 3^{rn} \cdot \frac{1}{3^{2rn}} = \frac{K_r}{3^{rn}},$$

que tende uniformemente para zero quando n tende para o infinito, isto é, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_r}{3^{rn}} = 0$, concluímos que $h_r(x)$ é uma função de classe C^r com suas r primeiras derivadas nulas para todo $x \in \mathcal{C}$. \square

Lema 4.2. A função h_r é Lipschitz em $[0, 1]$.

Demonstração. Considere $x_1, x_2 \in [0, 1]$ e uma constante real $K > 0$. Devemos mostrar que

$$|h_r(x_2) - h_r(x_1)| \leq K \cdot |x_2 - x_1|,$$

ou equivalentemente,

$$\left| \frac{h_r(x_2) - h_r(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \leq K.$$

Como $h_r(x)$ é uma função derivável e com derivada contínua no intervalo compacto $[0, 1]$, pelo Teorema do Valor Médio, que a sua derivada $h'_r(x)$ é limitada em $[0, 1]$, ou seja, para todo $c \in [0, 1]$ existe uma constante K tal que $h'_r(x) \leq K$ e, assumindo $x_1 < x_2$, temos

$$h_r(x_2) - h_r(x_1) \leq h'_r(c) \cdot (x_2 - x_1) \leq K(x_2 - x_1).$$

Tomando o valor absoluto na desigualdade anterior obtemos

$$|h_r(x_2) - h_r(x_1)| \leq K \cdot |x_2 - x_1|$$

e, conseqüentemente, $h_r(x)$ é Lipschitz neste intervalo. □

Agora, definimos a função

$$\tilde{g}_r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

por

$$\tilde{g}_r(x) = \int_0^x h_r(t) dt.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, vemos que h_r é a derivada de \tilde{g}_r , isto é, $\tilde{g}'_r(x) = h_r(x)$.

A função \tilde{g}_r apresenta as seguintes propriedades:

Proposição 4.6. \tilde{g}_r é monótona e estritamente crescente. Portanto, $\tilde{g}_r : [0, 1] \rightarrow [0, \tilde{g}_r(1)] \subset \mathbb{R}$.

Demonstração. De fato, tomando $x_1, x_2 \in [0, 1]$ com $x_1 < x_2$, é visto dado que

$$\tilde{g}_r(x_2) - \tilde{g}_r(x_1) = \int_0^{x_2} h_r(t) dt - \int_0^{x_1} h_r(t) dt = \int_0^{x_2} h_r(t) dt + \int_{x_1}^0 h_r(t) dt = \int_{x_1}^{x_2} h_r(t) dt > 0,$$

sendo h_r uma função não negativa, ou seja, estritamente positiva em um conjunto denso, como é o caso do intervalo $[0, 1]$. □

Proposição 4.7. \tilde{g}_r é um homeomorfismo de classe C^{r+1} cujas $(r+1)$ primeiras derivadas se anulam no ponto 0, isto é, $\tilde{g}_r^{(i)}(0) = 0 \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, (r+1)$.

Demonstração. Como \tilde{g}_r é contínua e estritamente crescente, chegamos à conclusão de que a sua inversa \tilde{g}_r^{-1} também é contínua, permitindo, assim, afirmar que \tilde{g}_r é um homeomorfismo. O fato de que \tilde{g}_r é de classe C^{r+1} se justifica por h_r ser de classe C^r e $\tilde{g}_r' = h_r$. O fato de que as $(r+1)$ primeiras derivadas de \tilde{g}_r se anulam no ponto 0 decorre diretamente do Lema 4.1 visto que $\tilde{g}_r(0) = 0$ e $\tilde{g}_r^{(i+1)}(0) = h_r^{(i)}(0) = 0 \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots, r$. \square

Vamos estender a função $\tilde{g}_r : [0, 1] \rightarrow [0, \tilde{g}_r(1)]$ a uma função $g_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$g_r(x) = \begin{cases} -x^{2r}, & \text{se } x < 0 \\ \tilde{g}_r(x) = \int_0^x h_r(t) dt, & \text{se } x \in [0, 1] \\ \tilde{g}_r(1) + (x-1)^{2r}, & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad (4.5)$$

Logo, as derivadas de g_r são dadas por:

$$g_r'(x) = \begin{cases} -2rx^{2r-1}, & \text{se } x < 0 \\ h_r(x), & \text{se } x \in [0, 1] \\ 2r(x-1)^{2r-1}, & \text{se } x > 1 \end{cases} \quad (4.6)$$

A figura abaixo ilustra o gráfico aproximado da função g_r .

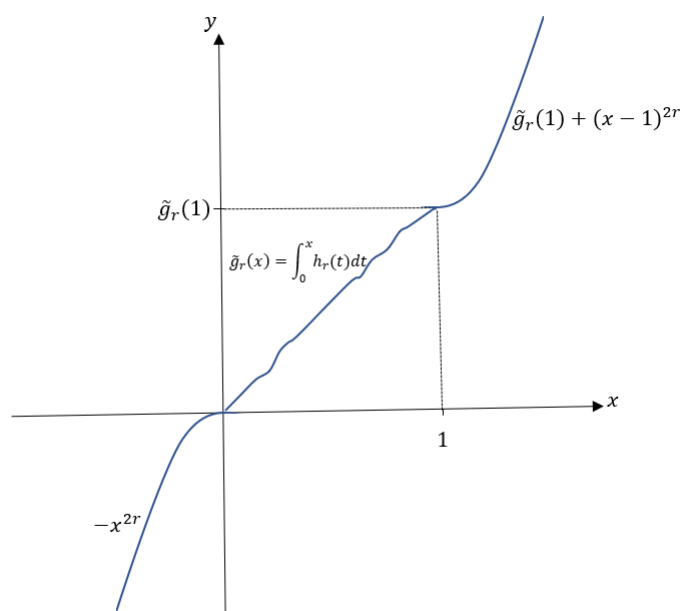


Figura 4.4 – Esboço da função $g_r(x)$.

Proposição 4.8. A função $g_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é um homeomorfismo de classe C^{r+1} .

Demonstração. Temos que:

- Para $x < 0$, $g_r(x) = -x^{2r}$, ou seja, $g_r \in C^\infty$;
- Para $0 < x < 1$, $g_r(x) = \tilde{g}_r(x) = \int_0^x h_r(t)dt$, logo, $g_r \in C^{r+1}$;
- Para $x > 0$, $g_r(x) = \tilde{g}_r(1) + (x-1)^{2r}$, isto é, $g_r \in C^\infty$.

Portanto, basta analisar os casos em que $x = 0$ e $x = 1$.

- Se $g_r(x) = -x^{2r}$, então $g'_r(x) = -2rx^{2r-1} = 0$ quando $x = 0$.
- Se $g_r(x) = \tilde{g}_r(1) + (x-1)^{2r}$, então $g'_r(x) = 2r(x-1)^{2r-1} = 0$ quando $x = 1$.
- Se $g_r(x) = \tilde{g}_r(x) = \int_0^x h_r(t)dt$, então $g'_r(x) = \tilde{g}'_r(x) = h_r(x) = 0$ quando $x = 0$ e $x = 1$.

Além disso, temos que

$$-x^{2r} = \int_0^x h_r(t)dt \text{ para } x = 0$$

e que

$$\tilde{g}_r(1) + (x-1)^{2r} = \int_0^x h_r(t)dt \text{ para } x = 1.$$

Portanto, podemos concluir que a função $g_r(x)$ é contínua e estritamente crescente, ou seja, $g_r(x)$ é um homeomorfismo de classe C^{r+1} . \square

4.1.2 Construção da Folheação Inicial \mathcal{F}_0

A partir do gráfico da função g_r vamos construir a folheação inicial \mathcal{F}_0 . Para isso, tomaremos o gráfico de g_r como uma de suas folhas, sendo as outras folhas obtidas por meio de translações horizontais de g_r da seguinte forma: seja L_0 o gráfico de g_r e \mathcal{F}_0 a folheação de \mathbb{R}^2 cujas folhas são as curvas L_c , com $c \in \mathbb{R}$ onde

$$L_c = L_0 + (c, 0) = \{(x, g_r(x-c)) \mid x \in \mathbb{R}\},$$

e, sendo g_r contínua e estritamente crescente, temos que g_r^{-1} também é contínua, logo

$$L_c = \{(g_r^{-1}(y) + c, y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Vamos analisar a inclinação em L_c . De (4.5), dado um ponto $(x_0, y_0) \in L_c$ verificamos que

$$g_r(x_0 - c) = y_0 \Rightarrow c = x_0 - g_r^{-1}(y_0) \Rightarrow g_r^{-1}(y_0) = x_0 - c.$$

Como as folhas L_c são translações horizontais do gráfico da função $y = g_r(x)$ ($L_c = \{(x, g_r(x - c))\}$) então inclinação das folhas sobre a reta $y = y_0$ é constante e igual a $g'_r(x_0)$, onde $y_0 = g_r(x_0)$, de acordo com a figura a seguir.

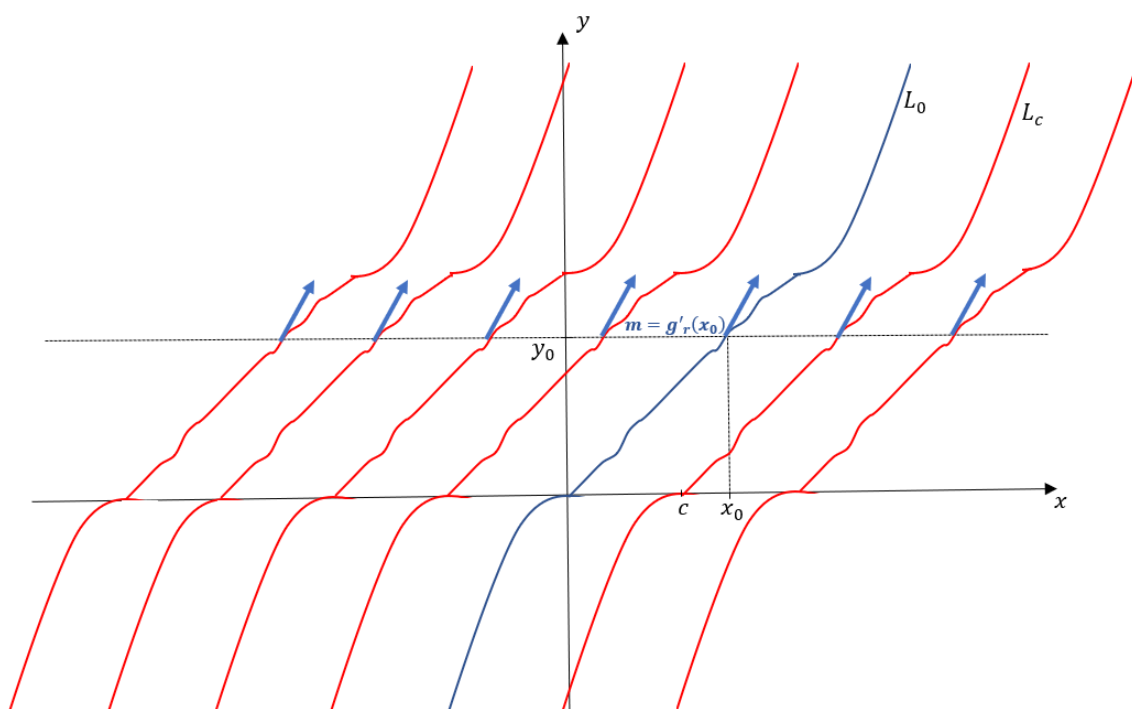


Figura 4.5 – Inclinações nas folhas L_c dadas pelas translações horizontais do gráfico de $g_r(x)$.

4.1.3 Construção do Campo de Vetores Hölder Contínuo X Tangente a \mathcal{F}_0

Seja um ponto $(x_0, y_0) \in L_c$, assim, de (4.6) temos que a inclinação neste é dada por:

$$y'|_{(x_0, y_0)} = \begin{cases} -2r(x_0 - c)^{2r-1} = -2r(g_r^{-1}(y_0))^{2r-1}, & \text{se } y_0 < 0 \\ h_r(x_0 - c) = h_r(g_r^{-1}(y_0)), & \text{se } 0 \leq y_0 \leq g_r(1) \\ 2r(x_0 - c)^{2r-1} = 2r(g_r^{-1}(y_0))^{2r-1}, & \text{se } y_0 > g_r(1) \end{cases} \quad (4.7)$$

Com isso, podemos definir o campo vetorial X tangente à folheação \mathcal{F}_0 por

$$X = 1 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + y' \cdot \frac{\partial}{\partial y}. \quad (4.8)$$

De (4.7), notemos que o campo X é de classe C^∞ (polinomial) sobre a região $\{(x, y) \mid y < 0 \text{ e } y > g_r(1)\}$. Sobre a região $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq g_r(1)\}$ o campo X é contínuo pois $g_r^{-1}(y)$ é apenas contínua. Mas, no teorema a seguir mostraremos que o campo X é Hölder contínuo nesta região.

De forma análoga ao que foi feito para funções na Seção 3.1 do Capítulo 3, um campo de vetores V é Hölder contínuo se, dados $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ em \mathbb{R}^2 , existem constantes reais positivas Q e α tais que

$$|V(P_2) - V(P_1)| \leq Q \cdot |P_2 - P_1|^\alpha, \quad (4.9)$$

isto é,

$$|V(x_2, y_2) - V(x_1, y_1)| \leq Q \cdot \left[\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \right]^\alpha.$$

Na sequência iremos analisar o campo X no caso em que $0 \leq y \leq g_r(1)$, pois, para os casos em que $y < 0$ e $y > g_r(1)$, de (4.7) e (4.8), vemos que X é de classe C^∞ e, conseqüentemente, unicamente integrável, de acordo com o Teorema de Existência e Unicidade (2.11). Neste intervalo de interesse, temos que o campo vetorial X é Hölder contínuo e dado por

$$X = \frac{\partial}{\partial x} + h_r(g_r^{-1}(y)) \frac{\partial}{\partial y} \text{ para todo } 0 \leq y \leq g_r(1), \quad (4.10)$$

como descrito no Teorema 4.1.

Teorema 4.1. *O campo de vetores X (4.10) é Hölder contínuo.*

Demonstração. Mostrar que X é Hölder contínuo, por (4.9), é que provar que, dados os pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ em \mathbb{R}^2 com $0 \leq y_1 < y_2 \leq g_r(1)$, existem constantes reais $Q > 0$ e $\alpha \in (0, 1)$ tais que

$$|X(P_2) - X(P_1)| \leq Q \cdot |P_2 - P_1|^\alpha,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} |X(x_2, y_2) - X(x_1, y_1)| &\leq Q \cdot |(x_2, y_2) - (x_1, y_1)|^\alpha \\ \Leftrightarrow |(1, h_r(g_r^{-1}(y_2))) - (1, h_r(g_r^{-1}(y_1)))| &\leq Q \cdot |(x_2 - x_1, y_2 - y_1)|^\alpha \\ \Leftrightarrow |h_r(g_r^{-1}(y_2)) - h_r(g_r^{-1}(y_1))| &\leq Q \cdot [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{\frac{\alpha}{2}}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Para mostrar (4.11) é suficiente mostrar que

$$|h_r(g_r^{-1}(y_2)) - h_r(g_r^{-1}(y_1))| \leq Q \cdot |y_2 - y_1|^\alpha, \quad (4.12)$$

pois, se 4.12 vale, pela desigualdade triangular, como

$$|y_2 - y_1| \leq \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = |(x_2, y_2) - (x_1, y_1)|,$$

temos que $|y_2 - y_1|^\alpha \leq |(x_2, y_2) - (x_1, y_1)|^\alpha$, logo, substituindo em (4.12) obtemos (4.11).

Assim, para mostrar (4.12) basta mostrar que, para $y_1 \neq y_2$,

$$\frac{|h_r(g_r^{-1}(y_2)) - h_r(g_r^{-1}(y_1))|}{|y_2 - y_1|^\alpha} \leq Q. \quad (4.13)$$

Para o caso em que $y_1 = y_2$, temos que (4.12) é claramente verdadeira.

Para mostrar (4.13), temos que se $0 \leq y_1 < y_2 \leq g_r(1)$ e fazendo $x_1 = g_r^{-1}(y_1)$ e $x_2 = g_r^{-1}(y_2)$, como g_r é estritamente crescente (Proposição 4.6), então $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ e substituindo em (4.13) temos que basta mostrar:

$$\frac{|h_r(x_2) - h_r(x_1)|}{|g_r(x_2) - g_r(x_1)|^\alpha} \leq Q,$$

ou equivalentemente,

$$\frac{1}{Q} |h_r(x_2) - h_r(x_1)| \leq |g_r(x_2) - g_r(x_1)|^\alpha. \quad (4.14)$$

Fazendo $\beta = \frac{1}{\alpha} > 1$, mostrar (4.14) é equivalente a mostrar:

$$\frac{1}{Q^\beta} \cdot |h_r(x_2) - h_r(x_1)|^\beta \leq |g_r(x_2) - g_r(x_1)| \quad (4.15)$$

para algum $Q > 0$ e $\beta > 1$.

Finalmente mostraremos (4.15): sendo h_r uma função *Lipschitz* em $[0, 1]$ (Lema 4.2) então existe uma constante $D > 0$ tal que

$$|h_r(x_2) - h_r(x_1)| \leq D \cdot |x_2 - x_1|, \quad \forall x_1, x_2 \in [0, 1]$$

e, conseqüentemente, para qualquer $\beta > 1$,

$$|h_r(x_2) - h_r(x_1)|^\beta \leq D^\beta \cdot |x_2 - x_1|^\beta. \quad (4.16)$$

Logo, será suficiente encontrar as constantes β e K que satisfaçam

$$|g_r(x_2) - g_r(x_1)| \geq K \cdot |x_2 - x_1|^\beta, \quad (4.17)$$

pois, sendo assim, de (4.16) e (4.17) temos que

$$|g_r(x_2) - g_r(x_1)| \geq K \cdot |x_2 - x_1|^\beta \geq \frac{K}{D^\beta} \cdot |h_r(x_2) - h_r(x_1)|^\beta,$$

dessa forma, denotando por $Q = \left(\frac{D^\beta}{K}\right)^{\frac{1}{\beta}} \Rightarrow \frac{1}{Q^\beta} = \frac{D}{K^\alpha}$. Assim,

$$|g_r(x_2) - g_r(x_1)| \geq \frac{K}{D^\beta} \cdot |h_r(x_2) - h_r(x_1)|^\beta = \frac{1}{Q^\beta} \cdot |h_r(x_2) - h_r(x_1)|^\beta$$

consequentemente vale (4.15).

Logo, resta mostrar (4.17), isto é, encontrar as constantes $\beta > 1$ e $K > 0$ tais que $|g_r(x_2) - g_r(x_1)| \geq K \cdot |x_2 - x_1|^\beta$.

Agora, tomemos n como sendo o único inteiro positivo de menor valor possível tal que

$$\frac{2}{3^{n-1}} \leq |x_2 - x_1| < \frac{2}{3^{n-2}}. \quad (4.18)$$

Com isso, observamos que existe um intervalo $I = \left[\frac{j}{3^{n-1}}, \frac{j+1}{3^{n-1}}\right] \subset [x_1, x_2]$, podendo ocorrer as duas situações:

1) Se o intervalo I não for uma das lacunas $\delta_{n-1,j}$ obtidas no processo da construção de \mathcal{C} então ele conterá uma lacuna $\delta_{n,k} = [a, b] = \left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right]$ com o comprimento igual a $\frac{1}{3^n}$ de modo que, pela Equação 4.3,

$$g_r(x_2) - g_r(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} h_r(t) dt \geq \int_a^b h_r(t) dt \geq \frac{A_r}{3^{(2r+1)n}} \geq \frac{A_r}{3^{3n}}. \quad (4.19)$$

Logo, fazendo em (4.19) $\beta = 3r$, $K = A_r \left(\frac{9}{2}\right)^\beta$ e considerando, por (4.18), que $|x_2 - x_1| < \frac{2}{3^{n-2}}$ obtemos

$$|g_r(x_2) - g_r(x_1)| \geq \frac{A_r}{3^{3n}} = \frac{A_r}{3^{n\beta}} \geq A_r \left(\frac{9}{2}\right)^\beta \cdot |x_2 - x_1|^\beta = K \cdot |x_2 - x_1|^\beta. \quad (4.20)$$

2) Se o intervalo I for uma das lacunas $\delta_{n-1,j}$ obtidas no processo da construção de \mathcal{C} então basta fazer o raciocínio de forma análoga ao feito na Equação (4.20) trocando (n) por $(n-1)$.

Sendo assim, as constantes β e K que satisfazem (4.17) foram encontradas. Portanto, concluímos que $h_r(g_r^{-1}(y))$ é Hölder contínuo e, consequentemente, o campo vetorial X também é Hölder contínuo. \square

4.1.4 Construção das Infinitas Folheações Tangentes ao Campo de Vetores X

Nesta seção vamos construir outras folheações tangentes ao campo vetorial X . Para isso, considere a família de **conjuntos de Cantor** induzidos pelo homeomorfismo g_r , denotados por $\mathcal{C}'_r = g_r(\mathcal{C}) \subset [0, g_r(1)]$.

A partir da função de Cantor $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ construída na Seção 3.3 vamos construir uma família de **funções de Cantor** $\tilde{\psi}_r : [0, g_r(1)] \rightarrow [0, g_r(1)]$ associadas aos conjuntos \mathcal{C}'_r da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc}
 [0, 1] & \xrightarrow{\psi} & [0, 1] \\
 \begin{array}{c} \uparrow \\ g_r \\ \downarrow \end{array} & \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ g_r^{-1} \end{array} & \begin{array}{c} \downarrow \\ g_r \\ \downarrow \end{array} \\
 [0, g_r(1)] & \xrightarrow{\tilde{\psi}_r} & [0, g_r(1)]
 \end{array}$$

Assim, $\tilde{\psi}_r(y) = g_r \circ \psi \circ g_r^{-1}(y)$, $\forall y \in [0, g_r(1)]$. Com isso, todas as propriedades de ψ também valem para $\tilde{\psi}_r$, por exemplo, $\tilde{\psi}_r$ são monótonas não-decrescentes e constantes nas lacunas $\tilde{\delta}_{n,k} = g_r(\delta_{n,k})$ para todo $r = 0, 1, 2, \dots$. A Figura 4.6 mostra o gráfico da função $\tilde{\psi}_r$.

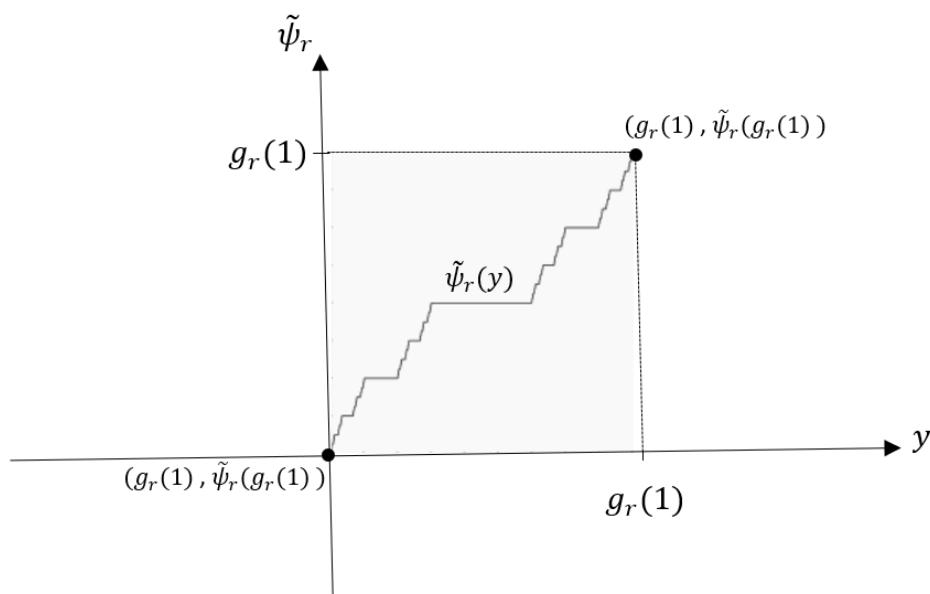


Figura 4.6 – Esboço da função $\tilde{\psi}_r$ (Reescalamento de ψ).

Considere a extensão da função $\tilde{\psi}_r$ para todo \mathbb{R} da seguinte forma (Figura 4.7):

$$\psi_r(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y < 0 \\ \tilde{\psi}_r(y), & \text{se } 0 \leq y \leq g_r(1) \\ g_r(1), & \text{se } y > g_r(1) \end{cases}$$

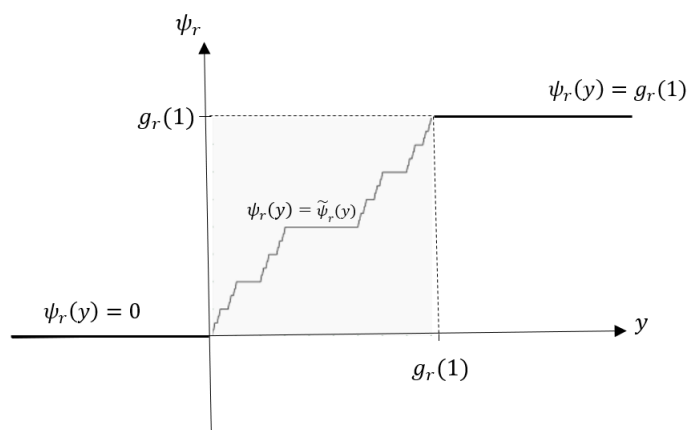


Figura 4.7 – Esboço da função ψ_r .

Com isso, para cada parâmetro $t \in [0, 1]$ e para todo $r \geq 0$, vamos associar uma função $f_{r,t} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $x := f_{r,t}(y) = g_r^{-1}(y) + t\psi_r(y)$, ou seja,

$$f_{r,t}(y) = \begin{cases} -(-y)^{\frac{1}{2r}}, & \text{se } y < 0 \\ g_r^{-1}(y) + t\psi_r(y), & \text{se } 0 \leq y \leq g_r(1) \text{ (Figura 4.8)} \\ 1 + tg_r(1) + (y - g_r(1))^{\frac{1}{2r}}, & \text{se } y > g_r(1) \end{cases}$$

Para $y < 0$ e $y > g_r(1)$ temos claramente que $f_{r,t}(y)$ é estritamente crescente. Dados dois pontos $y_1, y_2 \in [0, g_r(1)]$ com $y_1 < y_2$, sendo a função g_r estritamente crescente então g_r^{-1} também é estritamente crescente, logo $g_r^{-1}(y_1) < g_r^{-1}(y_2)$ e, sendo ψ_r monótona não-decrescente, temos que $\psi_r(y_1) \leq \psi_r(y_2)$, logo $f_{r,t}(y_1) = g_r^{-1}(y_1) + t\psi_r(y_1) < g_r^{-1}(y_2) + t\psi_r(y_2) = f_{r,t}(y_2)$.

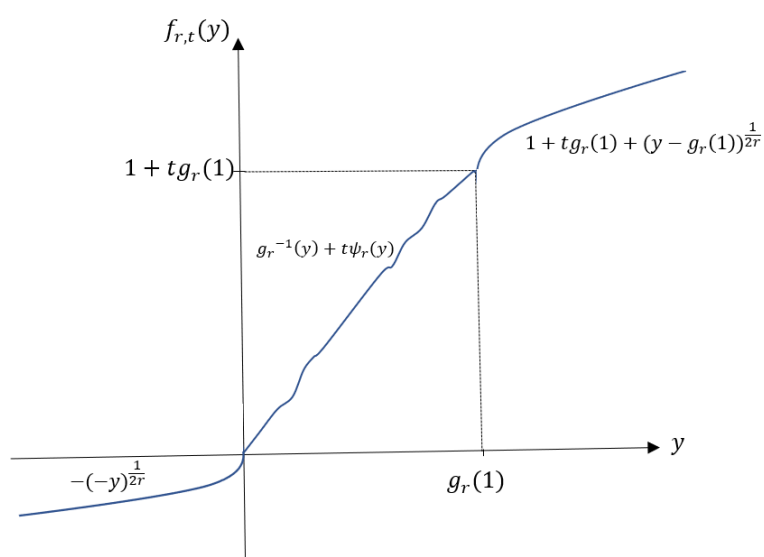


Figura 4.8 – Esboço da função $f_{r,t}$.

Portanto, a função $f_{r,t} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e estritamente crescente. Logo, $f_{r,t}$ é um homeomorfismo em \mathbb{R} . Denotamos a sua inversa por $g_{r,t} := f_{r,t}^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (Figura 4.9).

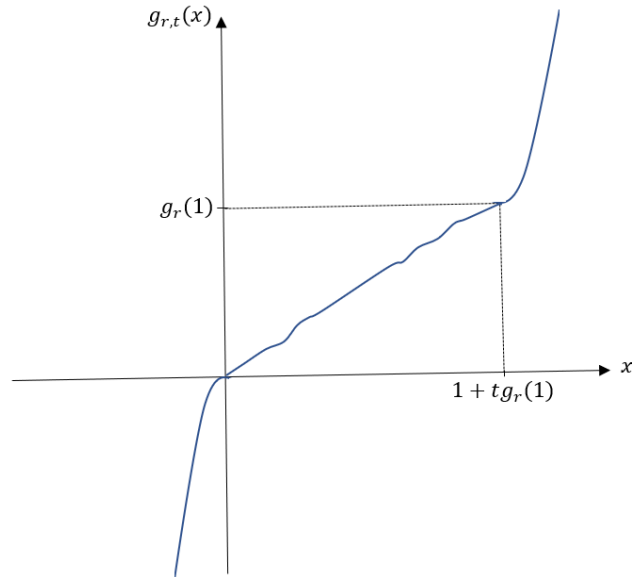


Figura 4.9 – Esboço da função $g_{r,t}$.

Vamos denotar por $C_{r,t} := f_{r,t}(C_r) = f_{r,t}(g_r(C))$ o conjunto de Cantor em $[0, 1 + t g_r(1)]$.

Notemos que a família $\{g_{r,t}\}_{t \in [0,1]}$ é uma deformação contínua no parâmetro t da função $g_r = g_{r,0}$ (Figura 4.10).

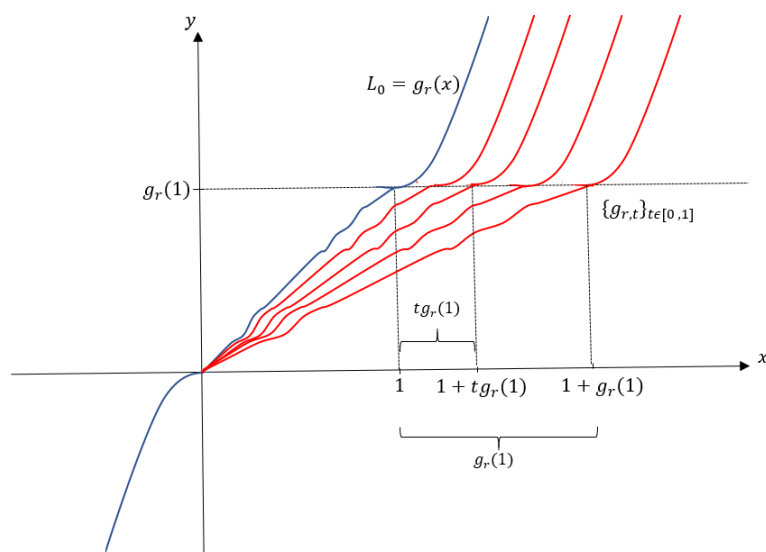


Figura 4.10 – Esboço da família de funções $\{g_{r,t}\}_{t \in [0,1]}$.

O gráfico de cada função $g_{r,t}$ será a folha $L_0^{r,t}$ para logo construir as folheações $\mathcal{F}_{r,t}$ por translações horizontais. Para isso, necessitamos da proposição a seguir.

Proposição 4.9. $g_{r,t}(x)$ é uma função de classe C^r e cujo gráfico é tangente ao campo vetorial X .

Demonstração. Notemos que o gráfico de $g_{r,t}$ na faixa $\{y; y \leq 0\}$ e $\{y; y \geq g_r(1)\}$ coincide com as folhas respectivas de \mathcal{F}_0 , portanto são tangentes ao campo X nestas regiões. Resta mostrar que $g_{r,t} : [0, 1 + tg_r(1)] \rightarrow [0, g_r(1)]$ é tangente.

Para isso, seja $x_0 \in [0, 1 + tg_r(1)]$. Primeiramente vamos considerar o caso em que x_0 não pertence ao conjunto de Cantor $\mathcal{C}_{r,t}$ ($x_0 \notin \mathcal{C}_{r,t}$), logo x_0 está no interior de uma lacuna $\delta_{x_0,t}$. Assim, existe uma vizinhança de x_0 contida em $\delta_{x_0,t}$. Logo ψ_r é constante em uma vizinhança de $y_0 = g_{r,t}(x_0)$. Denotemos por $c_t = t\psi(y_0)$ tal constante nessa vizinhança contida em uma lacuna δ_{y_0} , ou seja,

$$t\psi_r|_{\delta_{y_0}} = \text{constante} = c_t = t\psi(y_0).$$

Com isso, dado $y \in \delta_{y_0}$ temos que

$$x := f_{r,t}(y) = g_r^{-1}(y) + t\psi(y) = g_r^{-1}(y) + c_t \Rightarrow g_r^{-1}(y) = x - c_t \Rightarrow y = g_r(x - c_t).$$

Portanto, pela Proposição 4.8 temos que $y = g_{r,t}(x)$ é uma função de classe C^r para todo $x \in \delta_{x_0,t}$. Por outro lado, como $g_{r,t}$ é uma translação horizontal de g_r , temos que ela também é tangente ao campo vetorial X .

Agora consideremos o caso em que x_0 pertence ao conjunto de Cantor $\mathcal{C}_{r,t}$ ($x_0 \in \mathcal{C}_{r,t}$). Logo temos que $x_0 = f_{r,t}(g_r(z_0))$ tal que $z_0 \in \mathcal{C}$. Dado um $x \in [0, 1 + g_r(1)]$ temos que $x = f_{r,t}(g_r(z))$ com $z \in [0, 1]$. Então

$$x_0 = f_{r,t}(g_r(z_0)) = g_r^{-1}(g_r(z_0)) + t\psi(g_r(z_0)) = z_0 + t\psi(g_r(z_0)). \quad (4.21)$$

Analogamente, temos que

$$x = f_{r,t}(g_r(z)) = g_r^{-1}(g_r(z)) + t\psi(g_r(z)) = z + t\psi(g_r(z)). \quad (4.22)$$

Efetuada a diferença entre as Equações (4.22) e (4.21), obtemos

$$x - x_0 = (z - z_0) + t \cdot [\psi(g_r(z)) - \psi(g_r(z_0))].$$

Pelo fato de g_r ser estritamente crescente e ψ ser monótona não-decrescente, podemos considerar os casos:

1) Se $z > z_0$ então $z - z_0 > 0$ e $\psi(g_r(z)) - \psi(g_r(z_0)) > 0$ logo

$$x - x_0 > z - z_0 > 0 \Rightarrow |z - z_0| \leq |x - x_0|.$$

2) Se $z < z_0$ então $z - z_0 < 0$ e $\psi(g_r(z)) - \psi(g_r(z_0)) < 0$ logo

$$x - x_0 < z - z_0 < 0 \Rightarrow |z - z_0| \leq |x - x_0|.$$

Sendo assim, temos que

$$|z - z_0| \leq |x - x_0|. \quad (4.23)$$

Com isso, podemos ver que

$$|g_{r,t}(x) - g_{r,t}(x_0)| = |g_{r,t}(f_{r,t}(g_r(z))) - g_{r,t}(f_{r,t}(g_r(z_0)))| = |g_r(z) - g_r(z_0)|. \quad (4.24)$$

Como g_r é de classe C^{r+1} e suas $(r+1)$ primeiras derivadas se anulam no ponto 0 (Proposição 4.7), aplicando o Lema 2.9 temos que existe o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g_r(z) - g_r(z_0)}{|z - z_0|^{r+1}},$$

ou seja, existe $B > 0$ tal que

$$|g_r(z) - g_r(z_0)| \leq B \cdot |z - z_0|^{r+1}. \quad (4.25)$$

Assim, combinando as Equações (4.23), (4.24) e (4.25) temos que

$$|g_{r,t}(x) - g_{r,t}(x_0)| \leq B \cdot |x - x_0|^{r+1}.$$

Portanto, pelo Lema 2.9, concluímos que $g_{r,t}$ é r vezes diferenciável em x_0 , isto é, $g_{r,t}$ é de classe C^r e suas r primeiras derivadas se anulam neste ponto. Particularmente, o gráfico de $g_{r,t}$ é tangente ao campo vetorial X . \square

Dessa forma, para cada parâmetro $t \in [0, 1]$ e para todo $r \geq 0$, definimos a família de folheações $\mathcal{F}_{r,t}$ cujas folhas são dadas por translações horizontais dos gráficos das funções $g_{r,t}$. Ou seja, tomamos $L_0^{r,t}$ como sendo o gráfico de $g_{r,t}$ e definimos $L_c^{r,t} = L_0^{r,t} + (c, 0)$, tal que a folha $L_c^{r,t}$ será equivalente ao gráfico de $y = g_{r,t}(x - c)$. Sendo o campo vetorial X invariante sob translações horizontais, podemos afirmar que $L_c^{r,t}$ é tangente a X . Portanto, cada folheação $\mathcal{F}_{r,t}$ tem todas as suas folhas de classe C^r e tangentes ao campo vetorial X , para todo $t \in [0, 1]$ e para todo $r \geq 0$, o que conclui a demonstração do Teorema A.

Considerações Finais

Na demonstração do Teorema A, temos construído um campo de vetores X unicamente integrável no complemento de uma fina faixa horizontal infinita $\{(x, y); 0 \leq y \leq \varepsilon\} \subset \mathbb{R}^2$. Isto é, as folheações são distintas apenas numa fina faixa horizontal, portanto coincidem no complementar desta faixa. Além deste resultado Bonatti e Franks (em [1]) encontram um campo de vetores Y contínuo sem singularidades no plano que admite folheações tangentes a Y e transversais num conjunto denso do plano, mais precisamente:

Teorema B. *Existem um campo de vetores contínuo Y sobre \mathbb{R}^2 , duas folheações F e G cada uma delas tangente ao campo Y e um subconjunto denso $E \subset \mathbb{R}^2$ tal que para cada $x \in E$ as folhas F_x e G_x das folheações F e G passando por x são topologicamente transversais.*

Os autores em [1] indicam que de fato encontraram uma família não enumerável de folheações tangentes a Y . Mas por outro lado, não se sabe se o campo Y é Hölder contínuo assim como não se sabe se as folhas das folheações podem ser arbitrariamente suaves.

Referências

- [1] C. Bonatti and J. Franks. *A Hölder continuous vector field tangent to many foliations*. Cambridge University Press, New York, pg. 299-306, 2004. [10](#), [55](#), [73](#)
- [2] C. Camacho and A. Lins Neto. *Introdução à Teoria das Folheações*. Projeto Euclides - IMPA, RJ, vol. 9, 1977. [11](#)
- [3] D. G. de Figueiredo and A. F. Neves. *Equações Diferenciais Aplicadas*. Coleção Matemática Universitária - IMPA, RJ, 1997. [11](#)
- [4] O. Dovgoshey, O. Martio, V. Ryazanov, and M. Vuorinen. *The cantor function*. Expo. Math. , vol. 24:1 , pg. 1-37 , Elsevier, 2006. [44](#)
- [5] E. Hille and J. D. Tamarkin. *Remarks on a known example of a monotone continuous function*. The American Mathematical Monthly , vol. 36:5 , pg. 255-264 , Taylor & Francis, 1929. [29](#)
- [6] M. Hirsch, C. Pugh, and M. Shub. *Invariant manifolds*. Lect. Notes in Math. Springer Verlag , vol. 583, 1977. [10](#)
- [7] E. L. Lima. *Curso de Análise*. Projeto Euclides - IMPA, RJ, vol. 2, 1981. [11](#)
- [8] E. L. Lima. *Curso de Análise, 12ª edição*. Projeto Euclides - IMPA, RJ, vol. 1, 2006. [11](#), [17](#), [19](#), [29](#)
- [9] E. L. Lima. *Variiedades Diferenciáveis*. Publicações Matemáticas - IMPA, RJ, 2007. [11](#), [24](#)
- [10] J. Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Projeto Euclides - IMPA, RJ, vol. 11, 1979. [24](#)

- [11] G. Teschl. *Topics in linear and nonlinear functional analysis*. Graduate Studies in Mathematics, AMS, 2020. [33](#)