UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Departamento de Matemática
Curso de Especialização em Matemática para Professores

LILLIAN DINIZ MATOSO

UMA INTRODUÇÃO ÀS INVERSÕES

BELO HORIZONTE

2008

Lillian Diniz Matoso

UMA INTRODUÇÃO ÀS INVERSÕES

Monografia de especialização apresentada a Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial à obtenção do título de Grau de Especialista em Matemática, na Ênfase em Geometria.

Orientador: Prof. Jorge Sabatucci

Belo Horizonte
2008

FICHA CATALOGRÁFICA

Matoso, Lilian Diniz.

M433i Uma introdução às inversões / Lilian Diniz Matoso — Belo Horizonte, 2008.

53 f. il.; 29 cm.

Monografia (especialização) - Universidade Federal de Minas Gerais – Departamento de Matemática.

Orientador: Jorge Sabatucci.

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez RezendeCosta

CRB 6ª Região nº 1510.

ATA DA 58ª MONOGRAFIA DO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA PARA PROFESSORES, APRESENTADA PELA ALUNA LILIAN DINIZ MATOSO.

Aos dois dias do mês de setembro de 2008, às 9:30 horas, na Sala 3060, reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pela Comissão do Curso de Especialização em Matemática para Professores, para julgar a apresentação da monografia da aluna **Lílian Diniz Matoso**, intitulada: *"Uma introdução às inversões"*, como requisito para obtenção do Grau de Especialista em Matemática, na Ênfase em Geometria. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Jorge Sabatucci, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares, passou a palavra à aluna para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a argüição pelos examinadores com a respectiva defesa da aluna. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se sem a presença da aluna e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: a aluna foi considerada aprovada, por unanimidade. O resultado final foi comunicado publicamente à aluna pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 02 de setembro de 2008.

Prof. Jorge Sabatucci
Orientador

Prof. Francisco Dutenhefner
Examinador

Prof. Alberto Berly Sarmiento Vera
Examinador

Ao meu filho Lucas Augusto

A minha mãe Iris Leroy

A minha amiga Ana Karina,

Pelo carinho, paciência,

Companheirismo e incentivo,

Tornando possível a realização deste projeto,

Serei sempre grata.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus Pai e Criador pela oportunidade de vida.

A minha querida mãe Iris Leroy, cuja figura maternal, abaixo do Criador, me trouxe ao mundo propiciando-me a oportunidade de vida profícua de atitudes dignas e de ideais baseados no Amor.

Ao meu filho Lucas Augusto a paciência e a ausência.

Finalmente, agradeço ao professor Jorge Sabatucci, pela orientação, a compreensão que me possibilitou a tranqüilidade necessária para a execução desta difícil tarefa em um período de grandes turbulências em minha vida.

Mesmo que já tenhas feito uma longa caminhada, há sempre um caminho a fazer.

Santo Agostinho, pensador cristão (354-430.)

RESUMO

Neste trabalho é possível estudar alguns resultados básicos de geometria plana e a introdução de *Inversões*, com os teoremas e suas demonstrações. O estudo de conjugados harmônicos e círculo de Apolônio que permitirá resolver um problema bem interessante. A monografia foi dividida em quatro partes importantes: (1) PRELIMINARES, (2) INVERSÃO, (3) CONJUGADOS HARMÔNICOS E CÍRCULO DE APOLÔNIO e (4) APLICAÇÕES, que devem ser seguidas ordenadamente para maior compreensão do leitor.

Palavra – Chave: Inversão

ABSTRACT

This work is possible to study some basic results of plane geometry and an introduction of Inversion, with theorems and demonstrations. The study of combined and harmonic circle of Apollonius that would resolve one problem and interesting. The monograph was divided into four major parts: (1) PRELIMINARY, (2) REVERSAL, (3) CONJUGADOS HARMÔNICOS and CÍRCULO OF APOLÔNIO and (4) APLICATIONS, which must be followed neatly for greater understanding of the reader.

Word – Key: Inversion

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Esse trabalho permite uma revisão de alguns resultados básicos de geometria e uma primeira abordagem do assunto “Inversões”.

Na parte 1 - Preliminares, o leitor encontrará resultados que serão utilizados ao longo desse trabalho.

Na parte 2 – Inversão, o leitor encontrará a definição de inverso de um ponto em relação a um círculo e várias de suas propriedades, que constituem o objeto de estudo dessa monografia. Tais propriedades permitirão determinar o inverso de retas e círculos.

Na parte 3 – Conjugados Harmônicos e Círculo de Apolônio, o leitor encontrará dois outros métodos para inverter pontos e, também, a caracterização de um lugar geométrico que nos permitirá resolver um problema muito curioso que é o “Círculo de Apolônio”.

Na quarta e última parte – Aplicações, o leitor encontrará uma aplicação do Círculo de Apolônio e a um problema de construção e geométrica com o uso de inversão.

1. PRELIMINARES

1.1 Potência de Ponto

Definição: Dados num plano um ponto A e uma circunferência C(O;r), de centro O e raio r definimos a potência do ponto A em relação a circunferência como sendo: $\text{pot}_C(A)=(OA)^2 - r^2$.

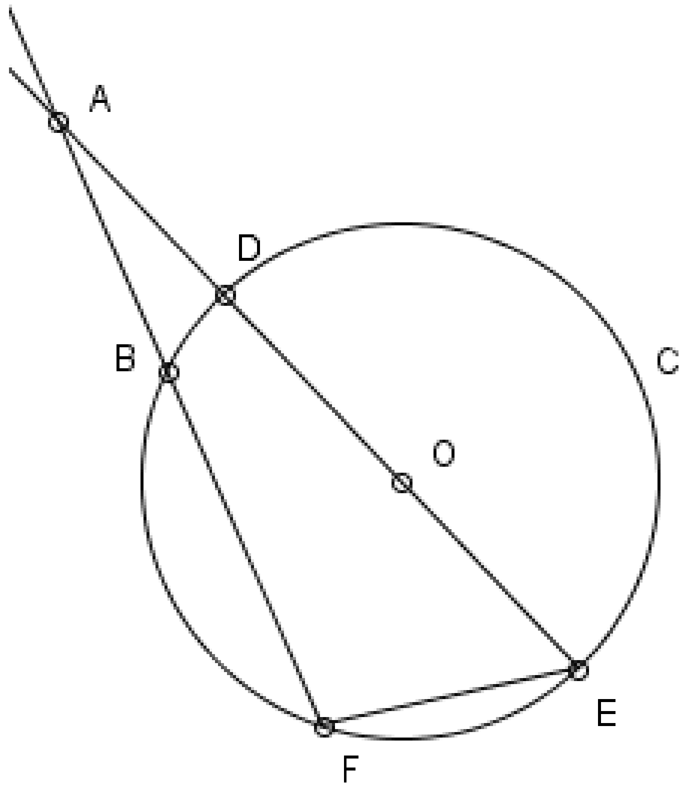

Figura 1

Outro modo de calcular a potência de ponto.

Se A é exterior a *C* e m é uma reta qualquer que passa por A e intersecta *C* em B e F, então $\text{pot}_C(A) = AB \times AF$. Sejam D e E as interseções da reta que passa por A com *C*.

Demonstração: Temos que $\Delta ABE \sim \Delta ADF$ e daí,

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AF}$$

$AE \times AD = AB \times AF$. Note que AE = AO + r e AD = AO – r. Daí

(AO + r) (AO - r) =

(AO)² - r² = pot_C (A) = $AB \times AF$

É fácil para o leitor demonstrar que:

1) Se A é interior a *C* e BF é uma corda de *C* que contém A, tem-se que pot_C (A) = - $AB \times AF$.

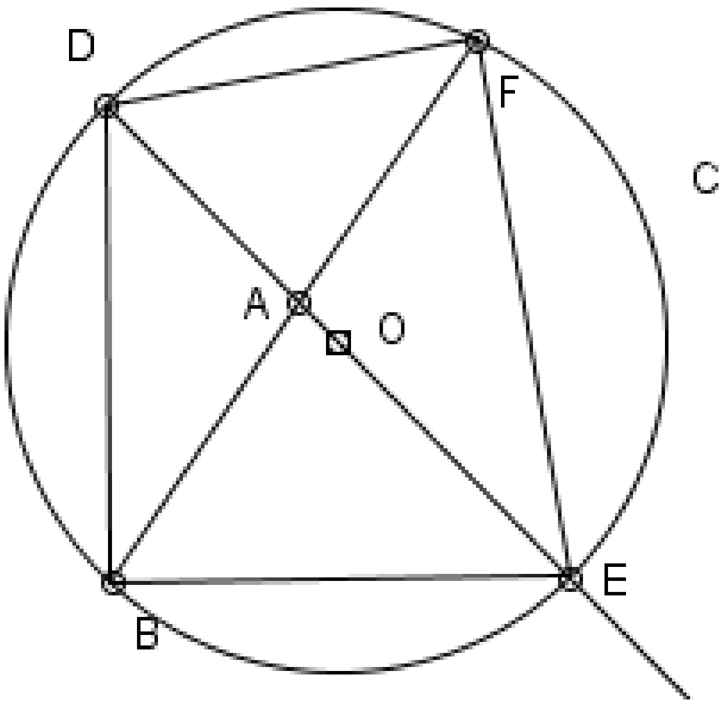

Figura 2

2) Se A é exterior a *C* e m é uma reta passando por A e tangenciando *C* no ponto T, então pot_C (A) = (AB)².

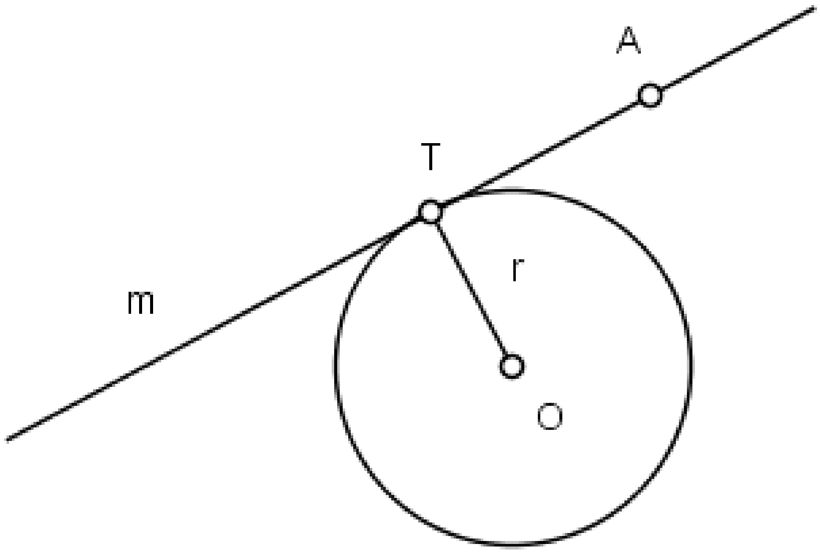

Figura 3

1.2 Eixo Radical:

Teorema 1: Sejam C e D duas circunferências não concêntricas. O lugar geométrico dos pontos P tais que $pot_C(P) = pot_D(P)$ é uma reta, denominada o eixo radical de C e D. Além disso, essa reta é perpendicular à reta dos centros de C e D.

Observação:

Sabendo que o lugar geométrico dos pontos de igual potência em relação a C e D é uma reta, é fácil encontrar o eixo radical de duas circunferências secantes, basta traçar a reta que contém os pontos de interseção delas.

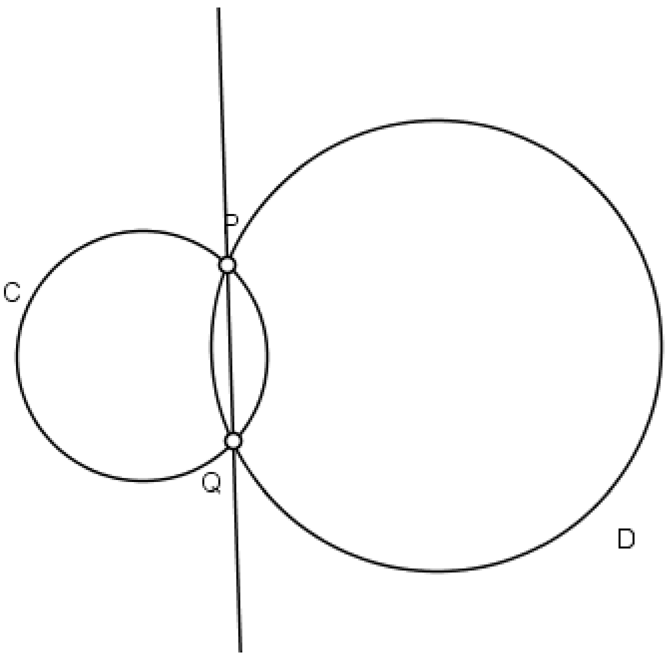

Figura 4

Demonstração do teorema 1. Considere duas circunferências não concêntrica C e D de centros O e O’ e raios R e r, respectivamente, sejam OO’ = 2d e M o ponto médio de OO’. Tomemos um ponto P que tenha a mesma potência em relação às circunferências e seja Y a projeção de P sobre OO’. Seja ainda PM = n e β a medida do ângulo PMY. Considere um ponto P de mesma potência em relação às duas circunferências. Veja a ilustração na figura 5.

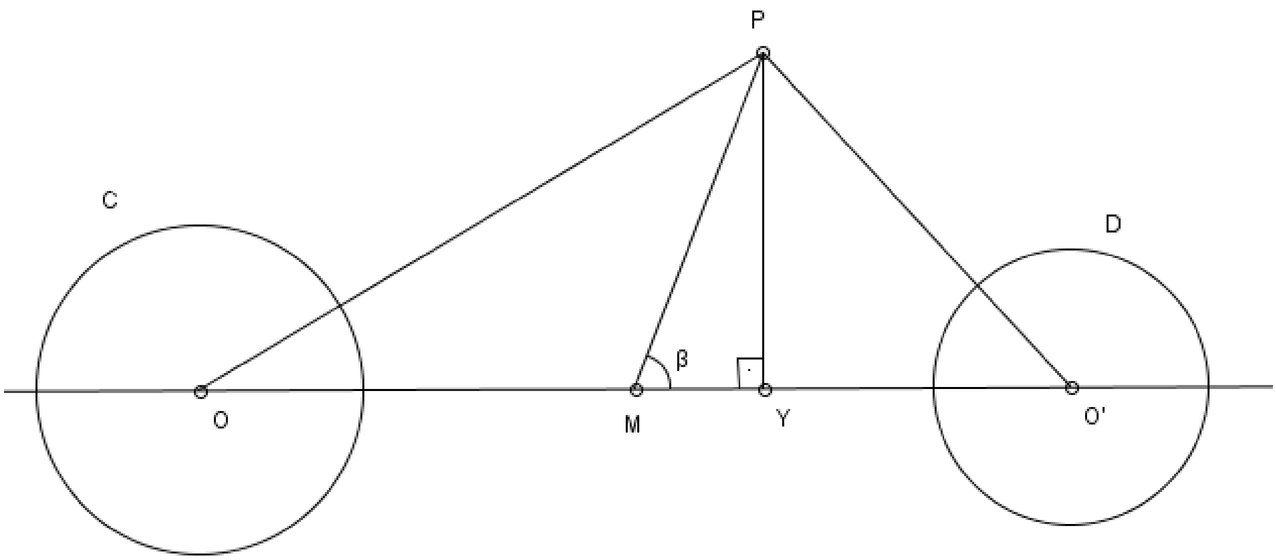

Figura 5

Então:

$(PO)^2 - R^2 = (PO')^2 - r^2$

$(PO)^2 - (PO')^2 = R^2 - r^2$

Aplicando a lei dos cossenos aos triângulos PMO e PMO', obtemos:

(II) $(PO)^2 = n^2 + d^2 + 2nd\cos\beta$

$(PO')^2 = n^2 + d^2 - 2nd\cos\beta$

<u>1º caso:</u> Suponha R > r. Subtraindo II de III, temos: $(PO)^2 - (PO')^2 = 4nd\cos\beta$. Desse resultado e de I, concluímos que $R^2 - r^2 = 4dn\cos\beta = 2(OO')(MY)$.

Portanto MY = $\dfrac{R^2 - r^2}{2(OO')} = \dfrac{R^2 - r^2}{4d}$ é constante para qualquer P, de igual potência em relação às circunferências. Notamos que todos esses pontos têm a mesma projeção Y sobre a reta OO'. É fácil mostrar que Y está entre M e O.

<u>2º caso:</u> Suponha R < r. Com argumentação semelhante ao 1º caso, conclui-se que Y está entre O e M, isto é, Y fica a esquerda de M.

<u>3º caso:</u> Suponha R = r: Nesse caso Y coincide com M.

Em qualquer desses casos fica estabelecido que todo P de igual potência em relação a C e D pertence à perpendicular à reta OO' pelo ponto Y, projeção de qualquer um desses pontos.

Agora vamos considerar um ponto X pertencente à perpendicular por Y (projeção de um dos pontos de igual potência em relação à C e D) à reta OO'que representaremos por m. Vamos demonstrar que qualquer $Q \in m$ tem igual potência em relação à C e D.

$(XO)^2 - (XO')^2 = R^2 - r^2$

Consideramos agora os triângulos XOY e XYO'.

$(XO)^2 = (OY)^2 + (XY)^2$

$(XO')^2 = (YO')^2 + (XY)^2$

$(XO)^2 - (XO')^2 = (OY)^2 - (O'Y)^2$

$= (OY + O'Y)(OY - O'Y) \qquad (I)$

$OY + O'Y = OO' \qquad (II)$

$OY - O'Y = OO' - O'Y - O'Y$

$= OO' - 2(MO' - MY)$

$= OO' - 2\left(\frac{OO'}{2} - MY\right)$

$= 2MY$

$= \frac{R^2 - r^2}{OO'} \qquad (III)$

$(XO)^2 - (XO')^2 = OO' \frac{R^2 - r^2}{OO'}$

Como $R^2 - r^2$ é constante, concluímos que qualquer ponto que tomemos na reta m tem igual potência em relação a C e D e esta reta chamamos de eixo radical.

1.3 Teoremas das Bissetrizes

1.3.1 Teorema da Bissetriz Interna:

Uma bissetriz de um ângulo de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

Seja ABC um triângulo e D um ponto sobre o lado BC, AD é a bissetriz interna do ângulo $B\hat{A}C$:

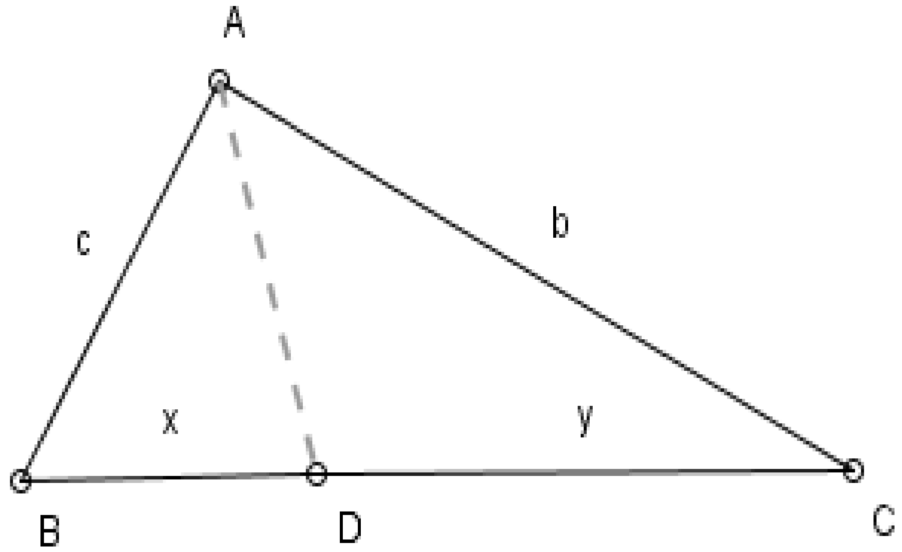

Figura 6

Demonstração:

Traçamos por C uma paralela à bissetriz $\overline{AD}$, determinando um ponto E na reta $\overleftrightarrow{AB}$ ($\overleftrightarrow{CE} // \overleftrightarrow{AD}$).

$\overleftrightarrow{CE} // \overleftrightarrow{AD} \Rightarrow \hat{1} \equiv \hat{3}$ (correspondentes)

$\overleftrightarrow{CE} // \overleftrightarrow{AD} \Rightarrow \hat{2} \equiv \hat{4}$ (alternos internos)

Como na hipótese $\overline{AD}$ é bissetriz interna , os ângulos $\hat{1}$ e $\hat{2}$ são iguais, decorre que $\hat{3} \equiv \hat{4}$.

O triângulo ACE é isósceles de base $\overline{CE} \Rightarrow \overline{AE} \equiv \overline{AC}$.

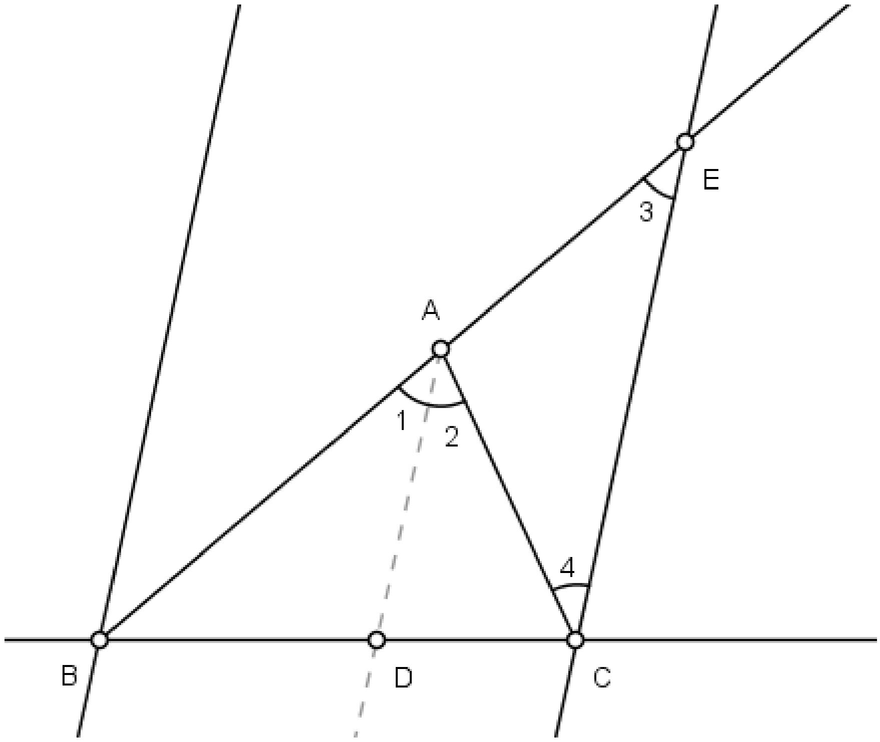

Figura 7

Considerando $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{BE}$ como transversais de um feixe de retas paralelas (identificado por $\overleftrightarrow{AD} // \overleftrightarrow{CE}$) e aplicando o teorema de Tales, vem:

$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$, ou seja, $\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$.

<u>Reciprocament</u>e:

Seja ABC um triângulo e um ponto E e D sobre o lado BC. Se AL divide o lado BC em segmentos proporcionais aos lados adjacentes, então AD é bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$.

$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$

Seja o ponto E um ponto pertencente ao lado BC tal que:

$\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC}$

Assim temos:

$\frac{BD}{DC} = \frac{BE}{EC}$ então E = D. Portanto AE = AD é bissetriz interna do triangulo ABC, de base BC.

1.3.2 Teorema da Bissetriz Externa:

Se a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo intercepta a reta contém o lado oposto, então ela divide este lado oposto externamente em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

Seja o triângulo ABC e D um ponto pertencente ao prolongamento ao lado BC, $\overline{AD}$ é a bissetriz externa do ângulo $C\hat{A}F$, teremos:

$$\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}$$

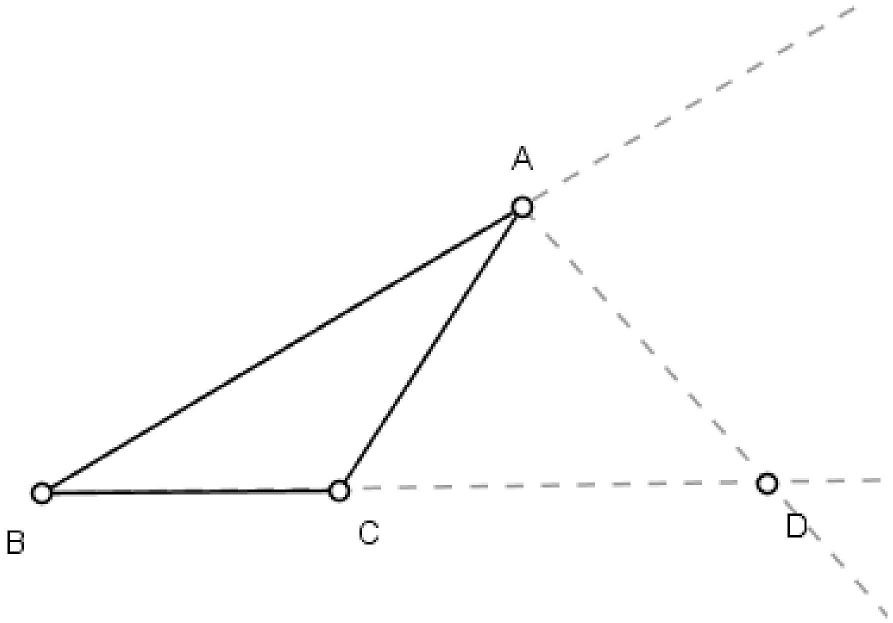

Figura 8

Demonstração:

Conduzimos por C uma paralela à bissetriz $\overline{AD}$, determinando um ponto E na reta $\overleftrightarrow{AB}$ ($\overleftrightarrow{CE} // \overleftrightarrow{AD}$).

Fazendo $C\hat{A}D = \hat{1}$, $D\hat{A}F = \hat{2}$, $A\hat{E}C = \hat{3}$ e $A\hat{C}E = \hat{4}$, temos:

$\overleftrightarrow{CE} // \overleftrightarrow{AD} \Rightarrow \hat{2} \equiv \hat{3}$ (correspondentes)

$\overleftrightarrow{CE} // \overleftrightarrow{AD} \Rightarrow \quad \hat{1} \equiv \hat{4}$ (alternos internos)

Como $\overline{AD}$ é bissetriz $\hat{1} \equiv \hat{2}$, decorre que $\hat{3} \equiv \hat{4}$.

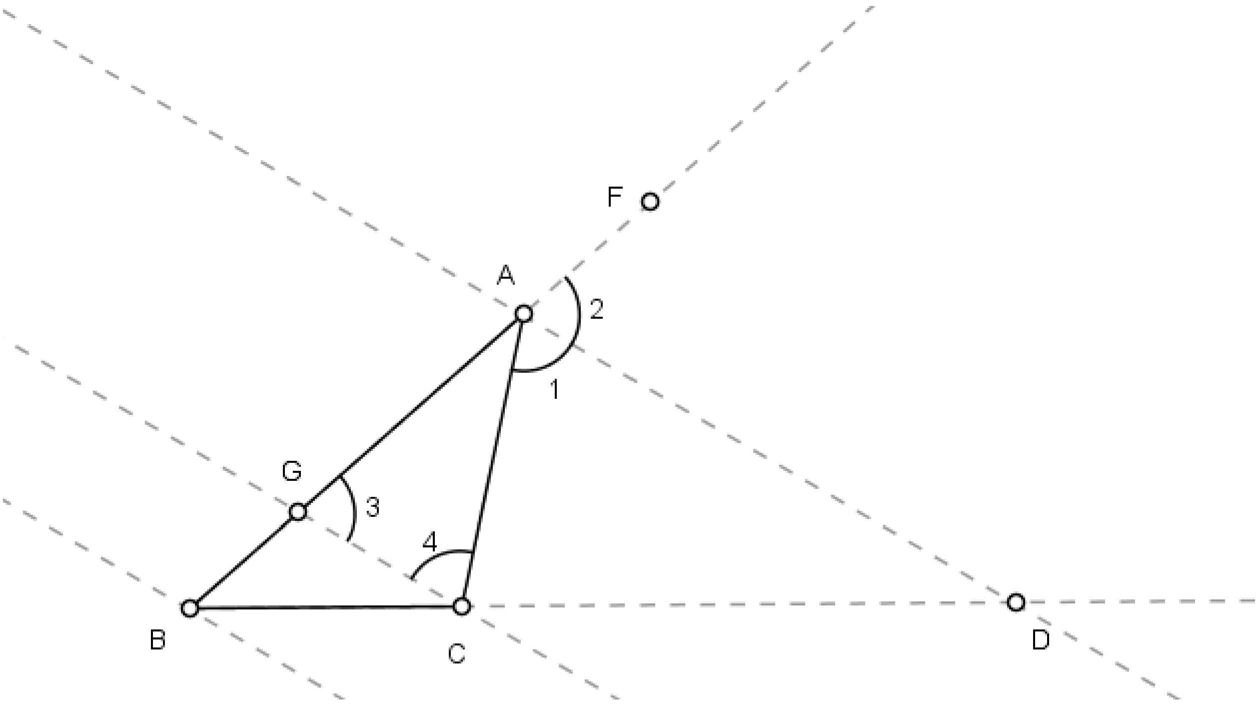

Figura 9

O triângulo ACE é isósceles de base $\overline{CE} \Rightarrow \overline{AE} \equiv \overline{AC}$

Considerando as retas paralelas AD e CE cortadas pelas retas transversais BC e BE e aplicando o teorema de Tales, vem:

$\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC}$, ou seja, $\dfrac{BD}{AB} = \dfrac{CD}{AC}$.

<u>Reciprocamente</u>:

Seja ABC um triângulo e um ponto D sobre o prolongamento do lado BC, e F sobre o prolongamento do lado AB. Se AD divide o lado BC em segmentos proporcionais aos lados adjacentes, então AD é bissetriz do ângulo $C\hat{A}F$.

$\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AF}{BF}$

Seja um ponto L pertencente ao lado BC externamente, tal que:

$\frac{BL}{AL} = \frac{AB}{AC}$, então, $\frac{BL}{AL} = \frac{AF}{BF}$.

Assim F = L. Portanto AF = AL é bissetriz externa ao triângulo ABC, de base BC.

1.3.3. Observações

a) O ângulo formado pelas bissetrizes interna e externa de um triângulo é de 90°.

b) Dado um segmento AB existe um único ponto Q, tal que $\frac{AQ}{QB} = k$, sendo k > 0.

Demonstração: Temos que AQ = k. QB

Somando QB dos dois lados,

$$AQ + QB = k.QB + QB$$

$$AB = QB(k+1)$$

$$QB = \frac{AB}{k+1}$$

Assim somente o ponto Q é o segmento que divide o segmento AB na razão k.

2. INVERSÃO

2.1 Definição:

Em um plano, considere C uma circunferência de centro O e raio r, C(O,r) . A inversão de um ponto P do plano, distinto de O é o ponto P'sobre a semi-reta $\overrightarrow{OP}$ tal que $OP \times OP' = r^2$. O ponto P' é chamado de inverso de P.

Como $OP \times OP' = r^2$, quanto mais próximo o ponto P estiver do centro O, mais distante o seu inverso estará.

A partir da definição de inversão temos que, se P'é o ponto inverso de P, então P é o inverso de P'. Uma vez que OP < r temos OP' > r, e para OP > r temos OP'< r ou seja, o inverso dos pontos interiores ao círculo são exteriores ao círculo e os pontos que são exteriores ao circulo o inverso é interior ao círculo, os únicos pontos do plano que permanecem fixos sob a inversão são os pontos sobre a própria circunferência.

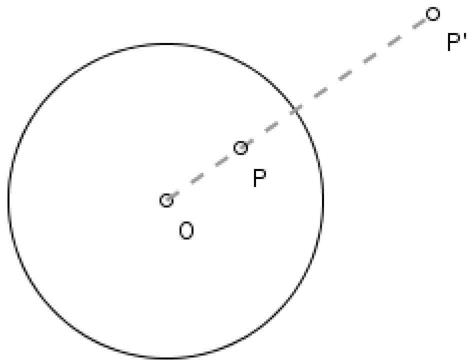

Figura 10

Observe que a inversão é uma aplicação bijetora no plano $\alpha - \{\infty\}$.

Quando o ponto P se aproxima do centro O, a imagem P' se afastará cada vez mais do centro, por isso dizemos que o inverso de O corresponde ao ponto infinito sob inversão. Assim podemos afirmar que a inversão estabelece no plano estendido $\alpha - \{\infty\}$ uma correspondência bijetora.

2.2 Bijeção:

Vamos mostrar que a inversão relativa a uma circunferência C de centro O e raio r contida em um plano α é uma aplicação bijetora de α - {O} em α - {O}.

2.2.1 Injetividade:

Seja I inversão, P e Q pontos contidos em α

Hipótese tese

I(P) = I(Q) $\Rightarrow$ P = Q

Com efeito

P’ $\in OP$ tal que:

OP.OP’ = r ^{2} é inverso de P.

P’ = I(P) e

Q’ $\in$ OP tal que:

OQ.OQ’ = r ^{2} é inverso de Q, então

Q’ = I(Q)

Assim sendo I(P) = I(Q) $\Leftrightarrow$ P’ = Q’

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}$, os pontos P e Q pertencem a mesma semi-reta $\overrightarrow{OP}$ ou $\overrightarrow{OQ}$

OP = $\dfrac{r^2}{OP'}$ e OQ = $\dfrac{r^2}{OQ'}$ $\Rightarrow$ OP = OQ $\Leftrightarrow$ P = Q.

2.2.2. Sobrejetividade:

Seja y $\in \alpha$ - {O} $\rightarrow$ existe X $\in$ α - {O} tal que y = I(X)

Seja X $\in \overrightarrow{OY}$ tal que OX = $\dfrac{R^2}{OY}$.

Pelo postulado do transporte de medidas existe um único ponto X sobre $\overrightarrow{OY}$

Tal que OX = $\dfrac{R^2}{OY}$. Portanto Y = I(X).

Concluímos assim que a inversão é bijetora.

2.3. Propriedades de Inversão

Considerando a circunferência de inversão C, centro de inversão O e raio r.

2.3.1 A Inversa De Uma Reta Que Passa Pelo Ponto O É A Própria Reta.

Demonstração:

No plano menos o ponto O, consideremos uma circunferência C(O,r) e uma reta t que passa por O. Seja um ponto P qualquer, onde P $\neq$ O $\in$ t $\Rightarrow$ P' $\in$ t, e P' $\in \overrightarrow{OP}$.
$OP \times OP' = r^2$.

Como O e P pertencem a t, $\overrightarrow{OP} \subset$ t $\Rightarrow$P' $\in$ t

Seja Q $\in$ t, existe R que pertence a t $\Rightarrow$Q = R.

Seja Q' $\in \overrightarrow{OQ}$ e OQ.OQ'= r^2 .

Se O e Q pertencem a t, então $\overrightarrow{OQ} \subset$ t $\Rightarrow$ Q' $\in$ t. Basta considerar R = Q

Com base na definição de inversão temos que embora os pontos sobre a reta têm suas posições permutadas, ou seja, qualquer ponto sobre a reta tem imagem um outro ponto sobre a mesma reta, uma reta é transformada nela mesma.

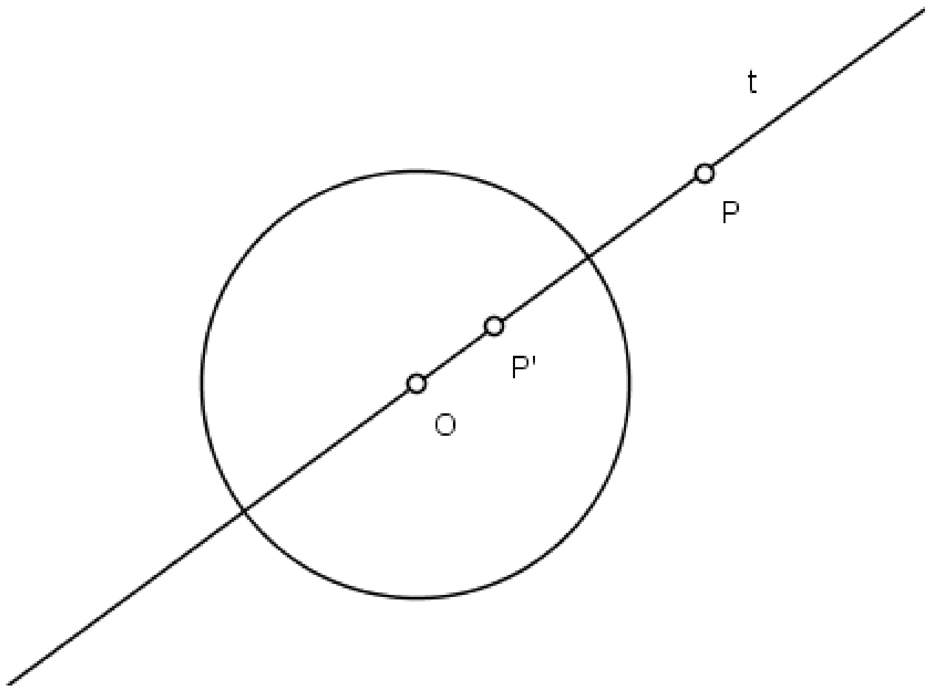

Figura 11

2.3.2 A inversa de uma reta que não passa pelo centro O é uma circunferência que passa por O.

Demonstração:

Consideremos a reta m e a circunferência de centro O, em que $O \not\in m$, seja A o pé da perpendicular a m passando por O, e seja A' o inverso de A. Marcamos um ponto P sobrem, e seja P' seu inverso. Sabemos que OA.OA' = OP.OP' = r². Daí concluímos que:

$$\frac{OA'}{OP'} = \frac{OP}{OA}$$

Assim para $P \neq A$ temos, os triângulos OP'A' e OAP são semelhantes, pelo caso de semelhança LAL. Daí concluímos que $O\hat{P}'A' = O\hat{A}P$ = 90°. Pela geometria elementar temos que, P' pertence a circunferência de diâmetro OA'. Desse modo o inverso da reta m é a circunferência de diâmetro OA'.

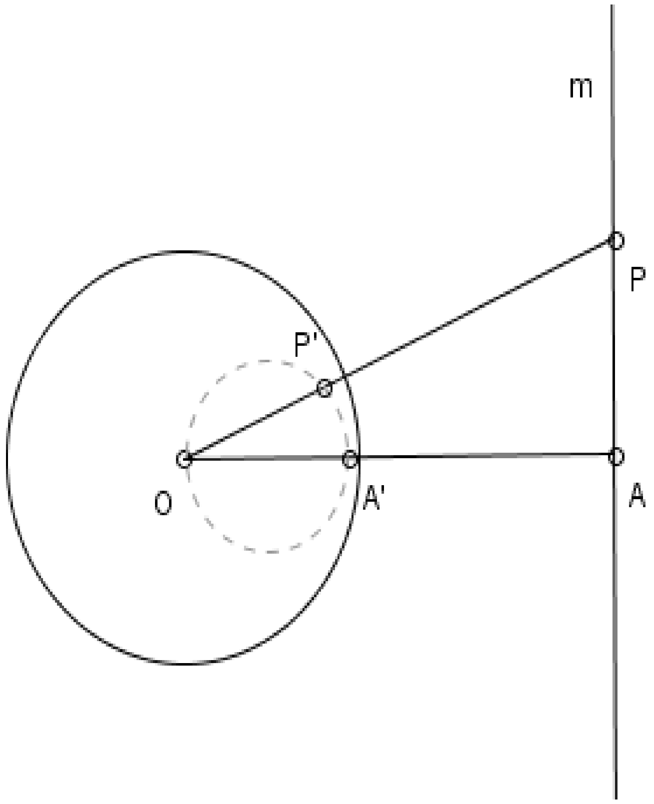

Figura 12

2.3.3 O inverso de uma circunferência que passa por O é uma reta que não passa por O.

Demonstração: De forma análoga ao item 2.3.2.

2.3.4 O inverso de uma circunferência que não passa por O é uma circunferência que não passa por O.

Demonstração:

Seja uma circunferência C com diâmetro AB, que não passa por O, com centro em uma reta *m*, em que os pontos A e B contidos na reta m e uma reta t intercepta a reta m no ponto O que contém o ponto P.

Sabemos que: $OP \times OP' = r^2$; $OA \times OA' = \mathrm{r}^2$ e $OB \times OB' = \mathrm{r}^2$

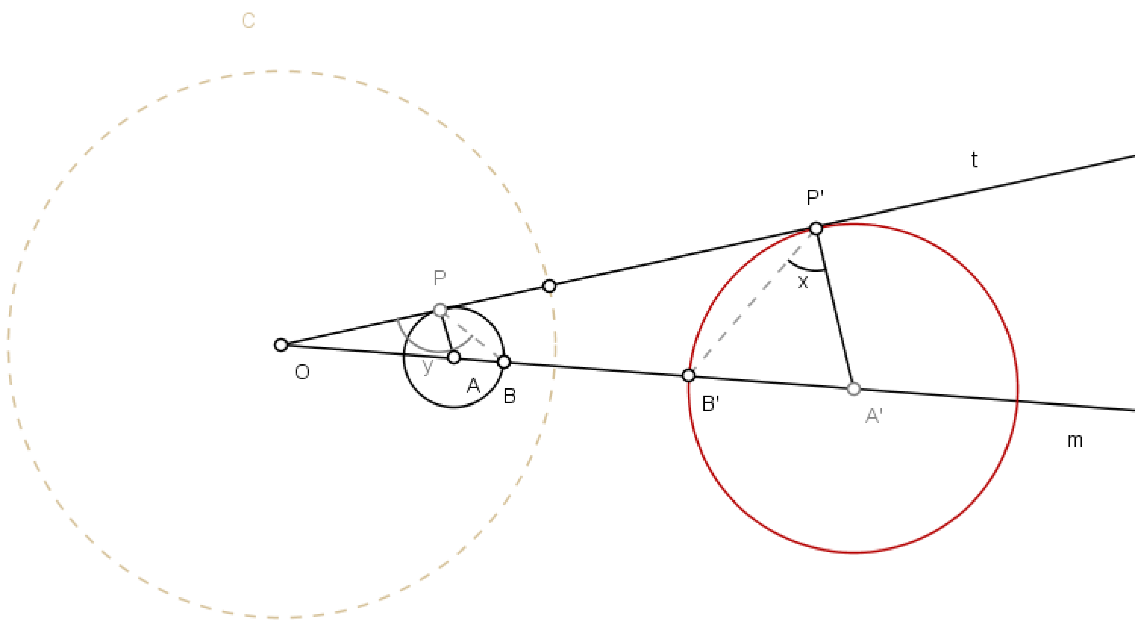

Figura 13

(I) Chamamos de $\beta = O\hat{P}A = P'\hat{A}O'$

$A\hat{P}B = 90°$

$\gamma = O\hat{P}B = P'\hat{B}'O = 90° + \beta$

x = $B'\hat{P}'A'$

Os triângulos OAP e A'OP' são semelhantes pelo caso (LAL).

Temos que:

OP.OP' = OA. OA', daí:

$$\frac{OP}{OA} = \frac{OA'}{OP'} = k$$

$$P\hat{O}A = P'\hat{O}A'$$

portanto $\frac{PA}{P'A'} = k$

Os triângulos OPB e OP'B' são semelhantes pelo caso (LAL).

Temos que:

OB.OB’ = OP.OP’ = r ^{2}

$\frac{OB}{OP} = \frac{OP'}{OB'}$ (caso de semelhança lados proporcionais e ângulo comum)

$P\hat{O}B = P'\hat{O}B'$

portanto $\frac{PB}{P'B'} = k$

De I temos:

$\gamma - \beta = 90°$

$\gamma = x + \beta$

$x = \gamma - \beta$

$x = 90°$

O lugar geométrico dos pontos de onde se vê um segmento sob um ângulo reto é um círculo menos os pontos A e B.

2.4 Método de inverter pontos

Seja C um círculo de centro O e diâmetro AB e P é um ponto pertencente ao diâmetro deste círculo, desenhe PQ perpendicular a AB. De Q traçamos a tangente a C, P’ é o ponto de interseção a AB com a tangente, e o ponto P’ é o inverso de P.

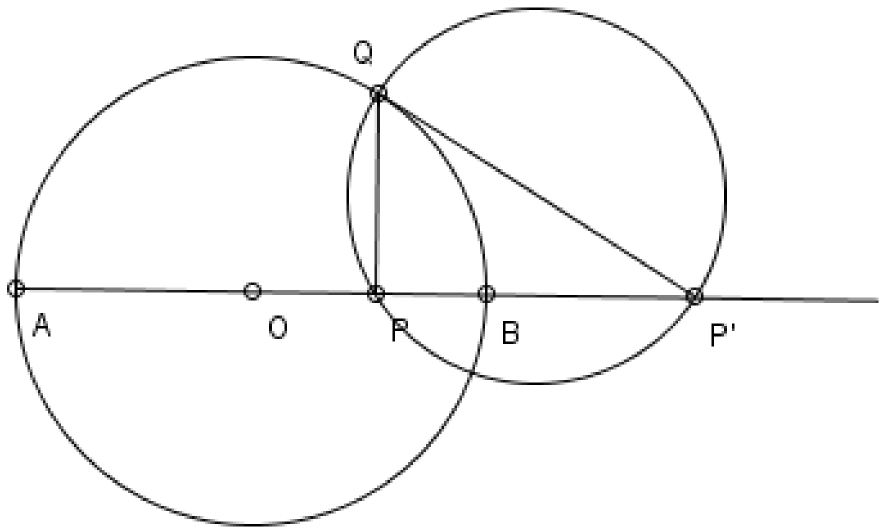

Figura 14

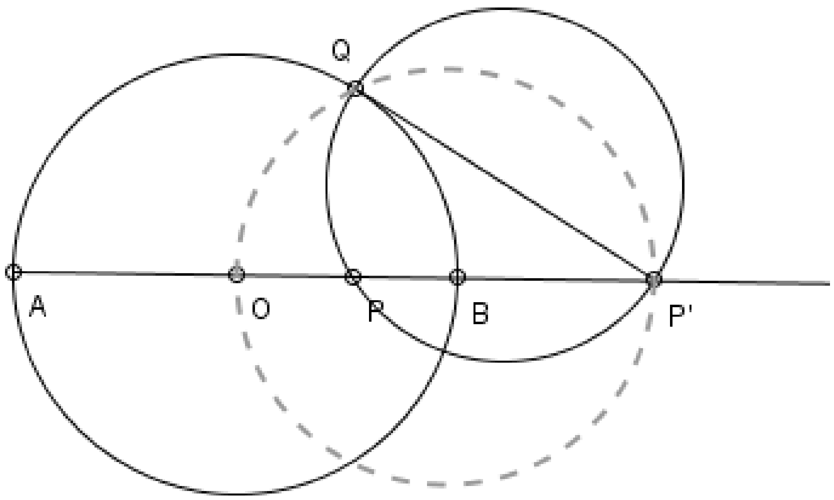

Figura 15

Demonstração: O segmento OQ é raio do círculo de diâmetro AB. No triângulo OQP’, temos:

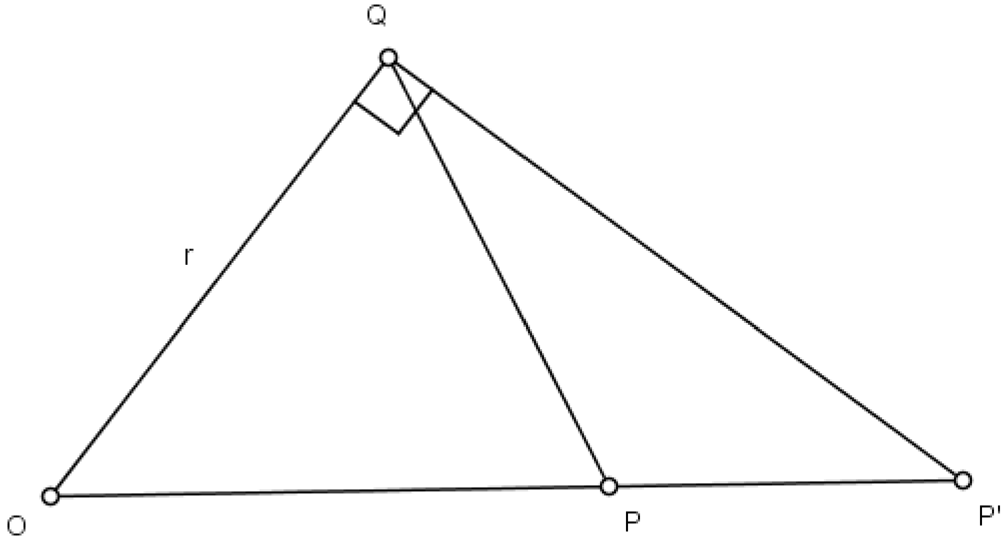

Figura 16

$O\hat{Q}P' = 90°$, o triângulo é retângulo, pela geometria plana temos OQ^2 (quadrado do cateto) = OP (projeção deste cateto na hipotenusa) vezes OP'(hipotenusa), ou seja:

$r^2 = OPxOP'$

3. CONJUGADOS HARMÔNICOS E CÍRCULO DE APOLÔNIO

3.1. Conjugados Harmônicos

Definição: Sejam A e B dois pontos distintos e k um número real, tal que k > 0 e $k \neq 1$. Existem exatamente dois pontos P e Q que pertencem à reta AB, e que dividem AB interna e externamente, respectivamente na razão, isto é: $\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QB} = k$.

Os pontos P e Q são chamados conjugados harmônicos, em relação a A e B. Assim, se P e Q são conjugados harmônicos em relação a A e B , então A e B são conjugados harmônicos em relação a P e Q; pois podemos escrever, $\frac{PA}{PB}$ = $\frac{QA}{QB}$ que também pode ser escrito $\frac{AP}{AQ}$ = $\frac{BP}{BQ}$.

Todo ponto do segmento AB, exceto o seu ponto médio tem um conjugado harmônico com relação a AB. Vale observar que quando a razão k tende a 1 o ponto P se aproxima do ponto médio e o ponto Q fica cada vez mais longe tendendo ao infinito. Isso sugere definir que o conjugado harmônico do ponto médio é 1. Vamos estudar a posição de Q, conjugado harmônico de P.

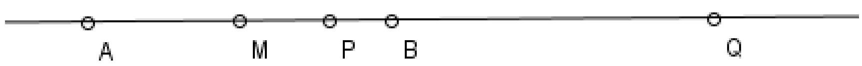

Figura 17

Sabendo M é ponto médio de AB e que MP = x

1) $\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QB} = k$

$\frac{PA}{PB}$ = $\frac{AM + x}{AM - x}$ = k

Seja AB = 2a, então k = $\frac{a + x}{a - x}$ $\therefore$ x = $\frac{k - 1}{1 - k}$

P$\to M \Leftrightarrow k \to 1$

$$\frac{QA}{QB} = \frac{2a + QB}{QB} = \frac{2a}{QB} + 1 = k$$

$$\frac{QA}{QB} = \frac{2a}{k - 1}$$

P$\to M \Leftrightarrow k \to 1 \Leftrightarrow QB \to \infty$

Como B é fixo, temos que Q é ponto impróprio. Representaremos Q por ∞.

3.2 Ortogonalidade:

Definição: Seja ao círculo *C* tangente com a reta *s* e o círculo *D* tangente com a reta *t*, dos círculos tangentes em um ponto A, dizemos que o ângulo entre *C* e *D* em A é agudo entre as retas tangentes aos círculos. Enfim dizemos que *C* e *D* são ortogonais em A se fazem um ângulo de 90° em A.

Teorema*:* Sejam A, P, B e Q pontos distintos alinhados nesta ordem e *C* (O,r) o círculo de diâmetro AB. Seja também *D* um círculo qualquer passando por P e Q .Então as seguintes afirmações são equivalentes.

1) P e Q são conjugados harmônicos.

2) C e D são ortogonais.

Demonstração: Se O o ponto médio de AB e r = OA é igual a AO. Supomos que P e Q são conjugados harmônicos em relação a A e B; podemos escrever:

1) P e Q são conjugados harmônicos:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QB} \qquad \text{como}$$

$$\frac{r+OP}{r-OP} = \frac{r+OQ}{OQ-r}$$

(OQ – r) (r + OP) = (r + OQ) (r – OP)

OQ.r + OQ.OP - r² - PO.r = r² - PO.r + OQ.r – OP.OQ

2OQ.OP = 2r²

OQ.OP = r² (c.q.d)

2) C e *D* são ortogonais:

Demonstração: *p*(O’,*D*) = OP.OQ = r²

O’ é o centro de P e Q

t tangente a *C*

s tangente a *D*

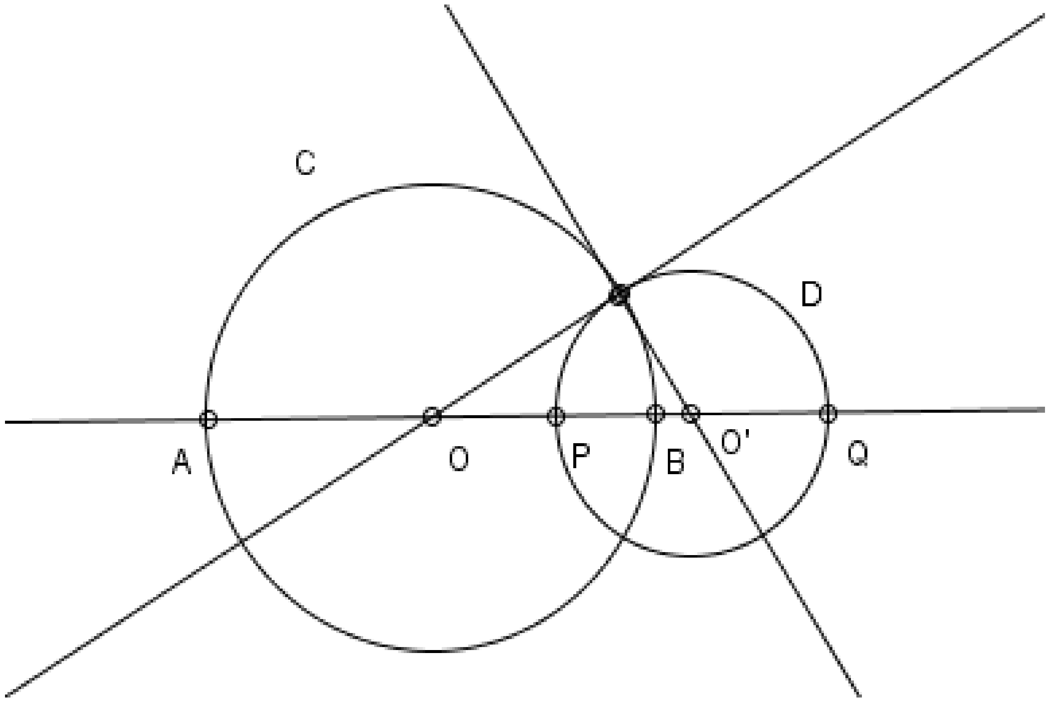

Figura 18

Sendo T ponto de interseção das retas *t* e *s* $\Delta OTO'$ é um triângulo retângulo.

$(OO')^2 = (TO')^2 + (OT)^2$

$(TO)^2 = (OO')^2 - (O'T)^2$

$(TO)^2 = p(O,D)$

$p(O,D) = r^2$

Se $p(O,D) = r^2 \Rightarrow$ *C* e *D* são ortogonais $OO' = r^2 + R^2$ (vale o teorema de pitágoras). C.q.d.

3.2.1 Teorema de equivalências para inversão:

Seja um círculo de centro O e raio r, AB o diâmetro de S e P, P’ $\in \overrightarrow{OA}$. Então qualquer círculo que passa por P e P’ é ortogonal a S.

Demonstração: O círculo C (T,R) é formado pelo diâmetro PP’. Queremos mostrar que $(OT)^2 = R^2 + r^2$ .Conhecemos que $OP \times OP' = r^2$ assim temos:

$R^2 = (OT)^2 - r^2$

$TA.TB = R^2$

$TA.TB = (OT - r).(OT + r)$

$TA.TB = OT^2 - r^2$

$(OT + R)(OT - R) = r^2$

$(OT)^2 + R^2 = r^2$

$(OT)^2 = r^2 + R^2$

$TA.TB = r^2 + R^2 - r^2$

$TA.TB = R^2$

$(OT)^2 = R^2 + r^2$ c.q.d.

3.3. Métodos de inverter pontos

3.3.1 MÉTODO I

Dado um círculo de diâmetro AB e um ponto P pertencente a este diâmetro. Tomemos um ponto Q qualquer no círculo e traçamos os segmentos $\overline{AQ}$ e $\overline{PQ}$, assim temos o ângulo $A\hat{Q}P$ que chamaremos de ângulo 1. Agora construímos um ângulo 2 congruente ao ângulo 1.

Observe a figura 15. A reta que parte de Q formando um ângulo igual ao ângulo 1, corta a semi-reta AB em P’ que é o inverso de P.

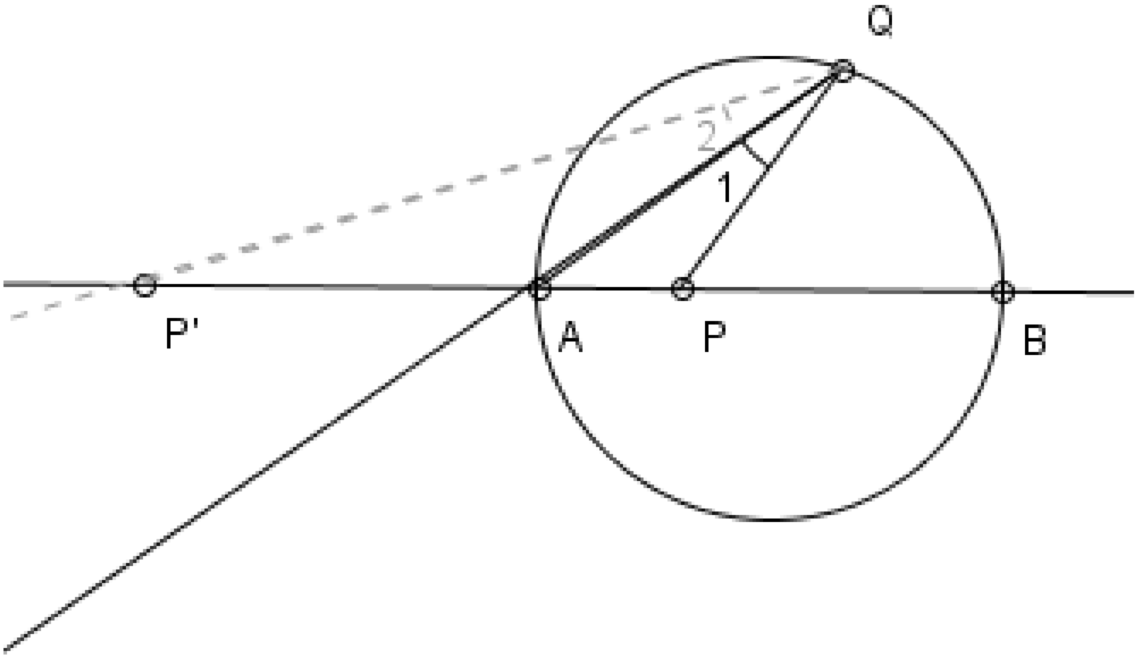

Figura 19

Demonstração: O triângulo AQB é um triângulo retângulo, pois AB é diâmetro da circunferência e nós sabemos que A e B divide PP’ harmonicamente; pelo teorema de divisão harmônica e P’ divide AB harmonicamente. A e B são conjugados harmônicos.

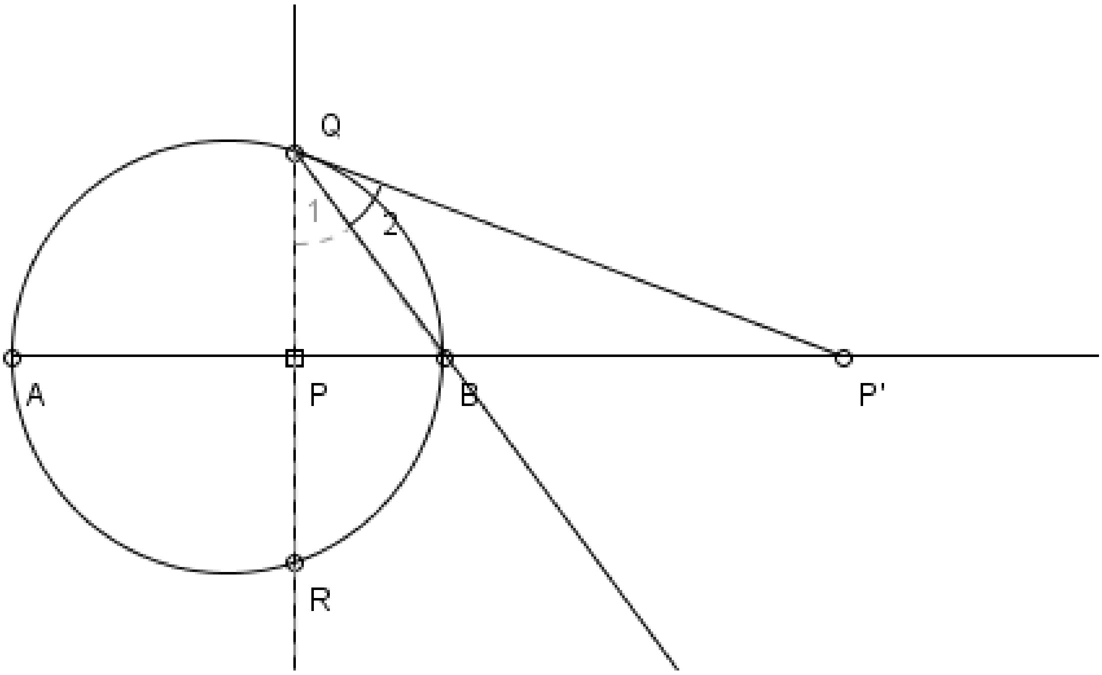

Figura 20

3.3.2 Método II

Seja um círculo C(O,r) se tivermos um ponto P fora do círculo, desenhamos um arco com P no centro e PO o raio que chamaremos de R, cortando o círculo dado em S, agora com centro em S e raio r traçamos um novo arco que cortará o centro O e no segmento OP o ponto P', que é o inverso de P.

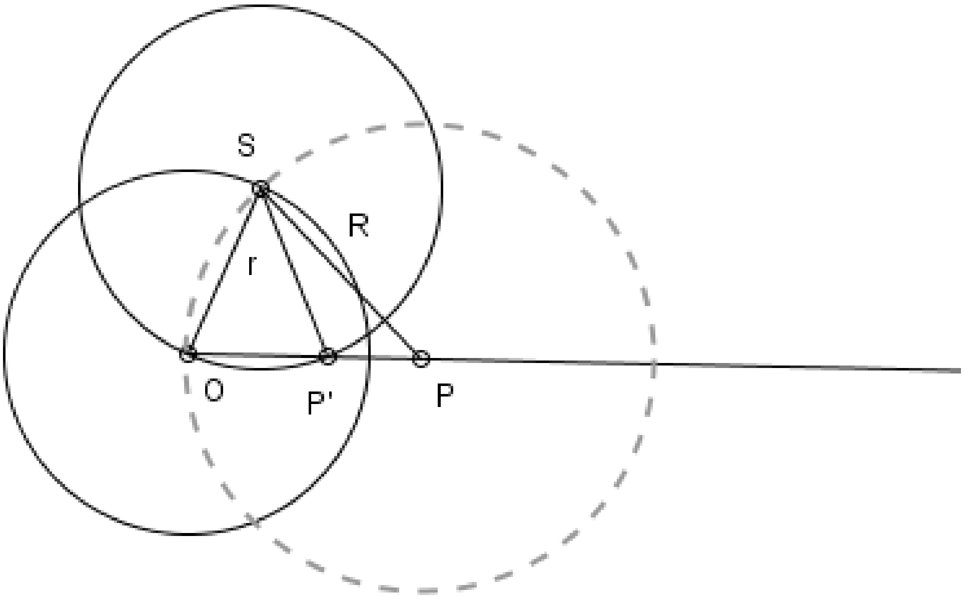

Figura 21

Demonstração: Observando a figura 22 temos no triângulo SOP' os ângulos $S\hat{O}P'$ e $S\hat{P}'O$ são iguais, pois SO e SP' é r raio da circunferência de centro S e então o triângulo SOP' é isósceles.

No triângulo PSO também é isósceles, pois PS e PO é R, raio da circunferência de centro em P e $P\hat{S}O$ e $S\hat{O}P$ são iguais. Consequentemente.

$$\frac{OP'}{r} = \frac{r}{OP}$$

OP'.OP = r ^{2} c.q.d.

3.4 Círculo de apolônio

Teorema: Sejam A e B pontos distintos, k > 0 e P,Q $\in \overrightarrow{AB}$ conjugados harmônicos de A e B, isto é $\frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{BQ}$ = k. Então o lugar geométrico dos pontos X tais que $\frac{AX}{BX}$ = k é a mediatriz de AB se k = 1 e o círculo *C* de diâmetro PQ se k $\neq$ 1.

Demonstração:

No caso em que a razão k = 1, teremos a mediatriz de AB.

- Suponhamos então, $k \neq 1$.

Primeiramente vamos considerar C o círculo de diâmetro PQ. Para todo X , com $X \in C$, vamos mostrar que $\frac{AX}{BX} = k$.

1- Se X = P ou X = Q então temos $\frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{BQ} = k$, pois P e Q são conjugados harmônicos de A e B.

2- Agora, seja $X \neq P$ e $X \neq Q$.

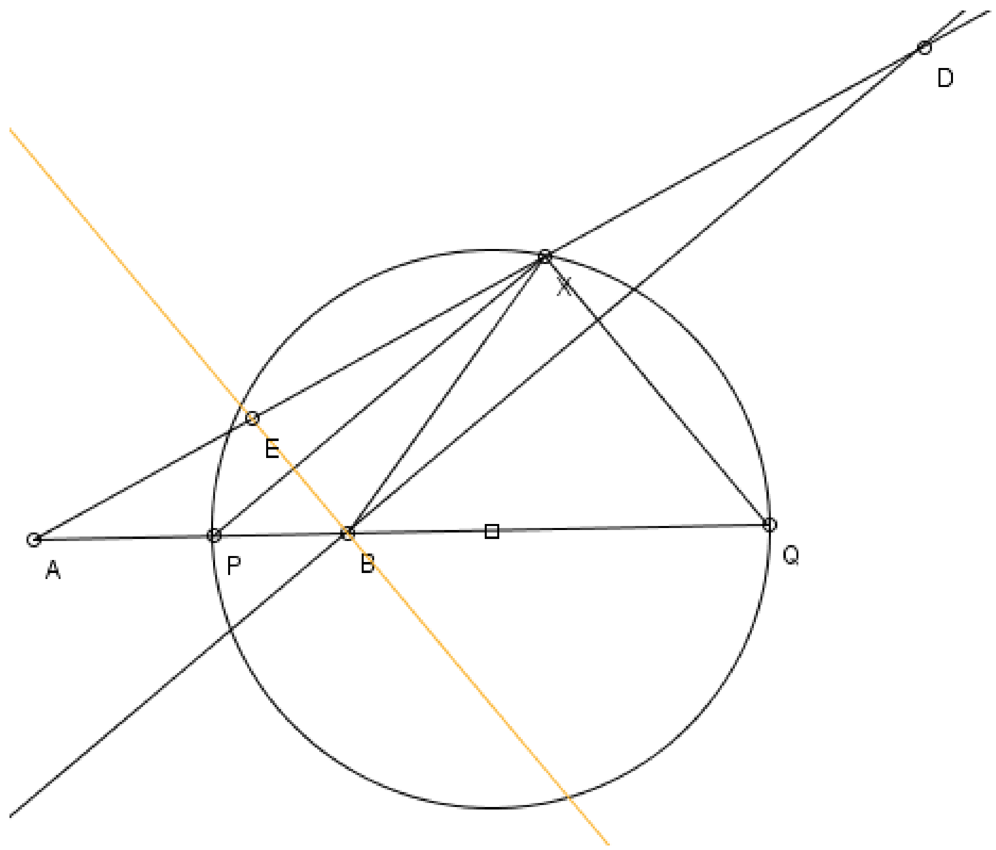

Figura 22

- Seja D o ponto de interseção da reta AX com a paralela a PX passando por B. Aplicando o Teorema de Tales, às paralelas PX e BD cortadas pelas transversais AD e AB, temos: $\frac{AP}{BP} = \frac{AX}{DX}$, (I).

- Seja E o ponto de interseção da reta AX e a paralela a reta XQ traçada pelo ponto B. Aplicando o Teorema de Tales, às paralelas EB e XQ cortadas pelas transversais AQ e AX, temos: $\frac{AQ}{BQ} = \frac{AX}{EX}$, (II).

Das relações em I e II e o fato de $\frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{BQ}$, temos:

$\frac{AX}{DX} = \frac{AX}{EX} = \text{k} \Rightarrow \text{DX} = \text{EX}$

Como E e D estão em semi-retas opostas em relação a X, e DX = EX,

Temos então que X é o ponto médio de $\overline{ED}$ e BX é a mediana do triângulo DBE. Como BE//QX, BD//PX e QX perpendicular a PX, então EB perpendicular a BD. Assim o triângulo DBE é um triângulo retângulo, veja a figura abaixo:

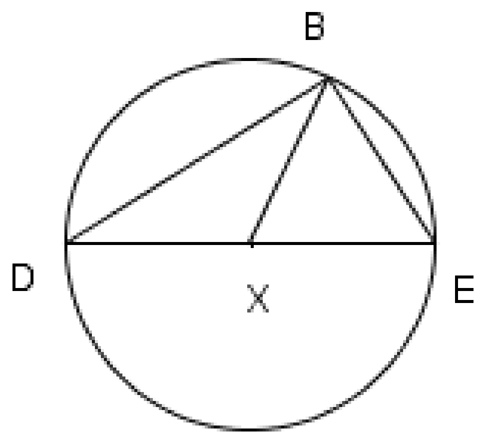

Figura 23

Observe que:

- DE é diâmetro da circunferência da figura 8, EX = DX = BX são raio dessa circunferência e que $k = \frac{AX}{EX} = \frac{AX}{BX}$. Ou seja, mostramos que $\frac{AX}{BX} = k$.

Reciprocamente vamos mostrar que se X é um ponto tal que $\frac{AX}{BX} = k \neq 1$ então X $\in$ C, circunferência de diâmetro PQ.

Seja X tal que $\frac{AX}{BX} = k$, $k \neq 1$.

Tomemos um ponto X diferente de P e Q. Tracemos as retas AX e BX. Como $\frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{BQ} = k$ e $\frac{AX}{BX} = k$, então $\frac{AX}{BX} = \frac{AP}{BP}$. Sendo P interior a AB o segmento XP é bissetriz interna a $A\hat{X}B$.(recíproca do teorema da bissetriz interna).

Tracemos uma paralela a PX passando por B, encontramos na reta AX um ponto D. Temos que:

Sendo Q um ponto externo a AB, já sabemos que $\frac{AX}{BX} = \frac{AP}{BQ}$ então XQ é bissetriz do ângulo $B\hat{X}D$, externo ao triângulo AXB. (recíproca do teorema da bissetriz externa).

O ângulo $P\hat{X}Q$ é reto, pois é formado pelas bissetrizes interna e externa do triângulo AXB.

Logo, P e Q é o resultado da divisão de AB interna e externamente na razão k, independendo da escolha do X.

Assim X $\in C$ de diâmetro PQ, que é círculo de Apolônio de A e B na razão k.

4. APLICAÇÕES

4.1. Aplicação I - Problema dos navios

Considere dois navios A e B, deslocando-se em linha reta com velocidades constantes v_A e v_B. Conhecendo a direção e sentido do navio B e a distância entre A e B suposta pequena (para que possa parecer que a situação ocorra em um plano, encontre a posição em que o navio A intercepta o navio B no menor tempo t possível.

Situação inicial:

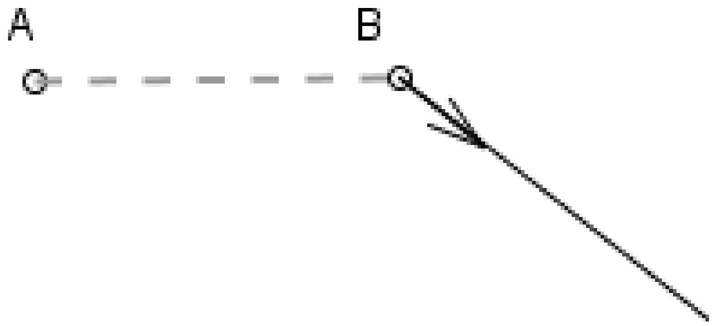

Figura 24

Seja X o ponto em que o navio A intercepta o navio B.

No instante tem que A intercepta B, tem-se: $\dfrac{AX}{BX} = \dfrac{t.v_A}{t.v_B} = k \neq 1$, pois $v_A \neq v_B$. Logo X pertence ao círculo de Apolônio. Seja PQ o diâmetro desse círculo.

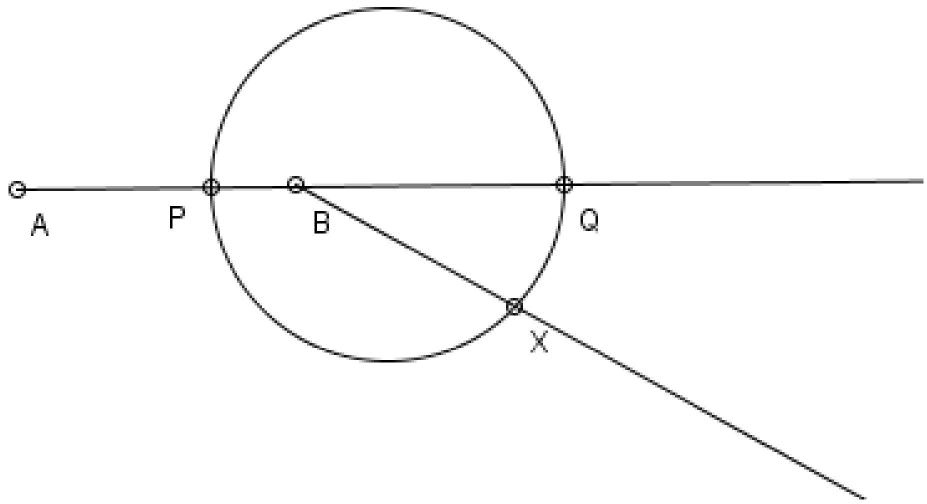

Figura 25

O ponto X é o ponto de interseção das retas. AX e BX que interceptam o círculo de diâmetro PQ, que é o círculo de Apolônio, em relação aos pontos A e B na razão k.

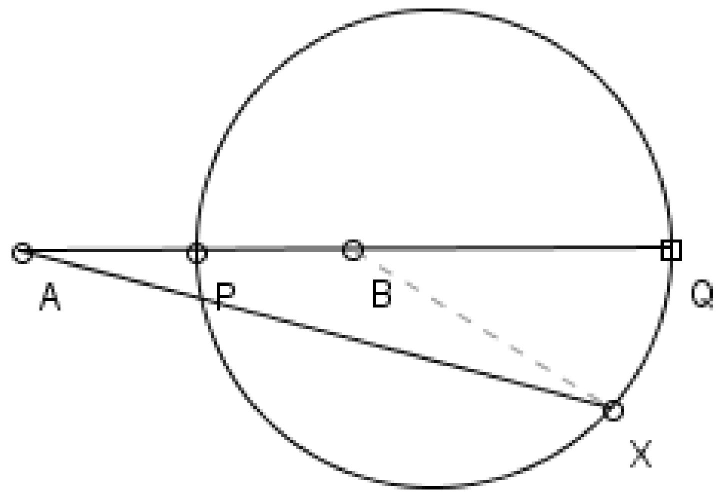

Figura 26

4.2. Aplicação II

Dados uma reta r e dois pontos A e B em um mesmo semi-plano com relação a reta r, traçamos um círculo tangente a r que passe por A e B.

Supondo o problema resolvido:

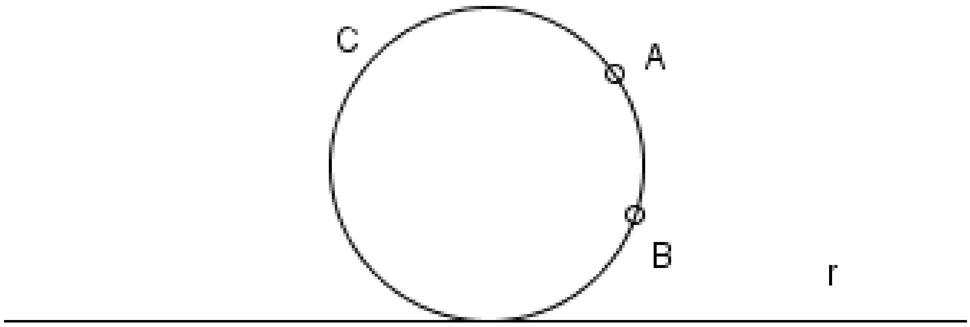

Figura 27

Considerando a figura 28 abaixo, com A centro da circunferência D, invertendo C em relação a circunferência D, teremos uma reta que não passa por A de acordo com a propriedade de inversão 2.3.3.(página 27).

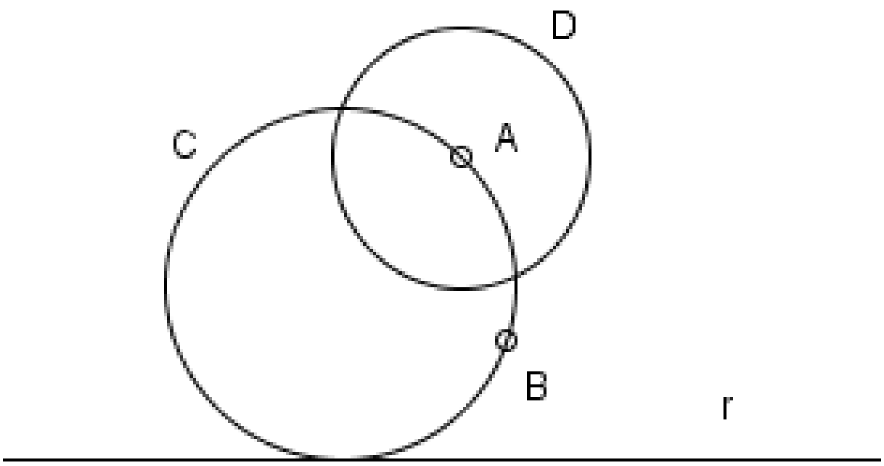

Figura 28

Invertendo a reta r em relação a circunferência D, teremos uma circunferência que passa por A de acordo com a propriedade de inversão 2.3.2.(página 26)

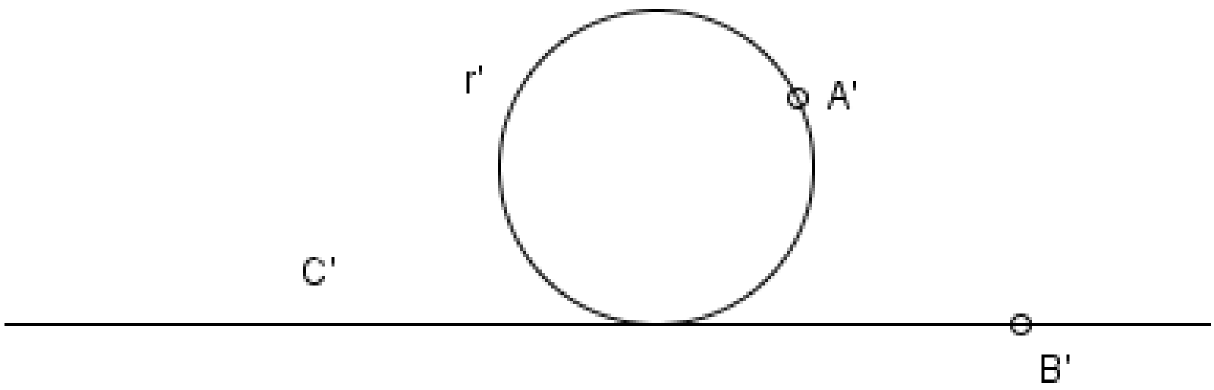

Figura 29

Se passarmos tangentes a r’ pelo ponto B’ vamos notar que temos duas soluções, então:

- Invertendo o círculo r’, vamos obter a reta r – propriedade 2.3.3.
- Invertendo a reta C’, vamos obter a circunferência C –propriedade 2.3.2.
- Invertendo a tangente passando por B propriedade de inversão 2.3.4., vamos obter a circunferência que passa pelos pontos A e B como havíamos suposto na figura 27.

4.2.1. Resolvendo por Régua e Compasso

Supondo o problema resolvido, temos:

$PA.PB = (PT)^2$

<u>Construção:</u>

- traça a reta AB, encontrando em r um ponto que chamaremos de P;
- traça a mediatriz de AB;
- tomemos PB como diâmetro de um círculo S;
- traçamos uma reta perpendicular a reta AB passando por A e encontramos em S o ponto D;

- com centro em P e raio PD obtemos na reta r ao ponto T e T' que serão os pontos de tangência da circunferência.
- traçamos por T e T' perpendiculares a r encontrando a mediatriz de AB nos pontos que chamaremos de O e O'< centro de duas circunferências.

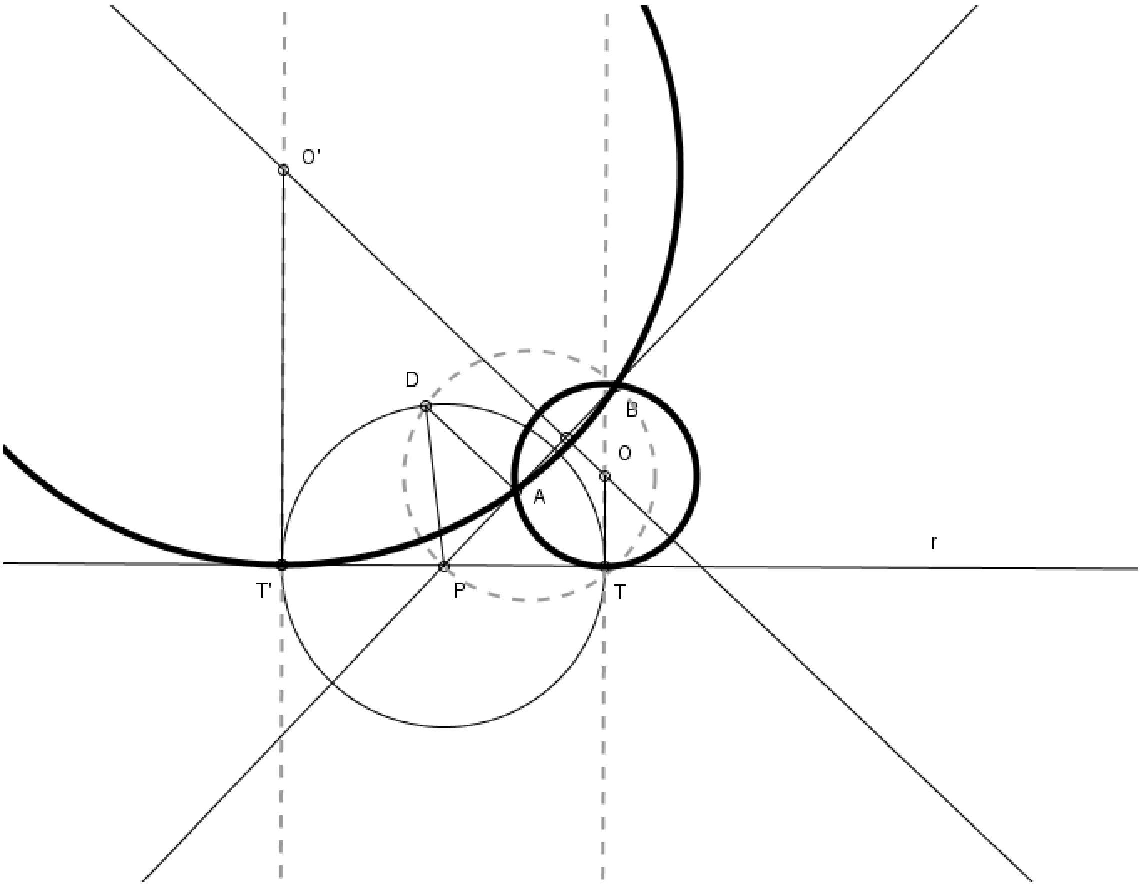

Figura 30

CONCLUSÃO

Inicialmente o que me chamou mais atenção foi o título “inversão”, pois nunca tinha ouvido falar nesse assunto, em nenhum dos cursos de geometria que fiz na graduação. Ao longo da monografia fiquei surpresa ao ver que era possível e de forma simples transformar reta em círculos e círculos em retas e, além disso, utilizar esses resultados para resolver problemas de construção geométrica.

Alguns dos tópicos estudados ultrapassam os objetivos do conteúdo de matemática para o Ensino Médio, mas a definição de inversão, o inverso de um ponto e de uma reta podem ser trabalhados nesse nível, pois exploram somente a semelhança de triângulos (relações métricas no triângulo retângulo) e a definição de reta tangente a um círculo.

Esse trabalho me permitiu rever vários tópicos de geometria e aprender outros que nunca havia estudado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos da Matemática Elementar Geometria Plana**. 7ª edição. São Paulo: Atual, 1993. Volume 9, 451p.

OGILVY, C. Stanley: **Escursions in Geometry**, Dover Publications.

SPIRA, Michel. **Como transformar retas em círculos e vice versa,** Bahia: SBM, 2.