

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**  
**Instituto de Ciências Exatas**  
Departamento de Matemática  
Programa de Pós-Graduação / Especialização

Aldo Faria Costa

**Introdução às Séries com Transformadas de Fourier com Aplicações  
em Leituras de Frequências no Espectro Eletromagnético**

Belo Horizonte  
2022

Aldo Faria Costa

**Introdução às Séries com Transformadas de Fourier com Aplicações  
em Leitura de Frequências no Espectro Eletromagnético**

**Versão Final**

Esta monografia de finalização do curso tem o objetivo de apresentar a teoria sobre as Séries de Fourier e as Transformadas de Fourier em um contexto teórico com aplicação prática em análises de frequências no espectro eletromagnético.

Orientador: Prof. Dr. Hassan Najaf Alishah

Belo Horizonte

2022

2022, Aldo Faria Costa.  
Todos os direitos reservados

Costa, Aldo Faria.

C837i      Introdução às séries com transformadas de Fourier com  
aplicações em leitura de frequências no espectro  
eletromagnético [manuscrito] / Aldo Faria Costa. 2022.  
53 f. il.

Orientador: Hassan Najaf Alishah  
Monografia (especialização) - Universidade Federal de  
Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento  
de Matemática.

Referências: 53.

1. Matemática. 2. Fourier, Séries de. 3. Fourier,  
Transformações de. I. Alishah, Hassan Najaf. II.  
Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de  
Ciências Exatas, Departamento de Matemática .III. Título.

CDU 51(043)

Ficha Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende  
Costa CRB 6/1510 Universidade Federal de Minas Gerais - ICEx

**Universidade Federal de Minas Gerais**  
**Instituto de Ciências Exatas**  
Departamento de Matemática  
Programa de Pós- Graduação / Especialização

ATA DA DEFESA DE MONOGRAFIA DO ALUNO ALDO FARIA COSTA, REGULARMENTE MATRICULADO NO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA, DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS, DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, REALIZADA NO DIA 29 DE JUNHO DE 2022.

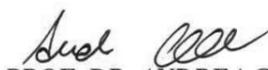
Aos vinte e nove dias do mês de junho de 2022, às 14h00, na sala 3060 do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pela Coordenação do curso de Especialização em Matemática, para julgar a defesa de monografia do aluno **Aldo Faria Costa**, intitulada: "*Introdução às Séries com Transformadas de Fourier com Aplicações em Leitura de Frequências no Espectro Eletromagnético*", requisito final para obtenção do Grau de Especialista em Matemática. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Hassan Najafi Alishah, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares do trabalho final, passou a palavra ao aluno para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa do aluno. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se reservadamente sem a presença do aluno e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: o aluno foi considerado aprovado, sem ressalvas e por unanimidade, com nota 80 e conceito B. O resultado final foi comunicado publicamente ao aluno pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 29 de junho de 2022.



**PROF. DR. HASSAN NAJAFI ALISHAH**  
Orientador (UFMG)



**PROF. DR. ALBERTO BERLY SARMIENTO VERA**  
Examinador (UFMG)



**PROF. DR. ANDREA CHIUCHIARELLI**  
Examinador (UFMG)

Belo Horizonte  
2022

## **AGRADECIMENTOS**

Após 12 anos dedicados ao aprendizado e a busca por conhecimento, no Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, tive bons momentos e grandes oportunidades de conhecer boas pessoas que me ajudaram nesse percurso. Primeiramente preciso agradecer minha família pela paciência e compreensão, durante todos estes anos de dedicação, para realizar meus sonhos acadêmicos, e por estarem minha sempre ao meu lado. Tenho muita gratidão pelo apoio que recebi de todos os professores do Departamento de Matemática em especial, pela assessoria que tive do Senhor Professor Seme, que sempre me ajudou, não somente com dúvidas específicas em conteúdo que estava estudando, mas também com orientações sobre a matrícula e orientações acadêmicas. Ainda, tenho muito a agradecer ao Senhor Professor Gilcione, que sempre me ajudou com dúvidas e exercícios e na preparação para a avaliação do exame da especialização. Tenho que agradecer, também ao Senhor Professor Sarmiento, por apoiar-me sempre que tive dificuldades em exercícios, e por acreditar no meu potencial com a oportunidade para cursar a especialização. No ensejo, não poderia deixar de citar o Senhor Professor Hassan, que me apoiou durante minha preparação para o exame da especialização e aceitou ser meu orientador. E como não me lembrar do Senhor Professor Andrea do Departamento de Engenharia Elétrica por acreditar em mim, e me apoiar para tentar o Mestrado. Por fim, gostaria de agradecer também ao meu amigo de graduação Lucas Henrique Rocha de Souza, que sempre me ajudou nas dúvidas e nos exercícios. Durante todo este período na Universidade tive que me esforçar muito, e felizmente tive a sorte de encontrar boas pessoas, que me ajudaram e tenho a grande felicidade de poder contar com a amizade e respeito de todas elas.

*“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,mas transformai-vos pela renovação da mente, a fim de distinguir qual é a vontade de Deus: o que é bom, o que lhe é agradável, o que é perfeito.”*  
*(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)*

## Resumo

Este trabalho tem o objetivo de apresentar a teoria das Séries de Fourier e das Transformadas de Fourier com foco introdutório, observando as características de periodicidade para aplicações práticas em leitores espectrais de frequências. Desta forma, será apresentado uma introdução às Séries de Fourier que permitam representar funções periódicas, como a soma infinita de termos de uma série trigonométrica e sua representação exponencial complexa, tornando mais vantajosa a aproximação de valores de uma função quando esta demonstra dificuldades de calcular. Em seguida, evoluímos os conceitos expandindo o intervalo ao infinito, para conceituar e apresentar as Transformadas de Fourier, com suas características e exemplos. Posteriormente demonstraremos a aplicação em um espectro de frequências moduladas (FM), em comparação com medições realizadas por equipamentos específicos em campo.

**Palavras-chave:** conversão de sinal, séries de fourier, transformadas de fourier, análises de sinais, análises de frequências.

## **Abstract**

This work aims to present the theory of Fourier Series and Fourier Transforms with an introductory focus, observing the periodicity characteristics for practical applications in spectral frequency readers. In this way, an introduction to Fourier Series will be presented that allow the representation of periodic functions, such as the infinite sum of terms of a trigonometric series and its complex exponential representation, making the approximation of values of a function more advantageous when it demonstrates difficulties to calculate. Then, we evolved the concepts expanding the range to infinity, to conceptualize and present the Fourier Transforms, with their characteristics and examples. Later we will demonstrate the application in a modulated frequency (FM) spectrum, compared to measurements performed by specific equipment in the field.

**Keywords:** signal conversion, fourier series, fourier transforms, signal analysis, frequency analysis.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Condução de calor em uma barra homogênea finita. © SMNE-UFPR	14
Figura 2 – Gráfico da função $f(x) = x$ para $x \in [-\pi, \pi]$	23
Figura 3 – Gráfico da Série de Fourier para a Função $f(x) = x$ para $x \in [-\pi, \pi]$	24
Figura 4 – Gráfico da função do Exemplo 2	25
Figura 5 – Gráfico da Série de Fourier - Exemplo 2 - Soma até o 4º Termo da Série	25
Figura 6 – Gráfico da Função $f(x)= \text{sen}(x) $	26
Figura 7 – Gráfico da Série de Fourier da função $f(x)= \text{sen}(x) $	27
Figura 8 – Gráfico da Função $\psi$ para $[-L,L]$	34
Figura 9 – Gráfico para Análise da Convergência Pontual da Série de Fourier	37
Figura 10 – Gráfico da Série Fourier com os Pontos de Convergência	37
Figura 11 – Domínio do Tempo x Domínio da Frequência© USP	38
Figura 12 – Espectro de Fourier com pontos Discretos	39
Figura 13 – Exemplo 6: Função $f(x)$	42
Figura 14 – Transformada de Fourier para os valores de $a=1/2,1,2,3,4$ - Domínio $\xi$	42
Figura 15 – Exemplo 6 para valores de $a=1/2,1,2,3,4$ - Domínio $x$	43
Figura 16 – Gráfico de uma Função Senoidal de 1Hz no Domínio do tempo	45
Figura 17 – Gráfico de uma Função Senoidal de 1Hz no Domínio da Frequência	45
Figura 18 – Gráfico de uma Função Senoidal para Frequência 88,7MHz	46
Figura 19 – Comparação de Quatro Frequências distintas do FM	46
Figura 20 – Gráfico no Domínio do Tempo para 170,2MHz	47
Figura 21 – Gráfico no Domínio da Frequência para 170,2MHz	48
Figura 22 – Gráfico no Domínio da Frequência para 170,2MHz - Empírico	48
Figura 23 – Leitura do Espectro FM	49
Figura 24 – Leitura do Espectro FM - Expandido em duas Frequências	49
Figura 25 – Gráfico de um Sinal Contínuo da Transformada de Fourier para $[0, 2\pi]$	51

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – <b>Distribuições das Frequências de Estações de Rádios FM Homologadas em Belo Horizonte</b> . . . . .	44
--	----

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
ICEx	Instituto de Ciências Exatas
DFT	Discrete Fourier Transforme (Transformada Discreta de Fourier)
FFT	Fast Fourier Transforme (Transformada Rápida de Fourier)
FS	Fourier Series (Séries de Fourier)
FT	Fourier Transform (Transformada de Fourier)
FM	Frequência Modulada
TFC	Teorema Fundamental do Cálculo

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\lambda$	lambda
$\in$	pertence
$\alpha$	alfa
$\theta$	teta
$\pi$	pi
$\eta$	eta
$\xi$	xi
$\tau$	tau
$\varphi$	phi
$\psi$	psi

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
<b>1.1</b>	<b>Experimento - Equação do Calor em uma Barra</b>	<b>13</b>
1.1.1	Extremidades com Temperaturas Fixas	14
<b>2</b>	<b>SÉRIES DE FOURIER</b>	<b>18</b>
2.1	Introdução	18
2.2	Séries de Fourier	19
2.3	Forma Complexa	27
2.4	Convergência da Série de Fourier	28
<b>3</b>	<b>TRANSFORMADA DE FOURIER</b>	<b>38</b>
3.1	Introdução	38
3.2	Transformada de Fourier	39
<b>4</b>	<b>APLICAÇÃO PRÁTICA</b>	<b>44</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>50</b>
	<b>Referências</b>	<b>53</b>

## 1 INTRODUÇÃO

No início do século XIX, *Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830)*<sup>1</sup> desenvolveu importantes conceitos sobre séries, envolvendo as funções trigonométricas e exponenciais. (1, Página 2) O conceito de somar uma quantidade infinita de números reais já era um objeto de estudo por diversos matemáticos. Grandes estudiosos como *Arquimedes* já utilizavam um método de somas em exaustão, onde era possível atribuir um valor único, que representava estas somas, que conhecemos como valor de convergência. Por exemplo, ao calcular o perímetro de dois hexágonos, um inscrito e outro circunscrito numa circunferência, era possível obter uma aproximação, do número irracional ( $\pi$ ). Como também as Séries de Taylor têm o objetivo de aproximar uma função dada em torno de um ponto específico, utilizando séries de potência. Para o estudo de funções que possuem características periódicas, pode-se utilizar as Séries de Fourier. Nesse estudo, diversas funções que antes era possível estudar somente em sua forma normal, sendo periódicas podem ser escritas como o somatório de funções simples representadas por senos e cossenos. Já para o estudo com as funções que não tem periodicidade, vamos utilizar as Transformadas de Fourier, que são uma extensão das Séries de Fourier quando o período da função representada é maximizado, aproximando-se do infinito como será mostrado no texto. Essas duas técnicas possuem diversas aplicações nas ciências, de forma geral, todavia será trabalhado somente para as análises de leituras de frequências no espectro eletromagnético.

### 1.1 Experimento - Equação do Calor em uma Barra

Devido às necessidades tecnológicas exigidas a partir da Revolução Industrial, durante o século XIX, Fourier foi motivado a estudar a condução de calor em uma barra metálica. Neste contexto, era necessário uma maior compreensão sobre a fenomenologia envolvendo o processo de dissipação de calor.

A partir de novos experimentos utilizando-se uma barra metálica com diferentes temperaturas nas suas extremidades, Fourier passou a observar como ocorreria a condução de calor ao longo de toda a extensão da barra. A primeira hipótese é dada por uma barra isolada lateralmente. Neste caso, a condução de calor era de uma extremidade para a outra, e ao longo dela não se perderia calor para a vizinhança externa. Com isso, as equações tinham somente uma variável no espaço, ou seja, a

---

<sup>1</sup> Jean-Baptiste Joseph Fourier foi um matemático e físico francês, celebrado por iniciar a investigação sobre a decomposição de funções periódicas em séries trigonométricas convergentes chamadas séries de Fourier e a sua aplicação aos problemas da condução do calor.

partir de uma coordenada seria possível determinar em qual ponto da barra estaria sendo efetuada a medição de calor. Fourier começou com hipóteses simples até se aproximar de uma situação real, tomando uma barra de comprimento  $\pi$  para esboçar a ideia, e em seguida, retornando para o comprimento  $L$ . Fourier desejava entender como evoluía a variação de temperatura em cada ponto  $x$  ao longo da barra, com o decorrer do tempo. Nesse contexto, foram consideradas duas variáveis: o tempo e a posição. (2, Seção 10.5 - 473)

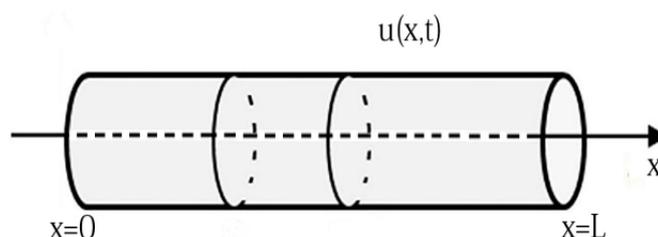


Figura 1 – Condução de calor em uma barra homogênea finita. © SMNE-UFPR

Utilizando a função  $u : [0, L] \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ , a função  $u(x,t)$  expressa a temperatura em cada ponto da barra em um tempo  $t$ , e sendo  $x \in [0, L]$  cada ponto na extensão da barra, que satisfaz a equação diferencial parcial conhecida por equação do calor em uma barra.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Na equação temos a constante  $k > 0$ , denominada como difusividade térmica, que depende apenas do material da barra e satisfaz a igualdade. Esse foi o problema inicial da análise física e matemática sobre condução de calor, para a troca de energia entre os pontos da barra.

Esse foi o primeiro modelo concebido de forma mais simples, como forma propedêutica à compreensão do fenômeno. Em seguida, o próprio Fourier introduziu variações, buscando um modelo mais real, que pudesse ser aplicado na prática.

Ao variar os modelos e na tentativa de resolver a equação de calor, possibilitou-se a seguinte indagação quando e como relacionar os modelos com as funções trigonométricas, utilizando também o método de separação das variáveis.

### 1.1.1 Extremidades com Temperaturas Fixas

Desta forma considerou-se o problema da condução de calor, para a dada barra reta e homogênea de comprimento  $L$ , e espessura desprezível. Neste caso, tomamos

$\pi < L$ , com os lados da barra perfeitamente isolados. Fourier desejava determinar a temperatura em função da posição e do tempo  $u(x,t)$ , dada a distribuição de temperatura inicial  $f(x)$ , e as temperaturas nas extremidades eram conhecidas e iguais a zero.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(x, 0) = f(x), 0 < x < L \\ u(0, t) = 0, u(L, t) = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Sendo  $X(x)$  a função que relaciona a temperatura para cada posição na barra, e  $T(t)$  a função que relaciona a temperatura para cada instante do tempo, denotamos por  $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$  a função que relaciona cada temperatura da barra em um ponto  $0 \leq x \leq L$  no instante  $t \geq 0$ . E utilizando o método de separação de variáveis para a função  $u(x, t)$ , buscou-se uma solução calculando as derivadas parciais.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = X(x) \cdot T'(t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x) \cdot T(t)$$

Tomamos então o intervalo  $0 < x < L$  e  $0 < t$  e igualamos as equações diferenciais.

$$X(x) \cdot T'(t) = k \cdot X''(x)T(t) \quad (1.2)$$

$$\frac{T'(t)}{k \cdot T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda \quad (1.3)$$

Temos que tudo depende de  $(x,t)$ , os dois lados são iguais a uma constante  $\lambda$ . Portanto pela equação temos:

a)  $T'(t) = k \cdot \lambda \cdot T(t) \rightarrow T(t) = e^{k\lambda t}$

b)  $X''(x) = \lambda \cdot X(x)$ , vamos dividir em casos:

i) Se  $\lambda = 0$ , então  $X(x) = ax + b$ , tomamos novamente a função  $u(x, t)$ .

$$u(x, t) = e^{k\lambda t} \cdot (ax + b)$$

Mas ao se tomar  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ , que foi tido como uma das hipóteses iniciais nas extremidades da barra. Então:

$$e^{k\lambda t} \cdot b = 0 \text{ e } e^{k\lambda t} \cdot (aL + b) = 0$$

Como a exponencial não é zero, então  $b = 0$ , e  $(aL + b) = 0 \rightarrow a = 0$ , desta forma temos  $u(x, t) = 0$ .

ii) Tomamos agora  $\lambda > 0$ , neste caso temos :

$$X(x) = a \cdot e^{\sqrt{\lambda} \cdot x} + b \cdot e^{-\sqrt{\lambda} \cdot x},$$

como  $X(0) = 0$  e  $X(L) = 0$ , teremos  $a = b = 0$  e como caso (i) temos  $u(x, t) = 0$ .

iii) Agora tomamos  $\lambda < 0$ .

Tomamos novamente:  $X''(x) = \lambda \cdot X(x)$ , agora com  $\lambda < 0$ . Como temos uma troca de sinal, a solução é:

$$X(x) = a \cdot \cos(\sqrt{-\lambda} \cdot x) + b \cdot \sen(\sqrt{-\lambda} \cdot x)$$

Seguindo a condição desejada por Fourier para  $X(0) = 0$ , temos

$$X(0) = a \cdot \cos(\sqrt{-\lambda} \cdot 0) + b \cdot \sen(\sqrt{-\lambda} \cdot 0) = a = 0.$$

Agora com  $X(L) = 0$  teremos  $b \cdot \sen(\sqrt{-\lambda} \cdot L) = 0$ . Mas  $b \neq 0$  senão iria zerar tudo novamente, então  $\sqrt{-\lambda} \cdot L = n\pi$  onde  $n \in \mathbb{N}$ , temos a solução geral do problema inicial (somente considerando as condições iniciais  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ ) da forma

$$u(x, t) = X(x)T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sen \frac{n\pi x}{L} e^{-kn^2 t}$$

Mas essa solução deve, também satisfazer a condição inicial  $u(x, 0) = f(x)$ , com  $t = 0$  com isso podemos encontrar os coeficientes  $b_n$  de modo que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sen \frac{n\pi x}{L} e^{-kn^2 0} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sen \frac{n\pi x}{L}$$

No caso do problema da condução de calor em uma barra isolada nos lados, agora com as extremidades isoladas temos:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \\ u(x, 0) = f(x), 0 < x < L \end{cases}$$

Seguindo os mesmos passos teremos:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} e^{-kn^2 t}$$

Para o sistema ter solução devemos encontrar os coeficientes  $a_n$ , de modo que:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

Nos problemas similares que utilizam a equação de calor, com condições iniciais mistas, condições não homogêneas e para a equação da corda elástica presa nas extremidades, teremos a mesma necessidade. Isto é, escrever uma função dada  $f(x)$  como uma série de funções trigonométricas ou uma representação da função  $f(x)$  por Séries de Fourier.

## 2 SÉRIES DE FOURIER

### 2.1 Introdução

No capítulo anterior vimos a necessidade de representar uma função  $f(x)$  como uma série de funções trigonométricas, possibilitando resolver diversos tipos de equações diferenciais. Neste capítulo vamos considerar a seguinte questão: Quais funções  $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  podem ser expressas na forma?

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right], \quad (2.1)$$

Podemos escrever uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de forma mais geral. Começamos com definição de uma função periódica.

**Definição 1.** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é periódica de período  $T > 0$  se  $F(x + T) = f(x)$  para todo  $x$  e chamamos de período fundamental, o menor período positivo.

Uma série de funções  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  onde  $u_n(x)$  são funções reais definidas em um intervalo  $I$  convergirá pontualmente se, para cada  $x_0 \in I$  fixado, a série numérico  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$  convergir, ou seja, a sequência de somas parciais convergir.

$$u_1(x_0), u_1(x_0) + u_2(x_0), u_1(x_0) + u_2(x_0) + u_3(x_0), \dots, \sum_{j=1}^m u_j(x), \dots$$

Isso equivale dizer que uma série é de Cauchy, assim dado  $\epsilon$  existe um inteiro  $N$  tal que para todos  $n < m$ , tais que  $n, m \geq N$ .

$$\left| \sum_{j=n}^m u_j(x_0) \right| < \epsilon,$$

O inteiro  $N$  depende de  $\epsilon$  e de  $x_0$ , tirando a dependência em  $x_0$  temos a definição de convergência uniforme.

Uma série de funções  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  convergirá uniformemente se, dado  $\epsilon$ , existir um inteiro  $N$ , dependendo apenas de  $\epsilon$  (e não de  $x$ ), tal que  $|\sum_{j=n}^m u_j(x)| < \epsilon$ , para todos  $m > n > N$ .

Para verificação de convergência uniforme de uma série o **teste M de Weierstrass** será usado frequentemente. Esse critério não só assegura a convergência uniforme, mas também a convergência absoluta. Uma série  $\sum u_n(x)$  convergirá absolutamente se a série  $\sum |u_n(x)|$  dos valores absolutos convergir.

**Teste M de Weierstrass:** Seja  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  uma série de funções  $u(x)$  definidas em um subconjunto  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Suponha que existem constantes  $M_n \geq 0$  tais que:

$$|u_n(x)| \leq M_n, \quad \text{para todo } x \in I,$$

E a série numérica  $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$  converge. Então, a série de funções  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  converge uniformemente e absolutamente em  $I$ .

Esse critério de convergência uniforme é muito cômodo, pois reduz o problema de verificar a convergência de uma série de funções àquele da convergência de uma série numérica. Um exemplo bem simple é a série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ , onde  $u_n(x) = \frac{\text{sen}(nx)}{n^2}$ . Temos que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  converge.

$$\left| \frac{\text{sen}(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2},$$

Então, pelo **teste M de Weierstrass** a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{n^2}$  converge uniformemente e absolutamente.

Vamos precisar das seguintes propriedades para as séries convergir uniformemente. Suponhamos que a série  $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  converge uniformemente, então:

- 1) se as funções  $u_n$  são contínuas a soma da série  $u(x)$  é também será uma função contínua.
- 2) se as funções  $u_n(x)$  são integráveis em um intervalo  $I$  então:

$$\int_I \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I u_n(x) dx. \quad (2.2)$$

Para declarar uma propriedade similar ao (2.2) sobre derivadas precisamos de suposições diferentes. Suponhamos que as funções  $u_n(x)$  definidas em um intervalo  $I$  sejam continuamente deriváveis e que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$  das derivadas converge uniformemente. Suponhamos ainda que, para um dado  $x_0 \in I$ , a série  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$  converge.

$$\frac{d}{dx} \left( \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

## 2.2 Séries de Fourier

O objetivo é escrever uma dada função na forma (2.1) com coeficientes adequados. Para descobrir estes coeficientes, vamos supor que a igualdade se verifica e a série em (2.3) converge uniformemente.

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \right], \quad (2.3)$$

Usando (2.2) temos

$$\int_{-L}^L f(x)dx = \frac{1}{2}a_0 \underbrace{\int_{-L}^L dx}_{=2L} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \underbrace{\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx}_{=0} + b_n \underbrace{\int_{-L}^L \text{sen} \frac{n\pi x}{L} dx}_{=0}],$$

$$\int_{-L}^L a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad u = \frac{n\pi x}{L} \quad e \quad du = \frac{n\pi}{L} dx$$

$$\frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L a_n \cos(u) du = \frac{La_n}{n\pi} \left[ \frac{\text{sen}(n\pi x)}{L} \right]_{-L}^L = \frac{La_n}{n\pi} [\text{sen}(n\pi) - \text{sen}(-n\pi)] = 0$$

Como o **seno** é uma função ímpar a integral será zero, e falta somente a integral de  $a_0$ .

$$\int_{-L}^L \frac{1}{2} a_0 dx = \frac{1}{2} [a_0 x]_{-L}^L = \frac{a_0}{2} [2L] = a_0 L$$

Então a integral de  $f(x)$  será:

$$\int_{-L}^L f(x) dx = a_0 L \rightarrow a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

Para obter os demais coeficientes, vamos usar a mesma idéia. Seja  $m \geq 1$  um inteiro. Multiplicamos os dois lados de (2.3) por  $\cos \frac{m\pi x}{L}$  e usamos novamente a propriedade (2.2) (observe que multiplicando por  $\cos \frac{m\pi x}{L}$  ainda temos uma série uniformemente convergente)

$$\begin{aligned} & \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx \\ &= \frac{1}{2} a_0 \underbrace{\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} dx}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \underbrace{\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx}_{=\delta_{mn}L} + b_n \underbrace{\int_{-L}^L \text{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx}_{=0}], \end{aligned}$$

onde

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m \neq n \end{cases}$$

é o delta de Kroneker.

A integral em  $b_n$  será zero porque  $\langle \text{sen}, \cos \rangle = 0$ , e a integral em  $a_0$  será zero como foi mostrado anteriormente. Falta somente a integral no produto de cossenos para  $n = m$ .

$$a_n \int_{-L}^L \left(\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)^2 dx = a_n \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\right) dx = a_n \frac{1}{2} \left[ \int_{-L}^L dx + \int_{-L}^L \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx \right]$$

$$a_n \left[ L + \frac{L}{2\pi n} \operatorname{sen}(2\pi n) \right] = a_n L + a_n 0 = a_n L$$

Então,  $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ . Similarmente, temos

$$\begin{aligned} & \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} a_0 \underbrace{\int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx}_{=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \underbrace{\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx}_{=0} + b_n \underbrace{\int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx}_{=\delta_{mn}L} \right], \end{aligned}$$

Novamente a integral em  $a_0$  será zero porque o **seno** é uma função ímpar, e a integral em  $a_n$  será zero porque  $\langle \operatorname{sen}, \cos \rangle = 0$ , falta somente a integral em  $b_n$ .

$$b_n \int_{-L}^L \left(\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)^2 dx = b_n \int_{-L}^L \frac{1}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\right) dx = b_n \frac{1}{2} \left[ \int_{-L}^L dx - \int_{-L}^L \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx \right]$$

$$b_n \left[ L - \frac{L}{2\pi n} \operatorname{sen}(2\pi n) \right] = b_n L - b_n 0 = b_n L$$

Resultando  $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$ . As equações (que usamos em cima)

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0, \forall n, m \geq 1 \quad (2.4)$$

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \delta_{mn}L \quad (2.5)$$

$$\int_{-L}^L \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \delta_{mn}L \quad (2.6)$$

são referidas como relações de ortogonalidade.

Agora podemos esboçar uma definição para Série de Fourier de uma dada função  $f(x)$ .

**Definição 2.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica e contínua, de período  $2L$ , integrável e absolutamente integrável em cada intervalo limitado, em particular,  $\int_{-L}^L |f(x)| dx < \infty$ .

A série

$$S(x; f) := \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right],$$

onde  $a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx$  e para  $n \geq 1$ ,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad (2.7)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad (2.8)$$

é chamada *Série de Fourier da função*  $f(x)$ .

A seguinte proposição fornece uma condição suficiente para que a definição dos coeficientes de Fourier da  $f$  sejam bem definidos.

**Proposição 1.** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $2L$ , pertencente ao conjunto das funções integráveis e absolutamente integráveis no intervalo  $[-L, L]$  denotado por  $\mathbb{L}^1$ , então os coeficientes de Fourier de  $f$ , dados na Definição 2, estão bem definidos.*

*Demonstração.* Tomamos as desigualdades para  $a_n$  e  $b_n$ , e comparamos as integrais com valor em módulos.

$$|a_n| = \left| \int_{-L}^L f(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx \right| \leq \int_{-L}^L |f(x)| \left| \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right| dx \leq \int_{-L}^L |f(x)| dx < \infty$$

$$|b_n| = \left| \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx \right| \leq \int_{-L}^L |f(x)| \left| \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right| dx \leq \int_{-L}^L |f(x)| dx < \infty$$

□

**Observação:** tomamos  $f(x)$  como uma função ímpar, que por definição satisfaz  $f(-x) = -f(x)$  para todo  $x \in X$ , teremos

$$a_n = 0 \quad \forall n \geq 0,$$

pois  $f(x) = x$  é uma função ímpar e  $f(x) = \cos(nx)$  é uma função par, o produto entre elas será ímpar e como o intervalo de integração é simétrico o valor da integral é zero. Similarmente, se tomarmos  $f(x)$  como uma função par teremos

$$b_n = 0 \quad \forall n \geq 1.$$

No mesmo jeito, podemos concluir que se  $f(x)$  for par então:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

e se  $f(x)$  for ímpar

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

Terminamos esta seção com alguns exemplos.

**Exemplo 1** Vamos tomar como exemplo para o cálculo do Série de Fourier da função  $f(x) = x$  no intervalo  $x \in [-\pi, \pi]$ . Esta função é ímpar então  $a_n = 0$ , para todos  $n \geq 0$ .

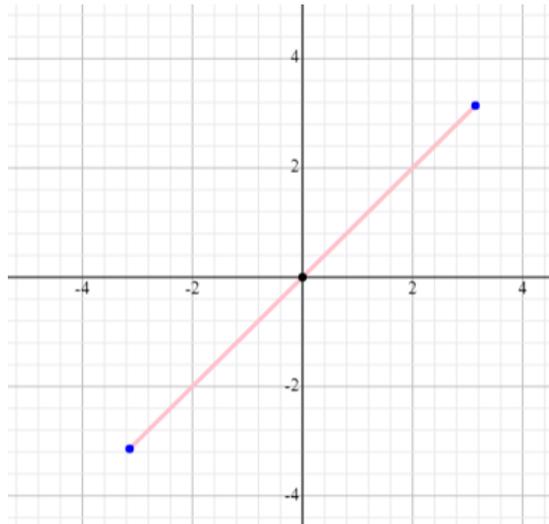


Figura 2 – Gráfico da função  $f(x) = x$  para  $x \in [-\pi, \pi]$

Para calcular os  $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) dx$ , utilizamos a integração por partes:  $x = v$  e  $dv = dx$ ,  $du = \operatorname{sen}(nx) dx$  e  $u = \frac{-\cos(nx)}{n}$ , temos

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) dx = \left(-\frac{\cos(nx)}{n} x\right) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{\cos(nx)}{n} dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) dx = -\frac{2\pi}{n} \cos(n\pi) + \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2} \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) dx = -\frac{2\pi}{n} \cos(n\pi) + 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) dx = -\frac{2\pi}{n} \cos(n\pi).$$

Então  $b_n = -\frac{2}{n} \cos(n\pi)$ . Portanto o coeficiente  $b_n$  será:

$$b_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n},$$

pois  $\cos(n\pi) = (-1)^n$ .

Conclui-se então a Série de Fourier da função  $f(x) = x$ ,

$$S(x; f) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n} \text{sen}(nx) = 2\text{sen}(x) - \text{sen}(2x) + \frac{2}{3}\text{sen}(3x) + \dots$$

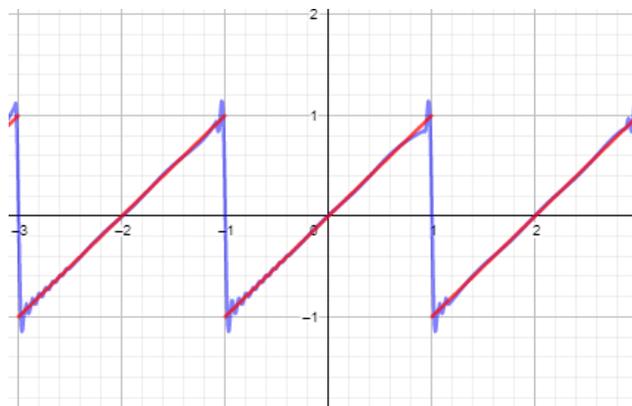


Figura 3 – Gráfico da Série de Fourier para a Função  $f(x) = x$  para  $x \in [-\pi, \pi]$

É uma série infinita de **senos** gerados a partir de  $f(x)$ , esta série é uma extensão periódica de  $f(x)$ . Nos múltiplos pares de  $\pi$  é sempre zero, o gráfico não é contínuo e existe saltos nos múltiplos ímpares de  $\pi$ .

As linhas em vermelho do gráfico 3 são a representação da função  $f(x)$ , observamos que no intervalo calculado a série coincide com a  $f(x)$  e seus extremos são abertos. Já as linhas em azul que sobrepõem o gráfico vermelho, representa o gráfico das somas parciais da série, neste caso para a soma de  $n$  termos da Série de Fourier.

Até agora a convergência não foi mencionada, todavia na próxima seção será abordada.

**Exemplo 2** Considere a função:

$$f(x) = \frac{x}{2|x|} \left(1 - \frac{|x|}{\pi}\right), \quad x \in [-\pi, \pi] \tag{2.11}$$

Onde  $f(0) = 0$ .

Pelo gráfico podemos ver que a  $f(x)$  é uma função ímpar e com isso vale a propriedade descrita anteriormente. Devemos calcular somente o  $b_n$ , porque o  $a_n$  é nulo. Pela expressão 2.10 temos

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^L \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \text{sen}(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^L \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \text{sen}(nx) dx$$

Vamos utilizar a integração por partes, então:

$$b_n = -\frac{1}{\pi n} \left[ \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \cos(nx) \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx) \right] = \frac{1}{n\pi}$$

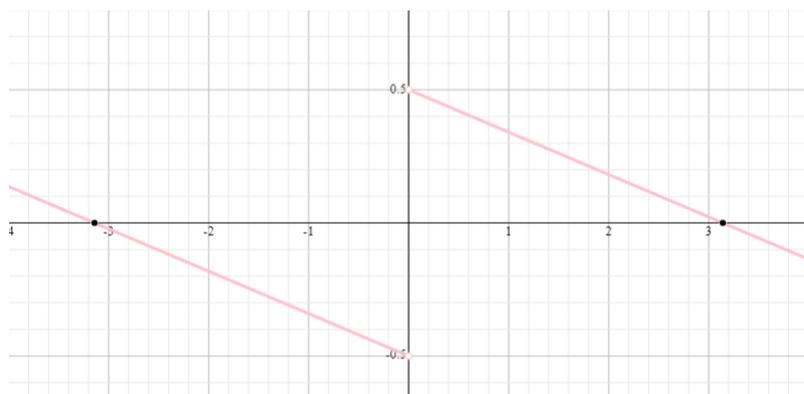


Figura 4 – Gráfico da função do Exemplo 2

Portanto a Série de Fourier de  $f(x)$  será:

$$S(x; f) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen}(nx)$$

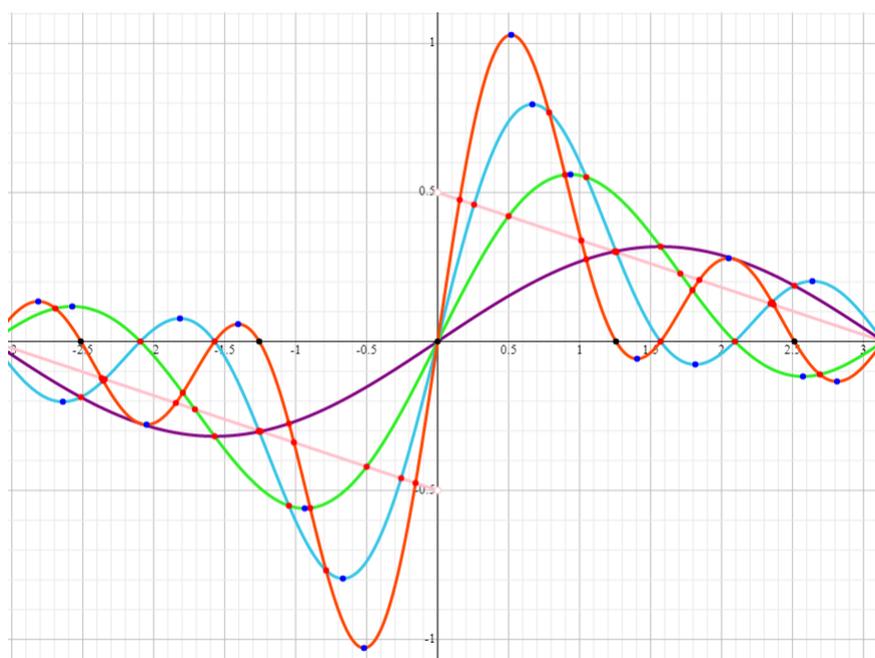


Figura 5 – Gráfico da Série de Fourier - Exemplo 2 - Soma até o 4º Termo da Série

Pelo gráfico na cor lilás temos a representação da função  $f(x)$ , e a cor roxa é a Série de Fourier para  $n = 1$ , a cor verde para  $n = 2$ , a cor azul para  $n = 3$  e a cor laranja para  $n = 4$ . Assim, é possível perceber que a Série de Fourier à medida que incluímos termos, mais ela se aproxima mais da função geradora. Observa-se que ao ampliar o valor da soma parcial, sempre teremos um novo gráfico com o mesmo comportamento. Sempre ocorrerá a mudança de ramos devido a descontinuidade na origem.

**Exemplo 3** Considere a função:

$$f(x) = |\text{sen}(x)|, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad (2.12)$$

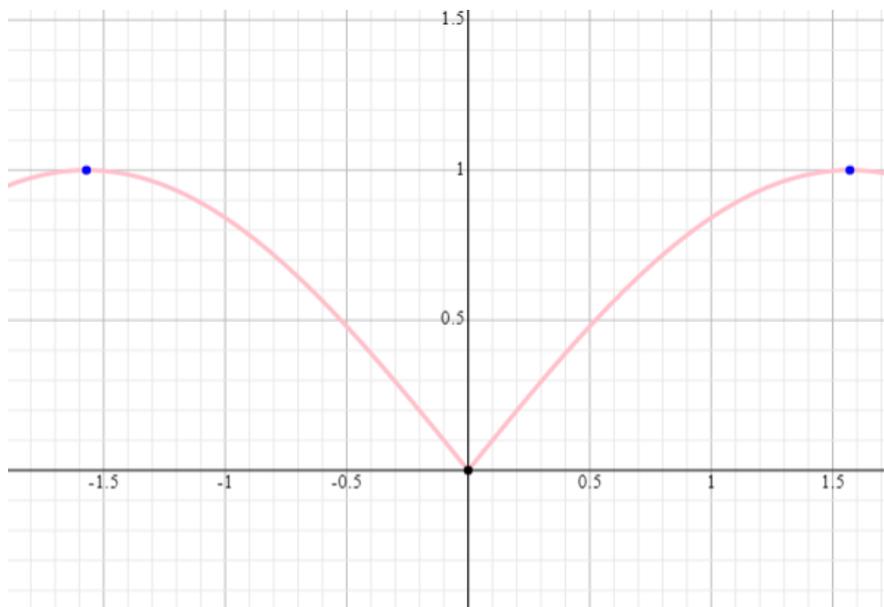


Figura 6 – Gráfico da Função  $f(x)=|\text{sen}(x)|$

Como a  $f(x)$  é uma função par, basta calcular os coeficientes dos  $a_n$  com intervalo  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , neste caso  $L = \frac{\pi}{2}$  e pela expressão 2.9 temos  $a_0 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(x) dx = \frac{4}{\pi} \cos(x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}$  e para  $n \geq 2$

$$a_n = \frac{2}{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos(2nx) dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(x) \cos(2nx) dx$$

Usando identidade trigonométrica:

$$\text{sen}(x) \cos(2nx) = \frac{(\text{sen}[(2n+1)x] - \text{sen}[(2n-1)x])}{x},$$

temos

$$a_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\text{sen}(2n+1)x - \text{sen}(2n-1)x) dx = \frac{4}{\pi} \left( \frac{-\cos(2n+1)x}{2n+1} + \frac{\cos(2n-1)x}{2n-1} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

$$a_n = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

Então:

$$S(x; f) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos(2nx), n = 0, 1, 2, \dots$$

Na figura 7, a cor lilás é o gráfico da função  $f(x) = |\text{sen}(x)|$  no intervalo desejado, já a cor roxa é o gráfico da Série de Fourier para  $n = 0$ , e por fim o gráfico na cor verde é a representação para  $n = 1$ , pode-se perceber que a medida que ampliamos os termos da série mais se aproxima da curva inicial da  $f(x)$ .

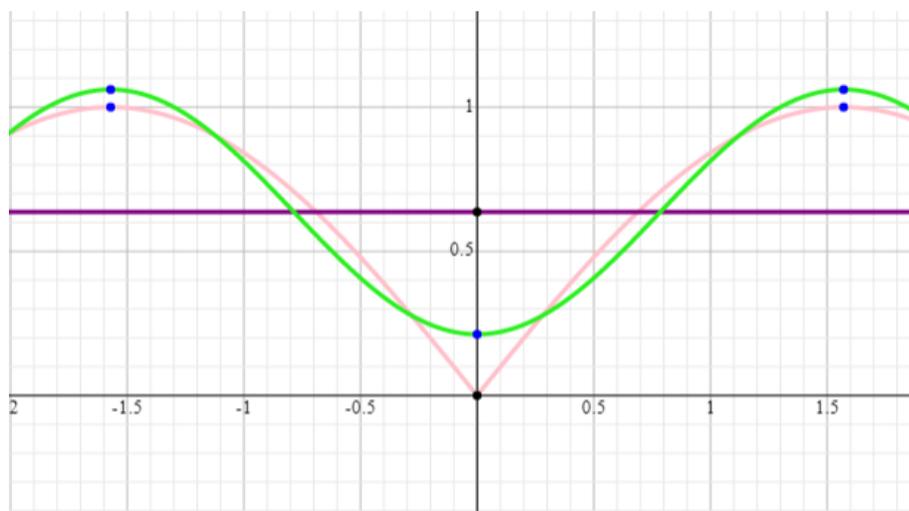


Figura 7 – Gráfico da Série de Fourier da função  $f(x)=|\text{sen}(x)|$

### 2.3 Forma Complexa

Embora o presente trabalho inicia com os estudos das Séries de Fourier com funções trigonométricas, outra forma de trabalhar com estas séries é com *equações exponenciais complexas*.

**Definição 3.** *Pela fórmula de Euler, podemos escrever:*

$$e^{ix} = \cos(x) + i\text{sen}(x), x \in \mathbb{R} \quad (2.13)$$

Desta forma, pode-se expandir esta definição 3, tomando  $z \in \mathbb{C}$ .

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\text{sen}(y)) = \begin{cases} \text{Re}(e^z) = e^x \cos(y) \\ \text{Im}(e^z) = e^x \text{sen}(y) \end{cases} \quad (2.14)$$

Podemos escrever as funções **seno** e **co seno** utilizando a fórmula de Euler.

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \text{sen}(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Agora

$$a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} = a_n \frac{e^{i\frac{n\pi x}{L}} + e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{2} + b_n \frac{e^{i\frac{n\pi x}{L}} - e^{-i\frac{n\pi x}{L}}}{2i}$$

$$a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \text{sen} \frac{n\pi x}{L} = \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right) e^{i\frac{n\pi x}{L}} + \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\right) e^{-i\frac{n\pi x}{L}}$$

Como o coeficiente  $c_n$  é dado por:

$$c_n = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2L} \int_0^L f(x) \left(\cos \frac{n\pi x}{L} - i \text{sen} \frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_0^L f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{L}} dx \quad (2.15)$$

Definimos o coeficiente  $c_0$ ,

$$c_0 = \frac{1}{2L} \int_0^L f(x) dx = \frac{a_0}{2}$$

Por fim, concluímos que,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{L}} \quad (2.16)$$

## 2.4 Convergência da Série de Fourier

Como foi observado, visualmente, nos exemplos 1, 2, 3 da seção 2.2, a Série da Fourier  $S(x; f)$  à medida que incluímos termos à série, ela se aproxima mais da função  $f(x)$ , salvo os pontos de descontinuidade. Uma questão natural surge imediatamente: A Série de Fourier  $S(x; f)$  é igual à função  $f(x)$ ? Infelizmente, isso não ocorre sempre, e ainda existem exemplos de funções contínuas cuja Série de Fourier diverge, veja [(3, Seção 2.4 - Página 18,19)]. Neste seção vamos descrever condições suficientes para que a função  $f$  seja igual à sua Série de Fourier.

**Definição 4.** *Uma função é chamada de seccionalmente contínua num intervalo  $[a, b]$  se existem  $a \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq b$ , tais que*

- $f(t)$  seja contínua em cada subintervalo aberto  $(a_j, a_{j+1})$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ .

- $f(t)$  tenha limites laterais finitos nas fronteiras de cada subintervalo.

Também, a função  $f$  será chamada seccionalmente diferenciável se ela for seccionalmente contínua e se a função derivada  $f'$  for também seccionamente contínua.

O seguinte teorema fornece condições suficientes para a convergência pontual da Série de Fourier de uma função  $f$ .

**Teorema 1.** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função seccionalmente diferenciável e de período  $2L$ . Então a Série de Fourier da função  $f$ , dada na Definição 2, converge pontualmente, em cada ponto  $x$ , para  $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ , onde*

$$f(x+0) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} f(x+\delta) \text{ e } f(x-0) = \lim_{\delta \rightarrow 0^-} f(x+\delta)$$

A demonstração será feita mais adiante. No momento queremos verificá-lo utilizando um exemplo. Considere a função:

$$f(x) = \frac{x}{2|x|} \left(1 - \frac{|x|}{\pi}\right), \quad x \in [-\pi, \pi] \quad (2.17)$$

Onde  $f(0) = 0$ , do Exemplo 2.11. Esta função é seccionalmente diferenciável. O único ponto de descontinuidade da função é  $x = 0$  e neste ponto as duas funções  $f$  e  $f'$  têm limites laterais diferentes. Então, a Série de Fourier dele  $S(x; f) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen}(nx)$  deve ser pontualmente convergente. Pelo  $S_N(x; f)$  vamos denotar a soma de  $n$  termos iniciais de série  $S(x; f)$ .

Seja

$$\epsilon_N(x) = S_N(x; f) - \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)], \quad (2.18)$$

a função erro.

Para o ponto  $x = 0$ , temos  $S_N(x; f) = 0$  para qualquer  $N$  e

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} f(\delta) &= \frac{1}{2} \\ \lim_{\delta \rightarrow 0^-} f(\delta) &= -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

Então,  $S(0, f) = \frac{1}{2}[\lim_{\delta \rightarrow 0^+} f(\delta) + \lim_{\delta \rightarrow 0^-} f(\delta)]$ . Para qualquer outro ponto  $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$  temos

$$\epsilon'_N(x) = \frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(nx) \right) \quad (2.19)$$

Vamos mostrar que

$$\frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(nx) \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{\text{sen}(N + \frac{1}{2})x}{\text{sen}(\frac{x}{2})}.$$

Seja  $A_N(x) = 1 + \sum_{n=1}^N \cos(nx)$ , observe que

$$A_N(x) = \operatorname{Re} \left( 1 + \sum_{n=1}^N e^{inx} \right),$$

e que

$$1 + z + z^2 + \dots + z^N = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}, \quad \text{para } z \neq 1.$$

Logo, para  $x \neq 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$  temos

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \operatorname{Re} \frac{1 - e^{i(N+1)x}}{1 - e^{ix}} = \operatorname{Re} \frac{e^{-\frac{ix}{2}} - e^{-i[N+\frac{1}{2}]x}}{e^{-\frac{ix}{2}} - e^{-\frac{ix}{2}}} \\ &= \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2} + \operatorname{sen}(N + \frac{1}{2}x)}{2\operatorname{sen} \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}(N + \frac{1}{2}x)}{2\operatorname{sen} \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Agora,

$$\frac{1}{\pi} \left( -\frac{1}{2} + 1 + \underbrace{\sum_{n=1}^N \cos(nx)}_{=A_N} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}(N + \frac{1}{2}x)}{2\operatorname{sen} \frac{x}{2}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\operatorname{sen}(N + \frac{1}{2}x)}{\operatorname{sen}(\frac{x}{2})}.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) temos

$$\begin{aligned} \epsilon_N(x) &= - \int_x^\pi \epsilon'_N dy = - \frac{1}{2\pi} \int_x^\pi \frac{\operatorname{sen}(N + \frac{1}{2})x}{\operatorname{sen}(\frac{x}{2})} dy \\ &= - \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\cos(N + \frac{1}{2})x}{(N + \frac{1}{2})\operatorname{sen} \frac{x}{2}} + \int_x^\pi \frac{\cos(N + \frac{1}{2})y \cos \frac{y}{2}}{(2N + 1)\operatorname{sen}^2 \frac{y}{2}} \right) \end{aligned}$$

Pela expressão anterior pode-se observar que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \epsilon_N(x) = 0$ .

A expressão  $\frac{1}{\pi} \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(nx) \right)$  2.19 é o **Núcleo Integral de Dirichlet** onde  $L = \pi$ .

**Definição 5.** A expressão abaixo é conhecida como o **Núcleo Integral de Dirichlet**

$$D_N(x) := \frac{1}{L} \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right)$$

que tem as propriedades enunciadas a seguir

- i)  $D_N(x)$  é uma função par.
- ii)  $\int_{-L}^L D_N(x) dx = 1$ .
- iii)  $D_N(x)$  é contínua.
- iv)  $D_N(x)$  é uma função periódica com período  $2L$ .

v)  $D : N(0) = \frac{(N+\frac{1}{2})}{L}$

vi) Para  $x \neq 0, \pm 2L, \pm 4L, \dots$   $D_N(x) = \frac{1}{2L} \frac{\text{sen}(N+\frac{1}{2})\frac{\pi x}{L}}{\text{sen}\frac{\pi x}{2L}}$ .

A demonstração de item (vi) é similar a que fizemos no exemplo anterior.

O **Teste de Dini** é fundamental para demonstrar o Teorema de Fourier, este teste é muito usado para mostrar que uma Série de Fourier converge em um determinado ponto.

**Proposição 2. Teste de Dini:** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função periódica de período  $2L$  e pertencente ao conjunto das funções  $\mathbb{L}^1$ , fixado com um  $x \in [-L, L]$  e supondo que os limites laterais  $f(x - 0)$  e  $f(x + 0)$  existam, definimos:*

$$g(x, t) = [f(x + t) - f(x + 0)] + [f(x - t) - f(x - 0)]$$

Supondo agora que exista um  $\eta > 0$  tal que:

$$\int_0^\eta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt < \infty \tag{2.20}$$

Então  $\epsilon_N(x) \rightarrow 0$ , ou  $S_N(x; f) \rightarrow \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ , quando  $N \rightarrow \infty$ , onde  $S_N(x; f)$  representa a soma parcial de ordem  $N$  da Série de Fourier de  $f$ . (1, Página 39)

**Demonstração.** Para demonstrar o teste de Dini (3, Seção 3.4 - Página 58), vamos tomar o erro  $\epsilon_N(x)$  em duas partes:

$$\epsilon_N(x) = \int_0^\delta t D_N(t) \frac{g(x, t)}{t} dt + \int_\delta^L \text{sen}\left[\left(N + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{L}\right] \frac{g(x, t)}{2L \text{sen}\frac{\pi t}{2L}} dt$$

A primeira integral será feita tomando o  $\delta$  suficientemente pequeno e usando 2.20, já à segunda integral, usaremos o **Lema de Riemann-Lebesgue**.(3, Seção 3.3 - Página 56) Então iniciamos com o primeiro integrando em módulo.

$$|t D_N(t)| \leq \frac{t}{2L \text{sen}\frac{\pi t}{2L}} \tag{2.21}$$

E como temos a função no segundo membro de 2.21 é contínua e crescente em  $[0, L]$ , podemos escrever a estimativa.

$$|t D_N(t)| \leq \frac{1}{2}, t \in [0, L]$$

Com isso, temos um  $\epsilon > 0$ , e tomamos um  $\delta < \min(L, \eta)$  tal que:

$$\left| \int_0^\delta t D_N t \frac{g(x, t)}{t} dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^\delta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt < \frac{\epsilon}{2}$$

Agora tomando como hipótese 2.20 e colocando o  $\delta$  fixado na segunda integral. Podemos aplicar o **Lema de Riemann-Lebesgue**, para gerar uma função  $h(t)$  integrável.

$$h(t) = \frac{g(x, t)}{2L \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}}, \quad \forall t \in [\delta, L]$$

Temos que este resultado é imediato, dado que o denominador nunca se anula em  $[\delta, L]$  e  $g$  é integrável. Logo, para  $n$  suficientemente grande:

$$\left| \int_\delta^L \operatorname{sen} \left[ \left( N + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{L} \right] \frac{g(x, t)}{2L \operatorname{sen} \frac{\pi t}{2L}} dt \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

□

Já que a aproximação uniforme ocorre quando o mesmo número  $N$  de termos usados para escrever a série, serve para a sequência  $S_N(x; f)$  se aproximar de  $f(x)$  com precisão  $\epsilon$  para todo o  $x$ .

### Demonstração de Teorema 1:

*Demonstração.* Inicialmente vamos considerar os pontos onde  $f$  tenha derivada, quer dizer, suponha que  $f$  tenha derivada no ponto  $x$ , então  $f$  é contínua e além disso existem constantes  $\delta > 0$  e  $k > 0$  tais que

$$|f(t) - f(s)| \leq K|t - s|, \quad (2.22)$$

para  $t, s \in [x - \delta, x + \delta]$ . Pela continuidade temos  $f(x + 0) = f(x - 0) = f(x)$ , e a desigualdade (2.22) implica

$$|g(x, t)| \leq |f(x + t) - f(x)| + |f(x - t) - f(x)| \leq 2Kt,$$

Logo,

$$\int_0^\delta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt \leq \int_0^\delta 2K dt = 2K\delta,$$

e ve-se que a condição (2.20) do Teste de Dini se verifica. □

**Observação:** Na verdade o mesmo raciocínio funciona quando  $f$  é Holder contínua na vizinhança do ponto  $x$ , isto é, que existem constantes  $\alpha > 0$ ,  $\delta > 0$  e  $k > 0$  tais que

$$|f(t) - f(s)| \leq K|t - s|^\alpha, \quad (2.23)$$

para  $t, s \in [x - \delta, x + \delta]$ .

Quando  $f$  é seccionalmente continua e as derivadas laterais em  $x$  existem, as razões incrementais

$$\frac{f(x+t) - f(x+0)}{t} \quad \text{e} \quad \frac{f(x-t) - f(x-0)}{t}$$

são limitadas para  $t$  suficientemente pequeno, é fácil verificar que a condição de Dini se verifica. Portanto isso estabelece a validade de Teorema 1.

No resto dessa seção vamos tratar sobre convergência uniforme da Série de Fourier. Na figura 5 soma até o 4º Termo da Série, temos diversas curvas sobrescrevendo as retas da função  $f(x)$  do **exemplo 2 2.11**, e ao traçarmos duas retas em paralelo às retas da função  $f$ , formamos uma faixa de largura  $2\epsilon$  definindo uma largura de precisão. Desta forma, é possível escolher um ponto  $x$  fixo e um valor de  $N_1$  até que todas os aproximantes fiquem dentro da faixa de precisão, e todas as vezes que a função passa pela origem ocorre a troca de retas e as curvas saem da região de precisão, então os pontos de máximos da Série de Fourier está indo em direção ao eixo vertical. Na figura 7 o pior ponto de aproximação é a origem, onde a derivada é descontínua e o valor do aproximante será nulo, ou fica menor do que  $\epsilon$ , temos que todo o resto da função fica dentro da faixa de aproximação.

A convergência uniforme permite passar as operações de limites, em se tratando de derivadas e integrais, dentro de uma faixa de limite de uma Série de Fourier  $S_\infty(x; f)$ . A dedução dos coeficientes  $a_n, b_n$  da série ao efetuarmos o produto com funções trigonométricas, em um intervalo  $[-L, L]$  permite integração em termo a termo. E se tomarmos uma ordem finita é permitido trocar a ordem da soma dos integrandos, o mesmo vale para uma série uniformemente convergente em  $[-L, L]$ .

Deste modo, ocorre a preservação da sucessão dos termos. E os termos das séries parciais de  $S_N(x; f)$  serão uma combinação linear de funções trigonométricas de senos e cossenos. Assim  $\forall N \geq 0$  as funções são contínuas em  $x$ , e o limite uniforme de  $S_\infty(x; f)$  é precisamente uma função contínua. Com isso, pode-se descrever as proposições de caráter genérico:

**Proposição 3.** *Se uma Série de Fourier de uma dada função  $f(x)$ , se a  $f(x)$  conter uma descontinuidade no intervalo  $[-L, L]$  não poderá convergir uniformemente.*

*Demonstração.* Caso contrário seria uma função contínua, o que é uma contradição.  $\square$

Então, convergência uniforme das Séries de Fourier só pode ser discutido fora dos pontos de descontinuidade.

Primeira, vamos supor que a função  $f$  não tem pontos de descontinuidade.

**Teorema 2.** *Seja  $f$  uma função periódica de período  $2L$ , contínua e com derivada primeira integrável e absolutamente integrável. Então, a Série de Fourier de  $f$  converge uniformemente para  $f$ .*

A demonstração deste teorema usa o **Teste M de Weierstrass** (veja seção 2.1), algumas estimativas dos coeficientes de Fourier (as Relações (42) e (43) do [3], página 36 capítulo 2) e desigualdade de Bessel (veja Seção 3.5 de [3]). A demonstração detalhada se encontra no início da seção 3.7 de [3].

O próximo Lema vai ser usado na discussão de convergência uniforme das Séries de Fourier fora dos pontos de descontinuidade.

**Lema 1.** *Seja  $\psi$  uma função periódica de período  $2L$  definida:*

$$\psi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{L}\right), & -L \leq x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{L}\right), & 0 < x \leq L \end{cases} \quad (2.24)$$

*Então, a Série de Fourier de  $\psi$  converge uniformemente para  $\psi$  em qualquer intervalo que não contenha pontos da forma  $2Ln \forall n \in \mathbb{Z}$ . (3, Seção 3.7 - Página 69)*

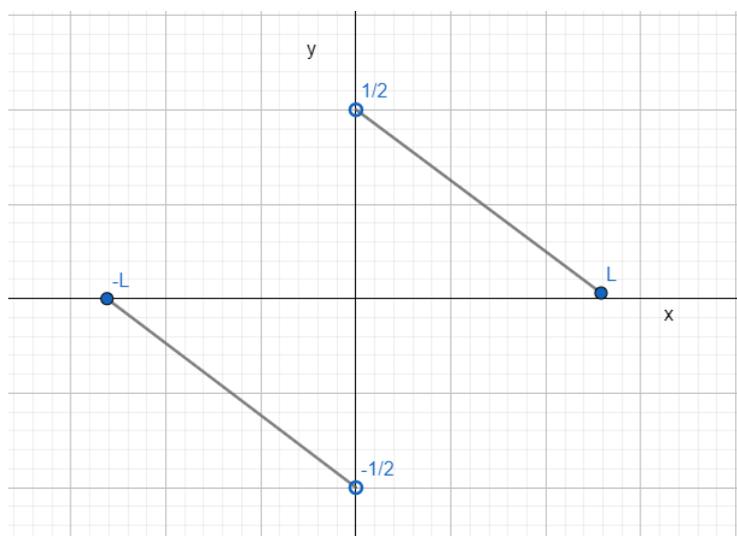


Figura 8 – Gráfico da Função  $\psi$  para  $[-L, L]$

*Demonstração.* A função  $\psi$  é ímpar então a Série de Fourier dela é uma série de **senos** e

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{n\pi}. \quad (2.25)$$

Assim a Série de Fourier para a função  $\psi$  é expressa por:

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \quad (2.26)$$

Temos que a série 2.26 é obtida utilizando a parte imaginária de série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} \quad (2.27)$$

igualando  $\theta = \frac{\pi x}{L}$ , então basta mostrar que a série 2.27 converge uniformemente. Seja

$$E_n(\theta) = \sum_{k=1}^n e^{ik\theta}, \quad (2.28)$$

mudando o intervalo no somatório, teremos:

$$\sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} [E_k(\theta) - E_{k-1}(\theta)] \quad (2.29)$$

Temos que:

$$\sum_{k=m}^n \frac{1}{k} E_{k-1}(\theta) = \sum_{j=m-1}^{n-1} \frac{1}{j+1} E_j(\theta)$$

Assim obtemos:

$$\sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=m}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) E_k(\theta) + \frac{1}{n+1} E_n(\theta) - \frac{1}{m} E_{m-1}(\theta) \quad (2.30)$$

Agora vamos majorar a soma parcial  $E_n(\theta)$ , e usaremos o **Núcleo de Dirichlet** no intervalo  $0 < \theta < 2\pi$ .

$$E_n(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

Tomamos agora os valores absolutos,

$$|E_n(\theta)| = \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|} = \frac{2}{|e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}|} = \frac{2}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}$$

Portanto segue-se de 2.30,

$$\left| \sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| \leq \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} \left[ \sum_{k=m}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m} \right] = \frac{2}{m \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}$$

Ao aplicarmos no intervalo  $0 < \epsilon \leq \theta \leq \pi$ ,

$$\left| \sum_{k=n}^m \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| \leq \frac{2}{m \operatorname{sen} \frac{\epsilon}{2}}$$

Pelo **Crítério de Cauchy**, a convergência uniforme 2.27 prova o lema.  $\square$

O próximo teorema fornece as condições necessárias para convergência uniforme da Série de Fourier de uma função  $f$  com pontos de descontinuidade.

**Teorema 3.** *Considere uma função  $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$  sendo uma função periódica de período  $2L$ , seccionalmente contínua e com derivada primeira é integrável e absolutamente integrável. Então, sua Série de Fourier converge uniformemente para  $f$ , em todo o intervalo que não contenha pontos de descontinuidade de  $f$ . (1, Página - 39)*

*Demonstração.* Sejam  $x_1, x_2, \dots, x_k$  são os pontos do intervalo  $[-L, L]$ , onde a  $f$  é descontínua. Vamos considerar  $w_1, w_2, \dots, w_k$  são os saltos da  $f$  nestes pontos de descontinuidade, então podemos escrever  $w_j = f(x_j^+) - f(x_j^-)$ .

Assim, a função  $w_j\psi(x - x_j)$  é descontínua nos mesmo pontos da função  $\psi$ , ou seja, nos pontos da forma  $2Ln$ , com  $n \in \mathbb{Z}$ , e os saltos nesses pontos é  $w_j$ . Desta forma, a função  $f(x) - w_j\psi(x - x_j)$  é contínua nesses pontos e nos demais onde a  $f$  já era contínua. Deste modo, temos uma função com menos descontinuidades que a função original  $f$ . Seguindo este procedimento, eliminaremos todas as descontinuidades da função  $f$ , e obteremos assim uma função  $g$  contínua para todo  $x$ , dado por:

$$g(x) = f(x) - \sum_{j=1}^k w_j\psi(x - x_j)$$

Pelo Teorema 2 e pelo Lema 1, a Série de Fourier da função  $\psi(x - x_j)$  converge uniformemente em qualquer intervalo que não contenha os pontos da forma  $2Ln$ . Como a Série de Fourier da função  $f$  é a soma das Séries de Fourier das funções  $g$  e  $w_j\psi(x - x_j)$ , para  $j = 1, 2, 3, \dots, k$ , segue então que a Série de Fourier de  $f$  converge uniformemente em qualquer intervalo fechado que não contenha os pontos de  $2Ln$ , para  $n \in \mathbb{Z}$ , que não são os pontos de descontinuidade da  $f$ . (3, Seção 3.7 - 68)  $\square$

Vamos utilizar a imagem 9 abaixo como ilustração, com uma  $S(x; f)$  periódica com período  $T = 2\pi$ , e definida em toda reta.

Pelo gráfico observamos um ponto de descontinuidade em  $x = 0$ , e os limites laterais em cada ponto de descontinuidade são finitos. Os extremos deste período estão nos pontos  $(-\pi, 1)$  e  $(\pi, 0)$ , ou seja, também são finitos. Portanto, é contínua por partes e tem os limites laterais finitos. Assim, a partir do gráfico podemos gerar uma Série de Fourier com pontos que coincide com o gráfico anterior que não apresenta descontinuidade.

E o valor da Série de Fourier para  $x = 0$  será a média aritmética dos limites laterais, ou seja, 3. Também será periódica definida em toda a reta, repetindo no

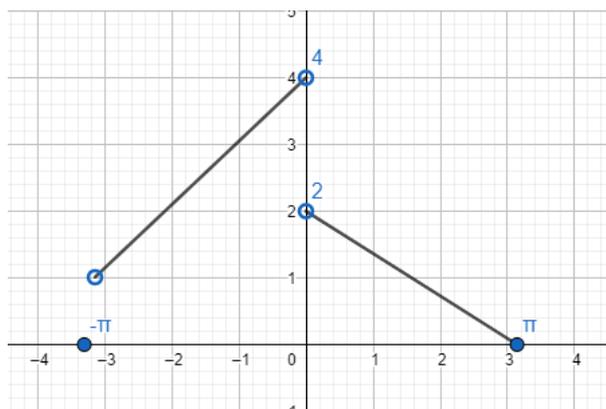


Figura 9 – Gráfico para Análise da Convergência Pontual da Série de Fourier

intervalo de  $[\pi, 3\pi]$ , e sucessivamente em toda a extensão da reta. Mas os valores de convergência se repetem em  $2\pi$  que é 3, e em  $x = \pi$  o valor de convergência será  $\frac{1}{2}$ , repetindo o mesmo valor que para  $x = -\pi$ .

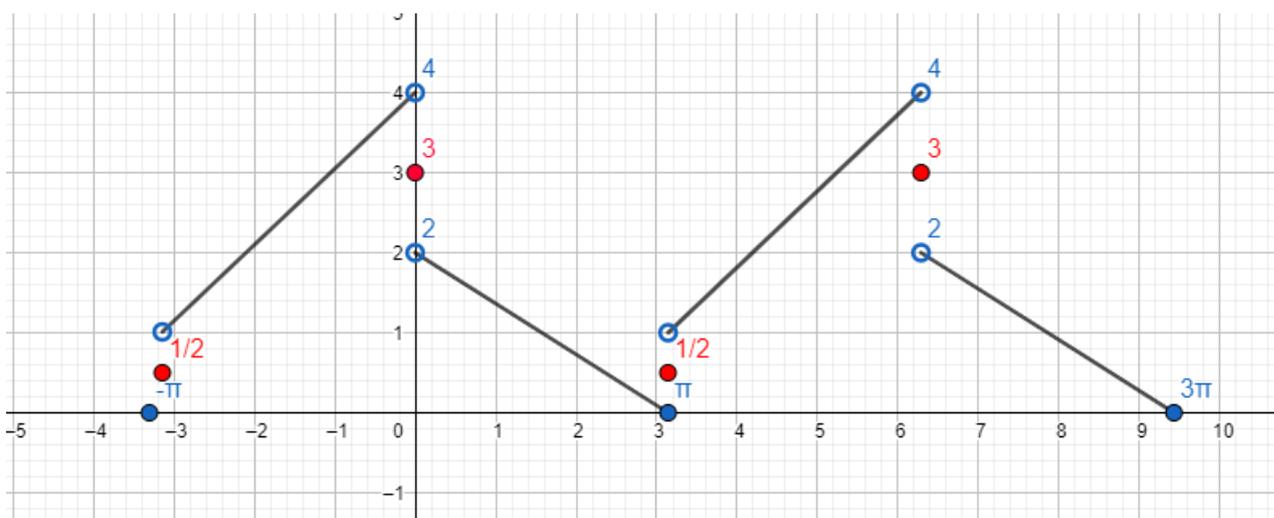


Figura 10 – Gráfico da Série Fourier com os Pontos de Convergência

Portanto a Série de Fourier gera este gráfico e como a  $f(x)$  é  $C^1$  por partes, automaticamente a função gerada pela série também será  $C^1$  por partes.

### 3 TRANSFORMADA DE FOURIER

#### 3.1 Introdução

No capítulo anterior, trabalhamos com os conceitos sobre Séries de Fourier, ou seja, séries a partir de funções periódicas. Neste capítulo, será trabalhado um método que permite analisar funções não periódicas também. A transformada que focamos neste texto, é uma operação matemática que modifica o domínio de uma função, e ou em um caso prático o domínio de um sinal. Os sinais podem ser definidos como um fenômeno que transporta informações como sinais de áudio, sinais digitais e etc.

Desta forma um sinal analisado no domínio do tempo, ou seja, cuja a abscissa é o tempo poderá ser modificado para análise em outro domínio. No caso do contexto deste texto, será no domínio da frequência. Com isso, muda-se o ponto de vista sobre os sinais permitindo outra forma de olhar para o mesmo sistema dinâmico.

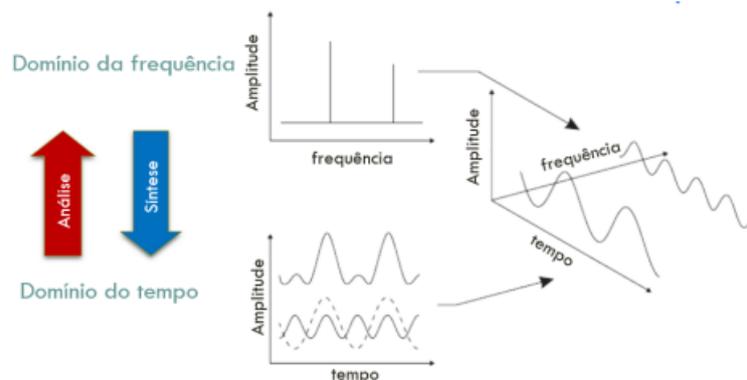


Figura 11 – Domínio do Tempo x Domínio da Frequência© USP

Em termos práticos em uma análise no domínio do tempo, para um dado sinal em tempo contínuo e periódico, utiliza-se a Série de Fourier (FS). Já para o mesmo sinal contínuo mas não periódico utiliza-se a Transformada de Fourier (FT). A ideia em termos práticos da Transformada de Fourier, se resume a uma caixa preta, que altera as características de um sinal de entrada. Utilizando a linguagem de funções podemos descrever um sinal, sendo possível dizer:  $\mathfrak{F} : f(x) \rightarrow F(\xi)$  ou  $F(\xi) = \mathfrak{F}[f(x)]$ . Este sistema ou caixa preta possui três propriedades muito importantes:

i) O sistema é linear, ou seja, ele é aditivo e homogêneo. Desta forma podemos somar sinais e ou funções na entrada, que será transformado como uma função única. Como também podemos multiplicar um escalar em um sinal, ampliando a amplitude,

que também será transformado como um sinal único de entrada.

ii) O sistema destrói as derivadas, isto quer dizer que um sinal de entrada gerado por uma função derivada, ao ser transformado sai como um sinal gerado por sua primitiva em produto com um valor imagiário.

iii) O sistema é inversível, ou seja, existe uma outra caixa preta denominada  $\mathfrak{S}^{-1}$  responsável por fazer a conversão deste sinal secundário para o sinal de entrada.

$$f(x) \rightarrow \mathfrak{S}[f(x)] = i\xi F(\xi), \quad i\xi F(\xi) \rightarrow \mathfrak{S}^{-1}[i\xi F(\xi)] = f(x)$$

### 3.2 Transformada de Fourier

Antes de definir a Transformada de Fourier recordamos que a integral imprópria de uma função  $f$  é

$$\int_{-\infty}^{\infty} f dx = \lim_{[-M, N] \rightarrow \infty} \int_{-M}^N f(x) dx.$$

Definimos no capítulo anterior a Série Tradicional de Fourier e a sua Forma Complexa 2.16, e também como determinar o coeficiente  $c_n$  2.15. O termo  $c_n$  pode ser representado como o Espectro Discreto de Fourier, ao fazermos  $n \rightarrow \infty$  convertemos para um Espectro Contínuo.

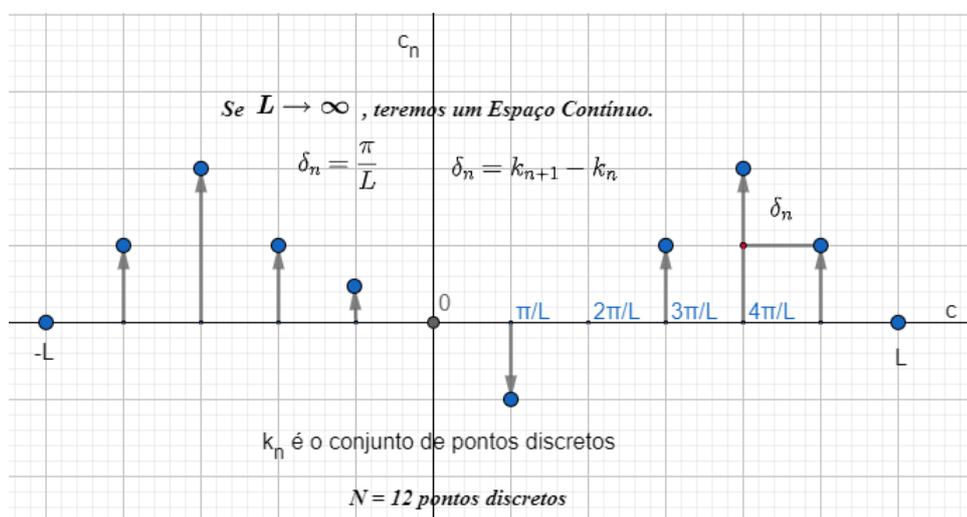


Figura 12 – Espectro de Fourier com pontos Discretos

Tomamos uma  $f(x) \in [-L, L]$ , com um número finito de pontos de descontinuidade no intervalo e um número finito de máximos e mínimo locais. Seja  $k_n = \frac{n\pi}{L}$  o conjunto de pontos discretos no Espectro de Fourier.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ik_n x}, \quad c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(\xi) e^{-ik_n \xi} d\xi$$

Ao fazermos  $L \rightarrow \infty$ , temos que  $k_n \rightarrow 0$  e os comprimentos de  $\delta_n \rightarrow 0$ . Com isso o distanciamento entre cada  $k_n$  ficaria menor e existiria menos buracos entre eles, desta forma teríamos um espaço contínuo  $k$ .

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(\xi) e^{-ik_n \xi} d\xi \right] e^{ik_n x}$$

$$f(x) = \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-ik_n \xi} d\xi \right] e^{ik_n x} \right) \cdot \frac{\pi}{\pi}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{L} \left[ \int_{-L}^L f(x) e^{-ik_n \xi} d\xi \right] e^{ik_n x}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{L} e^{ik_n x} \left[ \int_{-L}^L f(x) e^{-ik_n \xi} d\xi \right] \quad (3.1)$$

Mas como fizemos  $L \rightarrow \infty$ , então  $\delta_n \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Isto porque o espaço discreto  $k_n$  será tornar-se um espaço contínuo  $k$ , e pelo Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) como o  $\delta_n$  será muito pequeno, o produto de  $\delta_n$  com a exponencial será uma integral de Riemann.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_n x} dx \quad (3.2)$$

Reescrevemos a expressão 3.1 a partir de 3.2, sendo ambas as integrais para o espaço contínuo.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dx \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ik\xi} d\xi \right]$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dx \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ik\xi} d\xi \right]$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ik\xi} d\xi \right] e^{ikx} dx \quad (3.3)$$

A partir de uma função  $f(x)$  periódica podemos escrever em uma série trigonométrica que chamamos de (FS), ou Série de Fourier. Em seguida podemos escrever a (FT), ao tomarmos os limites tendendo ao infinito para a  $f$ , com isso a função  $f(x)$  não necessariamente precisa ser periódica. Podemos observar a partir da expressão 3.3 que a integral dentro dos chaves representa a Transformada de Fourier  $\mathfrak{F}(f(x))$  do domínio de  $\xi$  para o domínio  $k$ . Já a integral que fecha os chaves representa a inversa  $[\mathfrak{F}(f(x))]^{-1}$  do domínio de  $k$  para o domínio  $x$ . Então concluímos que:

$$f(x) = \mathfrak{F}^{-1}[\mathfrak{F}(f(x))]$$

**Definição 6.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função seccionalmente contínua em cada intervalo  $[-M, N]$  e

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

Então, a Transformada de Fourier de  $f$  é definido por

$$\mathfrak{F}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx. \quad (3.4)$$

E sua inversa será dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}(\xi) e^{i\xi x} d\xi. \quad (3.5)$$

**Observação:** Pelas condições expostas anteriormente como: ser seccionalmente contínua, e a função  $f$  possuir integral imprópria, podemos dizer que a Transformada de Fourier é bem definida em todos os pontos  $\xi$ . Mas estas condições não são estritamente necessárias, ou seja, existem funções que não satisfazem estas condições mas a Transformada de Fourier delas está bem definida.

**Exemplo 6** Suponha um certo  $a > 0$ , e seja:

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{2\pi}(2a)^{-1}, |x| \leq a \\ f(x) = 0, |x| > a \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\mathfrak{F}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{2\pi}}{2a} e^{-i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2a} e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} dx$$

Como a integral é em  $x$ , então os termos diferentes de  $x$ , são constantes. Logo podemos separar e resolver por substituição por  $u$  e  $du$ . E tomamos  $c = i\xi$ .

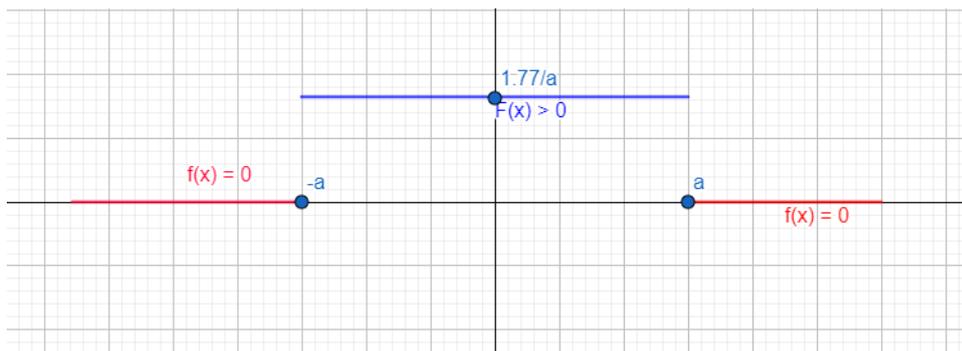


Figura 13 – Exemplo 6: Função f(x)

$$\mathfrak{F}(\xi) = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-cx} dx \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} e^u \frac{-du}{c} = -\frac{1}{2ac} \int_{-\infty}^{\infty} e^u du = \infty \rightarrow \text{diverge}$$

Desta forma, devemos integrar dentro do limite fechado  $[-a, a]$ , para ser diferente de  $\infty$ . Assim, vamos tomar um intervalo simétrico, com respeito à origem e usando a fórmula de Euler, temos que a integral de uma função ímpar ( $isen(\xi x)$ ) terá resultado nulo, e resulta somente na integral do termo par ( $cos(\xi x)$ ). Com isso podemos integral somente a metade no intervalo de  $[0, a]$ , como se expressa abaixo:

$$\mathfrak{F}(\xi) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a e^{-i\xi x} dx = \mathfrak{F}(\xi) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a (cos(\xi x) - isen(\xi x)) dx$$

$$\mathfrak{F}(\xi) = \frac{1}{2a} \int_0^a cos(\xi x) dx = \frac{sen(a\xi)}{a\xi} \tag{3.7}$$

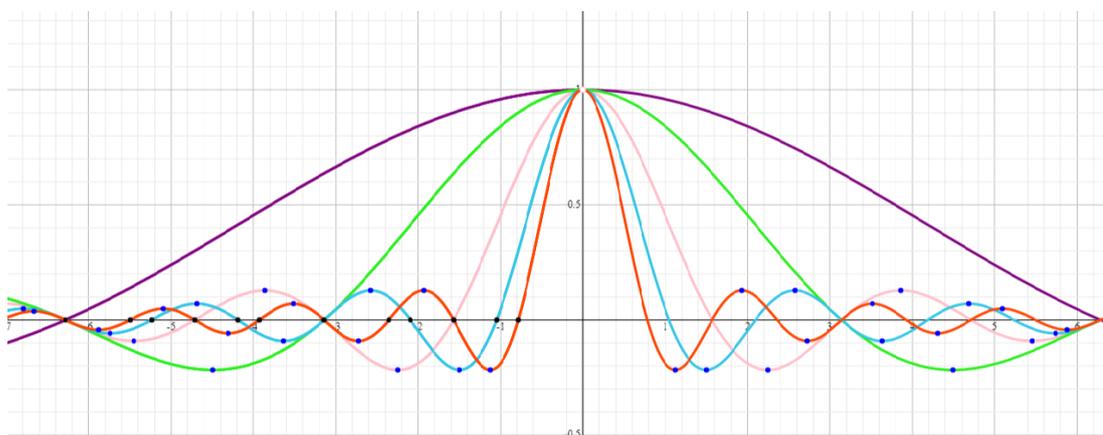


Figura 14 – Transformada de Fourier para os valores de a=1/2,1,2,3,4 - Domínio  $\xi$

Assim, a função da Transformada de Fourier 3.7 vai a zero, em  $\frac{1}{\xi}$  quando  $\xi \rightarrow \infty$  e quando  $a = 0$ , temos que a função permanece limitada. A curva em roxo é dada para

$a = \frac{1}{2}$ , mais próximo da origem. Como os valores estão em um intervalo de  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  é mais estreito no domínio  $x$ , vemos a curva na cor roxo mais larga no domínio  $\xi$ . A curva na cor verde para  $a = 1$ , na cor lilás para  $a = 2$ , na cor azul para  $a = 3$  e por fim na cor laranja para  $a = 4$ . A curva na cor laranja esta mais afastada da origem no domínio de  $x$ , e no domínio de  $\xi$  é a mais estreita. Desta forma podemos concluir que o domínio de  $\xi$  é inverso ao domínio de  $x$ .

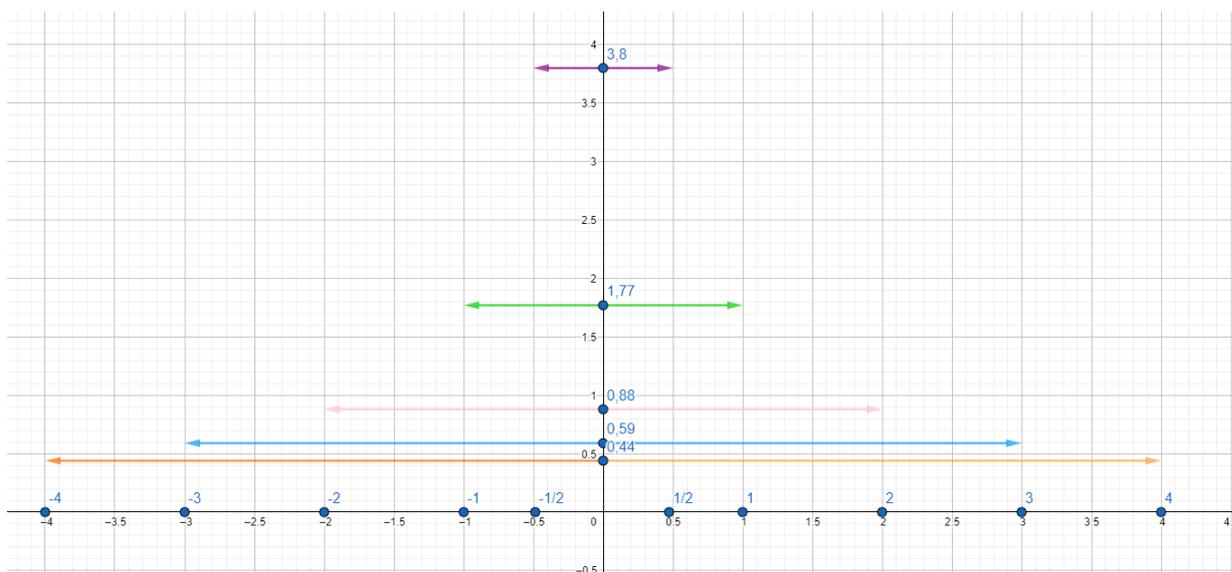


Figura 15 – Exemplo 6 para valores de  $a=1/2,1,2,3,4$  - Domínio  $x$

## 4 APLICAÇÃO PRÁTICA

As ondas de rádio são um tipo de radiação eletromagnética com um comprimento de onda específico para transmitir informações em longas distâncias. Os comprimentos de onda  $\lambda$  variam de 10 quilômetros a 1 milímetro. As distâncias máximas dependem da frequência utilizada, que varia de 30KHz a 300KHz para ondas longas, 300KHz a 3MHz para ondas médias, 3MHz a 30MHz para as ondas curtas, 30MHz a 300MHz são as micro-ondas. No quadro 1, listamos as principais estações de rádio homologadas e ativas na região metropolitana de Belo Horizonte, que operam na Banda de [87, 1; 107, 3]MHz. A partir das frequências listadas abaixo, vamos aplicar o arcabouço teórico apresentado anteriormente.

Quadro 1 – **Distribuições das Frequências de Estações de Rádios FM Homologadas em Belo Horizonte**

Nome	Frequência (MHz)	Ordem
Rádio Nacional	87,1	1
Faixa Comunitária	87,9	2
Transamérica	88,7	3
BandNews FM	89,5	4
Show FM	90,3	5
Rádio Aleluia	90,7	6
Rádio Super	91,7	7
Liberdade FM	92,9	8
Alvorada FM	94,9	9
Rádio Itatiaia	95,7	10
Clube FM	96,5	11
Nossa Rádio	97,3	12
Rádio 98 FM	98,3	13
Jovem Pan FM	99,1	14
Rede Aleluia	99,9	15
Inconfidência FM	100,9	16
BH FM	102,1	17
CDL FM	102,9	18
Extra FM	103,9	19
Rádio UFMG Educativa	104,5	20
Antena 1	105,1	21
CBN Belo Horizonte	106,1	22
Autêntica Favela FM	106,7	23
Rádio Educativa Cultura FM	106,9	24
107 FM	107,3	25

Fonte: tudorádio © [tudoradio.com](http://tudoradio.com)

Pela definição 1 vamos tomar  $t = 2\pi$  como o período fundamental, vamos inicialmente esboçar o gráfico de uma função senoidal para uma frequência de 1Hz. Isto significa 1 ciclo (uma oscilação) por 1 segundo, neste gráfico analisamos a amplitude do sinal em função do tempo.

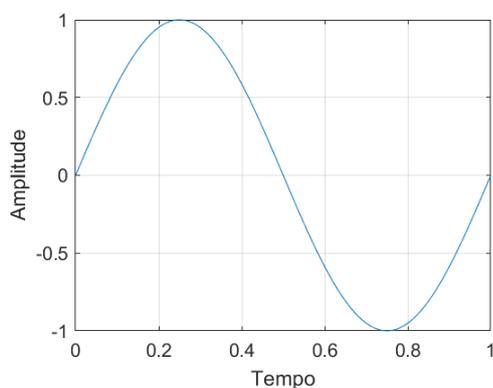


Figura 16 – Gráfico de uma Função Senoidal de 1Hz no Domínio do tempo

Ao esboçarmos o mesmo gráfico analisando a amplitude do sinal em função da frequência, teremos:

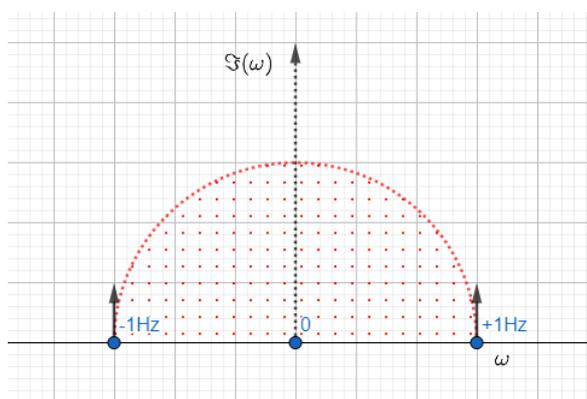


Figura 17 – Gráfico de uma Função Senoidal de 1Hz no Domínio da Frequência

Se tomarmos uma frequência de 100Hz, significa 100 oscilações em um segundo, contudo estamos trabalhando com frequências na ordem de  $10^6$ Hz, ou seja, 1.000.000 oscilações em um segundo. Então para a terceira frequência no quadro 1, teremos  $A = \text{sen}(2\pi 88,7 \cdot 10^6(t))$ .

$$t_1 = \frac{1}{f} = \frac{1}{88,7 \cdot 10^6} = 1,12 \cdot 10^{-8} \text{segundos}$$

Podemos perceber as dificuldades para analisar as duas leituras na mesma tela. Ao observar a ordem de grandeza dos períodos, a terceira frequência no quadro

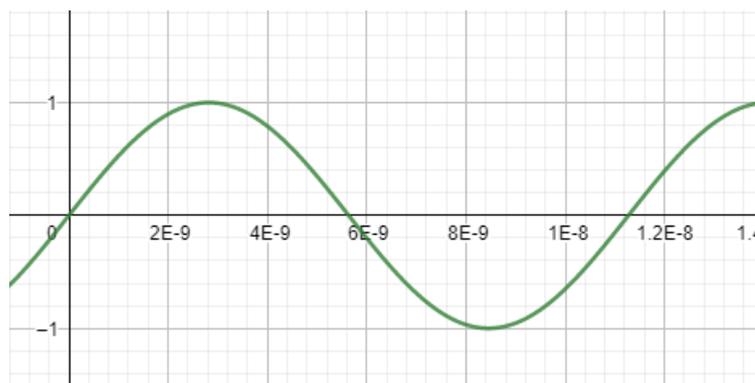


Figura 18 – Gráfico de uma Função Senoidal para Frequência 88,7MHz

terá 88.700.000 oscilação enquanto a frequência de 1Hz terá somente uma oscilação. Já para a frequência majorante neste intervalo  $[87, 1; 107, 3]$ MHz teremos um período fundamental de  $t_{25} = 9,31 \cdot 10^{-9}$  segundos que ainda é menor que o período da primeira frequência neste intervalo. Ou seja, cerca de 1,20 vezes menor, desta forma estas diferenças de tempo em cada frequência impossibilita analisar um conjunto de frequências com ordens de grandezas diferentes em uma mesma tela.

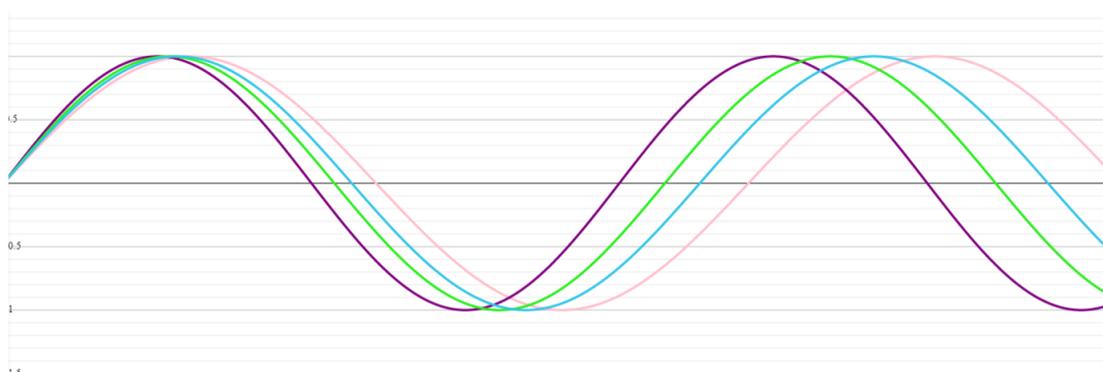


Figura 19 – Comparação de Quatro Frequências distintas do FM

No gráfico 19 plotamos 4 frequências sendo em roxo 107,3MHz, em verde 99,9MHz, em azul 94,9MHz e em lilás 88,7MHz, a maior frequência  $f = 107,3$ MHz em roxo tem o menor comprimento de onda  $\lambda_{25}$ , já a menor frequência  $f = 88,7$ MHz tem o maior comprimento de onda  $\lambda_3$ .

Estas dificuldades para analisar no domínio do tempo podem ser facilmente superadas, ao analisar no domínio da frequência. Isto porque nas abscissas nas quais até o momento têm os valores de tempo de forma crescente, será convertido para o domínio da frequência e também terá um comportamento crescente. Com isso, ao começar uma leitura espectral, as primeiras frequências, as mais baixas estarão no início, e ao avançar no sentido crescente dos elementos do domínio, iremos navegando

para as frequências mais altas, isto sem distorcer a imagem e/ou necessitar de ajustes constantes.

Para esta conversão dos domínios utilizamos a Transformada de Fourier 3.4, vamos chamar a variável  $x$  da equação como o tempo  $t$ , e  $\xi$  como frequência angular  $w = 2\pi f$ , para podermos fazer a conversão dos domínios.

$$\mathfrak{S}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx \rightarrow \mathfrak{S}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt} dt \quad (4.1)$$

Vamos tomar inicialmente uma frequência fora do escopo do quadro 1, por exemplo a frequência  $f = 170,2\text{MHz}$ , e para esta frequência temos o período e seu gráfico no domínio do tempo.

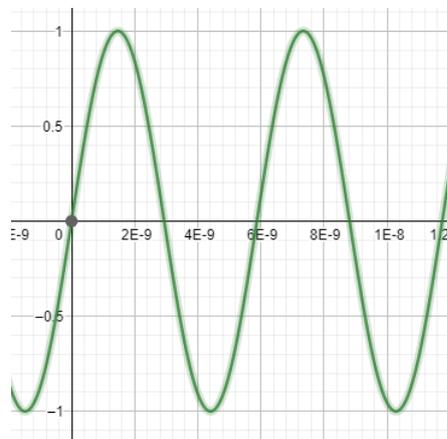


Figura 20 – Gráfico no Domínio do Tempo para 170,2MHz

$$t = \frac{1}{f} = \frac{1}{170,2 \cdot 10^6} = 5,87^{-9} \sim 5,9 \cdot 10^{-9} \text{segundos}$$

Agora calculamos a Transformada de Fourier para a função  $A = \text{sen}(2\pi 170,2 \cdot 10^6 t)$ .

$$\mathfrak{S}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}(w_0 t) e^{-iwt} dt \quad (4.2)$$

Pela definição 3 podemos escrever a exponencial. Como a frequência esta fixada, vamos usar  $w_0 = 170,2\text{MHz}$  como argumento do seno.

$$e^{-iw_0 t} = \cos(w_0 t) - i \text{sen}(w_0 t)$$

$$e^{iw_0 t} = \cos(w_0 t) + i \text{sen}(w_0 t)$$

$$\text{Logo: } e^{iw_0 t} - e^{-iw_0 t} = 2i \text{sen}(w_0 t).$$

$$\mathfrak{S}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sen}(w_0t) e^{-iwt} dt = \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt} [e^{iw_0t} - e^{-iw_0t}] dt$$

$$\mathfrak{S}(w) = \frac{-i}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt} [e^{iw_0t} - e^{-iw_0t}] dt = \frac{-i}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt} e^{iw_0t} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt} e^{-iw_0t} dt \right] = \frac{-i}{2} [\delta(w - w_0) + \delta(w + w_0)]$$

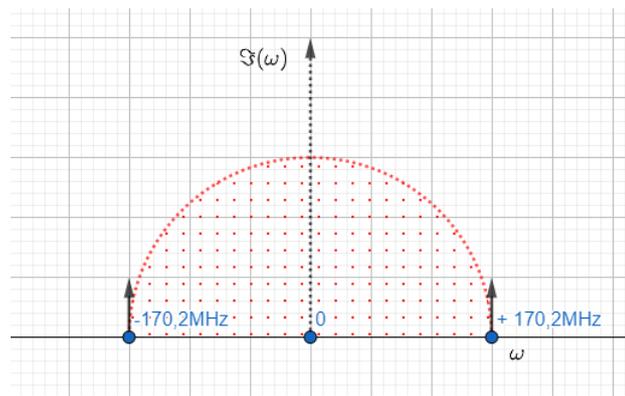


Figura 21 – Gráfico no Domínio da Frequência para 170,2MHz

A expressão  $[\delta(w - w_0) + \delta(w + w_0)]$  é conhecida como **Delta de Dirac**, matematicamente é uma função impulso unitário, cujo o valor da integral neste impulso é 1. Essa função caracteriza um evento que ocorre em curto intervalo de tempo, que possui alta energia em um instante muito pequeno de tempo. [4]

Com a conversão é possível separar os sinais que estão agrupados para análises individuais em cada frequência, por exemplo pode-se separar a frequência portadora de um sinal da frequência dos sinais de dados. Abaixo temos uma imagem coletada em um equipamento de varredura, para a mesma frequência calculada.

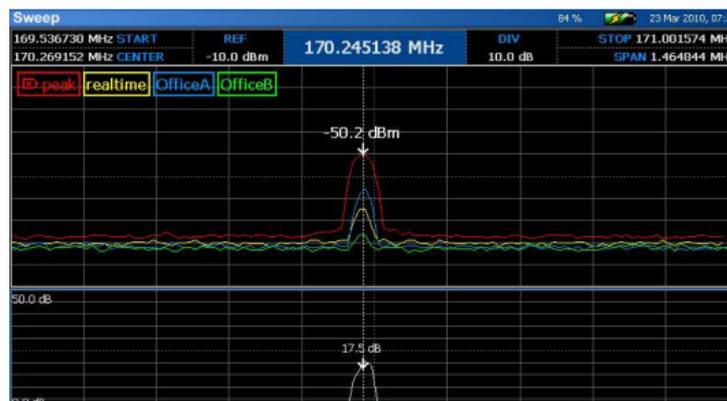


Figura 22 – Gráfico no Domínio da Frequência para 170,2MHz - Empírico

Desta forma é possível calcular a Transformada de Fourier para cada frequência no quadro 1. Com isso, as frequências serão apresentadas de forma crescente e individualizada. Então cada frequência será um pulso na tela.



Figura 23 – Leitura do Espectro FM

Conforme enumerado na imagem e no quadro 1, em cada pulso podemos expandir a frequência e fazer uma análise individualizada, pesquisando algum sinal de ruído e ou interferência.

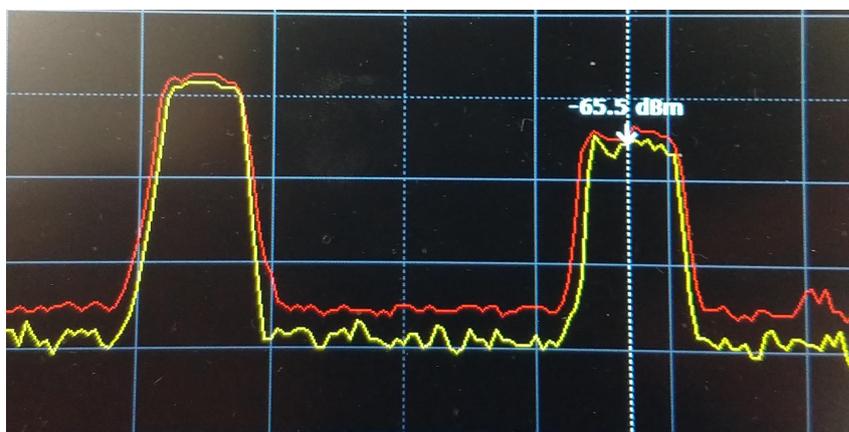


Figura 24 – Leitura do Espectro FM - Expandido em duas Frequências

Este tipo de análise não seria possível de realizar no domínio do tempo, porque as frequências estariam sobrescritas, e dependendo da ordem de grandeza algumas nem seriam plotadas. Porque em FM estamos trabalhando com a ordem de  $10^6$  Hz, já para as frequências de 5G estaremos trabalhando com a ordem de  $10^{10}$  Hz. Então exigiria mais tempo de varredura e ajustes na linha de tempo, para cada ordem de grandeza.

## 5 CONCLUSÃO

O presente trabalho foi elaborado em capítulos e seções, sendo estruturado de forma descentralizada, no qual cada capítulo e seção detalhou todos os elementos necessários para explicar cada conceito e justificar os argumentos expostos. Desta forma o texto se completa com a aplicação dos conhecimentos expostos, em comparação com medições realizadas em campo, para o espectro eletromagnético das frequências moduladas *FM*.

Apresentamos no capítulo 4 a aplicação prática da Transformada de Fourier e as facilidades de compreensão, que seria inviável em uma análise no tempo pelos motivos apresentados no capítulo anterior.

Portanto todo o conteúdo introdutório é uma base para apresentar a Transformada de Fourier. Então iniciamos com as Séries de Fourier, desde a sua motivação inicial, argumentação teórica, condições de convergência até os exemplos.

As Séries de Fourier se mostraram muito úteis para a conversão de funções com alto grau de complexidade para trabalhar integrais, derivadas, e também manipulações em geral, em séries que permitem cálculos mais fáceis. Todavia, as Séries de Fourier possuem a limitação para sinais periódicos, no corpo do texto trabalhamos com o período  $[-L, L]$ , e do ponto de vista prático, encontramos na natureza sinais não periódicos e periódicos. Isto porque mesmo que um sinal possua a característica oscilatória, para utilizarmos as Séries de Fourier deve ter duração definida para uma soma discreta, e muitas vezes, necessitamos expandir esse intervalo em uma soma contínua.

Observando as frequências relacionadas no capítulo 4, no domínio do tempo se estendem a intervalos muito curtos com grandes oscilações. Então se selecionarmos uma janela específica, estaríamos analisando o sinal em um intervalo contínuo, tendendo-se ao infinito pelo quantidade de amostras.

Para contornarmos esse problema, expandimos o período  $2L$ , com  $L \rightarrow \infty$ , e conceituamos as Transformadas de Fourier que é muito utilizada nos equipamentos Correlacionadores Omni-Espectral de Frequências. Este recurso pode representar sinais por uma soma infinitesimal de exponenciais complexas, ou seja, uma soma de senoides na qual a principal diferença é a sua aplicação em sinais não periódicos ou soma em uma intervalo contínuo. Estes sinais possuem as variações em diferenças muito pequenas de forma infinitesimal.

No quadro 1 trabalhamos com frequências da ordem  $10^6$ Hz, mas em varreduras

espectrais estes valores somente aumentam, e os comprimentos de onda  $\lambda$  que citamos no capítulo anterior, da ordem de  $10^{-9}$ m, tendem a números sempre menores (oscilações infinitesimais).

Desta forma, a grande vantagem nestas análises por Transformadas de Fourier se deve ao fato de alterarmos o domínio do tempo que é extenso tendendo ao infinito, para um único sinal no domínio da frequência que limita a um intervalo específico e limitado. E, com isso, possibilita analisar um espectro de 0Hz a 30GHz somente navegando no eixo das abscissas (eixo das frequências), proporcionando análise de diversas frequências em uma mesma tela, e ou expandir o intervalo desta frequência para observar comportamentos deformatórios e ou sinais clandestinos de interferência.

A Transformada de Fourier trabalha no espectro contínuo, como as Séries de Fourier possuem período de duração  $x[t]$  discreto, o método utilizado foi estender este período para  $[-\infty, \infty]$ . Com isso não faz muita diferença se o sinal analisado é periódico ou não, porque um sinal com período  $2\infty$  pode ser entendido como um sinal não periódico. Pela imagem abaixo podemos determinar o período, sendo a amplitude maior no centro de duas amplitudes menores. No gráfico observamos um sinal periódico, então com o janelamento podemos separar um intervalo para fazer a conversão para o domínio do tempo.

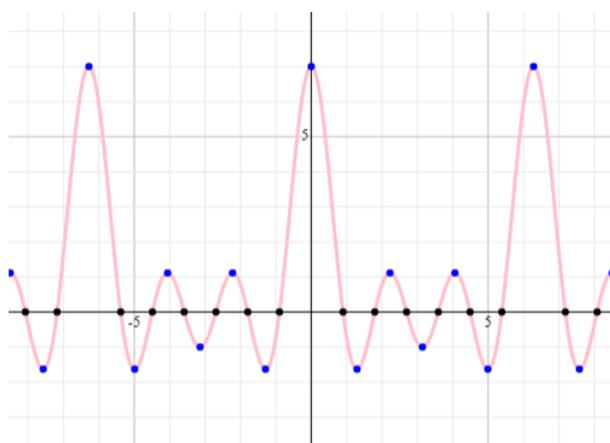


Figura 25 – Gráfico de um Sinal Contínuo da Transformada de Fourier para  $[0, 2\pi]$

Apesar da conversão dos domínios possibilitar uma facilidade na leitura das frequências, se for preciso fazer uma análise mais intrínseca a partir de sinais já coletados, o desconhecimento da equação que gera o sinal tornaria difícil determinar de forma analítica (as integrais e os somatórios que produzem o espectro), então a partir de uma leitura fazer o caminho inverso e voltar para o domínio do tempo pode ser uma tarefa complexa.

Portanto, nesse texto focamos em estudar as Séries de Fourier e a Transformada de Fourier, apresentando conceitos, características e aplicação. Contudo, esse

conteúdo foi introdutório e já serve como base para a análise e a interpretação em um equipamento de varredura espectral, como também para o melhor entendimento sobre as imagens coletadas e apresentadas na tela do equipamento.

Sendo assim, em um segundo trabalho vamos expandir para as Transformadas Discreta de Fourier TDF, que explica como os computadores processam um sinal ou como os equipamentos de varredura processam cada frequência detectada. Qualquer meio computacional trabalha somente com sinais discretos, e como podemos recuperar um sinal discreto  $x[n]$  de um sinal desconhecido  $x(t)$ . Para isto, é necessário técnicas eficazes e eficientes para determinar as Transformadas de Fourier a partir de qualquer sinal, adquirido de forma empírica.

Ao tomarmos um sinal qualquer, devemos buscar uma amostra, ou seja, tomando este sinal em um período  $t$ , ao retirarmos uma amostra vamos utilizar  $t/n$  onde  $n \in \mathbb{N}^*$ . Em seguida o sinal é analisado em um tempo de análise, que é a janela de amostragem.

Outra técnica que será trabalhada em outra oportunidade será a Transformada Rápida de Fourier, que reduz o número de operações buscando o mesmo resultado. Se observarmos que a FFT teve início com aplicação em massa a partir de 1960, os dispositivos tinham um poder de processamento considerado baixo se comparado ao atual. Atualmente, mais de 60 anos depois do seu início, com equipamentos menores e alto poder de processamento a FFT é muito usada em diversas áreas da Engenharia.

A FFT foi idealizada para tornar a TDF mais eficiente, segundo seus criadores J.W. Cooley e J.W. Tukey, que trabalhava na IBM durante a Guerra Fria e tinha como objetivo principal criar equipamentos portáteis capazes de fazer leituras espectrais. Desenvolveram então um conjunto de algoritmos capaz de realizar as mesmas operações da TDF, de forma mais eficiente. Desta forma a FFT não é uma transformada nova, sendo somente uma forma mais eficiente de trabalhar com a TDF.

## REFERÊNCIAS

[1] Felipe Felix Souto e Marta Cilene G.: **Sobre séries de Fourier.**

In: Revista Eletrônica Paulista de Matemática - 2016 8, Nr.1, S.1– 15.– URL

<https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v08a04-sobre-series-de-fourier.pdf> .– ISSN2316-9664 Citado 3 vezes nas páginas 13, 31 e 36.

[2] William E. BOYCE e Richard C. D.: **Equações diferenciais elementares e**

**problemas de valores de contorno** -2010. Bd. Nona Edição. LTC. – ISBN978-5-216-1756-3 Citado na página 14.

[3] Djairo Guedes de F.: **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais** -1977.

Bd. Nona Edição. Impa Citado 4 vezes nas páginas 28, 31 , 34 e 36.

[4] Nivaldo A. L.: **Três mitos sobre a “ função” delta de Dirac.** In: Revista Brasileira

de Ensino de Física-2011 1, Nr.1, S.1– 3. – URL <https://www.scielo.br/j/rbef/a/CHNzPzQHXYcqwjCwgRkhZv/?lang=pt&format=pdf> Citado na página 48.