O Teorema de Poincaré-Bendixson em variedades compactas bidimensionais sem bordo

de

Mateus Gomes Figueira

Departamento de Matemática
Universidade Federal de Minas Gerais

Fevereiro de 2020

Mateus Gomes Figueira

O Teorema de Poincaré-Bendixson em variedades compactas bidimensionais sem bordo

Versão final

Dissertação apresentada ao corpo docente de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Gilcione Nonato Costa

Belo Horizonte

Fevereiro de 2020

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende Costa CRB 6ª Região nº 1510

Figueira, Mateus Gomes.

F475t O teorema de Poincaré-Bendixson em variedades compactas bidimensionais sem bordo/ Mateus Gomes Figueira — Belo Horizonte, 2020.
vii,71 f. il.; 29 cm.

(Dissertação) - Universidade Federal de Minas Gerais – Departamento de Matemática.

Orientador: Gilcione Nonato Costa.

1. Matemática – Teses. 2. Variedades bidimensionais – Teses. 3. Campos vetoriais – Teses. 3. Schwartz, Espaços de -Teses. I. Orientador. II. Título.

CDU 51(043)

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

O Teorema de Poincaré-Bendixson em variedades compactas bidimensionais sem bordo

MATEUS GOMES FIGUEIRA

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Prof. Gilcione Nonato Costa
UFMG

Silas Luiz de Carvalho

Prof. Silas Luiz de Carvalho
UFMG

Sônia Pinto de Carvalho

Profa. Sônia Pinto de Carvalho
UFMG

Belo Horizonte, 11 de fevereiro de 2020.

Av. Antônio Carlos, 6627 – Campus Pampulha - Caixa Postal: 702
CEP-31270-901 - Belo Horizonte – Minas Gerais - Fone (31) 3409-5963
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br - home page: http://www.mat.ufmg.br/pgmat

Agradecimentos

Agradeço à Deus, pois sem ele nada do que é seria.

Aos meus pais, Alexandre e Rosana, pelas orações, pelo apoio, amor e incentivo.

Aos meus irmãos, Davi e Carolina, pela amizade, apoio e incentivo.

À minha família, principalmente aos meus avós Newton, Júlia, Lerci e Célia e minhas tias Rejane, Regina, Mônica e Raquel, por me dar conselhos, me apoiar e incentivar ao longo de todo este percurso.

Ao meu orientador Gilcione, por ser um exemplo de profissional dedicado e competente, além de uma pessoa maravilhosa e humilde, que me acolheu e acreditou em meu potencial desde o início.

À professora Sônia Pinto de Carvalho e aos professor Silas Luiz de Carvalho e Fabio Enrique Brochero Martinez, por aceitarem gentilmente ao convite de participar da banca deste trabalho.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFMG, que foram sempre muito atenciosos e incentivadores.

À Elisandra, por estar ao meu lado nos momentos bons e ruins.

Aos meus amigos e companheiros da Taberna do Dedé e da sala do mestrado 3027 do ICEX, que fizeram dos nossos dias juntos os melhores que poderiam ser.

À igreja no Rio e em Belo Horizonte, representada pelo Grupo Caseiro em Vila Kennedy e pela Igreja Batista da Lagoinha em Santo André, pelas orações, conselhos e amizade.

Ao Clube de Regatas Vasco da Gama, por ser o time do meu coração.

Às secretárias da pós graduação Andréa e Kelly, por toda dedicação e acolhimento.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Sejam X um campo vetorial de classe C^2 em uma variedade compacta bidimensional sem bordo M^2 e γ uma órbita de X. O objetivo deste trabalho é mostrar o Teorema de Schwartz, o qual afirma que se o conjunto limite $\omega(\gamma)$ não contém pontos singulares, então $\omega(\gamma)$ é uma órbita fechada ou $\omega(\gamma) = \mathbb{T}^2$ e, neste caso, $M^2 = \mathbb{T}^2$. Também será apresentado algumas aplicações desse Teorema, como: o Teorema de Denjoy e que; as órbitas de um campo de classe C^2 da forma $X = (X_1, X_2)$, com $X_1 \neq 0$, definido no toro são todas densas no toro se, e somente se, o número de rotação $\rho(f)$ for irracional.

Palavras-chave: Variedades bidimensionais. Campos vetoriais em variedades. Teorema de Schwartz.

Abstract

Let X be a vector field of class C^2 on bidimensional compact without boundary manifold M^2 and γ an orbit of X. The aim of this work is to show Schwartz's Theorem, which states that if the limit set $\omega(\gamma)$ has not singular points, then $\omega(\gamma)$ is either a closed orbit or $\omega(\gamma) = \mathbb{T}^2$, and in this case $M^2 = \mathbb{T}^2$. Also some applications of this Theorem will be presented as: Denjoy's Theorem and that; the orbits of a vector field of class C^2 of the form $X = (X_1, X_2)$, with $X_1 \neq 0$, definided on torus are dense on torus if, and only if, the rotation number $\rho(f)$ is irrational.

Keywords: Two-dimensional manifolds. Vector fields on manifolds. Schwartz's Theorem.

Sumário

Introdução

No estudo qualitativo do comportamento de fluxos gerados por equações diferenciais autônomas da forma $x' = f(x)$ em $\mathbb{R}^2$, contidos em um compacto com singularidades isoladas, o Teorema de Poincaré-Bendixson determina a estrutura de seus conjuntos limites. Mais precisamente

Teorema de Poincaré-Bendixson. *Seja $\varphi(t) = \varphi(t,p)$ uma curva integral de X, definida para todo $t \geq 0$, em que $X : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é campo vetorial de classe C^r, $r \geq 1$. Admitamos que a semi-órbita positiva γ_p^+ esteja contida em um compacto $K \subset \Delta$. Se X tem número finito de singularidades, então acontece uma das seguintes possibilidades:*

a) Se $\omega(p)$ contém somente pontos regulares, então $\omega(p)$ é uma órbita periódica.

b) Se $\omega(p)$ contém pontos regulares e singulares, então $\omega(p)$ consiste em um conjunto de órbitas, que tendem a um desses pontos singulares quando $t \to \pm\infty$.

c) Se $\omega(p)$ somente possui pontos singulares então $\omega(p) = \{q\}$, onde q é ponto singular.

Henri Poincaré estudou a teoria qualitativa das equações diferenciais e foi um dos pioneiros nesse assunto. O Teorema acima, no caso em que as funções coordenadas de X são analíticas, foi demonstrado em 1881-1886 por Poincaré em [10]. Em 1901, Ivar Bendixson em [1] enfraqueceu as hipóteses e demonstrou esse Teorema na sua forma final.

O Teorema de Poincaré-Bendixson se estende naturalmente do plano $\mathbb{R}^2$ para a esfera $\mathbb{S}^2$, o que nos leva a questionar quais seriam os tipos de estrutura dos conjuntos limites de fluxos gerados por sistemas autônomos em variedades bidimensionais compactas sem bordo.

Este trabalho tem por objetivo demonstrar o Teorema de Schwartz, provado em [12] em 1963, que é a uma versão do Teorema de Poincaré-Bendixson em variedades compactas diferenciáveis sem bordo para fluxos de classe C^2 que afirma que, nestas condições, se o conjuto ω-limite não possui pontos singulares, então $\omega(\gamma)$ é uma órbita fechada ou é o toro $\mathbb{T}^2$, e neste caso, a variedade em questão é o próprio toro. Um fato interessante é que em 1954, Felix Haas enunciou e provou um Teorema equivalente a este em [3], porém em [9], Maurício Peixoto em 1961 mostrou que a prova dada por Haas estava incorreta. Em [2], há um relato histórico desse Teorema e alguns resultados relacionados, como o Teorema de Poincaré-Bendixson para semi-fluxos.

No Capítulo 1, apresentaremos alguns conceitos de espaços métricos e demonstraremos os Teoremas de existência e unicidade, o intervalo maximal de definição das soluções, e mostraremos a continuidade e diferenciabilidade das soluções em relação as condições iniciais.

No Capítulo 2, começamos demonstrando o Teorema de Poincaré-Bendixson no plano. Em seguida, introduziremos a noção de variedade diferenciável e algumas aplicações para concluir o Teorema de Poincaré-Bendixson na esfera. Terminaremos esse Capítulo mostrando que no toro, pode ocorrer que o conjunto ω-limite de uma órbita seja todo o toro, e concluiremos que não será possível estendermos o Teorema de Poincaré-Bendisxon para toda variedade diferenciável compacta sem bordo de maneira totalmente análoga ao caso do plano e da esfera.

Por último, no Capítulo 3, apresentaremos a noção de índice e o Teorema de Poincaré-Hopf, que diz que a soma dos índices de um campo diferenciável com singularidades isoladas sobre uma variedade compacta diferenciável é igual a característica de Euler-Poincaré da variedade. Apresentaremos também o Teorema de classificação das variedades bidimensionais compactas sem bordo e definiremos recobrimento duplo orientado. Demonstraremos o Teorema de Schwartz e finalizaremos apresentando algumas aplicações desse Teorema, como o Teorema de Denjoy, que afirma que os conjuntos minimais possíveis de um fluxo de classe C^2 no toro são pontos singulares, órbitas periódicas, ou o próprio toro e; mostraremos que as órbitas de um campo de classe C^2 da forma $X = (X_1, X_2)$, com $X_1 \neq 0$, definido no toro são todas densas no toro se, e somente se, o número de rotação $\rho(f)$ for irracional.

CAPÍTULO 1

Conceitos Básicos

Iniciaremos nossos estudos apresentando alguns resultados sobre equações diferenciais. Apresentaremos alguns resultados de espaços métricos, necessários para que possamos demonstrar os Teoremas de existência e unicidade. Por último, será demonstrado a continuidade e diferenciabilidade dos fluxos gerados pelas equações diferenciais.

1.1 Conceitos sobre Espaços Métricos

Definição 1.1. *Seja H um conjunto qualquer. Uma função $d : H \times H \to \mathbb{R}$ é uma métrica sobre H se*

1) $d(x,y) \geq 0, \ \forall x,y \in H \quad e \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$

2) $d(x,y) = d(y,x) \ \forall x,y \in H;$

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y), \ \forall x,y,z \in H$ *(Desigualdade Triangular).*

Denotamos (H,d) o espaço métrico com métrica d. Quando não houver ambiguidade, denotaremos apenas por H.

Exemplo 1.2. Vejamos agora alguns exemplos de espaços métricos.

1. Se $H = \mathbb{R}$, então $d(x,y) = |x-y|$ é uma métrica.

2. Se $H = \mathbb{R}^n$, então $d(x,y) = |x-y|$, onde $|\cdot|$ é a norma euclidiana, é uma métrica.

3. Seja $\mathcal{C}[a,b]$ o conjunto das funções $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tal que
$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)),$$
onde f_j é contínua, para $j = 1,2,...,n$. Como $f \in \mathcal{C}[a,b]$ e $||f||_\infty = \sup_{a \leq t \leq b} \sum_{j=1}^{n} |f_j(t)|$, uma métrica em $H = \mathcal{C}[a,b]$ é a dada por $d(f,g) = ||f-g||_\infty$.

Definição 1.3. *Sejam (H, d) um espaço métrico e $\{x_n\}$ uma sequência de pontos de H. A sequência $\{x_n\}$ é dita convergente se existe algum $x \in H$ tal que, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, se $n > n_0$ então $d(x_n, x) < \varepsilon$. E denotamos esse ponto com $\lim x_n = x$.*

Definição 1.4. *Uma sequência $\{x_n\}$ de H é dita de Cauchy se, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m > n_0$ então $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.*

Definição 1.5. *Um espaço métrico H é dito completo se toda sequência de Cauchy converge para algum ponto $x \in H$.*

Observação 1.6. Os espaços métricos dados nos exemplos **1**, **2** e **3** são completos.

Definição 1.7. *Sejam (H_1, d_1) e (H_2, d_2) espaços métricos. Uma aplicação $f : H_1 \to H_2$ é dita lipschitziana se existe uma constante $k > 0$ tal que*

$$d_2(f(x), f(y)) \leq k d_1(x, y), \quad \forall x, y \in H_1$$

Definição 1.8. *Seja (H, d) um espaço métrico completo. Uma aplicação $F : H \to H$ é dita uma contração se existe uma constante $K \in \mathbb{R}$, com $0 \leq K < 1$ tal que, dados $x, y \in H$ então*

$$d(F(x), F(y)) \leq K d(x, y).$$

Um ponto $p \in H$ é dito ponto fixo de F se $F(p) = p$. Se ainda, ocorrer $F^n(x) \to p$ quando $n \to \infty$ para qualquer $x \in H$, o ponto p é dito atrator de F, onde $F^n(x)$ é definido por $F^1(x) = F(x)$ e $F(F^{n-1}(x))$, se $n > 1$.

Os próximos resultados serão de suma importância para que possamos provar os Teoremas de existência e unicidade.

Lema 1.9 (Teorema do Ponto Fixo de Banach)**.** *Sejam (H, d) um espaço métrico completo e $F : H \to H$ uma contração. Existe um único ponto fixo p, isto é, $F(p) = p$. Além disso, p é ponto atrator de F.*

Demonstração. Existência: Sejam $x \in H$ e $x_n = F^n(x)$. Provaremos que x_n é de Cauchy. De fato, $d(x_{n+r}, x_n) \leq K^n d(x, x_r)$ e

$$d(x, x_r) \leq d(x, F(x)) + d(F(x), F^2(x)) + \cdots + d(F^{r-1}(x), F^r(x)) \leq$$

$$\leq (1 + K + K^2 + \cdots + K^{r-1}) d(x, F(x)).$$

Portanto,

$$d(x_{n+r}, x_n) \leq K^n (1 + \cdots + K^{r-1}) d(x, F(x)) \leq K^n d(x, F(x)) \sum_{i=0}^{\infty} K^i \leq \frac{K^n}{1-K} d(x, F(x)).$$

Logo a sequência $\{x_n\}$ é de Cauchy e portanto convergente. Provaremos que $\lim x_n = p$ é ponto fixo de F. Para isso, basta observar que

$$F(p) = F(\lim x_n) = \lim F(x_n) = \lim x_{n+1} = p.$$

Unicidade: Sejam p e q dois pontos fixos. Vejamos que

$$d(p,q) = d(F(p), F(q)) \leq Kd(p,q),$$

o que implica que $d(p,q) = 0$, onde $p = q$. ■

Corolário 1.10. *Seja (H,d) um espaço métrico completo. Se $F : H \to H$ é contínua e, para algum m, F^m é uma contração, então existe um único ponto fixo $p \in H$ de F. Mais ainda, p é um atrator de F.*

Demonstração. Seja p o ponto fixo atrator de F^m dado por **1.9**. Seja $n = mk + r$ com $0 \leq r < m$. Dado $x \in H$, como p é atrator de F^m, temos $[F^m]^k(F^r(x)) \to p$, quando $k \to \infty$ e para todo $0 \leq r < m$.

Assim, dado $\varepsilon > 0$, para cada $0 \leq r < m$ inteiro, escolhemos um inteiro $N_r \geq$ tal que

$$d([F^m]^k(F^r(x)), p) < \varepsilon,$$

para todo $k \geq N_r$. Finalmente, como $N_m = \max\{N_0, \ldots, N_{m-1}\}$, tomamos $N = m \cdot N_m$. Se $n \in \mathbb{N}$ satisfaz $n \geq N$, então $n/m \geq N/m = N_m$, de modo que podemos escrever $n = m \cdot k + r$, com $k \geq N_m$ e $0 \leq r < m$, temos

$$d(F^n(x), p) = d([F^m]^k(F^r(x)), p) < \varepsilon,$$

o que prova que $\lim F^n(x) = p$, quando $n \to \infty$.

Provaremos agora que $F(p) = p$. Com efeito, como F é contínua, temos

$$p = \lim F^n(F(p)) = \lim F^{n+1}(p) = \lim F(F^n(p)) = F(\lim F^n(p)) = F(p).$$

■

1.2 Equações Diferenciais

Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \subset \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua, onde Ω é um aberto de $\mathbb{R} \times U$, e $I \in \mathbb{R}$ um intervalo aberto de $\mathbb{R}$. Dizemos que $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ é uma *solução da equação*

$$x' = \frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{1.2.0.1}$$

quando

1. o gráfico de φ em I está contido em Ω, isto é, $(t, \varphi(t))$ pertence a Ω para todo $t \in I$ e;

2. $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ para todo $t \in I$.

Dado um ponto $(t_0, x_0) \in \Omega$, um *problema de valor inicial* (PVI), é uma equação diferencial como em (1.2.0.1) com a exigência adicional de que toda solução $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ tenha a propriedade de que $\varphi(t_0) = x_0$. Denotamos o problema de valor inicial por

$$x' = f(t,x), \;\; x(t_0) = x_0. \tag{1.2.0.2}$$

1.2.1 Teoremas de Existência e Unicidade

Agora provaremos os Teoremas de existência e unicidade de soluções dos problemas de valor inicial.

Definição 1.11. *Seja $f : I \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação. Dizemos que f é Lipschitziana na segunda variável, se existe uma constante $K > 0$ tal que, para todos $x, y \in U$ e $t \in I$,*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq K|x - y|.$$

Teorema 1.12 (Picard). *Seja f contínua e Lipschitziana na segunda variável em $\Omega = I_a \times B_b$, onde $I_a = \{t \in \mathbb{R}\,;\, |t - t_0| \leq a\}$ e $B_b = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, |x - x_0| \leq b\}$. Se $|f| \leq M$ em Ω, existe uma única solução $\varphi(t)$ de*

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

definida em I_α, onde $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$.

Demonstração. Seja $X = \mathcal{C}(I_\alpha, B_b)$ o espaço métrico completo das funções contínuas $\varphi : I_\alpha \to B_b$, com a métrica uniforme

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{t \in I_\alpha} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|.$$

Para $\varphi \in X$, seja $F(\varphi) : I_\alpha \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$F(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds,$$

$t \in I_\alpha$. Destacamos as seguintes propriedades de F:

1. $F(X) \subseteq X$

2. F^n é uma contração, para n suficientemente grande.

De fato, para todo $t \in I_\alpha$,

$$\big|F(\varphi)(t) - x_0\big| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))ds\right| \leq M\alpha \leq b.$$

Isto prova 1. Quanto a 2, para todo par $\varphi_1, \varphi_2 \in X$ e todo $n \geq 0$ temos

$$\big|F^n(\varphi_1)(t) - F^n(\varphi_2)(t)\big| \leq \frac{K^n|t - t_0|^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2), \;\; t \in I_\alpha, \tag{1.2.1.1}$$

onde K é a constante de Lipschitz de f. Verificamos essa desigualdade por indução em n. Para $n = 0$, (1.2.1.1) é claramente válida. Suponhamos que seja válida para k, então para $k + 1$, temos

$$\begin{aligned}
\left|F^{k+1}(\varphi_1)(t)-F^{k+1}(\varphi_2)(t)\right| &= \left|F(F^k(\varphi_1))(t)-F(F^k(\varphi_2))(t)\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t}\left|f(s,F^k(\varphi_1)(s))-f(s,F^k(\varphi_2)(s))\right|ds\right| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t}K\left|F^k(\varphi_1)(s)-F^k(\varphi_2)(s)\right|ds\right| \\
&\leq K\left|\int_{t_0}^{t}\frac{K^k(t_0-s)^k}{k!}d(\varphi_1,\varphi_2)ds\right| \\
&= \frac{K^{k+1}|t-t_0|^{k+1}}{(k+1)!}d(\varphi_1,\varphi_2).
\end{aligned}$$

Portanto, $d(F^n(\varphi_1),F^n(\varphi_2)) \leq \dfrac{K^n\alpha^n}{n!}d(\varphi_1,\varphi_2)$ e, para n suficientemente grande, $\frac{K^n\alpha^n}{n!}<1$, e concluímos que F^n é uma contração de X. Pelo Corolário do Lema da Contração, existe uma única φ tal que $F(\varphi)=\varphi$, e isto prova o Teorema. ■

Corolário 1.13. *Sejam Ω aberto em $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ e $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$ contínua, com D_2f também contínua. Para todo ponto $(t_0,x_0)\in\Omega$, existe uma vizinhança $V=I(t_0)\times B(x_0)$ tal que $x'=f(t,x)$, $x(t_0)=y_0$ tem uma única solução em $I(x_0)$. Além disso, o gráfico desta solução está contido em V.*

Demonstração. Como D_2f é contínua, seja U uma vizinhança de (t_0,x_0) tal que $f|_U$ é lipschitziana na segunda variável e $|f|\leq M$ em U. Seja $\alpha>0$ suficientemente pequeno para que $V=I_\alpha(t_0)\times B_b(x_0)\subseteq U$, onde $b=\alpha M$. Concluímos o argumento aplicando o Teorema **1.12**. ■

Dada a solução φ do problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'=f(t,x) \\ x(t_0)=x_0 \end{cases},$$

onde $f(t,x)$ satisfaz as hipóteses do corolário **1.13**, sabemos que esta solução está definida em $I_\alpha(x_0)$. Uma pergunta natural a se fazer é se é possível estender o intervalo de definição de φ, de modo que esta continue sendo solução. Os resultados à seguir nos informam sobre o intervalo maximal de definição da solução e que, sob algumas hipóteses, este intervalo maximal é $\mathbb{R}$.

Teorema 1.14. *Seja f como no corolário **1.13**. Então para todo $(t_0,x_0)\in\Omega$ existe uma única solução $\varphi=\varphi(t,t_0,x_0)$ de $x'=f(t,x)$, $x(t_0)=x_0$, que é definida em um intervalo $M(t_0,x_0)=(\omega_-(t_0,x_0),\omega_+(t_0,x_0))$ maximal, isto é, toda solução ψ de $x'=f(t,x)$, $x(t_0)=x_0$ em um intervalo I satisfaz $I\subseteq M(t_0,x_0)$ e $\psi=\varphi|_I$.*

Demonstração. Mostraremos que $M(t_0,x_0)=\cup I_\psi$, onde I_ψ é o intervalo de definição de alguma solução ψ de $x'=f(t,x)$, $x(t_0)=x_0$ e isto completa a demonstração. Se $t\in I_\psi$, definimos $\varphi(t)=\psi(t)$. Esta definição não depende de ψ, pois o conjunto $C=\{t\in I_{\psi_1}\cap I_{\psi_2};\ \psi_1(t)=\psi_2(t)\}$ é não-vazio ($t_0\in C$), fechado e aberto em $I_{\psi_1}\cap I_{\psi_2}$, e como

$I_{\psi_1} \cap I_{\psi_2}$ é conexo, segue-se que $C = I_{\psi_1} \cap I_{\psi_2}$: C é fechado, pois $C = (\psi_1 - \psi_2)^{-1}(0)$ e C é aberto porque, para todo ponto $t' \in C$, C contém $I(t', \psi_1(t')) \cap I(t', \psi_2(t'))$, o qual é aberto. ■

Definição 1.15. *Sejam K e H subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}^n$. Definimos a distância entre H e K, denotada por $dist(K, H)$ como*

$$dist(K, H) = \inf_{x \in K,\, y \in H} |x - y|.$$

Lema 1.16. *Sejam $K \neq \emptyset$ um conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ e $H \neq \emptyset$ um conjunto fechado de $\mathbb{R}^n$ tais que $K \cap H = \emptyset$. Então $dist(K, H) > 0$.*

Demonstração. Suponhamos por absurdo que $dist(K, H) = 0$. Então, existem duas sequências $\{x_n\} \subset K$ e $\{y_n\} \subset H$ tais que $\lim |x_n - y_n| = 0$. Como K é compacto, existe uma subsequência de $\{x_n\}$, digamos $\{x_{n_k}\}$, tal que $\lim x_{n_k} = x_0 \in K$. Portanto,

$$0 = \lim |x_{n_k} - y_{n_k}| = \lim |x_0 - y_{n_k}|.$$

Logo, $\lim y_{n_k} = x_0$ e como H é fechado, temos que $x_0 \in H$ o que é um absurdo, pois $K \cap H = \emptyset$. ■

Teorema 1.17. *Seja $f(t, x)$ que satisfaça as hipóteses do Corolário **1.13** em um domínio Ω contido em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Seja ainda $x = x(t)$ a única solução de $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ definida no intervalo maximal (ω_-, ω_+). Se ω_+ é finito e K é qualquer compacto contido em Ω, existe um $\varepsilon > 0$ tal que o ponto $(t, x(t))$ não pertence a K se $t > \omega_+ - \varepsilon$. Fato análogo ocorre se ω_- é finito.*

Demonstração. Sejam $K \subset \Omega$ um compacto e $H = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \setminus \Omega = \Omega^c$, fechado por definição. Temos, pelo lema anterior, que

$$d(K, \Omega^c) = \inf_{x \in K,\, y \in \Omega^c} |x - y| = p > 0;$$

então, se $(t, x) \in K$ for tal que

$$|(t_0, x_0) - (t, x)| < p, \;\; (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

concluímos que (t, x) pertence a Ω.

Seja K^* o conjunto dos pontos $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tais que $dist(K, (t, x)) \leq p/2$. Então K^* é compacto, pois é fechado e limitado, $K \subset K^*$ e $K^* \subset \Omega$. Portanto, como $D_2 f$ é contínua, existem constantes positivas m e k tais que

$$|f(t, x)| \leq m \quad \text{e} \quad |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq k|x_1 - x_2|,$$

para todos os pontos (t, x), (t, x_1) e (t, x_2) em K^*. Tomamos $a > 0$ e $b > 0$ tais que $a + b < p/2$. Portanto, dado qualquer ponto $(t_0, x_0) \in K$, pelo Teorema **1.12**, a solução de $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ está definida para $|t - t_0| < \alpha := \min\{a, b/m\} < p/2$.

Suponhamos que dada a solução $x(t)$, esta tenha a propriedade de que $(t_1, x(t_1))$ está em K para algum valor de $t_1 > \omega_+ - \alpha$. Então pela unicidade de $x(t)$, ela deve coincidir com a solução $x = \varphi(t)$ com condição inicial $\varphi(t_1) = x(t_1)$, que estará definida para $|t - t_1| < \alpha$. Assim $\omega_+ < t_1 + \alpha$, e isso é um absurdo pois contradiz a hipótese de (ω_-, ω_+) ser maximal e fica provado o Teorema. ■

Corolário 1.18. *Dada a equação $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$, onde f satisfaz as condições do Corolário **1.13**, com única solução $\varphi(t)$ contida em um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ para todo $t \in (\omega_-, \omega_+)$, então $\omega_+ = \infty$ e $\omega_- = -\infty$.*

Demonstração. De fato, se $\omega_+ < \infty$ e dado $t_0 < \omega_+$, então $\{(t, \varphi(t));\ t_0 \leq t < \omega_+\}$ pertence a $[t_0, \omega_+] \times K$ que é compacto, contrariando o Teorema anterior. ■

1.2.2 Continuidade e diferenciabilidade das soluções em relação as condições iniciais

Consideremos $f : U \to \mathbb{R}^n$, tal que $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, uma aplicação que satisfaça as hipóteses do Corolário **1.13**. Dado $(t_0, x_0) \in U$, a solução $x(t)$ do PVI

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases},$$

está definida no intervalo maximal $I(t_0, x_0)$. Ou seja, a solução $x(t)$ também depende de parâmetros $(t_0, x_0) \in U$. Seja

$$\Omega = \Big\{(t, t_0, x_0) | t \in I(t_0, x_0), (t_0, x_0) \in U\Big\} \subseteq \mathbb{R} \times U \subseteq \mathbb{R}^{n+2}.$$

Definimos a aplicação $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$, tal que $\varphi(t, t_0, x_0) = x(t)$ e $(t, t_0, x_0) \in \Omega$, com $(t_0, x_0) \in U$ e $t \in I(t_0, x_0)$. A aplicação φ está bem definida em Ω e, fixando $(t_0, x_0) \in U$, o caminho $t \mapsto \varphi(t, t_0, x_0)$ é a solução maximal de $x' = f(t,x)$, $x(t_0) = x_0$. Denominaremos por *fluxo* esta aplicação. Veremos que o fluxo das equações diferenciais são contínuos e diferenciáveis em Ω. Antes disso, definiremos a forma mais geral de φ, acrescentando um parâmetro a esta aplicação.

Definição 1.19. *Dizemos que*

$$x' = f(t, x, \lambda) = f_\lambda(t, x),$$

é uma família a um parâmetro $\lambda \in \Lambda \subseteq \mathbb{R}^k$ de equações diferenciais se $f : U \times \Lambda \to \mathbb{R}^m$ é uma aplicação com $U \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ e $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^k$ abertos. Um caminho derivável $\varphi : I \to \mathbb{R}^m$ é uma solução dessa equação diferenciável ordinária com parâmetro λ se $(t, \varphi(t)) \in U$ e, para algum $\lambda_0 \in \Lambda$ fixado,

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t), \lambda_0) = f_{\lambda_0}(t, \varphi(t))$$

para cada $t \in I$. Um problema de valor inicial dessa equação corresponde a fixarmos $(t_0, x_0) \in U$ e também exigirmos que $\varphi(t_0) = x_0$.

Se a derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ de f é contínua em $U \times \Lambda$, fixando $\lambda \in \Lambda$, a aplicação $g(t,x) = f(t,x,\lambda)$, definida no aberto U, é contínua e tem derivada parcial $\dfrac{\partial g}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ contínua em U. Pelo Teorema de existência e unicidade a solução do problema de valor inicial $x' = g(t,x)$, $x(t_0) = x_0$ possui uma única solução maximal $x(t)$, definida em um intervalo aberto $I(t_0,x_0,\lambda) = (\omega_-,\omega_+) \subseteq \mathbb{R}$. Escrevemos $I(t_0,x_0,\lambda) = I(t_0,x_0)$ e $\varphi(t,t_0,x_0,\lambda) = x(t)$, se $t \in I(t_0,x_0,\lambda)$, temos que o caminho $t \mapsto \varphi(t,t_0,x_0,\lambda)$ é solução maximal da equação com parâmetro $x' = f(t,x,\lambda)$, $x(t_0) = x_0$.

Assim o fluxo da equação diferencial com parâmetro $\lambda \in \Lambda$ está definido no conjunto

$$\Omega = \{(t,t_0,x_0,\lambda) |\, t \in I(t_0,x_0,\lambda),\ (t_0,x_0,\lambda) \in U \times \Lambda\} \subseteq \mathbb{R} \times U \times \Lambda,$$

e satisfaz $\varphi(t_0,t_0,x_0,\lambda) = x_0$ e

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,t_0,x_0,\lambda) = f(t,\varphi(t,t_0,x_0,\lambda),\lambda),$$

para cada $(t,t_0,x_0,\lambda) \in \Omega$.

Teorema 1.20 (Continuidade)**.** *Sejam $f : U \times \Lambda \to \mathbb{R}^n$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x} : U \times \Lambda \to M(n)$ são aplicações contínuas no aberto $U \times \Lambda \subseteq \mathbb{R}^{n+k+1}$, em que $M(n)$ é o conjunto das matrizes $n \times n$. Então a solução $\varphi(t,t_0,x_0,\lambda)$ de $x' = f(t,x,\lambda)$ é contínua no aberto Ω.*

Demonstração. Fixemos um ponto $(t_0,x_0,\lambda_0) \in U \times \Lambda$ qualquer. Seja $x : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ a solução de $x' = f(t,x,\lambda_0)$, $x(t_0) = x_0$, com $a < t_0 < b$ e $[a,b] \subseteq (\omega_-,\omega_+)$. Assim,

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s),\lambda_0)ds \tag{1.2.2.1}$$

para quaisquer $a \leq t, t_0 \leq b$. Como $\big\{(t,x(t),\lambda_0);\, a \leq t \leq b\big\} \subseteq U \times \Lambda$ é compacto e $U \times \Lambda$ é aberto, podemos tomar $\delta_1 > 0$ tal que

$$N_1 = \big\{(t,y,\lambda) \in \mathbb{R}^{n+k+1};\ \ a \leq t \leq b,\ |y - x(t)| + |\lambda - \lambda_0| \leq \delta_1\big\} \subseteq U \times \Lambda. \tag{1.2.2.2}$$

Dado que N_1 é compacto e, como $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $U \times \Lambda$, existe uma constante de Lipschitz $K > 0$ para f em N_1, ou seja,

$$\big|f(s,x,\lambda) - f(s,y,\lambda)\big| < K|x - y| \tag{1.2.2.3}$$

para quaisquer $(s,x,\lambda),(s,y,\lambda) \in N_1$ com coordenadas temporais e parâmetros iguais. Como f é contínua em $U \times \Lambda$, sabemos que f é uniformemente contínua em N_1 e, portanto, escolhemos δ tal que $0 < \delta < \frac{1}{2}\delta_1$ e

$$|f(s,x,\lambda) - f(s,y,\mu)| < \varepsilon = Ke^{-K(b-a)}\frac{1}{2}\delta_1 \tag{1.2.2.4}$$

para quaisquer (s,x,λ), $(s,y,\mu) \in N_1$ tais que $|x - y| + |\lambda - \mu| < \delta$. Definimos também

$$U_0 = \big\{(t,y,\lambda) \in \mathbb{R}^{n+k+1} |\, a < t < b,\ |y - x(t)| + |\lambda - \lambda_0| < \delta\big\} \subseteq N_1,$$

e observamos que $(t_0, x_0, \lambda_0) \in U_0$ e que $U_0 \subseteq \mathbb{R}^{n+k+1}$ é aberto. Para provarmos o Teorema, basta mostrarmos que $(a,b) \times U_0 \subseteq \Omega$ e que o fluxo φ de f é contínuo em $(a,b) \times U_0$.

Para isso, denotamos por

$$C_\delta = C((a,b) \times U_0,\ \ \mathbb{R}^n;\ \ N_1)$$

o espaço das aplicações contínuas $\psi : (a,b) \times U_0 \to \mathbb{R}^n$ tais que

$$\big(t, \psi(t, t_0, y, \lambda), \lambda\big) \in N_1$$

para cada $(t, t_0, y, \lambda) \in (a,b) \times U_0$. Como U_0 é aberto e N_1 é compacto, C_δ é um espaço métrico completo.

Agora, construiremos aproximações sucessivas em C_δ do fluxo de f, começando pela aplicação $\psi_0 : (a,b) \times U_0 \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$\psi_0(t, t_0, y, \lambda) = y + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s), \lambda_0) ds. \tag{1.2.2.5}$$

Usando (1.2.2.1), temos $\psi_0(t, t_0, y, \lambda) = y + x(t) - x(t_0)$ e segue que ψ_0 é contínua e

$$\big|\psi_0(t, t_0, y, \lambda) - x(t)\big| + |\lambda - \lambda_0| = |y - x(t_0)| + |\lambda - \lambda_0| < \delta < \frac{1}{2}\delta_1 \tag{1.2.2.6}$$

de modo que $(t, \psi_0(t, t_0, y, \lambda), \lambda) \in N_1$ para cada $(t, t_0, y, \lambda) \in (a,b) \times U_0$. Assim, estabelecemos que $\psi_0 \in C_\delta$.

Para cada $j \geq 1$, definimos recursivamente $\psi_j : (a,b) \times U_0 \to \mathbb{R}^n$ por

$$\psi_j(t, t_0, y, \lambda) = y + \int_{t_0}^{t} f(s, \psi_{j-1}(s, t_0, y, \lambda), \lambda) ds. \tag{1.2.2.7}$$

Para provarmos o Teorema, basta mostrarmos que cada $\psi_j \in C_\delta$ e que a sequência $\{\psi_j\}$ é de Cauchy em C_δ, pois então existe uma aplicação $\psi \in C_\delta$ tal que $\psi_j \to \psi$ em C_δ. Isso termina a demonstração, já que essa aplicação ψ é necessáriamente o fluxo φ de $x' = f(t, x, \lambda)$ restrito a $(a,b) \times U_0$. De fato, pela convergência uniforme, decorre de (1.2.2.7) que

$$\psi(t, t_0, y, \lambda) = y + \int_{t_0}^{t} f(s, \psi(s, t_0, y, \lambda), \lambda) ds$$

para cada $(t, t_0, y, \lambda) \in (a,b) \times U_0$ e, portanto, $(a,b) \times U_0 \subseteq \Omega$ e a restrição $\varphi|_{(a,b)\times U_0} = \psi \in C_\delta$ é uma aplicação contínua em $(a,b) \times U_0$.

Mostraremos que $\psi_1 \in C_\delta$. Primeiro, ψ_1 é contínua pois

$$\psi_1(t, t_0, y, \lambda) = y + \int_{t_0}^{t} f(s, \psi_0(s, t_0, y, \lambda), \lambda) ds,$$

isto é, ψ_1 é integral de composições de funções contínuas, portanto contínua. Agora de (1.2.2.4) e (1.2.2.6) garantimos que

$$\big|f(s, \psi_0(s, t_0, y, \lambda), \lambda) - f(s, x(s), \lambda_0)\big| < \varepsilon$$

para qualquer $(s, t_0, y, \lambda) \in (a, b) \times U_0$ e, portanto

$$\begin{aligned}
&\big|\psi_1(t, t_0, y, \lambda) - \psi_0(t, t_0, y, \lambda)\big| = \\
&\qquad = \left| y + \int_{t_0}^{t} f(s, \psi_0(s, t_0, y, \lambda), \lambda) ds - y - \int_{t_0}^{t} f(s, x(s), \lambda_0) ds \right| \\
&\qquad \leq \left| \int_{t_0}^{t} \big| f(s, \psi_0(s, t_0, y, \lambda), \lambda) - f(s, x(s), \lambda_0) \big| ds \right| \leq \varepsilon |t - t_0|
\end{aligned}$$

para qualquer $(t, t_0, x, \lambda) \in (a, b) \times U_0$. Dessa estimativa segue que

$$\begin{aligned}
&\big|\psi_1(t, t_0, y, \lambda) - x(t)\big| + \big|\lambda - \lambda_0\big| \leq \\
&\qquad \leq \big|\psi_1(t, t_0, y, \lambda) - \psi_0(t, t_0, y, \lambda)\big| + \big|\psi_0(t, t_0, y, \lambda) - x(t)\big| + \big|\lambda - \lambda_0\big| \\
&\qquad \leq \varepsilon |t - t_0| + \frac{1}{2}\delta_1 \leq \varepsilon (b - a) + \frac{1}{2}\delta_1 = \frac{K\delta_1}{2e^{K(b-a)}}(b - a) + \frac{1}{2}\delta_1 \\
&\qquad \leq \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_1 \leq \delta_1,
\end{aligned}$$

de modo que $(t, \psi_1(t, t_0, y, \lambda), \lambda) \in N_1$, para cada $(t, t_0, y, \lambda) \in (a, b) \times U_0$ e, concluímos que $\psi_1 \in C_\delta$. Com a desigualdade determinada anteriormente, temos

$$\begin{aligned}
&\big|\psi_2(t, t_0, y, \lambda) - \psi_1(t, t_0, y, \lambda)\big| \leq \\
&\qquad \leq \left| \int_{t_0}^{t} \big| f(s, \psi_1(s, t_0, y, \lambda), \lambda) - f(s, \psi_0(s, t_0, y, \lambda), \lambda) \big| ds \right| \\
&\qquad \leq \left| \int_{t_0}^{t} K \big| \psi_1(s, t_0, y, \lambda) - \psi_0(s, t_0, y, \lambda) \big| ds \right| \\
&\qquad \leq K \left| \int_{t_0}^{t} \varepsilon |s - t_0| ds \right| \\
&\qquad = \varepsilon K \frac{1}{2} |t - t_0|^2 \leq \frac{\varepsilon}{K} \frac{1}{2!} \big[K(b - a)\big]^2,
\end{aligned}$$

para qualquer $(t, t_0, x, \lambda) \in (a, b) \times U_0$.

De maneira análoga, provamos que dado $j \geq 1$ a aplicação ψ_j é contínua e que $(t, \psi_j(t, t_0, y, \lambda), \lambda) \in N_1$, de modo que $\psi_j \in C_\delta$, e também

$$\big|\psi_{j+1}(t, t_0, y, \lambda) - \psi_j(t, t_0, y, \lambda)\big| \leq \varepsilon K^j \frac{1}{(j + 1)!} |t - t_0|^{j+1}$$

para qualquer $(t, t_0, y, \lambda) \in (a, b) \times U_0$. Portanto, em C_δ,

$$d(\psi_{j+1}, \psi_j) \leq \frac{\varepsilon}{K} \frac{1}{(j + 1)!} \big[K(b - a)\big]^{j+1}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

Dado que a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{K} \frac{1}{(j + 1)!} [K(b - a)]^{j+1}$ é uma série convergente, então para todo $\varepsilon_0 > 0$ existe n_0 tal que, para todo $m \geq n_0$, ocorre que

$$\sum_{j=m}^{\infty} \frac{\varepsilon}{K} \frac{1}{(j + 1)!} [K(b - a)]^{j+1} < \varepsilon_0.$$

Portanto, se $m, n \in \mathbb{N}$ com $n_0 < m < n$, temos que

$$\begin{aligned} d(\psi_m, \psi_n) &\leq d(\psi_m, \psi_{m+1}) + \cdots + d(\psi_{n-1}, \psi_n) \\ &\leq \sum_{j=m}^{n} \frac{\varepsilon}{K} \frac{1}{(j+1)!} [K(b-a)]^{j+1} < \varepsilon_0 \end{aligned}$$

e $\{\psi_j\}$ é uma sequência de Cauchy no espaço C_δ. ■

Do Teorema anterior, segue alguns resultados, os quais nos ajudarão a provar a diferenciabilidade dos fluxos.

Corolário 1.21. *Se $f : U \to \mathbb{R}^n$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x} : U \to M(n)$ são aplicações contínuas no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, então o fluxo $\varphi(t, t_0, x)$ de $x' = f(t, x)$ é contínuo no aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$.*

Lema 1.22. *Sejam $E \subseteq \mathbb{R}^k$ um aberto e $G : E \to M(n)$, $g : E \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ aplicações tais que*

$$g(x, h) = G(x) \cdot h$$

para quaisquer $(x, h) \in E \times \mathbb{R}^n$. Então g e G são da mesma classe de diferenciabilidade C^r, com $0 \leq r \leq \infty$.

Demonstração. As projeções $P_1 : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ e $P_2 : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ são lineares e a aplicação $B : M(n) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $B(X, h) = X \cdot h$ é bilinear, portanto essas três aplicações são de classe C^∞. Como $g = B \circ (G \circ P_1, P_2)|_{E \times \mathbb{R}^n}$, observamos que g é da mesma classe de G.

Por outro lado, sejam $i_j : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ as inclusões dadas por $i_j(x) = (x, e_j)$, onde $e_1, e_2, \ldots, e_n$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Essas aplicações são de classe C^∞ por serem lineares. Identificamos $M(n) \cong (\mathbb{R}^n)^n$ e escrevemos $G = (G_1, \ldots, G_n)$, de modo que G é da mesma classe de g, pois cada componente $G_j = g(x, e_j) = g \circ i_k|_E$ de G é da mesma classe de g. ■

Corolário 1.23. *Se $A : I \times \Lambda \to M(n)$ é uma aplicação contínua, onde $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^k$ é um aberto de parâmetros e $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo qualquer, então o fluxo $\Phi(t, t_0, Y_0, \lambda)$ da equação linear matricial*

$$Y' = A(t, \lambda) \cdot Y$$

não autônoma com parâmetro λ é contínuo em $I \times I \times M(n) \times \Lambda$.

Demonstração. Identificamos $M(n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ e escrevemos $Y = x$, e o Lema **1.22** garante que

$$f(t, \lambda, x) = A(t, \lambda) \cdot x$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, \lambda, x) = A(t, \lambda)$$

são ambas aplicações contínuas em $I \times \mathbb{R}^{n^2} \times \Lambda$, de modo que o Teorema **1.20** garante a continuidade do fluxo de $x' = f(t, x, \lambda)$ que está definido em $I \times I \times \mathbb{R}^{n^2} \times \Lambda$. ■

Lema 1.24 (Lema de Gronwall)**.** *Se $v : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e não negativa no intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ tal que*

$$v(t) \leq a + \left| \int_{t_0}^{t} bv(s)ds \right|$$

para todo $t \in I$, com $a \geq 0$, $b \geq 0$ e $t_0 \in I$ constante, então

$$v(t) \leq ae^{b|t-t_0|}$$

para todo $t \in I$.

Demonstração. Fixamos $t_0 \in I$. No caso em que $b = 0$, temos que $v(t) \leq a$ e o Lema é verdadeiro. Portanto, podemos supor que $b > 0$. Suponhamos primeiramente que $a > 0$. Fazemos $\alpha(t) = a + | \int_{t_0}^{t} bv(s)ds|$, então $\alpha(t) \geq a > 0$ para todo $t \in I$, com isso $\ln \alpha(t)$ está bem definido para $t \in I$. Consideremos dois casos. Se $t_0 \leq t$, implica que $\alpha(t) = a + \int_{t_0}^{t} bv(s)ds$ e

$$\frac{d}{dt} \ln \alpha(t) = \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)} = \frac{bv(t)}{\alpha(t)} \leq b,$$

pois $v(t) \leq \alpha(t)$, por hipótese. Integrando de t_0 até t, temos

$$\ln \frac{\alpha(t)}{a} = \ln \alpha(t) - \ln \alpha(t_0) = \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt} \ln \alpha(s)ds \leq b(t - t_0)$$

e com isto, tomando a exponencial dos dois lados da desigualdade, temos

$$v(t) \leq \alpha(t) \leq ae^{b(t-t_0)} = ae^{b|t-t_0|},$$

para todo $t \geq t_0$. Se $t \leq t_0$, temos $\alpha(t) = a - \int_{t_0}^{t} bv(s)ds$ e $\alpha'(t) = -bv(t)$, de modo que, ao dividirmos por $\alpha(t)$ e em seguida integrarmos de t_0 a t a inequação acima, temos,

$$\ln \frac{\alpha(t)}{a} = \int_{t_0}^{t} -\frac{bv(s)}{\alpha(t)} ds = \int_{t}^{t_0} \frac{bv(s)}{\alpha(s)} ds \leq b(t_0 - t)$$

e tomando a exponencial dos dois lados dessa expressão, ocorre

$$v(t) \leq \alpha(t) \leq ae^{b(t_0-t)} = ae^{b|t-t_0|},$$

para todo $t \leq t_0$. Isso prova o Lema no caso $a > 0$.

Se $a = 0$ temos, para cada $t \in I$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$v(t) \leq \left| \int_{t_0}^{t} bv(s)ds \right| \leq \frac{1}{n} + \left| \int_{t_0}^{t} bv(s)ds \right|.$$

Pelo caso anterior (com $a = 1/n > 0$) decorre que $v(t) \leq \dfrac{1}{n} e^{b|t-t_0|}$ para todo $t \in I$. Fixamos $t \in I$ e fazemos $n \to \infty$, resultando em $v(t) = 0 = ae^{b|t-t_0|}$. ■

Proposição 1.25. *Sejam $f : U \to \mathbb{R}^n$, aplicação contínua no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, e $x, y : I \to \mathbb{R}^n$ soluções em U, definidas em um mesmo intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, respectivamente, dos problemas de valor inicial*

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}.$$

Admitamos que f seja lipschitziana na segunda variável, com constante de Lipschitz K. Então, para quaisquer $t, t_0 \in I$,

$$\big|x(t,t_0,x_0) - y(t,t_0,y_0)\big| \leq \big|x(t_0) - y(t_0)\big| e^{K|t-t_0|}.$$

Demonstração. Dados $t, t_0 \in I$, temos

$$x(t) - y(t) = x(t_0) - y(t_0) + \int_{t_0}^{t} \big[f(s,x(s)) - f(s,y(s))\big] ds$$

$$\Rightarrow \big|x(t) - y(t)\big| \leq \big|x(t_0) - y(t_0)\big| + \left|\int_{t_0}^{t} \big[f(s,x(s)) - f(s,y(s))\big] ds\right| \leq$$

$$\leq \big|x(t_0) - y(t_0)\big| + \left|\int_{t_0}^{t} \big|f(s,x(s)) - f(s,y(s))\big| ds\right| \leq \big|x(t_0) - y(t_0)\big| + \left|\int_{t_0}^{t} K\big|x(s) - y(s)\big| ds\right|.$$

Escrevemos $v(t) = |x(t) - y(t)|$ e a desigualdade anterior se torna

$$v(t) \leq v(t_0) + \left|\int_{t_0}^{t} Kv(s) ds\right|.$$

Pelo Lema de Grownwall, decorre que $v(t) \leq v(t_0)e^{K|t-t_0|}$, ou seja

$$\big|x(t) - y(t)\big| \leq \big|x(t_0) - y(t_0)\big| e^{K|t-t_0|}.$$

■

Teorema 1.26 (Diferenciabilidade)**.** *Se $f : U \to \mathbb{R}^n$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x} : U \to M(n)$ são aplicações contínuas no aberto $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ então o fluxo $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de $x' = f(t,x)$ é uma aplicação de classe C^1 cuja aplicação derivada parcial temporal $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}$ satisfaz*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t,t_0,y) = f(t,\varphi(t,t_0,y)) \tag{1.2.2.8}$$

e cuja aplicações derivadas parciais $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t_0}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_1}, \ldots, \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_n}$ satisfazem a equação diferencial linear

$$x' = \frac{\partial f}{\partial y}(t,\varphi(t,t_0,y))x \tag{1.2.2.9}$$

em $\mathbb{R}^n$, com condições iniciais $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t_0}(t_0,t_0,y) = -f(t_0,y)$ e $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_i}(t_0,t_0,y) = e_i$, respectivamente, para $1 \leq i \leq n$, onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. Seja, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ o fluxo de $x' = f(t,x)$ e fixemos um ponto (t_0, u_0, x_0) qualquer de Ω. Pelo Corolário **1.21**, como Ω é aberto, podemos escolher $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $r_0 > 0$ tais que $a < t_0 < b$, $c < u_0 < d$ e

$$N_0 = (a,b) \times (c,d) \times B \subseteq [a,b] \times [c,d] \times \overline{B} = \overline{N}_0 \subseteq \Omega,$$

onde $B = B(x_0, r_0)$ e $\overline{B} = \overline{B}(x_0, r_0)$ são as bolas aberta e fechada de centro x_0 e raio $r_0 > 0$, respectivamente. Com isto, $(t_0, u_0, x_0) \in N_0$ e $\overline{N}_0$ é compacto. Primeiramente, demonstraremos que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(t, t_0, y)$, cujas colunas são as aplicações $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_i}$, existe, é contínua no aberto N_0 e satisfaz a equação diferencial linear matricial

$$Y' = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t, t_0, y)) \cdot Y, \tag{1.2.2.10}$$

em $M(n)$, com condição inicial $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(t_0, t_0, y) = I_d \in M(n)$, onde I_d é a matriz identidade, e isto equivale a provar o Teorema.

Denotemos $\Lambda = (c,d) \times B \subseteq [c,d] \times \overline{B} = \overline{\Lambda} \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ e consideremos a aplicação

$$A : [a,b] \times \overline{\Lambda} \to M(n)$$

definida para $t \in [a,b]$ e $\lambda = (t_0, y) \in \overline{\Lambda}$ por

$$A(t, \lambda) = A(t, t_0, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t, t_0, y)). \tag{1.2.2.11}$$

Como $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é contínua por hipótese e o fluxo φ de $x' = f(t,x)$ é contínuo pelo Corolário **1.21**, resulta que A é uma aplicação contínua de $[a,b] \times \overline{\Lambda}$ em $M(n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$. O Corolário **1.23** garante que a equação diferencial linear matricial

$$\begin{cases} Y' = A(t,\lambda) \cdot Y \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

não autônoma com parâmetro $\lambda \in \Lambda$ possuí fluxo contínuo em cada ponto (t, t_0, Y_0, λ) de $(a,b) \times (a,b) \times M(n) \times \Lambda$.

Em particular, fixando a condição inicial $Y_0 = I_d \in M(n)$, é ainda contínua a aplicação restrição

$$\Phi : (a,b) \times (a,b) \times \Lambda \to M(n)$$

do fluxo $Y' = A(t,\lambda) \cdot Y$, restrição essa que satisfaz a identidade

$$\Phi(t, t_0, \lambda) = I_d + \int_{t_0}^{t} A(s, \lambda) \cdot \Phi(s, t_0, \lambda) ds \tag{1.2.2.12}$$

em $M(n)$ para qualquer $(t, t_0, \lambda) \in (a,b) \times (a,b) \times \Lambda$. Assim, o caminho $t \mapsto \Phi(t, t_0, \lambda)$ satisfaz a equação diferencial linear matricial (1.2.2.10) em $M(n)$ com condição inicial $\Phi(t_0, t_0, \lambda) = I_d \in M(n)$.

Queremos provar que

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{|h|}|\varphi(t,t_0,y+h)-\varphi(t,t_0,y)-\Phi(t,t_0,(t_0,y))\cdot h|=0 \tag{1.2.2.13}$$

vale para qualquer $(t,t_0,y)\in N_0$ pois então, pela própria definição de derivada parcial, concluímos que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}(t,t_0,y)=\Phi(t,t_0,(t_0,y))$$

é verdade para qualquer $(t,t_0,y)\in N_0$, de modo que essa derivada parcial existe, é contínua e satisfaz a equação (1.2.2.10) em N_0. Para provar (1.2.2.13), observamos que o fluxo φ é localmente lipschitziano na variável espacial y, pois pela desigualdade do valor médio, existem uma vizinhança $V\subset N_0$ e uma constante $K>0$ tais que $|f(t,\varphi(t,t_0,x_0))-f(t,\varphi(t,t_0,y_0))|\le K|\varphi(t,t_0,x_0)-\varphi(t,t_0,y_0)|$, e pela Proposição **1.25** temos que

$$\big|\varphi(t,t_0,x_0)-\varphi(t,t_0,y_0)\big|\le|x_0-y_0|e^{K|t-t_0|}\le M|x_0-y_0| \tag{1.2.2.14}$$

para quaisquer dois pontos $(t,t_0,x_0),(t,t_0,y_0)\in V$ com variáveis temporais t e t_0 iguais, onde

$$M=\max_{t\,\in\,[a,b];\;t_0\,\in\,[c,d]}[\exp\left(K|t-t_0|\right)].$$

Como $\overline{N}_0$ é compacto, podemos considerar que a desigualdade (1.2.2.14) vale para quaisquer dois pontos $(t,t_0,x_0),(t,t_0,y_0)\in\overline{N}_0$. Como φ é contínua em Ω, temos que a imagem $\varphi(\overline{N}_0)\subseteq\mathbb{R}^n$ é compacto, de modo que,

$$N_1=\{(t,\varphi(t,t_0,y)|(t,t_0,y)\in\overline{N}_0\}\subseteq U$$

também é compacto.

Fixamos $(t,t_0,y)\in N_0$. Fazemos $\lambda=(t_0,y)\in\Lambda$ e $y\in B$, de modo que podemos tomar $r>0$ tal que $y+h\in\overline{B}$ e $(t,t_0,y+h)\in\overline{N}_0$ para qualquer $h\in\mathbb{R}^n$ com $|h|\le r$. Fixamos também, arbitrariamente, $\varepsilon>0$.

Pela continuidade de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ em U, segue-se que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é uniformemente contínua no compacto $N_1\subseteq U$, de modo que podemos tomar $0<\eta=\eta(\varepsilon)<r$ tal que

$$\left|f(s,z)-f(s,w)-\frac{\partial f}{\partial x}(s,w)\cdot(z-w)\right|<\varepsilon|z-w|, \tag{1.2.2.15}$$

para quaisquer $(s,z),(s,w)\in N_1$ tais que $|z-w|<\eta$.

Escrevemos $\delta=\dfrac{1}{M}\eta$, e decorre de (1.2.2.15) e (1.2.2.14) que

$$\begin{aligned}\big|f(s,\varphi(s,v,z)-f(s,\varphi(s,v,w))-\frac{\partial f}{\partial x}(s,\varphi(s,v,w))\cdot(\varphi(s,v,z)-\varphi(s,v,w))\big|&<\\ <\varepsilon\big|\varphi(s,v,z)-\varphi(s,v,w)\big|<\varepsilon M\big|z-w\big|&,\end{aligned}$$

para quaisquer $(s,v,z),(s,v,w)\in\overline{N}_0$ tais que $|z-w|<\delta$. Em particular, tomamos as coordenadas $v=t_0$ e $w=y$ do nosso ponto $\lambda=(t_0,y)$ fixado e também tomamos $z=y+h$. Lembrando ainda da notação $A(s,\lambda)$ introduzida em (1.2.2.11) e escrevendo

$$\theta(s,h)=\varphi(s,t_0,y+h)-\varphi(s,t_0,y),$$

estabelecemos que

$$\left|f(s,\varphi(s,t_0,y+h)) - f(s,\varphi(s,t_0,y)) - A(s,\lambda)\cdot\theta(s,h)\right| < \varepsilon M|h| \qquad (1.2.2.16)$$

para quaisquer $a < s < b$ e $|h| < \delta$. Usando

$$\varphi(t,t_0,y) = y + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s,t_0,y))ds \qquad (1.2.2.17)$$

e a identidade matricial (1.2.2.12) em h, temos

$$\varphi(t,t_0,y+h) = y + h + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s,t_0,y+h))ds, \text{ e}$$

$$\Phi(t,t_0,\lambda)h = h + \int_{t_0}^{t} A(s,\lambda)\cdot\Phi(s,t_0,\lambda)\cdot hds,$$

de modo que

$\theta(t,h) - \Phi(t,t_0,\lambda)\cdot h =$

$$= \int_{t_0}^{t}\big[f(s,\varphi(s,t_0,y+h)) - f(s,\varphi(s,t_0,y))\big]ds - \int_{t_0}^{t} A(s,\lambda)\cdot\Phi(s,t_0,\lambda)\cdot hds$$

$$= \int_{t_0}^{t}\big[f(s,\varphi(t_0,y+h)) - f(s,\varphi(s,t_0,y)) - A(s,\lambda)\cdot\theta(s,h)\big]ds +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} A(s,\lambda)\cdot\big[\theta(s,h) - \Phi(s,t_0,\lambda)\cdot h\big]ds$$

e portanto, por (1.2.2.16), para qualquer $|h| < \delta$, temos que

$\left|\theta(t,h) - \Phi(t,t_0,\lambda)\cdot h\right| =$

$$\leq \left|\int_{t_0}^{t}\varepsilon M|h|ds\right| + \left|\int_{t_0}^{t}||A(s,\lambda)||\,|\theta(s,h) - \Phi(s,t_0,\lambda)\cdot h|ds\right|$$
$$\leq \varepsilon M|b-a||h| + \left|\int_{t_0}^{t} L|\theta(s,h) - \Phi(s,t_0,\lambda)\cdot h|ds\right|,$$

onde $L = \max||A(s,\lambda)||$, tomado sobre $a \leq s \leq b$ e $|h| \leq r$, é finito pela continuidade de A em $[a,b]\times\overline{\Lambda}$.

Seja $v(t) = |\theta(t,h) - \Phi(t,t_0,\lambda)\cdot h|$. Como no Lema de Gronwall,

$$\left|\varphi(t,t_0,y+h) - \varphi(t,t_0,y) - \Phi(t,t_0,(t_0,y))\cdot h\right| = v(t) \leq \varepsilon M|b-a|e^{L|b-a|}|h|,$$

para qualquer $|h| < \delta$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, é imediato constatar que vale (1.2.2.13), o que termina a prova que a derivada parcial espacial $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ existe, é contínua e satisfaz (1.2.2.10) em N_0. Como o ponto $(t_0,u_0,x_0)\in\Omega$ foi escolhido arbitrariamente, estabelecemos que $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ existe, é continua e satisfaz (1.2.2.10) em Ω.

Resta provarmos que a derivada parcial $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t_0}$ em relação a condição inicial temporal t_0 existe, é contínua e satisfaz a equação (1.2.2.9) em $\mathbb{R}^n$, com $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t_0}(t_0,t_0,y) = -f(t_0,y)$.

Provaremos que $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t_0}(t_0, t_0, y) = -f(t_0, y)$. Sejam $(t_0, y) \in U$ e $\varepsilon > 0$ dados. Por continuidade de φ em Ω e de f em U, como antes, tomamos δ tal que

$$\big|f(t_0, y) - f(s, \varphi(s, v, y))\big| < \varepsilon$$

para quaisquer $s, v \in \mathbb{R}$ tais que $|s - t_0| + |v - t_0| < \delta$. Por (1.2.2.17), temos

$$\begin{aligned}
\varphi(t_0, t_0 + h, y) - y + hf(t_0, y) &= \int_{t_0+h}^{t_0} f(s, \varphi(s, t_0 + h, y))ds + hf(t_0, y) \\
&= \int_{t_0}^{t_0+h} \big[f(t_0, y) - f(s, \varphi(s, t_0 + h, y))\big]ds,
\end{aligned}$$

e como $\varphi(t_0, t_0, y) = y$, temos

$$\big|\varphi(t_0, t_0 + h, y) - \varphi(t_0, t_0, y) + hf(t_0, y)\big| \leq |h|\varepsilon,$$

para cada $h \in \mathbb{R}$ com $|h| < \delta$. Isso implica que a derivada parcial $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t_0}$ existe no ponto $(t_0, t_0, y) \in \Omega$ e vale

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t_0}(t_0, t_0, x) = -f(t_0, y).$$

A prova da existência e continuidade da derivada parcial $\dfrac{\partial\varphi}{\partial t_0}$ em Ω é análoga à prova dada acima da existência e continuidade da derivada parcial $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$ em Ω, e assim terminamos a prova do Teorema. ∎

CAPÍTULO 2

Fluxos

Neste Capítulo, demonstraremos o Teorema de Poincaré-Bendixson no plano e o estenderemos à esfera. Para isso, utilizaremos alguns conceitos de variedades diferenciáveis. Por fim, mostraremos que os resultados desse Teorema não se aplicam ao toro, apresentando um conjunto limite distinto dos casos do plano e da esfera.

Definição 2.1. *Seja H um espaço métrico. Um fluxo (sistema dinâmico) sobre H é uma tripla $(H, \mathbb{R}, \gamma)$ onde $\gamma : \mathbb{R} \times H \to H$ é uma função contínua tal que $\gamma(0, x) = x$ e $\gamma(t, \gamma(u, x)) = \gamma(t + u, x)$ para quaisquer t, u, x.*

As soluções de uma equação diferencial autônoma definidas para todo $t \in \mathbb{R}$ definem um fluxo, como veremos a seguir.

2.1 Teorema de Poincaré-Bendixson

Sejam $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $X : \Delta \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^k, $k \geq 1$, e consideremos a equação diferencial

$$x' = X(x). \tag{2.1.0.1}$$

Uma equação diferencial como acima, é chamada *equação diferencial autônoma*, pois o campo de vetores $X = (X_1, \ldots, X_n)$ independe de t.

Teorema 2.2. *Para cada $x \in \Delta$ existe um intervalo aberto I_x onde está definida a única solução maximal φ_x de (2.1.0.1) tal que $\varphi_x(0) = x$. Além disso, se $y = \varphi_x(s)$ com $s \in I_x$, então φ_y, a solução de (2.1.0.1) tal que $\varphi_y(0) = y$, está definida no intervalo maximal $I_y = I_x - s = \{r - s; r \in I_x\}$ e $\varphi_y(t) = \varphi_x(t + s)$.*

Demonstração. A primeira parte vem diretamente dos Teoremas **1.12** e **1.14**. Agora se $y = \varphi_x(s)$, observemos que $\varphi_x'(t+s) = X(\varphi_x(t+s))$ para todo t tal que $t + s \in I_x$. Então, $\varphi_x(t+s)$ é solução da equação

$$x' = X(x), \;\; x(0) = y.$$

Pela unicidade das soluções decorre que $\varphi_x(t+s) = \varphi_y(t)$ e $I_y = I_x - s = \{r - s;\, r \in I_x\}$, o que demonstra o Teorema. ∎

O Teorema **2.2** nos diz que as soluções de uma equação diferencial autônoma definidas para todo t real são de fato um fluxo.

Definição 2.3. *Um ponto $x \in \Delta$ é dito ponto singular de X se $X(x) = 0$, e é chamado ponto regular se $X(x) \neq 0$.*

Observação 2.4. Se $x_0 \in \Delta$ é ponto singular, então $\varphi(t) \equiv x_0$, $-\infty < t < \infty$, é solução de (2.1.0.1). Por outro lado, se $\varphi(t) \equiv x_0$ é solução de (2.1.0.1), então

$$0 = \varphi'(t) = X(\varphi(t)) = X(x_0), \;\; \forall t \in \mathbb{R},$$

então x_0 é ponto singular de X.

Seja $\varphi(t) = \varphi(t, p)$, a curva integral de X passando por $p \in \Delta$, definida no intervalo maximal $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$.

Definição 2.5. *Se $\omega_+(p) = \infty$ definimos o conjunto ω-limite por*

$$\omega(p) = \{q \in \Delta;\;\; \exists\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}},\, t_n \in \mathbb{R},\, t_n \to \infty \;\; e \;\; \varphi(t_n, p) \to q\,,\;\; quando \;\; n \to \infty\}.$$

Analogamente, se $\omega_-(p) = -\infty$, definimos o conjunto α-limite por

$$\alpha(p) = \{q \in \Delta;\;\; \exists\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}},\, t_n \in \mathbb{R},\, t_n \to -\infty \;\; e \;\; \varphi(t_n, p) \to q\,,\;\; quando \;\; n \to \infty\}.$$

Exemplo 2.6. Tomemos o campo $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $X(x, y) = (\lambda x, \mu y)$, tal que $\lambda \cdot \mu \neq 0$. Então, se $\lambda, \mu > 0$, o retrato de fase desse campo é da forma

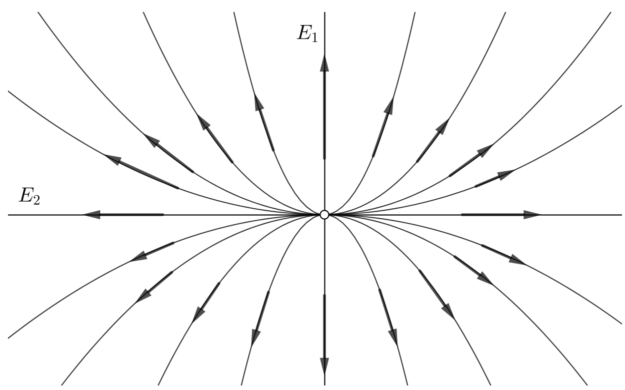

Figura 2.1: Nó instável.

Se $p = (0,0)$, então $\alpha(p) = \omega(p) = \{p\}$.

Se $p \neq (0,0)$, então $\alpha(p) = (0,0)$ e $\omega(p) = \emptyset$.

Agora, se $\lambda < 0 < \mu$, o temos uma sela.

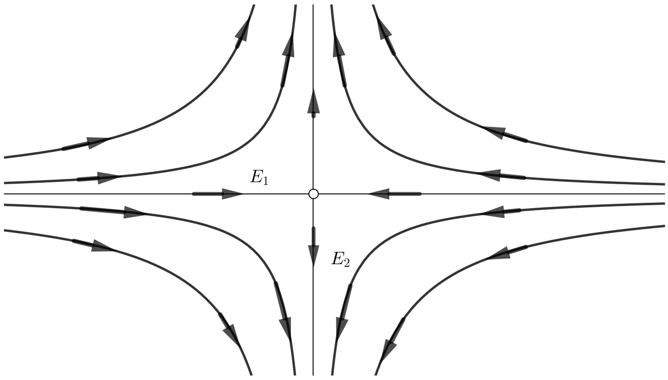

Figura 2.2: Sela.

Se $p = (0,0)$, então $\alpha(p) = \omega(p) = \{p\}$.

Se $p \in E_1 - \{(0,0)\}$, então $\omega(p) = \{(0,0)\}$ e $\alpha(p) = \emptyset$.

Se $p \in E_2 - \{(0,0)\}$, então $\alpha(p) = \{(0,0)\}$ e $\omega(p) = \emptyset$.

Se $p \notin E_1 \cup E_2$, então $\omega(p) = \alpha(p) = \emptyset$.

Observação 2.7. Se $p \in \Delta$ é ponto singular de X, então $\alpha(p) = \omega(p) = \{p\}$. Além disso, se $p \in \Delta$ é regular com γ_p sua órbita e dado $q \in \gamma_p$, então $\omega(q) = \omega(p)$.

De fato, sejam $q = \varphi(t_0, p)$ e $r \in \omega(p)$; então, existe uma sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $t_n \to \infty$ e $\varphi(t_n, p) \to r$, quando $n \to \infty$. Se tomarmos $s_n = t_n - t_0$, temos que $s_n \to \infty$, quando $n \to \infty$ e

$$\varphi(s_n, q) = \varphi(t_n - t_0, \varphi(t_0, p)) = \varphi(t_n + t_0 - t_0, p) = \varphi(t_n, p).$$

Portanto, $\varphi(s_n, q) \to r$ quando $n \to \infty$, o que mostra que $\omega(p) \subset \omega(q)$. Reciprocamente, se $k \in \omega(q)$, então existe uma sequência $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $t_n \to \infty$ e $\varphi(t_n, q) \to k$. Tomamos $s_n = t_n + t_0$ e temos que

$$\varphi(s_n, p) = \varphi(t_n + t_0, p) = \varphi(t_n, \varphi(t_0, p)) = \varphi(t_n, q) \to k$$

e $s_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Concluímos assim que $\omega(p) = \omega(q)$, para todo $q \in \gamma_p$.

De maneira análoga, $\alpha(p) = \alpha(q)$, para todo $q \in \gamma_p$. □

Pela Observação anterior, definimos os conjuntos ω e α-limite de uma órbita e não apenas de um ponto.

Definição 2.8. *O conjunto ω-limite de uma órbita γ é o conjunto $\omega(p)$, para qualquer $p \in \gamma$. O conjunto α-limite de uma órbita γ é o conjunto $\alpha(p)$, para qualquer $p \in \gamma$.*

O próximo Teorema caracteriza os conjuntos ω e α-limite de uma órbita se a semi-órbita positiva e negativa estiverem contidas em um compacto.

Teorema 2.9. *Sejam* $X : \Delta \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *um campo* C^r, $r \geq 1$ *e* $\gamma_p^+ = \{\varphi(t,p),\, t \geq 0\}$ *a semi-órbita positiva de* X *por* p. *Se* $\gamma_p^+ \subset K \subset \Delta$, K *compacto. Então,*

a) $\omega(p) \neq \emptyset$.

b) $\omega(p)$ *é compacto.*

c) $\omega(p)$ *é invariante por* X, *ou seja, se* $q \in \omega(p)$ *então* $\gamma_q \subset \omega(p)$.

d) $\omega(p)$ *é conexo.*

Demonstração. a) Tomemos $t_n = n \in \mathbb{N}$. Então $\{\varphi(t_n)\} \subset K$. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe uma subsequência $\{\varphi(t_{n_k})\}$ convergente. Portanto, existe $q \in K$ tal que $\varphi(t_{n_k}) \to q \in \omega(\gamma)$, e $\omega(\gamma) \neq \emptyset$.

b) $\omega(\gamma) \subset \overline{\gamma_p^+} \subset K$, logo $\omega(\gamma)$ é limitado. Basta mostrarmos que $\omega(\gamma)$ é fechado. Seja $\{q_n\} \subset \omega(\gamma)$, $q_n \to q$. Portanto, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|q_n - q| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, se $n > n_0$. Para cada $q_n \in \omega(\gamma)$, existe uma sequência $\{t_m^{(n)}\}$ tal que $t_m^{(n)} \to \infty$ quando $m \to \infty$ e que $\lim_{m\to\infty} \varphi(t_m^{(n)}, p) = q_n$.

Seja $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$, então existe $m(n) \in \mathbb{N}$ tal que $|\varphi(t_m^{(n)}, p) - q_n| < \dfrac{1}{2n} = \dfrac{\varepsilon_n}{2}$, se $m > m(n)$. Tomamos para cada sequência $\{t_m^{(n)}\}$ um ponto $t_n = t_{m(n)}^n > n$. Se $n > \max\{n_0, m(n), 1/\varepsilon\}$ temos que

$$|\varphi(t_n,p) - q| \leq |\varphi(t_n,p) - q_n| + |q_n - q| < \frac{\varepsilon_n}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Então $\varphi(t_n, p) \to q$ e $q \in \omega(\gamma)$.

c) Se $q \in \omega(p)$ e $q_1 \in \gamma_q^+$ então $q_1 = \varphi(t_0, q)$ para algum t_0. Pela continuidade em relação a segunda variável da curva integral do campo X, temos

$$\begin{aligned} q_1 &= \varphi(t_0, q) = \varphi(t_0, \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n, p)) \\ &= \lim_{n\to\infty} \varphi(t_0, \varphi(t_n, p)) = \lim_{n\to\infty} \varphi(t_0 + t_n, p). \end{aligned}$$

Tomemos $t'_n = t_n + t_0$, e quando $n \to \infty$ ocorre que $t'_n \to \infty$. Portanto,

$$q_1 = \lim_{n\to\infty} \varphi(t'_n, p) \in \omega(p) \quad \Rightarrow \gamma_q \subset \omega(p).$$

d) Como $\omega(p)$ é compacto, suponhamos por absurdo que existam fechados disjuntos $A, B \subset K$ tal que $A, B \neq \emptyset$ e $\omega(p) = A \cup B$. Logo $dist(A,B) = \inf\{d(a,b),\, a \in A,\, b \in B\} = d > 0$.

Portanto existem sequências $\{t'_n\} \subset A$ e $\{t''_n\} \subset B$ tais que $t'_n, t''_n \to \infty$ e $\varphi(t'_n, p) \to a \in A$ e $\varphi(t''_n, p) \to b \in B$, quando $n \to \infty$. Podemos então construir uma sequência $\{t_n\}$ tal que $t_n \to \infty$ e $d(\varphi(t_n), A) < d/2$ e $d(\varphi(t_{n+1}), A) > d/2$, se n é ímpar.

Como a função $h(t) = d(\varphi(t), A)$, $t_n \leq t \leq t_{n+1}$ para todo n ímpar é contínua e $h(t_n) < d/2$ e $h(t_{n+1}) > d/2$, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe c_n tal que $t_n \leq c_n \leq t_{n+1}$ tal que

$$h(c_n) = d/2.$$

Por $\{\varphi(c_n, p)\}$ estar contida no conjunto compacto $Q = \{x \in \Delta; d(x, A) = d/2\}$, então $\{\varphi(c_n)\}$ possui uma subsequência convergente que, por abuso de notação, denotamos $\{\varphi(c_n)\}$.

Seja $c = \lim_{n\to\infty} \varphi(c_n)$. Então $c \in \omega(p)$. Mas, $c \notin A$, pois $d(c, A) = d/2$, e também $c \notin B$, pois por desigualdade triangular $d(c, B) \geq d(A, B) - d(c, A) = d/2$. E isto é um absurdo, e portanto $\omega(p)$ é conexo. ■

Não é difícil ver que o resultado anterior é análogo para o conjunto α-limite no caso em que a semi-órbita negativa está contida em um compacto.

Corolário 2.10. *Nas condições do Teorema anterior, se $q \in \omega(p)$, então a curva integral de X, passando por q, está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Como $\omega(p)$ é compacto e invariante, segue-se que a órbita de X passando por q está contida no compacto $\omega(p)$. O resultado segue-se do Corolário **1.18**. ■

Definição 2.11. *Sejam $X : \Delta \to \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^k, $k \geq 1$, $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto e $A \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ um aberto. Uma aplicação diferenciável $f : A \to \Delta$ de classe C^k é uma secção transversal local de X (de classe C^k) se, para todo $a \in A$, acontece de $Df(a)(\mathbb{R}^{n-1})$ e $X(f(a))$ gerarem o espaço $\mathbb{R}^n$. Seja $\Sigma = f(A)$ munido da topologia induzida. Se $f : A \to \Sigma$ for homeomorfismo, diz-se que Σ é uma seção transversal de X.*

Exemplo 2.12. Seja U um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^2$ e denotemos por X um campo vetorial de classe C^k, $k \geq 1$, em U. Diremos que um segmento de reta limitado Σ em $U \subset \mathbb{R}^2$ é uma secção transversal a X, se para todo ponto $p \in \Sigma$, $X(p)$ for um vetor não nulo e transversal a Σ.

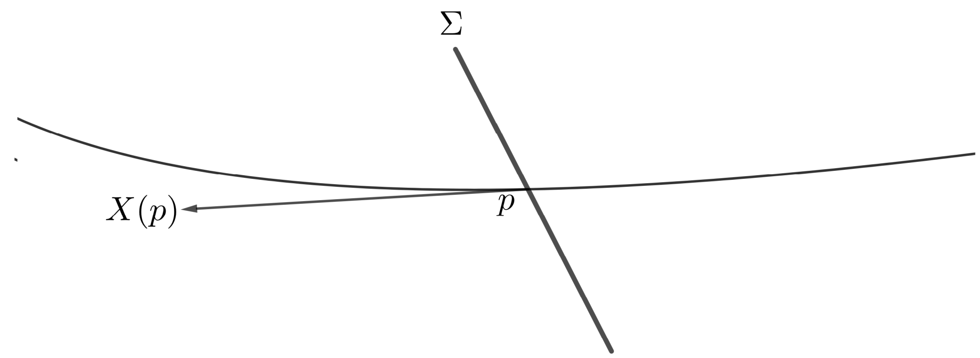

Figura 2.3: Secção transversal.

Observação 2.13. Se $U \in \mathbb{R}^2$ é um aberto, X um campo de classe C^k, $k \geq 1$ e $p \in U$ um ponto regular de X, então existirá uma secção transversal passando por p.

De fato, como $p \in U$ é regular, tomemos $\{v_1, X(p)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$. Por X ser contínuo em p, para $\sigma > 0$ suficientemente pequeno definimos $f : [-\sigma, \sigma] \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(t) = p + t \cdot v_1$ e temos uma secção transversal passando por p. □

Em geral, se $p \in \Delta \subseteq \mathbb{R}^n$ é regular, tomamos uma base do $\mathbb{R}^n$ dada por $\{v_1, \ldots, v_{n-1}, X(p)\}$ e tomando $B(0,\delta)$ uma bola de $\mathbb{R}^{n-1}$ com centro na origem e raio $\delta > 0$ suficientemente pequeno, então $f : B(0,\delta) \to \Delta$ dada por

$$f(x_1, ..., x_{n-1}) = p + \sum_{i=1}^{n-1} x_i v_i$$

é uma secção transversal local de X em p. Ou seja, dado um ponto regular $p \in \Delta$ do campo X, sempre existe uma secção transversal passando por p.

Observemos que, pela definição dada, todo ponto da secção transversal Σ é regular e além disso, Σ não é tangente a qualquer trajetória que o intercepta.

Notamos também que as trajetórias de X cruzam a secção transversal Σ sempre no mesmo sentido, pois o campo é contínuo.

Definição 2.14. *Sejam $\varphi_1 : D_1 \to \mathbb{R}^n$ e $\varphi_2 : D_2 \to \mathbb{R}^n$ os fluxos gerados pelos campos $X_1 : \Delta_1 \to \mathbb{R}^n$ e $X_2 : \Delta_2 \to \mathbb{R}^n$ respectivamente. Dizemos que X_1 é topologicamente conjugado (respectivamente C^k-conjugado) a X_2 quando existe um homeomorfismo (respectivamente um difeomorfismo de classe C^k) $h : \Delta_1 \to \Delta_2$ tal que $h(\varphi_1(t,x)) = \varphi_2(t, h(x))$ para todo $(t,x) \in D_1$.*

Observação 2.15. O homeomorfismo (difeomorfismo de classe C^k) h é denominada por *conjugação* entre os campos vetoriais X_1 e X_2. Uma propriedade interessante é que h leva órbita em órbita.

Lema 2.16. *Sejam $X_1 : \Delta_1 \to \mathbb{R}^n$ e $X_2 : \Delta_2 \to \mathbb{R}^n$ campos C^k e $h : \Delta_1 \to \Delta_2$ um difeomorfismo de classe C^k. Então h é uma conjugação entre X_1 e X_2 se, e somente se,*

$$Dh_p X_1(p) = X_2(h(p)), \ \forall p \in \Delta_1. \tag{2.1.0.2}$$

Demonstração. Sejam $\varphi_1 : D_1 \to \Delta_1$ e $\varphi_2 : D_2 \to \Delta_2$ os fluxos de X_1 e X_2, respectivamente. Suponhamos que h satisfaz (2.1.0.2). Dado $p \in \Delta_1$, seja $\psi(t) = h(\varphi_1(t,p))$, $t \in I_1(p)$. Então ψ é solução de $x' = X_2(x)$, $x(0) = h(p)$, pois

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= Dh(\varphi_1(t,p)) \cdot \frac{d}{dt}\varphi_1(t,p) = Dh(\varphi_1(t,p))X_1(\varphi_1(t,p)) = \\ &= X_2(h(\varphi_1(t,p))) = X_2(\psi(t)). \end{aligned}$$

Logo, $h(\varphi_1(t,p)) = \varphi_2(t, h(p))$.

Reciprocamente, suponhamos que h seja uma conjugação. Se $p \in \Delta_1$, temos que $h(\varphi_1(t,p)) = \varphi_2(t, h(p))$, $t \in I_1(p)$. Ao derivarmos esta relação com respeito a t em $t = 0$, obtemos a relação (2.1.0.2). ■

Teorema 2.17 (Teorema do Fluxo Tubular)**.** *Sejam p um ponto não singular de $X : \Delta \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k, $k \geq 1$, e $f : A \to \Sigma$ uma secção transversal local de X de classe C^k com $f(0) = p$. Então, existem uma vizinhança V de p em Δ e um difeomorfismo $h : V \to (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$ de classe C^k, onde $\varepsilon > 0$ e B é uma bola aberta em $\mathbb{R}^{n-1}$ de centro na origem $0 = f^{-1}(p)$, tais que*

1. *$h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$;*

2. *h é uma C^k-conjugação entre $X|_V$ e o campo constante $Y : (-\varepsilon, \varepsilon) \times B \to \mathbb{R}^n$, $Y = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Por simplicidade de notação, suponhamos que $n = 2$. Sejam $\varphi : D \to \Delta$ o fluxo de X e $F : D_A \to \Delta$ definida por $F(t, u) = \varphi(t, f(u))$, onde $D_A = \{(t, u) \in \mathbb{R}^2; (t, f(u)) \in D\}$ e f é a secção transversal dada na Observação **2.13**. Então,

$$\frac{d}{dt}F(t, u) = D_1F(t, u) = \varphi'(t, f(u)) = X(\varphi(t, f(u)),$$

o que implica que $D_1F(0, 0) = X(f(0)) = X(p)$. Além disso, observemos que $F(0, u) = f(u)$, então

$$D_2F(0, 0) = Df(0) = v_1.$$

Portanto, $D_1F(0, 0)$ e $D_2F(0, 0)$ geram $\mathbb{R}^2$ e $DF(0, 0)$ é um isomorfismo. Pelo Teorema da função inversa, existem $\varepsilon > 0$ e um intervalo B em $\mathbb{R}$ com centro na origem tais que $F|_{(-\varepsilon,\varepsilon)\times B}$ é um difeomorfismo sobre o aberto $V = F((-\varepsilon, \varepsilon) \times B)$.

Seja $h = (F|_{(-\varepsilon,\varepsilon)\times B})^{-1}$, então $h(\Sigma \cap V) = \{0\} \times B$, pois $F(0, u) = f(u) \in \Sigma$, $\forall u \in B$, o que prova a primeira afirmação.

Notemos que

$$\begin{aligned} Dh^{-1}(t, u) \cdot Y(t, u) &= DF(t, u) \cdot (1, 0) = D_1F(t, u) = X(\varphi(t, f(u)) \\ &= X(F(t, u)) = X(h^{-1}(t, u)), \end{aligned}$$

para todo $(t, u) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times B$. Portanto, pelo Lema anterior, h^{-1} conjuga Y e X. ■

Corolário 2.18. *Seja Σ uma secção transversal de X. Para todo ponto $p \in \Sigma$, existem $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$, uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^n$ e uma função $\tau : V \to \mathbb{R}$ de classe C^k tais que $\tau(V \cap \Sigma) = 0$ e*

1. *para todo $q \in V$, a curva integral $\varphi(t, q)$ de $X|_V$ é definida e biunívoca em $J_q = (-\varepsilon + \tau(q), \varepsilon + \tau(q))$.*

2. *$\xi(q) = \varphi(\tau(q), q) \in \Sigma$ é o único ponto onde $\varphi(t, q)|_{J_q}$ intercepta Σ. Em particular, $q \in \Sigma \cap V$ se, e somente se, $\tau(q) = 0$.*

3. *$\xi : V \to \Sigma$ é de classe C^k e $D\xi(q)$ é sobrejetiva para todo $q \in V$. Mais ainda, $D\xi(q) \cdot v = 0$ se, e somente se, $v = \alpha X(q)$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Sejam h, V e ε como no Teorema anterior, e temos que $\{0\} \times B = h(\Sigma \cup V)$. Fazemos $h = (-\tau, \xi)$, observemos que o campo Y satisfaz a todas as afirmações acima. Como h é uma C^r-conjugação, concluímos que X também satisfaz estas afirmações. Observemos a Figura ilustrativa **2.4**. ■

Agora, enunciaremos o Teorema de Poincaré-Bendixson no plano, o qual caracteriza os conjuntos limites de campos no plano que satisfazem certas hipóteses.

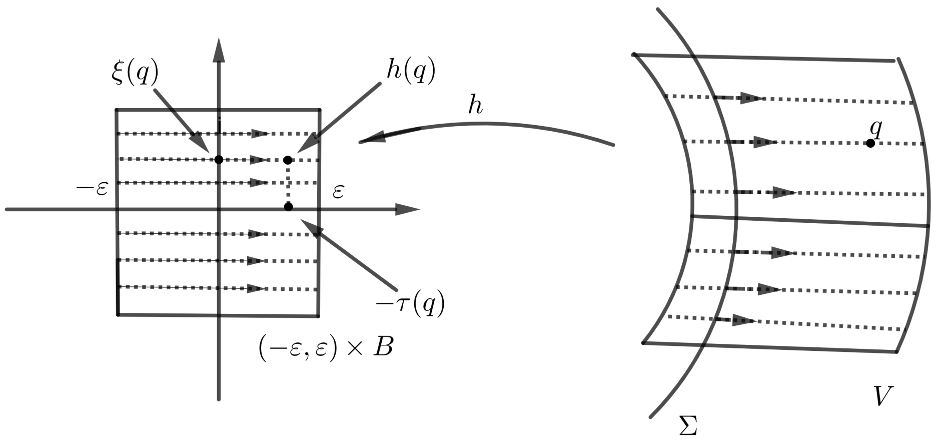

Figura 2.4: Imagem ilustrativa.

Teorema 2.19 (Poincaré-Bendixson)**.** *Seja $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ uma curva integral de X, definida para todo $t \geq 0$, em que $X : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é um campo C^r, $r \geq 1$. Admitamos que $\gamma_p^+ \subset K \subset \Delta$, K compacto. Se X tem número finito de singularidades, então acontece uma das seguintes possibilidades:*

a) Se $\omega(p)$ contém somente pontos regulares, então $\omega(p)$ é uma órbita periódica.

b) Se $\omega(p)$ contém pontos regulares e singulares, então $\omega(p)$ consiste em um conjunto de órbitas, que tendem a um desses pontos singulares quando $t \to \pm\infty$.

c) Se $\omega(p)$ somente possui pontos singulares então $\omega(p) = \{q\}$, onde q é ponto singular.

Para provar esse Teorema precisaremos de alguns resultados.

Lema 2.20. *Se $p \in \Sigma \cap \omega(\gamma)$, com Σ uma secção transversal a X e γ uma órbita de X, então p pode ser expresso como limite de uma sequência de pontos, $\varphi(t_n)$ em Σ, onde $t_n \to \infty$.*

Demonstração. Tomemos uma vizinhança V e a aplicação $\tau : V \to \mathbb{R}$ como no Corolário anterior.

Como $p \in \omega(\gamma)$, existem $q \in \Delta$ e uma sequência $\{t'_n\}$ tais que $t'_n \to \infty$ e $\varphi(t'_n, q) \to p$, quando $n \to \infty$. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi(t'_n, q) \in V$ para todo $n \geq n_0$. Seja $t_n = t'_n + \tau(\varphi(t'_n, q))$ para $n \geq n_0$, e temos que

$$\begin{aligned} \varphi(t_n) \; &= \varphi(t'_n + \tau(\varphi(t'_n, q)), q) \\ & \varphi(\tau(\varphi(t'_n, q)), \varphi(t'_n, q)) \end{aligned}$$

e por definição de τ, $\varphi(t_n) \in \Sigma$. Como τ é contínua, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n) \; &= \lim_{n\to\infty} \varphi(t'_n + \tau(\varphi(t'_n, q)), q) \\ &= \lim_{n\to\infty} \varphi[\tau(\varphi(t'_n, q)), \varphi(t'_n, q)] \\ &= \varphi(0, p) = p. \end{aligned}$$

E fica provado o Lema. ■

A seguir, enunciaremos um resultado que será importante para o próximo Lema. A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [14, pg. 122].

Teorema 2.21 (Teorema da Curva de Jordan)**.** *Se $J \subset \mathbb{R}^2$ for uma curva fechada simples (isto é, J é a imagem homeomorfa de um círculo), então $\mathbb{R}^2 - J$ terá duas componentes conexas: S_1 (limitada) e S_2 (não limitada), as quais terão J como fronteira comum.*

Consideremos agora que Σ, parametrizada por $f : [-\sigma, \sigma] \to \mathbb{R}^2$, tenha uma ordenação natural dada pelo intervalo $[-\sigma, \sigma]$.

Lema 2.22. *Seja Σ uma secção transversal a X contida em Δ. Se γ é uma órbita de X e $p \in \Sigma \cap \gamma$, então $\gamma_p^+ = \{\varphi(t,p); t \geq 0\}$ intercepta Σ em uma sequência monótona $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$.*

Demonstração. Seja $D = \{t \in \mathbb{R}^+; \varphi(t,p) \in \Sigma\}$. Pelo Teorema do fluxo tubular, se $t \in D$ existe uma vizinhança de t em $\mathbb{R}^+$ tal que t é o único ponto que intercepta Σ; portanto, D é discreto.

Ordenamos o conjunto da forma $D = \{0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \cdots\}$. Seja $p_1 = p$. Indutivamente, caso existam, definimos $p_2 = \varphi(t_1, p)$ e $p_n = \varphi(t_{n-1}, p)$.

Se $p_1 = p_2$, por unicidade, temos que γ é uma trajetória fechada de período $\tau = t_1$, e $p = p_n$, para todo n.

Se $p_1 \neq p_2$, sem perda de generalidade, consideremos $p_1 < p_2$. Se existir p_3, mostraremos que $p_3 > p_2$. Por Σ ser conexo e X ser contínuo, as órbitas de X cruzam a secção transversal sempre no mesmo sentido.

Suponhamos que a secção transversal esteja orientada como na figura a seguir e as órbitas cruzam Σ da esquerda para a direita.

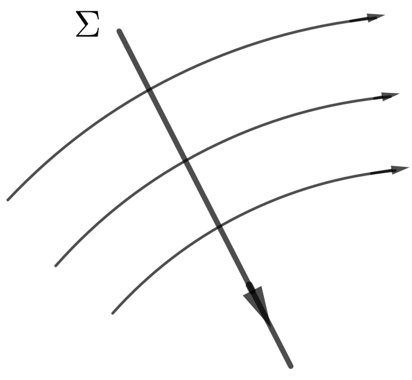

Figura 2.5: Secção transversal.

Consideremos a curva de Jordan formada pela união do segmento $\overline{p_1 p_2} \subset \Sigma$ com o arco $\widehat{p_1 p_2} = \{\varphi(t,p); 0 \leq t \leq t_1\}$ da órbita, como na figura a seguir.

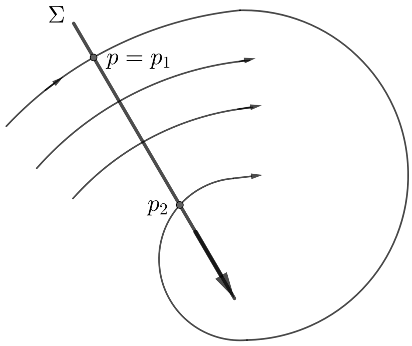

Figura 2.6: Curva de Jordan.

Em particular, a órbita γ, a partir de p_2, fica contida na região interna e limitada pela curva de Jordan. De fato, ela não pode interceptar o arco $\widehat{p_1p_2}$ devido à unicidade das órbitas e não pode interceptar o segmento $\overline{p_1p_2}$ porque contrariaria o sentido do fluxo. Vejamos nas figuras a seguir.

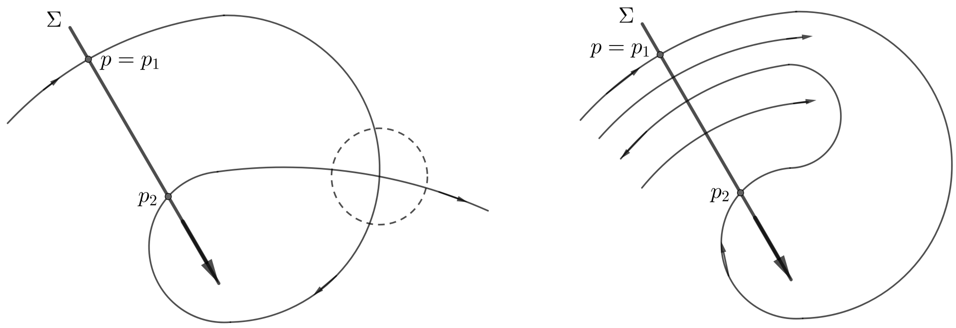

Figura 2.7: Casos impossíveis.

Portanto, caso p_3 exista, devemos ter $p_1 < p_2 < p_3$. Continuando este raciocínio, obtemos $p_1 < p_2 < \cdots < p_n < \cdots$.

Portanto, $\{p_n\}$ é uma sequência monótona. ■

Lema 2.23. *Se Σ é uma secção transversal ao campo X e $p \in \Delta$, então Σ intercepta $\omega(p)$ no máximo em um ponto.*

Demonstração. Pelo Lema anterior, o conjunto de pontos de γ_p^+ em Σ, digamos D, formam uma sequência monótona e, portanto tem no máximo um ponto limite. Se $q \in \omega(p) \cap \Sigma$, pelo Lema **2.20** existe uma sequência $\{\varphi(t_n, p)\} \in \Sigma$ tal que $\varphi(t_n, p) \to q$. Como $\{\varphi(t_n, p)\} \in D$, pela unicidade do limite segue o resultado. ■

Lema 2.24. *Sejam $p \in \Delta$, com γ_p^+ contida em um compacto, e γ uma órbita de X com $\gamma \subset \omega(p)$. Se $\omega(\gamma)$ contém pontos regulares então γ é uma órbita periódica e $\omega(p) = \gamma$.*

Demonstração. Seja $q \in \omega(\gamma)$ ponto regular e sejam V vizinhança de q dada como no Corolário **2.18** e Σ_q a secção transversal correspondente. Pelo Lema **2.20**, existe uma sequência $t_n \to \infty$ tal que $\varphi(t_n, q) \in \Sigma_q$. Como $\varphi(t_n, q) \in \omega(p)$ a sequência $\{\varphi(t_n, q)\}$ reduz-se a um ponto, pelo Lema **2.23**. Isto prova que γ é periódica.

Provaremos que $\gamma = \omega(p)$. Como $\omega(p)$ é conexo pelo Teorema **2.9** e γ é fechado e não-vazio, basta provar que γ é aberto em $\omega(p)$.

Sejam $\overline{p} \in \gamma$, $V_{\overline{p}}$ uma vizinhança de $\overline{p}$ como no Corolário **2.18** e $\Sigma_{\overline{p}}$ a secção transversal correspondente. Mostraremos que $V_{\overline{p}} \cap \gamma = V_{\overline{p}} \cap \omega(p)$.

É claro que $V_{\overline{p}} \cap \gamma \subset V_{\overline{p}} \cap \omega(p)$. Por contradição, suponhamos que exista $\overline{q} \in V_{\overline{p}} \cap \omega(p)$ tal que $\overline{q} \notin \gamma$. Pelo Teorema do fluxo tubular e pela invariância de $\omega(p)$, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t, \overline{q}) \in \omega(p) \cap \Sigma_{\overline{p}}$ e $\varphi(t, \overline{q}) \neq \overline{p}$, já que $\overline{q} \notin \gamma$. Daí, existem dois pontos distintos de $\omega(p)$ em $\Sigma_{\overline{p}}$, o que é um absurdo pelo Lema **2.23**. Logo $V_{\overline{p}} \cap \gamma = V_{\overline{p}} \cap \omega(p)$.

Seja $U = \bigcup\limits_{\overline{p} \in \gamma} V_{\overline{p}}$. U é aberto, $\gamma \subset U$ e $U \cap \omega(p) = U \cap \gamma = \gamma$, isto é, γ é a interseção de um aberto de $\mathbb{R}^2$ com $\omega(p)$. Então γ é aberto em $\omega(p)$. ∎

Demonstração do Teorema de Poincaré-Bendixson

1. Se $\omega(p)$ contém somente pontos regulares e $q \in \omega(p)$, então a órbita $\gamma_q \subset \omega(p)$, pelo Teorema **2.9**. Dado que $\omega(p)$ é compacto, pelo mesmo Teorema **2.9**, resulta que $\omega(\gamma_q) \neq \emptyset$, e todos os seus pontos são regulares. Portanto, pelo Lema **2.24**, $\omega(p) = \gamma_q$ é órbita fechada.

2. Se $\omega(p)$ contém pontos regulares e singulares e γ é órbita não-trivial contida em $\omega(p)$, isto é, γ não é apenas um ponto singular; então, pelo Lema **2.24** e por $\alpha(\gamma)$ e $\omega(\gamma)$ serem conexos, sai que $\alpha(\gamma)$ e $\omega(\gamma)$ são ambos pontos singulares do campo X, pois se não, $\omega(\gamma)$ teria pontos regulares e $\omega(p) = \gamma$ de modo que γ seria uma trajetória fechada, o que seria um absurdo. (Lembremos que X tem somente um número finito de singularidades em $\omega(p)$).

3. Se $\omega(p)$ apenas possuí pontos singulares, como $\omega(p)$ é conexo e X possuí apenas número finito de singularidades, então $\omega(p)$ consiste de um só ponto singular. ∎

2.2 Variedades

Estenderemos a noção de diferenciabilidade a aplicações definidas em certos espaços topológicos localmente homeomorfos a $\mathbb{R}^m$.

Definição 2.25. *Definimos uma carta local ou sistema de coordenadas no espaço topológico M como um par (U, φ), onde U é um aberto de M e $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ é um homeomorfismo de U sobre o aberto $\varphi(U)$ de $\mathbb{R}^m$.*

Definição 2.26. *Um atlas $\mathcal{A}$ de dimensão m e classe C^r sobre M é uma coleção de cartas locais cujos domínios cobrem M e tal que se $(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2) \in \mathcal{A}$ e $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, então a aplicação $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$ é um difeomorfismo C^r entre abertos de $\mathbb{R}^m$ e neste caso dizemos que φ_1 e φ_2 são compatíveis. Os difeomorfismos $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ como acima são chamados mudanças de coordenadas.*

Definição 2.27. *Sejam M e N espaços topológicos e suponhamos que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são atlas de classe C^r em M e N de dimensões m e n, respectivamente. Dizemos que $f : M \to N$ é* *diferenciável de classe C^k, $k \leq r$, se f é contínua e para cada $x \in M$ existem cartas locas $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ e $(V, \psi) \in \mathcal{B}$, com $x \in U$ e $f(x) \in V$, tais que*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap f^{-1}(V)) \subset \mathbb{R}^m \to \psi(V) \subset \mathbb{R}^n$$

é de classe C^k.

Como as mudanças de variáveis são difeomorfismos C^r, $r \geq k$, esta definição independe das cartas locais escolhidas. Não é difícil ver que nos espaços euclidianos $\mathbb{R}^m$, se considerarmos uma única carta local ($\mathbb{R}^m$, identidade), a noção de diferenciabilidade dada acima coincide com a usual.

Definição 2.28. *Um atlas $\mathcal{A}$ de classe C^r sobre M é dito maximal quando contém todas as cartas locais $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi})$ que são compatíveis, isto é, cujas mudanças de coordenadas com elementos $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$*

$$\widetilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap \widetilde{U}) \to \widetilde{\varphi}(U \cap \widetilde{U})$$

são difeomorfismos C^r.

Um atlas maximal de dimensão m e classe C^r sobre M é dito também de estrutura diferenciável de dimensão m de classe C^r sobre M.

Observação 2.29. Pelo Lema de Zorn, se M possui um atlas $\mathcal{A}$ diferenciável de dimensão m, então existe uma estrutura diferenciável $\mathcal{A}'$ tal que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$.

Isso nos diz que só se faz necessário determinar um atlas diferenciável, o qual não é necessariamente maximal.

Definição 2.30. *Uma variedade diferenciável M de classe C^r e dimensão m é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável, munido de uma estrutura diferenciável de dimensão m de classe C^r. Denotaremos que M é uma variedade de dimensão m por M^m. A menos que não haja confusão, denotaremos apenas por M.*

Exemplo 2.31. A reta real é um uma variedade diferenciável de classe C^∞. De fato, uma base enumerável, usando a topologia usual da reta, são os intervalos abertos (a, b), onde $a, b \in \mathbb{Q}$. Tais intervalos são identificados de forma natural com o conjunto $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, que é enumerável. De maneira análoga, qualquer espaço euclidiano é uma variedade diferenciável de classe C^∞.

Definição 2.32. *Uma aplicação $f : M \to N$ de classe C^k, $k \geq 1$, é dita um difeomorfismo quando possui inversa $f^{-1} : N \to M$ que também é de classe C^k. Neste caso, dizemos que as variedades são difeomorfas e escrevemos $M \simeq N$.*

Agora, apresentaremos a noção de derivada de uma aplicação entre variedades. Faremos isso com a ideia geométrica das aplicações diferenciáveis no espaço euclidiano.

Definição 2.33. *Fixando $x \in M$, consideremos o conjunto $C_x(M)$ de todas as curvas $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, diferenciável em 0, com $\varepsilon > 0$ e com $\alpha(0) = x$.*

Dada uma carta local $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$, com $x \in U$, as curvas $\alpha_u(t) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + tu),\ u \in \mathbb{R}^m$, estão em $C_x(M)$. Portanto $C_x(M) \neq \emptyset$.

Em $C_x(M)$, introduzimos a relação de equivalência $\sim$ da seguinte forma: $\alpha \sim \beta$ se para alguma carta local (U, φ), $x \in U$, temos

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)(t)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \beta)(t)\bigg|_{t=0}.$$

Notemos que se (V, ψ) é outra carta local com $x \in V$, então $\psi \circ \alpha = (\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \alpha)$. Logo pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\psi \circ \alpha)(t)\bigg|_{t=0} &= D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ \alpha(0)) \cdot \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)(t)\bigg|_{t=0} \\
&= D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x)) \cdot \frac{d}{dt}(\varphi \circ \beta)(t)\bigg|_{t=0} \\
&= D(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi(\beta(0))) \cdot \frac{d}{dt}(\varphi \circ \beta)(t)\bigg|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\psi \circ \beta)(t)\bigg|_{t=0}
\end{aligned}$$

e a relação $\sim$ independe do sistema de coordenadas escolhido.

Definição 2.34. *O quociente de $C_x(M)$ pela relação $\sim$ é chamado espaço tangente a M em x e é denotado por T_xM.*

Proposição 2.35. *O espaço T_xM possui uma estrutura natural de espaço vetorial real de dimensão m.*

Demonstração. Se $[\alpha]$ denota a classe de equivalência de uma curva $\alpha \in C_x(M)$, dados $u = [\alpha]$, $v = [\beta]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos $u + v = [\varphi^{-1}(\varphi \circ \alpha + \varphi \circ \beta)]$ e $\lambda u = [\varphi^{-1}(\lambda \cdot \varphi \circ \alpha)]$, onde $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ é uma carta local tal que $\varphi(x) = 0$. Observemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\varphi \circ (u + v))(t)\bigg|_{t=0} &= \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)(t)\bigg|_{t=0} + \frac{d}{dt}(\varphi \circ \beta)(t)\bigg|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\varphi \circ u)(t)\bigg|_{t=0} + \frac{d}{dt}(\varphi \circ v)(t)\bigg|_{t=0},
\end{aligned}$$

e

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ (\lambda \cdot u))(t)\bigg|_{t=0} = \lambda \cdot \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha))(t)\bigg|_{t=0} = \lambda \cdot \frac{d}{dt}(\varphi \circ u))(t)\bigg|_{t=0};$$

então, estas definições independem da carta escolhida e satisfazem os axiomas de espaços vetoriais. Notemos também que se $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ é uma carta local com $\varphi(x) = 0$ e $\{e_1, \ldots, e_m\}$ é uma base de $\mathbb{R}^m$, então o conjunto $\{[\varphi^{-1}(te_1)], \ldots, [\varphi^{-1}(te_m)]\}$ é uma base de T_xM, com te_i a curva $t \mapsto te_i,\ t \in \mathbb{R}$. De fato, existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tais que

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ u))(t)\bigg|_{t=0} = \lambda_1 \cdot e_1 + \cdots + \lambda_m \cdot e_m.$$

e como

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ (\lambda_i \cdot \varphi^{-1}(te_i)))\bigg|_{t=0} = \lambda_i \cdot e_i$$

temos que

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ u))(t)\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi \circ (\lambda_1 \varphi^{-1}(t \cdot e_1)))\bigg|_{t=0} + \cdots + \frac{d}{dt}(\varphi \circ (\lambda_m \varphi^{-1}(t \cdot e_m)))\bigg|_{t=0}$$

Portanto T_xM é um espaço vetorial de dimenção m. ■

Quando $\{e_1, \ldots, e_m\}$ é uma base canônica de $\mathbb{R}^m$, usa-se também a notação $[\varphi^{-1}(te_i)] = \partial/\partial x_i,\ i = 1, \ldots, m$.

Definição 2.36. *Seja M^n uma variedade de classe C^k, $k \geq 2$. Um atlas $\mathcal{A}$ sobre M é dito coerente se as mudanças de coordenadas têm jacobiano positivo, isto é, se $\varphi, \psi \in \mathcal{A}$, então $\psi \circ \varphi^{-1}$ tem jacobiano positivo.*

Definição 2.37. *Uma variedade M^n de classe C^k é dita orientável se M admite um atlas coerente.*

Contudo, existem outras definições equivalentes para variedade orientável, porém não são necessária neste contexto. Indicamos [5] para mais informações.

Toda aplicação diferenciável $f : M \to N$ induz em cada ponto $x \in M$ uma aplicação linear $Df(x) : T_xM \to T_yN$, onde $y = f(x)$, do seguinte modo: dado $u = [\alpha] \in T_xM$, definamos $Df(x) \cdot u = [f \circ \alpha]$, classe de equivalência da curva $f \circ \alpha$ em T_yN. Não é difícil ver que $Df(x)$ está bem definida e que é linear. Ela é chamada de *diferencial de f em x*.

Observação 2.38. Para uma carta local $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$, tomemos $\{\partial/\partial x_1, \ldots \partial/\partial x_m\}$ a base canônica de T_xM, então a derivada de φ é a aplicação linear $D\varphi(x) : T_xM \to T_{\varphi(x)}\mathbb{R}^m$ tal que

$$D\varphi(x) \cdot (\partial/\partial x_i) = [te_i] \in T_{\varphi(x)}\mathbb{R}^m.$$

Ou seja, $D\varphi(x)$ leva base em base e portanto, é uma transformação linear invertível.

Proposição 2.39. *Sejam M, N, e P variedades diferenciáves. Se $f : M \to N$ é C^k, $k \geq 1$, então f é contínua. Além disso, se $g : N \to P$ é C^k, então $g \circ f : M \to P$ é C^k.*

Definição 2.40. *Seja $f : M^m \to N^n$ aplicação entre variedades de classe C^k, $k \geq 1$. Suponhamos que (U, φ) e (V, ψ) são cartas locais de $q \in M$ e $f(q) \in N$ respectivamente. O posto de f em q é o posto da aplicação $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ no ponto $\varphi(q)$.*

Teorema 2.41 (Teorema do Posto)**.** *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Suponhamos que $f : M \to N$ é uma aplicação de classe C^k, $k \geq 1$, e que o posto de f é constante igual a r em todo ponto de M. Se $q \in M$, então existem cartas locais (U, φ) e (V, ψ) de q e $f(q)$ respectivamente tais que $\varphi(q) = 0 \in \mathbb{R}^m$, $\psi(f(q)) = 0 \in \mathbb{R}^n$ e*

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0).$$

Além disso, podemos assumir que $\varphi(U) = B^m_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^m$ e $\psi(V) = B^n_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^n$, onde $B^l_\varepsilon(0)$ é a bola centrada em $0 \in \mathbb{R}^l$ com raio $\varepsilon > 0$.

Demonstração. Consequência imediata do Teorema do posto de aplicações de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$. ∎

Definição 2.42. *Sejam M^m uma variedade diferenciável e n um inteiro positivo tal que $0 \leq n \leq m$. Um subconjunto $N^n \subset M$ é uma n-subvariedade se para cada $q \in N$ existe uma carta local (U, φ) de M tal que*

i) $q \in U$;

ii) $\varphi(q) = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m$;

iii) $\varphi(U) = B_\varepsilon^m(0) \subset \mathbb{R}^m$, $\varepsilon > 0$;

iv) $\varphi(U \cap N) = \{x \in B_\varepsilon^m(0);\, x_{n+1} = \cdots = x_m = 0\}$.

Proposição 2.43. *Sejam M^m uma variedade diferenciável de classe C^k e n um número inteiro tal que $0 \leq n \leq m$. Suponhamos que $N^n \subset M$ seja n-subvariedade de M. Então, N com a topologia induzida de M é uma variedade topológica de dimensão n. Além disso, cada carta local (U, φ) de M, como na Definição **2.42**, define uma carta local $(V, \overline{\varphi})$ em N, com $V = U \cap N$ e $\overline{\varphi} = \pi \circ \varphi|_V$, onde $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é a projeção nas primeiras n coordenadas. Essas coordenadas locais determinam uma estrutura diferenciável C^k em N.*

Demonstração. Como $N \subset M$ com a topologia induzida por M, então $V = U \cap N$ é um conjunto aberto em N e a união de vizinhanças dessa forma cobrem N. Além disso, pelo item iv) da Definição **2.42**, temos que $\overline{\varphi}$ é um homeomorfismo sobre $B_\varepsilon^n(0) = \pi(B_\varepsilon^m(0))$. Assim, N é uma variedade topológica de dimensão n.

Sejam (U, φ) e (U', ψ) vizinhanças coordenadas de M que satisfaçam as condições da Definição **2.42**. Sejam $V = U \cap N$ e $V' = U' \cap N$ e suponhamos que $V \cap V' \neq \emptyset$. Consideremos $\overline{\varphi} = \pi \circ \varphi\big|_V$ e $\overline{\psi} = \pi \circ \psi\big|_{V'}$. Pela primeira parte da demonstração, temos que $\overline{\psi} \circ \overline{\varphi}^{-1}$ e $\overline{\varphi} \circ \overline{\psi}^{-1}$ são homeomorfismos em seus domínios. Mostraremos que essas duas composições são diferenciáveis.

De fato, seja $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por $G(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$, de forma que $\pi \circ G$ é a identidade em $\mathbb{R}^n$. Notemos que G é de classe C^∞ em $B_\varepsilon^n(0)$. Logo $\overline{\varphi}^{-1} = \varphi^{-1} \circ G$ é de classe C^k. Por outro lado, $\overline{\psi} = \pi \circ \psi$ e $\overline{\psi}$ é também de classe C^k. Portanto, $\overline{\psi} \circ \overline{\varphi}^{-1}$ é de classe C^k em $\overline{\varphi}(V \cap V')$. Com o mesmo raciocínio, temos que $\overline{\varphi} \circ \overline{\psi}^{-1}$ é também de classe C^k em $\overline{\psi}(V \cap V')$. ∎

Definição 2.44. *Uma subvariedade regular de uma variedade M é qualquer subconjunto N de M com a propriedade de ser uma n-subvariedade e com uma estrutura diferenciável C^k que satisfaça as condições i), ii), iii) e iv) da Definição **2.42**.*

Teorema 2.45. *Seja $f : M^m \to N^n$ uma aplicação C^r, $r \geq 1$. Suponhamos que f tenha posto constante igual a k em todo ponto de M. Então, $f^{-1}(q) \subset M$ é uma subvariedade fechada regular em M de dimensão $m - k$, para todo $q \in f(M)$.*

Demonstração. Seja $A = f^{-1}(q) \subset M$. Como f é contínua e $q \in N$, então $A = f^{-1}(q)$ é subconjunto fechado em M. Mostraremos que A possuí propriedade de $(m-k)$-subvariedade de M.

Seja $p \in A$. Pelo Teorema do Posto **2.41**, existem vizinhanças U de p em M e V de q em N, tais que $\varphi : U \subset M \to B_\varepsilon^m(0)$, $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^m$ e $\psi : V \subset N \to B_\varepsilon^n(0)$, $\psi(q) = 0 \in \mathbb{R}^n$, com a propriedade de que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f \circ \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_m) = q \quad &\Leftrightarrow \psi(q) = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_m) \\ &\Leftrightarrow \psi(q) = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) \\ &\Leftrightarrow (0, \ldots, 0) = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0. \end{aligned}$$

Em outras palavras, temos $A \cap U = \varphi^{-1}(\{x \in B_\varepsilon^m(0);\, x_1 = \cdots = x_k = 0\})$, e portanto,

$$\varphi(A \cap U) = \{x \in B_\varepsilon^m(0);\, x_1 = \cdots = x_k = 0\} \cong B_\varepsilon^{m-k} \subset \mathbb{R}^{m-k}$$

Portanto A é uma $(m-k)$-subvariedade de M, regular. ■

Definição 2.46. *Seja, para cada $p \in M$, T_pM o espaço de vetores tangentes a M em p. O conjunto*

$$TM = \{(p, v_p) : p \in M, v_p \in T_pM\},$$

é dito o espaço fibrado tangente de M.

Denotemos por $\pi_1 : TM \to M$ a projeção dada por $\pi_1(p, v_p) = p$.

Definição 2.47. *Um campo vetorial de classe C^k em M^n é uma aplicação $X : M \to TM$ de classe C^k (do ponto de vista de variedades) tal que $\pi_1 \circ X : M \to M$ é a identidade, ou seja, X é uma aplicação de classe C^k que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$.*

Observação 2.48. Dada uma carta local (φ, U) de M, onde $\varphi = (x^1, \ldots, x^n) : U \to \mathbb{R}^n$, para cada ponto $p \in U$, o campo vetorial X de classe C^k é dado por

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Portanto, em cada carta local, para cada ponto $p \in U$, as n funções reais $\alpha^i : U \to \mathbb{R}$ definem o o campo vetorial X, relativo a base $\{\partial/\partial x_i\}$, com $i = 1, 2, \ldots$. Desta forma, X é diferenciável se, e somente se, para toda carta local φ de M, as α^i forem diferenciáveis.

Se (ψ, V), com $\psi = (y^1, \ldots, y^n)$, é outra carta local de M e $V \cap U \neq \emptyset$, então as funções $\beta^i : V \to \mathbb{R}$ determinadas pelo campo X e o sistema de coordenadas ψ, relacionam-se com as α^j do seguinte modo:

$$\beta^i(p) = \sum_{j=1}^{n} \alpha^j(p) \frac{\partial y^i}{\partial x^j}, \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Denotaremos por $\mathbb{X}(M)$ o espaço dos campos vetoriais de classe C^k em M.

Definição 2.49. *Uma curva integral de $X \in \mathbb{X}(M)$ por um ponto $p \in M$ é uma aplicação $\gamma : I \to M$ de classe C^1 tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$ para todo $t \in I$, onde I é um intervalo de $\mathbb{R}$ tal que $0 \in I$.*

Em uma carta local $\varphi : U \subset M \to \mathbb{R}^m$ de M, o campo vetorial $X \in \mathbb{X}(M)$ é representado pelo campo vetorial $\varphi_*(X) : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ dado por

$$\varphi_*(X)(p) = (D\varphi)(\varphi^{-1}(p)) \cdot X(\varphi^{-1}(p)),\ p \in \varphi(U),$$

onde $D\varphi$ e φ^{-1} denotam, respectivamente, as aplicações derivada e inversa da carta local φ.

Diremos que $\varphi_*(X)$ é a expressão de X na carta local $\varphi : U \subset M \to \mathbb{R}^m$.

Proposição 2.50. *Seja $\gamma : I \to U \subset M$ uma aplicação de classe C^1. Então γ é uma curva integral de X se, e somente se, $\varphi \circ \gamma : I \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ for uma curva integral de $\varphi_*(X)$.*

Demonstração. Se $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$ então

$$\begin{aligned}
\varphi_*(X)((\varphi \circ \gamma)(t)) &= D\varphi(\gamma(t)) \cdot X(\varphi^{-1}(\varphi \circ \gamma(t))) \\
&= D\varphi(\gamma(t)) \cdot X(\gamma(t)) \\
\text{(hipótese)} \quad &= D\varphi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \\
&= (\varphi \circ \gamma)'(t).
\end{aligned}$$

Reciprocamente, se $\varphi_*(X)(\varphi \circ \gamma(t)) = (\varphi \circ \gamma)'(t)$ então

$$D\varphi(\gamma(t)) \cdot X(\gamma(t)) = D\varphi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Como $D\varphi(\gamma(t))$ é invertível, para todo $t \in I$, segue o resultado. ■

Dados $p \in M$, um campo $X \in \mathbb{X}(M)$ e uma carta local (φ, U), com $p \in U$, sabemos que existe uma única solução γ de $\varphi_*(X)$ passando por $\varphi(p)$. Com a Proposição **2.50**, $\varphi^{-1} \circ \gamma$ é curva integral de X passando por p. Além disso, esta é única, pois γ é única. Podemos então enunciar o seguinte Teorema.

Teorema 2.51 (Existência e unicidade)**.** *Sejam $X \in \mathbb{X}(M)$ e $p \in M$. Então, existe uma única curva integral de X passando por p.*

O seguinte lema, também é consequência imediata da Proposição **2.50**.

Lema 2.52. *Sejam $p \in M$ e $X \in \mathbb{X}(M)$. Suponhamos que exista uma carta local (φ, U) tal que $p \in U$ e que a solução $\varphi \circ \gamma$ de $\varphi_*(X)$ esteja definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Então*

(a) $\varphi \circ \gamma$ é trajetória fechada se, e somente se, γ é trajetória fechada;

(b) $\varphi \circ \gamma$ é ponto singular se, e somente se, γ é ponto singular;

(c) $\varphi \circ \gamma$ *é injetiva se, e somente se* γ *é injetiva.*

Proposição 2.53. *Nas condições do Lema **2.52**, temos que* $\varphi^{-1}(\omega(\varphi \circ \gamma)) = \omega(\gamma)$.

Demonstração. Seja $q \in \omega(\varphi \circ \gamma)$. Então existe uma sequência $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $t_n \to \infty$ e $\varphi \circ \gamma(t_n) \to q$ quando $n \to \infty$. Por continuidade,

$$\varphi^{-1}(\lim \varphi \circ \gamma(t_n)) = \varphi^{-1}(q) \Rightarrow \lim \gamma(t_n) = \varphi^{-1}(q)$$

e concluímos que $\varphi^{-1}(q) \in \omega(\gamma)$ e $\varphi^{-1}(\omega(\varphi \circ \gamma)) \subset \omega(\gamma)$.

Reciprocamente, se $p \in \omega(\gamma)$, então existe uma sequência $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $s_n \to \infty$ e $\gamma(s_n) \to p$, quando $n \to \infty$. Por continuidade, temos que

$$\varphi(\lim \gamma(s_n)) = \varphi(p) \Rightarrow \lim(\varphi \circ \gamma)(s_n) = \varphi(p)$$

e $p \in \varphi^{-1}(\omega(\varphi \circ \gamma))$. Concluímos que $\omega(\gamma) = \varphi^{-1}(\omega(\varphi \circ \gamma))$. ■

2.3 Teorema de Poincaré-Bendixson na esfera $\mathbb{S}^2$

Consideremos a *Esfera 2-dimensional* $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; |x|^2 = 1\}$, onde $|\cdot|$ é a norma euclidiana do $\mathbb{R}^3$.

A esfera $\mathbb{S}^2$ é uma 2-variedade diferenciável de classe C^∞. De fato, consideremos o ponto $N = (0, 0, 1) \in \mathbb{S}^2$ o polo norte da esfera. Traçamos uma reta passando pelo polo norte e por um ponto da esfera diferente do polo norte. Esta reta interceptará o plano $z = -1$ em um único ponto, como mostra a figura à seguir.

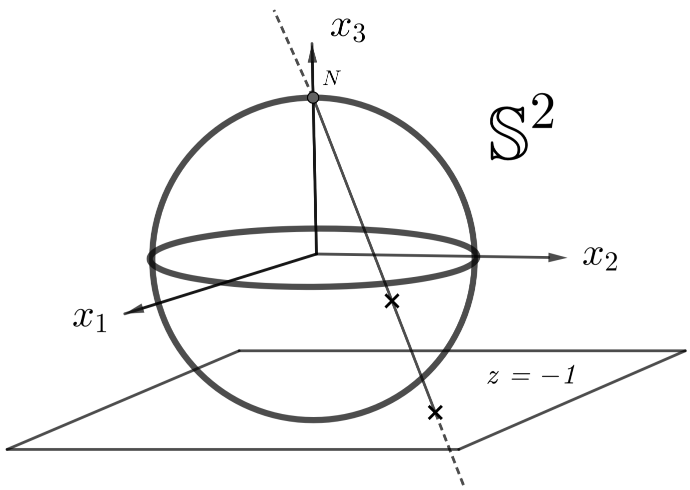

Figura 2.8: A esfera $\mathbb{S}^2$.

Portanto, temos associado a cada ponto de $\mathbb{S}^2 \setminus N$, um único ponto do plano $z = -1$. De maneira geral, dado que o plano $z = -1$ é difeomorfo a $\mathbb{R}^2$, associamos de maneira biunívoca a cada ponto da esfera menos um ponto, ao plano $\mathbb{R}^2$. Explicitamente temos a aplicação $\psi : \mathbb{S} \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2$, dada por

$$\psi_N(x, y, z) = \left(\frac{2x}{1-z}, \frac{2y}{1-z}\right).$$

Analogamente, associamos a cada ponto do plano a um ponto de $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ por $\pi_N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, dada por

$$\pi_N(a,b) = \left(\frac{4a}{a^2+b^2+4}, \frac{4b}{a^2+b^2+4}, \frac{-8}{a^2+b^2+4}+1\right).$$

Não é difícil ver que estas aplicações são C^∞, $\pi_N \circ \psi_N(x,y,z) = (x,y,z)$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ e $\psi_N \circ \pi_N(a,b) = (a,b)$, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$. Portanto $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ e $\mathbb{R}^2$ são C^∞-difeomorfos. Este mapeamento é chamado de *projeção estereográfica* sobre o plano $z = -1$.

Vejamos que ψ_N está bem definida para todo $p \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$.

Agora, se tomarmos o ponto $S = (0,0,-1) \in \mathbb{S}^2$, o polo sul, fazemos a projeção estereográfica de $\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$ com o plano $\mathbb{R}^2$ pela aplicação

$$\psi_S(x,y,z) = \left(\frac{2x}{z+1}, \frac{2y}{z+1}\right)$$

cuja inversa é dada por

$$\pi_S(a,b) = \left(\frac{4a}{a^2+b^2+4}, \frac{4b}{a^2+b^2+4}, \frac{8}{a^2+b^2+4}-1\right).$$

Estes dois difeomorfismos C^∞ cobrem toda a esfera e, portanto, $\mathbb{S}^2$ é uma variedade C^∞.

Um fato importante é que dados um campo vetorial X de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ e $x \in \mathbb{S}^2$, para que a solução $\varphi(t,x)$ pertença a $\mathbb{S}^2$ para todo $t \in \mathbb{R}$ é necessário e suficiente que $X(x) \in T_x\mathbb{S}^2$ para todo $x \in \mathbb{S}^2$. De fato, seja $x \in \mathbb{S}^2$. Se $\varphi(t,x) \in \mathbb{S}^2$, para todo $t \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned}
\varphi(t,x) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)),\ \ \forall t \in \mathbb{R} \ &\Leftrightarrow (x_1(t))^2 + (x_2(t))^2 + (x_3(t))^2 = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow 2x_1(t)\frac{dx_1}{dt} + 2x_2(t)\frac{dx_2}{dt} + 2x_3(t)\frac{dx_3}{dt} = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \langle \varphi(t,x), \varphi'(t,x) \rangle = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \langle \varphi(t,x), X(\varphi(t,x)) \rangle = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow X(x) \in T_x\mathbb{S}^2, \quad \forall x \in \mathbb{S}^2.
\end{aligned}$$

Reciprocamente, suponhamos que $X(x) \in T_x\mathbb{S}^2$, $\forall x \in \mathbb{S}^2$ e seja φ a solução de X passando por x definida em um intervalo maximal $I = (\omega_-, \omega_+)$. Suponhamos que exista $t_0 \in I$ tal que $\varphi(t_0,x) \notin \mathbb{S}^2$; então existe um $t_1 \in I$ tal que $\varphi(t_1,x) \in \mathbb{S}^2$ e $\varphi(t_1+\varepsilon,x) \notin \mathbb{S}^2$, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Mas isso é um absurdo pois concluiríamos que $\varphi'(t_1,x) = X(\varphi(t_1,x)) \notin T_{\varphi(t_1,x)}\mathbb{S}^2$. Portanto, $\varphi(t,x)$ pertence a $\mathbb{S}^2$ para todo $t \in I$, e como $\mathbb{S}^2$ é compacto, segue que $I = \mathbb{R}$.

O seguinte Lema nos ajudará na prova do Teorema de Poincaré-Bendixson na esfera.

Lema 2.54. *Sejam $X \in \mathbb{X}(\mathbb{S}^2)$, $p \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ e γ a órbita passando por p. Suponhamos que $\psi_N \circ \gamma$ esteja definida no intervalo maximal (ω_-, ω_+). Se $\lim_{t \to \omega_+} |\psi_N \circ \gamma(t)| = \infty$, então $\lim_{t \to \omega_+} \gamma(t) = N$. Analogamente, se $p \in \mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$, $\psi_S \circ \gamma$ estiver definida no intervalo maximal (ω_-, ω_+) e $\lim_{t \to \omega_+} |\psi_S \circ \gamma(t)| = \infty$, então $\lim_{t \to \omega_+} \gamma(t) = S$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponhamos que $\omega_+ < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, existe δ tal que, se $|\omega_+ - t| < \delta$, então

$$|\psi_N \circ \gamma(t)| > \frac{6}{\varepsilon^2}.$$

Se $\gamma(t) = (x_1, x_2, x_3)$, então

$$|\psi_N \circ \gamma(t)| = \left|\frac{2}{1 - x_3}\right| \sqrt{x_1^2 + x_2^2} > \frac{6}{\varepsilon^2}.$$

Dado que $x_1^2 + x_2^2 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, concluímos que

$$\frac{2}{1 - x_3} \geq \frac{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{1 - x_3} > \frac{6}{\varepsilon^2},$$

resultando que

$$\frac{\varepsilon^2}{3} > 1 - x_3.$$

Como $\gamma \subset \mathbb{S}^2$, ocorre que

$$x_1^2 + x_2^2 = 1 - x_3^2 = (1 + x_3)(1 - x_3) \leq 2(1 - x_3).$$

Portanto, se $|t - \omega_+| < \delta$, temos que

$$|\gamma(t) - N| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - 1)^2} \leq \sqrt{3(1 - x_3)} < \sqrt{3\frac{\varepsilon^2}{3}} = \varepsilon,$$

já que $(1 - x_3)^2 < 1 - x_3 < 1$. Concluímos assim que $\lim\limits_{t \to \omega_+} \gamma(t) = N$. ∎

Teorema 2.55 (Poincaré-Bendixson em $\mathbb{S}^2$)**.** *Seja X um campo vetorial de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$ tal que se $p \in \mathbb{S}^2$ então $\varphi(t, p)$ pertence a $\mathbb{S}^2$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Se X tem um número finito de pontos singulares em $\mathbb{S}^2$, então o conjunto ω-limite de uma órbita por $p \in \mathbb{S}^2$ tem as seguintes alternativas:*

1. *Se $\omega(p)$ contém somente pontos regulares, então $\omega(p)$ é uma órbita periódica.*

2. *Se $\omega(p)$ contém pontos regulares e singulares, então $\omega(p)$ consiste em um conjunto de órbitas, que tendem a um desses pontos singulares quando $t \to \pm\infty$.*

3. *Se $\omega(p)$ somente possui pontos singulares então $\omega(p) = \{q\}$, onde q é ponto singular.*

Demonstração. Seja $\gamma_p^+ = \{\varphi(t, p), t \geq 0\}$ a semi-órbita positiva da curva integral do campo X, passando por $p \in \mathbb{S}^2$. Como $\mathbb{S}^2$ é compacta, então $\omega(x) \neq \emptyset$. Se p é singular, então $\omega(p) = \{p\}$.

Se p é regular, temos duas possibilidades:

1. $\gamma(p)$ é fechada, então $\omega(p) = \gamma(p)$.

2. $\gamma(p)$ é injetiva. Neste caso, tomemos $p \in \gamma$. Suponhamos que $p \neq N$ e seja $\psi_{N*}(X)$ a expressão do campo X na carta local ψ_N. Como X é de classe C^1, existe uma única solução $\varphi_0(t, \psi_N(p))$ definida no intervalo maximal $(\overline{\omega_-}, \overline{\omega_+})$.

Se $\overline{\omega_+} = \infty$ e $\{\varphi_0(t, \psi_N(p)),\ t \geq 0\}$ está contido em um compacto, então φ_0 está sob as hipóteses do Teorema de Poincaré-Bendixson no plano. Pelas Proposições **2.50** e **2.53**, $(\pi_N \circ \varphi_0)(t, \psi_N(p))$ é curva integral de X passando por p herdando as propriedades de φ_0 e de seu conjunto limite, e fica demonstrado o Teorema.

Se $\overline{\omega_+} = \infty$ e $\{\varphi_0(t, \psi_N(p)),\ t \geq 0\}$ não está contido em nenhum compacto, então $\lim_{t\to\infty} |\varphi_0(t, \psi_N(p))| = \infty$, ou seja, $\lim_{t\to\infty} \pi_N \circ \varphi_0(t, \psi_N(p)) = N$ e $\omega(p) = N$, pelo Lema **2.54**. Pelo Teorema **2.9**, N é ponto singular, já que $\omega(p)$ é conexo.

Se $\overline{\omega_+} < \infty$, então $\lim_{t\to\overline{\omega_+}} |\varphi_0(t, \psi_N(p))| = \infty$ pois a órbita sai de qualquer compacto, e $\lim_{t\to\overline{\omega_+}} \pi_N \circ \varphi_0(t, \psi_N(p)) = N$. Observemos que N não pode ser ponto singular de X, já que a solução $\pi_N \circ \varphi_0(t, \psi_N(p)) = \varphi(t, p)$ pode ser estendida e $N = \varphi(\overline{\omega_+}, p)$. Portanto, N é ponto regular. Tomemos agora a expressão do campo X pela carta local ψ_S dada por $\psi_{S*}(X)$. A solução única $\varphi_1(t, \psi_S(N))$ de $\psi_{S*}(X)$ está definida para t no intervalo maximal (ω_-, ω_+).

Se $\omega_+ = \infty$ e $\{\varphi_1(t, \psi_S(N)),\ t \geq 0\}$ está contida em um compacto, segue o teorema, pelo mesmo argumento apresentado acima.

Se $\omega_+ = \infty$ e $\lim_{t\to\infty} |\varphi_1(t, \psi_S(N))| = \infty$, então $\lim_{t\to\infty} \pi_S \circ \varphi_1(t, \psi_S(N)) = S$ e $\omega(p) = S$, ponto singular.

Se $\omega_+ < \infty$, então $\lim_{t\to\omega_+} |\varphi_1(t, \psi_S(N))| = \infty$ e $\lim_{t\to\omega_+} \pi_S \circ \varphi_1(t, \psi_S(N)) = S$. S não é singular pelos mesmo argumentos anteriores, portanto $\pi_S \circ \varphi_1(t, \psi_S(N)) = \varphi(t, N)$ pode ser estendida, onde $\varphi(\omega_+ + \overline{\omega_+}, p) = S$. Como $\gamma(p) = \gamma(N) = \gamma(S)$ e γ é injetiva, $\varphi(t, S) \neq N$ para todo $t \geq 0$. Isto quer dizer que $\varphi_0(t, \psi_N(S))$ está definida para todo $t \geq 0$.

Vejamos que $\{\varphi_0(t, \psi_N(S)),\ t \geq 0\}$ é limitada. Se $\lim_{t\to\infty} |\varphi_0(t, \psi_N(S))| = \infty$, então $\lim_{t\to\infty} \pi_N \circ \varphi_0(t, \psi_N(S)) = N$, onde concluiríamos que N é singular, o que é um absurdo. Logo $\{\varphi_0(t, \psi_N(S)),\ t \geq 0\}$ é limitado e portanto está contido em um compacto, e o resultado segue-se pelo Teorema de Poincaré-Bendixson no plano. ■

Exemplo 2.56. No campo $X : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $X(x, y, z) = (-y, x, 0)$, se $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{S}^2$ então a solução de X passando por w está totalmente contida na esfera. De fato, $< w, X(w) >= 0$, portanto $X(w) \in T_w\mathbb{S}^2$, para todo $w \in \mathbb{S}^2$.

Além disso, o fluxo desse campo é da forma $\varphi(t, w) = (\sqrt{1 - w_3^2}\cos(t), \sqrt{1 - w_3^2}\mathrm{sen}(t), w_3)$. As órbitas são todas fechadas a menos das que passam pelos polos norte e sul, que são pontos singulares. Neste caso os conjuntos limites são todos órbitas fechadas ou pontos singulares. Adiante, veremos que não é possível existir um campo diferenciável na esfera sem singularidades. Isto será consequência do Teorema de Poicaré-Hopf.

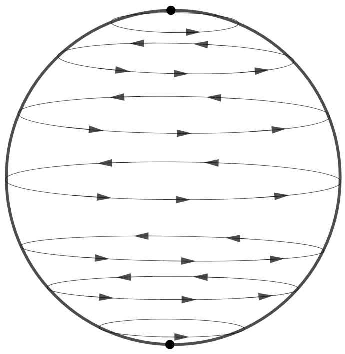

Figura 2.9: Fluxo do campo X na esfera.

2.4 Teorema de Poincaré-Bendixson no Toro bidimensional $\mathbb{T}^2$

Consideremos que no espaço $\mathbb{R}^3$, a circunferência contida plano xz, dada pelas equações $(x-2)^2+z^2=1$ e $y=0$, seja rotacionado em torno do eixo z. A superfície obtida é o *Toro 2-dimensional*, cuja equação é dada por $\mathbb{T}^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ (\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2=1\}$.

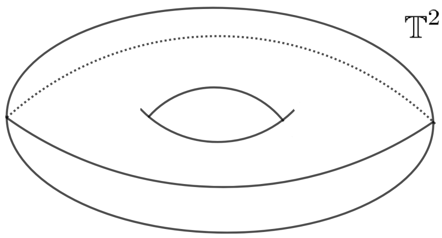

Figura 2.10: O toro.

Portanto, $\mathbb{T}^2=f^{-1}(1)$ tal que $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ é definida por $f(x,y,z)=(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2$. Como f tem posto constante em $\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$, pelo Teorema **2.45** temos que $\mathbb{T}^2$ é subvariedade regular fechada, portanto uma variedade bidimensional.

Uma parametrização do toro é dada pela aplicação $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ de classe C^∞ definida como

$$g(x,y)=((2+\cos 2\pi y)\cos 2\pi x,(2+\cos 2\pi y)sen2\pi x,sen2\pi y).$$

Não é difícil ver que $g(\mathbb{R}^2)=\mathbb{T}^2$ e que $Dg(x,y)$ é uma transformação linear injetiva. A menos de injetividade (tomando uma restrição de g) podemos considerar g como a inversa da carta local do toro.

Consideremos $\sim_1$ a relação de equivalência em $\mathbb{R}^2$, de forma que, dado $x,y\in\mathbb{R}^2$, então

$$x\sim_1 y \text{ se, e somente se, } x-y\in\mathbb{Z}^2,$$

isto é, se $x=(x_1,x_2)$ e $y=(y_1,y_2)$ então $x\sim_1 y$ se, e somente se, x_1-y_1 e x_2-y_2 são números inteiros. Observemos que o espaço quociente de $\mathbb{R}^2/\sim_1$ pode ser identificado difeomorficamente com o quadrado unitário $R=[0,1)\times[0,1)$.

Proposição 2.57. *Sejam $x,y\in\mathbb{R}^2$. $g(x)=g(y)$ se, e só se, $x\sim_1 y$.*

Demonstração. Se $x \sim_1 y$, então $\text{sen}(2\pi x_2) = \text{sen}(2\pi y_2)$, $\cos(2\pi x_2) = \cos(2\pi y_2)$, $\text{sen}(2\pi x_1) = \text{sen}(2\pi y_1)$ e $\cos(2\pi x_1) = \cos(2\pi y_1)$, portanto $g(x) = g(y)$.

Reciprocamente, se $g(x) = g(y)$ temos que $\text{sen}(2\pi x_2) = \text{sen}(2\pi y_2)$, portanto $y_2 - x_2 = n \in \mathbb{Z}$ e por isso,

$$\begin{aligned}(2 + \cos(2\pi x_2))\cos(2\pi x_1) &= (2 + \cos(2\pi y_2))\cos(2\pi y_1)\\ &= (2 + \cos(2\pi(x_2 + n)))\cos(2\pi y_1)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos(2\pi x_1) = cos(2\pi y_1),$$

então $x_1 - y_1 = m \in \mathbb{Z}$, e concluímos que $x \sim_1 y$. ■

A Proposição **2.57** nos diz que a restrição de g ao quadrado R é uma bijeção sobre $\mathbb{T}^2$. Mais ainda, ela nos diz que se tomarmos o quociente de $\mathbb{R}^2$ pela relação $\sim_1$, temos que $\mathbb{T}^2$ é difeomorfo a $\mathbb{R}^2/\sim_1$.

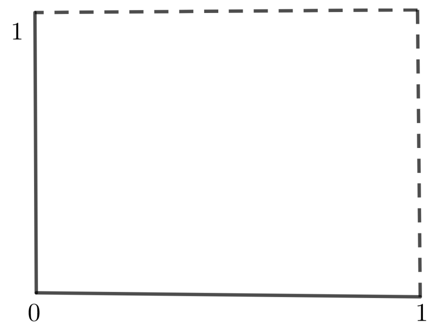

Figura 2.11: O toro visto como R.

Portanto, consideraremos $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\sim_1$ e utilizaremos a distância euclidiana $d(x, y) = \min\{|x - w|;\ w \sim_1 y\}$, para $x, y \in \mathbb{R}^2/\sim_1$. Além disso, considerando que $\mathbb{T}^2$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ limitado e fechado, temos que $\mathbb{T}^2$ é compacto.

2.4.1 Um conjunto limite diferente dos casos anteriores

Até agora, para o plano e a esfera, os conjuntos limites eram os mesmos, dados pelo Teorema de Poincaré-Bendixson. Uma questão natural é indagarmos se os resultados obtidos até agora podem ser estendidos para outras variedades. Veremos que isto não é sempre verdade. Trataremos de um exemplo em que o conjunto limite de um campo vetorial definido no toro é distinto dos que vimos no caso do plano e da esfera.

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Dado o problema de valor inicial

$$\begin{cases} X(x, y) = (1, \lambda) \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \end{cases}, \tag{2.4.1.1}$$

com $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos que este problema está bem definido no toro representado no quadrado R e sua solução é da forma $\varphi(t, x_0) = (1, \lambda)t + (x_0, y_0)$.

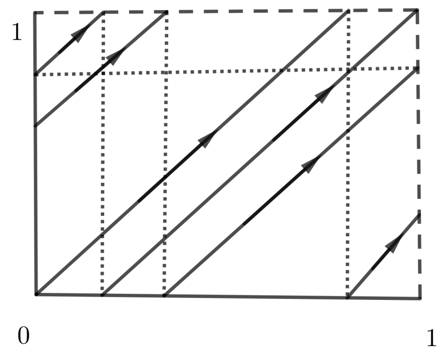

Figura 2.12: Solução $\varphi(t, x_0) = (1, \lambda)t + (x_0, y_0)$.

Proposição 2.58. *A solução de* (2.4.1.1) *é periódica se, e somente se,* λ *é racional.*

Demonstração. Se $\lambda = \dfrac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$ temos que $\varphi(q, (x_0, y_0)) = (q, p) + (x_0, y_0) \sim_1 (x_0, y_0)$, portanto $\varphi(t, (x_0, y_0))$ é periódica.

Reciprocamente, se $\varphi(t, (x_0, y_0))$ é periódica de período $T \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$, então $(T, \lambda T) + (x_0, y_0) \sim_1 (x_0, y_0)$, logo $(T, \lambda T) = (x_0, y_0) + (T, \lambda T) - (x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$. Portanto $(T, \lambda T) = (q, p)$ e concluímos que $\lambda = p/q$. ■

Lema 2.59. *Os subgrupos aditivos próprios* H *de* $\mathbb{R}$ *ou são densos em* $\mathbb{R}$ *ou são da forma* $H = \{c \cdot z;\ z \in \mathbb{Z}\}$, *para algum* $c \in \mathbb{R}$. *Em particular, se* $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *então* $G = \{m + n\lambda;\ m, n \in \mathbb{Z}\}$ *é denso em* $\mathbb{R}$.

Demonstração. Seja G um subgrupo próprio de $\mathbb{R}$ e denotemos por $G^+ = \{g \in G;\ g > 0\}$. Se G não é denso, então $\inf G^+ = c > 0$. De fato, suponhamos que $c = 0$. Dado um intervalo (a, b), existe $g \in G^+$ tal que $0 < g < b - a$. Portanto, existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $mg \in (a, b)$. Como $mg \in G$, então G é denso em $\mathbb{R}$ o que é um absurdo.

Notemos que $c \in G^+$, pois, caso contrário, existiriam $g, h \in G^+$ tais que $c < h < g < c + c/2$ o que implicaria que $0 < g - h < c/2$ contrariando c ser ínfimo. Agora, suponhamos que existe $g \in G$ tal que g não é um múltiplo de c. Seja m o maior inteiro tal que $g - mc > 0$. Então $g - (m + 1)c < 0$; ou seja, $mc < g < (m + 1)c$. Como g e mc pertencem a G e $g - mc > 0$, segue-se $g - mc \in G^+$. Por fim, como $g - mc < c$, segue-se que $c \neq \inf G^+$, uma contradição. Logo $G = \{cm;\ m \in \mathbb{Z}\}$.

Por último, se $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, sejam $G = \{m + n\lambda;\ m, n \in \mathbb{Z}\}$ e $c = \inf G^+$. Suponhamos que $c > 0$, então $G = \{c \cdot k;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Logo $\lambda = ck$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, e $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Por outro lado, se $m \in \mathbb{Z}$ então $m = (m + 0 \cdot \lambda) \in G$. Portanto, existe $h \in \mathbb{Z}$ tal que $hc = m \in G$, e concluímos que $c \in \mathbb{Q}$, o que é um absurdo. Logo G é denso em $\mathbb{R}$. ■

Proposição 2.60. *As órbitas geradas por* (2.4.1.1), *quando* $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, *são densas em* $\mathbb{T}^2$.

Demonstração. Como todas as órbitas são paralelas, basta mostrarmos que a órbita passando por $x_0 = (0, 0)$ é densa no toro. Vejamos que $\{0\} \times [0, 1)$ é uma seção transversal do campo e mostraremos que $\{0\} \times [0,1) \cap \{\varphi(t, x_0),\ t \in \mathbb{R}\}$ é um conjunto denso em $\{0\} \times [0,1) \subset \mathbb{T}^2$, o que implica que a órbita passando por $(0,0)$ é densa no toro. Pelo Lema **2.59**, o conjunto dos pontos $m + n\lambda$, com $m, n \in \mathbb{Z}$ é denso em $\mathbb{R}$, portanto $\varphi(n,(0,0)) = (n, n\lambda) \sim_1 (0, m + n\lambda)$ para quaisquer $n, m \in \mathbb{Z}$. Portanto $\{0\} \times [0,1) \cap \{\varphi(t, x_0),\ t \in \mathbb{R}\}$ é denso, o que prova a Proposição. ∎

A Proposição anterior nos diz que o fecho de qualquer órbita da solução do problema (2.4.1.1) com $\lambda \notin \mathbb{Q}$ é o próprio toro. Portanto, os conjuntos α-limite e ω-limite da solução de (2.4.1.1) são iguais ao toro.

Isto nos diz que um fato exatamente igual ao Teorema de Poincaré-Bendixson no plano ou na esfera se faz impossível. Porém com algumas hipóteses adicionais provaremos o Teorema de Schwartz, que nos permitirá inferir sobre os conjuntos limites gerados por certos fluxos no toro, o qual veremos no próximo capítulo.

Capítulo 3

O Teorema de Schwartz

Como visto no Capítulo 2, alguns campos vetoriais definidos em um toro podem apresentam conjuntos ω-limite distintos dos casos da esfera e do plano. Neste capítulo, demonstraremos o Teorema de Schwartz, que classifica os conjuntos minimais de fluxos gerados em variedades bidimensionais compactas. Por fim, mostraremos algumas aplicações desse teorema, em que utilizaremos o conceito de número de rotação de um campo no toro.

Para isso, precisamos de alguns resultados topológicos sobre variedades bidimensionais compactas, como o Teorema de Poincaré-Hopf e o Teorema de classificação de variedades compactas bidimensionais. Iniciaremos este capítulo apresentando estes resultados.

3.1 Teorema de Poincaré-Hopf e a classificação de variedades bidimensionais compactas

Como na definição de singularidade de campos em espaços euclidianos, dizemos que um ponto p da variedade M é uma *singularidade* do campo vetorial $X : M \to TM$ se $X(p) = 0$. A singularidade p é isolada se existir uma vizinhança V_p de p tal que para cada ponto $x \in V_p$ diferente de p, temos $X(x) \neq 0$.

Se $p \in M$ é uma singularidade isolada do campo diferenciável X sobre M, então associamos a essa singularidade um número inteiro chamado *índice de p no campo X*, denotado por $I(X, p)$. Se tomarmos $p \in M$ não singular, a definição de índice não difere da dada a um ponto singular, porém sempre teremos que o índice de p não singular tem valor zero.

3.1.1 O índice de uma singularidade

Primeiro, consideremos $\mathcal{C}$ uma curva fechada e diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Seja $f : \mathcal{C} \to \mathbb{S}^1$ uma aplicação diferenciável. Damos à curva fechada $\mathcal{C}$ a orientação induzida pela orientação de $\mathbb{R}^2$ dada pela regra da mão direita. Consideremos a mesma orientação em um segundo exemplar de $\widetilde{\mathbb{R}}^2$ que induz uma orientação para $\mathbb{S}^1$.

Definição 3.1. *Um ponto $a \in \mathcal{C}$ é dito ponto crítico de f, se $df(a) : T_a\mathcal{C} \to T_{f(a)}\mathbb{S}^1$ possui posto 0. Caso contrário, $a \in \mathcal{C}$ é dito ponto regular da aplicação f.*

Em um ponto regular, $df(x) : T_x\mathcal{C} \to T_{f(x)}\mathbb{S}^1$ é um isomorfismo de espaços vetoriais orientados. Nesse caso, definimos o *sinal* de $df(x)$ e denotamos $\operatorname{sign} df(x)$, por $+1$ ou -1 se $df(x)$ preserva ou não a orientação, respectivamente.

As imagens de pontos críticos são chamadas de *valores críticos* e os demais pontos são chamados *valores regulares* da aplicação. Então, um ponto $y \in \mathbb{S}^1$ é um valor regular de f se $f^{-1}(y) = \emptyset$ ou todos os pontos $x \in f^{-1}(y)$ são pontos regulares de f. Em um valor regular y de f, consideramos o número inteiro

$$\operatorname{grau}(f; y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sign} df(x),$$

denominado *grau* de f em y.

Exemplo 3.2. A figura a seguir mostra um exemplo de uma aplicação $f : \mathcal{C} \to \mathbb{S}^1$, onde $\mathcal{C} = \mathbb{S}^1$ e cuja imagem é indicada pelas setas em $\mathbb{S}^1$, de forma que $f(x_i) = y_i$, para todo i.

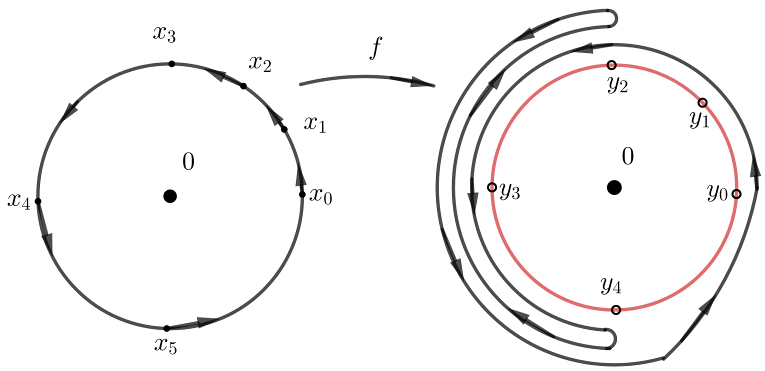

Figura 3.1: Representação da aplicação $f : \mathcal{C} \to \mathbb{S}^1$.

Observemos que o ponto y_0 é valor regular de f e o sinal de $df(x_0)$ é $+1$. Quando x percorre toda curva $\mathcal{C}$, a imagem $f(x)$ passa três vezes por y_3: duas vezes no sentido positivo e uma vez no sentido negativo. Portanto, $\operatorname{grau}(f; y_3) = 2 - 1 = 1$.

Como $\mathcal{C}$ é compacto, se y é regular então $f^{-1}(y)$ consiste em um número finito de pontos (pelo Teorema **2.45**).

Notemos que os pontos críticos não são necessariamente pontos isolados. De fato, se um ponto crítico y_i não for isolado, então existirá um intervalo $[a, b]$ tal que $f([a, b]) = y_i$.

De maneira geral podemos substituir f por uma pequena perturbação $\widetilde{f}$ de f com pontos críticos isolados e de tal forma que o grau não dependa da perturbação.

Quando o ponto x percorrer completamente a curva fechada $\mathcal{C}$, a sua imagem $f(x)$ percorrerá um caminho na circunferência $\mathbb{S}^1$. Dado que a curva $\mathcal{C}$ é fechada, o ponto $f(x)$ sempre retorna ao ponto de partida.

Como $\mathcal{C}$ é uma curva fechada, podemos parametrizá-la por um intervalo da reta, e induzimos a orientação da reta em $\mathcal{C}$. Portanto dado um ponto $x_i \in \mathcal{C}$, podemos considerar uma vizinhança V de x_i como um intervalo aberto da reta.

Definição 3.3. *Dizemos $y_i = f(x_i)$ é um ponto de retorno se, dado uma pequena vizinhança V de x_i, $df(x)$ muda de sinal quando x passa por x_i.*

Lema 3.4. *Pontos de retorno são pontos críticos.*

Demonstração. Em um ponto de retorno, o sinal da derivada $df(x)$ muda. Como df é contínua, a derivada é nula em um ponto de retorno, então o ponto é crítico. ∎

Um ponto crítico não necessariamente é um ponto de retorno. De fato, um ponto de inflexão do gráfico de f é um ponto crítico mas o sinal de $df(x)$ não muda neste ponto.

Escolhemos como ponto de partida um ponto $x_0 \in \mathcal{C}$ tal que $y_0 = f(x_0)$ não seja ponto crítico. Quando o ponto x fizer um turno no sentido positivo, o ponto $y = f(x)$ poderá passar no ponto y_0 um certo número de vezes p_0 no sentido positivo e um número de vezes q_0 no sentido negativo. É preciso não esquecermos a passagem inicial, que também é a passagem final e que pode ser positivo ou negativo. De fato, $p_0 - q_0$ é o número de turnos que faz $y = f(x)$ em $\mathbb{S}^1$. Então grau$(f; y_0)$ é igual a $p_0 - q_0$.

Proposição 3.5. *O grau não depende do ponto regular.*

Demonstração. Seja y_0 um ponto regular. Quando y_0 muda continuamente, ficando em pontos regulares, é claro que o número $p_0 - q_0$ não muda. Então, o grau é constante quando y descreve um intervalo de pontos regulares na circunferência $\mathbb{S}^1$. Agora, se na trajetória de y encontramos um ponto crítico, pode ocorrer que

1. Se o ponto crítico não for um ponto de retorno, o sentido da caminhada não mudará entre antes e depois, então o número $p_0 - q_0$ não muda e o grau não muda.
2. Se o ponto crítico $y_i = f(x_i)$ for um ponto de retorno, então a caminhada chegará de um lado de y_i e depois a caminhada volta no mesmo lado. Antes do ponto y_i, a caminhada passa p vezes no sentido positivo e q vezes no sentido negativo. Depois do ponto y_i, a caminhada passa $p + 1$ vezes no sentido positivo, e como a caminhada tem de retornar no mesmo sentido de y_0 (pois este é regular), então ela deve passar $q + 1$ vezes no sentido negativo. Ou seja, a diferença $p - q$ não muda e concluímos a invariância do grau por pontos regulares. ∎

Portanto, dado que o grau de uma aplicação independe do valor regular, denotaremos apenas por grau(f) e chamaremos de *grau de f*.

Sejam M^2 uma variedade orientada e X um campo vetorial sobre M com singularidades isoladas. Consideremos $p \in M$ e uma carta local (ϕ_p, V_p) tais que $p \in V_p$ seja a única singularidade de X em V_p e $\phi_p : V_p \to \widetilde{V}_p = \phi(V_p) \subset \mathbb{R}^2$. Induzimos a orientação de V_p por ϕ_p em $\widetilde{V}_p$, e damos a $\mathbb{R}^2$ a orientação de $\widetilde{V}_p$.

Como V_p e $\widetilde{V}_p$ são difeomorfos, podemos considerar que $p \in \widetilde{V}_p$ e fazemos $X_1 = (\phi_p)_*(X)$, a expressão de X na carta local ϕ_p. Consideremos $B_p \subset \widetilde{V}_p$, em que B_p é uma pequena bola de centro em p.

Ao longo da circunferência $\mathbb{S}^1_p$, que é a borda de B_p, o campo de vetores X_1 não tem singularidades. Para cada ponto $x \in \mathbb{S}^1_p$, consideramos o vetor

$$\overline{X}(x) = \frac{X_1(x)}{||X_1(x)||}$$

em $T_x\mathbb{R}^2$, onde $||X_1(x)||$ é a norma euclidiana de $X_1(x)$. O vetor $\overline{X}(x)$ tem norma 1. Considerando a projeção $\pi : T\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, em que $\pi(x, v) = v$, definimos a aplicação $\gamma_X : \mathbb{S}^1_p \to \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma_X(x) = \pi \circ \overline{X}(x)$, onde $\mathbb{S}^1$ é a circunferência de raio 1 e centro na origem. A orientação de $\mathbb{S}^1$ é a dada pela orientação inicial dada a $\mathbb{R}^2$ induzida por ϕ_p. A aplicação $\gamma_X : \mathbb{S}^1_p \to \mathbb{S}^1$ é dita *aplicação de Gauss*.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{S}^1_p & \to & T\mathbb{S}^1_p \simeq \mathbb{S}^1_p \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \\ x & \mapsto & X_1(x) & \mapsto & \gamma_X(x) \end{array}$$

Se o ponto x percorrer a curva $\mathbb{S}^1_p$ no sentido positivo, o ponto $\gamma_X(x)$ percorrerá um caminho na circunferência $\mathbb{S}^1$ no sentido positivo ou negativo. Seja α um ponto de $\mathbb{S}^1$, um caminho passando no ponto α no sentido positivo vale $+1$ e um caminho passando no ponto α no sentido negativo vale -1. A soma desses valores é o *índice* $I(X, \alpha)$ do campo de vetores X no ponto p. Portanto, o índice é igual ao grau de γ_X, pela Proposição **3.5**.

Consideremos que p seja uma singularidade de um campo X sobre uma variedade M^2. Vejamos alguns exemplos de índice de uma singularidade.

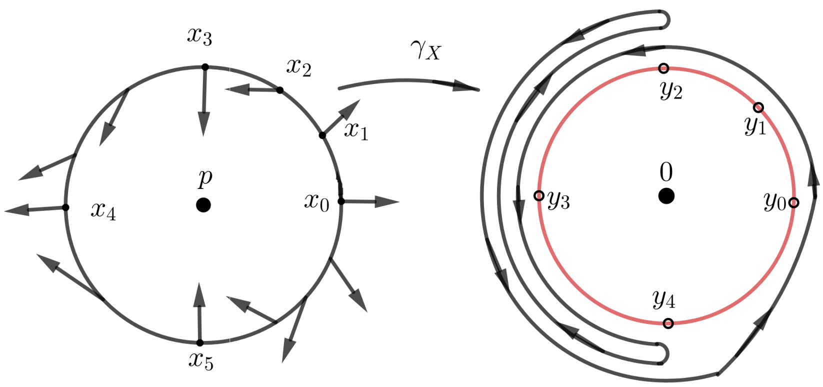

Figura 3.2: Nestes exemplo $I(X, p) = +1$.

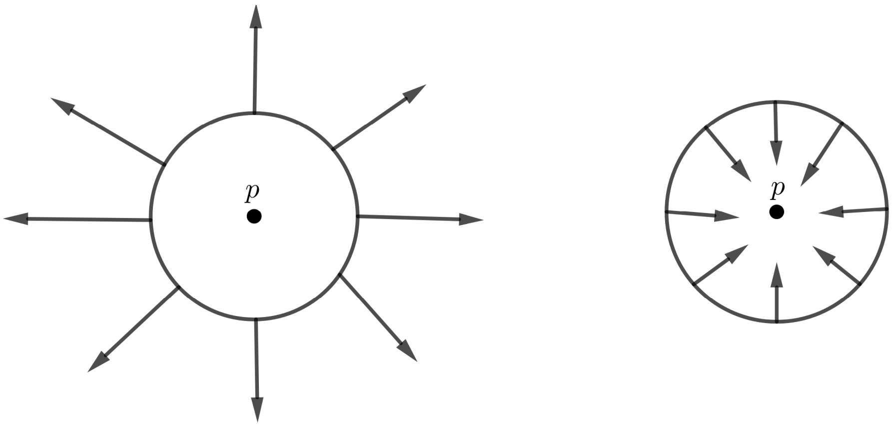

Figura 3.3: Campos radiais a singularidade. Nestes casos $I(X, p) = +1$.

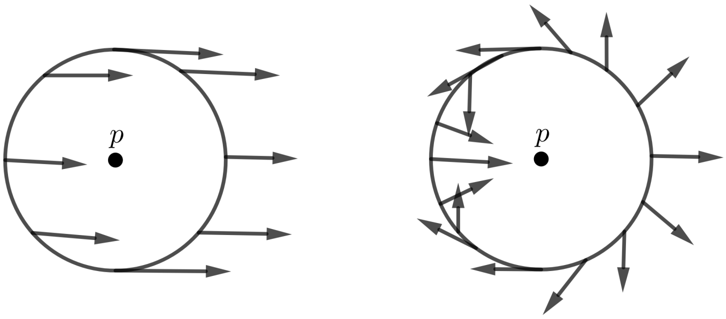

Figura 3.4: Campo de índice nulo e campo de índice +2 na singularidade p, respectivamente

3.1.2 A característica de Euler-Poincaré e o Teorema de Poincaré-Hopf

Dada uma variedade compacta bidimensional M, uma *triangulação* de M é uma família finita de triângulos curvilíneos (imagens difeomorfas de triângulos do plano) que cobrem M, de tal modo que dois quaisquer deles, ou não se interceptam, ou têm somente um vértice em comum, ou então tem precisamente um lado em comum. Uma triangulação de uma variedade diferenciável compacta qualquer M^n é sempre possível [15, pág.124].

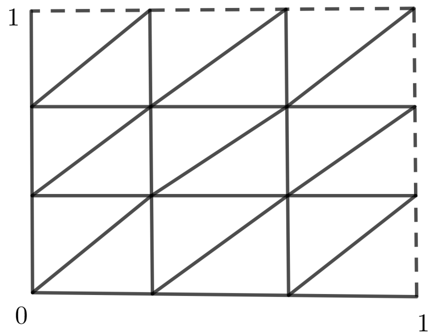

Figura 3.5: Uma triangulação do toro.

Dada uma triangulação de uma variedade diferenciável bidimensional compacta M, sejam V o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces desta triangulação. A *característica de Euler-Poincaré* de M, $\mathcal{X}(M)$, é definida por

$$\mathcal{X}(M) = V - A + F.$$

Exemplo 3.6. Na Figura **3.5**, temos que $F = 18$, $A = 27$ e $V = 9$, então $\mathcal{X}(\mathbb{T}^2) = 0$.

Um resultado importante é que a característica de Euler-Poincaré independe da triangulação (vide [6]).

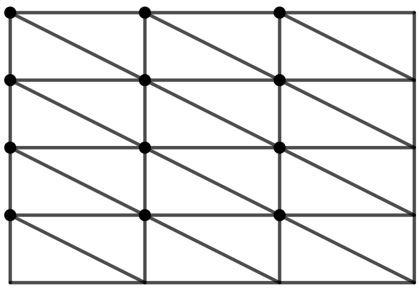

Figura 3.6: Outra triangulação do toro, onde $V = 12$, $A = 36$ e $F = 24$.

Não é difícil percebermos que a característica de Euler-Poincaré $\mathcal{X}(\mathbb{T}^2)$ da Figura **3.6** não difere da característica de Euler-Poincaré da triangulação dada na Figura **3.5**.

Teorema 3.7 (Poincaré-Hopf)**.** *Sejam M uma variedade compacta, diferenciável, sem bordo e não necessariamente orientada, e $X : M \to TM$ um campo de vetores de classe C^r, $r \geq 1$, com singularidades isoladas. Então*

$$\sum_{p_i} I(X, p_i) = \mathcal{X}(M),$$

em que os pontos p_i são os pontos singulares de X.

Demonstração. A demonstração deste fato pode ser encontrada em [11]. ■

Exemplo 3.8. Consideremos a esfera $\mathbb{S}^2$. Seja a triângularização dada pela imagem a seguir.

Nesta imagem, constatamos que $\mathcal{X}(\mathbb{S}^2) = V - A + F = 2$. Portanto, pelo Teorema de Poincaré-Hopf, a soma dos índices de qualquer campo X definido na esfera é igual a 2, o que nos permite concluir a não existência de campos de vetores tangentes a esfera sem ao menos uma singularidade.

No toro por outro lado, que possuí característica de Euler-Poincaré nula, o Teorema de Poincaré-Hopf permite que existam campos de vetores tangentes a ele sem singularidades. De fato, o campo dado em (2.4.1.1) é um campo vetorial diferenciável sem singularidades no toro.

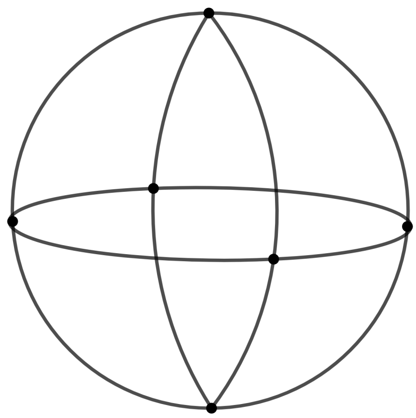

Figura 3.7: Esfera triângularizada.

3.1.3 Classificação de variedades

Até o momento, estudamos algumas variedades, como a esfera e o toro. Agora, apresentaremos outros tipos de variedades bidimensionais compactas sem bordo.

1. O *plano projetivo* $\mathbb{P}^2$ é definido como o espaço de todas as retas em $\mathbb{R}^3$ passando pela origem.

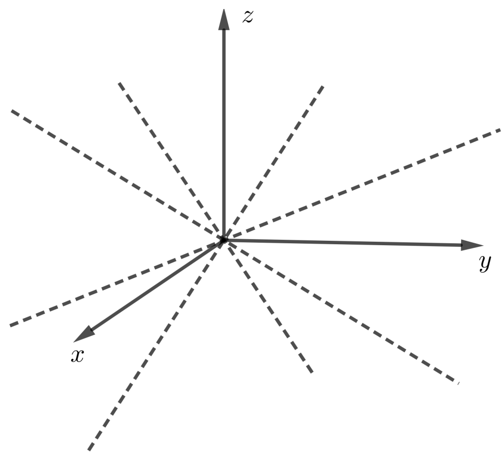

Figura 3.8: O plano projetivo $\mathbb{P}^2$.

Como cada reta que passa pela origem é determinada por um vetor não nulo em $\mathbb{R}^3$, a menos de multiplicação por um escalar, dada a relação de equivalência $\backsim$, tal que $x, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ então $x \backsim y$ se, e somente se, $x = \lambda y$, $\lambda \neq 0$, o plano projetivo $\mathbb{P}^2$ também é definido pelo espaço quociente de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ pela relação $\backsim$. Assim, a topologia de $\mathbb{P}^2$ é a topologia quociente induzida pelo espaço $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, com a relação de equivalência $\backsim$.

Ao restringimos a vetores de norma 1, temos que $\mathbb{P}^2$ é também o espaço quociente de $\mathbb{S}^2$ com a relação de equivalência que identifica cada ponto x da esfera com $-x$, isto é, a esfera identificando os pontos antipodais. Isto equivale a identificarmos o plano projetivo com quociente do disco $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ com a relação de equivalência que identifica os pontos antipodais do seu bordo ∂D^2, isto é, a relação de equivalência que identifica cada ponto $x \in \partial D^2$ com $-x$.

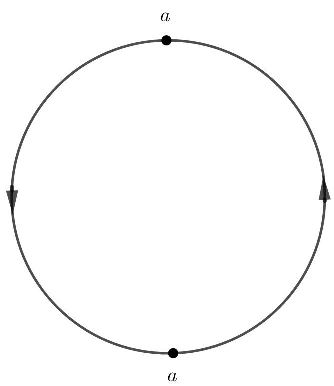

Figura 3.9: O plano projetivo como espaço quociente em D^2.

Observamos que é impossível cobrirmos $\mathbb{P}^2$ com um atlas coerente. Portanto $\mathbb{P}^2$ é variedade diferenciável compacta, conexa e não orientável.

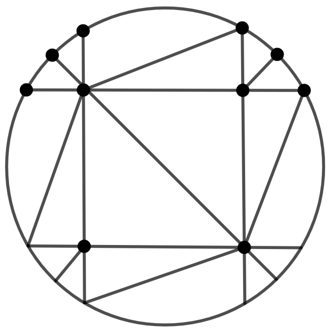

Figura 3.10: Com uma triangulação, vemos que $\mathcal{X}(\mathbb{P}^2) = +1$.

2. Sejam M_1 e M_2 variedades bidimensionais disjuntas. Sejam ainda $D_1 \subset M_1$ e $D_2 \subset M_2$ discos fechados, homeomorfos a $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Denotemos por M_i^c o complementar do interior de D_i em M_i, $i = 1, 2$. Se $h : \partial M_1^c \to \partial M_2^c$ for um homeomorfismo do bordo de M_1^c no bordo de M_2^c, então a *soma conexa* de M_1 e M_2, denotada por $M_1 \# M_2$, é o espaço quociente de $M_1^c \cup M_2^c$ obtido identificando-se os pontos p com $h(p)$, para todo p no bordo ∂M_1^c. Uma propriedade da soma conexa é que se M_1 e M_2 forem variedades orientáveis, então $M_1 \# M_2$ também é orientável. Por outro lado se M_1 ou M_2 não é orientável, $M_1 \# M_2$ não é orientável.

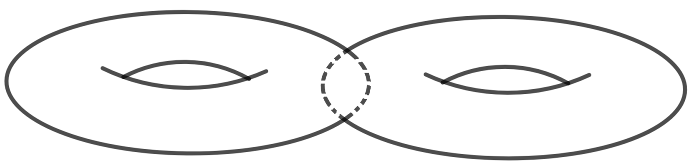

Figura 3.11: O bitoro, que é a soma conexa $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$.

A soma conexa nos permite construir variedades conexas compactas à partir das que já conhecíamos antes. Em geral, temos que

Teorema 3.9. *Toda variedade bidimensional conexa compacta é homeomorfa ou à esfera, ou à soma conexa de toros ou à soma conexa de planos projetivos.*

Demonstração. A demonstração deste fato se encontra em [8], página 9. ■

Uma variedade compacta bidimensional que é soma conexa de g toros ou g planos projetivos é dita ser de *gênero* g. Em particular, existe uma relação entre a característica de Euler-Poincaré $\mathcal{X}(M)$ e o gênero g de uma variedade compacta bidimensional, a saber, $g = \frac{1}{2}(2 - \mathcal{X}(M))$ se M é orientável e $g = 2 - \mathcal{X}(M)$ caso contrário.

Teorema 3.10 (Teorema de Classificação de Variedades bidimensionais)**.** *Sejam M_1 e M_2 variedades compactas bidimensionais. Então M_1 e M_2 serão homeomorfas se, e somente se, suas características de Euler forem iguais e ambas forem orientáveis ou não orientáveis.*

Demonstração. A demonstração deste teorema encontrasse em [8], página 30. ■

Com esse teorema, a identificação de uma variedade compacta bidimensional é feita apenas por sabermos sua característica de Euler-Poincaré e se ela é orientável ou não.

Para finalizarmos esta seção, apresentemos a *garrafa de Klein* K^2:

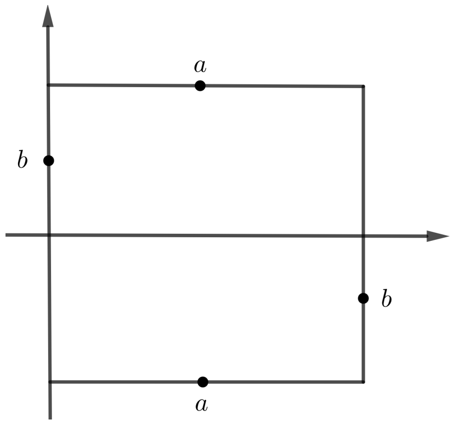

Figura 3.12: Garrafa de Klein K^2.

A garrafa de Klein é definida pelo retângulo $[0, 1] \times [-1, 1]$ com a identificação dos pontos $(x, 1) \sim (x, -1)$ e $(0, y) \sim (1, -y)$. Triangularizando K^2, observamos que $\mathcal{X}(K^2) = 0$.

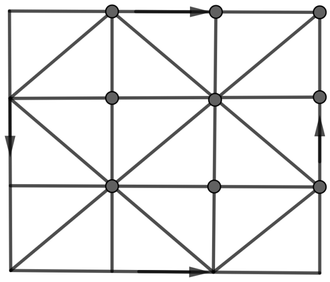

Figura 3.13: $V = 9$, $A = 27$ e $F = 18$.

Um resulta envolvendo a garrafa de Klein foi provado em 1924 por H. Kneser em [4], que diz que um fluxo contínuo em K^2 sem pontos singulares possuí uma trajetória periódica. Uma demonstração interessante desse fato pode ser encontrada como Corolário **5.2** de [7].

A garrafa de Klein, apesar de ser uma variedade bidimensional, não pode ser representada no espaço $\mathbb{R}^3$ sem se auto interceptar.

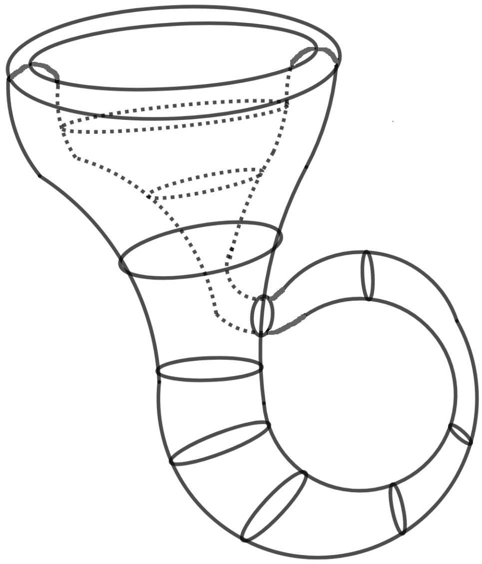

Figura 3.14: Representação da garrafa de Klein no espaço.

Um fato importante que usaremos na demonstração do Teorema de Schwartz é que se, em uma variedade bidimensional compacta, conexa e sem bordo M, temos definido um fluxo gerado por um campo de vetores sem singularidades, então a soma dos índices desta variedade é zero. Então, pelo Teorema de Poincaré-Hopf **3.7**, a característica de Euler-Poincaré $\mathcal{X}(M) = 0$. Usando o Teorema **3.10**, notamos que, ou M é orientada, e neste caso $M = \mathbb{T}^2$, ou M é não orientada, e neste caso $M = K^2$.

3.2 Recobrimento duplo orientado

Definição 3.11. *Sejam M e $\widetilde{M}$ variedades compactas bidimensionais (com ou sem bordo). Um recobrimento duplo orientado é uma aplicação $\pi : \widetilde{M} \to M$ de classe C^r, $r \geq 1$, com as seguintes propriedades:*

1. *$\widetilde{M}$ é uma variedade orientada e M é uma variedade não-orientável;*

2. *π é um difeomorfismo local;*

3. *Para cada $p \in M$, a imagem inversa $\pi^{-1}(p)$ contém exatamente dois pontos.*

Da definição de recobrimento duplo orientado, para todo aberto $U \subset M$, $\pi^{-1}(U) = \widetilde{U}_1 \cup \widetilde{U}_2$ é união disjunta de dois abertos de $\widetilde{M}$, cada um dos quais se aplica, por π, difeomorficamente sobre U.

Teorema 3.12. *Toda variedade conexa M não orientável de classe C^k, possui um recobrimento duplo orientado de classe C^k. Além disso $\widetilde{M}$ é conexo.*

Demonstração. Seja $\widetilde{M} := \{(p,O);\ p \in M, O \in \{ \text{ orientações sobre } T_pM\}\}$. Tomemos um atlas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de M. Definimos os seguintes subconjuntos de $\widetilde{M}$:

$$U_\alpha^+ := \left\{(p,O_p) \in \widetilde{M};\ p \in U_\alpha \text{ e } O_p = \left[\frac{\partial}{\partial\phi_\alpha^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial\phi_\alpha^n}\right]_p\right\}$$

e

$$U_\alpha^- := \left\{(p,O_p) \in \widetilde{M};\ p \in U_\alpha \text{ e } O_p = -\left[\frac{\partial}{\partial\phi_\alpha^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial\phi_\alpha^n}\right]_p\right\},$$

em que $O_p = \left[\frac{\partial}{\partial\phi_\alpha^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial\phi_\alpha^n}\right]_p$ é a orientação do plano tangente T_pM, induzida pela carta local ϕ_α.

Observemos que $\widetilde{M}$ é gerado por $\{U_\alpha^+, U_\alpha^-\}_{\alpha\in\Lambda}$ topologicamente. Além disso, se $\pi : \widetilde{M} \to M$, definida por $\pi(p,O_p) = p$, então π é contínua e aberta. De fato, dado qualquer $\alpha \in \Lambda$, $\pi^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha^+ \cup U_\alpha^-$ e $\pi(U_\alpha^\pm) = U_\alpha$, e como $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ é uma base de M e $\{U_\alpha^+, U_\alpha^-\}_{\alpha\in\Lambda}$ é uma base de $\widetilde{M}$, temos que π é contínua e aberta.

Notemos também que para qualquer $p \in M$, uma vizinhança U_α que contenha p é tal que $\pi^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha^+ \cup U_\alpha^-$ (união disjunta) e $\pi|_{U_\alpha^\pm} : U_\alpha^\pm \to U_\alpha$ é um homeomorfismo.

Mostraremos agora que $\widetilde{M}$ é variedade diferencial orientável. Definimos $\phi_\alpha^+ : U_\alpha^+ \to \phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ por $\phi_\alpha^+ = \phi_\alpha \circ \pi|_{U_\alpha^+}$. Analogamente, definimos $\phi_\alpha^- : U_\alpha^- \to \phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ por $\phi_\alpha^- = \phi_\alpha \circ \pi|_{U_\alpha^-}$. Tanto ϕ_α^- quanto ϕ_α^- são homeomorfismos, pois ϕ_α e $\pi|_{U_\alpha^\pm}$ são homeomorfismos. Nós temos também que

$$\phi_\alpha^\pm \circ (\phi_\beta^\pm)^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(x_1, \ldots, x_n).$$

Portanto $\{(U_\alpha^+, \phi_\alpha^+), (U_\alpha^-, \phi_\alpha^+)\}_{\alpha\in\Lambda}$ é um atlas compatível e $\widetilde{M}$ é uma variedade diferenciável C^k.

Isso implica que π é um difeomorfismo local C^k, pois $\pi|_{U_\alpha^\pm} = \phi_\alpha^{-1} \circ \phi_\alpha^\pm$ e ϕ_α^{-1}, $\phi_\alpha^\pm$ são difeomorfismos C^k.

Seja $O : (p,O_p) \mapsto O_{(p,O_p)}$ o mapa de orientação pontual de $\widetilde{M}$. Tomando $(p,O_p) \in \widetilde{M}$ arbitrário, temos que $(D\pi)(p,O_p)$ é uma bijeção (pois π é um difeomorfismo local). Então

$$O_{(p,O_p)} := \left[(D\pi)^{-1}_{(p,O_p)}(e_1), \ldots, (D\pi)^{-1}_{(p,O_p)}(e_n)\right],$$

onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é uma base de T_pM, com $O_p = [e_1, \ldots, e_n]$. Notemos que, para qualquer vizinhança U_α de p, temos ou que $(p,O_p) \in U_\alpha^+$, e nesse caso

$$O_{(q,O_q)} = \left[\frac{\partial}{\partial(\phi_\alpha^+)^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial(\phi_\alpha^+)^n}\right]_{(q,O_q)},$$

para todo $(q,O_q) \in U_\alpha^+$, ou que $(p,O_p) \in U_\alpha^-$, nesse caso

$$O_{(q,O_q)} = \left[\frac{\partial}{\partial(\phi_\alpha^-)^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial(\phi_\alpha^-)^n}\right]_{(q,O_q)},$$

para todo $(q, O_q) \in U_\alpha^-$. Como (p, O_p) foi arbitrário, isso significa que O é contínua, então $\widetilde{M}$ é orientável. Assim, π é um recobrimento duplo orientado.

Suponhamos que $\widetilde{M} = U \cup V$, onde U, V são subconjuntos abertos disjuntos. Por π ser recobrimento, $\pi|_U : U \to M$ e $\pi|_V : V \to M$ são difeomorfismos. Como $\widetilde{M}$ é orientável, U é orientável, e M herda a orientação de U por $\pi|_U$, o que é um absurdo, pois M é não orientável. Concluímos que $\widetilde{M}$ é conexo. ■

Exemplo 3.13. Na esfera $\mathbb{S}^2$, dada a relação de equivalência $\backsim$ tal que $x \backsim y$ se, e somente se, $x = -y$, temos que o quociente da esfera pela relação $\backsim$ é o plano projetivo, isto é, $\mathbb{P}^2 = \mathbb{S}^2/\backsim$. Portanto, a projeção $\pi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2/\backsim$ é o recobrimento duplo orientado do plano projetivo.

Definição 3.14. *Seja $\pi : \widetilde{M} \to M$ um recobrimento duplo orientado de classe C^2. Dado um campo vetorial diferenciável X em M, definimos o campo vetorial diferenciável $\pi^*(X)$ em $\widetilde{M}$ denominado levantamento de X, por*

$$\pi^*(X)(p) = (D\pi_p)^{-1} \cdot X(\pi(p)), \quad p \in \widetilde{M}.$$

Observamos que se $p \in M$, temos que $\pi^{-1}(p) = \{\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2\}$. Sejam $\gamma : \mathbb{R} \to M$ a curva integral de X tal que $\gamma(0) = p$ e $\widetilde{\gamma}_1 : \mathbb{R} \to \widetilde{M}$ a curva integral de $\pi^*(X)$ tal que $\widetilde{\gamma}_1(0) = \widetilde{p}_1$. Temos que $\pi \circ \widetilde{\gamma}_1(0) = p$ e derivando $\pi \circ \widetilde{\gamma}_1$, temos

$$(\pi \circ \widetilde{\gamma}_1)'(t) = D\pi_{\widetilde{\gamma}_1(t)} \cdot \widetilde{\gamma}_1'(t) = D\pi_{\widetilde{\gamma}_1(t)}[(D\pi_{\widetilde{\gamma}_1(t)})^{-1} \cdot X(\pi(\widetilde{\gamma}_1(t)))] = X(\pi(\widetilde{\gamma}_1(t))).$$

Portanto, pelo Teorema de existência e unicidade, $\pi \circ \widetilde{\gamma}_1 = \gamma$. Analogamente, se $\widetilde{\gamma}_2 : \mathbb{R} \to \widetilde{M}$ é curva integral de $\pi^*(X)$ tal que $\widetilde{\gamma}_2(0) = \widetilde{p}_2$, então $\pi \circ \widetilde{\gamma}_2 = \gamma$.

Com isto, ou $\pi^{-1}(\gamma)$ é a união de duas trajetórias disjuntas de $\pi^*(X)$, digamos $\widetilde{\gamma}_1$ e $\widetilde{\gamma}_2$, ou $\pi^{-1}(\gamma)$ é igual a $\widetilde{\gamma}_1$, e neste caso, $\widetilde{\gamma}_2$ é uma reparametrização da curva $\widetilde{\gamma}_1$. Concluímos assim que a projeção $\gamma = \pi \circ \widetilde{\gamma}$ de uma trajetória $\widetilde{\gamma}$ de $\pi^*(X)$ é uma trajetória de X. Reciprocamente, toda trajetória de X é a projeção de, no máximo, duas trajetórias de $\pi^*(X)$.

Com estas observações, é imediata a demonstração do seguinte Lema.

Lema 3.15. *Sejam $\pi : \widetilde{M} \to M$ um recobrimento duplo orientado e $\pi^*(X) \in \mathbb{X}(\widetilde{M})$ o levantamento de $X \in \mathbb{X}(M)$. Sejam $\widetilde{\gamma}$ uma trajetória de $\pi^*(X)$ e $\gamma = \pi \circ \widetilde{\gamma}$ a trajetória correspondente de X. Então as seguintes afirmações se verificam:*

1. *γ será um ponto singular se, e somente se, $\widetilde{\gamma}$ for um ponto singular;*
2. *γ será uma trajetória injetiva se, e somente se, $\widetilde{\gamma}$ for injetiva;*
3. *γ será uma trajetória periódica se, e somente se, $\widetilde{\gamma}$ for periódica.*

Lema 3.16. *Nas condições do Lema anterior, temos que $\pi(\omega(\widetilde{\gamma})) = \omega(\gamma)$.*

Demonstração. Seja $\widetilde{p} \in \omega(\widetilde{\gamma})$. Tomemos uma sequencia $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais tal que $t_n \to \infty$ e $\widetilde{\gamma}(t_n) \to \widetilde{p}$, quando $n \to \infty$. Como π é contínua, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \pi(\widetilde{\gamma}(t_n)) = \pi(\widetilde{p}),$$

e, portanto

$$\lim_{n\to\infty} \gamma(t_n) = \pi(\widetilde{p}) \in \omega(\gamma).$$

Concluímos que $\pi(\omega(\widetilde{\gamma})) \subset \omega(\gamma)$.

Reciprocamente, seja $p \in \omega(\gamma)$. Então existe uma sequencia $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais tal que $s_n \to \infty$ e $\gamma(s_n) \to p$, quando $n \to \infty$.

Tomemos um aberto $U \subset M$ tal que $p \in U$ e $\pi^{-1}(U) = \widetilde{U}_1 \cup \widetilde{U}_2$, onde $\widetilde{U}_1$ e $\widetilde{U}_2$ são abertos e disjuntos de $\widetilde{M}$ e $\pi|_{\widetilde{U}_i} : \widetilde{U}_i \to U$ é um difeomorfismo, $i = 1, 2$. Podemos supor que $\gamma(s_n) \in U$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, $\{\widetilde{\gamma}(s_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência, $\{\widetilde{\gamma}(s_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$, a qual está contida em $\widetilde{U}_1$ ou em $\widetilde{U}_2$.

Sem perda de generalidade, suponhamos que $\{\widetilde{\gamma}(s_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ esteja contida em $\widetilde{U}_1$. Como $(\pi|_{\widetilde{U}_1})^{-1} : U \to \widetilde{U}_1$ é contínua e $\pi(\widetilde{\gamma}(s_{n_k})) = \gamma(s_{n_k}) \to p$, quando $k \to \infty$, então

$$\lim_{k\to\infty} \widetilde{\gamma}(s_{n_k}) = (\pi|_{\widetilde{U}_1})^{-1}(p).$$

Segue que $\pi^{-1}(p) \cap \widetilde{U}_1 \in \omega(\widetilde{\gamma})$. Logo $p \in \pi(\omega(\widetilde{\gamma}))$ e temos que $\omega(\gamma) \subset \pi(\omega(\widetilde{\gamma}))$. Concluímos assim que $\pi(\omega(\widetilde{\gamma})) = \omega(\gamma)$. ■

3.3 O Teorema de Schwartz

Sejam M uma variedade bidimensional e $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ um fluxo. Façamos $\varphi_t(\cdot) = \varphi(t, \cdot)$.

Definição 3.17. *Um conjunto não-vazio $\mathcal{M} \subset M$ diz-se minimal para φ se $\mathcal{M}$ é compacto, invariante por φ (ou seja, $\varphi_t(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$, $\forall t \in \mathbb{R}$) e $\mathcal{M}$ não contém subconjuntos próprios com esta propriedade.*

Os pontos singulares e as órbitas periódicas de φ são conjuntos minimais. Se λ é irracional, então, como visto anteriormente na Subseção **2.4.1**, o toro é um conjunto minimal do fluxo do campo constante $X = (1, \lambda)$.

Proposição 3.18. *Seja $\mathcal{M}$ um conjunto minimal de M para φ. Então, as órbitas de φ por $\mathcal{M}$ são densas em $\mathcal{M}$.*

Demonstração. Seja $x \in \mathcal{M}$. Se $\gamma(x)$ não é densa em $\mathcal{M}$, então existe um ponto $p \in \mathcal{M}$ tal que uma vizinhança $V \subset \mathcal{M}$ de p pode ser escolhida de forma que $\overline{\gamma(x)} \cap V = \emptyset$. Como $\overline{\gamma(x)} \subsetneq \mathcal{M}$ é compacto, e além disso $\varphi_t(\overline{\gamma(x)}) = \overline{\gamma(x)}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $\mathcal{M}$ não é minimal, por definição, o que é um absurdo. ■

No Teorema de Poincaré-Bendixon provado anteriormente, estabelecemos que os conjuntos minimais de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{S}^2$ são pontos e órbitas periódicas. Agora, veremos um resultado que estabelece que tipo de conjuntos minimais podem ocorrer em uma variedade compacta bidimensional sem bordo qualquer, em um fluxo de classe C^2.

Dizemos que um conjunto minimal é *trivial*, se este for um ponto singular, ou uma órbita periódica ou um toro.

Dizemos que um conjunto é *perfeito* se ele é compacto e todos os seus pontos são pontos de acumulação.

Exemplo 3.19. O conjunto $\{(0,x) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1\}$ é perfeito e tem interior vazio.

Teorema 3.20 (Schwartz)**.** *Um fluxo φ de classe C^2 em uma variedade bidimensional M, compacta, conexa e sem bordo, não pode possuir um conjunto minimal $\mathcal{M}$ distinto de um ponto singular ou trajetória fechada, a menos que $M^2 = \mathbb{T}^2 = \mathcal{M}$.*

Uma outra reformulação desse Teorema é a seguinte:

Teorema 3.21 (Schwartz)**.** *Seja X um campo vetorial de classe C^2 em uma variedade bidimensional M compacta, conexa e sem bordo. Seja γ uma órbita de X. Se $\omega(\gamma)$ não contém pontos singulares, então $\omega(\gamma)$ é uma órbita fechada ou $\omega(\gamma) = \mathbb{T}^2$, e nesse caso $M = \mathbb{T}^2$.*

Antes de demonstrarmos o Teorema **3.20**, observemos que o Teorema de Denjoy é consequência imediata desse Teorema.

Teorema 3.22 (Teorema de Denjoy)**.** *Seja $x' = f(x_1, x_2)$ um sistema autônomo sobre o toro $\mathbb{T}^2$, onde f é de classe C^2. Assumimos que esse sistema define um fluxo. Se $\mathcal{M}$ é um conjunto minimal do fluxo, então $\mathcal{M}$ é ou um ponto singular, ou uma órbita fechada ou o próprio toro $\mathbb{T}^2$.*

Outro Corolário do Teorema **3.20** é o seguinte.

Corolário 3.23. *Seja X um campo vetorial de classe C^2 em $\mathbb{T}^2$. Se X não tem singularidade, então uma das seguintes alternativas ocorrerá:*

1. *o conjunto ω-limite de toda órbita de X é uma órbita fechada ou*
2. *o conjunto ω-limite de toda órbita de X é $\mathbb{T}^2$.*

De fato, é suficiente mostrarmos que se o conjunto ω-limite de uma órbita de X é uma órbita periódica γ, então o ω-limite de qualquer outra órbita também é uma órbita fechada. Observemos que se $\mathbb{T}^2 \setminus \gamma$ consistisse de duas regiões disjuntas e desconexas, então $\mathbb{T}^2 \setminus \gamma$ não é homeomorfo a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, e existiria pelo menos uma singularidade contida em $\text{int}(\gamma)$[1], o que é um absurdo.

[1]Teorema 1, página 254 de [13].

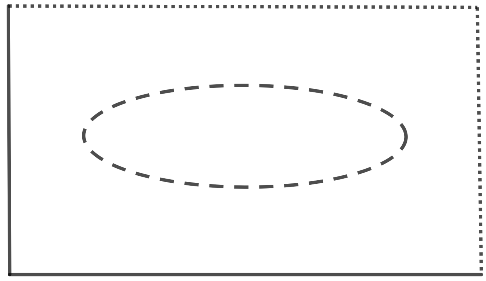

Figura 3.15: Conjunto $\mathbb{T}^2 \setminus \gamma$ não homeomorfo a $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

Então $\mathbb{T}^2 \setminus \gamma$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ (basta notarmos que $\mathbb{T}^2 \setminus \gamma$ é homeomorfo a um cilindro e o cilindro é homeomorfo a $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$). Sejam $\phi : \mathbb{T}^2 \setminus \gamma \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ o homomorfismo citado anteriormente e $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Dada a órbita $\gamma_p \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, se para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ocorrer que $\gamma_p \not\subset K$, a trajetória correspondente $\phi^{-1} \circ \gamma_p$ em $\mathbb{T}^2 \setminus \gamma$ conteria em seu ω-limite pelo menos um ponto de γ, e concluiríamos que $\omega(\phi^{-1} \circ \gamma_p) = \gamma$, que é órbita fechada. Agora, se γ_p está contida num compacto, podemos aplicar o Teorema de Poincaré-Bendixson no plano demonstrando o Corolário. □

Lema 3.24. *Seja $\mathcal{M} \subset M^2$ um conjunto minimal para φ.*

1. *Se $\mathcal{M}$ tem interior não-vazio, então $\mathcal{M} = M^2$ e M^2 é o toro T^2.*

2. *Se $\mathcal{M}$ é não trivial e tem interior vazio, então para toda secção transversal I, $I \cap \mathcal{M}$ é um conjunto perfeito de interior vazio (magro) em I.*

Demonstração. 1. Como $\mathcal{M}$ é fechado e de interior não vazio, basta mostrarmos que $\mathcal{M}$ é aberto para concluir que $\mathcal{M} = M^2$ pois M^2 é conexo. Como o conjunto dos pontos interiores é invariante por φ, pois φ é de classe C^2, a fronteira de $\mathcal{M}$ deve ser vazia, pois se não fosse, $\mathcal{M}$ não seria minimal. Portanto $\mathcal{M}$ é aberto e $\mathcal{M} = M^2$. Com isto, φ é um fluxo sem singularidades, então $\mathcal{X}(M^2) = 0$ e M^2 é o toro ou a garrafa de Klein. Mas M^2 não pode ser K^2 porque um fluxo contínuo sem singularidades em K^2 tem necessariamente uma órbita periódica (ver [4]).

2. $I \cap \mathcal{M}$ é perfeito pois todas as órbitas de $\mathcal{M}$ são densas em $\mathcal{M}$ e $I \cap \mathcal{M}$ é magro porque $\mathcal{M}$ é magro e I é secção transversal. ■

Demonstração do Teorema de Schwartz Suponhamos que φ admita um conjunto minimal $\mathcal{M}$, magro e distinto de um ponto singular ou trajetória fechada.

Seja $i : [-1,1] \to M^2$ um mergulho de classe C^2 tal que:

(1) A imagem I de i restrito a $(-1,1)$, é transversal a cada órbita de φ em $\mathcal{M}$ que a intercepta, isto é, se $r \neq \pm 1$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(0, i(r))$ e $i'(r)$ são linearmente independentes.

(2) $i(-1)$ e $i(1)$ não estão em $\mathcal{M}$.

(3) $i(0) \in \mathcal{M}$.

A existência de i é garantida: nos itens (1) e (3) usamos o fluxo tubular, sendo i a parametrização de uma seção transversal, e o item (2) é assegurado por $\mathcal{M}$ ter interior vazio.

Notemos que a condição (1) nos garante que existe $\rho > 0$ tal que para $|r| < 1$ e $|t| < \rho$, a aplicação $\sigma(t, r) = \varphi(t, i(r))$ define um difeomorfismo. A inversa σ^{-1} pode ser considerada um sistema de coordenadas de M^2 em torno de $i(0)$. Seja $W = \{x \in I$ tal que existe $t > 0$ com $\varphi(t, x) \in I\}$. Vejamos que W é aberto em I, pois se $x \in W$, existe $t_0 > 0$ tal que $\varphi(t_0, x) \in I$ e se, para todo $\delta > 0$, existe $y \in I$ com $|x - y| < \delta$ e $\varphi(t, y) \notin I$ para todo $t > 0$, então $|\varphi(t_0, x) - \varphi(t_0, y)| > \varepsilon_0$, para algum $\varepsilon_0 > 0$. Pela continuidade em relação as condições iniciais provado no Teorema **1.20**, podemos escolher $\delta_0 > 0$ tal que se $|x-y| < \delta_0$, então $|\varphi(t_0, x) - \varphi(t_0, y)| < \varepsilon_0$, o que é um absurdo.

Para cada $x \in W$, seja $t(x) = \min\{t;\, \varphi(t, x) \in I,\, t > 0\}$. Seja $V = i^{-1}(W) \subset (-1, 1)$. O conjunto V é aberto pois W é aberto. Definimos $f : V \to (-1, 1)$ por

$$f(v) = i^{-1}[\varphi(t(i(v)), i(v))].$$

Seja $\pi_2 : (-\rho, \rho) \times (-1, 1)$ a projeção $\pi_2(x, y) = y$. Observamos que $\pi_2(\sigma^{-1}[\varphi(t(i(v), i(v))]) = i^{-1}[\varphi(t(i(v)), i(v))] = f(v)$, e como W é aberto, para $|v - v_0|$ suficientemente pequeno, $f(v) = \pi_2(\sigma^{-1}[\varphi(t(i(v_0)), i(v))])$, e como consequência, f é de classe C^2.

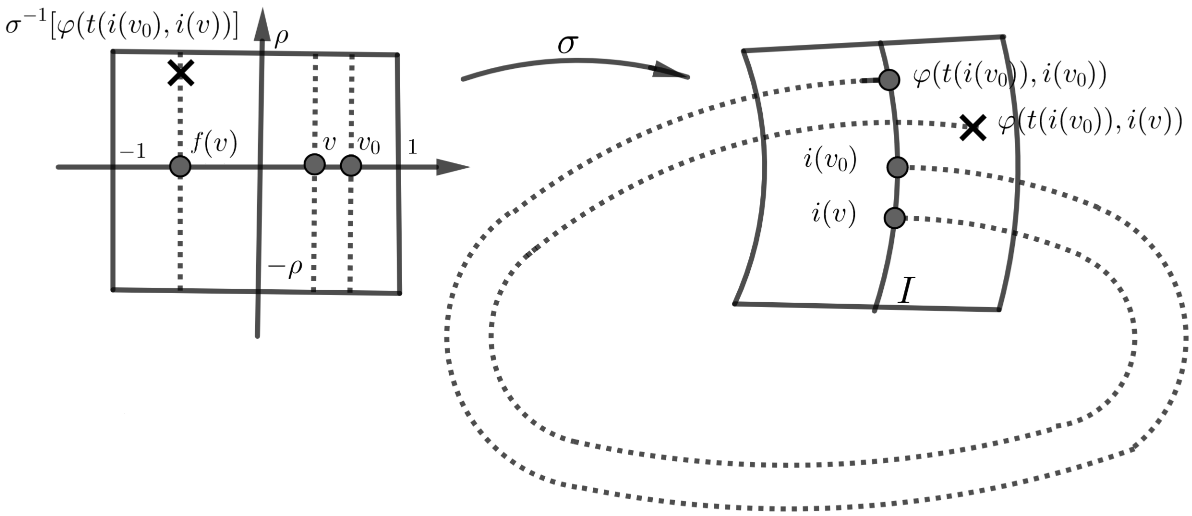

Figura 3.16: Ilustração do sistema de coordenadas σ^{-1} e das aplicação $i(v)$ e $t(x)$.

Por $\mathcal{M}$ ser minimal, as órbitas de φ por pontos de $\mathcal{M}$ são densas em $\mathcal{M}$. Por isso, $G = i^{-1}(I \cap \mathcal{M}) \subset V$. Pelo Lema **3.24**, G é perfeito e magro em $[-1, 1]$.

Seja Z um aberto de $[-1, 1]$ tal que $G \subset Z \subset \overline{Z} \subset V$.

Assumimos, primeiramente, que M^2 é orientável. Consideremos os lemas a seguir.

Lema 3.25. *A função f e conjunto G possuem as seguintes propriedades:*

1. $G = (-1, 1) \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i)$, onde (a_i, b_i) são intervalos abertos e disjuntos.

2. *$f(G) = G$.*

3. *Se $v \in G$ e $f^k(v) = v$ então $k = 0$.*

4. *G é um conjunto minimal para f, no sentido de que G não contém propriamente um subconjunto fechado $K_0 \neq \emptyset$ com $f(K_0) = K_0$.*

5. *Existe $L > 0$ tal que $|f'(w)| \geq L$, para todo $w \in Z$.*

6. *Dado $a \in G$, o conjunto $H = \{f^k(a), k \in \mathbb{Z}\}$ é denso em G.*

7. *Existe $M > 0$ tal que $|f''(w)| \leq M$ para todo $w \in Z$.*

Lema 3.26. *Para f e G dados anteriormente, considerando f monótona, temos o seguinte:*

1. *Existe um ponto $a \in G$ tal que $\lim_{k\to\infty} Df^k(a) = 0$.*

2. *Existe uma vizinhança de a, $V(a)$, em $(-1, 1)$ tal que $\lim_{k\to\infty} Df^k(x) = 0$, uniformemente em $x \in V(a)$.*

As demonstrações desses dois lemas serão feitas posteriormente.

Provaremos o Teorema ao mostrarmos que não existe uma função que satisfaça as propriedades do Lema **3.25**, com o Lema **3.26**, e chegaremos a um absurdo.

Pelos item 6 do Lema **3.25** e o item 2 do Lema **3.26**, existem um número $\varepsilon > 0$ e um inteiro k suficientemente grande tais que $\big(a - \varepsilon, a + \varepsilon\big) \subset V(a)$, $|f^k(a) - a| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ e $|Df^k(s)| < \dfrac{1}{2}$ para $|s - a| \leq \varepsilon$. Portanto

$$|f^k(a \pm \varepsilon) - a| \leq |f^k(a \pm \varepsilon) - f^k(a)| + |f^k(a) - a| \leq |Df^k(\theta)||\varepsilon| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

para algum $\theta \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Temos então, que $f^k(a \pm \varepsilon) \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Isso implica que $f^k(a + \varepsilon) - (a + \varepsilon) < 0$ e $f^k(a - \varepsilon) - (a - \varepsilon) > 0$. Pelo Teorema do valor intermediário, existe s_0, com $|s_0 - a| < \varepsilon$ tal que $f^k(s_0) = s_0$, para todo k suficientemente grande, e com isso

$$f^{nk}(s_0) = s_0, \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Observamos que

$$|f^{nk}(a) - f^{nk}(s_0)| = |Df^{nk}(\theta)||a - s_0|,$$

para algum $\theta \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, e pelo item 2 do Lema **3.26** temos que $\lim_{n\to\infty} Df^{nk}(\theta) = 0$, donde concluímos que $\lim_{n\to\infty} f^{nk}(a) = s_0$. Como $a \in G$, pelo item 2 do Lema **3.25** temos que $f^{nk}(a) \in G$ e por G ser fechado, concluímos que $s_0 = \lim_{n\to\infty} f^{nk}(a) \in G$, contrariando o item 3 do Lema **3.25** e demonstrando assim o Teorema de Schwartz, no caso em que M é orientável, pois então f é monótona.

Caso M não seja orientável, tomamos $\pi : \widetilde{M} \to M$ o seu recobrimento duplo orientado e $\widetilde{\varphi}$ o fluxo que recobre φ. Como $\widetilde{\varphi}$ não admite conjuntos minimais não triviais, o mesmo acontece com φ. ■

Demonstração do Lema 3.25. 1. Como $G \subset (-1,1)$ é compacto, segue que seu complementar é aberto, isto é, G^c pode ser escrito como união enumerável de intervalos abertos. Então $G^c = \cup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$. Segue da definição de complementar que $G = (-1,1) \setminus \cup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$.

2. Dado $g \in I \cap \mathcal{M}$, existem valores positivos e negativos de t tais que $\varphi(t,g) \in I \cap \mathcal{M}$, pois $\gamma(g) \subset \mathcal{M}$ é denso em $\mathcal{M}$. Isso implica que para todo $v \in G$ existe $v_0 \in G$ tal que $f(v_0) = v$.

3. Como $\mathcal{M}$ não contém órbitas periódicas a única maneira de ocorrer $f^k(v) = v$, $v \in G$, é com $k = 0$.

4. Suponhamos que G contenha tal conjunto K_0 minimal. Sejam $\widetilde{K_0} = i(K_0)$ e $\widetilde{G} = i(G)$. Denotemos por Δ a união de todas as órbitas de φ por pontos de $\widetilde{K_0}$. Demonstraremos que Δ é fechado em $\mathcal{M}$. De fato, suponhamos que não. Seja $p \in \overline{\Delta} \setminus \Delta$, em que $\overline{\Delta}$ é o fecho de Δ em $\mathcal{M}$. Existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(t_0, p) \in I \cap \mathcal{M}$. Como $\widetilde{G} \setminus \widetilde{K_0}$ é aberto em $\widetilde{G}$ e $\varphi(t_0,p) \in \widetilde{G} \setminus \widetilde{K_0}$, existe uma vizinhança $\widetilde{V}$ de $\varphi(t_0,p)$ em $\widetilde{G}$ com $\widetilde{V} \cap \widetilde{K_0} = \emptyset$ tal que $\varphi_{-t_0}(\widetilde{V})$, que é aberto, não contém pontos de Δ, o que é um absurdo pois $p \in \varphi_{-t_0}(\widetilde{V}) \cap (\overline{\Delta} \setminus \Delta)$. Como $\Delta \subset \mathcal{M}$ é invariante, temos que $\Delta = \mathcal{M}$, e assim, $K_0 = G$.

5. Por construção, $f'(v) \neq 0$ para todo $v \in V$, e por $\overline{Z} \subset V$ ser compacto, segue o resultado.

6. Dado $a \in G$, seja $H = \left\{f^k(a), k \in \mathbb{Z}\right\}$. Tomamos o fecho $\overline{H}$. Mostraremos que $\overline{H}$ é invariante com respeito a f. De fato, se $x \in \overline{H}$, então existe uma sequência $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ tal que $\lim\limits_{n \to \infty} f^{k_n}(a) = x$, e assim $f(\lim\limits_{n \to \infty} f^{k_n}(a)) = f(x)$, ou seja, $\lim\limits_{n \to \infty} f^{k_{n+1}}(a) = f(x)$, e temos que $f(x) \in \overline{H}$. Concluímos que $f(\overline{H}) \subset \overline{H}$. Analogamente, $\lim\limits_{n \to \infty} f^{k_{n-1}}(a) = f^{-1}(x) \in \overline{H}$, isto é,

$$f^{-1}(\overline{H}) \subset \overline{H}.$$

Pelos itens 2 e 5 desse lema, f é bijetiva em G, e concluímos que $\overline{H} \subset f(\overline{H})$, ou seja, $\overline{H} = f(\overline{H})$. Com o item 4, concluímos que $G = \overline{H}$.

7. Como f é de classe C^2 e $\overline{Z}$ é compacto, segue o resultado. ■

Para provarmos o Lema **3.26**, será necessário provarmos outros dois lemas dados a seguir.

Lema 3.27. *Se f é monótona, então existe um intervalo aberto (a,b), com $a, b \in G$, tal que $f^k((a,b)) \subset Z$ para todo $k \geq 0$.*

Demonstração. Seja $\varepsilon = dist(G, ([-1,1] \setminus Z))$. Para os a_i, b_i do item 1 do Lema **3.25**, sejam $S = \{i;\, b_i - a_i \geq \varepsilon\}$ e $Y = \{a_i, b_i;\, i \in S\}$. Observamos que S e Y são conjuntos finitos, pois $\varepsilon > 0$.

Seja $K_1 = \{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots\}$ e temos que $f(K_1) = K_1$. De fato, $s_0 \in G \setminus K_1$ se, e somente se, para todo $h > 0$ ocorre

$$G \cap (s_0 - h, s_0) \neq \emptyset \text{ e } G \cap (s_0, s_0 + h) \neq \emptyset, \tag{3.3.0.1}$$

pois G é perfeito (e s_0 não é extremo de intervalo). Seja $a_1 \in K_1$ e suponhamos que f seja estritamente crescente. Como f é bijetiva em G e temos que $G \cap (a_1, b_1) = \emptyset$, que resulta

$G \cap (f(a_1), f(b_1)) = f(G \cap (a_1, b_1)) = \emptyset$. Um vez que $f(G) = G$, pelo item 2 do Lema **3.25**, ocorre que $f(a_1) \in K_1$ por (3.3.0.1). De maneira inteiramente análoga, prova-se este fato para qualquer outro elemento de K_1, considerando que f seja estritamente monótona e $f(G) = G$. Logo, $f(K_1) = K_1$.

Pelo item 3 do Lema **3.25**, existe N inteiro, tal que $f^k(a_1) \notin Y$, para cada $k \geq N$. De fato, como K_1 é invariante por f e Y é finito, existe $N > 0$ tal que o conjunto $\{f^i(a_1)\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, N$, contém Y, pelo item 4 do Lema **3.25**, pois se não, existiria um $K_0 \subset G$ minimal. Admitamos que existe $n > N$ tal que $f^n(a_1) \in Y$, digamos $f^n(a_1) = a_j = f^s(a_1)$, $0 \leq s \leq N$. Como $n > N$, existe $k \geq 1$ tal que $n = k + s$. Assim, $a_j = f^n(a_1) = f^k(f^s(a_1)) = f^k(a_j)$ o que implica $k = 0$, pelo item 3 do Lema **3.25**.

Assim $f^N(a_1) = a_i$ ou b_i para algum i, e de acordo com a escolha do número N, temos $|f^k(a_1) - f^k(b_1)| < \varepsilon$ para todo $k \geq N$. Seja $(a, b) = (a_1, b_1)$, e dado que $f^k(a), f^k(b) \in G$, segue que o intervalo $f^k((a, b))$ pertence a Z, para todo $k \geq 0$, o que termina a demonstração do lema. ∎

Lema 3.28 (Desigualdade fundamental)**.** *Sejam N um inteiro e $[p, q] \subset (-1, 1)$ tal que $f^k([p, q]) \subset Z$ para todo k que satisfaça $0 \leq k \leq N$. Então*

$$\frac{|Df^{k+1}(u)|}{|Df^{k+1}(v)|} \leq \exp\left(\frac{M}{L}\sum_{j=0}^{k}|f^j(p) - f^j(q)|\right),$$

para todo k que satisfaça $0 \leq k \leq N$ e $u, v \in [p, q]$. As constantes M e L são dadas nos itens 5. *e* 7. *do Lema **3.25**.*

Demonstração. Temos que $f^{k+1}(s) = f \circ f^k(s)$ e portanto $Df^{k+1}(s) = Df(f^k(s)) \cdot (Df^k)(s)$. Então,

$$\frac{|Df^{k+1}(u)|}{|Df^{k+1}(v)|} = \frac{|f'(f^k(u)) \cdot f'(f^{k-1}(u)) \ldots f'(f(u)) \cdot f'(u)|}{|f'(f^k(v)) \cdot f'(f^{k-1}(v)) \ldots f'(f(v)) \cdot f'(v)|}.$$

Assim,

$$\left|\log\left|\frac{Df^{k+1}(u)}{Df^{k+1}(v)}\right|\right| \leq \sum_{j=0}^{k}|\log|f'(f^j(u))| - \log|f'(f^j(v))|| \leq \sum_{j=0}^{k}\frac{|f''(w_j)|}{|f'(w_j)|}|f^j(u) - f^j(v)|,$$

onde $w_j \in [f^j(u), f^j(v)]$. A última desigualdade decorre do Teorema do valor médio.

Pelas desigualdades dos itens 5. e 7. do Lema **3.25** e considerando que f é estritamente monótona, e f^j também o é, a última expressão da desigualdade acima resulta que

$$\frac{M}{L}\sum_{j=0}^{k}|f^j(u) - f^j(v)| \leq \frac{M}{L}\sum_{j=0}^{k}|f^j(p) - f^j(q)|.$$

E assim concluímos a desigualdade fundamental. ∎

Demonstração do Lema 3.26. Demonstraremos que o ponto a dado no Lema **3.27** satisfaz o item 1 do enunciado do Lema **3.26**. Mostraremos que a série $\sum_{k=0}^{\infty} Df^k(a)$ converge e isso concluí a afirmação. Seja $a_k = f^k(a)$ e $b_k = f^k(b)$. Como observamos na demonstração do Lema **3.27**, $G \cap [a_k, b_k] = \{a_k, b_k\}$, pelo item 1 do Lema **3.25**, e como os intervalos $[a_n, b_n]$ são todos disjuntos, temos que

$$2 \geq \sum_{k=0}^{\infty} |b_k - a_k| = \sum_{k=0}^{\infty} |f^k(b) - f^k(a)| = \sum_{k=0}^{\infty} |Df^k(w_k)||b-a| \tag{3.3.0.2}$$

com $w_k \in (a,b)$. Temos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} |Df^k(w_k)| \leq \frac{2}{|b-a|} \tag{3.3.0.3}$$

e concluímos que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} |Df^k(w_k)|$ é limitada, portanto convergente, pois é série monótona. Então $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} Df^k(w_k)$ é uma série absolutamente convergente.

Aplicando a desigualdade fundamental no intervalo (a,b), com $p=a$, $q=b$, $u=a$ e $v=w_k$, obtemos

$$\frac{|Df^k(a)|}{|Df^k(w_k)|} \leq \exp\left(\frac{M}{L}\sum_{j=0}^{k-1}|f^j(b) - f^j(a)|\right) \leq \exp\left(\frac{2M}{L}\right).$$

Assim, $|Df^k(a)| \leq \exp\left(\frac{2M}{L}\right)|Df^k(w_k)|$ e concluímos que a série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} Df^k(a)$ é absolutamente convergente, e portanto convergente e concluímos o item 1.

Agora, mostraremos o item 2 do Lema **3.26**. Tomemos $\tau := \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}|Df^k(a)|$, e lembramos que $\varepsilon = dist(G, ((-1,1) \setminus Z))$. Determinaremos d tal que $\lim\limits_{k\to\infty} Df^k(x) = 0$ uniformemente, para qualquer $x \in V(a) = \{y; |y-a| < d\}$, com $a \in G$. Para isso, como $\lim\limits_{k\to\infty} Df^k(a) = 0$, é suficiente mostrarmos que existe d tal que para $x \in V(a)$, qualquer número natural k e alguma constante α, temos

a) $|f^k(x) - f^k(a)| < \varepsilon$ e

b) $|Df^k(x)| < \alpha|Df^k(a)|$.

Fazemos indução sobre k. Para $k=0$, não é difícil percebermos que existem $d = d_0$ e α tais que (a) e (b) são satisfeitos (continuidade). Suponhamos que (a) e (b) são satisfeitos para um certo d e para $0 \leq k \leq N$, considerando que

$$d = \min\left\{d_0, \frac{L \cdot ln(\alpha)}{\alpha\tau \cdot M}, \frac{\varepsilon}{\alpha\tau}\right\}.$$

Demonstraremos que para $k = N+1$ e o mesmo d, os itens (a) e (b) são satisfeitos. Se $x < a$, usando a desigualdade fundamental para $p = u = x$, e $q = v = a$, considerando o valor de d e a hipótese de indução, temos

$$|Df^{N+1}(x)| \leq \exp\left(\frac{M}{L}\sum_{k=0}^{N}|f^k(x) - f^k(a)|\right)\left|Df^{N+1}(a)\right| \leq$$

$$\leq \exp\left(\frac{M}{L}\sum_{k=0}^{N}|Df^k(u_k)|\cdot d\right)\cdot|Df^{N+1}(a)| \leq \exp\left(\frac{M}{L}\cdot d\cdot\alpha\sum_{k=0}^{N}|Df^k(a)|\right)|Df^{N+1}(a)| \leq$$

$$\leq \alpha|Df^{N+1}(a)|,$$

onde $u_k \in [x,a]$, e nos garante 2. Assim, temos também que, para algum $\theta \in [x,a]$, ocorre

$$|f^{N+1}(x) - f^{N+1}(a)| = |x-a||Df^{N+1}(\theta)| < d\alpha|Df^{N+1}(a)| < d\alpha\tau < \epsilon,$$

garantido que 1. também é satisfeito para $k = N+1$. Se $x > a$, o prova-se da mesma maneira. Observamos que o item 1 foi utilizado para fazermos indução em 2, e assim garantirmos o uso da desigualdade fundamental, pois $f^k([x,a]) \subset Z$. ■

3.3.1 Aplicação do Teorema de Schwartz: o número de rotação

Consideremos $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um campo de classe C^1, invariante por translações inteiras, isto é, $X(x+1,y) = X(x,y) = X(x,y+1)$ para quaisquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Pela passagem ao quociente, temos $X = (X_1, X_2)$ está bem definido em $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Estes são os campos naturais em $\mathbb{T}^2$. A não ser que dito contrário, consideremos o campo $X = (X_1, X_2)$, com $X_1 \neq 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Proposição 3.29. *Seja $X = (X_1, X_2)$ um campo vetorial de classe C^1 invariante por translações inteiras. Então as órbitas de X são as mesmas que as do campo vetorial $Y(x,y) = (1, f(x,y))$, onde $f = X_2/X_1$.*

Demonstração. Sejam Δ_X e Δ_Y os conjuntos de órbitas de X e Y, respectivamente. Sejam $\gamma_X \in \Delta_X$ e $\gamma_Y \in \Delta_Y$, tais que $\gamma_X(t_0) = \gamma_Y(t_0) = (x_0, y_0)$.

Seja $\beta(t)$ a solução da equação diferencial $\xi' = X_1(\gamma_Y(\xi))$, com condição inicial $\xi(t_0) = t_0$ definida para todo $t \in \mathbb{R}$. Temos que β é injetiva. De fato, se $t, s \in \mathbb{R}$ são tais que $0 = \beta(t) - \beta(s)$, então pelo Teorema do valor médio, existe $\theta \in (t,s)$ tal que $0 = |\beta(t) - \beta(s)| = |X_1(\gamma_Y(\beta(\theta)))||t-s|$ e como $X_1 \neq 0$, então $s = t$. Além disso, β é difeomorfismo local pelo Teorema da função inversa, e concluímos que β é difeomorfismo global.

Agora, observemos que $\gamma_Y \circ \beta(t_0) = (x_0, y_0)$, e

$$(\gamma_Y \circ \beta)'(t) = \gamma_Y'(\beta(t))\beta'(t) = (1, f(\gamma_Y(\beta(t))))X_1(\gamma_Y(\beta(t))) = X(\gamma_Y \circ \beta(t)).$$

Portanto $\gamma_Y \circ \beta$ é solução do campo X com condição inicial $\gamma_X(t_0) = (x_0, y_0)$, e pelo Teorema de existência e unicidade, $\gamma_Y \circ \beta = \gamma_X$. Como isso vale para todo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, temos que $\Delta_X = \Delta_Y$. ■

Com esta última Proposição, restringimos nossa atenção a campos da forma $(x,y) \mapsto (1, f(x,y))$, mais precisamente, nas propriedades da função f.

Portanto, seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1, periódica de período 1, ou seja,

$$f(x+1, y) = f(x, y) = f(x, y+1), \qquad \text{para quaisquer } x, y \in \mathbb{R} \tag{3.3.1.1}$$

Consideremos $\varphi(t, y)$ a solução de

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y. \tag{3.3.1.2}$$

para todo $y \in \mathbb{R}$. Então,

$$\varphi(t+1, y) = \varphi(t, \varphi(1, y)) \tag{3.3.1.3}$$

e

$$\varphi(t, y+1) = \varphi(t, y) + 1, \quad \text{para todo } y \in \mathbb{R}. \tag{3.3.1.4}$$

A aplicação $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $\psi(y) = \varphi(1, y)$, é de classe C^1, com inversa $\psi^{-1}(y) = \varphi(-1, y)$. Portanto ψ é difeomorfismo de classe C^1. Além disso, pela unicidade das soluções de (3.3.1.2), temos que ψ é estritamente crescente. De fato, se $y > w$, então $\varphi(0, y) > \varphi(0, w)$. Se ocorresse $\psi(y) = \varphi(1, y) \leq \varphi(1, w) = \psi(w)$, então pela continuidade das soluções, haveria um ponto $s \in (0, 1)$ tal que $\varphi(s, y) = \varphi(s, w)$, e teríamos duas soluções em (s, y_0), que contraria o Teorema de existência e unicidade.

Temos ainda que, para todo $n \in \mathbb{N}$, ocorre

$$\psi^n(y) = \varphi(n, y). \tag{3.3.1.5}$$

O campo $Y = (1, f(x, y))$ define um fluxo Φ de classe C^1 no toro $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Seja $C = \{(0, y);\ y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}\}$ a circunferência no toro, e observemos que Φ é transversal a C. Como $\psi(y+1) = 1 + \psi(y)$, para todo $y \in \mathbb{R}$, o difeomorfismo $\alpha : C \to C$, $\alpha(0, y) = (0, \psi(y))$, está bem definido.

Definição 3.30. *Dizemos que $(0, y) \in C$ é um ponto periódico de α se existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha^n(0, y) = (0, y)$.*

Como veremos a seguir, a aplicação α se faz importante no estudo do fluxo Φ.

Proposição 3.31. *O fluxo Φ tem uma órbita fechada, se e somente se, α tem um ponto periódico.*

Demonstração. Se α tem um ponto periódico, então existem $n \in \mathbb{N}$ e $(0, y) \in C$ tais que

$$(0, \varphi(n, y)) = (0, \psi^n(y)) = \alpha^n(0, y) = (0, y) = (0, \varphi(0, y)).$$

Portanto, $\varphi(t, y)$ é periódica, e como a solução ϕ de $Y(x, y) = (1, f(x, y))$, com condição inicial $\phi(0) = (0, y)$, é da forma $\phi(t, 0, y) = (t, \varphi(t, y))$, temos que

$$\phi(0, 0, y) = (0, \varphi(0, y)) = (n, \varphi(n, y)) = \phi(n, 0, y),$$

onde concluímos que ϕ é periódica.

Reciprocamente, como Φ é transversal a C, suponhamos que existe uma órbita $\phi(t,0,y)$ de Φ periódica. Então existe $\tau \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$(0, \varphi(0, y)) = \phi(0, 0, y) = \phi(\tau, 0, y) = (\tau, \varphi(\tau, y)).$$

Logo, $\tau \in \mathbb{N}$, e

$$(0, y) = (0, \varphi(0, y)) = (0, \varphi(\tau, y)) = (0, \psi^\tau(y)),$$

e concluímos que ψ tem ponto periódico. ■

Proposição 3.32. *Para todo $y \in \mathbb{R}$, o limite $\rho = \lim_{|n|\to\infty} \dfrac{\psi^n(y)}{n}$ existe e não depende de y.*

Demonstração. Inicialmente, demonstraremos a existência do limite $\lim_{|n|\to\infty} \dfrac{\psi^n(0)}{n}$. Sejam $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Fixamos t e fazemos $F(y) = \varphi(t, y) - y$. Provaremos que

$$|F(y_1) - F(y_2)| \leq 1. \tag{3.3.1.6}$$

Por (3.3.1.4), basta mostrarmos para $|y_1 - y_2| < 1$. Sem perda de generalidade, suponhamos $y_1 > y_2$. Observemos que $0 \leq \varphi(t, y_1) - \varphi(t, y_2) \leq 1$, pela unicidade das soluções de (3.3.1.2). Usando que $-1 \leq y_2 - y_1 \leq 0$, obtemos

$$-1 \leq \varphi(t, y_1) - y_1 - \varphi(t, y_2) + y_2 \leq 1,$$

ou seja, $|F(y_1) - F(y_2)| \leq 1$. Se $y_1 < y_2$, a demonstração desse fato é análoga.

Notemos que (3.3.1.6) equivale a

$$\varphi(t, y_1) - y_1 - 1 \leq \varphi(t, y_2) - y_2 \leq \varphi(t, y_1) - y_1 + 1, \ \ \forall t \in \mathbb{R}, \tag{3.3.1.7}$$

o que implica que,

$$\varphi(m, 0) - 1 \leq \varphi(m, y) - y \leq \varphi(m, 0) + 1, \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \ \ \forall y \in \mathbb{R}. \tag{3.3.1.8}$$

Para $y = 0, \varphi(m, 0), \ldots, \varphi((n-1)m, 0)$ nessa relação, ocorre que

$$\begin{array}{rcccl}
\varphi(m,0) - 1 & \leq & \varphi(m,0) & \leq & \varphi(m,0) + 1, \\
\varphi(m,0) - 1 & \leq & \varphi(2m,0) - \varphi(m,0) & \leq & \varphi(m,0) + 1, \\
\varphi(m,0) - 1 & \leq & \varphi(3m,0) - \varphi(2m,0) & \leq & \varphi(m,0) + 1, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\varphi(m,0) - 1 & \leq & \varphi(nm,0) - \varphi((n-1)m,0) & \leq & \varphi(m,0) + 1,
\end{array}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Somando membro a membro essas relações, obtemos

$$n\varphi(m, 0) - n \leq \varphi(nm, 0) \leq n\varphi(m, 0) + n, \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}.$$

Logo,

$$\left| \frac{\varphi(mn, 0)}{mn} - \frac{\varphi(m, 0)}{m} \right| \leq \frac{1}{|m|}. \tag{3.3.1.9}$$

Trocando n por m, temos também que

$$\left|\frac{\varphi(mn,0)}{mn} - \frac{\varphi(n,0)}{n}\right| \leq \frac{1}{|n|}, \tag{3.3.1.10}$$

e concluímos que

$$\left|\frac{\varphi(m,0)}{m} - \frac{\varphi(n,0)}{n}\right| \leq \left|\frac{\varphi(m,0)}{m} - \frac{\varphi(mn,0)}{mn}\right| + \left|\frac{\varphi(mn,0)}{mn} - \frac{\varphi(n,0)}{n}\right| \leq \frac{1}{|m|} + \frac{1}{|n|}.$$

Portanto, $\dfrac{\psi^n(0)}{n}$ é de Cauchy, e assim convergente. Para mostrarmos que

$$\lim_{|n|\to\infty} \frac{\varphi(n,0)}{n} = \lim_{|n|\to\infty} \frac{\varphi(n,y)}{n},$$

para todo $y \in \mathbb{R}$, basta dividirmos a relação (3.3.1.8) por m e fazermos $|m| \to \infty$, o que demonstra a proposição. ■

Com a Proposição **3.32**, podemos dar a seguinte definição.

Definição 3.33. *O número* $\rho = \lim_{|n|\to\infty} \dfrac{\varphi(n,y)}{n}$ *é chamado número de rotação da equação* (3.3.1.2) *(ou do fluxo* Φ*).*

Exemplo 3.34. No campo $X = (1,\lambda)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que $f(x,y) = \lambda$ e $\varphi(t,y) = \lambda t + y$. Portanto

$$\rho = \lim_{|n|\to\infty} \frac{\lambda n + y}{n} = \lambda.$$

Exemplo 3.35. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $f(t,y) = a + \operatorname{sen}^2(2\pi t)$, então

$$\varphi(t,y) = \left(\frac{2a+1}{2}\right)t - \frac{1}{2\pi}\operatorname{sen}(4\pi t) + y$$

e

$$\rho = \lim_{|n|\to\infty} \frac{\varphi(n,y)}{n} = \frac{2a+1}{2}.$$

O número de rotação reflete algumas características das órbitas do fluxo Φ, como veremos a seguir.

Proposição 3.36. *O número de rotação* ρ *é racional se, e somente se,* α *possuí ponto periódico (ou, equivalentemente,* Φ *possui órbita fechada).*

Demonstração. Suponhamos $\rho = r/m$ em que $r, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 0$. Demonstraremos por absurdo que α^m tem ponto fixo. De fato, suponhamos que $\psi^m(y) = \varphi(m,y) > r + y$, para todo $y \in \mathbb{R}$. Como $y \mapsto \varphi(m,y)$ é periódica, de período 1, temos que $\inf_{y\in\mathbb{R}}(\varphi(m,y) - r - y) = \min_{y\in[0,1]}(\varphi(m,y) - r - y) > 0$. Com isso, seja $a > 0$ tal que $\varphi(m,y) - r - y > a$, para todo $y \in \mathbb{R}$.

Para $y = \varphi(m,y), \varphi(2m,y), \ldots, \varphi((k-1)m,y)$, obtemos

$$\begin{array}{rcc} \varphi(m,y) & \geq & r+a+y, \\ \varphi(m,\varphi(m,y)) = \varphi(2m,y) & \geq & r+a+\varphi(m,y), \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi(m,\varphi(m,\ldots,\varphi(m,y))\ldots) = \varphi(km,y) & \geq & r+a+\varphi((k-1)m,y) \end{array}$$

Somando essas relações, obtemos

$$\varphi(mk,y) \geq k(r+a)+y.$$

Dividimos por mk, e fazemos $k \to \infty$, concluindo que $\rho \geq \dfrac{r+a}{m}$, o que é um absurdo. Fato análogo ocorre se supormos $\varphi(m,y) < r+y$, para todo $y \in \mathbb{R}$. Portanto, α^m tem ponto fixo.

Reciprocamente, suponhamos que α^m tenha ponto fixo y, para algum $m \in \mathbb{N}$. Seja $r \in \mathbb{Z}$ tal que $\varphi(m,y) = r+y$, isto é, $\alpha^m(0,y) = (0,y)$. Por (3.3.1.3) e (3.3.1.4) temos que

$$\varphi(km,y) = \varphi((k-1)m, r+y) = \varphi((k-2)m, 2r+y) = kr+y,$$

para todo $k \geq 0$. Assim, concluímos que

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{\varphi(km,y)}{km} = \frac{r}{m}.$$

Portanto, ρ é racional. ■

Concluímos então que o número de rotação ρ é irracional se, e somente se, todas as órbitas do fluxo Φ são injetivas. Atrelando este fato ao Teorema de Schwartz, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 3.37. *Seja Φ um fluxo de classe C^2 em $\mathbb{T}^2$ induzido por um campo de $\mathbb{R}^2$ da forma $(x,y) \mapsto (1, f(x,y))$. Seja $\rho = \rho(f)$ o número de rotação desse fluxo. Então, ρ é irracional se, e somente se, todas as órbitas de Φ são densas em $\mathbb{T}^2$.*

Referências Bibliográficas

[1] BENDIXSON, Ivar, *Sur les courbes définies par des équations différentielles*, Acta Mathematica 24 ,1901, 1?88.

[2] CIESIELSKI, Krzysztof, *On the Poincare-Bendixson Theorem*, IMUJ preprint, 2001/19.

[3] HAAS, Felix, *Poincaré-Bendixson Type Theorems for Two-Dimensional Manifolds Different from the Torus*, Annals of Mathematics , vol. 59, 1954, 292?299.

[4] KNESER, Hellmuth, *Reguläre Kurvenscharen auf Ringflächen*, Math. Ann. 91 (1924), 135-154.

[5] LIMA, Elon L., *Introdução à Topologia Diferencial*, Editora IMPA, Rio de Janeiro, 2008.

[6] LIMA, Elon L., *A característica de Euler-Poincaré*, Revista Matemática Universitária, No 1, 1985, 47?62.

[7] MARKLEY, Nelson G., *The Poincaré-Bendixson Theorem for the Klein Bottle*, American Mathematical Society, Vol. 135 , jan. 1969, 159-165.

[8] MASSEY, William S., *A Basic Course in Algebraic Topology*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[9] PEIXOTO, Maurício M., *Structural stability on two-dimensional manifolds*, Topology 1, 1962, 101-120.

[10] POINCARÉ, Henri, *Memoire sur les courbes définiés par une équation différentielle*, I, II, III,IV, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 7, 1881, 375?422.

[11] POLLACK, Alan, GUILLEMIN, Victor, *Differential Topology*, Prentice-Hall, New Jersey, 1974.

[12] SCHWARTZ, Arthur J., *A Generalization of a Poincaré-Bendixson Theorem to Closed Two-Dimensional Manifolds*, American Mathematical Society, Vol. 85, jul. 1963, 453-458.

[13] SOTOMAYOR , Jorge Manuel T., *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Projeto Euclides, Editora IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

[14] THOMASSEN, Carsten, *The Jordan-Schonflies Theorem and the Classification of Surface*, The American Mathematical Monthly, Vol. 99, No. 2 , 1992, 116-131.

[15] WHITNEY, Hassler, *Geometrie Integration Theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1957.