UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**Juan Antonio Pacheco Cruz**

# Identidades e cocaracteres da $*$-superálgebra $M_{2,1}(F)$ com involução transposta

Belo Horizonte
2022

Juan Antonio Pacheco Cruz

# Identidades e cocaracteres da $*$-superálgebra $M_{2,1}(F)$ com involução transposta

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientadora: Ana Cristina Vieira

Coorientador: Rafael Bezerra dos Santos

Belo Horizonte
2022

Pacheco Cruz, Juan Antonio.

P166i Identidades e cocaracteres da $*$-superálgebra M2,1(F) com involução transposta [manuscrito] / Juan Antonio Pacheco Cruz – 2022.
69 f. il.

Orientador: Ana Cristina Vieira
Coorientador: Rafael Bezerra dos Santos.
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f. 68-69.

1. Matemática – Teses. 2. Álgebra – teses. 3. Superálgebras – Teses. I. Vieira, Ana Cristina. II. Santos, Rafael Bezerra dos. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. IV.Título.

CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irenquer Vismeg Lucas Cruz CRB 6/819 Universidade Federal de Minas Gerais – ICEx.

ATA DA CENTÉSIMA SEPTUAGÉSIMA OITAVA DEFESA DE TESE DE DOUTORADO DO ALUNO JUAN ANTONIO PACHECO CRUZ, REGULARMENTE MATRICULADO NO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, REALIZADA DIA 04 DE FEVEREIRO DE 2022.

Aos quatro dias do mês de fevereiro de 2022, às 10h00, em reunião pública virtual na Plataforma Google Meet pelo link https://meet.google.com/sdh-nczh-bqy?authuser=0 (conforme mensagem eletrônica da Pró-Reitoria de Pós-Graduação de 26/03/2020, com orientações para a atividade de defesa de tese durante a vigência da Portaria nº 1819), reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para julgar a defesa de tese do aluno **Juan Antonio Pacheco Cruz**, intitulada: "*Identidades e cocaracteres da *-superálgebra M2,1(F) com involução transposta*", requisito final para obtenção do Grau de Doutor em Matemática. Abrindo a sessão, a Senhora Presidente da Comissão, Profa. Ana Cristina Vieira, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares do trabalho final, passou a palavra ao aluno para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa do aluno. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se reservadamente, sem a presença do aluno, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: o aluno foi considerado aprovado sem ressalvas e por unanimidade. O resultado final foi comunicado publicamente ao aluno pela Senhora Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, a Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 04 de fevereiro de 2022.

Ana Cristina Vieira

***PROFA. DRA. ANA CRISTINA VIEIRA***
Orientadora (UFMG)

***PROF. DR. RAFAEL BEZERRA DOS SANTOS***
Coorientador (UFMG)

***PROF. DR. ALEXEI KRASSILNIKOV***
Examinador (UnB)

***PROF. DR. CLAUDEMIR FIDELIS BEZERRA JÚNIOR***
Examinador (UFPB)

Fabrizio Martino

***PROF. DR. FABRIZIO MARTINO***
Examinador (Univ. Palermo)

Viviane Ribeiro Tomaz da Silva

***PROFA. DRA. VIVIANE RIBEIRO TOMAZ DA SILVA***
Examinadora (UFMG)

# Resumo

Seja $F$ um corpo de característica zero. Considerando que o $T$-ideal da álgebra de matrizes $M_3(F)$ não é conhecido, alguns autores estudam esta álgebra munida de estruturas adicionais. A maior motivação desta tese veio a partir dos resultados de La Mattina (em [16]) sobre as identidades graduadas da superálgebra $M_{2,1}(F)$ e também dos resultados de D'Amour e Racine (em [4]) sobre as $*$-identidades de $M_3(F)$ com involução transposta $t$. Aqui, nos dedicamos a estudar as chamadas $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidades da $*$-superálgebra $(M_{2,1}(F), t)$ e determinamos todas tais identidades de grau $\leq 3$. Além disso, estudamos a decomposição do chamado cocaracter $*$-graduado de $(M_{2,1}(F), t)$, tendo como motivações os artigos [1], [16] e [2], a respeito das multiplicidades não nulas nas decomposições do $S_n$-cocaracter de $M_3(F)$, do cocaracter graduado da superálgebra $M_{2,1}(F)$ e do $*$-cocaracter da $*$-álgebra $(M_3(F), t)$, respectivamente. Determinamos condições necessárias e suficientes para que um caracter irredutível apareça com multiplicidade não nula no $n$-ésimo cocaracter $*$-graduado de $(M_{2,1}(F), t)$.

**Palavras-chave:** Involução graduada, $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidades, cocaracter $*$-graduado.

# Abstract

Let $F$ be a field of characteristic zero. Considering that the $T$-ideal of the algebra of matrices $M_3(F)$ is still unknown, some authors study such algebra endowed with additional structures. This thesis was inspired by the results of La Mattina (in [16]) about the graded identities of the superalgebra $M_{2,1}(F)$ and also by the results of D'Amour and Racine (in [4]) about the $*$-identities of $M_3(F)$ with transpose involution $t$. Here, we are devoted to the study of the so-called $(\mathbb{Z}_2, *)$-identities of the $*$-superalgebra $(M_{2,1}(F), t)$ and determine all such identities of degree up to 3. Furthermore, we study the decomposition of the so-called $*$-graded cocharacter of $(M_{2,1}(F), t)$, motivated by the papers [1], [16] and [2], with respect to the non-zero multiplicities in the decompositions of the $S_n$-cocharacter of $M_3(F)$, of the graded cocharacter of the superalgebra $M_{2,1}(F)$ and of the $*$-cocharacter of the $*$-algebra $(M_3(F), t)$, respectively. We present necessary and sufficient conditions for having non-zero multiplicity of an irreducible character to appear in the $n$th $*$-graded cocharacter of $(M_{2,1}(F), t)$.

**Keywords:** Graded involution, $(\mathbb{Z}_2, *)$-identities, $*$-graded cocharacter.

# Sumário

# 1 Introdução

Neste trabalho, vamos considerar $A$ uma álgebra associativa sobre um corpo $F$ de característica zero. Dizemos que um polinômio da álgebra livre associativa $F\langle X\rangle$ gerada por um conjunto enumerável $X$ de variáveis não comutativas é uma identidade polinomial de $A$, se o mesmo se anula quando avaliado em quaisquer elementos de $A$. Se $A$ satisfaz uma identidade não nula, então dizemos que $A$ é uma PI-álgebra.

Um dos principais interesses de estudo da PI-teoria consiste na descrição das identidades polinomiais satisfeitas por uma determinada álgebra $A$ e, assim, um objeto importante na teoria é o conjunto $\mathrm{Id}(A)$ de todas as identidades satisfeitas por $A$. Este é um ideal de $F\langle X\rangle$ que é invariante sob todos os endomorfismos da álgebra livre, ou seja, é o que conhecemos como $T$-ideal.

Em 1950, Specht conjecturou que, sobre um corpo de característica zero, o $T$-ideal $\mathrm{Id}(A)$ de uma álgebra associativa $A$ é finitamente gerado como um $T$-ideal. Esta conjectura foi provada em 1987 por Kemer (veja [14]). Desta forma, para descrevermos todas as identidades polinomiais satisfeitas por uma álgebra $A$ devemos determinar um conjunto gerador de $\mathrm{Id}(A)$ como um $T$-ideal.

Obter uma base finita de identidades para uma álgebra nem sempre é uma tarefa simples e um dos mais destacados exemplos é a álgebra de matrizes $M_n(F)$. De fato, apenas para $n = 2$ o $T$-ideal é conhecido (veja [6], [15] ) e para $n \geq 3$, os geradores de $\mathrm{Id}(M_n(F))$ são totalmente desconhecidos.

Paralelamente à situação em que a álgebra está sendo estudada no caso ordinário, ou seja, apenas considerando sua estrutura como álgebra, também é de interesse o estudo de álgebras com estrututras adicionais. Exemplos de álgebras com estruturas adicionais são as álgebras munidas de uma involução, também chamadas de $*$-álgebras, e as álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas, conhecidas como superálgebras.

Ao considerar $A$ uma $*$-álgebra ou uma superálgebra, o conceito de identidade é estendido para os conceitos de $*$-identidade e identidade graduada, respectivamente. Nestes casos, também são estudados os ideais de identidades correspondentes, ditos $T^*$-ideal e $T_2$-ideal com notações respectivas dadas por $\mathrm{Id}^*(A)$ e $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$.

Por exemplo, se $A = M_n(F)$, temos que $A$ é uma $*$-álgebra com a conhecida involução transposta $t$ definida por

$$\begin{array}{rcl} t : M_n(F) & \longrightarrow & M_n(F) \\ (a_{ij}) & \longmapsto & (a_{ji}) \end{array},$$

e também com a involução simplética $s$, que pode ser definida apenas no caso em que $n = 2m$. Neste último caso, escrevemos uma matriz $M \in M_{2m}(F)$ na forma

$$M = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}, \text{ onde } P, Q, R, S \in M_m(F)$$

e definimos

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}^s = \begin{pmatrix} S^t & -Q^t \\ -R^t & P^t \end{pmatrix}, \text{ onde } P, Q, R, S \in M_m(F).$$

Para $n = k + l$, com $k \geq l \geq 0$, temos também que $A = M_n(F)$ é uma superálgebra com $\mathbb{Z}_2$-graduação dada por

$$M_{k,l}(F)_0 := \left\{ \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \;\middle|\; P \in M_k(F);\ S \in M_l(F) \right\},$$

$$M_{k,l}(F)_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & Q \\ R & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; Q \in M_{k\times l}(F);\ R \in M_{l\times k}(F) \right\}$$

e esta é denotada por $M_{k,l}(F)$.

Como o $T$-ideal de $M_n(F)$ não é conhecido para $n \geq 3$, escolhemos, como objeto principal deste trabalho, a álgebra $M_3(F)$ com a $\mathbb{Z}_2$-graduação não trivial dada por $M_{2,1}(F)$ e munida da involução transposta $t$. Observamos que a involução transposta é uma involução graduada, ou seja, as componentes $M_{2,1}(F)_0$ e $M_{2,1}(F)_1$ da $\mathbb{Z}_2$-graduação são invariantes pela involução. Assim, $(M_{2,1}(F), t)$ é o que chamamos de uma $*$-superálgebra. Obviamente, a involução simplética não pode ser tratada neste caso, pois $n = 3$ é ímpar, mas quando $n$ é par, de modo geral a involução simplética também é uma involução graduada na superálgebra $M_{k,l}(F)$ se $k = l > 0$ ou se $k$ é par e $l = 0$.

Nossos estudos foram motivados devido principalmente aos seguintes aspectos:

(1) Em [16], a superálgebra $M_{2,1}(F)$ é considerada e apenas são conhecidas as identidades graduadas que têm como consequência todas as outras de grau $\leq 5$.

(2) Os resultados conhecidos para a álgebra $M_3(F)$ com involução transposta são apenas sobre o grau mínimo de uma $*$-identidade (veja, por exemplo, [3] e [4]).

Assim, nesta tese, nos dedicamos a estudar as chamadas $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidades da $*$-superálgebra $(M_{2,1}(F), t)$ e determinamos um conjunto contendo 12 tais identidades a partir das quais todas as outras identidades de grau $\leq 3$ são consequências destas.

Motivados ainda pelo trabalho [16], estudamos a decomposição do chamado $n$-ésimo cocaracter $*$-graduado da $*$-superálgebra $(M_{2,1}(F), t)$.

Recordemos que ao considerar uma álgebra $A$, seu $T$-ideal é gerado por polinômios multilineares e assim, consideramos o espaço $P_n \cap \mathrm{Id}(A)$, ou seja, subespaço de

$$P_n = \mathrm{span}_F\{x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}, \quad n \geq 1,$$

o espaço dos polinômios multilineares de grau $n$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

Existe uma ação natural do grupo simétrico $S_n$ sobre $P_n$, permutando as variáveis $x_1, \ldots, x_n$, e pelo fato de $\mathrm{Id}(A)$ ser invariante sob esta ação, temos que o espaço quociente $P_n(A) = \dfrac{P_n}{P_n \cap \mathrm{Id}(A)}$ se torna um $S_n$-módulo. O $S_n$-caracter de $P_n(A)$ é definido como o $n$-ésimo cocaracter de $A$ e denotado por $\chi_n(A)$. Este pode ser decomposto como uma soma de caracteres irredutíveis e para cada um destes consideramos sua multiplicidade.

Em [1], Benanti estabeleceu condições necessárias e suficientes para garantir que a multiplicidade de um caracter irredutível na decomposição do $n$-ésimo cocaracter $\chi_n(M_3(F))$ é não nula.

A noção de cocaracter é estendida para álgebras com estruturas adicionais e neste caso a ação é do grupo hiperoctaedral $H_n = \mathbb{Z}_2 \wr S_n$ sobre o espaço dos polinômios multilineares graduados, no caso de superálgebras, e sobre o espaço dos $*$-polinômios multilineares, no caso de $*$-álgebras. Nestas situações, temos o $n$-ésimo cocaracter graduado de uma superálgebra $A$, denotado por $\chi_n^{\mathrm{gr}}(A)$, e o $n$-ésimo $*$-cocaracter de uma $*$-álgebra $A$, denotado por $\chi_n^*(A)$. Os resultados conhecidos de nosso interesse são:

(1) Em [16], La Mattina estudou a decomposição do chamado cocaracter graduado da superálgebra $M_{2,1}(F)$, estabelecendo as multipartições dos $H_n$-caracteres irredutíveis com multiplicidades não nulas.

(2) Benanti e Campanella estabeleceram resultados a respeito das multiplicidades não nulas na decomposição de $\chi_n^*(M_3(F), t)$, em [2].

Acrescentamos que, além disso, em [7], os autores estabeleceram a decomposição do $*$-cocaracter da $*$-álgebra $M_2(F)$ com involução transposta, que também será importante para nossos estudos.

No contexto de $*$-superálgebras, podemos definir uma ação sobre o espaço dos $(\mathbb{Z}_2, *)$-polinômios multilineares, neste caso do grupo $\mathbb{H}_n = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \wr S_n$ sobre o espaço $P_n^{gri}$. Nesta tese, estudamos as multiplicidades dos $\mathbb{H}_n$-caracteres irredutíveis na decomposição de $\chi_n^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$, ou seja, do $n$-ésimo cocaracter $*$-graduado da superálgebra $M_{2,1}(F)$ munida da involução transposta. Estabelecemos uma condição sob a qual a multiplicidade é não nula, garantimos relações interessantes entre multiplicidades e determinamos o valor de muitas delas em diversos casos.

Agora descrevemos brevemente o conteúdo deste trabalho que está dividido em três capítulos. O Capítulo 1 é essencialmente preliminar. Neste capítulo vamos tratar definições e propriedades elementares da PI-Teoria tais como identidades polinomiais, cocaracteres e estendemos esses conceitos para álgebras com estruturas adicionais sendo estas superálgebras, $*$-álgebras e $*$-superálgebras. Apresentaremos também um resultado sobre as multiplicidades do $*$-cocaracter de $(M_2(F), t)$, que aplicaremos no Capítulo 3 para determinar algumas multiplicidades do cocaracter $*$-graduado de $(M_{2,1}(F), t)$. No Capítulo 2, exibimos uma lista de 12 $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidades de $(M_{2,1}(F), t)$ e demonstraremos que a partir delas podemos obter todas as $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidades de grau $\leq 3$. Finalmente no Capítulo 3 caracterizaremos as multiplicidades não nulas do cocaracter $*$-graduado $\chi_n^{gri}(M_{2,1}(F), t)$ e enunciaremos os valores de outras multiplicidades. Fechamos o trabalho mostrando uma propriedade especial das multiplicidades associadas à multipartições da forma $(\emptyset, (m), \emptyset, (n))$.

# 2 Superálgebras com involução graduada

O objeto principal deste trabalho é a álgebra $M_3(F)$ com uma $\mathbb{Z}_2$-graduação não trivial, que denotaremos por $M_{2,1}(F)$, e munida da conhecida involução transposta $t$. Como veremos, esta será uma involução graduada e assim, $(M_{2,1}(F), t)$ será o que chamamos de uma $*$-superálgebra. Nas seções deste primeiro capítulo vamos estabelecer a linguagem necessária para entender os problemas que queremos tratar a respeito da $*$-superálgebra $(M_{2,1}(F), t)$.

## 2.1 PI-álgebras

Durante toda a tese, trabalharemos com álgebras associativas sobre um corpo $F$ de característica zero. Vamos apresentar nesta seção os conceitos e resultados básicos da PI-teoria que serão importantes para o desenvolvimento das demais seções e capítulos desta tese (veja [5]).

Consideramos $F\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre gerada por $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, onde $X$ é um conjunto enumerável de variáveis. Como exemplos de polinômios em $F\langle X\rangle$, temos:

(1) O comutador de Lie de peso 2, definido como sendo o polinômio $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$. Indutivamente, o comutador de peso $n$ normado à esquerda é definido por $[x_1, \ldots, x_n] = [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n]$, para todo $n \geq 3$.

(2) O polinômio standard de grau $k$, definido por

$$St_k(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{\sigma \in S_k} (\mathrm{sgn}\sigma) x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(k)},$$

onde $\mathrm{sgn}(\sigma)$ denota o sinal da permutação $\sigma$ no grupo simétrico $S_k$.

**Definição 2.1.** Dizemos que um polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ é uma identidade polinomial de $A$, se $f$ se anula sempre que avaliado em quaisquer elementos de $A$, ou seja, se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$, para todos $a_1, \ldots, a_n \in A$. Se $A$ satisfaz uma identidade não nula, então dizemos que $A$ é uma PI-álgebra. A notação usada é $f \equiv 0$ em $A$.

Agora, vejamos alguns exemplos de PI-álgebras.

**Exemplo 2.2.** Uma álgebra comutativa $A$ é uma PI-álgebra desde que o polinômio $[x_1, x_2]$ é uma identidade de $A$. Também temos que se $A$ é uma álgebra nilpotente com $A^k = 0$, então $A$ é uma PI-álgebra desde que satisfaz a identidade $x_1 \cdots x_k \equiv 0$.

**Exemplo 2.3.** (Veja Teorema 1.5.8 de [12]) Se $A$ é uma álgebra com dimensão $n$, então o polinômio standard de grau $n+1$ é uma identidade de $A$.

Como exemplos importantes de PI-álgebras de dimensão finita, temos $M_n(F)$ e $UT_n(F)$, a álgebra das matrizes $n \times n$ com entradas no corpo $F$ e a álgebra das matrizes triangulares superiores $n \times n$ com entradas em $F$, respectivamente. A seguir, temos um exemplo de PI-álgebra de dimensão infinita.

**Exemplo 2.4.** Consideremos $\mathcal{G}$ a álgebra de Grassmann unitária de dimensão infinita, gerada pelos elementos $\{1, e_1, e_2, \ldots\}$, satisfazendo a condição $e_ie_j = -e_je_i,\ i, j \geq 1$. Segue que $\mathcal{G}$ é uma PI-álgebra, pois é possível verificar que $\mathcal{G}$ satisfaz a identidade $[x_1, x_2, x_3]$.

**Definição 2.5.** Dada uma álgebra $A$, definimos o conjunto das identidades polinomiais satisfeitas por $A$ como

$$\mathrm{Id}(A) = \{f \in F\langle X\rangle \mid f \equiv 0 \text{ em } A\}.$$

Não é difícil verificar que $\mathrm{Id}(A)$ é um $T$-ideal de $F\langle X\rangle$, isto é, é um ideal invariante sob todos os endomorfismos de $F\langle X\rangle$. Além disso, é possível verificar que se $I$ é um $T$-ideal de $F\langle X\rangle$, então $\mathrm{Id}\left(F\langle X\rangle/I\right) = I$. Assim, temos que todos os $T$-ideais de $F\langle X\rangle$ são, na verdade, ideais de identidades polinomiais para álgebras adequadas. Nos referimos a $\mathrm{Id}(A)$ como sendo o $T$-ideal de $A$.

Um $T$-ideal $I$ é gerado, como $T$-ideal, por um conjunto $S \subseteq F\langle X\rangle$ se qualquer elemento de $I$ pode ser escrito como uma combinação linear de elementos da forma $h_1f(g_1, \ldots, g_n)h_2$, onde os polinômios $h_1, h_2, g_1, \ldots, g_n \in F\langle X\rangle$ e $f \in S$. Neste caso, escrevemos $I = \langle S\rangle_T$ e dizemos que cada elemento de $I$ é consequência dos elementos de $S$. Em particular, $f \in F\langle X\rangle$ é consequência de $g_1, \ldots, g_n \in F\langle X\rangle$ se $f \in \langle g_1, \ldots, g_n\rangle_T$.

Em [14], Kemer mostrou que o $T$-ideal de uma álgebra associativa é finitamente gerado como um $T$-ideal. Mas, a obtenção de uma base finita de identidades para uma álgebra pode ser uma tarefa difícil e trabalhosa. Por exemplo, para $M_n(F)$, apenas é conhecido o $T$-ideal quando $n = 2$ (veja [6] e [15]):

$$\langle [[x_1, x_2]^2, x_3], St_4(x_1, x_2, x_3, x_4)\rangle_T.$$

Para $n \geq 3$, $\mathrm{Id}(M_n(F))$ não é conhecido.

Desde que álgebras distintas podem satisfazer as mesmas identidades, torna-se interessante considerarmos a classe das álgebras que satisfazem todas as identidades de uma dada álgebra $A$, chamada de variedade de álgebras gerada por $A$ e denotada por $\mathcal{V} = \mathrm{var}(A)$. Quando duas álgebras $A$ e $B$ satisfazem as mesmas identidades, temos que $\mathrm{var}(A) = \mathrm{var}(B)$ e, neste caso, dizemos que $A$ e $B$ são PI-equivalentes.

Um método bem estabelecido para o estudo do $T$-ideal de uma álgebra $A$ é através da análise de uma sequência numérica, chamada de sequência de codimensões de $A$. Essa sequência foi introduzida por Regev e mede, de um certo modo, o crescimento das identidades polinomiais satisfeitas por $A$ (veja [18]).

A fim de definir esse objeto, introduzimos

$$P_n = \mathrm{span}_F\{x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}, \quad n \geq 1,$$

o espaço dos polinômios multilineares de grau $n$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ (isto é, toda variável $x_i$ aparece em cada monômio uma única vez).

**Observação 2.6.** Para verificarmos se um polinômio multilinear é ou não uma identidade para uma álgebra $A$ basta avaliá-lo nos elementos de uma base de $A$ (veja por exemplo, Observação 1.3.4 de [12]). Recordemos ainda que um polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ que é linear nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ é dito alternados nestas variáveis se, para quaisquer $1 \leq i, j \leq n$, o polinômio se torna nulo ao substituir $x_i$ por $x_j$. Se $f$ é linear e alternado nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ então, para elementos linearmente dependentes $a_1, \ldots, a_n$ de uma álgebra $A$ e $b_1, \ldots, b_m$ elementos quaisquer de $A$, temos $f(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) = 0$ (veja Proposição 1.5.2 de [12]).

Antes de prosseguirmos com a análise do espaço $P_n$, recordamos brevemente a definição de partição, objeto fortemente associado às representações dos grupos que mencionaremos posteriormente neste texto.

Dizemos que uma sequência de números positivos $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$ é uma partição de $n \in \mathbb{N}$, se $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_t$ e $\lambda_1 + \cdots + \lambda_t = n$. Neste caso, escreveremos $\lambda \vdash n$ ou $|\lambda| = n$. Os valores $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ são chamados partes da partição $\lambda$ e o número de partes $h(\lambda) = t$ é chamado altura de $\lambda$.

Retomando o estudo do espaço $P_n$, observe que o grupo simétrico $S_n$ age sobre $P_n$ à esquerda do seguinte modo:

$$\sigma \cdot f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

onde $\sigma \in S_n$ e $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_n$. Logo, o espaço $P_n$ tem estrutura de $S_n$-módulo.

Como $\mathrm{Id}(A)$ é um $T$-ideal, temos que $P_n \cap \mathrm{Id}(A)$ é invariante sob esta ação. Assim, o espaço quociente $P_n(A) = \dfrac{P_n}{P_n \cap \mathrm{Id}(A)}$ também tem estrutura de $S_n$-módulo e consideramos $\chi_n(A)$ seu $S_n$-caracter, chamado de $n$-ésimo cocaracter de $A$.

Como, em característica zero, existe uma correspondência biunívoca entre $S_n$-caracteres irredutíveis e partições $\lambda \vdash n$, podemos decompor $\chi_n(A)$ em caracteres irredutíveis

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda,$$

onde $\chi_\lambda$ representa o caracter irredutível associado à partição $\lambda \vdash n$ e o inteiro $m_\lambda \geq 0$ é sua multiplicidade (veja [5, p.204,212]).

É importante lembrar também que, para cada partição $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$ de $n$, associaremos o diagrama $D_\lambda$ que consiste de $n$ blocos $\square$ distribuídos da seguinte maneira

$$D_\lambda : \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & \cdots & & \\ \hline & & \cdots & & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-4} \vdots & \vdots & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-2} \vdots & \vdots & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-2} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \longrightarrow \lambda_1 \text{ blocos} \\ \longrightarrow \lambda_2 \text{ blocos} \\ \qquad \vdots \\ \longrightarrow \lambda_t \text{ blocos} \end{array}$$

e este será chamado de diagrama de Young do tipo $\lambda$.

**Definição 2.7.** Dado um diagrama de Young $D_\lambda$, com $\lambda \vdash n$, uma tabela de Young do tipo $\lambda$ é um completamento dos boxes de $D_\lambda$ com números $1, 2, \ldots, n$. Dizemos que uma tabela de Young $T_\lambda$ do tipo $\lambda$ é standard se os inteiros em cada linha e em cada coluna de $T_\lambda$ crescem da esquerda para direita e de cima para baixo, respectivamente.

**Exemplo 2.8.** Para $n = 5$ as tabelas standard do tipo $\lambda = (3, 2)$ são:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} \end{array}.$$

É conhecido (veja [5, p.206]) que o grau do caracter irredutível $\chi_\lambda$ associado à partição $\lambda$ é igual ao número de tabelas standard de Young do tipo $\lambda$, que pode ser calculado por meio da fórmula de gancho (veja [20, p.124]), dada por

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod_{i,j} h_{i,j}^\lambda},$$

onde $h_{i,j}^\lambda$ é a quantidade de blocos $\square$ à direita na mesma linha do bloco que se encontra na posição $(i, j)$ do diagrama $D_\lambda$ mais a quantidade de blocos abaixo na mesma coluna desse bloco contando o próprio bloco.

Ressaltamos que para um diagrama $D_\lambda$ associado à uma partição $\lambda$ de $n$, os comprimentos de suas colunas formam uma partição de $n$, que denotamos por

$$\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_r), \qquad \text{onde } \lambda'_i = \sum_{\substack{\nu \\ \lambda_\nu \geq i}} 1$$

dita partição conjugada de $\lambda$. Com isso, notamos que $h_{i,j}^\lambda = \lambda_i - j + \lambda'_j - i + 1$.
Como um exemplo, temos que a partição conjugada de $\lambda = (3, 2) \vdash 5$ é $\lambda' = (2^2, 1) \vdash 5$ (isto é o mesmo que $\lambda' = (2, 2, 1)$, para entradas repetidas, usamos potências).

## 2.2 Superálgebras e álgebras com involução

Noções similares de $T$-ideais, variedades de álgebras, polinômios multilineares e codimensões tratados no caso ordinário têm sido naturalmente estendidas para o contexto de álgebras munidas de alguma estrutura adicional.

**Definição 2.9.** Uma álgebra $A$ é dita uma superálgebra (ou uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada) se existem dois subespaços vetoriais $A_0$ e $A_1$ tais que:

(i) $A = A_0 \oplus A_1$ como soma direta de espaços vetoriais;

(ii) $A_0A_0 + A_1A_1 \subseteq A_0$ e $A_0A_1 + A_1A_0 \subseteq A_1$.

Os subespaços $A_0$ e $A_1$ são as componentes homogêneas de grau 0 e 1, respectivamente. Chamamos $A_0$ de componente par e nos referimos aos seus elementos como sendo pares ou homogêneos de grau 0. Analogamente, chamamos $A_1$ de componente ímpar e nos referimos aos seus elementos como sendo ímpares ou homogêneos de grau 1. Usaremos $(A_0, A_1)$ para denotar a graduação da superálgebra $A = A_0 \oplus A_1$ e observamos que toda álgebra $A$ é uma superálgebra com graduação trivial que é dada por $(A, \{0\})$.

Aqui estamos interessados nas graduações sobre a álgebra de matrizes $M_n(F)$ que serão definidas agora. Recordemos que (veja, por exemplo, Teorema 3.5.3 de [12]), quando $F$ é um corpo algebricamente fechado, a menos de isomorfismos, qualquer $\mathbb{Z}_2$-graduação em $M_n(F)$ é dada por

$$M_{k,l}(F)_0 := \left\{ \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \middle| \; P \in M_k(F); \; S \in M_l(F) \right\} \text{ e}$$
$$M_{k,l}(F)_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & Q \\ R & 0 \end{pmatrix} \middle| \; Q \in M_{k\times l}(F); \; R \in M_{l\times k}(F) \right\},$$

onde $k + l = n$ e $k \geq l \geq 0$. Para cada par de inteiros $k, l$, com $k \geq l \geq 0$, temos uma superálgebra de matrizes com a $\mathbb{Z}_2$-graduação definida acima e será denotada por $M_{k,l}(F)$.

Observamos que se $A$ é uma superálgebra, então a aplicação linear $\varphi$ definida por $\varphi(a_0 + a_1) = a_0 - a_1$, com $a_0 \in A_0$ e $a_1 \in A_1$ é um automorfismo de ordem no máximo 2, chamado de automorfismo induzido pela graduação. Quando a graduação é a trivial, $\varphi$ é a identidade.

Reciprocamente, se existe $\varphi \in Aut(A)$ de ordem no máximo 2, então $A$ é uma superálgebra com graduação $(A_0, A_1)$, onde

$$A_0 = \{a \in A \mid \varphi(a) = a\} \text{ e } A_1 = \{a \in A \mid \varphi(a) = -a\},$$

e dizemos que está graduação é induzida pelo automorfismo $\varphi$.
Agora vamos definir o conceito de involução sobre uma álgebra.

**Definição 2.10.** Uma aplicação linear $*: A \to A$ é dita uma involução se $(a^*)^* = a$ e $(ab)^* = b^* a^*$, para todos $a, b \in A$. Note que, neste caso, $*$ é um antiautomorfismo de $A$ de ordem no máximo 2.

Se $A$ é uma álgebra munida de uma involução $*$ dizemos que $A$ é uma $*$-álgebra. Neste caso, $A$ pode ser escrita como uma soma direta de subespaços $A = A^+ \oplus A^-$, onde $A^+ = \{a \in A \mid a^* = a\}$ é o espaço dos elementos simétricos de $A$ e $A^- = \{a \in A \mid a^* = -a\}$ é o espaço dos elementos antissimétricos de $A$.
É imediato que, para uma álgebra comutativa $A$, a aplicação identidade é uma involução em $A$ chamada de involução trivial. Reciprocamente, se a identidade é uma involução em $A$, então $A$ é comutativa.

Ressaltamos, mais uma vez, que nosso interesse é na álgebra de matrizes $M_n(F)$. Temos que a aplicação linear transposta

$$\begin{array}{rcl} t: M_n(F) & \longrightarrow & M_n(F) \\ (a_{ij}) & \longmapsto & (a_{ji}) \end{array}$$

é uma involução em $M_n(F)$.

Por outro lado, quando $n = 2m$ é par, note que dada uma matriz $M \in M_{2m}(F)$ podemos escrevê-la na forma

$$M = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}, \text{ onde } P, Q, R, S \in M_m(F).$$

Mantendo essa escrita em mente, definimos a chamada involução simplética, usando a sua forma explícita, dada pela fórmula:

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}^s = \begin{pmatrix} S^t & -Q^t \\ -R^t & P^t \end{pmatrix}.$$

É conhecido que, quando $F$ é um corpo algebricamente fechado, a involução transposta $t$ e a involução simplética $s$ são, a menos de isomorfismo, as únicas involuções em $M_n(F)$ (veja, Teorema 3.1.61 de [19]). É importante observar que a involução simplética está definida somente para matrizes de ordem par.

Também no contexto de superálgebras e $*$-álgebras, podemos estudar as identidades entre outros conceitos definidos no contexto ordinário. Para estabelecer uma nomenclatura comum para superálgebras e $*$-álgebras, definimos $\varphi$-álgebras para nos referir a uma superálgebra ou uma $*$-álgebra. Ou seja, se $\varphi$ é um automorfismo de ordem no máximo 2 estaremos falando de uma superálgebra cuja graduação é induzida pelo autormosfismo $\varphi$.

Por outro lado, se $\varphi$ é um antiautomorfismo de ordem no máximo 2 (involução) estaremos nos referindo a uma $*$-álgebra.

Se $A$ é uma $\varphi$-álgebra, então podemos escrever $A = A_\varphi^+ \oplus A_\varphi^-$, onde

$$A_\varphi^+ = \{a \in A \mid \varphi(a) = a\} \text{ e } A_\varphi^- = \{a \in A \mid \varphi(a) = -a\}.$$

Observe que se $\varphi$ é um automorfismo de ordem no máximo 2, $A_\varphi^+ = A_0$ e $A_\varphi^- = A_1$. No caso em que $\varphi$ é uma involução, $A_\varphi^+ = A^+$ e $A_\varphi^- = A^-$.

Vamos escrever o conjunto enumerável $X$ de variáveis como uma união disjunta de dois conjuntos enumeráveis $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ e $Z = \{z_1, z_2, \ldots\}$ e considerar a $\varphi$-álgebra associativa livre gerada por $X = Y \cup Z$ cujos elementos de $F\langle Y \cup Z\rangle$ são chamados de $\varphi$-polinômios.

Dizemos que um $\varphi$-polinômio $f(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m) \in F\langle Y \cup Z\rangle$ é uma $\varphi$-identidade polinomial de uma $\varphi$-álgebra $A$ se

$$f(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) = 0,$$

para todos $a_1, \ldots, a_n \in A_\varphi^+$ e $b_1, \ldots, b_m \in A_\varphi^-$.

O conjunto $\mathrm{Id}^\varphi(A)$ de todas as $\varphi$-identidades de $A$ é um ideal de $F\langle Y \cup Z\rangle$ invariante sob todos os endomorfismos de $F\langle Y \cup Z\rangle$ que comutam com $\varphi$, chamado de $T^\varphi$-ideal de $A$. No caso de superálgebras, nos referimos às $\varphi$-identidades como identidades graduadas e no caso de $*$-álgebras, nos referimos como $*$-identidades.

Como as identidades da álgebra de matrizes $M_3(F)$ não são completamente conhecidas, é natural perguntar sobre o seu $T^\varphi$-ideal. Neste caso, temos as seguintes informações.

(1) Considerando a superálgebra $M_{2,1}(F)$, apenas são conhecidas as identidades graduadas que têm como consequência todas as outras de grau $\leq 5$ (veja [16]).

(2) Considerando $M_3(F)$ com involução transposta, os resultados conhecidos são apenas sobre o grau mínimo de uma $*$-identidade (veja, por exemplo, [3] e [8]). Obviamente, a involução simplética não pode ser tratada neste caso, pois $n = 3$ é ímpar.

Vamos terminar esta seção definindo o que entendemos pelo $n$-ésimo $\varphi$-cocaracter de uma álgebra $A$. Primeiramente, definimos

$$P_n^\varphi = \mathrm{span}_F\{w_{\sigma(1)} \cdots w_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n,\ w_i = y_i \text{ ou } w_i = z_i,\ i = 1, \ldots, n\}$$

como o espaço de todos os $\varphi$-polinômios multilineares de grau $n$ nas variáveis

$$y_1, z_1, y_2, z_2, \ldots, y_n, z_n.$$

Vemos que este espaço tem uma estrutura natural de $H_n$-módulo à esquerda, onde $H_n = \mathbb{Z}_2 \wr S_n$ é o grupo hiperoctaedral de grau $n$ (veja [11]).
A ação natural de $H_n$ sobre $P_n^{\varphi}$ é dada por $g \cdot y_i = y_{\sigma(i)}$ e $g \cdot z_i = z_{\sigma(i)}$ ou $g \cdot z_i = -z_{\sigma(i)}$, dependendo se $a_{\sigma(i)} = 1$ ou $-1$, respectivamente, onde $g = (a_1, \ldots, a_n; \sigma) \in H_n$.

Como $P_n^{\varphi} \cap \mathrm{Id}^{\varphi}(A)$ é invariante sob esta ação, temos que $P_n^{\varphi}(A) = \dfrac{P_n^{\varphi}}{P_n^{\varphi} \cap \mathrm{Id}^{\varphi}(A)}$ é um $H_n$-módulo à esquerda e seu caracter $\chi_n^{\varphi}(A)$ é dito o $n$-ésimo $\varphi$-cocaracter de $A$.

Desde que estamos trabalhando em característica zero, o cocaracter $\chi_n^{\varphi}(A)$ pode ser decomposto como

$$\chi_n^{\varphi}(A) = \sum_{(\lambda,\mu) \vdash n} m_{\lambda,\mu} \chi_{\lambda,\mu}\,,$$

onde a notação $(\lambda, \mu) \vdash n$ significa que $|\lambda| + |\mu| = n$, e o inteiro $m_{\lambda,\mu} \geq 0$ é a multiplicidade do $H_n$-caracter irredutível $\chi_{\lambda,\mu}$ associado ao par de partições $(\lambda, \mu)$.

Quando $A$ é uma superálgebra, o $\varphi$-cocaracter é denotado por $\chi_n^{\mathrm{gr}}(A)$ e é dito o cocaracter graduado de $A$. Por outro lado, quando $A$ é uma $*$-álgebra, o $\varphi$-cocaracter é denotado por $\chi_n^{*}(A)$ e é dito o $*$-cocaracter de $A$.

Em relação a isto, em [16], La Mattina estudou a decomposição do cocaracter graduado da superálgebra $M_{2,1}(F)$, estabelecendo as multipartições dos $H_n$-caracteres irredutíveis com multiplicidades não nulas. Além disso, em [2], Benanti e Campanella estabeleceram condições necessárias e suficientes para que um $H_n$-caracter irredutível apareça com multiplicidade não nula na decomposição de $\chi_n^{*}(M_3(F), t)$.

Finalizamos a seção, destacando que, para os resultados desta tese, veremos que será importante conhecer informações sobre o $*$-cocaracter de $M_2(F)$ munida da involução transposta. Antes de mais nada, é importante lembrar que no caso em que $A$ é uma $*$-álgebra de dimensão finita, o Lema 1.2 de [7], nos diz que

$$\chi_n^{*}(A) = \sum_{\substack{(\lambda,\mu)\vdash n \\ h(\lambda)\leq d_1,\, h(\mu)\leq d_2}} m_{\lambda,\mu} \chi_{\lambda,\mu}\,,$$

onde $\dim(A^{+}) = d_1$ e $\dim(A^{-}) = d_2$.

Com isso, desde que $\dim(M_2(F), t)^{+} = 3$ e $\dim(M_2(F), t)^{-} = 1$ , temos que

$$\chi_n^{*}(M_2(F), t) = \sum_{\substack{(\lambda,\mu)\vdash n \\ h(\lambda)\leq 3,\ h(\mu)\leq 1}} m_{\lambda,\mu} \chi_{\lambda,\mu}.$$

Com estas considerações, temos o seguinte resultado que foi provado por Drensky e Giambruno em [7], e que estabelece os valores das multiplicidades neste caso.

**Teorema 2.11.** Seja $\chi_n^*(M_2(F),t) = \sum_{\substack{(\lambda,\mu)\vdash n \\ h(\lambda)\leq 3,\ h(\mu)\leq 1}} m_{\lambda,\mu}\chi_{\lambda,\mu}$. Então

$$m_{\lambda,\mu} = \begin{cases} 1 & \text{se } h(\lambda)+h(\mu)=1; \\ \lambda_1+1 & \text{se } \lambda=(\lambda_1) \text{ e } \mu\neq\emptyset; \\ (\lambda_1-\lambda_2+1)\lambda_2 & \text{se } \lambda=(\lambda_1,\lambda_2) \text{ e } \mu=\emptyset; \\ (\lambda_1-\lambda_2+1)(\lambda_2+1) & \text{se } \lambda=(\lambda_1,\lambda_2) \text{ e } \mu\neq\emptyset; \\ (\lambda_1-\lambda_2+1)(\lambda_2-\lambda_3+1) & \text{se } \lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3). \end{cases}$$

## 2.3 $*$-Superálgebras

Vamos introduzir as superálgebras munidas de involução graduada. Certas definições e resultados voltados para essa estrutura generalizam o que tem sido feito no contexto de PI-álgebras, superálgebras e de álgebras com involução. Aqui, vamos considerar as duas estruturas em uma mesma álgebra.

**Definição 2.12.** Uma involução $*$ em uma superálgebra $A = A_0 \oplus A_1$ que preserva as componentes homogêneas $A_0$ e $A_1$, ou seja, $(A_0)^* = A_0$ e $(A_1)^* = A_1$, é chamada de involução graduada. Uma superálgebra $A$ munida com uma involução graduada $*$ é chamada de $*$-superálgebra.

Observamos que o estudo das $*$-superálgebras generaliza o estudo das álgebras com involução, uma vez que toda $*$-álgebra é uma $*$-superálgebra considerada com graduação trivial.

Além disso, é claro que para uma superálgebra comutativa $A$, a aplicação identidade é uma involução graduada em $A$, chamada de involução graduada trivial.

Portanto, toda superálgebra comutativa é uma $*$-superálgebra considerada com involução graduada trivial. Reciprocamente, se a aplicação identidade é uma involução graduada para uma superálgebra $A$, então $A$ é comutativa.

É possível mostrar que uma superálgebra $A$ munida de uma involução $*$ é uma $*$-superálgebra se, e somente se, os subespaços $A^+$ e $A^-$ são graduados, isto é,

$$A^+ = A_0^+ \oplus A_1^+ \quad \text{e} \quad A^- = A_0^- \oplus A_1^-.$$

Com isso, obtemos que qualquer $*$-superálgebra $A$ pode ser escrita como soma de 4 subespaços

$$A = A_0^+ \oplus A_1^+ \oplus A_0^- \oplus A_1^-.$$

Chamaremos os subespaços $A_0^+$, $A_1^+$, $A_0^-$ e $A_1^-$ de componentes simétrica par, simétrica ímpar, antissimétrica par e antissimétrica ímpar de $A$, respectivamente.

Uma base $*$-graduada de $A$ é uma base formada pela união de bases desses subespaços.

Em [10, Teorema 7.6], Giambruno, dos Santos e Vieira provaram que, quando $F$ é um corpo algebricamente fechado, a menos de isomorfismos, as únicas involuções graduadas que podem ser definidas na superálgebra $M_{k,l}(F)$ são a involução transposta $t$ e a involução simplética $s$.

Obviamente, a involução simplética ocorre somente quando $k = l$ e $l > 0$ ou quando $l = 0$ e $k$ é par.

Assim, considerando $l > 0$, temos as seguintes $*$-superálgebras de matrizes com graduação não trivial:

- A $*$-superálgebra $(M_{k,l}(F), t)$, onde $k \geq l > 0$. Nesse caso, os quatro subespaços de elementos homogêneos simétricos e antissimétricos obtidos são os seguintes.

$$\big(M_{k,l}(F), t\big)_0^+ = \left\{ \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S' \end{pmatrix} \middle| \; S \in (M_k(F), t)^+ \text{e } S' \in (M_l(F), t)^+ \right\},$$
$$\big(M_{k,l}(F), t\big)_0^- = \left\{ \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & K' \end{pmatrix} \middle| \; K \in (M_k(F), t)^- \text{e } K' \in (M_l(F), t)^- \right\},$$
$$\big(M_{k,l}(F), t\big)_1^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^t & 0 \end{pmatrix} \middle| \; A \in M_{k\times l}(F) \right\},$$
$$\big(M_{k,l}(F), t\big)_1^- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^t & 0 \end{pmatrix} \middle| \; A \in M_{k\times l}(F) \right\}.$$

- A $*$-superálgebra $(M_{k,k}(F), s)$, onde $k > 0$. Nesse caso, os quatro subespaços de elementos homogêneos simétricos e antissimétricos obtidos são:

$$\big(M_{k,k}(F), s\big)_0^+ = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^t \end{pmatrix} \middle| \; A \in M_k(F) \right\},$$
$$\big(M_{k,k}(F), s\big)_0^- = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^t \end{pmatrix} \middle| \; A \in M_k(F) \right\},$$

$$\big(M_{k,k}(F),s\big)_1^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & K \\ K' & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; K \in (M_k(F),t)^- \text{e } K' \in (M_k(F),t)^- \right\},$$

$$\big(M_{k,k}(F),s\big)_1^- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & S \\ S' & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; S \in (M_k(F),t)^+ \text{e } S' \in (M_k(F),t)^+ \right\}.$$

Agora, vamos descrever as chamadas $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades de uma $*$-superálgebra $A$. Consideremos $X$ um conjunto infinito enumerável de variáveis. Escrevendo $X$ como uma união disjunta de quatro conjuntos $X = Y_0 \cup Y_1 \cup Z_0 \cup Z_1$, onde $Y_0 = \{y_{1,0}, y_{2,0}, \ldots\}$, $Y_1 = \{y_{1,1}, y_{2,1}, \ldots\}$, $Z_0 = \{z_{1,0}, z_{2,0}, \ldots\}$ e $Z_1 = \{z_{1,1}, z_{2,1}, \ldots\}$, definimos a $*$-superálgebra livre $\mathcal{F} = F\langle X|\mathbb{Z}_2,*\rangle$ dando uma superestrutura em $\mathcal{F}$ ao determinar que as variáveis em $Y_0 \cup Z_0$ são homogêneas de grau 0 e aquelas em $Y_1 \cup Z_1$ são homogêneas de grau 1. Também definimos uma involução sobre $\mathcal{F}$ exigindo que as variáveis em $Y_0 \cup Y_1$ são simétricas e as variáveis em $Z_0 \cup Z_1$ são antissimétricas.

Dessa forma, temos que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1$, onde $\mathcal{F}_0$ é o subespaço gerado por todos os monômios nas variáveis em $X$ que têm um número par de variáveis de grau 1 e $\mathcal{F}_1$ é o subespaço gerado por todos os monômios nas variáveis em $X$ que têm um número ímpar de variáveis de grau 1. Assim, $\mathcal{F}$ tem estrutura de $*$-superálgebra, desde que $(\mathcal{F}_0)^* = \mathcal{F}_0$ e $(\mathcal{F}_1)^* = \mathcal{F}_1$. Os elementos de $\mathcal{F}$ são chamados de $(\mathbb{Z}_2,*)$-polinômios.

Iremos nos referir às variáveis em $Y_0$ como sendo simétricas pares, às variáveis em $Y_1$ como sendo simétricas ímpares, às variáveis em $Z_0$ como sendo antissimétricas pares e às variáveis em $Z_1$ como sendo antissimétricas ímpares.

**Definição 2.13.** Dizemos que um $(\mathbb{Z}_2,*)$-polinômio

$$f = f(y_{1,0}, \ldots, y_{m,0}, y_{1,1}, \ldots, y_{n,1}, z_{1,0}, \ldots, z_{p,0}, z_{1,1}, \ldots, z_{q,1})$$

é uma $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidade, ou uma identidade $*$-graduada, de uma $*$-superálgebra $A$, e escrevemos $f \equiv 0$ em $A$, se

$$f(a_{1,0}^+, \ldots, a_{m,0}^+, a_{1,1}^+, \ldots, a_{n,1}^+, a_{1,0}^-, \ldots, a_{p,0}^-, a_{1,1}^-, \ldots, a_{q,1}^-) = 0,$$

para todos $a_{1,0}^+, \ldots, a_{m,0}^+ \in A_0^+$, $a_{1,1}^+, \ldots, a_{n,1}^+ \in A_1^+$, $a_{1,0}^-, \ldots, a_{p,0}^- \in A_0^-$ e $a_{1,1}^-, \ldots, a_{q,1}^- \in A_1^-$.

Observe que, neste caso, as avaliações em um $(\mathbb{Z}_2,*)$-polinômio por elementos de uma $*$-superálgebra $A$ respeitam o tipo de variável em questão, ou seja, em variáveis simétricas pares substituímos elementos de $A$ pertencentes à componente simétrica par e assim por diante.

O conjunto das $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades de $A$ é o ideal

$$\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A) = \{f \in \mathcal{F} \mid f \equiv 0 \text{ em } A\}.$$

Temos que $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$ é um $T_2^*$-ideal de $\mathcal{F}$, ou seja, é um ideal invariante sob todos os endomorfismos de $\mathcal{F}$ que preservam a graduação e comutam com a involução.

Desde que $F$ é um corpo de característica zero, neste contexto também temos que $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$ é completamente determinado por seus polinômios multilineares. Dessa forma, para $n \geq 1$, definimos

$$P_n^{\mathrm{gri}} = \mathrm{span}_F\{w_{\sigma(1)} \cdots w_{\sigma(n)} \mid w_i \in \{y_{i,0}, y_{i,1}, z_{i,0}, z_{i,1}\}, i = 1, \ldots, n; \sigma \in S_n\},$$

como sendo o espaço dos $(\mathbb{Z}_2, *)$-polinômios multilineares de grau $n$ nas variáveis

$$y_{1,0}, \ldots, y_{n,0}, y_{1,1}, \ldots, y_{n,1}, z_{1,0}, \ldots, z_{n,0}, z_{1,1}, \ldots, z_{n,1}.$$

Ou seja, se $f \in P_n^{\mathrm{gri}}$, então as variáveis $y_{i,0}$, $y_{i,1}$, $z_{i,0}$ e $z_{i,1}$ não podem aparecer simultaneamente em um mesmo monômio de $f$, com $i = 1, \ldots, n$, mas exatamente uma delas aparece em cada monômio.

Para $n \geq 1$, definimos o espaço quociente

$$P_n^{\mathrm{gri}}(A) = \frac{P_n^{\mathrm{gri}}}{P_n^{\mathrm{gri}} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)}$$

e vamos considerar a ação de um grupo sobre este espaço. Aqui, estaremos interessados em estudar resultados que dizem respeito ao caracter do espaço $P_n^{\mathrm{gri}}(A)$ como módulo sob uma ação considerada.

A partir de agora, vamos apresentar os resultados para a investigação do chamado $n$-ésimo cocaracter $*$-graduado de uma $*$-superálgebra $A$. Lembremos que no estudo das identidades polinomiais ordinárias de uma álgebra, o grupo simétrico $S_n$ e o grupo linear geral $GL_m$ têm um papel fundamental, já que as teorias de representações desses grupos são ferramentas poderosas na investigação do $T$-ideal e da sequência de codimensões de uma álgebra.

Veremos que, no contexto de $*$-superálgebras, um papel análogo é desempenhado pelo produto entrelaçado $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \wr S_n$ e pelos grupos $S_{n_1} \times S_{n_2} \times S_{n_3} \times S_{n_4}$ e $GL_m \times GL_m \times GL_m \times GL_m$. Para um estudo mais detalhado da teoria de $S_n$-representações sugerimos [5] e [13].

Lembramos que o produto entrelaçado entre $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e $S_n$ é o grupo definido por

$$\mathbb{H}_n = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \wr S_n = \{((g_1, h_1), \ldots, (g_n, h_n); \sigma) \mid (g_i, h_i) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \sigma \in S_n, i = 1, \ldots, n\}$$

com produto dado por

$$((g_1, h_1), \ldots, (g_n, h_n); \sigma)((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n); \tau) = ((\bar{g}_1, \bar{h}_1), \ldots, (\bar{g}_n, \bar{h}_n); \sigma\tau),$$

onde $\bar{g}_i = g_i a_{\sigma^{-1}(i)}$ e $\bar{h}_i = h_i b_{\sigma^{-1}(i)}$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Considerando que $\mathbb{Z}_2 \cong \{0, 1\}$ (módulo 2) e também $\mathbb{Z}_2 \cong \{1, *\}$, temos que o grupo $\mathbb{H}_n$ age sobre o espaço $P_n^{\mathrm{gri}}$ da seguinte forma:

1. $((g_1, h_1), \ldots, (g_n, h_n); \sigma) \bullet y_{i,0} = y_{\sigma(i),0}$
2. $((g_1, h_1), \ldots, (g_n, h_n); \sigma) \bullet y_{i,1} = \begin{cases} +y_{\sigma(i),1}, & \text{se } g_{\sigma(i)} = 0 \\ -y_{\sigma(i),1}, & \text{se } g_{\sigma(i)} = 1 \end{cases}$
3. $((g_1, h_1), \ldots, (g_n, h_n); \sigma) \bullet z_{i,0} = \begin{cases} +z_{\sigma(i),0}, & \text{se } h_{\sigma(i)} = 1 \\ -z_{\sigma(i),0}, & \text{se } h_{\sigma(i)} = * \end{cases}$
4. $((g_1, h_1), \ldots, (g_n, h_n); \sigma) \bullet z_{i,1} = \begin{cases} +z_{\sigma(i),1}, & \text{se } (g_{\sigma(i)}, h_{\sigma(i)}) \in \{(0,1), (1,*)\} \\ -z_{\sigma(i),1}, & \text{se } (g_{\sigma(i)}, h_{\sigma(i)}) \in \{(0,*), (1,1)\}. \end{cases}$

Assim, desde que $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$ é invariante pela ação acima, temos que o espaço $P_n^{\mathrm{gri}}(A)$ tem estrutura de $\mathbb{H}_n$-módulo. O $\mathbb{H}_n$-caracter de $P_n^{\mathrm{gri}}(A)$, denotado por $\chi_n^{\mathrm{gri}}(A)$, é chamado de $n$-ésimo cocaracter $*$-graduado de $A$.

Para um inteiro $n \geq 1$, escrevemos $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ como a soma de quatro inteiros não negativos e denotamos por $\langle n \rangle = (n_1, n_2, n_3, n_4)$ uma composição de $n$ em 4 partes. Uma multipartição $\langle \lambda \rangle = (\lambda(1), \ldots, \lambda(4)) \vdash \langle n \rangle$ é tal que $\lambda(i) = (\lambda(i)_1, \lambda(i)_2, \ldots) \vdash n_i$, para $i = 1, \ldots, 4$ e denotamos $\langle \lambda \rangle \vdash n$ quando $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$, para alguma composição $\langle n \rangle$ de $n$. Desde que $F$ é um corpo de característica zero, é conhecido que existe uma correspondência biunívoca entre os $\mathbb{H}_n$-caracteres irredutíveis e as multipartições $\langle \lambda \rangle \vdash n$.

Por isso, podemos decompor o $n$-ésimo cocaracter $*$-graduado de $A$ como

$$\chi_n^{\mathrm{gri}}(A) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash n} m_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\langle \lambda \rangle}, \tag{2.3.1}$$

onde $\chi_{\langle \lambda \rangle}$ é o $\mathbb{H}_n$-caracter irredutível associado à multipartição $\langle \lambda \rangle$ de $n$ e o inteiro $m_{\langle \lambda \rangle} \geq 0$ é a multiplicidade correspondente.

Para cada $\langle n \rangle = (n_1, n_2, n_3, n_4)$ fixo, definimos $P_{\langle n \rangle}$ como sendo o espaço gerado pelos monômios de $P_n^{\mathrm{gri}}$ que possuem as variáveis

$$\underbrace{y_{1,0}, \ldots, y_{n_1,0}}_{n_1 \text{ variáveis}}; \underbrace{y_{n_1+1,1}, \ldots, y_{n_1+n_2,1}}_{n_2 \text{ variáveis}}; \underbrace{z_{n_1+n_2+1,0}, \ldots, z_{n_1+n_2+n_3,0}}_{n_3 \text{ variáveis}}; \underbrace{z_{n-n_4+1,1}, \ldots, z_{n,1}}_{n_4 \text{ variáveis}}.$$

Claramente a dimensão de $P_{\langle n \rangle}$ é $n!$.

Observe que, para cada escolha de $\langle n\rangle = (n_1, n_2, n_3, n_4)$, existem $\binom{n}{\langle n\rangle}$ subespaços isomorfos a $P_{\langle n\rangle}$, onde $\binom{n}{\langle n\rangle} = \binom{n}{n_1,n_2,n_3,n_4}$ denota o coeficiente multinomial. Note que $P_{\langle n\rangle}$ está contido em $P_n^{\mathrm{gri}}$ e temos ainda que

$$P_n^{\mathrm{gri}} \cong \bigoplus_{\langle n\rangle} \binom{n}{\langle n\rangle} P_{\langle n\rangle}.$$

Considerando o espaço quociente $P_{\langle n\rangle}(A) = \dfrac{P_{\langle n\rangle}}{P_{\langle n\rangle} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)}$ e o grupo $S_{\langle n\rangle} = S_{n_1} \times S_{n_2} \times S_{n_3} \times S_{n_4}$, podemos definir uma ação à esquerda de $S_{\langle n\rangle}$ sobre $P_{\langle n\rangle}$ pela permutação dos quatro conjuntos de variáveis separadamente. Com isso, temos que $P_{\langle n\rangle}$ é um $S_{\langle n\rangle}$-módulo e desde que $T_2^*$-ideais são invariantes sob a ação descrita acima, temos que $P_{\langle n\rangle}(A)$ também herda uma estrutura de $S_{\langle n\rangle}$-módulo.

É conhecido que existe uma correspondência biunívoca entre os $S_{\langle n\rangle}$-caracteres irredutíveis e as multipartições $\langle\lambda\rangle \vdash \langle n\rangle$ e que os $S_{\langle n\rangle}$-caracteres irredutíveis são produtos tensoriais dos caracteres irredutíveis de $S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3}, S_{n_4}$, respectivamente (veja [20, p.44]).

Denotamos por $\chi_{\lambda(1)} \otimes \cdots \otimes \chi_{\lambda(4)}$ o $S_{\langle n\rangle}$-caracter irredutível correspondente a $\langle\lambda\rangle$ cujo grau é dado por $d_{\lambda(1)} \cdots d_{\lambda(4)}$.

Concluímos que, para cada $\langle n\rangle = (n_1, n_2, n_3, n_4)$ fixo, podemos considerar o $S_{\langle n\rangle}$-caracter de $P_{\langle n\rangle}(A)$, denotado por $\chi_{\langle n\rangle}(A)$ e chamado de $\langle n\rangle$-cocaracter de $A$. Pela redutibilidade completa, podemos decompor $\chi_{\langle n\rangle}(A)$ em uma soma de $S_{\langle n\rangle}$-caracteres irredutíveis da seguinte forma

$$\chi_{\langle n\rangle}(A) = \sum_{\langle\lambda\rangle \vdash \langle n\rangle} \bar{m}_{\langle\lambda\rangle} \chi_{\lambda(1)} \otimes \cdots \otimes \chi_{\lambda(4)}, \tag{2.3.2}$$

onde os inteiros $\bar{m}_{\langle\lambda\rangle} \geq 0$ denotam as multiplicidades correspondentes aos $S_{\langle n\rangle}$-caracteres irredutíveis.

O próximo resultado estabelece uma relação entre o cocaracter $*$-graduado e o $\langle n\rangle$-cocaracter de uma $*$-superálgebra $A$ de maneira similar ao que ocorre no caso de álgebras com involução (veja [7, Teorema 1.3]).

**Teorema 2.14.** Seja $\chi_n^{\mathrm{gri}}(A)$ o $\mathbb{H}_n$-caracter de $P_n^{\mathrm{gri}}(A)$ com decomposição dada como em (2.3.1) e para cada composição $\langle n\rangle = (n_1, n_2, n_3, n_4)$ considere $\chi_{\langle n\rangle}(A)$ o $S_{\langle n\rangle}$-caracter de $P_{\langle n\rangle}(A)$ decomposto como em (2.3.2). Então, temos que $m_{\langle\lambda\rangle} = \bar{m}_{\langle\lambda\rangle}$, para toda multipartição $\langle\lambda\rangle \vdash \langle n\rangle$.

Ao longo dessa tese, devido ao teorema acima, tanto as multiplicidades correspondentes aos $S_{\langle n \rangle}$-caracteres irredutíveis na decomposição (2.3.2), quanto as multiplicidades dos $\mathbb{H}_n$-caracteres irredutíveis na decomposição (2.3.1) serão denotadas por $m_{\langle \lambda \rangle}$.

Nesse momento, uma pergunta natural é a respeito do cálculo das multiplicidades $m_{\langle \lambda \rangle}$ dos $S_{\langle n \rangle}$-caracteres irredutíveis que aparecem na decomposição de $\chi_{\langle n \rangle}(A)$. Para respondermos tal questão, vamos recorrer à teoria de representações do grupo linear geral $GL_m$, cujo estudo pode ser aprofundado em [5]. Vamos tratar disto no próximo capítulo.

# 3 $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidades de $(M_{2,1}(F), t)$

Uma das motivações desta tese foi o trabalho feito em [16] sobre as identidades graduadas da superálgebra $M_{2,1}(F)$. Neste trabalho, La Mattina usou a teoria de representações do grupo linear geral $GL_m$ para determinar um conjunto $\mathcal{C}$ formado por 11 polinômios graduados e mostrou que todas as identidades graduadas de grau $\leq 5$ da superálgebra $M_{2,1}(F)$ são consequências dos polinômios em $\mathcal{C}$. Aqui, vamos estender esta teoria para estudar as identidades $*$-graduadas da $*$-superálgebra $(M_{2,1}(F), t)$ e também as multiplicidades de $\chi_n^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$.

## 3.1 A ação do grupo $GL_m^4$

Nos nossos estudos, nos baseamos nos resultados conhecidos para o grupo linear geral $GL_m$ que podem ser consultados em [5] para usar a teoria de representações do grupo $GL_m^4 = GL_m \times GL_m \times GL_m \times GL_m$.

Vamos definir agora um $GL_m^4$-módulo associado a uma $*$-superálgebra $A$ com o objetivo de apresentar uma maneira de calcular as multiplicidades do $n$-ésimo cocaracter $*$-graduado de $A$.

Sejam $m \geq 1$ e $F_m$ o espaço dos $(\mathbb{Z}_2, *)$-polinômios nas variáveis

$$y_{1,0}, \ldots, y_{m,0}, y_{1,1}, \ldots, y_{m,1}, z_{1,0}, \ldots, z_{m,0}, z_{1,1}, \ldots, z_{m,1}$$

e consideremos os espaços vetoriais $U_1 = \mathrm{span}_F\{y_{1,0}, \ldots, y_{m,0}\}$, $U_2 = \mathrm{span}_F\{y_{1,1}, \ldots, y_{m,1}\}$, $U_3 = \mathrm{span}_F\{z_{1,0}, \ldots, z_{m,0}\}$ e $U_4 = \mathrm{span}_F\{z_{1,1}, \ldots, z_{m,1}\}$.

O grupo $GL(U_1) \times GL(U_2) \times GL(U_3) \times GL(U_4) \cong GL_m^4$ age naturalmente à esquerda sobre o subespaço $U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus U_4$ de $F_m$ e temos que esta ação pode ser estendida diagonalmente à uma ação sobre $F_m$. Além disso, para qualquer $*$-superálgebra $A$, temos que $F_m \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$ é invariante sob essa ação.

Considerando $n \in \mathbb{N}$ e $F_m^n$ o subespaço dos $(\mathbb{Z}_2, *)$-polinômios homogêneos em $F_m$ de grau $n \geq m$, temos que o grupo $GL_m^4$ age diagonalmente sobre $F_m^n$ e, assim, $F_m^n$ tem estrutura de $GL_m^4$-módulo. Desde que $F_m^n \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$ é invariante sob essa ação, segue que o espaço

$$F_m^n(A) = \frac{F_m^n}{F_m^n \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)}$$

é um $GL_m^4$-módulo.

A teoria de representações de $GL_m$ mostra que existe uma correspondência biunívoca entre os $GL_m^4$-submódulos irredutíveis de $F_m^n$ e as multipartições $\langle\lambda\rangle = (\lambda(1), \lambda(2), \lambda(3), \lambda(4))$ de $n$, onde $\lambda(i)$ são partições com no máximo $m$ partes (veja [5, Teorema 12.4.4]). Assim, denotamos por $W^{\langle\lambda\rangle}$ o $GL_m^4$-módulo irredutível correspondente à multipartição $\langle\lambda\rangle$ e $\Psi_{\langle\lambda\rangle}$ o $GL_m^4$-caracter irredutível de $W^{\langle\lambda\rangle}$.

Vamos denotar por $\Psi_n^{\mathrm{gri}}(A)$ o $GL_m^4$-caracter de $F_m^n(A)$, que será chamado de $GL_m^4$-cocaracter de $A$. Este cocaracter será decomposto como uma soma de $GL_m^4$-caracteres irredutíveis, cada um deles correspondente à multipartição $\langle\lambda\rangle \vdash n$, e cada componente de $\langle\lambda\rangle$ possui como máximo $m$ partes. Desta maneira, temos que

$$\Psi_n^{\mathrm{gri}}(A) = \sum_{\substack{\langle\lambda\rangle\vdash n \\ h(\langle\lambda\rangle)\leq m}} \tilde{m}_{\langle\lambda\rangle}\Psi_{\langle\lambda\rangle}, \tag{3.1.1}$$

onde o inteiro $\tilde{m}_{\langle\lambda\rangle} \geq 0$ é a multiplicidade de $\Psi_{\langle\lambda\rangle}$ e $h(\langle\lambda\rangle) = \max\{h(\lambda(i)) \mid i = 1, \ldots, 4\}$.

Também é conhecido que todo $GL_m^4$-submódulo irredutível de $F_m^n$ isomorfo a $W^{\langle\lambda\rangle}$ é gerado por um polinômio não nulo $f_{\langle\lambda\rangle}$ chamado vetor de altura máxima associado à multipartição $\langle\lambda\rangle$ (veja [5, Teorema 12.4.12]). Utilizaremos v.a.m. como uma redução para o termo vetor de altura máxima.

Uma multitabela $T_{\langle\lambda\rangle} = (T_{\lambda(1)}, T_{\lambda(2)}, T_{\lambda(3)}, T_{\lambda(4)})$ é uma 4-upla formada por tabelas de Young $T_{\lambda(i)}$ do tipo $\lambda(i)$, para $i = 1, \ldots, 4$. A multitabela padrão $\tilde{T}_{\langle\lambda\rangle} = (\tilde{T}_{\lambda(1)}, \tilde{T}_{\lambda(2)}, \tilde{T}_{\lambda(3)}, \tilde{T}_{\lambda(4)})$ é aquela em que os inteiros $1, \ldots, n$ são preenchidos, nesta ordem, de cima para baixo, da esquerda para direita, coluna por coluna, da tabela $\tilde{T}_{\lambda(1)}$ até a tabela $\tilde{T}_{\lambda(4)}$. O vetor de altura máxima associado à multitabela padrão é chamado de vetor de altura máxima padrão e é dado por

$$\begin{aligned} f_{\tilde{T}_{\langle\lambda\rangle}} = & \prod_{j=1}^{\lambda(1)_1} St_{h_j(\lambda(1))}(y_{1,0}, \ldots, y_{h_j(\lambda(1)),0}) \prod_{j=1}^{\lambda(2)_1} St_{h_j(\lambda(2))}(y_{1,1}, \ldots, y_{h_j(\lambda(2)),1}) \\ & \prod_{j=1}^{\lambda(3)_1} St_{h_j(\lambda(3))}(z_{1,0}, \ldots, z_{h_j(\lambda(3)),0}) \prod_{j=1}^{\lambda(4)_1} St_{h_j(\lambda(4))}(z_{1,1}, \ldots, z_{h_j(\lambda(4)),1}), \end{aligned}$$

onde $h_j(\lambda(i))$ denota a altura da $j$-ésima coluna da tabela de Young do tipo $\lambda(i)$, $i = 1, \ldots, 4$, e $St_r(x_1, \ldots, x_r)$ é o polinômio standard de grau $r$.

Para uma multitabela $T_{\langle\lambda\rangle}$, denotamos por $f_{T_{\langle\lambda\rangle}}$ o vetor de altura máxima $f_{\tilde{T}_{\langle\lambda\rangle}}\sigma^{-1}$, onde $\sigma$ é o único elemento de $S_n$ que transforma a multitabela padrão $\tilde{T}_{\langle\lambda\rangle}$ na multitabela $T_{\langle\lambda\rangle}$ e a ação à direita de $S_n$ sobre $F_m^n$ é definida pela permutação lugar, que age permutando os lugares em que as variáveis ocorrem. Dizemos que $f_{T_{\langle\lambda\rangle}}$ é o vetor de altura máxima associada à multitabela $T_{\langle\lambda\rangle}$ ou simplesmente $f_{T_{\langle\lambda\rangle}}$ é um vetor de altura máxima associada à multipartição $\langle\lambda\rangle$.

**Observação 3.1.** Iremos adotar a convenção que os símbolos $^{-}$ e $^{=}$, entre outros, indicam alternância sobre um dado conjunto de variáveis nas demonstrações feitas no que segue.

Como um exemplo, a notação $\overline{\overline{y}}_{1,0}\overline{y}_{1,0}y_{4,0}\overline{y}_{2,0}\overline{\overline{y}}_{2,0}\overline{y}_{3,0}$ indica o polinômio

$$\sum_{\substack{\sigma\in S_3\\ \rho\in S_2}}(\mathrm{sgn}\rho)(\mathrm{sgn}\sigma)y_{\rho(1),0}y_{\sigma(1),0}y_{4,0}y_{\sigma(2),0}y_{\rho(2),0}y_{\sigma(3),0}.$$

**Exemplo 3.2.** Seja $\langle\lambda\rangle = ((3,1),(1^2),\emptyset,(1))$ uma multipartição de $n=7$.

- $\tilde{T}_{\langle\lambda\rangle} = \left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4\\ \hline 2 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\,,\ \begin{array}{|c|}\hline 5\\ \hline 6\\ \hline\end{array}\,,\ \emptyset\,,\ \begin{array}{|c|}\hline 7\\ \hline\end{array}\right)$ é a multitabela padrão do tipo $\langle\lambda\rangle$ e

  $f_{\tilde{T}_{\langle\lambda\rangle}} = \overline{y}_{1,0}\overline{y}_{2,0}y_{1,0}y_{1,0}\overline{\overline{y}}_{1,1}\overline{\overline{y}}_{2,1}z_{1,1}$ é o v.a.m. associado a $\tilde{T}_{\langle\lambda\rangle}$.

- Dada a multitabela $T_{\langle\lambda\rangle} = \left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline 7 & 3 & 4\\ \hline 2 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\,,\ \begin{array}{|c|}\hline 6\\ \hline 5\\ \hline\end{array}\,,\ \emptyset\,,\ \begin{array}{|c|}\hline 1\\ \hline\end{array}\right)$; $\sigma = (1\,7)(5\,6)$ é a única permutação de $S_7$ que transforma $\tilde{T}_{\langle\lambda\rangle}$ em $T_{\langle\lambda\rangle}$, isto é, $T_{\langle\lambda\rangle} = \left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline \sigma(1) & \sigma(3) & \sigma(4)\\ \hline \sigma(2) & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\,,\ \begin{array}{|c|}\hline \sigma(5)\\ \hline \sigma(6)\\ \hline\end{array}\,,\ \emptyset\,,\ \begin{array}{|c|}\hline \sigma(7)\\ \hline\end{array}\right)$.

  $f_{T_{\langle\lambda\rangle}} := f_{\tilde{T}_{\langle\lambda\rangle}}\sigma^{-1} = f_{\tilde{T}_{\langle\lambda\rangle}}(1\,7)(5\,6) = z_{1,1}\overline{y}_{2,0}y_{1,0}y_{1,0}\overline{\overline{y}}_{2,1}\overline{\overline{y}}_{1,1}\overline{y}_{1,0}$ é o v.a.m. associado à multitabela $T_{\langle\lambda\rangle}$.

Analogamente ao caso de álgebras com involução (veja [9, Teorema 3]), é possível relacionar o $\langle n\rangle$-cocaracter e o $GL_m^4$-cocaracter de uma $*$-superálgebra $A$.

**Teorema 3.3.** Se $\chi_{\langle n\rangle}(A)$ tem decomposição como em (2.3.2) e $\Psi_n^{\mathrm{gri}}(A)$ tem decomposição como em (3.1.1), então $m_{\langle\lambda\rangle} = \tilde{m}_{\langle\lambda\rangle}$, para toda multipartição $\langle\lambda\rangle \vdash \langle n\rangle$ tal que $h(\langle\lambda\rangle) \leq m$.

Tudo que foi desenvolvido acima nos ajuda a obter um meio de calcular as multiplicidades dos $S_{\langle n\rangle}$-caracteres irredutíveis que aparecem em (2.3.2), como pode ser visto na observação abaixo.

**Observação 3.4.** Observamos que o teorema acima e o Teorema 2.14 nos garante que a multiplicidade $m_{\langle\lambda\rangle}$ do caracter irredutível $\chi_{\langle\lambda\rangle}$ na decomposição do $n$-ésimo cocaracter $*$-graduado de $A$ dada em (2.3.1) é igual a $\tilde{m}_{\langle\lambda\rangle}$, para toda multipartição $\langle\lambda\rangle \vdash \langle n\rangle$ tal que $h(\langle\lambda\rangle) \leq m$.

**Observação 3.5.** [5, Teorema 12.4.12] A multiplicidade $\tilde{m}_{\langle\lambda\rangle} \neq 0$ se, e somente se, existe uma multitabela $T_{\langle\lambda\rangle}$ tal que $f_{T_{\langle\lambda\rangle}} \notin \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$. Além disso, $\tilde{m}_{\langle\lambda\rangle}$ é igual ao número máximo de vetores $f_{T_{\langle\lambda\rangle}} \notin \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$ que são linearmente independentes em $F_m^n(A)$.

Também é importante ressaltar que podemos estender o Proposição 15 de [16] para $*$-superálgebras, ou seja, temos o seguinte resultado.

**Proposição 3.6.** Para cada multipartição $\langle\lambda\rangle = (\lambda(1), \ldots, \lambda(4))$ de $\langle n\rangle$, o vetor de altura máxima $f_{\langle\lambda\rangle}$ pode ser expresso unicamente como uma combinação linear de vetores $f_{T_{\langle\lambda\rangle}}$, onde $T_{\langle\lambda\rangle} = (T_{\lambda(1)}, T_{\lambda(2)}, T_{\lambda(3)}, T_{\lambda(4)})$ é uma multitabela standard, isto é, cada uma das tabelas $T_{\lambda(i)}$ é standard.

Com isso, considerando o Teorema 2.14, usaremos os resultados acima para determinar as multiplicidades do $n$-ésimo cocaracter $*$-graduado de uma $*$-superálgebra $A$.

Também é importante observar que, no caso em que $A$ é uma $*$-superálgebra de dimensão finita, usando uma versão análoga ao Lema 1.2 de [7], podemos provar que temos uma decomposição particular para o $n$-ésimo cocaracter $*$-graduado $\chi_n^{\mathrm{gri}}(A)$ dado por

$$\chi_n^{\mathrm{gri}}(A) = \sum_{\substack{\langle\lambda\rangle\vdash n \\ h(\lambda(1))\leq d_1,\, h(\lambda(2))\leq d_2, \\ h(\lambda(3))\leq d_3,\, h(\lambda(4))\leq d_4}} m_{\langle\lambda\rangle}\chi_{\langle\lambda\rangle}. \tag{3.1.2}$$

onde $\dim(A_0^+) = d_1$, $\dim(A_1^+) = d_2$, $\dim(A_0^-) = d_3$ e $\dim(A_1^-) = d_4$.

Particulamente, quando consideramos $M_{2,1}(F)$ para ser a álgebra $M_3(F)$ com graduação $(M_{2,1}(F)_0, M_{2,1}(F)_1)$, dada por

$$M_{2,1}(F)_0 := \begin{pmatrix} F & F & 0 \\ F & F & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M_{2,1}(F)_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & F \\ F & F & 0 \end{pmatrix}$$

e munida da involução transposta $t$, explicitamente, temos

$$\big(M_{2,1}(F), t\big)_0^+ = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & 0 \\ y & z & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y, z, a \in F \right\}, \text{ com base } \{e_{11}, e_{12}+e_{21}, e_{22}, e_{33}\} \tag{3.1.3}$$

$$\big(M_{2,1}(F), t\big)_0^- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in F \right\}, \text{ com base } \{e_{12}-e_{21}\} \tag{3.1.4}$$

$$\big(M_{2,1}(F), t\big)_1^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ x & y & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, x, y \in F \right\}, \text{ com base } \{e_{13}+e_{31}, e_{23}+e_{32}\} \tag{3.1.5}$$

$$\big(M_{2,1}(F),t\big)_1^- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ -x & -y & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x,y \in F \right\}, \text{ com base } \{e_{13}-e_{31}, e_{23}-e_{32}\}. \quad (3.1.6)$$

Assim, temos que

- $\dim(M_{2,1}(F),t)_0^+ = 4$,
- $\dim(M_{2,1}(F),t)_1^+ = 2$,
- $\dim(M_{2,1}(F),t)_0^- = 1$,
- $\dim(M_{2,1}(F),t)_1^- = 2$.

Um dos nossos objetivos é estudar a decomposição do $n$-ésimo cocaracter $*$-graduado de $(M_{2,1}(F),t)$, o que faremos no Capítulo 3. Usando (3.1.2), temos

$$\chi_n^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t) = \sum_{\substack{\langle\lambda\rangle \vdash n \\ h(\lambda(1))\le 4,\, h(\lambda(2))\le 2, \\ h(\lambda(3))\le 1,\, h(\lambda(4))\le 2}} m_{\langle\lambda\rangle}\chi_{\langle\lambda\rangle}.$$

Pelo que observamos das componentes $\big(M_{2,1}(F),t\big)_0^+$ e $\big(M_{2,1}(F),t\big)_0^-$, a decomposição do $*$-cocaracter de $(M_2(F),t)$, apresentada no Teorema 2.11, será importante para o estudo do cocaracter $*$-graduado de $(M_{2,1}(F),t)$.

**Observação 3.7.** Vamos agora fazer uma observação sobre a relação entre as identidades $*$-graduadas da $*$-superálgebra $(M_{2,1}(F),t)$ e as $*$-identidades da $*$-álgebra $(M_2(F),t)$. Notemos que valem os seguintes itens:

(1) Como $\big(M_{2,1}(F),t\big)_0$ e $(M_2(F),t)$ são $*$-superálgebras com graduação trivial, as identidades $*$-graduadas de cada uma delas são essencialmente as $*$-identidades.

(2) Observando as componentes $\big(M_{2,1}(F),t\big)_0^+$ e $\big(M_{2,1}(F),t\big)_0^-$ dadas em (3.1.3) e (3.1.4), podemos ver $(M_2(F),t)$ imersa em $\big(M_{2,1}(F),t\big)_0$ como $*$-superálgebra.

(3) Pelo item (2) acima, temos $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(\big(M_{2,1}(F),t\big)_0) \subseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_2(F),t)$.

(4) Em [17], Levchenko exibiu uma base para o $T^*$-ideal da álgebra de matrizes $2\times 2$ munida da involução transposta. Estendendo este resultado para a $*$-superálgebra $(M_2(F),t)$, obtemos uma base de $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_2(F),t)$ com os seguintes geradores:

$$[z_{1,0}, z_{2,0}],\ [z_{1,0}z_{2,0}, y_{3,0}],\ w_{1,2}w_{3,4} - w_{1,3}w_{2,4} + w_{1,4}w_{2,3},$$

$$[z_{1,0}y_{2,0}z_{3,0}, y_{4,0}] - z_{1,0}z_{3,0}[y_{2,0}, y_{4,0}],\ y_{1,1},\ z_{1,1};$$

onde $w_{i,j} = [y_{i,0}, y_{j,0}]$ para $1 \le i < j \le 4$. Claramente cada um destes geradores é uma $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidade de $(M_{2,1}(F),t)_0$ e assim, $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_2(F),t) \subseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(\big(M_{2,1}(F),t\big)_0)$.

(5) Concluímos que $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(\big(M_{2,1}(F),t\big)_0) = \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_2(F),t)$.

(6) O item (5) acima implica uma relação entre as decomposições dos cocaracteres correspondentes de $\big(M_{2,1}(F),t\big)_0$ e $(M_2(F),t)$. Usaremos esta relação para calcular as multiplicidades associadas às multipartições do tipo $\langle\lambda\rangle = (\lambda(1),\emptyset,\lambda(3),\emptyset)$ na decomposiçaõ do cocaracter $*$-graduado de $(M_{2,1}(F),t)$ (veja Capítulo 3 Seção 2).

## 3.2 $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades de grau $\leq 3$

Nesta seção, determinaremos algumas $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades de $(M_{2,1}(F),t)$ e mostraremos que temos um conjunto de 12 tais identidades a partir das quais todas as outras de grau $\leq 3$ são consequências. Primeiramente, notemos que não existe $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidade de $(M_{2,1}(F),t)$ de grau 1, deste modo começamos enunciando o seguinte resultado a respeito das identidades de grau 2.

**Proposição 3.8.** Se $f$ é uma $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidade de $(M_{2,1}(F),t)$ de grau 2, então $f$ é múltiplo escalar da $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidade $[z_{1,0},z_{2,0}]$.

*Demonstração.* Claramente $[z_{1,0},z_{2,0}]$ é uma identidade, pois o espaço $(M_{2,1}(F),t)_0^-$ é unidimensional. Agora, assumimos que $f$ é um $(\mathbb{Z}_2,*)$-polinômio de grau 2 com variáveis em

$$y_{1,0}, y_{2,0}, y_{1,1}, y_{2,1}, z_{1,0}, z_{2,0}, z_{1,1}, z_{2,1}.$$

Como $F$ é um corpo infinito, todas as componentes multihomogêneas de $f$ são $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades de $(M_{2,1}(F),t)$ (veja [12, Teorema 1.3.2]). Assim, consideraremos que $f$ é multihomogêneo e, sem perda de generalidade, podemos assumir que $f$ é um dos seguintes $(\mathbb{Z}_2,*)$-polinômios:

- $f_1 = \alpha_1 y_{1,0}y_{2,0} + \beta_1 y_{2,0}y_{1,0}$,
- $f_2 = \alpha_2 y_{1,0}y_{1,1} + \beta_2 y_{1,1}y_{1,0}$,
- $f_3 = \alpha_3 y_{1,0}z_{1,0} + \beta_3 z_{1,0}y_{1,0}$,
- $f_4 = \alpha_4 y_{1,0}z_{1,1} + \beta_4 z_{1,1}y_{1,0}$,
- $f_5 = \alpha_5 y_{1,1}y_{2,1} + \beta_5 y_{2,1}y_{1,1}$,
- $f_6 = \alpha_6 y_{1,1}z_{1,0} + \beta_6 z_{1,0}y_{1,1}$,
- $f_7 = \alpha_7 y_{1,1}z_{1,1} + \beta_7 z_{1,1}y_{1,1}$,
- $f_8 = \alpha_8 z_{1,0}z_{2,0} + \beta_8 z_{2,0}z_{1,0}$,
- $f_9 = \alpha_9 z_{1,0}z_{1,1} + \beta_9 z_{1,1}z_{1,0}$,
- $f_{10} = \alpha_{10} z_{1,1}z_{2,1} + \beta_{10} z_{2,1}z_{1,1}$,
- $f_{11} = \alpha_{11} y_{1,0}^2$,
- $f_{12} = \alpha_{12} y_{1,1}^2$,
- $f_{13} = \alpha_{13} z_{1,0}^2$,
- $f_{14} = \alpha_{14} z_{1,1}^2$,

onde $\alpha_1,\ldots,\alpha_{14},\beta_1,\ldots,\beta_{10} \in F$.

Agora provaremos que todos os polinômios listados acima são nulos, com exceção de $f_8$. Iniciamos avaliando $y_{1,0} = e_{11}$ e $y_{2,0} = e_{12} + e_{21}$ em $f_1$ e obtemos $\alpha_1 e_{12} + \beta_1 e_{21}$, e assim $\alpha_1 = \beta_1 = 0$. Portanto, $f_1 = 0$. Em seguida, avaliamos $y_{1,0} = e_{11}$ e $y_{1,1} = e_{13} + e_{31}$ em $f_2$ e obtemos $\alpha_2 e_{13} + \beta_2 e_{31} = 0$, o que implica em $\alpha_2 = \beta_2 = 0$. Logo, $f_2 = 0$.

Fazendo avaliações adequadas para os outros $f_i$'s, é possível provar que $f_i = 0$ para $3 \leq i \leq 14$, exceto quando $i = 8$. Neste caso, avaliamos $z_{1,0} = e_{12} - e_{21}$ e $z_{2,0} = e_{12} - e_{21}$ e temos que $f_8 = -(\alpha_8 + \beta_8)(e_{11} + e_{22}) = 0 \Rightarrow \alpha_8 = -\beta_8 \Rightarrow f_8 = \alpha_8 \underbrace{(z_{1,0}z_{2,0} - z_{2,0}z_{1,0})}_{(\mathbb{Z}_2,*)-\text{identidade}}$.

Finalmente, obtemos que $f$ é múltiplo escalar de $[z_{1,0}, z_{2,0}]$.

□

No próximo resultado, vamos estabelecer uma relação entre identidades $*$-graduadas de $(M_{2,1}(F), t)$ em termos de variáveis em $Y_1$ e $Z_1$.

Antes de enunciar o resultado, vamos fazer um exemplo. Para um $(\mathbb{Z}_2, *)$-polinômio multilinear $f = f(y_{1,0}, \ldots, y_{m,0}, y_{1,1}, \ldots, y_{n,1}, z_{1,0}, \ldots, z_{p,0}, z_{1,1}, \ldots, z_{q,1})$, vamos considerar $\widetilde{f}$ como o $(\mathbb{Z}_2, *)$-polinômio obtido através de $f$ substituindo uma variável $y_{i,1}$ no lugar de uma variável $z_{i,1}$ e também substituindo uma variável $z_{i,1}$ no lugar de uma variável $y_{i,1}$. Por exemplo, para $f = f(y_{2,1}, z_{1,0}, z_{3,0}) = z_{1,0}y_{2,1}z_{3,0}$, temos $\widetilde{f} = z_{1,0}z_{2,1}z_{3,0}$.

Observe que usando a base $*$-graduada dada pelos elementos em (3.1.3), (3.1.4), (3.1.5) e (3.1.6), é fácil verificar que $f = z_{1,0}y_{2,1}z_{3,0} \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$. Também é fácil ver que $\widetilde{f} = z_{1,0}z_{2,1}z_{3,0} \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$. De fato, teremos um resultado que garante que ao trocar as variáveis de $Y_1$ e $Z_1$ em uma identidade de $(M_{2,1}(F), t)$, obteremos uma nova identidade de $(M_{2,1}(F), t)$. Vamos estabelecer alguns requisitos para prová-lo agora.

**Lema 3.9.** Seja $\varphi : M_{2,1}(F) \longrightarrow M_{2,1}(F)$ a aplicação linear definida pela extensão de

$$e_{11} \mapsto e_{11},\ e_{12} \mapsto e_{12},\ e_{21} \mapsto e_{21},\ e_{22} \mapsto e_{22},\ e_{13} \mapsto e_{13},$$
$$e_{23} \mapsto e_{23},\ e_{31} \mapsto -e_{31},\ e_{32} \mapsto -e_{32} \text{ e } e_{33} \mapsto e_{33}.$$

Valem os seguintes itens:

1. $\varphi \circ \varphi = 1_{M_{2,1}(F)}$. Consequentemente $\varphi$ é um isomorfismo de espaços vetoriais.

2. $\varphi$ preserva as componentes par e ímpar de $M_{2,1}(F)$. Além disso,

$$\varphi[(M_{2,1}(F), t)_0^+] = (M_{2,1}(F), t)_0^+; \qquad \varphi[(M_{2,1}(F), t)_1^+] = (M_{2,1}(F), t)_1^-;$$
$$\varphi[(M_{2,1}(F), t)_0^-] = (M_{2,1}(F), t)_0^- \text{ e } \varphi[(M_{2,1}(F), t)_1^-] = (M_{2,1}(F), t)_1^+.$$

3. Se $a_1, a_2 \in M_{2,1}(F)_0 \cup M_{2,1}(F)_1$, temos que:

   (a) $\varphi(a_1) = a_1$, se $a_1 \in M_{2,1}(F)_0$.

   (b) $\varphi(a_1a_2) = \varphi(a_1)\varphi(a_2)$, se $a_1 \in M_{2,1}(F)_0$ ou $a_2 \in M_{2,1}(F)_0$.

   (c) $\varphi(a_1a_2) = -\varphi(a_1)\varphi(a_2)$, se $a_1, a_2 \in M_{2,1}(F)_1$.

*Demonstração.* Os itens 1, 2 e 3(a) podem ser facilmente demonstrados usando a definição de $\varphi$. Para ver o item 3(b), primeiramente observamos que se $a_1$ e $a_2$ pertencem a $M_{2,1}(F)_0$, não há nada a fazer. Supomos que $a_1 \in M_{2,1}(F)_0$ e $a_2 \in M_{2,1}(F)_1$. Neste caso, vemos que é suficiente provar este resultado para $a_1 \in \{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}, e_{33}\}$ que é uma base de $M_{2,1}(F)_0$ e $a_2 \in \{e_{13}, e_{23}, e_{31}, e_{32}\}$ que é uma base de $M_{2,1}(F)_1$. Com isso, temos que $\varphi(e_{11}e_{13}) = \varphi(e_{13}) = e_{13}$ e $\varphi(e_{11})\varphi(e_{13}) = e_{11}e_{13} = e_{13}$. De modo análogo, podemos verificar que $\varphi(e_{12}e_{23}) = \varphi(e_{12})\varphi(e_{23})$, $\varphi(e_{21}e_{13}) = \varphi(e_{21})\varphi(e_{13})$, $\varphi(e_{22}e_{23}) = \varphi(e_{22})\varphi(e_{23})$, $\varphi(e_{33}e_{31}) = \varphi(e_{33})\varphi(e_{31})$ e $\varphi(e_{33}e_{32}) = \varphi(e_{33})\varphi(e_{32})$.

Analogamente, podemos provar este resultado para $a_1 \in (M_{2,1}(F))_1$ e $a_2 \in M_{2,1}(F)_0$. Finalmente, provaremos o item 3(c), basta mostrar que $\varphi(a_1a_2) = -\varphi(a_1)\varphi(a_2)$ para $a_1, a_2 \in \{e_{13}, e_{23}, e_{31}, e_{32}\}$ que é uma base de $M_{2,1}(F)_1$.

Observe que para $1 \leq k, j \leq 2$, temos que $e_{k3}e_{3j}, e_{3k}e_{k3} \in M_{2,1}(F)_0$, pelo item 3(a) $\varphi(e_{k3}e_{3j}) = e_{kj}$ e $\varphi(e_{3k}e_{k3}) = e_{33}$. Além disso, afirmamos que $\varphi(e_{k3})\varphi(e_{3j}) = -e_{kj}$ e $\varphi(e_{3k})\varphi(e_{k3}) = -e_{33}$, concluindo a demonstração. □

Na próxima observação, vamos estabelecer uma nomenclatura que será usada daqui por diante.

**Observação 3.10.** Dado um monômio $m = x_{i_1,s_1} \cdots x_{i_k,s_k}$ da álgebra livre $\mathcal{F} = F\langle X|\mathbb{Z}_2, *\rangle$, onde $x \in \{y, z\}$ com $i_j \in \{1, \ldots, k\}$ e $s_j \in \{0, 1\}$, consideramos que um monômio $B \in \mathcal{F}$ é um bloco de $m$ se existem monômios (eventualmente constantes) $h_1, h_2 \in \mathcal{F}$ tais que $m = h_1Bh_2$ (isto é o mesmo que dizer que $B$ é uma subpalavra da palavra $m$ na álgebra livre $\mathcal{F}$). Vamos usar também esta nomenclatura para nos referir a produtos de elementos de $M_{2,1}(F)$.

**Lema 3.11.** Sejam $a_1, \ldots, a_p \in M_{2,1}(F)_0 \cup M_{2,1}(F)_1$ e seja $q$ o número de $a_i's$ que pertencem a $M_{2,1}(F)_1$, então

$$\varphi(a_1 \cdots a_p) = \begin{cases} \varphi(a_1) \cdots \varphi(a_p), & \text{se } q \equiv 0 \text{ ou } q \equiv 1 \mod 4 \\ -\varphi(a_1) \cdots \varphi(a_p), & \text{se } q \equiv 2 \text{ ou } q \equiv 3 \mod 4. \end{cases}$$

*Demonstração.* Se $q = 0$ a demonstração segue imediatamente do item 3(a) do Lema 3.9. Consideraremos $q > 0$ e iniciamos observando que se $p = 1$ ou $p = 2$, o resultado segue diretamente dos itens 3(b) e 3(c) do Lema 3.9. Além disso, se $p = 3$, um simples cálculo e análise de casos com $0 < q \leq 3$, mostra a validade do lema também a partir do Lema 3.9.

Agora, consideremos $p \geq 4$ e $q = 4k + r > 0$, com $k$ um inteiro não negativo e $0 \leq r \leq 3$. Separamos o elemento $a_1 \cdots a_p$ em $q$ blocos $B_1, \ldots, B_q$ de produtos de elementos, de modo que cada bloco contenha exatamente um elemento $a_j \in M_{2,1}(F)_1$.

Observe que $B_1, \ldots, B_q \in M_{2,1}(F)_1$. Assim $B_iB_j \in M_{2,1}(F)_0$ com $1 \leq i, j \leq q$. Por outro lado, se $B_i = a_{i_1} \cdots a_{i_2}$ com $i_1 \leq i_2$ e utilizando o item 3(b) do Lema 3.9 obtemos $\varphi(B_i) = \varphi(a_{i_1}) \cdots \varphi(a_{i_2})$, por conseguinte, $\varphi(B_1) \cdots \varphi(B_q) = \varphi(a_1) \cdots \varphi(a_p)$.

**Caso 1:** Se $r = 0$, usando os itens 3(b) e 3(c) do Lema 3.9 teremos:

$$\begin{aligned}
\varphi(a_1 \cdots a_p) &= \varphi(B_1 \cdots B_{4k}) = \varphi[(B_1B_2) \cdots (B_{4k-1}B_{4k})] \\
&= \varphi(B_1B_2) \cdots \varphi(B_{4k-1}B_{4k}) = (-1)^{2k}\varphi(B_1) \cdots \varphi(B_{4k}) \\
&= \varphi(B_1) \cdots \varphi(B_{4k}) = \varphi(a_1) \cdots \varphi(a_p).
\end{aligned}$$

**Caso 2:** Se $r = 1$, usando os itens 3(b), 3(c) do Lema 3.9 e o Caso 1 acima, teremos:

$$\begin{aligned}
\varphi(a_1 \cdots a_p) &= \varphi[(B_1 \cdots B_{4k})B_{4k+1}] = \varphi(B_1 \cdots B_{4k})\varphi(B_{4k+1}) \\
&= \varphi(B_1) \cdots \varphi(B_{4k})\varphi(B_{4k+1}) = \varphi(a_1) \cdots \varphi(a_p).
\end{aligned}$$

**Caso 3:** Se $r = 2$, usando os itens 3(b) e 3(c) do Lema 3.9, teremos:

$$\begin{aligned}
\varphi(a_1 \cdots a_p) &= \varphi[(B_1B_2) \cdots (B_{4k+1}B_{4k+2})] = \varphi(B_1B_2) \cdots \varphi(B_{4k+1}B_{4k+2}) \\
&= (-1)^{2k+1}\varphi(B_1) \cdots \varphi(B_{4k+2}) = -\varphi(a_1) \cdots \varphi(a_p).
\end{aligned}$$

**Caso 4:** Se $r = 3$, usando os itens 3(b), 3(c) do Lema 3.9 e o Caso 3 acima, teremos:

$$\begin{aligned}
\varphi(a_1 \cdots a_p) &= \varphi[(B_1 \cdots B_{4k+2})B_{4k+3}] = \varphi(B_1 \cdots B_{4k+2})\varphi(B_{4k+3}) \\
&= -\varphi(B_1) \cdots \varphi(B_{4k+2})\varphi(B_{4k+3}) = -\varphi(a_1) \cdots \varphi(a_p).
\end{aligned}$$

□

Seja $F_{4,2,1,2}$ o subespaço da álgebra livre $\mathcal{F}$ dos $(\mathbb{Z}_2, *)$-polinômios nas variáveis $y_{1,0}$, $y_{2,0}, y_{3,0}, y_{4,0}, y_{1,1}, y_{2,1}, z_{1,0}, z_{1,1}, z_{2,1}$ e consideremos

$$\tilde{\varphi} : F_{4,2,1,2} \longrightarrow F_{4,2,1,2} \tag{3.2.1}$$

o homomorfismo de $F$-álgebras definido pela extensão diagonal da correspondência

$$\begin{gathered}
y_{1,0} \mapsto y_{1,0},\ y_{2,0} \mapsto y_{2,0},\ y_{3,0} \mapsto y_{3,0},\ y_{4,0} \mapsto y_{4,0},\ y_{1,1} \mapsto z_{1,1}, \\
y_{2,1} \mapsto z_{2,1},\ z_{1,0} \mapsto z_{1,0},\ z_{1,1} \mapsto y_{1,1} \text{ e } z_{2,1} \mapsto y_{2,1}.
\end{gathered}$$

Observe que $\tilde{\varphi} \circ \tilde{\varphi} = 1_{F_{4,2,1,2}}$. Consequentemente $\tilde{\varphi}$ é um isomorfismo de $F$-álgebras.

O homomorfismo $\tilde{\varphi}$ pode ser estendido para o homomorfismo

$$\tilde{\varphi}_1 : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}, \tag{3.2.2}$$

onde $\tilde{\varphi}_1$ é definido pela extensão diagonal da correspondência

$$y_{i,0} \mapsto y_{i,0},\ y_{i,1} \mapsto z_{i,1}, z_{i,0} \mapsto z_{i,0} \text{ e } z_{i,1} \mapsto y_{i,1}.$$

Agora, fixamos uma 9-upla

$$\eta = (a_1^+, a_2^+, a_3^+, a_4^+, b_1^+, b_2^+, a_1^-, b_1^-, b_2^-), \tag{3.2.3}$$

onde $a_1^+, a_2^+, a_3^+, a_4^+ \in (M_{2,1}(F), t)_0^+$; $b_1^+, b_2^+ \in (M_{2,1}(F), t)_1^+$; $a_1^- \in (M_{2,1}(F), t)_0^-$ e $b_1^-, b_2^- \in (M_{2,1}(F), t)_1^-$ e definimos o homomorfismo avaliação que denotamos pelo mesmo símbolo da 9-upla $\eta : F_{4,2,1,2} \longrightarrow M_{2,1}(F)$ dado por

$$\eta(f) = f(a_1^+, a_2^+, a_3^+, a_4^+, b_1^+, b_2^+, a_1^-, b_1^-, b_2^-) \text{ para todo } f \in F_{4,2,1,2}.$$

Considerando $\varphi : M_{2,1}(F) \longrightarrow M_{2,1}(F)$ como no Lema 3.9, definimos uma 9-upla

$$\varphi\eta = (\varphi(a_1^+), \varphi(a_2^+), \varphi(a_3^+), \varphi(a_4^+), \varphi(b_1^-), \varphi(b_2^-), \varphi(a_1^-), \varphi(b_1^+), \varphi(b_2^+)), \tag{3.2.4}$$

que claramente induz um homomorfismo avaliação com a mesma notação da 9-upla

$$\varphi\eta : F_{4,2,1,2} \longrightarrow M_{2,1}(F) \text{ dado por}$$

$$\varphi\eta(f) = f(\varphi(a_1^+), \varphi(a_2^+), \varphi(a_3^+), \varphi(a_4^+), \varphi(b_1^-), \varphi(b_2^-), \varphi(a_1^-), \varphi(b_1^+), \varphi(b_2^+)).$$

**Proposição 3.12.** Consideremos $\eta$ e $\varphi\eta$ como definidos acima. Se $f \in F_{4,2,1,2}$ é um polinômio multihomogêneo, então $\varphi(\eta(f)) = \varphi\eta(\tilde{\varphi}(f))$ ou $\varphi(\eta(f)) = -\varphi\eta(\tilde{\varphi}(f))$.

O sinal da igualdade $\varphi(\eta(f)) = \pm\varphi\eta(\tilde{\varphi}(f))$ depende exclusivamente do número de variáveis ímpares de algum monômio de $f \in F_{4,2,1,2}$.

*Demonstração.* Vamos analisar as situações possíveis para o polinômio multihomogêneo $f$, considerando $\Omega = \{y_{1,0}, y_{2,0}, y_{3,0}, y_{4,0}, y_{1,1}, y_{2,1}, z_{1,0}, z_{1,1}, z_{2,1}\}$.

**Caso 1:** $f$ é um monômio de grau 1, isto é, $f = \delta w$, onde $\delta \in F$ e $w \in \Omega$. Neste caso, sem perda de generalidade, podemos considerar que $f$ é apenas uma das variáveis de $\Omega$.

1.1) Se $f$ é uma variável par então $\eta(f) \in (M_{2,1}(F))_0$, pelas definições de $\tilde{\varphi}$, $\varphi\eta$, $\eta$ e pelo Lema 3.9, temos $\varphi\eta(\tilde{\varphi}(f)) = \varphi\eta(f) = \eta(f) = \varphi(\eta(f))$.

1.2) Se $f$ é uma variável ímpar então:

- para $f = y_{i,1}$, temos $\varphi\eta(\tilde{\varphi}(f)) = \varphi\eta(z_{i,1}) = \varphi(b_i^+) = \varphi(\eta(y_{i,1})) = \varphi(\eta(f))$;
- para $f = z_{i,1}$, temos $\varphi\eta(\tilde{\varphi}(f)) = \varphi\eta(y_{i,1}) = \varphi(b_i^-) = \varphi(\eta(z_{i,1})) = \varphi(\eta(f))$.

**Caso 2:** $f$ é um monômio de grau $\geq 2$. Neste caso, sem perda de generalidade, podemos considerar $f = w_1w_2\cdots w_p,\ p \geq 2$, onde $w_1, w_2, \ldots, w_p \in \Omega$ e vamos tomar $q$ como o número de variáveis ímpares em $f$. Note que $\eta(w_i) \in \{a_1^+, a_2^+, a_3^+, a_4^+, b_1^+, b_2^+, a_1^-, b_1^-, b_2^-\}$, para $1 \leq i \leq p$. Como $\eta(f) = \eta(w_1)\cdots\eta(w_p)$, usando o Caso 1 deste lema, e considerando a aplicação $\varepsilon : n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \to F$ dada por

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n \equiv 0 \text{ ou } n \equiv 1 \mod 4 \\ -1, & \text{se } n \equiv 2 \text{ ou } n \equiv 3 \mod 4 \end{cases}$$

podemos usar o Lema 3.11 para concluir que

$$\begin{aligned}\varphi(\eta(f)) =& \varepsilon(q)\varphi(\eta(w_1))\varphi(\eta(w_2))\cdots\varphi(\eta(w_p)) = \varepsilon(q)\varphi\eta(\tilde{\varphi}(w_1))\,\varphi\eta(\tilde{\varphi}(w_2))\cdots\varphi\eta(\tilde{\varphi}(w_p))\\ =& \varepsilon(q)\varphi\eta[\tilde{\varphi}(w_1)\,\tilde{\varphi}(w_2)\cdots\tilde{\varphi}(w_p)] = \varepsilon(q)\varphi\eta(\tilde{\varphi}(w_1\cdots w_p)) = \varepsilon(q)\varphi\eta(\tilde{\varphi}(f)).\end{aligned}$$

**Caso geral:** Escrevemos $f = u_1 + u_2 + \cdots + u_r$ como soma de monômios $u_i's$. Como $f$ é multihomogêneo, consideramos que o número de variáveis ímpares de qualquer monômio $u_i$ é $q$. Segue que

$$\begin{aligned}\varphi(\eta(f)) =& \varphi(\eta(u_1)) + \cdots + \varphi(\eta(u_r)) = \varepsilon(q)\varphi\eta(\tilde{\varphi}(u_1)) + \cdots + \varepsilon(q)\varphi\eta(\tilde{\varphi}(u_r))\\ =& \varepsilon(q)[\varphi\eta(\tilde{\varphi}(u_1)) + \cdots + \varphi\eta(\tilde{\varphi}(u_r))] = \varepsilon(q)\varphi\eta[\tilde{\varphi}(u_1) + \cdots + \tilde{\varphi}(u_r)]\\ =& \varepsilon(q)\varphi\eta[\tilde{\varphi}(u_1 + \cdots + u_r)] = \varepsilon(q)\varphi\eta(\tilde{\varphi}(f)).\end{aligned}$$

□

Finalmente, temos a demonstração do resultado desejado.

**Corolário 3.13.** Seja $f \in F_{4,2,1,2}$. Se $f \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$ então $\tilde{\varphi}(f) \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$.

*Demonstração.* Sem perda de generalidade podemos supor que $f$ é um $(\mathbb{Z}_2, *)$-polinômio multihomogêneo. Dado $\eta_0$ uma avaliação de $\tilde{\varphi}(f)$, provaremos que $\eta_0(\tilde{\varphi}(f)) = 0$. Inicialmente, note que podemos escrever $\eta_0 = \varphi\eta$ para alguma 9-upla $\eta$ como em (3.2.3) e $\varphi\eta$ como em (3.2.4). Observamos que a avaliação $\eta(f)$ é nula pois $f \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$. Agora, pela Proposição 3.12, temos $\eta_0(\tilde{\varphi}(f)) = \varphi\eta(\tilde{\varphi}(f)) = \pm\varphi(\eta(f)) = 0$ e isto mostra que $\tilde{\varphi}(f)$ se anula sob qualquer avaliação $\eta_0$ dada. Portanto, $\tilde{\varphi}(f)$ é uma $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidade de $(M_{2,1}(F), t)$. □

Em resumo, o Corolário 3.13 afirma que se substituímos as variáveis $y_{i,1}$ por $z_{i,1}$ e as variáveis $z_{i,1}$ por $y_{i,1}$ de uma identidade na álgebra $F_{4,2,1,2}$, obteremos uma nova identidade. O interessante de está propriedade é que pode ser estendida para qualquer identidade em $\mathcal{F} := F\langle X|\mathbb{Z}_2, *\rangle$.

De modo análogo a demonstração da Proposição 3.12 e do Corolário 3.13, segue então o seguinte resultado:

**Corolário 3.14.** Considerando o homomorfismo $\tilde{\varphi}_1$ como definido em (3.2.2). Dada uma $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidade $f$ então $\tilde{\varphi_1}(f) \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$.

No próximo resultado, usaremos a notação estabelecida na Observação 3.1.

**Teorema 3.15.** Os seguintes $(\mathbb{Z}_2, *)$-polinômios são identidades de $(M_{2,1}(F), t)$.

1) $[z_{1,0}, z_{2,0}]$;
2) $[y_{1,0}, z_{2,0}z_{3,0}]$;
3) $\overline{z}_{1,0}y_{2,0}\overline{z}_{3,0}$;
4) $z_{1,1} \circ [y_{2,1}, y_{3,1}] + \overline{y}_{2,1}z_{1,1}\overline{y}_{3,1}$;
5) $y_{1,1}z_{2,0}y_{3,1} + y_{3,1}z_{2,0}y_{1,1}$;
6) $\overline{y}_{1,1}\overline{y}_{2,1}\overline{y}_{3,1}$;
7) $z_{1,0}y_{2,1}z_{3,0}$;
8) $\overline{y}_{1,1}z_{2,0}\overline{z}_{3,1}$;
9) $y_{1,1} \circ [z_{2,1}, z_{3,1}] + \overline{z}_{2,1}y_{1,1}\overline{z}_{3,1}$;
10) $z_{1,1}z_{2,0}z_{3,1} + z_{3,1}z_{2,0}z_{1,1}$;
11) $\overline{z}_{1,1}\overline{z}_{2,1}\overline{z}_{3,1}$;
12) $z_{1,0}z_{2,1}z_{3,0}$.

*Demonstração.*

1) É óbvio, pois $(M_{2,1}(F), t)_0^-$ é unidimensional.

2) Observe que se $a, b \in (M_{2,1}(F), t)_0^-$ então $ab$ pertence ao centro de $(M_{2,1}(F), t)_0^+$. Isto mostra que $[y_{1,0}, z_{2,0}z_{3,0}] \equiv 0$.

3) Basta fazer uma substituição arbitrária $y_{2,0} = a_{2,0}^+ \in (M_{2,1}(F), t)_0^+$; $z_{1,0} = \delta_1 w_0$, $z_{3,0} = \delta_3 w_0 \in (M_{2,1}(F), t)_0^-$ em $\overline{z}_{1,0}y_{2,0}\overline{z}_{3,0} = z_{1,0}y_{2,0}z_{3,0} - z_{3,0}y_{2,0}z_{1,0}$, onde $\delta_1, \delta_3 \in F$ e $w_0 = e_{12} - e_{21}$. Teremos $\overline{z}_{1,0}y_{2,0}\overline{z}_{3,0} = \delta_1\delta_3 w_0 a_{2,0}^+ w_0 - \delta_3\delta_1 w_0 a_{2,0}^+ w_0 = 0$.

4) Avaliamos nos elementos das bases, ou seja, $y_{2,1} = a$, $y_{3,1} = b$ e $z_{1,1} = c$, onde $a$ e $b$ estão na base $\{e_{13}+e_{31}, e_{23}+e_{32}\}$ de $(M_{2,1}(F))_1^+$; e $c$ está na base $\{e_{13}-e_{31}, e_{23}-e_{32}\}$ de $(M_{2,1}(F))_1^-$.

   Se $a = b$ então $z_{1,1} \circ [y_{2,1}, y_{3,1}] + \overline{y}_{2,1}z_{1,1}\overline{y}_{3,1} = 0$.

   Por outro lado, se $a \neq b$ sem perda de generalidade supomos que $y_{2,1} = a = e_{13}+e_{31}$, $y_{3,1} = b = e_{23} + e_{32}$ e $z_{1,1} = c = e_{i3} - e_{3i}$ com $i \in \{1, 2\}$.

Primeiro vemos que $[y_{2,1}, y_{3,1}] = [\ a, b\ ] = e_{12} - e_{21}$. Logo,

$$\begin{aligned} z_{1,1} \circ [y_{2,1}, y_{3,1}] =& (e_{i3} - e_{3i})(e_{12} - e_{21}) + (e_{12} - e_{21})(e_{i3} - e_{3i}) \\ =& -(e_{21}e_{i3} + e_{3i}e_{12}) + (e_{12}e_{i3} + e_{3i}e_{21}). \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \overline{y}_{2,1}z_{1,1}\overline{y}_{3,1} =& \overline{y}_{2,1}(e_{i3} - e_{3i})\overline{y}_{3,1} = y_{2,1}(e_{i3} - e_{3i})y_{3,1} - y_{3,1}(e_{i3} - e_{3i})y_{2,1} \\ =& (-e_{1i} + e_{31}e_{i3})(e_{23} + e_{32}) - (-e_{2i} + e_{32}e_{i3})(e_{13} + e_{31}) \\ =& (e_{2i}e_{13} + e_{31}e_{i2}) - (e_{1i}e_{23} + e_{32}e_{i1}). \end{aligned}$$

Finalmente $z_{1,1} \circ [y_{2,1}, y_{3,1}] + \overline{y}_{2,1}z_{1,1}\overline{y}_{3,1}$ é igual

$$\underbrace{-(e_{21}e_{i3} + e_{3i}e_{12}) + (e_{2i}e_{13} + e_{31}e_{i2})}_{=0} + \underbrace{(e_{12}e_{i3} + e_{3i}e_{21}) - (e_{1i}e_{23} + e_{32}e_{i1})}_{=0} = 0.$$

5) Para verificar que o $(\mathbb{Z}_2, *)$-polinômio multilinear $y_{1,1}z_{2,0}y_{3,1} + y_{3,1}z_{2,0}y_{1,1}$ é identidade, basta avaliar em elementos das bases, isto é, substituir $z_{2,0} = e_{12} - e_{21}$, $y_{1,1} = e_{i3} + e_{3i}$, $y_{3,1} = e_{j3} + e_{3j}$ com $i, j \in \{1, 2\}$.

6) Basta observar que $(M_{2,1}(F), t)_1^+$ é bidimensional e, portanto, $St_3(y_{1,1}, y_{2,1}, y_{3,1}) \equiv 0$.

7) e 8) seguem do mesmo modo que 4) e 5), fazendo avaliações em elementos das bases de $(M_{2,1}(F), t)_1^+$, de $(M_{2,1}(F), t)_0^-$ e de $(M_{2,1}(F), t)_1^-$.

Usando o Corolário 3.14 e os itens 4), 5), 6) e 7), obtemos os itens 9), 10), 11) e 12), respectivamente. □

**Observação 3.16.** No teorema acima, a partir do Corolário 3.14 e da identidade 8) $\overline{y}_{1,1}z_{2,0}\overline{z}_{3,1}$, temos também que $\overline{z}_{1,1}z_{2,0}\overline{y}_{3,1}$ é uma identidade de $(M_{2,1}(F), t)$. Esta identidade não foi listada no Teorema 3.15 pois ela é, de fato, uma consequência de 8).

Vamos agora descrever as $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidades de $(M_{2,1}(F), t)$ de grau 3. Para isso, usaremos a ação do grupo $GL_3^4$ sobre o espaço $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t) \cap F_3^3$, onde $F_3^3$ é o espaço dos $(\mathbb{Z}_2, *)$-polinômios homogêneos de grau 3 com variáveis

$$y_{1,0}, y_{2,0}, y_{3,0}, y_{1,1}, y_{2,1}, y_{3,1}, z_{1,0}, z_{2,0}, z_{3,0}, z_{1,1}, z_{2,1}, z_{3,1}.$$

Seja $\langle n \rangle = (n_1, n_2, n_3, n_4)$ uma composição de 3 em 4 partes, isto é, $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 3$ com $0 \leq n_1, n_2, n_3, n_4 \leq 3$. Definimos $W_{\langle n \rangle}$ como sendo o subespaço de $F_3^3$ que consiste dos $(\mathbb{Z}_2, *)$-polinômios homogêneos em $F_3$ de grau 3 tais que:

- o número de ocorrências das variáveis pares simétricas $y_{1,0}, y_{2,0}, y_{3,0}$ é $n_1$;

- o número de ocorrências das variáveis ímpares simétricas $y_{1,1}, y_{2,1}, y_{3,1}$ é $n_2$;
- o número de ocorrências das variáveis pares antissimétricas $z_{1,0}, z_{2,0}, z_{3,0}$ é $n_3$;
- o número de ocorrências das variáveis ímpares antissimétricas $z_{1,1}, z_{2,1}, z_{3,1}$ é $n_4$.

A importância de definir os espaços $W_{\langle n\rangle}$ resulta dos seguintes fatos:

1. $W_{\langle n\rangle}$ é invariante pela ação de $GL_3^4$;
2. qualquer polinômio multihomogêneo de grau 3 pertence pelo menos a algum $W_{\langle n\rangle}$;
3. o espaço $F_3^3$ é soma direta dos $GL_3^4$-submódulos $W_{\langle n\rangle}$, consequentemente
$$\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t)\cap F_3^3=\bigoplus_{\langle n\rangle}[\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t)\cap W_{\langle n\rangle}].$$

Devido aos itens anteriores, nos focaremos no estudo da decomposição do $GL_3^4$-módulo $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t)\cap W_{\langle n\rangle}$ em submódulos irredutíveis, isto é, queremos determinar a multiplicidade $\bar{m}_{\langle\lambda\rangle}$ e os submódulos irredutíveis de $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t)\cap W_{\langle n\rangle}$ isomorfos a $W^{\langle\lambda\rangle}$ em

$$\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t)\cap W_{\langle n\rangle}\cong\bigoplus_{\langle\lambda\rangle\vdash\langle n\rangle}\bar{m}_{\langle\lambda\rangle}W^{\langle\lambda\rangle}. \tag{3.2.5}$$

Para uma multipartição fixada $\langle\lambda\rangle\vdash\langle n\rangle$, temos que um $GL_3^4$-submódulo irredutível de $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t)\cap W_{\langle n\rangle}$ isomorfo a $W^{\langle\lambda\rangle}$ é gerado por um polinômio não nulo $f_{\langle\lambda\rangle}$ e de acordo com a Proposição 3.6, $f_{\langle\lambda\rangle}$ é combinação linear de v.a.m. associados a multitabelas standard do tipo $\langle\lambda\rangle$.

Para simplificar a notação, denotaremos por $f'_{\langle\lambda\rangle}$, $f''_{\langle\lambda\rangle}$, $f'''_{\langle\lambda\rangle}$, ... os v.a.m. diferentes correspondentes a $\langle\lambda\rangle$ e, para calcular a multiplicidade $\bar{m}_{\langle\lambda\rangle}$, precisamos determinar todos tais vetores que são $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades de $(M_{2,1}(F),t)$. Depois, devemos checar a independência linear destes vetores.

O próximo teorema exibirá todos os valores das multiplicidades $\tilde{m}_{\langle\lambda\rangle}$ e vetores de altura máxima $f'_{\langle\lambda\rangle}$, $f''_{\langle\lambda\rangle}$, ... da decomposição (3.2.5) para cada $\langle n\rangle$.

Observe que o número de todas as composições $\langle n\rangle$ de 3 em 4 partes é $\binom{4+3-1}{4-1}=20$.

**Teorema 3.17.** As seguintes decomposições são válidas

1. $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t) \cap W_{(2,0,1,0)} \cong W^{((1^2),\emptyset,(1),\emptyset)}$; com a seguinte lista completa de v.a.m.'s
$$f_{\langle\tilde{\lambda}\rangle} = \overline{y}_{1,0}\overline{y}_{2,0}z_{1,0} - z_{1,0}\overline{y}_{1,0}\overline{y}_{2,0} = [y_{1,0}, y_{2,0}, z_{1,0}].$$

2. $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t) \cap W_{(1,0,2,0)} \cong W^{((1),\emptyset,(2),\emptyset)} \oplus 3W^{((1),\emptyset,(1^2),\emptyset)}$; com a seguinte lista completa de v.a.m.'s
$$f_{\langle\lambda\rangle} = [y_{1,0}, z_{1,0}^2],\ f'_{\langle\tilde{\lambda}\rangle} = y_{1,0}\overline{z}_{1,0}\overline{z}_{2,0},\ f''_{\langle\tilde{\lambda}\rangle} = \overline{z}_{1,0}y_{1,0}\overline{z}_{2,0} \text{ e } f'''_{\langle\tilde{\lambda}\rangle} = \overline{z}_{1,0}\overline{z}_{2,0}y_{1,0}.$$

3. $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t) \cap W_{(0,1,1,1)} \cong 2W^{(\emptyset,(1),(1),(1))}$; com v.a.m.'s
$$f'_{\langle\lambda\rangle} = \overline{y}_{1,1}z_{1,0}\overline{z}_{1,1} \text{ e } f''_{\langle\lambda\rangle} = [z_{1,0}, y_{1,1} \circ z_{1,1}].$$

4. $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t) \cap W_{(0,0,3,0)} \cong 2W^{(\emptyset,\emptyset,(2,1),\emptyset)} \oplus W^{(\emptyset,\emptyset,(1^3),\emptyset)}$; com a seguinte lista completa de v.a.m.'s $f'_{\langle\lambda\rangle} = \overline{z}_{1,0}\overline{z}_{2,0}z_{1,0}$, $f''_{\langle\lambda\rangle} = \overline{z}_{1,0}z_{1,0}\overline{z}_{2,0}$ e $f_{\langle\tilde{\lambda}\rangle} = \overline{z}_{1,0}\overline{z}_{2,0}\overline{z}_{3,0}$.

5. $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t) \cap W_{(0,3,0,0)} \cong W^{(\emptyset,(1^3),\emptyset,\emptyset)}$; com v.a.m. $f_{\langle\lambda\rangle} = \overline{y}_{1,1}\overline{y}_{2,1}\overline{y}_{3,1}$.

6. $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t) \cap W_{(0,0,0,3)} \cong W^{(\emptyset,\emptyset,\emptyset,(1^3))}$; com v.a.m. $f_{\langle\lambda\rangle} = \tilde{z}_{1,1}\tilde{z}_{2,1}\tilde{z}_{3,1}$.

7. $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t) \cap W_{(0,2,1,0)} \cong W^{(\emptyset,(2),(1),\emptyset)} \oplus W^{(\emptyset,(1^2),(1),\emptyset)}$; com a seguinte lista completa de v.a.m.'s $f_{\langle\lambda\rangle} = y_{1,1}z_{1,0}y_{1,1}$ e $f_{\langle\tilde{\lambda}\rangle} = [y_{1,1}, y_{2,1}, z_{1,0}]$.

8. $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t) \cap W_{(0,0,1,2)} \cong W^{(\emptyset,\emptyset,(1),(2))} \oplus W^{(\emptyset,\emptyset,(1),(1^2))}$; com a seguinte lista completa de v.a.m.'s $f_{\langle\lambda\rangle} = z_{1,1}z_{1,0}z_{1,1}$ e $f_{\langle\tilde{\lambda}\rangle} = [z_{1,1}, z_{2,1}, z_{1,0}]$.

9. $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t) \cap W_{(0,1,2,0)} \cong W^{(\emptyset,(1),(2),\emptyset)} \oplus 3W^{(\emptyset,(1),(1^2),\emptyset)}$; com a seguinte lista completa de v.a.m.'s
$$f_{\langle\lambda\rangle} = z_{1,0}y_{1,1}z_{1,0},\ f'_{\langle\tilde{\lambda}\rangle} = \overline{z}_{1,0}\overline{z}_{2,0}y_{1,1},\ f''_{\langle\tilde{\lambda}\rangle} = \overline{z}_{1,0}y_{1,1}\overline{z}_{2,0} \text{ e } f'''_{\langle\tilde{\lambda}\rangle} = y_{1,1}\overline{z}_{1,0}\overline{z}_{2,0}.$$

10. $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t) \cap W_{(0,0,2,1)} \cong W^{(\emptyset,\emptyset,(2),(1))} \oplus 3W^{(\emptyset,\emptyset,(1^2),(1))}$; com a seguinte lista completa de v.a.m.'s
$$f_{\langle\lambda\rangle} = z_{1,0}z_{1,1}z_{1,0},\ f'_{\langle\tilde{\lambda}\rangle} = \overline{z}_{1,0}\overline{z}_{2,0}z_{1,1},\ f''_{\langle\tilde{\lambda}\rangle} = \overline{z}_{1,0}z_{1,1}\overline{z}_{2,0} \text{ e } f'''_{\langle\tilde{\lambda}\rangle} = z_{1,1}\overline{z}_{1,0}\overline{z}_{2,0}.$$

11. $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t) \cap W_{(0,2,0,1)} \cong W^{(\emptyset,(1^2),\emptyset,(1))}$; com v.a.m.
$$f_{\langle\lambda\rangle} = z_{1,1} \circ [y_{1,1}, y_{2,1}] + \overline{y}_{1,1}z_{1,1}\overline{y}_{2,1}.$$

12. $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t) \cap W_{(0,1,0,2)} \cong W^{(\emptyset,(1),\emptyset,(1^2))}$; com v.a.m.
$$f_{\langle\lambda\rangle} = y_{1,1} \circ [z_{1,1}, z_{2,1}] + \overline{z}_{1,1}y_{1,1}\overline{z}_{2,1}.$$

13. $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t) \cap W_{\langle n\rangle} = 0$ para qualquer $\langle n\rangle$ no conjunto
$$\{(3,0,0,0),(2,1,0,0),(2,0,0,1),(1,2,0,0),(1,1,1,0),(1,1,0,1),(1,0,1,1),(1,0,0,2)\}.$$

*Demonstração.* Na demonstração, vamos fazer somente o primeiro e terceiro item, usando o argumento explicado anteriormente.

Se $\langle n\rangle = (2,0,1,0)$, temos duas multipartições de $(2,0,1,0)$:

$$\langle\lambda\rangle = ((2),\emptyset,(1),\emptyset) \quad \text{e} \quad \langle\tilde{\lambda}\rangle = ((1^2),\emptyset,(1),\emptyset).$$

1.1) $\langle\lambda\rangle = ((2),\emptyset,(1),\emptyset)$ possui $\binom{3}{2,0,1,0}d_{(2)}d_{\emptyset}d_{(1)}d_{\emptyset} = 3$ multitabelas de Young standard:

$$\left(\boxed{1\,|\,2}\,,\ \emptyset,\ \boxed{3}\,,\ \emptyset\right),\left(\boxed{1\,|\,3}\,,\ \emptyset,\ \boxed{2}\,,\ \emptyset\right) \text{ e } \left(\boxed{2\,|\,3}\,,\ \emptyset,\ \boxed{1}\,,\ \emptyset\right),$$

cujos vetores de altura máxima são:

$$f = \underbrace{y_{1,0}^2 z_{1,0}}_{w_1},\ f(2\,3) = \underbrace{y_{1,0}z_{1,0}y_{1,0}}_{w_2} \text{ e } f(1\,2\,3)^{-1} = f(1\,3\,2) = \underbrace{z_{1,0}y_{1,0}^2}_{w_3} \quad \text{respectivamente.}$$

1.2) $\langle\tilde{\lambda}\rangle = ((1^2),\emptyset,(1),\emptyset)$ também possui 3 multitabelas de Young standard:

$$\left(\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline\end{array}\,,\ \emptyset,\ \boxed{3}\,,\ \emptyset\right),\left(\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 3\\\hline\end{array}\,,\ \emptyset,\ \boxed{2}\,,\ \emptyset\right) \text{ e } \left(\begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array}\,,\ \emptyset,\ \boxed{1}\,,\ \emptyset\right),$$

cujos vetores de altura máxima são, respectivamente,

$$g = \underbrace{\overline{y}_{1,0}\overline{y}_{2,0}z_{1,0}}_{w_4},\ g(2\,3) = \underbrace{\overline{y}_{1,0}z_{1,0}\overline{y}_{2,0}}_{w_5} \text{ e } g(1\,2\,3)^{-1} = g(1\,3\,2) = \underbrace{z_{1,0}\overline{y}_{1,0}\overline{y}_{2,0}}_{w_6}\ .$$

Dada a decomposição $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t) \cap W_{(2,0,1,0)} \cong \beta_1 W^{((2),\emptyset,(1),\emptyset)} \oplus \beta_2 W^{((1^2),\emptyset,(1),\emptyset)}$, calcularemos os valores das multiplicidades $\beta_1$ e $\beta_2$.

1.1) Os v.a.m. que geram submódulos irredutíveis de $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t) \cap W_{(2,0,1,0)}$ isomorfos a $W^{((2),\emptyset,(1),\emptyset)}$ são combinações lineares de $w_1$, $w_2$ e $w_3$ (ver a Proposição 3.6). Isto é,
$f_{\langle\lambda\rangle} = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 = \alpha_1 y_{1,0}^2 z_{1,0} + \alpha_2 y_{1,0}z_{1,0}y_{1,0} + \alpha_3 z_{1,0}y_{1,0}^2 \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t)$,
para alguns $\alpha_1$, $\alpha_2$ e $\alpha_3$ em $F$.
Avaliando $y_{1,0} = e_{11}$ e $z_{1,0} = e_{12} - e_{21}$ em $f_{\langle\lambda\rangle}$ obtemos
$f_{\langle\lambda\rangle} = \alpha_1 e_{12} - \alpha_3 e_{21} = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_3 = 0$.

Avaliando $y_{1,0} = e_{12} + e_{21}$ e $z_{1,0} = e_{12} - e_{21}$ em $f_{\langle\lambda\rangle}$ obtemos
$f_{\langle\lambda\rangle} = (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3)(e_{12} - e_{21}) = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$.

Portanto $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \Rightarrow f_{\langle\lambda\rangle} = 0$, ou seja, não existe submódulo irredutível de $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t) \cap W_{(2,0,1,0)}$ isomorfo a $W^{((2),\emptyset,(1),\emptyset)}$, assim $\beta_1 = 0$.

1.2) Os v.a.m. que geram submódulos irredutíveis de $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t)\cap W_{(2,0,1,0)}$ isomorfos a $W^{((1^2),\emptyset,(1),\emptyset)}$ são combinações lineares de $w_4, w_5$ e $w_6$. Isto é,
$f_{\langle\tilde{\lambda}\rangle} = \alpha_4 w_4+\alpha_5 w_5+\alpha_6 w_6 = \alpha_4\overline{y}_{1,0}\overline{y}_{2,0}z_{1,0}+\alpha_5\overline{y}_{1,0}z_{1,0}\overline{y}_{2,0}+\alpha_6 z_{1,0}\overline{y}_{1,0}\overline{y}_{2,0}$ é identidade, para alguns $\alpha_4$, $\alpha_5$ e $\alpha_6$ em $F$.
Avaliando $y_{1,0} = e_{11}$, $y_{2,0} = e_{12} + e_{21}$ e $z_{1,0} = e_{12} - e_{21}$ em $f_{\langle\tilde{\lambda}\rangle}$ obtemos
$f_{\langle\tilde{\lambda}\rangle} = -(\alpha_4 + \alpha_6)(e_{11} + e_{22}) + 2\alpha_5 e_{11} = 0 \Rightarrow \alpha_5 = 0$ e $\alpha_4 + \alpha_6 = 0$.
Portanto $f_{\langle\tilde{\lambda}\rangle} = \alpha_4(\overline{y}_{1,0}\overline{y}_{2,0}z_{1,0} - z_{1,0}\overline{y}_{1,0}\overline{y}_{2,0}) = \alpha_4[y_{1,0}, y_{2,0}, z_{1,0}]$.
Observe que $[y_{1,0}, y_{2,0}, z_{1,0}]$ é consequência da $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidade $[z_{1,0}, z_{2,0}]$ vista no Teorema 3.15, o que implica que $[y_{1,0}, y_{2,0}, z_{1,0}]$ é uma identidade. Deste modo, $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t)\cap W_{(2,0,1,0)}$ possui unicamente um submódulo isomorfo a $W^{((1^2),\emptyset,(1),\emptyset)}$, assim $\beta_2 = 1$.

Finalmente concluímos que

$$\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t)\cap W_{(2,0,1,0)} \cong W^{((1^2),\emptyset,(1),\emptyset)} \text{ e } f_{\langle\tilde{\lambda}\rangle} = [y_{1,0}, y_{2,0}, z_{1,0}].$$

Agora determinaremos a decomposição dada no item 3.
Se $\langle n\rangle = (0,1,1,1)$, temos uma única multipartição de $(0,1,1,1)$: $\langle\lambda\rangle = (\emptyset,(1),(1),(1))$. A multipartição $\langle\lambda\rangle = (\emptyset,(1),(1),(1))$ possui $\binom{3}{0,1,1,1}d_\emptyset d_{(1)}d_{(1)}d_{(1)} = 6$ multitabelas de Young standard:

$$\left(\emptyset, \boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}\right); \left(\emptyset, \boxed{2}, \boxed{1}, \boxed{3}\right); \left(\emptyset, \boxed{3}, \boxed{2}, \boxed{1}\right);$$
$$\left(\emptyset, \boxed{1}, \boxed{3}, \boxed{2}\right); \left(\emptyset, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{1}\right) \text{ e } \left(\emptyset, \boxed{3}, \boxed{1}, \boxed{2}\right);$$

cujos vetores de altura máxima são:

$$f = \underbrace{y_{1,1}z_{1,0}z_{1,1}}_{w_1},\ f(1\,2) = \underbrace{z_{1,0}y_{1,1}z_{1,1}}_{w_2},\ f(1\,3) = \underbrace{z_{1,1}z_{1,0}y_{1,1}}_{w_3},\ f(2\,3) = \underbrace{y_{1,1}z_{1,1}z_{1,0}}_{w_4},$$

$$f(1\,2\,3)^{-1} = f(1\,3\,2) = \underbrace{z_{1,1}y_{1,1}z_{1,0}}_{w_5} \text{ e } f(1\,3\,2)^{-1} = f(1\,2\,3) = \underbrace{z_{1,0}z_{1,1}y_{1,1}}_{w_6} \text{ respectivamente.}$$

Dada a decomposição $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t)\cap W_{(0,1,1,1)} \cong \beta W^{(\emptyset,(1),(1),(1))}$, calcularemos o valor da multiplicidade $\beta$.

Os v.a.m. que geram submódulos irredutíveis de $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t)\cap W_{(0,1,1,1)}$ isomorfos a $W^{(\emptyset,(1),(1),(1))}$ são combinações lineares de $w_1,\dots,w_6$. Isto é,

$$\begin{aligned} f_{\langle\lambda\rangle} =&\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 + \alpha_4 w_4 + \alpha_5 w_5 + \alpha_6 w_6\\ =&\alpha_1 y_{1,1}z_{1,0}z_{1,1} + \alpha_2 z_{1,0}y_{1,1}z_{1,1} + \alpha_3 z_{1,1}z_{1,0}y_{1,1} + \alpha_4 y_{1,1}z_{1,1}z_{1,0}\\ &+ \alpha_5 z_{1,1}y_{1,1}z_{1,0} + \alpha_6 z_{1,0}z_{1,1}y_{1,1} \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t),\end{aligned}$$

para alguns $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6 \in F$.

Avaliando $y_{1,1} = e_{13} + e_{31}$, $z_{1,0} = e_{12} - e_{21}$ e $z_{1,1} = e_{13} - e_{31}$ em $f_{\langle\lambda\rangle}$ obtemos:

$$\alpha_1(\ 0\ ) + \alpha_2 e_{21} + \alpha_3(\ 0\ ) - \alpha_4 e_{12} + \alpha_5 e_{12} - \alpha_6 e_{21} = (\alpha_2 - \alpha_6)e_{21} - (\alpha_4 - \alpha_5)e_{12} = 0,$$

isto implica que $\alpha_2 = \alpha_6$ e $\alpha_4 = \alpha_5$. Então $f_{\langle\lambda\rangle} = \alpha_1 w_1 + \alpha_2(w_2 + w_6) + \alpha_3 w_3 + \alpha_4(w_4 + w_5)$.

Avaliando $y_{1,1} = e_{13} + e_{31}$, $z_{1,0} = e_{12} - e_{21}$ e $z_{1,1} = e_{23} - e_{32}$ em $f_{\langle\lambda\rangle}$ obtemos:

$$\alpha_1 e_{33} + \alpha_2(e_{22} + e_{11}) + \alpha_3 e_{33} + \alpha_4(e_{11} + e_{22}) = (\alpha_1 + \alpha_3)e_{33} + (\alpha_2 + \alpha_4)(e_{22} + e_{11}) = 0,$$

isto implica que $\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_4 = 0$.
Assim $f_{\langle\lambda\rangle} = \alpha_1(w_1 - w_3) + \alpha_2(w_2 - w_4 - w_5 + w_6)$ e podemos verificar que $w_1 - w_3 = \overline{y}_{1,1} z_{1,0} \overline{z}_{1,1}$ e $w_2 - w_4 - w_5 + w_6 = [z_{1,0}, y_{1,1} \circ z_{1,1}]$ são $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidades, pois são consequências das identidades 8) e 1) listadas no Teorema 3.15, respectivamente. Observe que $\{w_1 - w_3, w_2 - w_4 - w_5 + w_6\}$ é linearmente independente em $F_3^3$ e portanto $\beta = 2$. Finalmente concluímos que

$$\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t) \cap W_{(0,1,1,1)} \simeq 2W^{(\emptyset,(1),(1),(1))}; f_{\langle\lambda\rangle} = \overline{y}_{1,1} z_{1,0} \overline{z}_{1,1} \text{ e } f_{\langle\tilde{\lambda}\rangle} = [z_{1,0}, y_{1,1} \circ z_{1,1}].$$

As demonstrações dos outros casos seguem de modo análogo aos casos anteriores. □

Agora, estamos prontos para provar o principal resultado desta seção, onde na demonstração nos referiremos à numeração dada às $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidades do teorema anterior.

**Teorema 3.18.** Seja $f \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$ uma $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidade de grau $\leq 3$. Então $f$ é consequência dos $(\mathbb{Z}_2, *)$-polinômios listados no Teorema 3.15.

*Demonstração.* Se $f$ é $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidade de grau $\leq 2$, usamos a Proposição 3.8 que garante que $f$ é consequência de $[z_{1,0}, z_{2,0}]$. Agora, considere $f$ uma $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidade de grau 3 com variáveis em

$$y_{1,0}, y_{2,0}, y_{3,0}, y_{1,1}, y_{2,1}, y_{3,1}, z_{1,0}, z_{2,0}, z_{3,0}, z_{1,1}, z_{2,1}, z_{3,1}.$$

Como $F$ é um corpo infinito, podemos assumir que $f$ é multihomogêneo e com isso $f \in W_{\langle n\rangle}$ para alguma composição $\langle n\rangle$ de 3 em 4 partes.

Desta forma, $f$ é consequência dos vetores de altura máxima obtidos na decomposição do $GL_3^4$-módulo $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t) \cap W_{\langle n\rangle}$. Assim, focamos nosso estudo sobre os vetores de altura máxima listados no Teorema 3.17 e confirmaremos que cada uns deles é consequência de alguma $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidade mencionada no Teorema 3.15.

Iniciamos observando que a multipartição $\langle n\rangle$ não pode tomar os seguintes valores

$$(3,0,0,0), (2,1,0,0), (2,0,0,1), (1,2,0,0), (1,1,1,0), (1,1,0,1), (1,0,1,1), (1,0,0,2)$$

pois nesse caso $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t)\cap W_{\langle n\rangle}=0$ (item 13 do Teorema 3.17).

Agora, vamos analisar todos os demais v.a.m. seguindo a ordem estabelecida no Teorema 3.17:

1. $f_{(1^2),\emptyset,(1),\emptyset}=[y_{1,0},y_{2,0},z_{1,0}]$ é consequência de 1) $[z_{1,0},z_{2,0}]$.

2. $f_{(1),\emptyset,(2),\emptyset}=[y_{1,0},z_{1,0}^2]$ é consequência de 2) $[y_{1,0},z_{2,0}z_{3,0}]$.
   $f'_{(1),\emptyset,(1^2),\emptyset}=y_{1,0}\overline{z}_{1,0}\overline{z}_{2,0}$ e $f'''_{(1),\emptyset,(1^2),\emptyset}=\overline{z}_{1,0}\overline{z}_{2,0}y_{1,0}$ são consequências de 1); e
   $f''_{(1),\emptyset,(1^2),\emptyset}=\overline{z}_{1,0}y_{1,0}\overline{z}_{2,0}$ é consequência de 3).

3. $f'_{\emptyset,(1),(1),(1)}=\overline{y}_{1,1}z_{1,0}\overline{z}_{1,1}$ é consequência de 8) $\overline{y}_{1,1}z_{2,0}\overline{z}_{3,1}$; e $f''_{\emptyset,(1),(1),(1)}=[z_{1,0},y_{1,1}\circ z_{1,1}]$ é consequência de 1).

4. $f'_{\emptyset,\emptyset,(2,1),\emptyset}=\overline{z}_{1,0}\overline{z}_{2,0}z_{1,0}$, $f''_{\emptyset,\emptyset,(2,1),\emptyset}=\overline{z}_{1,0}z_{1,0}\overline{z}_{2,0}$ e $f_{\emptyset,\emptyset,(1^3),\emptyset}=\overline{z}_{1,0}\overline{z}_{2,0}\overline{z}_{3,0}$ são consequências de 1).

5. $f_{\emptyset,(1^3),\emptyset,\emptyset}=St_3(y_{1,1},y_{2,1},y_{3,1})$ é a identidade 6).

6. $f_{\emptyset,\emptyset,\emptyset,(1^3)}=St_3(z_{1,1},z_{2,1},z_{3,1})$ é a identidade 11).

7. $f_{\emptyset,(2),(1),\emptyset}=y_{1,1}z_{1,0}y_{1,1}$ é consequência de 5) $y_{1,1}z_{2,0}y_{3,1}+y_{3,1}z_{2,0}y_{1,1}$; e
   $f_{\emptyset,(1^2),(1),\emptyset}=[y_{1,1},y_{2,1},z_{1,0}]$ é consequência de 1) $[z_{1,0},z_{2,0}]$.

8. $f_{\emptyset,\emptyset,(1),(2)}=z_{1,1}z_{1,0}z_{1,1}$ é consequência de 10) $z_{1,1}z_{2,0}z_{3,1}+z_{3,1}z_{2,0}z_{1,1}$ e
   $f_{\emptyset,\emptyset,(1),(1^2)}=[z_{1,1},z_{2,1},z_{1,0}]$ é consequência de 1).

9. $f_{\emptyset,(1),(2),\emptyset}=z_{1,0}y_{1,1}z_{1,0}$ e $f''_{\emptyset,(1),(1^2),\emptyset}=\overline{z}_{1,0}y_{1,1}\overline{z}_{2,0}$ são consequências de 7) $z_{1,0}y_{2,1}z_{3,0}$;
   $f'_{\emptyset,(1),(1^2),\emptyset}=\overline{z}_{1,0}\overline{z}_{2,0}y_{1,1}$ e $f'''_{\emptyset,(1),(1^2),\emptyset}=y_{1,1}\overline{z}_{1,0}\overline{z}_{2,0}$ são consequências de 1).

10. $f_{\emptyset,\emptyset,(2),(1)}=z_{1,0}z_{1,1}z_{1,0}$ e $f''_{\emptyset,\emptyset,(1^2),(1)}=\overline{z}_{1,0}z_{1,1}\overline{z}_{2,0}$ são consequências de 12) $z_{1,0}z_{2,1}z_{3,0}$;
    $f'_{\emptyset,\emptyset,(1^2),(1)}=\overline{z}_{1,0}\overline{z}_{2,0}z_{1,1}$ e $f'''_{\emptyset,\emptyset,(1^2),(1)}=z_{1,1}\overline{z}_{1,0}\overline{z}_{2,0}$ são consequências de 1).

11. $f_{\emptyset,(1^2),\emptyset,(1)}=z_{1,1}\circ[y_{1,1},y_{2,1}]+\overline{y}_{1,1}z_{1,1}\overline{y}_{2,1}$ é a identidade 4).

12. $f_{\emptyset,(1),\emptyset,(1^2)}=y_{1,1}\circ[z_{1,1},z_{2,1}]+\overline{z}_{1,1}y_{1,1}\overline{z}_{2,1}$ é consequência de 9).

$\square$

# 4 Decomposição de $\chi_n^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t)$

Neste capítulo, estaremos interessados em estabelecer resultados a respeito das multiplicidades na decomposição do $n$-ésimo cocaracter $*$-graduado de $(M_{2,1}(F),t)$, considerando multipartições $\langle\lambda\rangle = (\lambda(1),\lambda(2),\lambda(3),\lambda(4))$, onde as alturas das componentes satisfazem

$$h(\lambda(1)) \leq 4, h(\lambda(2)) \leq 2, h(\lambda(3)) \leq 1, h(\lambda(4)) \leq 2.$$

## 4.1 Multiplicidades não nulas em $\chi_n^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t)$

Nesta seção apresentaremos um resultado que nos permitirá identificar se a multiplicidade $m_{\langle\lambda\rangle}$ é nula na decomposição:

$$\chi_n^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t) = \sum_{\substack{\langle\lambda\rangle\vdash n \\ h(\lambda(1))\leq 4,\, h(\lambda(2))\leq 2, \\ h(\lambda(3))\leq 1,\, h(\lambda(4))\leq 2}} m_{\langle\lambda\rangle}\chi_{\langle\lambda\rangle}. \tag{4.1.1}$$

A partir de agora, usaremos as notações $\bar{}$ e $\tilde{}$ estabelecidas na Observação 3.1 para indicar alternância das variáveis.

**Proposição 4.1.** Considere a decomposição em (4.1.1) e $\langle\lambda\rangle = (\lambda(1),\lambda(2),\lambda(3),\lambda(4))$ uma multipartição de $n$. Se $h(\lambda(1)) \leq 3$ então $m_{\langle\lambda\rangle} \neq 0$.

*Demonstração.* Usando a Observação 3.5, basta encontrar um vetor de altura máxima associado a uma multitabela do tipo $\langle\lambda\rangle$ que não seja $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidade de $(M_{2,1}(F),t)$. Denotemos as conjugadas das partições $\lambda(1),\lambda(2),\lambda(3),\lambda(4)$ respectivamente por

$$\lambda(1)' = (3^{\alpha_1},2^{\alpha_2},1^{\alpha_6}),\ \ \lambda(2)' = (2^{\alpha_3},1^{\alpha_7}),\ \ \lambda(3)' = (1^{\alpha_4})\ \text{ e }\ \lambda(4)' = (2^{\alpha_5},1^{\alpha_8}),$$

onde $\alpha_1,\ldots,\alpha_8 \geq 0$.

Logo, o vetor de altura máxima padrão associado a $\langle\lambda\rangle$ é dado por

$$f_0 = (\overline{y}_{1,0}\overline{y}_{2,0}\overline{y}_{3,0})^{\alpha_1}[y_{1,0},y_{2,0}]^{\alpha_2}y_{1,0}^{\alpha_6}[y_{1,1},y_{2,1}]^{\alpha_3}y_{1,1}^{\alpha_7}z_{1,0}^{\alpha_4}[z_{1,1},z_{2,1}]^{\alpha_5}z_{1,1}^{\alpha_8}.$$

Considere uma permutação $\sigma \in S_n$ tal que

$$f = f_0\sigma^{-1} = (\overline{y}_{1,0}\overline{y}_{2,0}\overline{y}_{3,0})^{\alpha_1}[y_{1,0},y_{2,0}]^{\alpha_2}[y_{1,1},y_{2,1}]^{\alpha_3}z_{1,0}^{\alpha_4}[z_{1,1},z_{2,1}]^{\alpha_5}y_{1,0}^{\alpha_6}y_{1,1}^{\alpha_7}z_{1,1}^{\alpha_8}.$$

Note que, $f$ é um v.a.m. associado a uma multitabela do tipo $\langle\lambda\rangle$ e agora apresentaremos uma avaliação que não anula $f$.

Consideremos $y_{1,0} = e_{11}$, $y_{2,0} = e_{12} + e_{21}$, $y_{3,0} = e_{22}$, $y_{1,1} = e_{13} + e_{31}$, $y_{2,1} = e_{23} + e_{32}$, $z_{1,0} = e_{12} - e_{21}$, $z_{1,1} = e_{13} - e_{31}$ e $z_{2,1} = e_{23} - e_{32}$.

Fazendo esta avaliação, obtemos um elemento

$$f_a = (-1)^{\alpha_5}(e_{12} - e_{21})^{\alpha_1+\cdots+\alpha_5}(e_{11})^{\alpha_6}(e_{13} + e_{31})^{\alpha_7}(e_{13} - e_{31})^{\alpha_8} \in M_{2,1}(F)$$

de modo que, para todos os possíveis valores de $\alpha_1, \ldots, \alpha_8 \geq 0$, temos $f_a$ diferente de zero. Portanto, $f \notin \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$.

$\square$

Antes de enunciar o próximo corolário, fazemos uma observação. Ao tomar os elementos da base $\{e_{11}, e_{12}+e_{21}, e_{22}, e_{33}\}$, o valor da avaliação em $St_3(y_{1,0}, y_{2,0}, y_{3,0}) = \bar{y}_{1,0}\bar{y}_{2,0}\bar{y}_{3,0}$ será nulo ou igual a $\pm(e_{12} - e_{21})$. Por outro lado, temos que $St_4(y_{1,0}, y_{2,0}, y_{3,0}, y_{4,0}) = y_{1,0}\bar{y}_{2,0}\bar{y}_{3,0}\bar{y}_{4,0} - y_{2,0}\bar{y}_{1,0}\bar{y}_{3,0}\bar{y}_{4,0} + y_{3,0}\bar{y}_{1,0}\bar{y}_{2,0}\bar{y}_{4,0} - y_{4,0}\bar{y}_{1,0}\bar{y}_{2,0}\bar{y}_{3,0}$. Assim, temos que

$$\bar{y}_{1,0}\bar{y}_{2,0}\bar{y}_{3,0}\bar{y}_{4,0} \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t).$$

Da Proposição 4.1 e da observação feita acima, segue o seguinte.

**Corolário 4.2.** Consideremos a decomposição em (4.1.1).

1. Se $m_{\langle\lambda\rangle} = 0$ então $h(\lambda(1)) = 4$.

2. Se $n \in \{2, 3\}$ então $m_{\langle\lambda\rangle} \neq 0$ para todo $\langle\lambda\rangle \vdash n$.

3. Se $n = 4$ então $m_{\langle\lambda\rangle} = 0$ se, e somente se, $\langle\lambda\rangle = ((1^4), \emptyset, \emptyset, \emptyset)$.

Para provar a próxima proposição, vamos precisar do seguinte importante lema técnico.

**Lema 4.3.** Seja $g_1$ um monômio de $\mathcal{F}$ e consideremos $\zeta_1$, $\zeta_2$, $\zeta_3$, $\zeta_4$ variáveis distintas que estão no conjunto $X = Y_0 \cup Y_1 \cup Z_0 \cup Z_1$. Se

$$g_0 = \overline{\zeta}_1\overline{\zeta}_2\overline{\zeta}_3\overline{\zeta}_4 g_1$$

é um polinômio de grau $n \geq 4$ e $\sigma \in S_n$, então podemos reescrever o polinômio $g = g_0\sigma$ como $\pm g_2\overline{\zeta}_1 g_3\overline{\zeta}_2 g_4\overline{\zeta}_3 g_5\overline{\zeta}_4 g_6$, onde $g_2$, $g_3$, $g_4$, $g_5$ e $g_6$ são monômios nas variáveis do monômio $g_1$.

*Demonstração.* Temos que $g_0 = \displaystyle\sum_{\tau\in S_4} \mathrm{sgn}(\tau)\zeta_{\tau(1)}\zeta_{\tau(2)}\zeta_{\tau(3)}\zeta_{\tau(4)}g_1$ e portanto, para $\sigma \in S_n$, um monômio de $g = g_0\sigma$ é

$$\mathrm{sgn}(\tau)[\zeta_{\tau(1)}\zeta_{\tau(2)}\zeta_{\tau(3)}\zeta_{\tau(4)}g_1]\sigma, \text{ para algum } \tau \in S_4. \tag{4.1.2}$$

Considerando $1 \leq j \leq 4$, no resultado da ação à direita de $\sigma$ sobre as variáveis do monômio $\zeta_{\tau(1)}\zeta_{\tau(2)}\zeta_{\tau(3)}\zeta_{\tau(4)}$, temos que a variável $\zeta_{\tau(j)}$ irá ocupar a posição $\sigma^{-1}(j)$ do monômio correspondente em $g$.

Ordenamos as posições das variáveis de acordo com $\sigma^{-1}(i_1) < \sigma^{-1}(i_2) < \sigma^{-1}(i_3) < \sigma^{-1}(i_4)$ e para $1 \leq k \leq 4$, definimos uma permutação $\gamma \in S_4$ por $\gamma(k) = i_k$, onde $i_k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Por fim, considerando $\theta = \tau\gamma \in S_4$, temos que $\theta(k) = \tau(i_k)$ e assim, $\zeta_{\theta(k)}$ ocupa a posição $\sigma^{-1}(i_k)$ do monômio correspondente em $g$. Desta forma, podemos escrever este monômio como $g_2\zeta_{\theta(1)}g_3\zeta_{\theta(2)}g_4\zeta_{\theta(3)}g_5\zeta_{\theta(4)}g_6$, onde cada $g_s$ é um monômio nas variáveis do monômio $g_1$.

Agora, como o coeficiente do monômio em (4.1.2) é $\mathrm{sgn}(\tau)$ e $\mathrm{sgn}(\theta) = \mathrm{sgn}(\tau)\mathrm{sgn}(\gamma)$, fazendo o mesmo com todos os monômios de $g$, ao fim obtemos que

$$g = \sum_{\theta \in S_4} \mathrm{sgn}(\gamma)\mathrm{sgn}(\theta) g_2\zeta_{\theta(1)}g_3\zeta_{\theta(2)}g_4\zeta_{\theta(3)}g_5\zeta_{\theta(4)}g_6 = \pm g_2\overline{\zeta}_1 g_3\overline{\zeta}_2 g_4\overline{\zeta}_3 g_5\overline{\zeta}_4 g_6.$$

□

**Observação 4.4.** O fato mais importante da conclusão do lema anterior é que se o polinômio inicial $g_0 = \overline{\zeta}_1\overline{\zeta}_2\overline{\zeta}_3\overline{\zeta}_4 g_1$ é linear e alternado nas variáveis $\zeta_1$, $\zeta_2$, $\zeta_3$, $\zeta_4$, quando $g_1$ é multihomogêneo e independe das variáveis $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ então o polinômio resultante $g_0\sigma$ continua sendo linear e alternado nas variáveis $\zeta_1$, $\zeta_2$, $\zeta_3$, $\zeta_4$.

**Proposição 4.5.** Consideramos a decomposição em (4.1.1), se $\langle\lambda\rangle = (\lambda(1), \emptyset, \lambda(3), \emptyset)$ e $h(\lambda(1)) = 4$ então $m_{\langle\lambda\rangle} = 0$.

*Demonstração.* O v.a.m. padrão associado a $\langle\lambda\rangle = (\lambda(1), \emptyset, \lambda(3), \emptyset)$ é dado por

$$f_0(y_{1,0}, y_{2,0}, y_{3,0}, y_{4,0}, z_{1,0}) = (\overline{y}_{1,0}\overline{y}_{2,0}\overline{y}_{3,0}\overline{y}_{4,0})^{\alpha_1} h_0$$

onde $\alpha_1 \geq 1$ e $h_0 = h_0(y_{1,0}, y_{2,0}, y_{3,0}, y_{4,0}, z_{1,0}) = (St_3(y_{1,0}, y_{2,0}, y_{3,0}))^{\alpha_2}[y_{1,0}, y_{2,0}]^{\alpha_3} y_{1,0}^{\alpha_4} z_{1,0}^{\alpha_5}$, com $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \geq 0$.

Como observado anteriormente, $\overline{y}_{1,0}\overline{y}_{2,0}\overline{y}_{3,0}\overline{y}_{4,0}$ é uma $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidade de $(M_{2,1}(F), t)$ e assim, $f_0$ também é. Agora, vamos mostrar que, para todo $\sigma \in S_n$, temos que $f = f_0\,\sigma^{-1} \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$ e isto prova o resultado.

Vamos considerar $g_0 = g_0(y_{1,0}, y_{2,0}, y_{3,0}, y_{4,0}, y_{5,0}, y_{6,0}, y_{7,0}, y_{8,0}, z_{1,0})$ um novo $(\mathbb{Z}_2, *)$-polinômio, dado por

$$g_0 = (\overline{\overline{y}}_{5,0}\overline{\overline{y}}_{6,0}\overline{\overline{y}}_{7,0}\overline{\overline{y}}_{8,0})(\overline{y}_{1,0}\overline{y}_{2,0}\overline{y}_{3,0}\overline{y}_{4,0})^{\alpha_1 - 1} h_0$$

e para $\sigma \in S_n$, definimos $g := g_0\,\sigma^{-1}$ e observamos que $g$ é linear e alternado nas variáveis $y_{5,0}$, $y_{6,0}, y_{7,0}$, $y_{8,0}$, de acordo com o Lema 4.3.

Note que $f = f_0\sigma^{-1}$ é consequência de $g = g_0\sigma^{-1}$. Portanto, se mostrarmos que $g \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$ então teremos $f \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$. Vamos considerar substituições $y_{i,0} = a_i \in (M_{2,1}(F), t)_0^+$, para $1 \leq i \leq 8$ e $z_{1,0} = b_1 \in (M_{2,1}(F), t)_0^-$ em $g$.

1. Se o conjunto $\{a_5, a_6, a_7, a_8\}$ é linearmente dependente então, pela linearidade e alternância de $g$ nas variáveis $y_{5,0}, y_{6,0}, y_{7,0}, y_{8,0}$, de acordo com a Observação 2.6, teremos
$$g(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, b_1) = 0.$$

2. Se o conjunto $\{a_5, a_6, a_7, a_8\}$ é linearmente independente, este será uma base de $(M_{2,1}(F), t)_0^+$. Desde que $\{e_{11}, e_{12}+e_{21}, e_{22}, e_{33}\}$ também é uma base de $(M_{2,1}(F), t)_0^+$, escrevendo $a_5, a_6, a_7, a_8$ como combinação linear de $e_{11}, e_{12}+e_{21}, e_{22}, e_{33}$ e usando novamente a linearidade e alternância de $g$ nas variáveis $y_{5,0}, y_{6,0}, y_{7,0}, y_{8,0}$, teremos
$$g(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, b_1) = \delta\, g(a_1, a_2, a_3, a_4, e_{11}, e_{12} + e_{21}, e_{22}, e_{33}, b_1),$$
para algum $\delta \in F$.

Agora, observamos que $I_1 = \begin{pmatrix} F & F & 0 \\ F & F & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix}$ são ideais de $(M_{2,1}(F), t)_0$. Além disso, $I_1I_2 = I_2I_1 = I_1 \cap I_2 = 0$ e $I_1 + I_2 = (M_{2,1}(F), t)_0$. Como $e_{11}, e_{12}+e_{21}, e_{22} \in I_1$, $e_{33} \in I_2$ e $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1 \in (M_{2,1}(F), t)_0$, vamos obter
$$\delta g(a_1, a_2, a_3, a_4, e_{11}, e_{12} + e_{21}, e_{22}, e_{33}, b_1) \in I_1 \cap I_2 = 0.$$

Concluímos que $f = f_0\,\sigma^{-1}$ é identidade para todo $\sigma \in S_n$. Portanto, $m_{\langle\lambda\rangle} = 0$.

$\square$

Agora pretendemos conhecer para quais multipartições $\langle\lambda\rangle$ a multiplicidade $m_{\langle\lambda\rangle}$ é não nula. Para atingir este objetivo, primeiro apresentaremos dois lemas que serão úteis para encontrar v.a.m. que não sejam identidades.

Nos próximos dois resultados, vamos usar a notação $\overline{y}^{(1)}$, $\overline{y}^{(2)}$, $\overline{y}^{(3)}$ para indicar algumas repetições de alternância. Por exemplo, se $h = (\overline{y}_1^{(1)}\overline{y}_1^{(2)}\overline{y}_1^{(3)})z_1(\overline{y}_2^{(1)}\overline{y}_3^{(1)})(\overline{y}_2^{(2)}\overline{y}_3^{(2)})(\overline{y}_2^{(3)}\overline{y}_3^{(3)})$ então
$$h = \sum_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3 \in S_3} \mathrm{sgn}(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)(y_{\sigma_1(1)}y_{\sigma_2(1)}y_{\sigma_3(1)})z_1(y_{\sigma_1(2)}y_{\sigma_1(3)})(y_{\sigma_2(2)}y_{\sigma_2(3)})(y_{\sigma_3(2)}y_{\sigma_3(3)}).$$

Recordemos ainda que uma avaliação de $\bar{y}_{1,0}\bar{y}_{2,0}\bar{y}_{3,0}$ por elementos da base $\{e_{11}, e_{12} + e_{21}, e_{22}, e_{33}\}$ de $(M_{2,1}(F), t)_0$ será nula ou $\pm(e_{12} - e_{21})$. Ainda, esta avaliação é não nula somente quando o elemento $e_{33}$ não estiver na substituição.

**Lema 4.6.** Seja $h_1 = h_1(y_{1,0}, \ldots, y_{4,0}, y_{1,1}) = (\overline{y}_{1,0}^{(1)} \cdots \overline{y}_{1,0}^{(p)}) y_{1,1} (\overline{y}_{2,0}^{(1)} \overline{y}_{3,0}^{(1)} \overline{y}_{4,0}^{(1)}) \cdots (\overline{y}_{2,0}^{(p)} \overline{y}_{3,0}^{(p)} \overline{y}_{4,0}^{(p)})$, onde $p \in \mathbb{N}$. Então,

$$h_1(e_{12} + e_{21}, e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{13} + e_{31}) = \begin{cases} \pm e_{31}, & \text{se } p \text{ é par },\\ \pm e_{32}, & \text{se } p \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

*Demonstração.* Observe que se $p = 1$ então $h_1 = \overline{y}_{1,0}^{(1)} y_{1,1} \overline{y}_{2,0}^{(1)} \overline{y}_{3,0}^{(1)} \overline{y}_{4,0}^{(1)}$, ou seja,

$$h_1 = y_{1,0} y_{1,1} (\overline{y}_{2,0} \overline{y}_{3,0} \overline{y}_{4,0}) - y_{2,0} y_{1,1} (\overline{y}_{1,0} \overline{y}_{3,0} \overline{y}_{4,0}) + y_{3,0} y_{1,1} (\overline{y}_{1,0} \overline{y}_{2,0} \overline{y}_{4,0}) - y_{4,0} y_{1,1} (\overline{y}_{1,0} \overline{y}_{2,0} \overline{y}_{3,0}).$$

Assim, pelo que sabemos da avaliação no polinômio standard de grau 3, a avaliação $h_1(e_{12} + e_{21}, e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{13} + e_{31})$ resulta em $e_{32}$.

Se $p \geq 2$, $h_1$ pode ser escrito como segue

$$\begin{aligned} h_1 = \quad & y_{1,0} (\overline{y}_{1,0}^{(2)} \cdots \overline{y}_{1,0}^{(p)}) y_{1,1} (\overline{y}_{2,0}^{(1)} \overline{y}_{3,0}^{(1)} \overline{y}_{4,0}^{(1)}) (\overline{y}_{2,0}^{(2)} \overline{y}_{3,0}^{(2)} \overline{y}_{4,0}^{(2)}) \cdots (\overline{y}_{2,0}^{(p)} \overline{y}_{3,0}^{(p)} \overline{y}_{4,0}^{(p)}) \\ & - y_{2,0} (\overline{y}_{1,0}^{(2)} \cdots \overline{y}_{1,0}^{(p)}) y_{1,1} (\overline{y}_{1,0}^{(1)} \overline{y}_{3,0}^{(1)} \overline{y}_{4,0}^{(1)}) (\overline{y}_{2,0}^{(2)} \overline{y}_{3,0}^{(2)} \overline{y}_{4,0}^{(2)}) \cdots (\overline{y}_{2,0}^{(p)} \overline{y}_{3,0}^{(p)} \overline{y}_{4,0}^{(p)}) \\ & + y_{3,0} (\overline{y}_{1,0}^{(2)} \cdots \overline{y}_{1,0}^{(p)}) y_{1,1} (\overline{y}_{1,0}^{(1)} \overline{y}_{2,0}^{(1)} \overline{y}_{4,0}^{(1)}) (\overline{y}_{2,0}^{(2)} \overline{y}_{3,0}^{(2)} \overline{y}_{4,0}^{(2)}) \cdots (\overline{y}_{2,0}^{(p)} \overline{y}_{3,0}^{(p)} \overline{y}_{4,0}^{(p)}) \\ & - y_{4,0} (\overline{y}_{1,0}^{(2)} \cdots \overline{y}_{1,0}^{(p)}) y_{1,1} (\overline{y}_{1,0}^{(1)} \overline{y}_{2,0}^{(1)} \overline{y}_{3,0}^{(1)}) (\overline{y}_{2,0}^{(2)} \overline{y}_{3,0}^{(2)} \overline{y}_{4,0}^{(2)}) \cdots (\overline{y}_{2,0}^{(p)} \overline{y}_{3,0}^{(p)} \overline{y}_{4,0}^{(p)}) \end{aligned}$$

e assim, pelo que sabemos da avaliação no polinômio standard de grau 3, temos que os termos acima iniciados por $y_{1,0}$, $y_{2,0}$ e $y_{3,0}$ se anulam após a avaliação por $y_{1,0} = e_{12} + e_{21}$, $y_{2,0} = e_{11}$, $y_{3,0} = e_{22}$, $y_{4,0} = e_{33}$ e $y_{1,1} = e_{13} + e_{31}$. Logo, o resultado obtido nesta avaliação em $h_1$ é o mesmo que o resultado desta avaliação em

$$g_1 = -y_{4,0} (\overline{y}_{1,0}^{(2)} \cdots \overline{y}_{1,0}^{(p)}) y_{1,1} (\overline{y}_{1,0}^{(1)} \overline{y}_{2,0}^{(1)} \overline{y}_{3,0}^{(1)}) (\overline{y}_{2,0}^{(2)} \overline{y}_{3,0}^{(2)} \overline{y}_{4,0}^{(2)}) \cdots (\overline{y}_{2,0}^{(p)} \overline{y}_{3,0}^{(p)} \overline{y}_{4,0}^{(p)}).$$

Usando o raciocínio acima para a alternância $\overline{y}_{i,0}^{(2)}$ no polinômio $g_1$, temos que o resultado da avaliação em $g_1$ será igual ao resultado da avaliação em

$$g_2 = y_{4,0}^2 (\overline{y}_{1,0}^{(3)} \cdots \overline{y}_{1,0}^{(p)}) y_{1,1} (\overline{y}_{1,0}^{(1)} \overline{y}_{2,0}^{(1)} \overline{y}_{3,0}^{(1)})^2 (\overline{y}_{2,0}^{(3)} \overline{y}_{3,0}^{(3)} \overline{y}_{4,0}^{(3)}) \cdots (\overline{y}_{2,0}^{(p)} \overline{y}_{3,0}^{(p)} \overline{y}_{4,0}^{(p)}).$$

Este processo pode ser repetido e desta maneira, obtemos que o resultado da avaliação requerida em $h_1$ é o resultado desta avaliação em

$$g_p = (-1)^p y_{4,0}^p y_{1,1} (\overline{y}_{1,0}^{(1)} \overline{y}_{2,0}^{(1)} \overline{y}_{3,0}^{(1)})^p$$

ou seja,

$$h_1(e_{12} + e_{21}, e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{13} + e_{31}) = (-1)^p e_{31} (e_{12} - e_{21})^p = \begin{cases} \pm e_{31} & \text{se } p \text{ é par},\\ \pm e_{32} & \text{se } p \text{ é ímpar,} \end{cases}$$

o que completa a demonstração.

□

**Lema 4.7.** Seja $h_2(y_{1,0},\ldots,y_{4,0},y_{1,1},y_{2,1}) = \tilde{y}_{1,1}(\overline{y}_{1,0}^{(1)}\cdots\overline{y}_{1,0}^{(p)})\tilde{y}_{2,1}(\overline{y}_{2,0}^{(1)}\overline{y}_{3,0}^{(1)}\overline{y}_{4,0}^{(1)})\cdots(\overline{y}_{2,0}^{(p)}\overline{y}_{3,0}^{(p)}\overline{y}_{4,0}^{(p)})$, onde $p\in\mathbb{N}$. Então,

$$h_2(e_{12}+e_{21},e_{11},e_{22},e_{33},e_{13}+e_{31},e_{23}+e_{32}) = \begin{cases} \pm(e_{12}-e_{21}), & \text{se } p \text{ é par },\\ \pm(e_{11}+e_{22}), & \text{se } p \text{ é ímpar.}\end{cases}$$

*Demonstração.* A demonstração é análoga à prova do Lema 4.6. □

O seguinte lema afirma que os valores das multiplicidades associadas às multipartições $(\lambda(1),\lambda(2),\lambda(3),\lambda(4))$ e $(\lambda(1),\lambda(4),\lambda(3),\lambda(2))$ coincidem. Este resultado é realmente interessante já que diminuirá o calculo de multiplicidades na decomposição do cocaracter $\chi_n^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t)$ e é basicamente uma consequência do Corolário 3.13.

**Lema 4.8.** Sejam $\langle\lambda\rangle = (\lambda(1),\lambda(2),\lambda(3),\lambda(4))$ e $\langle\tilde{\lambda}\rangle = (\lambda(1),\lambda(4),\lambda(3),\lambda(2))$ duas multipartições como em (4.1.1), então $m_{\langle\lambda\rangle} = m_{\langle\tilde{\lambda}\rangle}$.

*Demonstração.* Seja $E(\langle\lambda\rangle)$ o subespaço vetorial de $F_{4,2,1,2}$ gerado por todos os vetores de altura máxima associados às multitabelas de Young do tipo $\langle\lambda\rangle$, e seja $\bar{E}(\langle\lambda\rangle)$ o espaço quociente $\dfrac{E(\langle\lambda\rangle)}{E(\langle\lambda\rangle)\cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t)}$. Analogamente definimos os espaços $E(\langle\tilde{\lambda}\rangle)$ e $\bar{E}(\langle\tilde{\lambda}\rangle)$. Considerando o homomorfismo $\tilde{\varphi}: F_{4,2,1,2}\to F_{4,2,1,2}$ como definido em (3.2.1), podemos verificar que:

1. $\tilde{\varphi}[E(\langle\lambda\rangle)] = E(\langle\tilde{\lambda}\rangle)$;

2. $\tilde{\varphi}[E(\langle\lambda\rangle)\cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t)] = E(\langle\tilde{\lambda}\rangle)\cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t)$ (pelo Corolário 3.13);

3. $m_{\langle\lambda\rangle} = \dim \bar{E}(\langle\lambda\rangle)$ e $m_{\langle\tilde{\lambda}\rangle} = \dim \bar{E}(\langle\tilde{\lambda}\rangle)$ (pela Observação 3.5).
   Note que $\bar{E}(\langle\lambda\rangle)$ está imerso em $F_m^n(M_{2,1}(F),t)$, onde $\langle\lambda\rangle\vdash n$ e $m = h(\langle\lambda\rangle)$.

Assim $\tilde{\varphi}$ induz um isomorfismo de espaços vetoriais entre $\bar{E}(\langle\lambda\rangle)$ e $\bar{E}(\langle\tilde{\lambda}\rangle)$, e portanto $m_{\langle\lambda\rangle} = m_{\langle\tilde{\lambda}\rangle}$. □

**Proposição 4.9.** Consideramos a decomposição em (4.1.1) com $\langle\lambda\rangle = (\lambda(1),\lambda(2),\lambda(3),\lambda(4))$ e $h(\lambda(1)) = 4$. Se $\lambda(2)\neq\emptyset$ ou $\lambda(4)\neq\emptyset$ então $m_{\langle\lambda\rangle}\neq 0$.

*Demonstração.* Por hipótese, temos $h(\lambda(1)) = 4$ e assim, consideremos $\lambda(1) = (r,s,q,p)$, com $r\geq s\geq q\geq p\geq 1$. Consideremos ainda, $\alpha_1 = q-p\geq 0$, $\alpha_2 = s-q\geq 0$ e $\alpha_3 = r-s\geq 0$.

Primeiramente, suponhamos que $\lambda(2)\neq\emptyset$. Neste caso, como $h(\lambda(2))\in\{1,2\}$, vamos analisar as possíveis situações.

**Caso 1:** Suponhamos $\lambda(2) = (\alpha_4)$ onde $\alpha_4\geq 1$. Seja

$$f_0 = (\overline{y}_{1,0}\overline{y}_{2,0}\overline{y}_{3,0}\overline{y}_{4,0})^p(\overline{\overline{y}}_{1,0}\overline{\overline{y}}_{2,0}\overline{\overline{y}}_{3,0})^{\alpha_1}[y_{1,0},y_{2,0}]^{\alpha_2}y_{1,0}^{\alpha_3}y_{1,1}^{\alpha_4}z_{1,0}^{\alpha_5}[z_{1,1},z_{2,1}]^{\alpha_6}z_{1,1}^{\alpha_7}$$

o v.a.m. padrão associado a $\langle\lambda\rangle$ com $\alpha_5, \alpha_6, \alpha_7 \geq 0$. Podemos encontrar uma permutação $\sigma_1 \in S_n$ tal que

$$f := f_0\sigma_1^{-1} = y_{1,1}^{\alpha_4-1} z_{1,1}^{\alpha_7} h_1(\overline{\overline{y}}_{1,0}\overline{\overline{y}}_{2,0}\overline{\overline{y}}_{3,0})^{\alpha_1}[y_{1,0}, y_{2,0}]^{\alpha_2} z_{1,0}^{\alpha_5}[z_{1,1}, z_{2,1}]^{\alpha_6} y_{1,0}^{\alpha_3},$$

onde $h_1 = h_1(y_{1,0}, \ldots, y_{4,0}, y_{1,1})$ é o polinômio do enunciado do Lema 4.6.

Para verificar que $f$ não é identidade de $(M_{2,1}(F), t)$, substituímos $y_{1,0} = e_{12} + e_{21}$, $y_{2,0} = e_{11}$, $y_{3,0} = e_{22}$, $y_{4,0} = e_{33}$, $y_{1,1} = e_{13} + e_{31}$, $z_{1,0} = e_{12} - e_{21}$, $z_{1,1} = e_{13} - e_{31}$, $z_{2,1} = e_{23} - e_{32}$ e usamos o Lema 4.6. Desta forma, o resultado desta substituição em $h_1$ é $\gamma_1 \in \{\pm e_{31}, \pm e_{32}\}$ e assim, o resultado da avaliação em $f$ é

$$\pm(e_{13} + e_{31})^{\alpha_4-1}(e_{13} - e_{31})^{\alpha_7}\gamma_1(e_{12} - e_{21})^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_5+\alpha_6}(e_{12} + e_{21})^{\alpha_3} \neq 0.$$

Por conseguinte $m_{\langle\lambda\rangle} \neq 0$.

**Caso 2:** Suponhamos $\lambda(2) = (\alpha_4 + \alpha_5, \alpha_4)$ onde $\alpha_4 \geq 1$ e $\alpha_5 \geq 0$. Seja

$$g_0 = (\overline{y}_{1,0}\overline{y}_{2,0}\overline{y}_{3,0}\overline{y}_{4,0})^p(\overline{\overline{y}}_{1,0}\overline{\overline{y}}_{2,0}\overline{\overline{y}}_{3,0})^{\alpha_1}[y_{1,0}, y_{2,0}]^{\alpha_2} y_{1,0}^{\alpha_3}[y_{1,1}, y_{2,1}]^{\alpha_4} y_{1,1}^{\alpha_5} z_{1,0}^{\alpha_6}[z_{1,1}, z_{2,1}]^{\alpha_7} z_{1,1}^{\alpha_8}$$

o v.a.m. padrão associado a $\langle\lambda\rangle$ com $\alpha_6, \alpha_7, \alpha_8 \geq 0$.

Existe uma permutação $\sigma_2 \in S_n$ tal que

$$g := g_0\sigma_2^{-1} = y_{1,1}^{\alpha_5} z_{1,1}^{\alpha_8} h_2(\overline{\overline{y}}_{1,0}\overline{\overline{y}}_{2,0}\overline{\overline{y}}_{3,0})^{\alpha_1}[y_{1,0}, y_{2,0}]^{\alpha_2}[y_{1,1}, y_{2,1}]^{\alpha_4-1} z_{1,0}^{\alpha_6}[z_{1,1}, z_{2,1}]^{\alpha_7} y_{1,0}^{\alpha_3}$$

onde $h_2 = h_2(y_{1,0}, \ldots, y_{4,0}, y_{1,1}, y_{2,1})$ é o polinômio do enunciado do Lema 4.7.

Verifiquemos que $g$ não é identidade de $(M_{2,1}(F), t)$, substituindo por $y_{1,0} = e_{12} + e_{21}$, $y_{2,0} = e_{11}$, $y_{3,0} = e_{22}$ , $y_{4,0} = e_{33}$, $y_{1,1} = e_{13} + e_{31}$, $y_{2,1} = e_{23} + e_{32}$ $z_{1,0} = e_{12} - e_{21}$, $z_{1,1} = e_{13} - e_{31}$, $z_{2,1} = e_{23} - e_{32}$. De fato, usando o Lema 4.7, temos que a avaliação destes elementos em $h_2$ resultará em $\gamma_2 \in \{\pm(e_{12} - e_{21}), \pm(e_{11} + e_{22})\}$ e, portanto, o resultado da avaliação em $g$ é

$$\pm(e_{13} + e_{31})^{\alpha_5}(e_{13} - e_{31})^{\alpha_8}\gamma_2(e_{12} - e_{21})^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4-1+\alpha_6+\alpha_7}(e_{12} + e_{21})^{\alpha_3} \neq 0.$$

Por conseguinte $m_{\langle\lambda\rangle} \neq 0$.

No caso em que $\lambda(2) = \emptyset$ e $\lambda(4) \neq \emptyset$, pelo Lema 4.8 e os pelos resultados obtidos nos Casos 1 e 2, concluímos que $m_{\langle\lambda\rangle} = m_{(\lambda(1),\lambda(4),\lambda(3),\emptyset)} \neq 0$. □

Agora temos as ferramentas suficientes para caracterizar as multiplicidades não nulas da decomposição (4.1.1).

**Teorema 4.10.** Considerando $\langle\lambda\rangle = (\lambda(1), \lambda(2), \lambda(3), \lambda(4))$ na decomposição em (4.1.1), temos que $m_{\langle\lambda\rangle} = 0$ se, e somente se, $\langle\lambda\rangle = (\lambda(1), \emptyset, \lambda(3), \emptyset)$ com $h(\lambda(1)) = 4$.

*Demonstração.* Assumimos que $m_{\langle\lambda\rangle} = 0$, pelo Corolário 4.2 e pela Proposição 4.9, segue que $h(\lambda(1)) = 4$, $\lambda(2) = \emptyset$ e $\lambda(4) = \emptyset$. A recíproca é consequência imediata da Proposição 4.5. □

Com isso, concluímos que $m_{\langle\lambda\rangle} \neq 0$ se, e somente se, $h(\lambda(1)) \leq 3$ ou $\lambda(2) \neq \emptyset$ ou $\lambda(4) \neq \emptyset$.

## 4.2 Multiplicidades do $n$-cocaracter $\chi_n^{\text{gri}}(M_{2,1}(F), t)$

Em [7], Drensky e Giambruno estudaram a decomposição do $*$-cocaracter de $M_2(F)$ munida da involução transposta, conforme enunciamos no Teorema 2.11. Usando a Observação 3.7, traduzimos este resultado aqui, obtendo a multiplicidade de multipartições do tipo $\langle\lambda\rangle = (\lambda(1), \emptyset, \lambda(3), \emptyset)$ em $\chi_n^{\text{gri}}(M_{2,1}(F), t)$.

**Proposição 4.11.** Se $\langle\lambda\rangle = (\lambda(1), \emptyset, \lambda(3), \emptyset)$ e $h(\lambda(1)) \leq 3$ então

$$m_{\langle\lambda\rangle} = \begin{cases} 1 & \text{se } h(\lambda(1)) + h(\lambda(3)) = 1; \\ \lambda(1)_1 + 1 & \text{se } h(\lambda(1)) = 1 \text{ e } \lambda(3) \neq \emptyset; \\ (\lambda(1)_1 - \lambda(1)_2 + 1)\lambda(1)_2 & \text{se } h(\lambda(1)) = 2 \text{ e } \lambda(3) = \emptyset; \\ (\lambda(1)_1 - \lambda(1)_2 + 1)(\lambda(1)_2 + 1) & \text{se } h(\lambda(1)) = 2 \text{ e } \lambda(3) \neq \emptyset; \\ (\lambda(1)_1 - \lambda(1)_2 + 1)(\lambda(1)_2 - \lambda(1)_3 + 1) & \text{se } h(\lambda(1)) = 3. \end{cases}$$

É claro que se acontece $h(\lambda(1)) = h(\lambda(2)) = h(\lambda(3)) = h(\lambda(4)) = 1$, então

$$m_{(\lambda(1),\emptyset,\emptyset,\emptyset)} = m_{(\emptyset,\lambda(2),\emptyset,\emptyset)} = m_{(\emptyset,\emptyset,\lambda(3),\emptyset)} = m_{(\emptyset,\emptyset,\emptyset,\lambda(4))} = 1.$$

Agora vamos começar a estudar outras situações e calcular as multiplicidades.

**Proposição 4.12.** Se $n \geq 2$, então

$$m_{(\emptyset,(n-1,1),\emptyset,\emptyset)} = m_{(\emptyset,\emptyset,\emptyset,(n-1,1))} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 2; \\ 2 & \text{se } n \geq 3. \end{cases}$$

*Demonstração.* É fácil ver que $m_{(\emptyset,(1,1),\emptyset,\emptyset)} = m_{(\emptyset,\emptyset,\emptyset,(1,1))} = 1$. Suponha que $n \geq 3$. Pela Proposição 3.6, só precisamos trabalhar com os vetores de altura máxima associados às multitabelas de Young standard do tipo $(\emptyset, (n-1, 1), \emptyset, \emptyset)$. Explicitamente, essas multitabelas são

$$T_i = \left( \emptyset, \quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & \cdots & i-1 & i+1 & \cdots & n \\ \hline i \\ \cline{1-1} \end{array}, \quad \emptyset, \quad \emptyset \right) \quad \text{para } 2 \leq i \leq n,$$

que induzem $n-1$ v.a.m.:

$$f_i(y_{1,1}, y_{2,1}) = \overline{y}_{1,1} y_{1,1}^i \overline{y}_{2,1} y_{1,1}^{n-2-i}, \quad 0 \leq i \leq n-2.$$

Notemos que:

- $f_i - f_{i-1} = y_{1,1}^i \overline{y}_{1,1} \overline{y}_{2,1} y_{1,1}^{n-2-i} \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$ com $1 \leq i \leq n-3$, pois são consequências da $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidade $y_{1,1} z_{1,0} y_{1,1}$;
- $f_n - f_{n-3} = y_{1,1}^{n-2} \overline{y}_{1,1} \overline{y}_{2,1} \notin \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$, basta avaliar $y_{1,1} = e_{13} + e_{31}$ e $y_{2,1} = e_{23} + e_{32}$.

Assim, $f_0 \equiv f_1 \equiv f_2 \equiv \cdots \equiv f_{n-3} \mod \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$. Para concluir, mostremos que $\{f_0, f_{n-2}\}$ é linearmente indenpendente mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$. Sejam $\beta_1, \beta_2 \in F$ tais que $\beta_1 f_0 + \beta_2 f_n \equiv 0 \mod \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$; é suficiente avaliar $y_{1,1} = e_{13} + e_{31}$ e $y_{2,1} = e_{23} + e_{32}$ para obtermos

$$0 = (\beta_1 f_0 + \beta_2 f_{n-2})(e_{13} + e_{31}, e_{23} + e_{32}) = \begin{cases} -\beta_1 e_{21} + \beta_2(e_{32} - e_{23}) & \text{se } n \text{ é par;} \\ -\beta_1 e_{23} + \beta_2(e_{12} - e_{21}) & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Com isso $\beta_1 = \beta_2 = 0$ para qualquer $n \geq 3$. Usando a Observação 3.5, concluímos que $m_{(\emptyset,(n-1,1),\emptyset,\emptyset)} = 2$. A demonstração de $m_{(\emptyset,\emptyset,\emptyset,(n-1,1))} = 2$, para $n \geq 3$, segue do Lema 4.8. $\square$

### 4.2.1 Multiplicidades $m_{(\emptyset,(m),(n),\emptyset)}$ e $m_{(\emptyset,\emptyset,(n),(m))}$

Iniciamos calculando as multiplicidades $m_{(\emptyset,(1),(1),\emptyset)}$, $m_{(\emptyset,(2),(1),\emptyset)}$ e $m_{(\emptyset,(2),(2),\emptyset)}$.

- para $(\emptyset, (1), (1), \emptyset)$, temos dois v.a.m. $f_1 = y_{1,1} z_{1,0}$ e $f_2 = z_{1,0} y_{1,1}$. Assim $\{f_1, f_2\}$ é l.i. mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$ e portanto $m_{(\emptyset,(1),(1),\emptyset)} = 2$.
- para $(\emptyset, (2), (1), \emptyset)$, temos 3 v.a.m. $f_1 = y_{1,1}^2 z_{1,0}, f_2 = y_{1,1} z_{1,0} y_{1,1}$ e $f_3 = z_{1,0} y_{1,1}^2$. Notemos que $f_2$ é identidade e $\{f_1, f_3\}$ é l.i. mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$, então $m_{(\emptyset,(2),(1),\emptyset)} = 2$. Analogamente podemos provar que $m_{(\emptyset,(1),(2),\emptyset)} = 2$.
- para $(\emptyset, (2), (2), \emptyset)$, temos 6 v.a.m. $f_1 = y_{1,1}^2 z_{1,0}^2$, $f_2 = y_{1,1} z_{1,0} y_{1,1} z_{1,0}$, $f_3 = z_{1,0} y_{1,1}^2 z_{1,0}$, $f_4 = y_{1,1} z_{1,0}^2 y_{1,1}$, $f_5 = z_{1,0} y_{1,1} z_{1,0} y_{1,1}$ e $f_6 = z_{1,0}^2 y_{1,1}^2$. Notemos que $f_2, f_5$ são identidades, $f_1 \equiv f_6$ e $\{f_1, f_3, f_4\}$ é l.i. mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$, então $m_{(\emptyset,(2),(2),\emptyset)} = 3$.

Como acabamos de ver, a maioria dos v.a.m. das multipartições antes mencionadas são identidades. Além disso, no caso $(\emptyset, (2), (2), \emptyset)$ vimos que $f_1 \equiv f_6$. Isto nos leva a enunciar algumas identidades necessárias:

- $y_{1,1}z_{1,0}^iy_{1,1}$ e $z_{1,0}y_{1,1}^iz_{1,0}$ com $i$ ímpar, que são consequências de $y_{1,1}z_{1,0}y_{1,1}$ e $z_{1,0}y_{1,1}z_{1,0}$, respectivamente.

- $[y_{1,1}^i, z_{1,0}^j]$ com $i$ e $j$ pares, que é consequência de $[y_{1,0}, z_{1,0}z_{2,0}]$. O que implica $y_{1,1}^iz_{1,0}^j \equiv z_{1,0}^jy_{1,1}^i \mod \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$ com $i$ e $j$ pares.

A seguir veremos como as identidades dadas acima agem sobre os v.a.m. associados à multipartição $(\emptyset, (m), (n), \emptyset)$. Assim temos quatro casos a considerar:

1. $y_{1,1}^{i_1}z_{1,0}^{j_1}y_{1,1}^{i_2}z_{1,0}^{j_2}\cdots z_{1,0}^{j_{r-1}}y_{1,1}^{i_r}$,
2. $y_{1,1}^{i_1}z_{1,0}^{j_1}y_{1,1}^{i_2}z_{1,0}^{j_2}\cdots y_{1,1}^{i_r}z_{1,0}^{j_r}$,
3. $z_{1,0}^{i_1}y_{1,1}^{j_1}z_{1,0}^{i_2}y_{1,1}^{j_2}\cdots y_{1,1}^{j_{r-1}}z_{1,0}^{i_r}$,
4. $z_{1,0}^{i_1}y_{1,1}^{j_1}z_{1,0}^{i_2}y_{1,1}^{j_2}\cdots z_{1,0}^{i_r}y_{1,1}^{j_r}$;

onde $i_1, i_2, \ldots, i_r, j_1, j_2, \ldots, j_{r-1}, j_r \geq 1$.

**Caso 1** Se $f = y_{1,1}^{i_1}z_{1,0}^{j_1}y_{1,1}^{i_2}z_{1,0}^{j_2}\cdots y_{1,1}^{i_{r-1}}z_{1,0}^{j_{r-1}}y_{1,1}^{i_r}$, então usando as identidades dadas acima, afirmamos que:

$$\begin{cases} f \equiv 0 & \text{se algum elemento de } \{j_1, \ldots, j_{r-1}, i_2, \ldots, i_{r-1}\} \text{ é ímpar;} \\ f \equiv y_{1,1}^{m-i_r}z_{1,0}^ny_{1,1}^{i_r} & \text{se todo elemento de } \{j_1, \ldots, j_{r-1}, i_2, \ldots, i_{r-1}\} \text{ é par.} \end{cases}$$

Analogamente para o caso 2, 3 e 4 obtemos

**Caso 2** Se $f = y_{1,1}^{i_1}z_{1,0}^{j_1}y_{1,1}^{i_2}z_{1,0}^{j_2}\cdots y_{1,1}^{i_r}z_{1,0}^{j_r}$, então

$$\begin{cases} f \equiv 0 & \text{se algum elemento de } \{j_1, \ldots, j_{r-1}, i_2, \ldots, i_r\} \text{ é ímpar;} \\ f \equiv y_{1,1}^mz_{1,0}^n & \text{se todo elemento de } \{j_1, \ldots, j_{r-1}, i_2, \ldots, i_r\} \text{ é par.} \end{cases}$$

**Caso 3** Se $f = z_{1,0}^{i_1}y_{1,1}^{j_1}z_{1,0}^{i_2}y_{1,1}^{j_2}\cdots z_{1,0}^{i_{r-1}}y_{1,1}^{j_{r-1}}z_{1,0}^{i_r}$, então

$$\begin{cases} f \equiv 0 & \text{se algum elemento de } \{j_1, \ldots, j_{r-1}, i_2, \ldots, i_{r-1}\} \text{ é ímpar;} \\ f \equiv z_{1,0}^{n-i_r}y_{1,1}^mz_{1,0}^{i_r} & \text{se todo elemento de } \{j_1, \ldots, j_{r-1}, i_2, \ldots, i_{r-1}\} \text{ é par.} \end{cases}$$

**Caso 4** Se $f = z_{1,0}^{i_1}y_{1,1}^{j_1}z_{1,0}^{i_2}y_{1,1}^{j_2}\cdots z_{1,0}^{i_r}y_{1,1}^{j_r}$, então

$$\begin{cases} f \equiv 0 & \text{se algum elemento de } \{j_1, \ldots, j_{r-1}, i_2, \ldots, i_r\} \text{ é ímpar;} \\ f \equiv z_{1,0}^ny_{1,1}^m & \text{se todo elemento de } \{j_1, \ldots, j_{r-1}, i_2, \ldots, i_r\} \text{ é par.} \end{cases}$$

Temos a seguinte consequência imediata.

**Lema 4.13.** Seja $f$ um v.a.m. associado à multipartição $(\emptyset, (m), (n), \emptyset)$. Então ou $f \equiv 0$ ou $f \equiv y_{1,1}^{m-i}z_{1,0}^ny_{1,1}^i$, para algum $0 \leq i \leq m$, ou $f \equiv z_{1,0}^{n-j}y_{1,1}^mz_{1,0}^j$, para algum $0 \leq j \leq n$.

**Corolário 4.14.** Sejam $m$ e $n$ números pares e $f$ um v.a.m. associado à multipartição $(\emptyset, (m), (n), \emptyset)$. Então ou $f \equiv 0$ ou $f \equiv y_{1,1}^mz_{1,0}^n$ ou $f \equiv z_{1,0}^{n-1}y_{1,1}^mz_{1,0}$ ou $f \equiv y_{1,1}^{m-1}z_{1,0}^ny_{1,1}$. Além disso $\{y_{1,1}^mz_{1,0}^n,\ z_{1,0}^{n-1}y_{1,1}^mz_{1,0},\ y_{1,1}^{m-1}z_{1,0}^ny_{1,1}\}$ é l.i. mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$.

*Demonstração.* A primeira parte decorre diretamente do Lema 4.13. Para provar a segunda parte consideremos $\alpha_1 y_{1,1}^m z_{1,0}^n + \alpha_2 z_{1,0}^{n-1} y_{1,1}^m z_{1,0} + \alpha_3 y_{1,1}^{m-1} z_{1,0}^n y_{1,1} \equiv 0$ com $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in F$ e verifiquemos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Avaliamos $\alpha_1 y_{1,1}^m z_{1,0}^n + \alpha_2 z_{1,0}^{n-1} y_{1,1}^m z_{1,0} + \alpha_3 y_{1,1}^{m-1} z_{1,0}^n y_{1,1}$ em $y_{1,1} = e_{13} + e_{31}$ e $z_{1,0} = e_{12} - e_{21}$, obtemos $(-1)^{(n/2)}(\alpha_1 e_{11} + \alpha_2 e_{22} + \alpha_3 e_{33}) = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

□

**Corolário 4.15.** Se $m$ é ímpar ou $n$ é ímpar e $f$ é um v.a.m. associado à multipartição $(\emptyset, (m), (n), \emptyset)$, então ou $f \equiv 0$ ou $f \equiv y_{1,1}^m z_{1,0}^n$ $f \equiv z_{1,0}^n y_{1,1}^m$. Além disso $\{y_{1,1}^m z_{1,0}^n, z_{1,0}^n y_{1,1}^m\}$ é l.i. mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$.

*Demonstração.* A primeira parte decorre diretamente do Lema 4.13. Para provar a segunda parte procedemos de maneira similar à demonstração do Corolário 4.14. Dada a combinação linear $\alpha_1 y_{1,1}^m z_{1,0}^n + \alpha_2 z_{1,0}^n y_{1,1}^m \equiv 0$, com $\alpha_1, \alpha_2 \in F$, e avaliando $\alpha_1 y_{1,1}^m z_{1,0}^n + \alpha_2 z_{1,0}^n y_{1,1}^m$ em $y_{1,1} = e_{13} + e_{31}$ e $z_{1,0} = e_{12} - e_{21}$, obtemos três casos:

$$\begin{array}{ll} (-1)^{((n-1)/2)}(\alpha_1 e_{32} - \alpha_2 e_{23}) = 0 & \text{se } m \text{ e } n \text{ são ímpares,} \\ (-1)^{(n/2)}(\alpha_1 e_{31} + \alpha_2 e_{13}) = 0 & \text{se } m \text{ é ímpar e } n \text{ é par,} \\ (-1)^{((n-1)/2)}(\alpha_1 e_{12} - \alpha_2 e_{21}) = 0 & \text{se } m \text{ é par e } n \text{ é ímpar.} \end{array}$$

Em todos os casos temos que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Portanto $\{y_{1,1}^m z_{1,0}^n, z_{1,0}^n y_{1,1}^m\}$ é l.i. mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$. □

Agora, enunciamos o resultado principal.

**Proposição 4.16.** Sejam $m$ e $n$ números naturais. Então

$$m_{(\emptyset,(m),(n),\emptyset)} = m_{(\emptyset,\emptyset,(n),(m))} = \begin{cases} 3, & \text{se } m \text{ e } n \text{ são pares} \\ 2, & \text{se } m \text{ é ímpar ou } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

*Demonstração.* Se $m$ e $n$ são pares, pelo Corolário 4.14 concluímos que 3 é o número máximo de v.a.m. linearmente independentes mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$, assim $m_{(\emptyset,(m),(n),\emptyset)} = 3$. Se $m$ é ímpar ou $n$ é ímpar, pelo Corolário 4.15, do mesmo modo como o caso anterior, 2 é o número máximo de v.a.m. linearmente independentes mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$, assim $m_{(\emptyset,(m),(n),\emptyset)} = 2$. Finalmente, pelo Lema 4.8 obtemos os valores de $m_{(\emptyset,\emptyset,(n),(m))}$. □

### 4.2.2 Multiplicidades $m_{(\emptyset,(n),\emptyset,(1))}$ e $m_{(\emptyset,(n),\emptyset,(2))}$

**Proposição 4.17.** Se $n \in \mathbb{N}$, então

$$m_{(\emptyset,(n),\emptyset,(1))} = m_{(\emptyset,(1),\emptyset,(n))} = \begin{cases} 2 & \text{se } n = 1; \\ 3 & \text{se } n \geq 2. \end{cases}$$

*Demonstração.* É fácil ver que $m_{(\emptyset,(1),\emptyset,(1))} = 2$ e $m_{(\emptyset,(2),\emptyset,(1))} = 3$. Suponha que $n \geq 3$. Os vetores de altura máxima associados às multitabelas de Young standard do tipo $(\emptyset,(n),\emptyset,(1))$ são da forma $f_i = y_{1,1}^{n-i+1} z_{1,1} y_{1,1}^{i-1}$, para $1 \leq i \leq n+1$.
Notemos que:

- $f_i + f_{i+1} = y_{1,1}^{n-i}(y_{1,1} \circ z_{1,1}) y_{1,1}^{i-1} \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t)$ com $2 \leq i \leq n-1$, pois são consequências da $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidade $y_{1,1}z_{1,0}y_{1,1}$;

- $f_2 \equiv -f_3 \equiv f_4 \equiv -f_5 \equiv \cdots \equiv (-1)^n f_n \mod \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t)$;

- $\{f_1, f_2, f_{n+1}\}$ é linearmente independente mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t)$.

  Sejam $\beta_1,\beta_2,\beta_3 \in F$ tais que $\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \beta_3 f_{n+1} \equiv 0 \mod \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t)$; é suficiente avaliar $y_{1,1} = e_{23} + e_{32}$ e $z_{1,1} = e_{13} - e_{31}$ para obtermos

  $$0 = (\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \beta_3 f_{n+1})(e_{13}+e_{31}, e_{23}-e_{32}) = \begin{cases} -\beta_1 e_{32} + \beta_3 e_{23} & \text{se } n \text{ é par;} \\ -\beta_1 e_{12} + \beta_3 e_{21} & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

  Por conseguinte $\beta_1 = \beta_3 = 0$. Como $f_2$ não é identidade, pois $f_2(e_{13}+e_{31}, e_{13}-e_{31})$ é não nula, obtemos que $\beta_2 = 0$.

Portanto $m_{(\emptyset,(n),\emptyset,(1))} = 3$ e pelo Lema 4.8 $m_{(\emptyset,(1),\emptyset,(n))} = 3$. □

Usando o Lema 4.8 obteremos o valor de $m_{(\emptyset,(2),\emptyset,(n))}$ calculando somente o valor de $m_{(\emptyset,(n),\emptyset,(2))}$. Deste modo, nos focaremos na multipartição $(\emptyset,(n),\emptyset,(2))$.

Inicialmente, observe que todos os v.a.m. associados a multitabelas do tipo $(\emptyset,(n),\emptyset,(2))$ podem ser escritos na forma

$$f_{i,j} = y_{1,1}\cdots \underbrace{z_{1,1}}_{i} \cdots \underbrace{z_{1,1}}_{j} \cdots y_{1,1} = y_{1,1}^{i-1} z_{1,1}\, y_{1,1}^{j-i-1} z_{1,1} y_{1,1}^{n+2-j} \text{ com } 1 \leq i < j \leq n+2.$$

Observe que $f_{i,j}$ não é identidade, pois $f_{i,j}(e_{13}+e_{31}, e_{13}-e_{31}) \neq 0$.

Começamos calculando as multiplicidades $m_{(\emptyset,(1),\emptyset,(2))}$ e $m_{(\emptyset,(2),\emptyset,(2))}$.

**Proposição 4.18.** $m_{(\emptyset,(1),\emptyset,(2))} = m_{(\emptyset,(2),\emptyset,(1))} = 3$ e $m_{(\emptyset,(2),\emptyset,(2))} = 5$.

*Demonstração.* O conjunto $\{f_{1,2}, f_{1,3}, f_{2,3}\}$ de v.a.m. associados a multitabelas do tipo $(\emptyset,(1),\emptyset,(2))$ é linearmente independente mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t)$. Com efeito, se $\alpha_1 f_{1,2} + \alpha_2 f_{1,3} + \alpha_3 f_{2,3} \equiv 0$ com $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in F$, basta substituir $y_{1,1} = e_{13}+e_{31}$ e $z_{1,1} = e_{23} - e_{32}$ em $\alpha_1 f_{1,2} + \alpha_2 f_{1,3} + \alpha_3 f_{2,3} \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t)$ então $-\alpha_1 e_{31} - \alpha_3 e_{13} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_3 = 0$ e como $f_{1,3}$ não é identidade temos que $\alpha_2 = 0$. Assim $m_{(\emptyset,(1),\emptyset,(2))} = 3$. Por outro lado, os v.a.m. $f_{1,2}, f_{1,3}, f_{1,4}, f_{2,3}, f_{2,4}, f_{3,4}$ associados a $(\emptyset,(2),\emptyset,(2))$ não formam um conjunto l.i. mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t)$, dado que $f_{1,2} \equiv f_{2,4} + f_{3,4} - f_{1,3}$, pois $f_{1,2} - f_{2,4} - f_{3,4} + f_{1,3}$ é consequência da identidade 8) do Teorema 3.15. Como $\{f_{1,3}, f_{1,4}, f_{2,3}, f_{2,4}, f_{3,4}\}$ é l.i. mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t)$, concluímos que $m_{(\emptyset,(2),\emptyset,(2))} = 5$. □

A partir de agora consideraremos $n \geq 3$ e enunciaremos quatro lemas que nos permitirão determinar o valor de $m_{(\emptyset,(n),\emptyset,(2))}$.

**Lema 4.19.**

1. Se $a \in (M_{2,1}(F), t)_1^+$ então existe $\delta = \delta(a) \in F$ tal que $a^3 = \delta a$. Consequentemente, $a^{k+2} = \delta a^k$, para todo $k \geq 1$. Além do mais, $a^{k+2} = \delta^{(k+1)/2} a$ se $k$ é ímpar.

2. Seja $h(y_{1,1}, z_{1,1}) = z_{1,1}(z_{1,1} \circ y_{1,1}^n) - y_{1,1}^{n-1} z_{1,1}(z_{1,1} \circ y_{1,1})$ com $n$ ímpar, então $h$ é uma $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidade.

*Demonstração.*

1. Seja $a = \alpha(e_{13} + e_{31}) + \beta(e_{23} + e_{32})$ para alguns $\alpha, \beta \in F$ então é simples ver que $a^3 = \delta a$, onde $\delta = \alpha^2 + \beta^2$.

2. Para demonstrar que $h$ é uma identidade, substituiremos $y_{1,1}$ por um elemento $a$ de $(M_{2,1}(F), t)_1^+$ e $z_{1,1}$ por um elemento $b$ de $(M_{2,1}(F), t)_1^-$. Neste caso, existem $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \in F$ tais que

$$a = \alpha_1(e_{13} + e_{31}) + \beta_1(e_{23} + e_{32}) \text{ e } b = \alpha_2(e_{13} - e_{31}) + \beta_2(e_{23} - e_{32}).$$

Note que, $a^3 = \delta_1 a$ com $\delta_1 = \alpha_1^2 + \beta_1^2$ e $a \circ b = \delta_2(e_{12} - e_{21})$ com $\delta_2 = -\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2$. Inicialmente provaremos que $h \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$ quando $n = 3$.

$$\begin{aligned}
h(a,b) &= b(b \circ a^3) - a^2 b(b \circ a) = b(b \circ (\delta_1 a)) - a^2 b(b \circ a) \\
&= \delta_1 b(b \circ a) - a^2 b(b \circ a) = (\delta_1 b - a^2 b)(b \circ a) \\
&= (\delta_1 1_3 - a^2) b(b \circ a) \qquad \text{onde } 1_3 = e_{11} + e_{22} + e_{33} \\
&= (\delta_1 1_3 - a^2) b(\delta_2(e_{12} - e_{21})) = \delta_2 [\underbrace{\delta_1 1_3 - a^2}] [\underbrace{b(e_{12} - e_{21})}] \\
&= \delta_2 [\beta_1^2 e_{11} + \alpha_1^2 e_{22} - \alpha_1\beta_1(e_{12} + e_{21})][\beta_2 e_{31} - \alpha_2 e_{32}] = 0.
\end{aligned}$$

Prosseguimos com o caso $n > 3$, lembrar que $h = z_{1,1}(z_{1,1} \circ y_{1,1}^n) - y_{1,1}^{n-1} z_{1,1}(z_{1,1} \circ y_{1,1})$.

$$\begin{aligned}
h(a,b) &= b(b \circ a^n) - a^{n-1} b(b \circ a) \\
&= b(b \circ \delta_1^{(n-1)/2} a) - \delta_1^{(n-3)/2} a^2 b(b \circ a) \\
&= \delta_1^{(n-3)/2} [b(b \circ \delta_1 a) - a^2 b(b \circ a)] \\
&= \delta_1^{(n-3)/2} [\underbrace{b(b \circ a^3) - a^2 b(b \circ a)}_{\text{caso } n=3}] = 0.
\end{aligned}$$

$\square$

**Lema 4.20.** Todo v.a.m. $f_{i,j}$ é combinação linear de

$$f_{n+1,n+2}, f_{n,n+2}, f_{1,n+2}, f_{n,n+1}, f_{n-1,n+1}, f_{1,3} \mod \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t).$$

*Demonstração.* De fato, $f_{i,j}$ é igual a um v.a.m. da lista abaixo

1. $f_{1,2}$ ;
2. $f_{1,j}$ com $3 \leq j \leq n+1$;
3. $f_{1,n+2}$;
4. $f_{i,n+2}$ com $2 \leq i \leq n$;
5. $f_{n+1,n+2}$;
6. $f_{i,j}$ com $2 \leq i < j \leq n+1$ e $j-i \geq 2$;
7. $f_{i,i+1}$ com $2 \leq i \leq n$.

Mostraremos agora que cada v.a.m. acima é combinação linear de

$$f_{n+1,n+2}, f_{n,n+2}, f_{1,n+2}, f_{n,n+1}, f_{n-1,n+1}, f_{1,3} \mod \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t).$$

Nos casos 3 e 5 não há nada que fazer, enquanto que no caso 1

$$\begin{aligned} f_{1,2} &\equiv -f_{1,3} + f_{n,n+2} + f_{n+1,n+2} && \text{se } n \text{ é par;} \\ f_{1,2} &\equiv f_{n,n+2} - f_{1,n+2} + f_{n,n+1} && \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{aligned}$$

Temos que $f_{1,2} + f_{1,3} - f_{n,n+2} - f_{n+1,n+2} = z_{1,1}(z_{1,1} \circ y_{1,1})y_{1,1}^{n-1} - y_{1,1}^{n-1}(z_{1,1} \circ y_{1,1})z_{1,1}$ é consequência da identidade $\overline{y}_{1,1}z_{2,0}\overline{z}_{3,1}$ quando $n$ é par e pelo Lema 4.19

$$f_{1,2} - f_{n,n+2} + f_{1,n+2} - f_{n,n+1} = z_{1,1}(z_{1,1} \circ y_{1,1}^{n}) - y_{1,1}^{n-1}z_{1,1}(z_{1,1} \circ y_{1,1})$$

é uma $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidade quando $n$ é ímpar.

Por outro lado, se $f_{1,j}$ com $3 \leq j \leq n+1$ (caso 2), afirmamos que

$$\begin{aligned} f_{1,j} &\equiv \phantom{-}f_{1,3} \mod \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t) && \text{se } j \text{ é ímpar;} \\ f_{1,j} &\equiv -f_{1,3} \mod \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t) && \text{se } j \text{ é par.} \end{aligned}$$

Pois $f_{1,j} - f_{1,3} = z_{1,1}y_{1,1}[y_{1,1}^{j-3}, z_{1,1}]y_{1,1}^{n-j+2}$ é consequência da identidade $y_{1,1}[y_{1,1}^2, z_{2,1}]y_{1,1}$ quando $j$ é ímpar, podemos verificar que $y_{1,1}[y_{1,1}^2, z_{2,1}]y_{1,1}$ é uma identidade fazendo as substituções adequadas e usando o item 1 do Lema 4.19. Por outro lado, $f_{1,j} + f_{1,3} = z_{1,1}y_{1,1}(y_{1,1}^{j-3} \circ z_{1,1})y_{1,1}^{n-j+2}$ é consequência da identidade $y_{1,1}z_{2,0}y_{1,1}$ quando $j$ é par.

Nos outros casos, lidamos de maneira semelhante.

4. $f_{i,n+2}$ com $2 \leq i \leq n$ temos que

$$\begin{aligned} f_{i,n+2} &\equiv \phantom{-}f_{n,n+2} \mod \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t) && \text{se } n-i \text{ é par;} \\ f_{i,n+2} &\equiv -f_{n,n+2} \mod \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t) && \text{se } n-i \text{ é ímpar.} \end{aligned}$$

Já que $f_{i,n+2} - f_{n,n+2} = y_{1,1}^{i-1}[z_{1,1}, y_{1,1}^{n-i}]y_{1,1}z_{1,1}$ é consequência da identidade $y_{1,1}[y_{1,1}^2, z_{2,1}]y_{1,1}$ se $n-i$ é par; do mesmo modo $f_{i,n+2}+f_{n,n+2} = y_{1,1}^{i-1}(z_{1,1}\circ y_{1,1}^{n-i})y_{1,1}z_{1,1}$ é consequência da identidade $y_{1,1}z_{2,0}y_{1,1}$ quando $n-i$ é ímpar.

6. $f_{i,j}$ com $2 \leq i < j \leq n+1$ e $j - i \geq 2$. Então

$$\begin{aligned} f_{i,j} &\equiv \phantom{-}f_{n-1,n+1} \mod \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t) \quad \text{se } j-i \text{ é par;}\\ f_{i,j} &\equiv -f_{n-1,n+1} \mod \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t) \quad \text{se } j-i \text{ é ímpar.} \end{aligned}$$

Inicialmente notemos que:

- $f_{i,j} - f_{j-2,j} = y_{1,1}^{i-1}[z_{1,1}, y_{1,1}^{j-i-2}]y_{1,1}z_{1,1}y_{1,1}^{n+2-j}$ é consequência da identidade $y_{1,1}[y_{1,1}^2, z_{2,1}]y_{1,1}$ quando $j-i$ é par;
- $f_{i,j} + f_{j-2,j} = y_{1,1}^{i-1}(z_{1,1} \circ y_{1,1}^{j-i-2})y_{1,1}z_{1,1}y_{1,1}^{n+2-j}$ é consequência da identidade $y_{1,1}z_{2,0}y_{1,1}$ quando $j-i$ é ímpar;
- $f_{j-2,j} - f_{n-1,n+1} = y_{1,1}^{j-3}[z_{1,1}y_{1,1}z_{1,1}, y_{1,1}^{n+1-j}]y_{1,1}$ é consequência da identidade $y_{1,1}z_{2,0}y_{1,1}$.

Desta maneira

$$\begin{aligned} f_{i,j} - f_{n-1,n+1} &= (f_{i,j} - f_{j-2,j}) + (f_{j-2,j} - f_{n-1,n+1}) \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t) \text{ se } j-i \text{ é par;}\\ f_{i,j} + f_{n-1,n+1} &= (f_{i,j} + f_{j-2,j}) - (f_{j-2,j} - f_{n-1,n+1}) \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t) \text{ se } j-i \text{ é ímpar.} \end{aligned}$$

7. $f_{i,i+1}$ com $2 \leq i \leq n$. Então

$$\begin{aligned} f_{i,i+1} &\equiv f_{n,n+1} \mod \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t) && \text{se } n-i \text{ é par;}\\ f_{i,i+1} &\equiv f_{n-1,n} \equiv f_{n+1,n+2} + f_{n,n+2} - f_{n-1,n+1} && \text{se } n-i \text{ é ímpar.} \end{aligned}$$

De fato, $f_{i,i+1} - f_{n,n+1} = y_{1,1}^{i-1}[z_{1,1}^2, y_{1,1}^{n-i}]y_{1,1}$ é consequência da identidade $y_{1,1}z_{2,0}y_{1,1}$ quando $n-i$ é par; assim como $f_{i,i+1} - f_{n-1,n} = y_{1,1}^{i-1}[z_{1,1}^2, y_{1,1}^{n-i-1}]y_{1,1}^2$ é consequência da identidade $y_{1,1}z_{2,0}y_{1,1}$ quando $n-i$ é ímpar. Finalmente $f_{n-1,n} + f_{n-1,n+1} - f_{n+1,n+2} - f_{n,n+2} = y_{1,1}^{n-2}\,\overline{z}_{1,1}(y_{1,1} \circ z_{1,1})\overline{y}_{1,1}$ é consequência da identidade $\overline{y}_{1,1}z_{2,0}\overline{z}_{1,1}$.

□

**Lema 4.21.** Se $n$ é par, o conjunto $\{f_{n+1,n+2}, f_{n,n+2}, f_{1,n+2}, f_{n,n+1}, f_{n-1,n+1}, f_{1,3}\}$ é linearmente independente mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$.

*Demonstração.* Se $\alpha_1 f_{n+1,n+2} + \alpha_2 f_{n,n+2} + \alpha_3 f_{1,n+2} + \alpha_4 f_{n,n+1} + \alpha_5 f_{n-1,n+1} + \alpha_6 f_{1,3} \equiv 0$ com $\alpha_1, \ldots, \alpha_6 \in F$, então $\alpha_1 f_{n+1,n+2} + \alpha_2 f_{n,n+2} + \alpha_3 f_{1,n+2} + \alpha_4 f_{n,n+1} + \alpha_5 f_{n-1,n+1} + \alpha_6 f_{1,3}$ é uma identidade. Agora, vamos demonstrar que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_6 = 0$.

Se substituímos $y_{1,1} = e_{13} + e_{31}$ e $z_{1,1} = e_{23} - e_{32}$ em $\alpha_1 f_{n+1,n+2} + \alpha_2 f_{n,n+2} + \alpha_3 f_{1,n+2} + \alpha_4 f_{n,n+1} + \alpha_5 f_{n-1,n+1} + \alpha_6 f_{1,3}$, obtemos

$$-\alpha_1 e_{33} + \alpha_2(\,0\,) - \alpha_3 e_{22} + \alpha_4 e_{11} + \alpha_5(\,0\,) + \alpha_6(\,0\,) = 0$$
$$-\alpha_1 e_{33} - \alpha_3 e_{22} + \alpha_4 e_{11} = 0 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0.$$

Se substituímos $y_{1,1} = e_{13}+e_{31}+e_{23}+e_{32}$ e $z_{1,1} = e_{13}-e_{31}$ em $\alpha_2 f_{n,n+2}+\alpha_5 f_{n-1,n+1}+\alpha_6 f_{1,3}$ obtemos

$$2^{(n/2)-2}(2(e_{11} + e_{21} + e_{33})\alpha_2 + (e_{11} + e_{12} + e_{21} + e_{22} + 2e_{33})\alpha_5 + 2(e_{11} + e_{12} + e_{33})\alpha_6) = 0$$
$$(2\alpha_2 + \alpha_5 + 2\alpha_6)e_{11} + (\alpha_5 + 2\alpha_6)e_{12} + (2\alpha_2 + \alpha_5)e_{21} + \alpha_5 e_{22} + 2(\alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_6)e_{33} = 0$$

$\alpha_5 + 2\alpha_6 = 2\alpha_2 + \alpha_5 = \alpha_5 = 0 \Longrightarrow \alpha_5 = \alpha_2 = \alpha_6 = 0$. Portanto $\{f_{n+1,n+2}, f_{n,n+2}, f_{1,n+2}, f_{n,n+1}, f_{n-1,n+1}, f_{1,3}\}$ é l.i. $\mod \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$. □

**Lema 4.22.** Se $n$ é ímpar o conjunto $\{f_{n+1,n+2}, f_{n,n+2}, f_{1,n+2}, f_{n,n+1}, f_{n-1,n+1}\}$ é linearmente independente mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$. Além disso, $f_{n,n+2} - f_{1,n+2} - f_{n-1,n+1} + f_{1,3} \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$.

*Demonstração.* A demonstração da primeira parte é análoga à feita no lema anterior. Para a segunda parte precisamos decompor

$$f_{n,n+2}-f_{1,n+2}-f_{n-1,n+1}+f_{1,3} = (f_{1,2}-f_{n-1,n+1}+f_{1,3}-f_{n,n+1})+(-f_{1,2}+f_{n,n+2}-f_{1,n+2}+f_{n,n+1}),$$

onde o primeiro termo

$$f_{1,2} - f_{n-1,n+1} + f_{1,3} - f_{n,n+1} = (z_{1,1}(z_{1,1} \circ y_{1,1})y_{1,1}^{n-2} - y_{1,1}^{n-2}(z_{1,1} \circ y_{1,1})z_{1,1})y_{1,1}$$

é consequência da identidade $\overline{y}_{1,1} z_{2,0} \overline{z}_{3,1}$; como também

$$-f_{1,2} + f_{n,n+2} - f_{1,n+2} + f_{n,n+1} = -z_{1,1}(z_{1,1} \circ y_{1,1}^{n}) + y_{1,1}^{n-1} z_{1,1}(z_{1,1} \circ y_{1,1})$$

é uma identidade (veja Lema 4.19). Por conseguinte $f_{n,n+2} - f_{1,n+2} - f_{n-1,n+1} + f_{1,3}$ é uma identidade.

□

**Proposição 4.23.** Seja $n \in \mathbb{N}$, então

$$m_{(\emptyset,(n),\emptyset,(2))} = m_{(\emptyset,(2),\emptyset,(n))} = \begin{cases} 3 & \text{se } n = 1; \\ 5 & \text{se } n = 2; \\ 5 & \text{se } n \text{ é ímpar e } n \geq 3; \\ 6 & \text{se } n \text{ é par e } n \geq 3. \end{cases}$$

*Demonstração.* Nos casos $n = 1$ e $n = 2$ as multiplicidades já foram calculadas na Proposição 4.18.

Se $n \geq 3$ é ímpar, pelos Lemas 4.20 e 4.22 temos $m_{(\emptyset,(n),\emptyset,(2))} = 5$. Se $n \geq 3$ é par, pelos Lemas 4.20 e 4.21 temos $m_{(\emptyset,(n),\emptyset,(2))} = 6$.

□

### 4.2.3 Propriedade periódica das multiplicidades de $(\emptyset,(m),\emptyset,(n))$

Veremos uma propriedade singular das multiplicidades das multipartições $(\emptyset,(m),\emptyset,(n))$. Deste modo, fixamos $n \geq 1$ e definimos o inteiro positivo $\sigma_m = m_{(\emptyset,(m),\emptyset,(n))}$. Mostraremos que a partir de um $m_0 \in \mathbb{N}$, que apenas depende de $n$, os termos da sequência $(\sigma_m)_m$ permanecem quase constantes. Em outras palavras

$$\sigma_{m_0+1} = \sigma_{m_0+3} = \sigma_{m_0+5} = \sigma_{m_0+7} = \cdots$$
$$\sigma_{m_0+2} = \sigma_{m_0+4} = \sigma_{m_0+6} = \sigma_{m_0+8} = \cdots$$

e os valores $\sigma_{m_0+1}$ e $\sigma_{m_0+2}$ não precisam ser iguais.

Por exemplo, se $n = 1$, usando Proposição 4.17 vemos que $\sigma_m = m_{(\emptyset,(m),\emptyset,(1))} = 3$ para qualquer $m \geq 2$. No entanto, se $n = 2$, a Proposição 4.23 afirma que para valores $m \geq 3$ temos que

$$\sigma_m = m_{(\emptyset,(m),\emptyset,(2))} = 5 \quad \text{se } m \text{ é ímpar;}$$
$$\sigma_m = m_{(\emptyset,(m),\emptyset,(2))} = 6 \quad \text{se } m \text{ é par .}$$

**Notações:**

1. Denotamos por $F_{0,1,0,1}$ a subálgebra de $F\langle X\rangle$ gerada pelas variáveis $y_{1,1}$ e $z_{1,1}$.

2. Denotamos por $E_{m,n}$ o subespaço vetorial de $F_{0,1,0,1}$ gerado pelos v.a.m. associados à multipartição $(\emptyset,(m),\emptyset,(n))$.
   Note que o conjunto dos v.a.m. associados a $(\emptyset,(m),\emptyset,(n))$ forma uma base de $E_{m,n}$ e será denotado por $\mathcal{B}_{m,n}$. Além disso, qualquer elemento de $\mathcal{B}_{m,n}$ é da forma $z_{1,1}^{j}y_{1,1}^{i}g$, onde $j \geq 0$, $i \geq 1$ e $g$ é um monômio em $F_{0,1,0,1}$.

3. Denotamos por $\bar{E}_{m,n}$ o espaço vetorial quociente $\dfrac{E_{m,n}}{E_{m,n} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t)}$. Observe que $m_{(\emptyset,(m),\emptyset,(n))} = \dim \bar{E}_{m,n}$.

Nos próximos lemas, vamos considerar $m, n$ inteiros tais que $n \geq 2$ e $m \geq n+3$.

**Lema 4.24.** Consideremos $f = z_{1,1}^{j_1}y_{1,1}^{i_1}z_{1,1}^{j_2}y_{1,1}^{i_2}\cdots z_{1,1}^{j_s}y_{1,1}^{i_s}$ um monômio de grau $m$ na variável $y_{1,1}$ e de grau $n$ na variável $z_{1,1}$; com $s \geq 2$, $j_1, i_s \geq 0$, $j_2,\ldots,j_s,i_1,\ldots,i_{s-1} \geq 1$. Se para algum $\alpha \in \{1,\ldots,s\}$ temos $i_\alpha \geq 3$, então existem $j \geq 0$, $i \geq 3$ e $h$ um monômio em $F_{0,1,0,1}$ tais que

$$f \equiv z_{1,1}^{j}y_{1,1}^{i}h \mod \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t).$$

*Demonstração.* Se $i_1 \geq 3$ não há nada a provar. Se $i_\alpha \geq 3$ para algum $\alpha \in \{2,\ldots,s\}$, afirmamos que $f' = f - z_{1,1}^{j_1}y_{1,1}^{i_1+2}z_{1,1}^{j_2}y_{1,1}^{i_2}\cdots z_{1,1}^{j_\alpha}y_{1,1}^{i_\alpha-2}\cdots z_{1,1}^{j_s}y_{1,1}^{i_s}$ é uma $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidade.

De fato, tomando $a \in (M_{2,1}(F), t)_1^+$ e $b \in (M_{2,1}(F), t)_1^-$, usando o Lema 4.19, temos

$$\begin{aligned} f'(a,b) =& b^{j_1}a^{i_1}b^{j_2}a^{i_2}\cdots b^{j_\alpha}\underbrace{a^{i_\alpha}}_{a^{(i_\alpha-2)+2}}\cdots b^{j_s}a^{i_s} - b^{j_1}\underbrace{a^{i_1+2}}_{\delta a^{i_1}}b^{j_2}a^{i_2}\cdots b^{j_\alpha}a^{i_\alpha-2}\cdots b^{j_s}a^{i_s} \\ =& \delta b^{j_1}a^{i_1}b^{j_2}a^{i_2}\cdots b^{j_\alpha}a^{i_\alpha-2}\cdots b^{j_s}a^{i_s} - \delta b^{j_1}a^{i_1}b^{j_2}a^{i_2}\cdots b^{j_\alpha}a^{i_\alpha-2}\cdots\cdots b^{j_s}a^{i_s} = 0. \end{aligned}$$

Com isso, concluímos que $f \equiv z_{1,1}^{j_1}y_{1,1}^{i_1+2}\underbrace{z_{1,1}^{j_2}y_{1,1}^{i_2}\cdots z_{1,1}^{j_\alpha}y_{1,1}^{i_\alpha-2}\cdots z_{1,1}^{j_s}y_{1,1}^{i_s}}_{h} \bmod \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$ e o resultado está provado. □

Nos próximos resultados, usamos a noção de bloco de um monômio, dada na Observação 3.10.

**Lema 4.25.** Consideremos $f = z_{1,1}^{j_1}y_{1,1}^{i_1}z_{1,1}^{j_2}y_{1,1}^{i_2}\cdots z_{1,1}^{j_s}y_{1,1}^{i_s}$ um monômio de grau $m$ na variável $y_{1,1}$ e de grau $n$ na variável $z_{1,1}$; com $s \geq 2$, $j_1 \geq 0$, $j_2, \ldots, j_s \geq 1$, $i_1, \ldots, i_{s-1} \in \{1,2\}$ e $i_s \in \{0,1,2\}$. Então existe um bloco de $f$ da forma $y_{1,1}z_{1,1}y_{1,1}^2$.

*Demonstração.* Inicialmente, provaremos que existe $\alpha \in \{2, \ldots, s\}$ tal que $j_\alpha = 1$, ou seja, algum dos expoentes $j_2, \ldots, j_s$ de $z_{1,1}$ é 1. De fato, se qualquer $j_2, \ldots, j_s$ é maior ou igual a 2, então $2s - 2 \leq j_2 + \cdots + j_s \leq n$. Além disso, $m = i_1 + \cdots + i_s \leq 2s$. Isto implica que $2s - 2 \leq n \leq m - 3 \leq 2s - 3$, uma contradição.

Assim, podemos escrever

$$f = z_{1,1}^{j_1}y_{1,1}^{i_1}\cdots y_{1,1}^{i_{\alpha-1}}z_{1,1}y_{1,1}^{i_\alpha}\cdots z_{1,1}^{j_s}y_{1,1}^{i_s} \text{ com } 2 \leq \alpha \leq s.$$

Agora, suponhamos, por absurdo, que $f$ não contém bloco da forma $y_{1,1}z_{1,1}y_{1,1}^2$. Neste caso, se $j_k = 1$, devemos ter $i_k = 1$, para $2 \leq k \leq s-1$. Além disso, observe que $j_s \geq i_s$.

Seja $T = m - n$, ou seja, $T = \sum_{k=1}^{s}(i_k - j_k)$. Por hipótese, $T \geq 3$, mas note que

$$T = \underbrace{(i_1 - j_1)}_{\leq 2} + \sum_{k=2}^{s-1}\underbrace{(i_k - j_k)}_{\leq 0} + \underbrace{(i_s - j_s)}_{\leq 0} \leq 2,$$

o que é uma contradição e isto prova o resultado. □

Antes de demonstrar o próximo resultado, vamos estabelecer uma nomenclatura a respeito de blocos. Se um monômio $f$ está sob as hipóteses do lema anterior, temos que $f = h_1(y_{1,1}z_{1,1}y_{1,1}^2)h_2$, onde $h_1$ e $h_2$ são monômios específicos de $F_{0,1,0,1}$, nas devidas condições. Diremos que o bloco $y_{1,1}z_{1,1}y_{1,1}^2$ é simples se $h_1 = 1$ ou é um monômio terminando com a variável $z_{1,1}$ e caso contrário, diremos que $y_{1,1}z_{1,1}y_{1,1}^2$ é um bloco composto, ou seja, $f = h_1'(y_{1,1}^2z_{1,1}y_{1,1}^2)h_2$, onde $h_1'$ é um bloco inicial de $h_1$ (isto é o mesmo que dizer que $h_1$ termina com $y_{1,1}$).

Agora, suponhamos que $f = h_1(y_{1,1}z_{1,1}y_{1,1}^2)h_2$ seja um monômio sob as hipóteses do Lema 4.25, onde $y_{1,1}z_{1,1}y_{1,1}^2$ é um bloco simples. Definimos o *Procedimento #*, considerando um novo monômio

$$f_1 = h_1(y_{1,1}^2 z_{1,1} y_{1,1})h_2$$

e dizemos que $f_1$ é resultado de aplicar o procedimento # em $f$.

Observe que

- $f_1$ satisfaz as hipóteses do Lema 4.25, isto é, $f_1 = z_{1,1}^{j_{1,1}} y_{1,1}^{i_{1,1}} z_{1,1}^{j_{2,1}} y_{1,1}^{i_{2,1}} \cdots z_{1,1}^{j_{s,1}} y_{1,1}^{i_{s,1}}$ com $s \geq 2$, $j_{1,1}, i_{s,1} \geq 0$, $j_{2,1}, \ldots, j_{s,1}, i_{1,1}, \ldots, i_{s-1,1} \geq 1$; e $i_{1,1}, \ldots, i_{s,1}$ são menores ou iguais a 2.

- $f_1 \equiv f$ ou $f_1 \equiv -f$ mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$.

**Lema 4.26.** Se $f$ é um v.a.m. associado à multipartição $(\emptyset, (m), \emptyset, (n))$, então existem $j \geq 0$, $i \geq 3$ e $h$ um monômio em $F_{0,1,0,1}$ de grau $m - i$ na variável $y_{1,1}$ e de grau $n - j$ na variável $z_{1,1}$ tais que

$$f \equiv z_{1,1}^j y_{1,1}^i h \mod \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t).$$

*Demonstração.* Todo v.a.m. $f$ associado a $(\emptyset, (m), \emptyset, (n))$ é de uma das formas

1. $f = z_{1,1}^n y_{1,1}^m$ ou

2. $f = z_{1,1}^{j_1} y_{1,1}^{i_1} z_{1,1}^{j_2} y_{1,1}^{i_2} \cdots z_{1,1}^{j_s} y_{1,1}^{i_s}$ com $s \geq 2$, $j_1, i_s \geq 0$ e $j_2, \ldots, j_s, i_1, \ldots, i_{s-1} \geq 1$.

O Caso 1 segue de maneira trivial, pois $m \geq 3$. Para o Caso 2, temos duas possibilidades

2.1 Algum $i_1, \ldots, i_s$ é maior ou igual a 3. Neste caso, usamos o Lema 4.24.

2.2 Todos os $i_1, \ldots, i_s$ são menores ou iguais a 2. Pelo Lema 4.25, existe um bloco de $f$ da forma $y_{1,1}z_{1,1}y_{1,1}^2$, ou seja, $f = h_1(y_{1,1}z_{1,1}y_{1,1}^2)h_2$.

   Agora prosseguimos de maneira iterativa:

   2.2.1) Se $f$ não possui blocos simples então definimos $g := f$.

   2.2.2) Se $f$ possui um bloco simples, definimos $f_1$ como resultado de aplicar o procedimento # em $f$.

   2.2.3) Se $f_1$ não possui blocos simples então definimos $g := f_1$. Caso contrário, aplicamos o procedimento # em $f_1$ para obter um monômio $f_2$.

   2.2.4) Conferimos se o monômio $f_2$ contém ou não blocos simples e, se necessário, aplicamos o procedimento # iterativamente até obter um monômio $f_k$ que não possua blocos simples.

2.2.5) O monômio $f_k$ será obtido em um número finito de passos pois temos um número finito de variáveis em $f$ e o procedimento # se resume a fazer permutações de termos $y_{1,1}^2$ e $y_{1,1}$, com o objetivo de obter um monômio com apenas blocos de um dos tipos: $y_{1,1}^2 z_{1,1} y_{1,1}^2$ ou $y_{1,1}^2 z_{1,1} y_{1,1}$ ou $y_{1,1} z_{1,1} y_{1,1}$. Ao final, definimos $g := f_k$.

É fácil verificar as seguintes afirmações

- $g$ é um v.a.m. associado a $(\emptyset, (m), \emptyset, (n))$ e cumpre as propriedades do Caso 2.2;
- $g \equiv f$ ou $g \equiv -f$ mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$.

Agora, provaremos que $g$ possui um bloco composto, ou seja, um bloco da forma $y_{1,1}^2 z_{1,1} y_{1,1}^2$. Suponhamos, por absurdo, que $g$ não possui blocos de tal forma.

Considerando $g = z_{1,1}^{q_1} y_{1,1}^{p_1} z_{1,1}^{q_2} y_{1,1}^{p_2} \cdots z_{1,1}^{q_s} y_{1,1}^{p_s}$ com $s \geq 2$, $q_1, p_s \geq 0$, $q_2, \ldots, q_s$, $p_1, \ldots, p_{s-1} \geq 1$; e $p_1, \ldots, p_s \leq 2$. Vemos que se, para algum $\alpha \in \{2, \ldots, s\}$, temos $p_\alpha = 2$ então $q_\alpha \geq 2$ pois $g$ não tem blocos simples ou compostos. Desta forma, $p_\alpha - q_\alpha \leq 0$ para $2 \leq \alpha \leq s$. Além disso, é claro que $p_1 - q_1 \leq 2$.

Com isso,

$$3 \leq m - n = \underbrace{(p_1 - q_1)}_{\leq 2} + \sum_{k=2}^{s} \underbrace{(p_k - q_k)}_{\leq 0} \leq 2,$$

um absurdo e portanto, podemos escrever $g = g_1(y_{1,1}^2 z_{1,1} y_{1,1}^2) g_2$, onde $g_1$ e $g_2$ são monômios em $F_{0,1,0,1}$.

Além disso,

$$g = g_1(y_{1,1}^2 z_{1,1} y_{1,1}^2) g_2 \equiv -\underbrace{g_1(y_{1,1}^3 z_{1,1} y_{1,1}) g_2}_{\text{Caso 2.1}} \quad \text{, pois } y_{1,1}^2 z_{1,1} y_{1,1}^2 \equiv -y_{1,1}^3 z_{1,1} y_{1,1}.$$

Pelo Caso 2.1 que já foi visto acima, existem $j \geq 0$ e $i \geq 3$ e um monômio $h \in F_{0,1,0,1}$ tais que $g_1(y_{1,1}^3 z_{1,1} y_{1,1}) g_2 \equiv z_{1,1}^j y_{1,1}^i h$. Portanto, $g \equiv -z_{1,1}^j y_{1,1}^i h$.

Em conclusão, $f \equiv g \equiv -z_{1,1}^j y_{1,1}^i h$ ou $f \equiv -g \equiv z_{1,1}^j y_{1,1}^i h$ mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$.

□

**Teorema 4.27.** Se $m, n$ são inteiros tais que $n \geq 2$ e $m \geq n+3$, então

$$m_{(\emptyset,(m+2),\emptyset,(n))} = m_{(\emptyset,(m),\emptyset,(n))}.$$

*Demonstração.* Para provar o resultado, vamos mostrar que $\bar{E}_{m+2,n} \cong \bar{E}_{m,n}$. Para isso, vamos considerar $\varphi_1 : E_{m,n} \longrightarrow E_{m+2,n}$ a aplicação linear definida pela extensão de

$$z_{1,1}^j y_{1,1}^i g \mapsto z_{1,1}^j y_{1,1}^{i+2} g$$

onde $z_{1,1}^j y_{1,1}^i g$ são os elementos da base $\mathcal{B}_{m,n}$, com $j \geq 0$, $i \geq 1$ e $g \in F_{0,1,0,1}$.

Agora, definimos a aplicação linear $\varphi : E_{m,n} \longrightarrow \bar{E}_{m+2,n}$ por $\varphi := \pi \circ \varphi_1$ onde $\pi$ é a projeção natural de $E_{m+2,n}$ sobre $\bar{E}_{m+2,n}$.

Afirmamos que:

1. $\varphi$ é sobrejetora e
2. $\ker \varphi = E_{m,n} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$.

Para provar o item 1, observamos que todo elemento de $\bar{E}_{m+2,n}$ é da forma $\pi(\tilde{f})$, com $\tilde{f} \in E_{m+2,n}$. Portanto, escrevendo $\tilde{f} = \sum_k \theta_k \tilde{f}_k$, com $\theta_k \in F$ e $\tilde{f}_k \in \mathcal{B}_{m+2,n}$, ao fixar um $k$ e aplicar o Lema 4.26, sabemos que existem $j \geq 0$, $i \geq 3$ e $h \in F_{0,1,0,1}$ um monômio de grau $m+2-i$ na variável $y_{1,1}$ e de grau $n-j$ na variável $z_{1,1}$ tais que $\tilde{f}_k \equiv z_{1,1}^j y_{1,1}^i h$.

Considerando $f_k = z_{1,1}^j y_{1,1}^{i-2} h \in \mathcal{B}_{m,n}$, observamos que $\varphi_1(f_k) = z_{1,1}^j y_{1,1}^i h$ e portanto

$$\pi(\tilde{f}_k) = \pi(z_{1,1}^j y_{1,1}^i h) = \pi(\varphi_1(f_k)) = \varphi(f_k).$$

Assim, para cada $\tilde{f}_k \in \mathcal{B}_{m+2,n}$ existe $f_k \in E_{m,n}$ tal que $\pi(\tilde{f}_k) = \varphi(f_k)$. Finalmente, definindo $f = \sum_k \theta_k f_k \in E_{m,n}$, temos que $\varphi(f) = \pi(\tilde{f}_k)$, concluindo a demonstração.

Vamos agora provar o item 2. Primeiramente, observe que se $f \in E_{m,n}$, é claro que

$$f \in \ker \varphi \Leftrightarrow \varphi_1(f) \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t).$$

Agora, vamos provar que

$$\varphi_1(f) \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t) \Leftrightarrow f \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t) \tag{4.2.1}$$

e assim, o item 2 estará demonstrado.

Para um v.a.m. $f_r = z_{1,1}^j y_{1,1}^i g \in \mathcal{B}_{m,n}$, vamos usar a notação $\tilde{f}_r$ para $\varphi_1(f_r)$, ou seja, $\tilde{f}_r = z_{1,1}^j y_{1,1}^{i+2} g \in \mathcal{B}_{m+2,n}$ Tomando $a \in (M_{2,1}(F), t)_1^+$ e $b \in (M_{2,1}(F), t)_1^-$, pelo Lema 4.19, temos que existe $\delta \in F$ tal que $\tilde{f}_r(a,b) = \delta f_r(a,b)$.

Com isso, se $f = \sum_k \theta_k f_k \in E_{m,n}$ onde $\theta_k \in F$, então

$$\varphi_1(f)(a,b) = \sum_k \theta_k \tilde{f}_k(a,b) = \delta \sum_k \theta_k f_k(a,b) = \delta f(a,b). \tag{4.2.2}$$

Com a igualdade acima, já fica claro que se $f \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t)$ então $\varphi_1(f) \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t)$. Além disso, se $\varphi_1(f) \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t)$ e $a$ e $b$ são elementos como acima, por (4.2.2), temos $\delta f(a,b) = 0$.

Agora, é evidente que se $\delta \neq 0$ então $f(a,b) = 0$. Por outro lado, se $\delta = 0$, então $a^3 = 0$. Neste caso, considerando um v.a.m. $f_k$ em $f$, usamos o Lema 4.26 e observamos que existem $j \geq 0$, $i \geq 3$ e $h$ um monômio em $F_{0,1,0,1}$ de grau $m-i$ na variável $y_{1,1}$ e de grau $n-j$ na variável $z_{1,1}$ tais que

$$f_k \equiv z_{1,1}^j y_{1,1}^i h \mod \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t).$$

Com isso, $f_k(a,b) = b^j \underbrace{a^i}_{=0} h(a,b)$, pois $i \geq 3$. Isto prova que $f(a,b) = 0$, para quaisquer valores de $a$ e $b$ escolhidos, ou seja, $f \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t)$ e terminamos a prova de (4.2.1).

Por fim, usando o Teorema Fundamental de Homomorfismos, temos

$$\bar{E}_{m,n} = \frac{E_{m,n}}{E_{m,n} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F),t)} \simeq \bar{E}_{m+2,n}.$$

$\square$

# Considerações Finais

A determinação das multiplicidades não nulas da $*$-superálgebra $(M_{2,1}(F), t)$ foi estimulada a partir dos resultados satisfatórios obtidos sobre as multiplicidades do $n$-cocaracter para o caso da álgebra $M_3(F)$ com estruturas adicionais apresentados por Benanti e Campanella [2] e La Mattina [16].

Neste trabalho nos restringimos a determinar se a multiplicidades $m_{\langle\lambda\rangle}$ do $n$-ésimo cocaracter $\chi_n^{\mathrm{gri}}(M_{2,1}(F), t)$ é nula ou não nula, conhecendo a multiplicidade $\langle\lambda\rangle \vdash n$. Também determinamos algumas multiplicidades $m_{\langle\lambda\rangle}$ para multipartições $\langle\lambda\rangle$ com condições particulares. Nosso seguinte propósito é calcular o maior número de multiplicidades $m_{\langle\lambda\rangle}$ para diferentes tipos de multipartições $\langle\lambda\rangle \vdash n$.

Em 2004, La Mattina [16] classificou todas as identidades graduadas de grau $\leq 5$ da superálgebra $M_{2,1}(F)$. No contexto da $*$-superálgebra $(M_{2,1}(F), t)$, nesta tese enunciamos uma lista $\mathcal{L}_3$ de 12 $(\mathbb{Z}_2, *)$-polinômios e mostramos que qualquer $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidade de grau $\leq 3$ da $*$-superálgebra $(M_{2,1}(F), t)$ é consequência dos $(\mathbb{Z}_2, *)$-polinomios de $\mathcal{L}_3$.

O comentado anteriormente nos leva a pensar se é possível obter uma lista $\mathcal{L}_4$ de $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidades tal que qualquer $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidade de $(M_{2,1}(F), t)$ com grau $\leq 4$ seja consequência de elementos de $\mathcal{L}_4$. Em particular, existirá uma relação entre a lista $\mathcal{L}_3$ e as $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidades de $\mathcal{L}_4$?

# Referências Bibliográficas


[1] F. Benanti, *On the cocharacter sequence of* $3\times3$ *matrices.* Comm. Algebra **24** (1996) 4263-4279.

[2] F. Benanti and M. G. Campanella, *On the* $*$*-cocharacter sequence of* $3\times3$ *matrices.* Linear Algebra Appl. **312** (2000) 101-114.

[3] D. Bessades, R. dos Santos and A. Vieira, *Minimal degree of identities of matrix algebras with additional structures.* In: Di Vincenzo O.M., Giambruno A. (eds) Polynomial Identities in Algebras. Springer INdAM Series, vol 44. Springer, Cham. (2021) 25-36.

[4] A. D'Amour and M. L. Racine, $*$*-Polynomial identities of matrices with the transpose involution.* Trans. Amer. Math. Soc. **35** (12) (1999) 5089-5106.

[5] V. Drensky, Free algebras and PI-algebras, Graduate course in algebra. Springer-Verlag Singapore, Singapore, 2000.

[6] V. Drensky, *A minimal basis for the identities of a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0.* Algebra i Logika **20** (1981) 282-290 (in Russian).

[7] V. Drensky and A. Giambruno, *Cocharacters, codimensions and Hilbert series of the polynomial identities for* $2\times2$ *matrices with involution.* Canadian J. Math. **46** (1994) 718-733.

[8] A. Giambruno. *On* $*$*-polynomial identities for* $n\times n$ *matrices.* J. Algebra. **133** (1990) 433-438.

[9] A. Giambruno, $GL_m \times GL_m$*-representations and* $*$*-polynomial identities.* Comm. Algebra **14** (1986) 787-796.

[10] A. Giambruno, R. B. dos Santos and A. C. Vieira, *Identities of* $*$*-superalgebras and almost polynomial growth.* Linear Multilinear Algebra, vol. 64, **3** (2016) 484-501.

[11] A. Giambruno and A. Regev, *Wreath products and PI algebras.* J. Pure Appl. Algebra **35** (1985) 133-149.

[12] A. Giambruno and M. Zaicev, Polynomial Identities and Asymptotic Methods. Math. Surveys and Monogr., vol. 122, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[13] G. James and A. Kerber, The representation theory of the symmetric group, London: Addison-Wesley Publishing Company, 1981.

[14] A. R. Kemer, *Finite basis property of identities of associative algebras.* Trans. Algebra i Logika, (1987) Vol. 26, no. 5, 597-641.

[15] P. Koshlukov, *Basis of the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic* $\neq 2$. J.Algebra **241** (2001), 410-434.

[16] D. La Mattina, *On the graded identities and cocharacters of the algebra* $3\times 3$ *matrices*. Linear Algebra Appl. **384** (2004) 55-75.

[17] V. Levchenko, *Finite basis of identities with involution for the second order matrix algebra*. Serdica **8**, (1982) 42-56.

[18] A. Regev, *Existence of identities in* $A \otimes B$. Israel J. Math. **11** (1972) 131-152.

[19] L. Rowen. Polynomial identities in ring theory. Academic press. INC. London, 1980.

[20] B. E. Sagan. The symmetric group: representations, combinatorial algorithms and symmetric functions. Springer Verlag, New York, 2001.