

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

Cássio Scarpelli Cabral de Bragança

**CALIBRAÇÃO E VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL DO MODELO  
NUMÉRICO DE UM VAGÃO DE CARGA EM CONDIÇÕES  
OPERACIONAIS**

Belo Horizonte

2022

Cássio Scarpelli Cabral de Bragança

**CALIBRAÇÃO E VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL DO MODELO  
NUMÉRICO DE UM VAGÃO DE CARGA EM CONDIÇÕES  
OPERACIONAIS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

Orientador: Hermes Carvalho

Coorientador: Diogo Rodrigo Ferreira  
Ribeiro

Coorientador: Pedro Aires Moreira  
Montenegro Marques e Almeida

Belo Horizonte

2022

B813c

Bragança, Cássio Scarpelli Cabral de.

Calibração e validação experimental do modelo numérico de um vagão de carga em condições operacionais [recurso eletrônico] / Cássio Scarpelli Cabral de Bragança. - 2022.

1 recurso online (205 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Hermes Carvalho.

Coorientador: Diogo Rodrigo Ferreira Ribeiro.

Coorientador: Pedro Aires Moreira Montenegro Marques e Almeida.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Bibliografia: f. 195-205.

Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia de estruturas - Teses. 2. Algoritmos Genéticos – Teses. 3. Transporte de Materiais – Teses. I. Carvalho, Hermes. II. Ribeiro, Diogo Rodrigo Ferreira. III. Almeida, Pedro Aires Moreira Montenegro Marques e. IV. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. V. Título.

CDU: 624(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**ATA DA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE Mestrado EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS Nº: 386 DO ALUNO CÁSSIO SCARPELLI CABRAL DE BRAGANÇA**

Às **8:00** horas do dia **01** do mês de **junho** de **2022**, reuniu-se, na Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG, a Comissão Examinadora indicada pelo Colegiado do Programa em **11 de maio de 2022**, para julgar a defesa da Dissertação de Mestrado intitulada "**Calibração e Validação Experimental do Modelo Numérico de um Vagão de Carga em Condições Operacionais**", cuja aprovação é um dos requisitos para a obtenção do Grau de MESTRE EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS na área de ESTRUTURAS.

Abrindo a sessão, o Presidente da Comissão, **Prof. Dr. Hermes Carvalho**, após dar a conhecer aos presentes o teor das Normas Regulamentares passou a palavra ao candidato para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores, com a respectiva defesa do candidato. Logo após, a Comissão se reuniu, sem a presença do candidato e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foram atribuídas as seguintes indicações:

**Prof. Dr. Hermes Carvalho - DEES - UFMG (Orientador)**  
**Prof. Dr. Diogo Rodrigo Ferreira Ribeiro (à distância) - Universidade do Porto (Coorientador)**  
**Prof. Dr. Pedro Aires Moreira Montenegro Marques e Almeida (à distância) - Universidade do Porto (Coorientador)**  
**Prof. Dr. Rui Artur Bartolo Calçada (à distância) - Universidade do Porto**  
**Prof. Dr. Túlio Nogueira Bittencourt (à distância) - Universidade de São Paulo - USP**  
**Prof. Dr. Rodrigo Barreto Caldas - DEES - UFMG**

Pelas indicações acima, o candidato foi considerado APROVADO, conforme pareceres em anexo.

O resultado final foi comunicado publicamente ao candidato pelo Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ATA, que será assinada por todos os membros participantes da Comissão Examinadora.

Belo Horizonte, 01 de junho de 2022.

Observações:

1. A aprovação do candidato na defesa da Dissertação de Mestrado não significa que o mesmo tenha cumprido todos os requisitos necessários para obtenção do Grau de Mestre em Engenharia de Estruturas;

- Este documento não terá validade sem a assinatura do Coordenador do Programa de Pós-Graduação.



Documento assinado eletronicamente por **Hermes Carvalho, Professor do Magistério Superior**, em 07/06/2022, às 16:04, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Tulio Nogueira Bittencourt, Usuário Externo**, em 08/06/2022, às 12:12, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Pedro Aires Moreira Montenegro Marques e Almeida, Usuário Externo**, em 08/06/2022, às 12:33, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rui Artur Bártolo Caçada, Usuário Externo**, em 08/06/2022, às 13:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rodrigo Barreto Caldas, Professor do Magistério Superior**, em 13/06/2022, às 08:48, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Diogo Rodrigo Ferreira Ribeiro, Usuário Externo**, em 24/06/2022, às 17:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Felício Bruzzi Barros, Coordenador(a) de curso de pós-graduação**, em 06/07/2022, às 09:35, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufmg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **1494293** e o código CRC **8A1E21B0**.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

**"CALIBRAÇÃO E VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL DO MODELO NUMÉRICO DE UM VAGÃO DE CARGA EM CONDIÇÕES OPERACIONAIS"**

Cássio Scarpelli Cabral de Bragança

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Hermes Carvalho - DEES - UFMG (Orientador)

Prof. Dr. Diogo Rodrigo Ferreira Ribeiro - Universidade do Porto (Coorientador)

Prof. Dr. Pedro Aires Moreira Montenegro Marques e Almeida - Universidade do Porto (Coorientador)

Prof. Dr. Rui Artur Bartolo Calçada - Universidade do Porto

Prof. Dr. Túlio Nogueira Bittencourt - USP - SP

Prof. Dr. Rodrigo Barreto Caldas - DEES - UFMG

Belo Horizonte, 01 de junho de 2022



Documento assinado eletronicamente por **Hermes Carvalho, Professor do Magistério Superior**, em 07/06/2022, às 16:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Tulio Nogueira Bittencourt, Usuário Externo**, em 08/06/2022, às 12:13, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Pedro Aires Moreira Montenegro Marques e Almeida, Usuário Externo**, em 08/06/2022, às 12:33, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rui Artur Bártolo Calçada, Usuário Externo**, em 08/06/2022, às 13:18, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rodrigo Barreto Caldas, Professor do Magistério Superior**, em 13/06/2022, às 08:48, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Diogo Rodrigo Ferreira Ribeiro, Usuário Externo**, em 24/06/2022, às 17:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufmg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **1494326** e o código CRC **98E1358C**.

## AGRADECIMENTOS

Deixo aqui meus agradecimentos à todas as pessoas que, de alguma forma, contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho e para o meu desenvolvimento ao longo do meu curso de mestrado.

Aos meus pais Heráclio e Verônica (*in memoriam*), por todo o apoio durante toda a minha trajetória acadêmica, sempre acreditando em meu potencial. Pela paciência, pelos ensinamentos e pelo cuidado que sempre tiveram comigo ao longo de toda a vida.

Ao meu orientador professor Hermes Carvalho por todo o apoio ao longo de toda a minha trajetória do mestrado, antes mesmo do meu efetivo ingresso por ter me apoiado em 2019 na realização de disciplinas isoladas. Pela disponibilidade em tirar dúvidas, por acreditar no meu trabalho e me proporcionar a oportunidade de participar de projetos instigantes e de extrema relevância ao longo destes dois anos.

Ao meu orientador professor Diogo Ribeiro por todo o incentivo durante o desenvolvimento deste trabalho, sempre muito disponível para tirar todas as minhas dúvidas. Pelos ensinamentos valiosos transmitidos durante o meu mestrado, por acreditar no meu trabalho e me possibilitar a participação em muitos outros projetos ao longo do meu mestrado.

Ao meu orientador professor Pedro Montenegro pelos ensinamentos transmitidos e por gentilmente ceder ferramentas numéricas de seu próprio desenvolvimento que tornaram grande parte deste trabalho possível. Agradeço também pela disponibilidade e boa vontade em ajudar e participar ativamente das etapas que envolveram este trabalho.

Ao meu chefe professor Marco Antônio Vecci por todo o apoio desde o início da minha graduação, sempre acreditando e confiando no meu potencial. Por me incentivar sempre a continuar meus estudos e me possibilitar trabalhar em horários bastante flexíveis, o que viabilizou o meu mestrado.

Ao colega José Neto que gentilmente disponibilizou dados de campanhas experimentais que tornaram possível a realização deste trabalho.

Ao colega Raphael Pedrosa pelos ensinamentos relativos à utilização de ferramentas numéricas as quais foram fundamentais para o desenvolvimento desta dissertação.



Ao colega Gabriel Saramago pelos ensinamentos transmitidos acerca dos algoritmos de otimização.

A todos os meus colegas de trabalho da Oppus Acústica, pela paciência e compreensão, pelo apoio e pela amizade que foram fundamentais durante a realização do meu curso de mestrado.

Por fim, mas não menos importante, gostaria de deixar meus sinceros agradecimentos a todos os funcionários e professores do Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG, os quais contribuíram e vem contribuindo para o meu aprendizado e desenvolvimento desde a graduação.

## RESUMO

Com o avanço do transporte ferroviário de cargas no mundo e conseqüente aumento da velocidade e carga transportada pelas composições, problemas associados à dinâmica de veículos ferroviários têm se tornado cada vez mais frequentes exigindo métodos cada vez mais precisos para avaliar seus efeitos. Diante disso, este trabalho apresenta uma metodologia eficiente para a calibração e validação de um modelo numérico de um vagão de carga utilizando uma metodologia iterativa, por meio de um algoritmo genético e baseada em parâmetros modais identificados experimentalmente em um teste dinâmico em condições reais de operação. Os testes dinâmicos basearam-se num sistema de monitoramento embarcado no veículo, composto por um conjunto de acelerômetros e transdutor de deslocamento variável linear LVDT's. O número e localização dos sensores foi severamente condicionado pelo espaço ocupado pela carga transportada, bem como por restrições associadas ao carregamento e descarregamento do vagão, sendo assim, não foi criada nenhuma interferência com a operação do veículo. Os dados derivados do teste dinâmico foram usados, primeiro, para a identificação dos parâmetros modais da carroceria, ou seja, as frequências naturais, modos e coeficientes de amortecimento, e segundo, para extrair os históricos de tempo de acelerações e deslocamentos em condições de operação. A identificação das propriedades dinâmicas foi feita por meio da aplicação de técnicas de análise modal operacional aos dados coletados durante a circulação do veículo. A decisão de adotar-se uma configuração experimental minimalista, que não gerasse impactos à operação do veículo, resultou em dificuldades adicionais para a identificação modal. Entretanto, mesmo sob condições não favoráveis, foram identificados os três primeiros modos de corpo rígido da carroceria que serviram de base para a calibração do modelo. Um modelo numérico simplificado de elementos finitos do vagão de carga foi desenvolvido e calibrado usando uma metodologia iterativa por meio de um algoritmo genético baseada nos parâmetros modais identificados experimentalmente, a qual foi implementada por meio da interação entre os softwares MATLAB® e ANSYS®. Assim como na identificação modal, a informação experimental limitada impôs algumas dificuldades extras ao processo de calibração, em especial com relação ao pareamento entre modos numéricos e experimentais. Mesmo com essas limitações, a metodologia aplicada provou ser eficaz e robusta ao estimar com precisão três parâmetros numéricos, além de propiciar melhoras

significativas em relação ao modelo numérico antes da calibração, comprovado pela redução de 8,71 % para 0,03 % da diferença percentual média entre frequências naturais numéricas e experimentais. Por fim, a resposta dinâmica do modelo foi validada por meio da comparação direta entre resultados simulados numericamente, com base em uma análise de interação dinâmica veículo-via, e coletados experimentalmente. Foram feitas comparações com o modelo antes e após a calibração, por meio das quais obteve-se excelente concordância entre as séries temporais experimentais e numéricas após a calibração do modelo. Com isso, concluiu-se que o processo de calibração foi capaz de melhorar significativamente o modelo numérico proposto.

**Palavras-chave:** Vagão de carga. Ensaio dinâmico. Otimização de modelos numéricos. Algoritmos genéticos. Interação veículo-via. Validação experimental.

## ABSTRACT

With the advancement of rail freight in the world and the consequent increase in speed and load transported by compositions, problems associated with the dynamics of rail vehicles have become increasingly frequent, requiring increasingly accurate methods to evaluate their effects. Therefore, this work presents an efficient methodology for the calibration and validation of a numerical model of a freight wagon using an iterative methodology, through a genetic algorithm and based on modal parameters experimentally identified in a dynamic test under real operating conditions. The dynamic tests involved the use of an onboard monitoring system, composed of a set of accelerometers and linear variable displacement transducers (LVDT's). The number and location of the sensors was severely conditioned by the space occupied by the transported load, as well as by restrictions associated with the loading and unloading of the wagon, thus, no interference with the vehicle operation was created. The data derived from the dynamic test were used, first, to identify the modal parameters of the carbody, that is, the natural frequencies, forms of vibration and damping coefficients, and second, to extract the time histories of accelerations and displacements in conditions of operation. The identification of dynamic properties was made through the application of operational modal analysis techniques to the data collected during vehicle circulation. The decision to adopt a minimalist experimental setup, which would not impact vehicle operation, resulted in extra difficulties for modal identification. However, even under unfavorable conditions, the first three rigid body modes of the carbody were identified, which served as the basis for model calibration. A simplified numerical finite element model of the freight wagon was developed and calibrated using an iterative methodology through a genetic algorithm and based on the identified modal parameters, which was implemented with the interaction between MATLAB® and ANSYS® software. As with modal identification, the limited experimental information imposed some extra difficulties on the calibration process, especially regarding the pairing between numerical and experimental modes. Even with these limitations, the methodology applied proved to be effective and robust in accurately estimating three numerical parameters, in addition to providing significant improvements in relation to the numerical model before calibration. These improvements were confirmed by the reduction from 8.71 % to 0.03 % of the average percentage difference between numerical and experimental natural frequencies.

Finally, the dynamic response of the model was validated by means of a direct comparison between numerically simulated results, based on a dynamic vehicle-track interaction analysis, and experimentally collected time history responses. Comparisons were made with the model before and after the calibration, through which excellent agreement was obtained between the experimental and numerical time series after the calibration of the model. Thus, it was concluded that the calibration process was able to significantly improve the numerical model.

**Keywords:** Freight wagon. Dynamic tests. Model updating. Genetic algorithm. Vehicle-track interaction. Experimental validation.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1-1 – INFRAESTRUTURA FERROVIÁRIA BRASILEIRA .....	27
FIGURA 1-2 – MATRIZ DE TRANSPORTES BRASILEIRA.....	28
FIGURA 1-3 – PRINCIPAIS PRODUTOS TRANSPORTADOS POR VIA FÉRREA EM 2020 .....	29
FIGURA 1-4 – COLAPSO DO VIADUTO <i>CAHIR</i> EM 2003 NA IRLANDA .....	30
FIGURA 2-1 – FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE UM SISTEMA DE 1 GDL NO PLANO DE LAPLACE .....	37
FIGURA 2-2 – MODOS DE VIBRAÇÃO DE UMA VIGA ENGASTADA COM 3 GDL .....	40
FIGURA 2-3 – MAGNITUDE E FASE DAS FUNÇÕES DE RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DE UM SISTEMA DE 3 GDL .....	40
FIGURA 2-4 – DECOMPOSIÇÃO MODAL DE UM SISTEMA DE MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE .....	43
FIGURA 2-5 – REPRESENTAÇÃO DE UM MODELO DE ESTADO CONTÍNUO EM DIAGRAMA DE BLOCOS.....	46
FIGURA 2-6 - REPRESENTAÇÃO DE UM MODELO DE ESTADO DISCRETO EM DIAGRAMA DE BLOCOS .....	47
FIGURA 2-7 – COMPOSIÇÃO DAS PRINCIPAIS FONTES DE AMORTECIMENTO EM ESTRUTURAS.....	49
FIGURA 2-8 – CURVA DE FORÇA POR DESLOCAMENTO: (A) AMORTECIMENTO VISCOZO, (B) AMORTECIMENTO DE COULOMB E (C) AMORTECIMENTO HISTERÉTICO.....	50
FIGURA 2-9 – AMORTECIMENTO DE RAYLEIGH .....	52
FIGURA 2-10 – FORMAS MODAIS (A) REAL E (B) COMPLEXA.....	55
FIGURA 2-11 – REPRESENTAÇÃO EM PLANO DE ARGAND (A) MODO POUCO COMPLEXO E (B) MODO MUITO COMPLEXO.....	56
FIGURA 2-12 – CÁLCULO DO MCF2 .....	56
FIGURA 3-1 – PRINCIPAIS TIPOS DE VAGÃO: (A) PLATAFORMA; (B) FECHADO; (C) HOPPER; (D) TANQUE E (E) GÔNDOLA .....	58
FIGURA 3-2 – PRINCIPAIS COMPONENTES DE UM VAGÃO.....	58
FIGURA 3-3 – DETALHE DA FIXAÇÃO DO RODEIRO EM UM VAGÃO SEM TRUQUES .....	59
FIGURA 3-4 – DIFERENTES SOLUÇÕES PARA A SUSPENSÃO DOS VAGÕES DE CARGA: (A) FEIXES DE MOLA E BIELAS UIC DUPLAS, (B) TRUQUE COM FEIXE DE MOLA E BIELAS UIC SIMPLES E (C) TRUQUE COM MOLAS HELICOIDAIS.....	60
FIGURA 3-5 – FEIXES DE MOLA: (A) TRAPEZOIDAL E (B) PARABÓLICO .....	61
FIGURA 3-6 – MODELO TEÓRICO DE UMA SUSPENSÃO COM AMORTECIMENTO POR FRICÇÃO .....	61
FIGURA 3-7 – CICLO HISTERÉTICO DE UM FEIXE DE MOLA PARABÓLICO COM RIGIDEZ VARIÁVEL .....	63
FIGURA 3-8 – DETALHES CONSTRUTIVOS DA BIELA DUPLA UIC .....	64
FIGURA 3-9 – MOVIMENTO PENDULAR DA BIELA DUPLA UIC: (A) VISÃO GERAL, (B) MOVIMENTO LONGITUDINAL, (C) MOVIMENTO LATERAL .....	65
FIGURA 3-10 – MODELO MULTICORPOS DE UM VAGÃO: (A) VISTA SUPERIOR, (B) LATERAL E (C) EM PLANTA..	67
FIGURA 3-11 – MODELO DE ELEMENTOS FINITOS DE UM VEÍCULO DE PASSAGEIROS: (A) CARROCERIA E (B) TRUQUE .....	68
FIGURA 3-12 – RESPOSTA EM FREQUÊNCIA DAS DIFERENTES GRANDEZAS DE RESPOSTA.....	71
FIGURA 3-13 – EFEITO PIEZOELÉTRICO .....	72
FIGURA 3-14 – PRINCIPAIS CONFIGURAÇÕES DOS ACELERÔMETROS PIEZOELÉTRICOS: (A) COMPRESSÃO, (B) CISALHAMENTO E (C) FLEXÃO .....	73
FIGURA 3-15 – REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DA CONSTRUÇÃO DE UM ACELERÔMETRO MEMS .....	75

FIGURA 3-16 – ELETRÔNICA INCORPORADA A UM ACELERÔMETRO MEMS COMERCIAL .....	76
FIGURA 3-17 – PRINCIPAIS COMPONENTES DE UM LVDT .....	78
FIGURA 3-18 – PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO DE UM LVDT .....	79
FIGURA 3-19 – CARACTERÍSTICA DAS SAÍDAS DE UM LVDT: (A) MAGNITUDE DA VOLTAGEM DIFERENCIAL AC; (B) ÂNGULO DE FASE DA VOLTAGEM DIFERENCIAL AC COM RELAÇÃO AO ENROLAMENTO PRIMÁRIO E (C) SAÍDA DC APÓS CONDICIONAMENTO.....	79
FIGURA 3-20 – PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO DE UM GEOFONE .....	81
FIGURA 3-21 – ALIASING DE UM SINAL .....	83
FIGURA 3-22 – FILTRAGEM ANTI-ALISING .....	84
FIGURA 3-23 – QUANTIZAÇÃO DE UM SINAL COM UM CONVERSOR DE 3 BITS .....	84
FIGURA 3-24 – MÓDULOS DE AQUISIÇÃO DE DADOS ACOPLADOS A UM CHASSI .....	85
FIGURA 3-25 – ENSAIO DE VIBRAÇÃO FORÇADA (A) COM MARTELO E (B) COM SHAKER .....	86
FIGURA 3-26 – INSTALAÇÃO DE UM SHAKER EM UM VEÍCULO DE PASSAGEIROS.....	87
FIGURA 3-27 – SETUP EXPERIMENTAL DE UM VEÍCULO DE CARGA .....	88
FIGURA 3-28 – MECANISMO EXCITAÇÃO POR ROLAGEM DEVIDO ÀS IRREGULARIDADES .....	89
FIGURA 3-29 – MODOS DE VIBRAÇÃO DE UMA TRELIÇA: (A) EXPERIMENTAL, (B) NUMÉRICO (MODO VERTICAL) E (C) NUMÉRICO (MODO TRANSVERSAL) .....	92
FIGURA 3-30 – PRINCIPAIS FORMAS DE FIXAÇÃO DE SENSORES E SUAS RESPECTIVAS RESPOSTAS EM FREQUÊNCIA .....	93
FIGURA 3-31 – ADAPTADORES PARA MONTAGEM DE ACELERÔMETROS.....	94
FIGURA 3-32 – VAGÃO GÔNDOLA CALIBRADO: (A) MODELO NUMÉRICO E (B) MODOS APÓS A CALIBRAÇÃO ....	98
FIGURA 3-33 – ENSAIO DINÂMICO DO VAGÃO TIPO BBN: (A) VISTA GERAL, (B) POSICIONAMENTO DOS ACELERÔMETROS NO TRUQUE E (C) POSICIONAMENTO DOS ACELERÔMETROS NA CARROCERIA.....	99
FIGURA 3-34 – ENSAIO DINÂMICO DO VAGÃO TIPO SHINKANSEN: (A) VISTA GERAL (B) VISTA INTERNA E (C) POSICIONAMENTO DOS ACELERÔMETROS NA CARROCERIA.....	100
FIGURA 3-35 – MODELO NUMÉRICO DE UM VAGÃO TIPO SGNSS .....	101
FIGURA 4-1 – MÉTODO ITERATIVO PARA A CALIBRAÇÃO DE MODELOS NUMÉRICOS BASEADO EM ALGORITMOS DE OTIMIZAÇÃO .....	104
FIGURA 4-2 – PRINCÍPIO DA ANÁLISE MODAL OPERACIONAL .....	106
FIGURA 4-3 – EXEMPLO DE DECOMPOSIÇÃO EM VALORES SINGULARES PARA UM SISTEMA COM 3 GDL .....	109
FIGURA 4-4 – CÁLCULO DAS FUNÇÕES DE AUTOCORRELAÇÃO: (A) SELEÇÃO DOS VALORES SINGULARES E (B) FUNÇÕES DE AUTOCORRELAÇÃO .....	110
FIGURA 4-5 – EXEMPLO DE DIAGRAMA DE ESTABILIZAÇÃO .....	116
FIGURA 4-6 – TÉCNICAS DE AMOSTRAGEM ESTOCÁSTICA: (A) MONTE CARLO E (B) HIPERCUBO LATINO .....	119
FIGURA 4-7 – EMPARELHAMENTO DE MODOS PELO CRITÉRIO MAC .....	121
FIGURA 4-8 – FLUXOGRAMA DE UM ALGORITMO GENÉTICO .....	126
FIGURA 4-9 – ETAPAS DA EVOLUÇÃO DE UMA POPULAÇÃO EM UMA OTIMIZAÇÃO BASEADA EM ALGORITMOS GENÉTICOS .....	127
FIGURA 4-10 – COMPARATIVO ENTRE POPULAÇÕES INICIAIS GERADAS PELO: (A) HIPERCUBO LATINO E (B) MONTE CARLO .....	128

FIGURA 4-11 – PROCESSO DE AVALIAÇÃO POR ORDENAÇÃO: (A) RESULTADO DA FUNÇÃO OBJETIVO E (B) VALORES DE APTIDÃO ESCALADOS .....	130
FIGURA 4-12 – PROCESSO DE AVALIAÇÃO POR TOPO: (A) RESULTADO DA FUNÇÃO OBJETIVO E (B) VALORES DE APTIDÃO ESCALADOS .....	130
FIGURA 4-13 – COMPARAÇÃO ENTRE A VARIÂNCIA AO LONGO DAS POPULAÇÕES PARA A AVALIAÇÃO POR ORDENAÇÃO E TOPO.....	131
FIGURA 4-14 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO MÉTODO SUS DE SELEÇÃO .....	132
FIGURA 4-15 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA SELEÇÃO PELO MÉTODO DA ROLETA.....	133
FIGURA 4-16 – OPERAÇÃO DE CRUZAMENTO: (A) UNIFORME; (B) EM UM PONTO; (C) EM DOIS PONTOS; (D) INTERMÉDIO, DE LAPLACE, HEURÍSTICO E ARITMÉTICO.....	136
FIGURA 4-17 – COMPARATIVO ENTRE UM ALGORITMO GENÉTICO (A) SEM MUTAÇÃO E (B) SEM CRUZAMENTO .....	139
FIGURA 4-18 – PROBLEMA DE INTERAÇÃO VEÍCULO-VIA: (A) VISÃO GERAL E (B) DETALHE DO CONTATO RODA-TRILHO.....	143
FIGURA 4-19 – PARAMETRIZAÇÃO DOS PERFIS: (A) TRILHO E (B) RODA .....	144
FIGURA 4-20 – POSSÍVEIS PONTOS DE CONTATO IDENTIFICADOS: (A) CONTATO VERDADEIRO E (B) SEPARAÇÃO ENTRE SUPERFÍCIES .....	145
FIGURA 4-21 - ESTRUTURA DA FERRAMENTA NUMÉRICA VSI .....	149
FIGURA 4-22 – ALGORITMO <i>DYNAMIC TIME WARPING</i> .....	152
FIGURA 5-1 – VAGÃO DE CARGA LAAGRSS: (A) VISÃO GERAL DO VAGÃO; (B) ROTA DE VIAGEM TÍPICA .....	154
FIGURA 5-2 – CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS DO VAGÃO LAAGRSS: (A) VISTA SUPERIOR DA PLATAFORMA; (B) VISTA FRONTAL DO RODEIRO; (C) VISTA SUPERIOR DO RODEIRO.....	154
FIGURA 5-3 – MODELO NUMÉRICO DO VAGÃO <i>LAAGRSS</i> .....	155
FIGURA 5-4 – FEIXE DE MOLA UTILIZADO NA SUSPENSÃO DO VAGÃO LAAGRSS: (A) DESENHO TÉCNICO; (B) DETALHE DA MONTAGEM COM A CAIXA DE EIXO.....	157
FIGURA 5-5 – RESPOSTA ESTÁTICA DO FEIXE DE MOLAS .....	158
FIGURA 5-6 – CICLO HISTERÉTICO DA MOLA PARA UMA POSIÇÃO DE EQUILÍBRIO DE 86 MM E AMPLITUDE DE 28,5 MM .....	159
FIGURA 5-7 – PRINCIPAIS MODOS NUMÉRICOS INICIAIS DE VIBRAÇÃO DO VAGÃO LAAGRSS: (A) <i>ROLLING</i> ; (B) <i>BOUNCING</i> ; (C) <i>PITCHING</i> .....	160
FIGURA 5-8 – REPRESENTAÇÃO ESQUEMÁTICA DA MONTAGEM EXPERIMENTAL .....	163
FIGURA 5-9 – IDENTIFICAÇÃO DOS PARÂMETROS MODAIS ATRAVÉS DO MÉTODO SSI-UPC.....	165
FIGURA 5-10 – PARÂMETROS MODAIS EXPERIMENTAIS DA CARROCERIA .....	165
FIGURA 5-11 – DETALHE DA SEGUNDA E TERCEIRA CONFIGURAÇÕES MODAIS.....	166
FIGURA 5-12 – FLUXOGRAMA DE IMPLEMENTAÇÃO DA ANÁLISE DE SENSIBILIDADE.....	168
FIGURA 5-13 – MATRIZ DE CORRELAÇÃO DE SPEARMAN.....	168
FIGURA 5-14 – HISTOGRAMA DE FREQUÊNCIAS: (A) PRIMEIRO MODO, (B) SEGUNDO MODO E (C) TERCEIRO MODO.....	170
FIGURA 5-15 – HISTOGRAMA DE MACS: (A) PRIMEIRO MODO, (B) SEGUNDO MODO E (C) TERCEIRO MODO .	171



FIGURA 5-16 – FLUXOGRAMA DE IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO ITERATIVO DE CALIBRAÇÃO BASEADO EM ALGORITMOS GENÉTICOS.....	173
FIGURA 5-17 – EVOLUÇÃO DA FUNÇÃO OBJETIVO AO LONGO DAS GERAÇÕES (MELHOR INDIVÍDUO E MÉDIA DA POPULAÇÃO): (A) GA1, (B) GA2, (C) GA3 E (D) GA4 .....	175
FIGURA 5-18 – RAZÃO DOS VALORES DOS PARÂMETROS NUMÉRICOS EM RELAÇÃO AOS LIMITES PARA AS OTIMIZAÇÕES GA1 A GA4 .....	176
FIGURA 5-19 – ERROS ENTRE AS RESPOSTAS MODAIS EXPERIMENTAIS E NUMÉRICAS, ANTES E APÓS A CALIBRAÇÃO: (A) FREQUÊNCIAS NATURAIS; (B) MAC .....	177
FIGURA 5-20 – MODELO NUMÉRICO DE TRÊS CAMADAS DA VIA: (A)ESQUEMATIZAÇÃO E (B) REPRESENTAÇÃO TRIDIMENSIONAL .....	179
FIGURA 5-21 – IRREGULARIDADES DA VIA MEDIDAS PELO VEÍCULO DE INSPEÇÃO CORRESPONDENTE AO TRECHO ESTUDADO DA LINHA DA BEIRA ALTA: (A) VEÍCULO DE INSPEÇÃO EM120; (B) NÍVEL LONGITUDINAL (VERTICAL); (C) NÍVEL DE ALINHAMENTO (LATERAL) .....	180
FIGURA 5-22 – COMPARAÇÃO DAS ACELERAÇÕES VERTICAIS EXPERIMENTAIS E NUMÉRICAS DA CARROCERIA PARA UM VEÍCULO EM VELOCIDADE DE 84,5 KM/H: (A) ANTES E (B) APÓS A CALIBRAÇÃO.....	182
FIGURA 5-23 – COMPARAÇÃO DO ESPECTRO DE POTÊNCIA DE ACELERAÇÃO VERTICAL EXPERIMENTAL E NUMÉRICA (ANTES E DEPOIS DA CALIBRAÇÃO) DA CARROCERIA PARA UM VEÍCULO COM VELOCIDADE DE 84,5 KM/H .....	184
FIGURA 5-24 – COMPARAÇÃO DAS ACELERAÇÕES VERTICAIS EXPERIMENTAIS E NUMÉRICAS APÓS CALIBRAÇÃO DA CARROCERIA PARA UM VEÍCULO COM VELOCIDADE DE 84,5 KM/H: (A) CONSIDERANDO O FILTRO NORMATIVO PASSA BANDA DE 0,4 A 10 Hz (B) CONSIDERANDO UM FILTRO PASSA-BAIXA DE 3,5 Hz ...	185
FIGURA 5-25 – COMPARAÇÃO DOS DESLOCAMENTOS VERTICAIS RELATIVOS ENTRE A CARROCERIA E A CAIXA DE EIXO EXPERIMENTAIS E NUMÉRICOS PARA UMA VELOCIDADE DE 84,5 KM/H DO VEÍCULO: (A) ANTES E (B) APÓS A CALIBRAÇÃO.....	186
FIGURA 5-26 – COMPARAÇÃO DO ESPECTRO DE POTÊNCIA DE DESLOCAMENTO VERTICAL RELATIVO ENTRE A CARROCERIA A CAIXA DE EIXO EXPERIMENTAL E NUMÉRICO (ANTES E DEPOIS DA CALIBRAÇÃO) PARA UM VEÍCULO COM VELOCIDADE DE 84,5 KM/H .....	187
FIGURA 5-27 – COMPARAÇÃO DA ACELERAÇÃO VERTICAL EXPERIMENTAL E NUMÉRICA NA CAIXA DE EIXO PARA UM VEÍCULO EM VELOCIDADE DE 84,5 KM/H: (A) ANTES E (B) APÓS A CALIBRAÇÃO.....	189
FIGURA 5-28 – COMPARAÇÃO DO ESPECTRO DE POTÊNCIA DE ACELERAÇÃO VERTICAL EXPERIMENTAL E NUMÉRICA (ANTES E DEPOIS DA CALIBRAÇÃO) DA CAIXA DE EIXO PARA UM VEÍCULO COM VELOCIDADE DE 84,5 KM/H.....	190

## LISTA DE TABELAS

TABELA 5-1 – PROPRIEDADES MECÂNICAS E GEOMÉTRICAS DO MODELO NUMÉRICO DO VAGÃO LAAGRSS ..	156
TABELA 5-2 – PRINCIPAIS CARACTERÍSTICAS DOS SENSORES EMBARCADOS NO VAGÃO.....	162
TABELA 5-3 – VARIÁVEIS DE PROJETO ÓTIMAS PARA CADA EXECUÇÃO DE OTIMIZAÇÃO .....	176
TABELA 5-4 – PROPRIEDADES DOS DIFERENTES COMPONENTES DA PISTA .....	179
TABELA 5-5 – VALOR DOS INDICADORES $nMAE_{MAG}$ E $nMAE_{TOP0}$ CALCULADOS COM BASE NAS ACELERAÇÕES NA CARROCERIA ANTES E APÓS A CALIBRAÇÃO DO MODELO .....	183
TABELA 5-6 – VALOR DOS INDICADORES $nMAE_{MAG}$ E $nMAE_{TOP0}$ CALCULADOS COM BASE NOS DESLOCAMENTOS RELATIVOS ENTRE CARROCERIA E CAIXA DE EIXO ANTES E APÓS A CALIBRAÇÃO DO MODELO .....	187

## LISTA DE QUADROS

QUADRO 3-1 – COMPARATIVO ENTRE AS PRINCIPAIS CONFIGURAÇÕES DOS ACELERÔMETROS PIEZOELÉTRICOS .....	73
QUADRO 3-2 – EXEMPLOS DE ESPECIFICAÇÕES ENCONTRADAS EM ACELERÔMETROS PIEZOELÉTRICOS COMERCIAIS.....	74
QUADRO 3-3 – EXEMPLOS DE ESPECIFICAÇÕES ENCONTRADAS EM ACELERÔMETROS MEMS COMERCIAIS ..	77
QUADRO 3-4 – EXEMPLOS DE ESPECIFICAÇÕES ENCONTRADAS EM LVDTs COMERCIAIS.....	80
QUADRO 4-1 – COMPARATIVO ENTRE ALGORITMOS CLÁSSICOS DE OTIMIZAÇÃO E ALGORITMOS GENÉTICOS	125
QUADRO 4-2 – COMPARATIVO ENTRE OS MÉTODOS DE AMOSTRAGEM ESTOCÁSTICOS.....	134

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Letras romanas maiúsculas

$H(s)$	Função de transferência
$H(j\omega)$	Função de resposta em frequência
<b>M</b>	Matriz de massa
<b>C</b>	Matriz de amortecimento
<b>K</b>	Matriz de rigidez
$H(s)$	Matriz das funções de transferência
$H(j\omega)$	Matriz das funções de resposta em frequência
<b>B<sub>2</sub></b>	Matriz de indexação das entradas do modelo em espaços de estado
<b>I</b>	Matriz identidade
<b>A<sub>c</sub></b>	Matriz de estado em tempo contínuo
<b>B<sub>c</sub></b>	Matriz de entrada em tempo contínuo
<b>C<sub>a</sub></b>	Matriz de saída em tempo contínuo para aceleração
<b>C<sub>v</sub></b>	Matriz de saída em tempo contínuo para velocidade
<b>C<sub>d</sub></b>	Matriz de saída em tempo contínuo para deslocamento
<b>C<sub>c</sub></b>	Matriz de saída em tempo contínuo
<b>D<sub>c</sub></b>	Matriz de transmissibilidade direta em tempo contínuo
<b>A<sub>d</sub></b>	Matriz de estado em tempo discreto
<b>B<sub>d</sub></b>	Matriz de entrada em tempo discreto
<b>C<sub>d</sub></b>	Matriz de saída em tempo discreto
<b>D<sub>d</sub></b>	Matriz de transmissibilidade direta em tempo discreto
$U$	Amplitude do movimento oscilatório
$\mathcal{W}_d$	Energia dissipada por período de oscilação
$F_S$	Força no feixe de molas
$F_{Env}$	Função envelope de força do feixe de molas
$F_r$	Força residual do feixe de molas
$C$	Capacitância
$A$	Área
$N_{Iterv}$	Número de discretização do conversor analógico digital
$N_{bits}$	Número de bits do conversor analógico digital

$R_y$	Matriz das funções de correlação em coordenadas físicas
$R_q$	Matriz das funções de correlação em coordenadas modais
$G_y$	Matriz de densidade espectral em coordenadas físicas
$G_q$	Matriz de densidade espectral em coordenadas modais
$S$	Matriz de valores singulares
$U$ e $V$	Matrizes de vetores singulares
$Q_{co}$ , $S_{co}$ e $R_{co}$	Matrizes de covariância entre ruídos de processo e medição
$G_{co}$	Matriz de covariância no próximo estado com relação a saída
$K_a$	Matriz de ganho do filtro de Kalman
$P_{co}$	Matriz de covariância dos estados
$\hat{X}$	Sequência de estados do filtro de Kalman
$H_a$	Matriz de Hankel
$P_j$	Projeção de respostas futuras sobre as passadas
$O$	Matriz de observabilidade
$S_{yy}$	Matriz dos auto espectros das respostas do modelo em espaços de estado
$R$	Resposta genérica
$P$	Parâmetro numérico qualquer
$N_R$	Número total de reprodutores em uma população
$R_f$	Soma da parte fracionária dos valores de aptidão escalados de todos os indivíduos
$R_p$	Reprodutor qualquer
$D_{ES}$	Descendente qualquer
$Lb$ e $Ub$	Limites superior e inferior de um gene
$S_{scale}$	Taxa de escala do desvio padrão da função de mutação gaussiana
$S_{shrink}$	Taxa de encolhimento do desvio padrão da função de mutação gaussiana
$N_{Gen}$	Número máximo de gerações
$T^{tr}$ e $T^{tw}$	Matrizes de transformação do sistema de coordenadas do trilho e da roda para o sistema do elemento alvo
$F_n$	Força de contato normal de Hertz
$K_h$	Coefficiente de rigidez generalizado de Hertz

<b>R</b>	Vetor das forças internas dos elementos do sistema de interação veículo-via
<b>F</b>	Vetor das forças externas aplicadas aos nós do sistema de interação veículo-via
<b>P</b>	Vetor das forças externas conhecidas aplicadas aos nós do sistema de interação veículo-via
<b>D</b>	Matrizes de transformação de coordenadas entre forças
<b>S<sub>r</sub></b>	Vetor contendo reações de apoio
<b>X</b>	Vetor contendo forças de contato
<b>H</b>	Matrizes de transformação de coordenadas entre deslocamentos
<b>E<sub>fase</sub></b>	Erro de defasamento global
<b>A<sup>[ts+w]</sup></b>	Vetor contendo dados numéricos compensados pela defasagem temporal e alinhados não linearmente no tempo
<b>B<sup>[ts+w]</sup></b>	Vetor contendo dados experimentais compensados pela defasagem temporal e alinhados não linearmente no tempo
<b>A<sup>[ts+d+w]</sup></b>	Vetor contendo derivadas dos dados numéricos compensados pela defasagem temporal e alinhados não linearmente no tempo
<b>B<sup>[ts+d+w]</sup></b>	Vetor contendo derivadas dos dados experimentais compensados pela defasagem temporal e alinhados não linearmente no tempo
<b>I</b>	Momento de inércia
<b>L</b>	Comprimento
<b>W</b>	Largura
<b>H</b>	Altura
<b>E</b>	Módulo de elasticidade

### **Letras romanas minúsculas**

<b>f<sub>I</sub></b>	Forças de inércia
<b>f<sub>D</sub></b>	Forças dissipativas
<b>f<sub>S</sub></b>	Forças restauradores
<b>p</b>	Força de excitação externa
<b>m</b>	Massa
<b>z</b>	Posição em função do tempo no sistema dinâmico
<b>c</b>	Constante de amortecimento viscoso
<b>k</b>	Constante de rigidez

$h$	Função de resposta ao impulso
$t$	Tempo
$s$	Variável de Laplace
$j$	Unidade imaginária ( $\sqrt{-1}$ )
$\mathbf{z}$	Vetor contendo as posições em função do tempo no sistema dinâmico
$\mathbf{p}$	Vetor das forças de excitação externas
$\mathbf{q}$	Vetor de coordenadas modais
$q$	Coordenada modal
$f$	Carga modal
$\mathbf{u}$	Vetor de entradas do modelo de espaços de estado
$\mathbf{x}$	Vetor de estados
$\mathbf{y}$	Vetor das saídas observáveis do modelo de espaços de estado
$c_{eq}$	Constante de amortecimento viscoso equivalente
$c_{cr}$	Constante de amortecimento crítica
$a_0, a_1$	Constantes do amortecimento de Rayleigh
$c_h$	Rigidez do feixe de molas sem contato da lâmina adicional
$c_z$	Rigidez do feixe de molas com contato da lâmina adicional
$z_0$	Posição de contato da lâmina adicional do feixe de molas
$d_p$	Distância entre placas do capacitor
$f_{sp}$	Frequência de amostragem
$f_{Nyq}$	Frequência de Nyquist
$f$	Frequência
$\mathbf{w}$	Vetor contendo os ruídos de processo
$\mathbf{v}$	Vetor contendo os ruídos de medição
$\hat{\mathbf{x}}$	Estado de um filtro de Kalman
$r_{xy}$	Coefficiente de correlação de Pearson
$r_{xy}^s$	Coefficiente de correlação de Spearman
$f_o$	Função objetivo
$r$	Resíduo dado pela diferença entre resposta modal numérica e experimental

$a$ e $b$	Pesos dos resíduos das frequências e dos MACs
$n_i$	Valor da classificação do indivíduo $i$
$c_i^1$	$i$ -ésimo gene do descendente $D_{Es1}$
$rand$	Número aleatório entre zero e um
$bl$	Número aleatório extraído de uma distribuição de Laplace
$\mathbf{u}_R^t$ e $\mathbf{u}_w^t$	Vetores posição de um ponto na superfície do trilho e da roda
$f_r$ e $f_w$	Funções de parametrização dos perfis do trilho e das rodas
$\mathbf{n}_r^t$	Vetor normal à superfície de contato no trilho
$\mathbf{d}_{wr}^t$	Distância vetorial entre um ponto na superfície da roda e do trilho
$\mathbf{a}$	Vetor contendo os deslocamentos nodais do sistema veículo-via
$\mathbf{v}^{ce}$ e $\mathbf{v}^{te}$	Vetores de deslocamento do ponto de contato nos elementos de contato e alvo
$\mathbf{r}$	Vetor contendo irregularidades da via
$nMAE_{mag}$	Erro médio absoluto normalizado associado à magnitude
$nMAE_{topo}$	Erro médio absoluto normalizado associado à topologia
$n_*$	Número de amostras desfasadas
$c_\theta$ e $r_\theta$	Constantes da métrica de erro de desfasamento global

### Letras gregas maiúsculas

$\Phi_m$	Matriz contendo os vetores das ordenadas modais normalizadas pela matriz de massa
$\Phi$	Matriz contendo os vetores das ordenadas modais
$\Psi_c$	Matriz contendo os autovetores da matriz de estado em tempo contínuo
$\Lambda_c$	Matriz contendo os autovalores da matriz de estado em tempo contínuo
$\Phi_l$	Matriz contendo os vetores das ordenadas modais observáveis do modelo de espaços de estado
$\Psi_d$	Matriz contendo os autovetores da matriz de estado em tempo discreto
$\Omega$	Frequência angular de excitação forçada
$\Lambda_{co}$	matriz de covariância das repostas
$\Psi_F$	Vetor contendo resíduos de força do método de Newton



## Letras gregas minúsculas

$\omega_d$	Frequência natural angular amortecida
$\zeta$	Fator de amortecimento
$\omega_n$	Frequência natural angular não amortecida
$\omega$	Frequência angular
$\lambda$	Pólo da função de transferência
$\Phi_{mk}$	Vetor contendo as ordenadas modais normalizadas pela matriz de massa
$\varphi$	Vetor contendo as ordenadas modais
$\lambda_c$	Autovalores da matriz de estado em tempo contínuo
$\lambda_d$	Autovalores da matriz de estado em tempo discreto
$\zeta_{eq}$	Fator de amortecimento viscoso equivalente
$\theta$	Ângulo de fase
$\delta$	Deflexão no feixe de molas
$\beta$	Constante de decaimento do ciclo histerético do feixe de molas
$\mu_0$	Coefficiente de fricção do feixe de molas
$\varepsilon$	Permissividade elétrica
$\gamma_{cr}$	Taxa de cruzamento
$\sigma_{i,k}$	Desvio padrão do i-ésimo gene na k-ésima geração
$\alpha$	Parâmetro do método HHT- $\alpha$
$\gamma_H$ e $\beta_H$	Parâmetros de controle da aproximação da aceleração e da velocidade pelo método HHT- $\alpha$ .
$\varepsilon_t$	Tolerância numérica
$\rho$	Densidade

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

APDL	<i>ANSYS Parametric Design Language</i>
DTW	<i>Dynamic time warping</i>
EFDD	Enhanced Frequency Domain Decomposition (Decomposição no domínio da frequência melhorada)
EMAC	<i>Energy Modal Assurance Criterion</i>
FRF	Função de reposta em frequência
GA	Genetic algorithm (Algoritmos genéticos)
GDL	Grau de liberdade
HHT	Método de Hilber-Hughes-Taylor
IEPE	<i>Integrated Electronics Piezo-Electric</i> (Piezoelétrico com eletrônica integrada)
LVDT	<i>linear variable differential transformer</i> (transdutor de deslocamento variável linear)
MAC	<i>Modal Assurance Criterion</i> (Critério de garantia modal)
MEF	Método dos elementos finitos
MEMS	<i>Micro-electro-mechanical systems</i> (sistemas micro eletromecânicos)
OMA	Operational Modal Analysis (Análise modal operacional)
RAM	<i>Random Access Memory</i> (Memória de acesso aleatório)
SSI	<i>Stochastic Subspace Identification</i> (Identificação estocástica em subespaços)
SUS	<i>Stochastic Universal Sampling</i> (Amostragem universal estocástica)
SVD	Singular Value Decomposition (Decomposição em valores singulares)
UIC	União Internacional dos Caminhos de Ferro
UPC	<i>Unweighted Principal Components</i> (Componentes principais não ponderadas)
VAE	Valor de aptidão escalado

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>27</b>
1.1	Contextualização.....	27
1.2	Objetivos.....	31
1.3	Justificativa .....	31
1.4	Organização da dissertação.....	33
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO DE DINÂMICA ESTRUTURAL .....</b>	<b>35</b>
2.1	Sistemas de um grau de liberdade .....	35
2.2	Sistemas de múltiplos graus de liberdade.....	38
2.2.1	<i>Formulação por transformadas de Laplace.....</i>	<i>38</i>
2.2.2	<i>Formulação modal .....</i>	<i>41</i>
2.2.3	<i>Representação em espaço de estado .....</i>	<i>44</i>
2.3	Amortecimento.....	48
2.3.1	<i>Aspectos gerais.....</i>	<i>49</i>
2.3.2	<i>Amortecimento proporcional.....</i>	<i>51</i>
2.3.2.1	<i>Amortecimento de Rayleigh .....</i>	<i>51</i>
2.3.2.2	<i>Amortecimento modal .....</i>	<i>53</i>
2.3.3	<i>Amortecimento não proporcional.....</i>	<i>54</i>
<b>3</b>	<b>MODELAÇÃO NUMÉRICA E ENSAIOS EXPERIMENTAIS DE VEÍCULOS FERROVIÁRIOS DE CARGA.....</b>	<b>57</b>
3.1	Vagões ferroviários de carga .....	57
3.1.1	<i>Tipos.....</i>	<i>57</i>
3.1.2	<i>Suspensões .....</i>	<i>59</i>
3.2	Modelos numéricos de veículos ferroviários .....	65
3.2.1	<i>Modelos de corpos rígidos.....</i>	<i>66</i>
3.2.2	<i>Modelos flexíveis.....</i>	<i>68</i>
3.3	Ensaio dinâmicos de vagões ferroviários.....	69
3.3.1	<i>Instrumentação.....</i>	<i>70</i>
3.3.1.1	<i>Transdutores de medição de reposta dinâmica .....</i>	<i>71</i>
3.3.1.2	<i>Sistemas de aquisição de dados.....</i>	<i>82</i>
3.3.2	<i>Técnicas de ensaio .....</i>	<i>85</i>
3.3.2.1	<i>Ensaio em condições estacionárias .....</i>	<i>85</i>
3.3.2.2	<i>Ensaio em condições operacionais.....</i>	<i>89</i>
3.3.3	<i>Instalação de sensores.....</i>	<i>90</i>
3.3.3.1	<i>Posicionamento de sensores .....</i>	<i>90</i>
3.3.3.2	<i>Fixação de sensores .....</i>	<i>92</i>
3.3.4	<i>Pré-processamento de registros .....</i>	<i>94</i>
3.4	Calibração de modelos numéricos de vagões ferroviários .....	97
<b>4</b>	<b>METODOLOGIA DE CALIBRAÇÃO E VALIDAÇÃO DE MODELOS DE VEÍCULOS FERROVIÁRIOS EM CONDIÇÕES OPERACIONAIS .....</b>	<b>103</b>
4.1	Considerações iniciais .....	103
4.2	Técnicas de identificação modal operacional .....	105
4.2.1	<i>Decomposição no domínio da frequência melhorada (EFDD) .....</i>	<i>107</i>
4.2.2	<i>Identificação Estocástica em Subespaços com base nas séries temporais (SSI-DATA).....</i>	<i>110</i>
4.3	Calibração de modelos numéricos pelo método iterativo.....	116

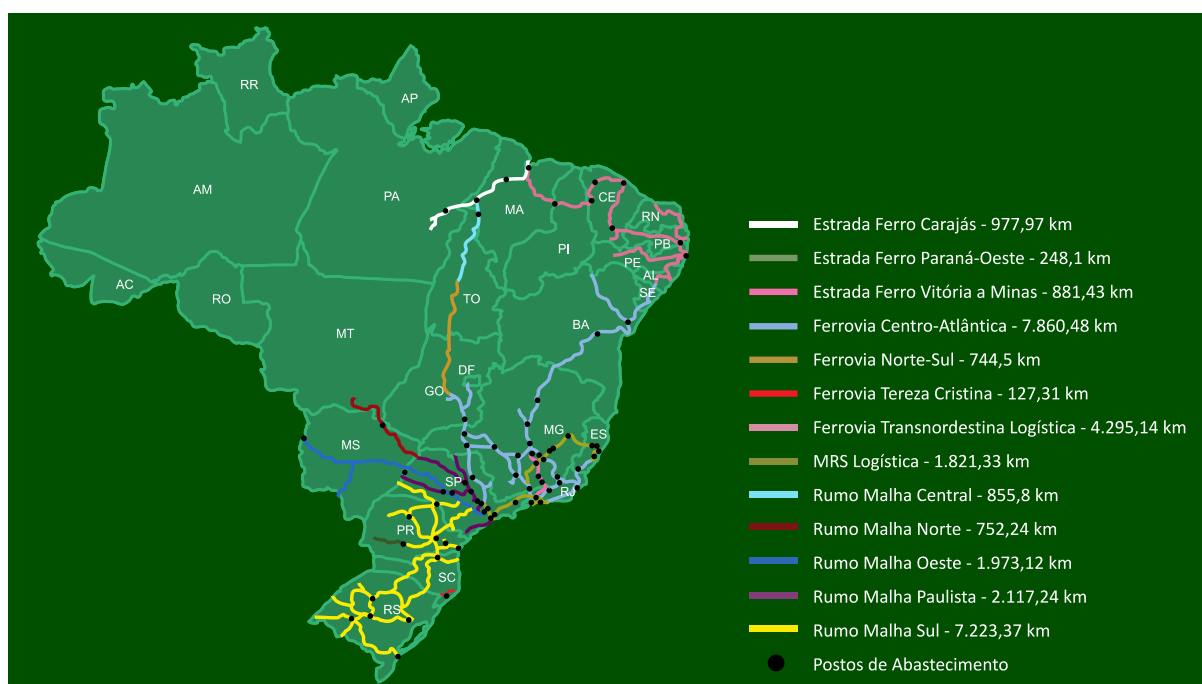
4.3.1	<b>Análise de sensibilidade.....</b>	<b>117</b>
4.3.2	<b>Emparelhamento de modos .....</b>	<b>120</b>
4.3.3	<b>Otimização .....</b>	<b>122</b>
4.3.3.1	<i>Função objetivo.....</i>	123
4.3.3.2	<i>Algoritmos genéticos.....</i>	124
4.4	<b>Validação de modelos numéricos.....</b>	<b>141</b>
4.4.1	<b>Metodologia de interação veículo-via.....</b>	<b>143</b>
4.4.2	<b>Métricas para validação dinâmica de modelos.....</b>	<b>150</b>
5	<b>ESTUDO DE CASO E DISCUSSÃO .....</b>	<b>153</b>
5.1	<b>Descrição do vagão Laagrss.....</b>	<b>153</b>
5.2	<b>Modelo numérico.....</b>	<b>155</b>
5.3	<b>Testes dinâmicos em condições operacionais .....</b>	<b>160</b>
5.3.1	<i>Descrição .....</i>	161
5.3.2	<i>Identificação modal.....</i>	164
5.4	<b>Calibração .....</b>	<b>166</b>
5.4.1	<i>Análise de sensibilidade.....</i>	167
5.4.2	<i>Otimização .....</i>	172
5.5	<b>Validação das respostas dinâmicas .....</b>	<b>178</b>
5.5.1	<i>Considerações iniciais .....</i>	178
5.5.2	<i>Modelo da via.....</i>	178
5.5.3	<i>Simulação do comportamento dinâmico do vagão de carga .....</i>	180
5.5.3.1	<i>Aceleração vertical da carroceria .....</i>	181
5.5.3.2	<i>Deslocamento vertical relativo entre carroceria e caixa de eixo.....</i>	185
5.5.3.3	<i>Aceleração vertical na caixa de eixo .....</i>	188
6	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>191</b>
6.1	<b>Conclusões .....</b>	<b>191</b>
6.2	<b>Sugestões para trabalhos futuros .....</b>	<b>194</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>195</b>

## 1 INTRODUÇÃO

### 1.1 Contextualização

O transporte ferroviário de cargas se destaca por sua grande competitividade em trajetos de médias e longas distâncias, sendo um dos modais mais indicados para o transporte de grandes volumes de carga com baixo valor agregado. Atualmente o Brasil dispõe da oitava maior malha ferroviária do mundo, com quase 30 mil km de extensão compostos por 13 concessões ferroviárias (Figura 1-1) (EPL, 2021). Toda esta infraestrutura é praticamente dedicada ao transporte exclusivo de cargas, havendo transito de passageiros somente nas Estradas de Ferro Vitória Minas e Carajás (MI, 2018).

**Figura 1-1 – Infraestrutura ferroviária Brasileira**

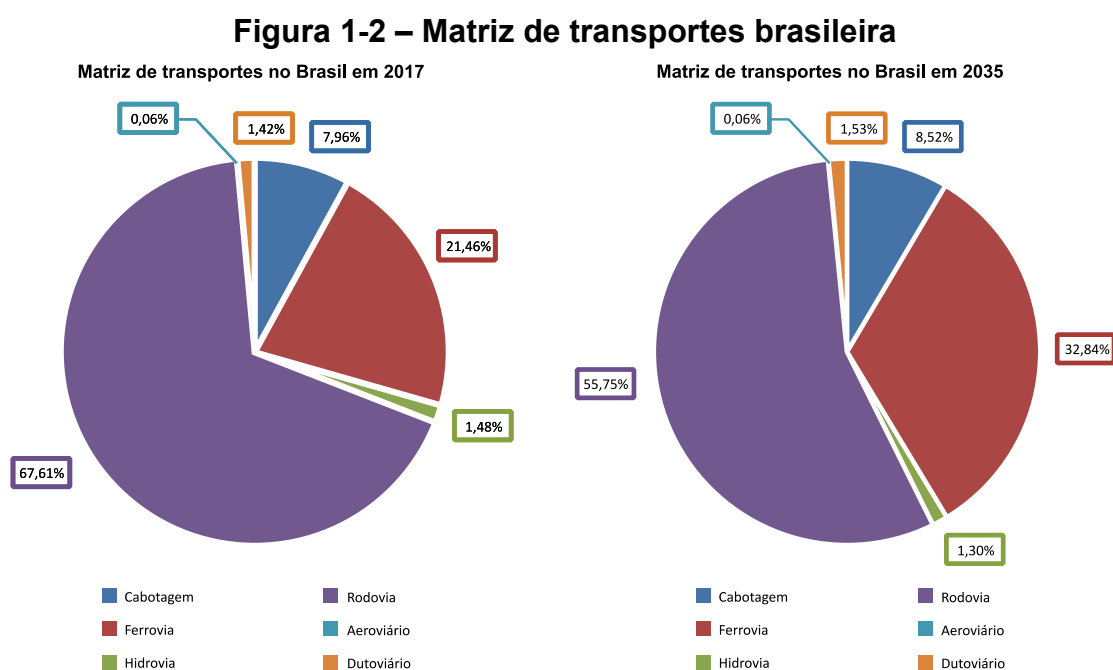


Fonte: Adaptada de (EPL, 2021).

Embora se destaque em termos de extensão absoluta, a malha ferroviária brasileira ainda é bastante pequena se comparada à de países com dimensões equiparáveis, como os Estados Unidos da América e a China com 293 mil km e 124 mil km respectivamente (EPL, 2021). Como pode-se observar no mapa da Figura 1-1 estados como o Mato Grosso, Mato Grosso do Sul e Goiás, grandes responsáveis pela produção de grãos no agronegócio brasileiro, praticamente não são atendidos por ferroviárias, indicando um grande potencial para a expansão da malha.

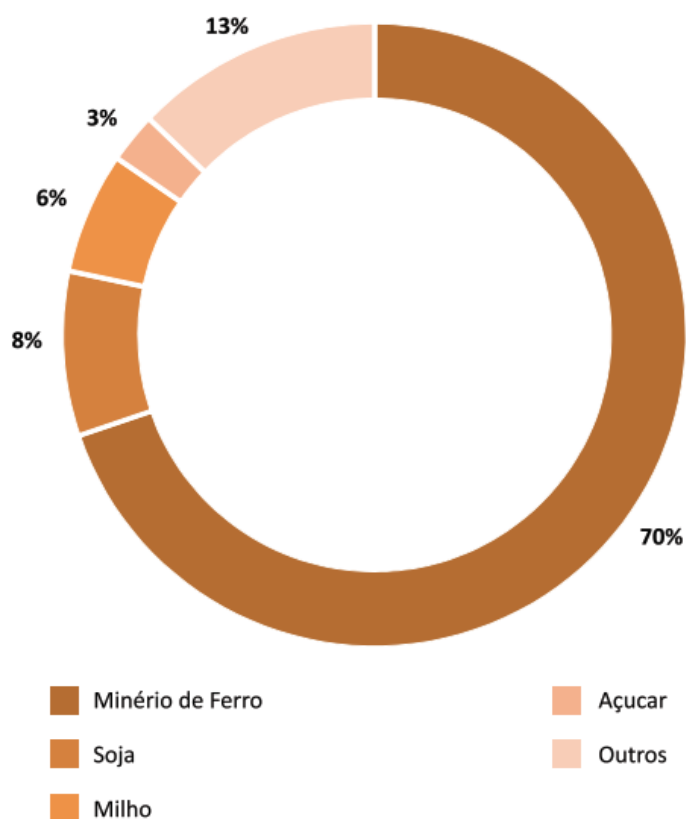
Além disso, diferentemente do minério de ferro, em que 95 % da carga exportada chega aos portos pelos trilhos, somente 45 % das commodities agrícolas são transportadas pelas vias férreas indicando mais uma vez o potencial de crescimento da infraestrutura ferroviária brasileira nas regiões norte e centro-oeste.

A Figura 1-2 apresenta a composição da matriz de transportes brasileira no ano de 2017, bem como sua projeção para o ano de 2035, indicando que nos próximos anos o modal ferroviário deve tomar bastante espaço do transporte rodoviário de cargas.



Os principais produtos transportados são: Minério de ferro, soja, milho e açúcar totalizando 87 % de toda a carga movimentada pelas ferrovias, sendo que, somente o minério de ferro, é responsável por 70 % (Figura 1-3). Esta predominância do transporte de cargas com alta densidade torna as ferrovias brasileiras, em especial aquelas que cortam o estado de Minas Gerais, especialmente adaptadas ao transporte de cargas pesadas “*heavy haul*” (ASSIS; DALTO; FERREIRA, 2017).

**Figura 1-3 – Principais produtos transportados por via férrea em 2020**



Fonte: Adaptada de (EPL, 2021).

Com o passar dos anos, tanto no Brasil como no mundo, o tráfego ferroviário de cargas passou por diversas mudanças, buscando sempre se manter competitivo em relação aos demais meios de transporte. Como consequência, as cargas por eixo, a velocidade e o número de trens em operação vêm crescendo a cada dia. No entanto, isso também leva a um aumento significativo nas ações dinâmicas e vibrações induzidas pela movimentação destes veículos nas estruturas ferroviárias (MONTENEGRO et al., 2015; PEIXER et al., 2020; RIBEIRO et al., 2013). O aumento das solicitações dinâmicas trazem grande preocupação aos engenheiros quanto à estabilidade e durabilidade das estruturas (VIANA et al., 2019), bem como quanto a segurança de operação dos veículos (MALVEIRO et al., 2018b; MONTENEGRO et al., 2020a, 2020b, 2020c).

A Figura 1-4 a seguir ilustra o colapso do Viaduto *Cahir*, ocorrido em 2003 na Irlanda após o descarrilamento de uma composição ferroviária de carga. Investigações após o acidente revelaram que a interação dinâmica entre o viaduto e os vagões, que eram extremamente rígidos, fez com que estes saltassem para fora dos trilhos, provocando o descarrilamento e o colapso da estrutura (GILBERT, 2009).

**Figura 1-4 – Colapso do viaduto *Cahir* em 2003 na Irlanda**



**Fonte: (GILBERT, 2009).**

Frente às fortes expectativas de aumento da malha ferroviária brasileira e buscando reduzir o risco de acidentes faz-se cada vez mais primordial aos engenheiros brasileiros a adequada compreensão dos esforços aos quais a infraestrutura ferroviária está sujeita. Portanto, a necessidade de se desenvolver ferramentas numéricas precisas capazes de modelar a complexa interação veículo-via tornou-se essencial para a previsão da vida útil e segurança dos ativos ferroviários (MONTENEGRO et al., 2015; TICONA MELO et al., 2020).

As técnicas utilizadas no estudo da interação dinâmica veículo-via baseiam-se, em geral, na modelagem numérica de ambos os sistemas, podendo ser divididas em basicamente dois grupos: formulações desacopladas e acopladas. Com relação à primeira, as equações de movimento da estrutura e do veículo são resolvidas separadamente em um processo iterativo até que haja a convergência das forças dinâmicas no contato. Já nas técnicas acopladas, as equações são resolvidas de maneira simultânea, gerando um sistema de equações dependente do tempo.

Independentemente da metodologia de interação utilizada nas simulações, a qualidade dos resultados é fortemente dependente da confiabilidade da modelagem da via e do veículo. Estudos recentes envolvendo a validação de modelos dinâmicos demonstram que estes podem ser significativamente melhorados por procedimentos adequados de calibração de seus parâmetros numéricos (TICONA MELO et al., 2020).

A calibração de modelos numéricos de veículos ferroviários é, em geral, feita com base em características dinâmicas dos veículos, nomeadamente frequências naturais e modos de vibração, derivadas de testes experimentais. Tipicamente as



metodologias mais empregadas baseiam-se na minimização de uma função objetivo, composta pelas diferenças entre frequências naturais e formas modais numéricas e experimentais, recorrendo a algoritmos de otimização e sucessivas variações dos parâmetros numéricos.

Embora ainda seja um assunto não muito explorado na literatura, alguns estudos envolvendo a calibração de vagões ferroviários, com base em parâmetros modais, podem ser encontrados em (AKIYAMA et al., 2020; RIBEIRO et al., 2013; SZAFRAŃSKI, 2021) e são focados em veículos de passageiros. No entanto, quando se trata de vagões de carga, raros são os estudos envolvendo a calibração destes veículos.

Frente a contextualização apresentada, este trabalho propõe uma metodologia eficiente para a calibração e validação do modelo numérico de um veículo ferroviário de transporte de carga, a partir de dados experimentais obtidos em uma configuração (*setup*) experimental minimalista.

## **1.2 Objetivos**

Este trabalho tem como objetivo propor uma metodologia completa e passível de aplicação prática de engenharia para a calibração do modelo numérico de um vagão ferroviário de carga com base em parâmetros modais experimentais. Visando manter a aplicabilidade prática, objetiva-se que esta metodologia seja capaz de prover melhoras significativas ao modelo mesmo tendo como base informação experimental limitada, oriunda de montagens experimentais bastante condicionadas de modo a respeitar todas as restrições associadas à logística de operação destes veículos.

A validação da metodologia proposta será realizada por meio da comparação entre séries temporais simuladas das respostas dinâmicas, obtidas em análises de interação veículo-via com o modelo calibrado, e respostas experimentais coletadas no veículo real durante sua operação.

## **1.3 Justificativa**

Este trabalho justifica-se por trazer informações relevantes a aspectos que ainda não estão suficientemente detalhados na literatura, nomeadamente:

- a) Desenvolvimento de uma metodologia de calibração de modelos dinâmicos de veículos ferroviários com base em informações experimentais limitadas. Esta

abordagem é particularmente valiosa em vagões de carga onde a logística associada à carga e descarga, bem como o espaço ocupado pela carga transportada, impõem restrições significativas ao número e localização dos sensores instalados ao veículo. Em algumas situações específicas, apenas um ou dois pontos de medição são viáveis e nem sempre nas posições ideais para caracterizar o comportamento dinâmico do veículo. Assim, nessas circunstâncias, uma técnica de otimização do modelo mais robusta e eficiente é necessária como aquela baseada na aplicação de algoritmos evolutivos como o algoritmo genético. A maioria dos trabalhos publicados são especificamente focados na calibração experimental de veículos de passageiros e normalmente baseados em configurações experimentais envolvendo um número considerável de sensores posicionados ao longo da carroceria e truques dos veículos (AKIYAMA et al., 2020; RIBEIRO et al., 2013), tornando suas aplicações, muitas vezes, inviáveis à engenharia de transporte de cargas pesadas;

- b) Aplicação de metodologias de análise modal operacional (OMA) para identificação modal de veículos ferroviários em condições reais de operação. Em trabalhos anteriores, essas metodologias já foram aplicadas em testes dinâmicos dedicados executados com o veículo em posição de repouso (RIBEIRO et al., 2013; RIBEIRO; CALÇADA; MONTENEGRO, 2021). No entanto, este tipo de vagões de carga tem operação intensa e, conseqüentemente, a mobilização de um veículo destes para testes pode durar vários dias tornando-se, na maioria dos casos, inviável;
- c) Validação experimental do modelo numérico do vagão de cargas em condições operacionais utilizando um layout dedicado e minimalista de sensores, incluindo acelerômetros e transdutores de deslocamento, e envolvendo componentes distintos do veículo, nomeadamente a carroceria, suspensões e rodeiros. Na literatura atual existem poucos estudos relacionados à validação da dinâmica de vagões em condições reais de operação (ZHAI et al., 2013), e menos ainda aqueles que realizam uma comparação direta entre séries temporais de resultados numéricos e experimentais.

## 1.4 Organização da dissertação

A presente dissertação foi organizada em cinco capítulos, abordando os seguintes assuntos:

No Capítulo 1 são apresentados aspectos gerais para o enquadramento deste trabalho, bem como os aspectos que justificam sua realização e quais objetivos pretendem ser alcançados.

No Capítulo 2 é apresentado o referencial teórico responsável por prover suporte às metodologias que serão apresentadas e aplicadas nos capítulos seguintes. Primeiramente são apresentados conceitos básicos de dinâmica de estruturas, com um enfoque no estudo de sistema de múltiplos graus de liberdade por meio de formulações no domínio da frequência e formulações de estado. Ainda relativo à dinâmica de estruturas são apresentados alguns conceitos importantes relativos à natureza física do amortecimento, bem como algumas técnicas de modelagem e construção de matrizes de amortecimento.

No Capítulo 3 são descritas de maneira breve as principais especificidades construtivas dos vagões ferroviários de carga. Nesta seção é dada especial atenção ao comportamento dinâmico vertical de suspensões de feixes de mola, assim como as principais abordagens comumente adotadas para a construção de modelos dinâmicos de veículos ferroviários. Em seguida são apresentadas as principais técnicas utilizadas pelos autores para a realização de ensaios dinâmicos de veículos ferroviários, bem como os principais tipos de sensores utilizados, recomendações para o seu adequado posicionamento e são tratadas de algumas técnicas básicas para pré-processamento e correção de anomalias em registros experimentais. Por fim, ao final do capítulo, é apresentada uma revisão de trabalhos relevantes na área da calibração de modelos numéricos.

No Capítulo 4 são apresentadas as bases teóricas que envolvem a calibração e validação de modelos numéricos de veículos ferroviários com base em informações modais experimentais. Primeiramente serão apresentados os fundamentos matemáticos por trás das técnicas de identificação modal mais utilizadas para extração das frequências naturais e configurações modais dos veículos ferroviários. Em seguida são descritos todos os passos que envolvem a calibração do modelo por meio de uma metodologia iterativa baseada em um algoritmo genético de otimização. Por fim, são descritos os aspectos que envolvem a validação da resposta dinâmica

deste veículo, nomeadamente uma metodologia de interação veículo-via e métricas para comparação de séries temporais.

No Capítulo 5 é apresentado um estudo de caso envolvendo a aplicação das metodologias descritas no Capítulo 4 para a calibração e validação do modelo de um trem de carga. A identificação modal foi realizada com base em técnicas de análise modal operacional, aplicada a registros de aceleração oriundos de uma campanha experimental realizada com o veículo em operação. A calibração do modelo foi feita com base em uma metodologia iterativa implementada por meio da interação entre dois softwares MATLAB<sup>®</sup> e ANSYS<sup>®</sup>. Por fim, simulações numéricas da resposta do veículo foram realizadas com base em uma metodologia de interação veículo-via. Os resultados dessas simulações foram comparados a dados experimentais coletados em diversos pontos do veículo de modo a validar sua resposta dinâmica.

Por fim, no Capítulo 6 é apresentado um apanhado geral das conclusões obtidas no desenvolvimento do trabalho, bem como algumas oportunidades identificadas para o desenvolvimento de trabalhos futuros na área.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO DE DINÂMICA ESTRUTURAL

Um problema de dinâmica de estruturas difere-se de um problema estático por basicamente dois aspectos fundamentais. O primeiro deles, e mais óbvio, diz respeito ao fato de as ações impostas à estrutura variarem em função do tempo. Não tão óbvio, mas igualmente importante, o segundo aspecto é devido ao fato das deformações e tensões na estrutura dependerem fundamentalmente das contribuições de forças inerciais (CRAIG JR; KURDILA, 2006). A presença destas duas condições é verificada em diversas estruturas de engenharia como pontes, prédios altos sujeitos ao vento, aeronaves, veículos terrestres, estruturas *offshore*, dentre outras, podendo levar as estruturas à falha sob ações muito inferiores às estáticas ou por mecanismos de falha distintos, como por exemplo a fadiga que está intrinsicamente ligada à ação de cargas variáveis no tempo.

### 2.1 Sistemas de um grau de liberdade

Sistemas dinâmicos de 1 grau de liberdade (GDL) são aqueles cujas posições, velocidades e acelerações de todas as partes do sistema podem ser completamente definidas por meio de uma única coordenada independente. Embora seja o sistema dinâmico mais simples vários tipos de estruturas e dispositivos mecânicos podem ser aproximados por sistemas de 1 GDL. Além disso, as formulações para este tipo de sistemas formam a base para o entendimento de problemas mais avançados envolvendo múltiplos graus de liberdade (RAO, 2008).

Os sistemas dinâmicos são regidos por equilíbrios entre quatro grupos de forças: i) inércia ( $f_I$ ), ii) dissipativas ( $f_D$ ), iii) restauradoras ( $f_S$ ) e iv) externas ( $p$ ), todas estas em função do tempo assim como representado na Equação (2-1).

$$f_I(t) + f_D(t) + f_S(t) = p(t) \quad (2-1)$$

A modelagem do comportamento destas forças depende do fenômeno físico associado a cada uma delas resultando, geralmente, em equações diferenciais de segunda ordem.

A abordagem mais simples para este problema consiste na modelagem das forças restauradoras como linearmente dependentes da posição (Ex.: mola linear), as forças dissipativas como linearmente dependentes da velocidade (Ex.: amortecimento viscoso) e as forças de inércia como linearmente dependentes da aceleração. A

determinação precisa do amortecimento ainda é aspecto de muito estudo e discussão e embora diversos modelos tenham sido propostos, sendo alguns deles tratados mais adiante na Seção 2.3, na maioria dos casos, a natureza exata do amortecimento é impossível de ser determinada (CRAIG JR; KURDILA, 2006). Estas considerações levam à Equação (2-2)

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = p(t) \quad (2-2)$$

na qual  $m$ ,  $c$  e  $k$  representam as constantes de inércia, amortecimento e rigidez respectivamente e  $z$  representa a posição em função do tempo. A Equação (2-2) é muitas vezes referida como a equação fundamental da dinâmica linear de estruturas (CRAIG JR; KURDILA, 2006).

Soluções analíticas para a Equação (2-2) podem ser determinadas para alguns tipos de carregamento simples por meio da convolução entre a resposta ao impulso do sistema e a função de carregamento dada pela Equação (2-3)

$$z(t) = \int_0^t p(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (2-3)$$

na qual  $h$  é a resposta ao impulso unitário do sistema dada por

$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t) \quad (2-4)$$

em que  $\omega_n = \sqrt{k/m}$  é a frequência natural do sistema,  $\zeta = c/(2m\omega_n)$  o fator de amortecimento e  $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$  é a frequência natural amortecida (CRAIG JR; KURDILA, 2006).

Além da utilização da integral de convolução, frequentemente no estudo de soluções de equações diferenciais lineares, como a equação de movimento, é interessante o emprego de transformadas integrais (Ex.: Transformada de Laplace). O emprego deste tipo de transformada permite a simplificação dos problemas por meio da mudança de domínio da equação, passando do domínio do tempo para o de Laplace, por exemplo. Uma vez resolvida a equação no domínio da transformada, pode-se voltar para o domínio do tempo por meio da transformada inversa (BOYCE; DIPRIMA, 2000).

A transformada de Laplace é definida pela Equação (2-5):

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2-5)$$

na qual a variável de Laplace é um número complexo dado por  $s = \sigma + j\omega$ . Aplicando esta transformada a ambos os lados da Equação (2-2) e assumindo que o sistema oscilatório parte do repouso, tem-se:

$$P(s) = (ms^2 + cs + k)Z(s) = m(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)Z(s) \quad (2-6)$$

Reorganizando a expressão obtém-se a função de transferência do sistema, dada por:

$$H(s) = \frac{Z(s)}{P(s)} = \frac{1/m}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (2-7)$$

cujos pólos (raízes do polinômio característico) são dados por:

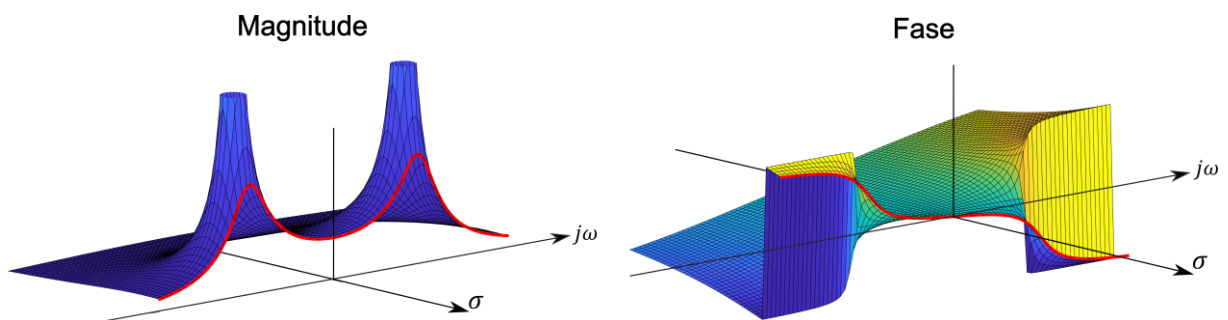
$$\lambda, \lambda^* = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \quad (2-8)$$

É relevante ressaltar que dos pólos da função de transferência podem ser extraídas as propriedades dinâmicas do sistema ( $\omega_n$ ,  $\omega_d$  e  $\zeta$ ) pela aplicação do conjunto das expressões a seguir:

$$\begin{aligned} \omega_n &= \sqrt{\lambda\lambda^*} \\ \omega_d &= \text{Im}(\lambda) \\ \zeta &= -\frac{\text{Re}(\lambda)}{\sqrt{\lambda\lambda^*}} \end{aligned} \quad (2-9)$$

A Figura 2-1 a seguir apresenta uma representação da magnitude e da fase da função de transferência de um sistema de 1 GDL.

**Figura 2-1 – Função de transferência de um sistema de 1 GDL no plano de Laplace**



Fonte: Adaptada de (RICHARDSON; FORMENTI, 1982).

Como a transformada de Fourier nada mais é que a transformada de Laplace avaliada sobre o eixo imaginário ( $j\omega$ ) a função resposta em frequência do sistema

(FRF) pode ser obtida diretamente substituindo ( $s = j\omega$ ) na Equação (2-7). Na Equação (2-10) são apresentadas as diferentes formas de expressão da função de resposta em frequência.

Forma expandida:

$$H(s)|_{s=j\omega} = H(j\omega) = \frac{1/m}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2j\zeta\omega\omega_n}$$

Forma Polo-zero:

$$H(s)|_{s=j\omega} = H(j\omega) = \frac{1/m}{(j\omega - \lambda)(j\omega - \lambda^*)} \quad (2-10)$$

Forma em frações parciais:

$$H(s)|_{s=j\omega} = H(j\omega) = \frac{A_1}{(j\omega - \lambda)} + \frac{A_1^*}{(j\omega - \lambda^*)}$$

A representação gráfica da FRF de um sistema de 1 GDL é dada pela intercessão entre um plano, normal ao eixo real e que passa pela origem, com a função de transferência destacada pela linha vermelha na Figura 2-1.

## 2.2 Sistemas de múltiplos graus de liberdade

Para um sistema de múltiplos graus de liberdade a Equação (2-2) pode ser generalizada na forma matricial expressa na Equação (2-11)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}\mathbf{z} = \mathbf{p}(t) \quad (2-11)$$

na qual  $\mathbf{z}$  é um vetor coluna com “ $N$ ” elementos representando os deslocamentos de cada um dos “ $N$ ” graus de liberdade do sistema. Já  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$  são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez respectivamente sendo todas as três matrizes quadradas, de dimensão “ $N \times N$ ”, compostas por coeficientes constantes (BRINCKER; VENTURA, 2015).

Nesta seção o tratamento matemático de sistemas de múltiplos graus de liberdade será abordado de três maneiras distintas, com base em transformadas de Laplace, com base na decomposição modal e por fim em representação por espaços de estado.

### 2.2.1 Formulação por transformadas de Laplace

A obtenção das funções de transferência para um sistema de múltiplos graus de liberdade pode ser feita por meio de um procedimento análogo ao adotado na Seção 2.1 para o caso de 1 GDL. Aplicando uma transformada de Laplace a ambos os lados da Equação (2-11) tem-se:



$$(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K})\mathbf{Z}(s) = \mathbf{P}(s) \rightarrow \mathbf{B}(s)\mathbf{Z}(s) = \mathbf{P}(s) \quad (2-12)$$

Com isso a matriz das funções de transferência do sistema é dada por pela Equação (2-13)

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{Z}(s)}{\mathbf{P}(s)} = \mathbf{B}(s)^{-1} = \frac{\text{Adj}[\mathbf{B}(s)]}{\det[\mathbf{B}(s)]} = \frac{\mathbf{A}(s)}{\det[\mathbf{B}(s)]} \quad (2-13)$$

na qual  $\mathbf{A}(s)$  é conhecida como a matriz residual. Os pólos do sistema são obtidos pela solução da equação característica

$$\det[\mathbf{B}(s)] = \det[(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K})] = 0 \rightarrow \lambda_k, \lambda_k^* = -\zeta_k \omega_{nk} \pm j\omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta_k^2} \quad (2-14)$$

na qual  $\zeta_k$  e  $\omega_{nk}$  são as razões de amortecimento e frequências naturais do modo “ $k$ ” (AVITABILE, 2017).

Assim como feito para o caso de sistemas de 1 GDL, a escrita da matriz das funções de transferência na forma de frações parciais, dada pela Equação (2-15)

$$\mathbf{H}(s) = \sum_{k=1}^m \frac{\mathbf{A}_k}{(s - \lambda_k)} + \frac{\mathbf{A}_k^*}{(s - \lambda_k^*)} \quad (2-15)$$

é muito frequente na literatura. Nesta forma a contribuição de cada um dos  $m$  modos de vibração é isolada. O termo  $\mathbf{A}_k$  representa a matriz de resíduos associada ao  $k$ -ésimo modo de vibração, cujo valor pode ser demonstrado como sendo:

$$\mathbf{A}_k = \frac{\boldsymbol{\varphi}_{mk} \boldsymbol{\varphi}_{mk}^T}{2 \cdot j \cdot \omega_{dk}} \quad (2-16)$$

onde  $\boldsymbol{\varphi}_{mk}$  é o vetor contendo a forma modal do  $k$ -ésimo modo e o subscrito  $m$  indica que este está normalizado pela matriz de massa de modo que

$$[\boldsymbol{\varphi}_{m1} \dots \boldsymbol{\varphi}_{mN}]^T \mathbf{M} [\boldsymbol{\varphi}_{mk} \dots \boldsymbol{\varphi}_{mN}] = \boldsymbol{\Phi}_m^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi}_m = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \end{bmatrix} \quad (2-17)$$

com isso, fica demonstrado que todos os paramentos de interesse de um sistema dinâmico podem ser extraídos de suas funções de transferência (AVITABILE, 2017).

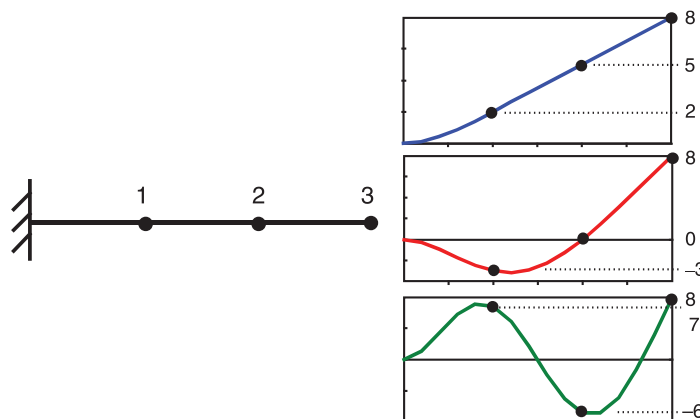
Da Equação (2-15), a matriz das FRFs pode ser obtida diretamente pela função de transferência avaliada no eixo imaginário.

$$\mathbf{H}(s)|_{s=j\omega} = \mathbf{H}(j\omega) = \sum_{k=1}^m \frac{\mathbf{A}_k}{(j\omega - \lambda_k)} + \frac{\mathbf{A}_k^*}{(j\omega - \lambda_k^*)} \quad (2-18)$$

Nota-se, por similaridade, que a FRF para um sistema de múltiplos graus de liberdade resulta do somatório da FRF de vários sistemas de 1 GDL. A Figura 2-3

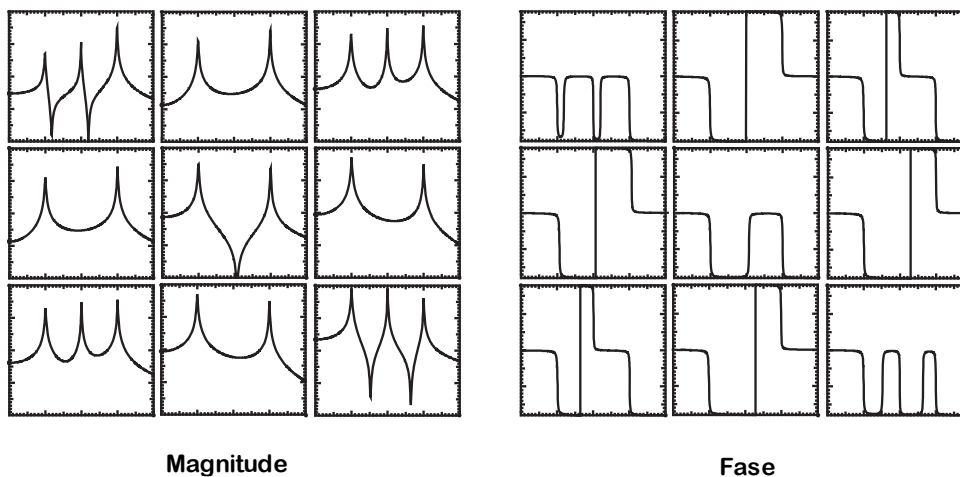
ilustra de maneira gráfica as funções de resposta em frequência para o sistema de três graus de liberdade, cujos modos estão ilustrados na Figura 2-2.

**Figura 2-2 – Modos de vibração de uma viga engastada com 3 GDL**



Fonte: Adaptada de (AVITABILE, 2017).

**Figura 2-3 – Magnitude e fase das funções de resposta em frequência de um sistema de 3 GDL**



Magnitude

Fase

Fonte: Adaptada de (AVITABILE, 2017).

Da Figura 2-3 pode-se observar algumas propriedades interessantes da matriz das FRFs:

- A matriz é simétrica;
- Nas FRFs de ponto (diagonal da matriz) entre cada ressonância há sempre uma antirressonância.

Além destas duas características, neste exemplo em particular, é interessante notar que o segundo modo de vibração nunca pode ser detectado nas FRFs associadas ao segundo grau de liberdade uma vez que este se encontra em um nó do segundo modo. Esta característica em particular é de suma importância no

planejamento do posicionamento de sensores, como será abordado posteriormente na Seção 3.3.

### 2.2.2 Formulação modal

Embora a formulação baseada na aplicação de transformadas integrais permita a obtenção das FRFs o processo de inversão da matriz  $\mathbf{B}(s)$  pode ser computacionalmente muito custoso. A seguir será apresentada uma abordagem distinta, computacionalmente mais eficiente, conhecida como formulação modal. Na formulação modal o sistema de equações diferenciais de movimento (Equação (2-11)) é decomposto, por meio de uma transformação de coordenadas, em um sistema de equações diferenciais independentes (MAGALHÃES, 2004).

A premissa básica para a aplicação da formulação modal é a de que os modos do sistema sem amortecimento também sejam ortogonais à matriz de amortecimento, tal condição é conhecida como amortecimento proporcional. As condições para que uma matriz de amortecimento possua estas propriedades e as principais técnicas de construção deste tipo de amortecimento são apresentadas em detalhe mais adiante no item 2.3.2.

A equação de movimento para um sistema de múltiplos graus de liberdade não amortecido é dada por

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}\mathbf{z} = \mathbf{p}(t) \quad (2-19)$$

assumindo que a solução para a parte homogênea da Equação (2-19) é do tipo  $\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\varphi}_k e^{\lambda_k t}$  tem-se o seguinte problema de autovalores e autovetores

$$[\mathbf{K} - (-\lambda_k^2)\mathbf{M}]\boldsymbol{\varphi}_k = \mathbf{0} \quad (2-20)$$

no qual  $\boldsymbol{\varphi}_k$  é um vetor contendo as formas modais associadas ao k-ésimo modo e os autovalores  $(-\lambda_k^2)$  se associam às frequências angulares não amortecidas  $(\omega_k)$  do k-ésimo modo por:

$$\lambda_k = j\omega_k \quad (2-21)$$

Devido às propriedades de ortogonalidade entre os modos de vibração e as matrizes de massa, rigidez e amortecimento (desde que proporcional) pode-se verificar as seguintes condições

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{\varphi}_1 \dots \boldsymbol{\varphi}_N]^T \mathbf{M} [\boldsymbol{\varphi}_1 \dots \boldsymbol{\varphi}_N] &= \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & m_k & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \\
[\boldsymbol{\varphi}_1 \dots \boldsymbol{\varphi}_N]^T \mathbf{K} [\boldsymbol{\varphi}_1 \dots \boldsymbol{\varphi}_N] &= \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & k_k & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \\
[\boldsymbol{\varphi}_1 \dots \boldsymbol{\varphi}_N]^T \mathbf{C} [\boldsymbol{\varphi}_1 \dots \boldsymbol{\varphi}_N] &= \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & c_k & \\ & & \ddots \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2-22}$$

em que as grandezas  $m_k$ ,  $k_k$  e  $c_k$  são conhecidas como massa modal, rigidez modal e amortecimento modal respectivamente. Multiplicando pela esquerda a Equação (2-20) por  $\boldsymbol{\varphi}^T$  é fácil demonstrar que  $\omega_k = \sqrt{k_k/m_k}$ .

Na condição de amortecimento proporcional (ver seção 2.3.2), os modos do sistema não amortecido, obtidos pela Equação (2-20), formam uma base vetorial para todas as soluções possíveis do sistema amortecido, ou seja, os modos de ambos os sistemas são exatamente iguais. Com isso, pode-se assumir para o sistema uma solução do tipo

$$\mathbf{z}(\mathbf{t}) = \sum_{k=1}^N \boldsymbol{\varphi}_k q_k(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{q}(\mathbf{t}) \tag{2-23}$$

em que a formulação acima é a decomposição modal da resposta do sistema onde  $\mathbf{q}(\mathbf{t})$  é um vetor coluna contendo as coordenadas modais. Substituindo a Equação (2-23) na Equação (2-11) e multiplicando por  $\boldsymbol{\Phi}^T$  à esquerda tem-se

$$m_k \ddot{q}_k(\mathbf{t}) + c_k \dot{q}_k(\mathbf{t}) + k_k q_k(\mathbf{t}) = f_k(\mathbf{t}) \tag{2-24}$$

onde

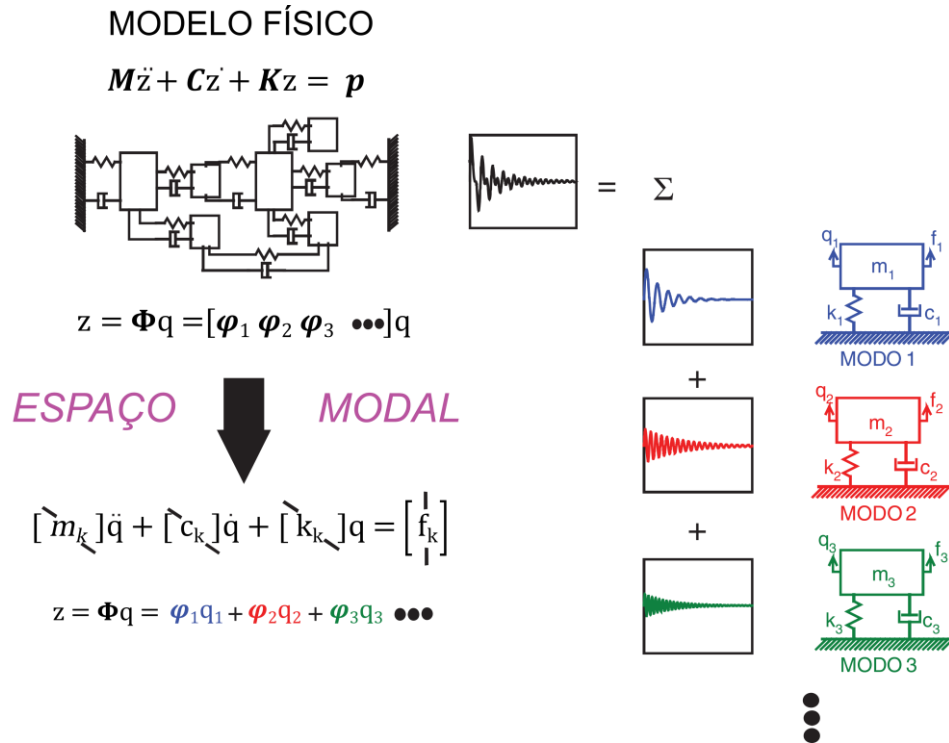
$$f_k(\mathbf{t}) = \boldsymbol{\varphi}_k^T \mathbf{p}(\mathbf{t}) \tag{2-25}$$

são conhecidas como cargas modais (BRINCKER; VENTURA, 2015).

Pode-se notar que a Equação (2-24) representa o movimento de um sistema de 1 GDL, ou seja, a formulação modal apresentada permite, por meio de uma transformação de coordenadas, dividir o sistema de N-GDL em N sistemas de 1 GDL totalmente desacoplados. Com isso, cada uma das N equações podem ser solucionadas de forma independente, fazendo uso dos mesmos métodos para sistemas de 1 GDL apresentados no item 2.1. Por fim a resposta do sistema original pode ser reconstruída pela Equação (2-23) (AVITABILE, 2017).

A Figura 2-4 ilustra de maneira esquemática as etapas por trás da formulação modal:

**Figura 2-4 – Decomposição modal de um sistema de múltiplos graus de liberdade**



Fonte: Adaptada de (AVITABILE, 2017).

No espaço modal as FRFs, por semelhança entre as equações de movimento, são iguais àsquelas definidas na Equação (2-10) para sistemas de 1 GDL. Com isso, as FRFs no espaço modal podem ser definidas como:

$$H_{mk}(j\omega) = \frac{Q_k(j\omega)}{F_k(j\omega)} = \frac{1/m_k}{\omega_{nk}^2 - \omega^2 + 2 \cdot j\omega \cdot \zeta_k \cdot \omega_{nk}} \quad (2-26)$$

Por meio da relação entre as coordenadas modais  $q_k$  e forças modais  $f_k$  com as grandezas físicas do sistema, dadas pelas Equações (2-23) e (2-25), a matriz das FRFs pode ser escrita como:

$$H(j\omega) = \Phi \cdot H_m(j\omega) \cdot \Phi^T = \sum_{k=1}^N H_{mk}(j\omega) \cdot \varphi_k \varphi_k^T \quad (2-27)$$

em que  $H_m$  é uma matriz diagonal contendo as funções de transferência, no espaço modal, associadas a cada um dos modos de vibração.

Comparando as duas formulações apresentadas pode-se observar que a formulação modal é computacionalmente muito mais eficiente, por envolver operações

significativamente mais simples. A hipótese de ortogonalidade entre os modos do sistema não amortecido e a matriz de amortecimento permite desacoplar todo o sistema de equações evitando a necessidade de inversão da matriz  $\mathbf{B}$  na Equação (2-13). Com isso, a obtenção das FRFs passa a depender somente da solução de um problema de autovalores e autovetores.

### 2.2.3 Representação em espaço de estado

A representação em espaço de estado é uma alternativa às formulações baseadas em funções de transferência, apresentadas nos itens anteriores, e é amplamente utilizada no ramo da engenharia de controle. Nesta seção serão apresentados os principais conceitos relacionados a esta formulação, sendo que estes compõem a base para um dos métodos de identificação modal apresentado na Seção 4.2.

Partido da equação de movimento (Equação (2-11)) de um sistema de ( $n_2$ ) graus de liberdade, multiplicada à esquerda pelo inverso da matriz de massa pode-se escrever

$$\ddot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{z}(t) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{p}(t) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_2\mathbf{u}(t) \quad (2-28)$$

em que o vetor de forças de excitação foi fatorado no produto  $\mathbf{B}_2\mathbf{u}(t)$  em que  $\mathbf{B}_2$  é uma matriz de indexação ( $n_2 \times m$ ) composta por zeros e uns que especificam os graus de liberdade onde as ( $m$ ) entradas  $\mathbf{u}(t)$  são aplicadas. Escrevendo matricialmente a Equação (2-28) juntamente com a igualdade trivial  $\dot{\mathbf{z}}(t) = \dot{\mathbf{z}}(t)$  tem-se

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}}(t) \\ \ddot{\mathbf{z}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n_2 \times n_2} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \dot{\mathbf{z}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (2-29)$$

que pode ser reescrita num formato mais conhecido como

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c\mathbf{u}(t) \quad (2-30)$$

onde  $\mathbf{A}_c$  é a matriz de estado com dimensão ( $2n_2 \times 2n_2$ ) e  $\mathbf{B}_c$  é a matriz de entrada de dimensão ( $2n_2 \times m$ ) e  $\mathbf{x}$  é o vetor de estado de dimensão ( $2n_2 \times 1$ ), o subscrito “c” introduzido às matrizes indica que estas se referem a um modelo de tempo contínuo. À Equação (2-30) se dá o nome de equação de estado (PEETERS; DE ROECK, 1999; RODRIGUES, 2004). Ogata (2009) define as componentes do vetor de estado (variáveis de estado) como o menor conjunto de variáveis tais que o conhecimento

destas no tempo inicial junto ao conhecimento das entradas  $\mathbf{u}(t)$  ao longo do tempo, permitem descrever o sistema dinâmico por completo em qualquer instante temporal subsequente.

Além da equação de estado, é necessário desenvolver uma segunda expressão, conhecida como equação de observação. Como o próprio nome indica esta equação vai permitir “observar” as respostas físicas (aceleração, velocidade e deslocamento) em pontos específicos da estrutura. Organizando um conjunto de  $l$  graus de liberdade que se pretende observar num vetor  $\mathbf{y}(t)$  de dimensão  $(l \times 1)$ , pode-se escrever a equação de observação como

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_a \ddot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{C}_v \dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{C}_d \mathbf{z}(t) \quad (2-31)$$

em que  $\mathbf{C}_a$ ,  $\mathbf{C}_v$  e  $\mathbf{C}_d$  são matrizes de saída com dimensão  $(l \times n_2)$  para aceleração, velocidade e deslocamento, respectivamente. Introduzindo as notações

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_c &= [\mathbf{C}_d - \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \quad \mathbf{C}_v - \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}] \\ \mathbf{D}_c &= \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_2 \end{aligned} \quad (2-32)$$

pode-se reescrever a Equação (2-31) como

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(t) \quad (2-33)$$

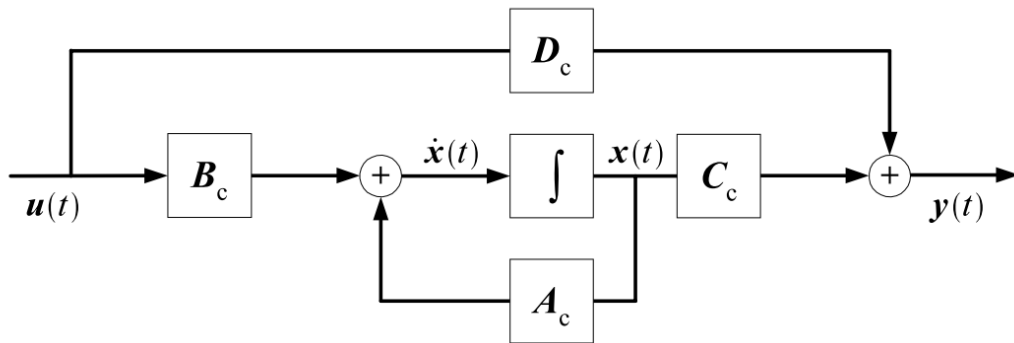
em que a matriz  $\mathbf{C}_c$  de dimensão  $(l \times 2n_2)$  é conhecida como matriz de saída e a matriz  $\mathbf{D}_c$  de dimensão  $(l \times m)$  é conhecida como a matriz de transmissibilidade direta (PEETERS; DE ROECK, 1999).

Com isso as Equações (2-30) e (2-33) formam o que é conhecido como modelo de estado de um sistema dinâmico em tempo contínuo dado por

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (2-34)$$

É muito comum também a representação do modelo de estado por meio de um diagrama de blocos como o ilustrado na Figura 2-5.

**Figura 2-5 – Representação de um modelo de estado contínuo em diagrama de blocos**



Fonte: (RODRIGUES, 2004).

Vale ressaltar aqui que, embora na formulação apresentada as variáveis do vetor de estado foram convenientemente escolhidas como grandezas físicas, nomeadamente deslocamento e velocidade, isto não é uma regra. Em tese, em uma formulação mais geral as variáveis de estado não precisam necessariamente ser quantidades mensuráveis nem observáveis. Isto faz com que, diferentemente da representação em funções de transferência que é única, existam infinitas possibilidades diferentes de se construir uma representação de estado de um sistema dinâmico (OGATA, 2009).

Segundo Peeters e De Roeck (1999), como a equação de estado é equivalente a equação de movimento, as frequências naturais e formas modais observáveis do sistema dinâmico podem ser obtidas por meio da decomposição espectral da matriz de estado ( $A_c$ ), dada por

$$A_c = \Psi_c \cdot \Lambda_c \cdot \Psi_c^{-1} \quad (2-35)$$

em que  $\Lambda_c$  é uma matriz diagonal contendo os autovalores  $\lambda_{ck}$  do sistema dinâmico e  $\Psi_c$  contém os autovetores da matriz  $A_c$ . Pelos autovalores as frequências naturais e coeficientes de amortecimento podem ser diretamente obtidas das definições dadas na Equação (2-14). Os modos de vibração nos graus de liberdade observáveis ( $\Phi_1$ ) são dados por:

$$\Phi_1 = C_c \Psi_c \quad (2-36)$$

A Equação (2-36) é necessária, pois os estados que compõe o vetor  $x$  não precisam necessariamente possuir sentido físico nem mesmo serem grandezas observáveis. Com isso, a Equação (2-36) permite transformar os autovetores  $\Psi_c$ ,



definidos com relação aos estados, em repostas observáveis do sistema físico, que é o que realmente interessa (PEETERS; DE ROECK, 1999).

A formulação de estado apresentada na Equação (2-34) se relaciona com a função de transferência do sistema por:

$$H(s) = \mathbf{C}_c(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1}\mathbf{B}_c + \mathbf{D}_c \quad (2-37)$$

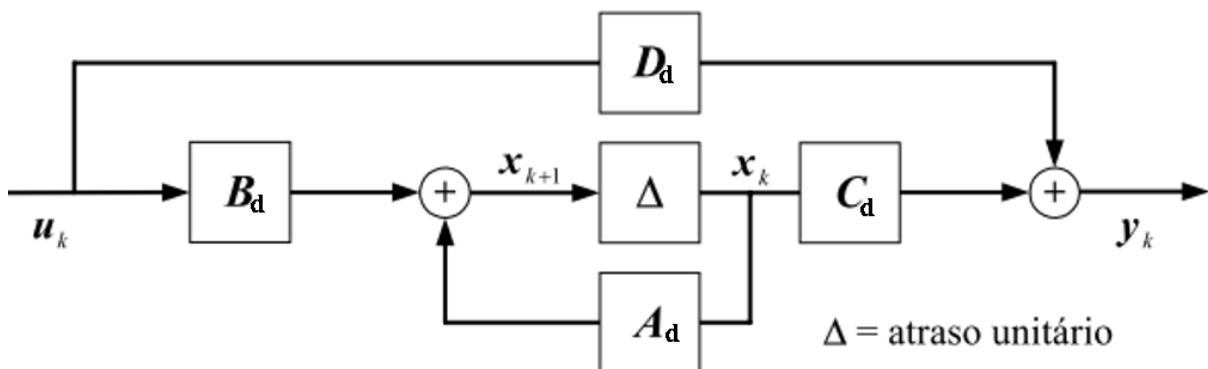
Nesta expressão é importante ressaltar que o termo  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1}$  confirma a afirmação feita a priori de que os autovalores da matriz de estado são iguais aos pólos da função de transferência, que por sua vez, correspondem aos autovalores do sistema físico (OGATA, 2009).

O modelo de estado desenvolvido até então é contínuo no domínio do tempo, entretanto, para que possa ser aplicado aos métodos de identificação modal faz-se necessário a discretização das equações de estado. A discretização do modelo de estado, dado pela Equação (2-34), resulta em

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_d\mathbf{x}_k + \mathbf{B}_d\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}_d\mathbf{x}_k + \mathbf{D}_d\mathbf{u}_k \end{aligned} \quad (2-38)$$

em que  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(k\Delta t)$ ,  $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}(k\Delta t)$  e  $\mathbf{y}_k = \mathbf{y}(k\Delta t)$  são, respectivamente, os vetores de estado, das excitações e das repostas (PEETERS; DE ROECK, 1999). A Figura 2-6 apresenta uma representação deste modelo em um diagrama de blocos.

**Figura 2-6 - Representação de um modelo de estado discreto em diagrama de blocos**



Fonte: Adaptada de (RODRIGUES, 2004).

As matrizes do modelo de estado discreto se relacionam com as do problema contínuo segundo

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}_c \Delta t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}_c \cdot \Delta t + \frac{1}{2!} \cdot (\mathbf{A}_c \cdot \Delta t)^2 + \frac{1}{3!} \cdot (\mathbf{A}_c \cdot \Delta t)^3 + \dots$$

$$\mathbf{B}_d = \int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}_c \tau} \cdot d\tau \cdot \mathbf{B}_c = (\mathbf{A}_d - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{A}_c^{-1} \cdot \mathbf{B}_c \quad (2-39)$$

$$\mathbf{C}_d = \mathbf{C}_c$$

$$\mathbf{D}_d = \mathbf{D}_c$$

em que a segunda igualdade na equação de  $\mathbf{B}_d$  só pode ser usada caso  $\mathbf{A}_c$  seja inversível (MAGALHÃES, 2004; PEETERS; DE ROECK, 1999).

Substituindo a Equação (2-35) na expressão que correlaciona as matrizes de estado em tempo contínuo e discreto, é fácil demonstrar que

$$\lambda_{c_k} = \frac{\ln(\lambda_{d_k})}{\Delta t} \quad (2-40)$$

$$\Psi_c = \Psi_d$$

em que  $\lambda_{d_k}$  e  $\Psi_d$  são os autovalores e autovetores da matriz de estado em tempo discreto. Com isso, é possível fazer uso da mesma metodologia aplicada ao caso contínuo para se obter frequências naturais, coeficientes de amortecimento e formas modais observáveis (MAGALHÃES, 2004; PEETERS; DE ROECK, 1999).

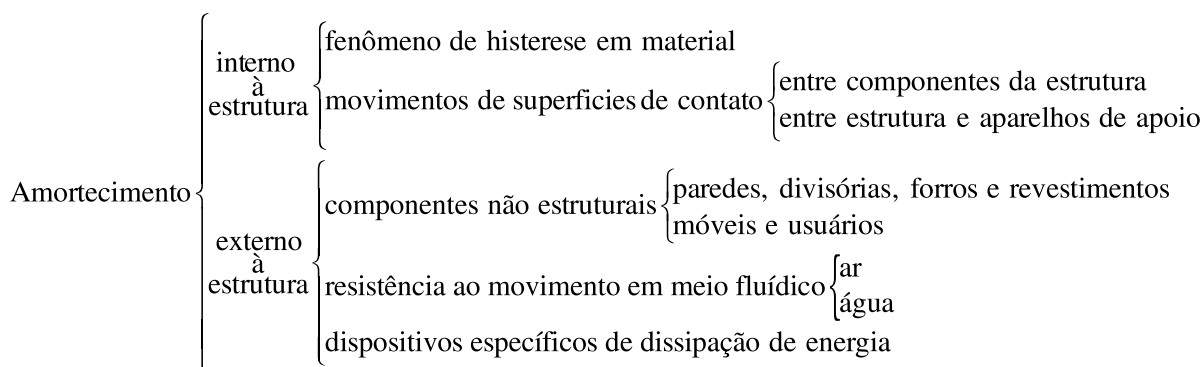
### 2.3 Amortecimento

Todo sistema dinâmico possui alguma forma de dissipação de energia que se manifesta, por exemplo, pela gradativa redução da amplitude de oscilação dos sistemas em vibração livre ou pela limitação de amplitude dos movimentos, principalmente próximos à ressonância, em sistemas sob vibração forçada. Nesta seção serão abordados alguns conceitos gerais relativos aos principais fenômenos físicos associados ao amortecimento, bem como as principais técnicas para modelagem das matrizes de amortecimento em sistemas de múltiplos graus de liberdade.

### 2.3.1 Aspectos gerais

Conforme esquematizado na Figura 2-7, o que se denomina em geral por amortecimento é oriundo de diversas fontes, cada uma com comportamentos físicos distintos, tornando o conhecimento deste tipo de fenômeno um assunto bastante complexo (SORIANO, 2014).

**Figura 2-7 – Composição das principais fontes de amortecimento em estruturas**



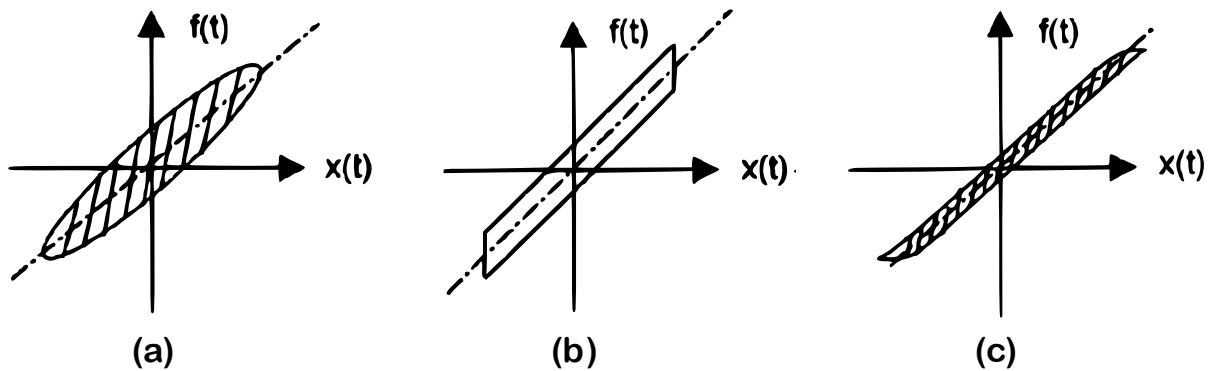
**Fonte: Adaptada de (SORIANO, 2014, p. 74).**

Na tentativa de representar matematicamente o fenômeno físico do amortecimento diversos modelos foram propostos, sendo os mais difundidos:

- a) Amortecimento viscoso linear: O modelo de amortecimento viscoso é o mais utilizado em análise de vibrações. Sua formulação parte da premissa de que a força de resistência oferecida por um fluido ao movimento de um corpo é diretamente proporcional à sua velocidade. Com isso, o tratamento matemático deste tipo de amortecimento é feito por uma constante multiplicada pela velocidade (RAO, 2008);
- b) Amortecimento de Coulomb: O modelo de amortecimento de Coulomb considera que a força de amortecimento é uma constante atuando sempre em sentido oposto ao do movimento. Sendo que, neste caso, a dissipação de energia se dá pelo atrito seco entre as superfícies (RAO, 2008);
- c) Amortecimento Histerético: No modelo de amortecimento histerético a dissipação de energia se dá devido ao atrito gerado pelo deslizamento relativo entre planos internos do material quando este se deforma (RAO, 2008).

A Figura 2-8 ilustra os efeitos dos diferentes tipos de amortecimento na curva de força × deslocamento dos sistemas dinâmicos.

**Figura 2-8 – Curva de força por deslocamento: (a) Amortecimento viscoso, (b) Amortecimento de Coulomb e (c) Amortecimento histerético**



Fonte: Adaptada de (EWINS, 2009).

Nestes diagramas a área dentro das curvas representa a perda de energia a cada período de oscilação do sistema.

Dentre as diferentes formas de amortecimento o amortecimento viscoso é aquele que leva ao tratamento matemático mais simples possível para o problema dinâmico e, por isso, é o mais empregado na prática de engenharia (SORIANO, 2014). Em alguns casos, mesmo que o fenômeno físico associado a um certo tipo de amortecimento esteja longe de ser um amortecimento viscoso, é possível que seu comportamento seja aproximado por um coeficiente de amortecimento viscoso equivalente (CRAIG JR; KURDILA, 2006).

Visto que a função do amortecimento é basicamente remover energia do sistema a obtenção do amortecimento viscoso equivalente pode ser feita por meio de uma equivalência entre a energia dissipada no sistema real com a energia dissipada em um sistema com amortecimento viscoso equivalente. Craig e Kurdila (2006) demonstraram que a energia dissipada a cada período de um sistema com amortecimento viscoso é equivalente a  $\pi \cdot c \cdot \Omega \cdot U^2$ , onde  $c$  é a constante de amortecimento,  $\Omega$  a frequência de excitação e  $U$  é a amplitude do movimento, o que nada mais é que a área da elipse da Figura 2-8a. Com isso, define-se o coeficiente de amortecimento viscoso equivalente como:

$$c_{eq} = -\frac{\mathcal{W}_d}{\pi \cdot \Omega \cdot U^2}$$

ou

$$\zeta_{eq} \equiv \frac{c_{eq}}{c_{cr}} = -\frac{\mathcal{W}_d \cdot \omega_n}{2 \cdot k \cdot \pi \cdot \Omega \cdot U^2} \quad (2-41)$$

em que  $\mathcal{W}_d$  é a energia dissipada a cada período de oscilação do sistema real.

Chopra (1995) recomenda que a obtenção deste coeficiente seja feita sempre na frequência natural do sistema ( $\Omega = \omega_n$ ), pois é onde o amortecimento exerce maior influência sobre a resposta. Ao adotar essa estratégia a resposta estará correta apenas para a frequência natural, entretanto trata-se de uma aproximação satisfatória em muitos casos.

Embora a formulação aqui apresentada tenha sido feita considerando um sistema de 1 GDL, é amplamente aceito que esta possa ser estendida para sistemas de múltiplos graus de liberdade. Neste caso, é feita a equivalência energética para cada um dos modos e obtido um coeficiente de amortecimento viscoso equivalente para cada modo individualmente (CHOPRA, 1995).

### **2.3.2 Amortecimento proporcional**

A condição de amortecimento proporcional é premissa básica para que se possa aplicar a formulação modal, apresentada no item 2.2.2. Tal condição ocorre em estruturas de mesmo material, nas quais a dissipação de energia se dá de forma uniforme ao longo de toda a estrutura (SORIANO, 2014).

A consequência básica desta dissipação uniforme de energia é que os modos do sistema amortecido são reais, ortogonais à matriz de amortecimento e idênticos àqueles do sistema sem amortecimento. Pode-se demonstrar que estas condições são atendidas, desde que a matriz de amortecimento satisfaça a igualdade apresentada na Equação (2-42) (BRINCKER; VENTURA, 2015).

$$\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{K}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \quad (2-42)$$

Nesta seção serão apresentadas as duas principais metodologias aplicadas para construção de uma matriz de amortecimento proporcional.

#### **2.3.2.1 Amortecimento de Rayleigh**

A formulação do amortecimento de Rayleigh parte da combinação linear mais simples possível entre as matrizes de massa e rigidez dada por

$$\mathbf{C} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{K} \quad (2-43)$$

onde  $a_0$  e  $a_1$  são constantes. Por ser uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez, a verificação de ortogonalidade com os modos do sistema amortecido é

trivial. Diagonalizando a Equação (2-43), é fácil demonstrar que a razão de amortecimento do k-ésimo modo pode ser escrita como

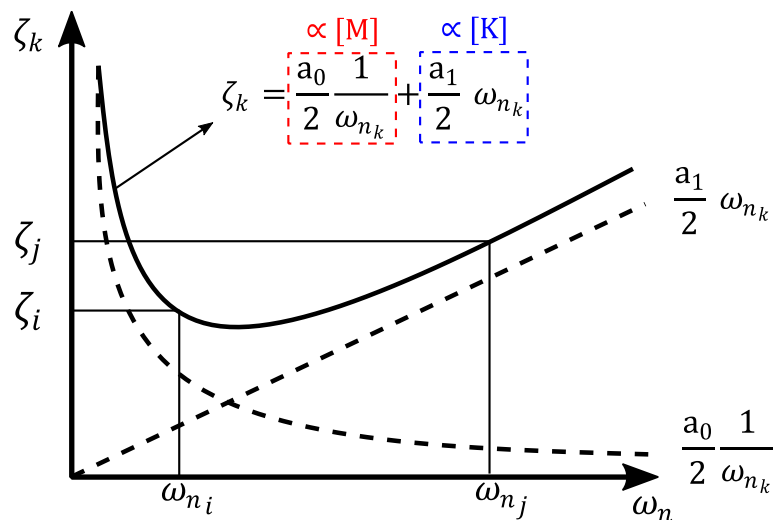
$$\zeta_k = \frac{a_0}{2} \frac{1}{\omega_{n_k}} + \frac{a_1}{2} \omega_{n_k} \quad (2-44)$$

com isso, as constantes  $a_0$  e  $a_1$  são determinadas por meio da prescrição do coeficiente de amortecimento para dois modos ( $i$  e  $j$ ) e por meio da solução do sistema a seguir (CHOPRA, 1995; CRAIG JR; KURDILA, 2006; SORIANO, 2014).

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/\omega_{n_i} & \omega_{n_i} \\ 1/\omega_{n_j} & \omega_{n_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_i \\ \zeta_j \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} a_0 = 2 \frac{\omega_{n_i}^2 \omega_{n_j} \zeta_j - \omega_{n_i} \omega_{n_j}^2 \zeta_i}{\omega_{n_i}^2 - \omega_{n_j}^2} \\ a_1 = 2 \frac{\omega_{n_i} \zeta_i - \omega_{n_j} \zeta_j}{\omega_{n_i}^2 - \omega_{n_j}^2} \end{cases} \quad (2-45)$$

A Figura 2-9 ilustra a contribuição das diferentes parcelas do amortecimento de Rayleigh. Pela figura, pode-se concluir que a parcela associada a massa tem maior contribuição em baixas frequências e a associada à rigidez contribui mais em altas frequências.

**Figura 2-9 – Amortecimento de Rayleigh**



Fonte: Elaborada pelo autor.

O amortecimento de Rayleigh é amplamente utilizado por sua simplicidade e além disso, possui a grande vantagem de preservar na matriz de amortecimento as características de esparsidade já presentes nas matrizes de massa e rigidez, aumentando eficiência no caso de implementações computacionais. No entanto, como fica claro pela Figura 2-9, só é possível manter o controle preciso da razão de

amortecimento para dois valores de frequência. Em geral recomenda-se que sejam prescritos os coeficientes de amortecimento do primeiro e do último modo que seja relevante para a resposta do sistema (SORIANO, 2014).

### 2.3.2.2 Amortecimento modal

Como exposto na seção anterior a desvantagem clara do método de Rayleigh é a impossibilidade de se representar de forma realista o amortecimento em cada um dos modos. O amortecimento modal a ser tratado nessa seção acaba com este problema, permitindo a prescrição do amortecimento de forma independente para cada um dos modos.

Partindo da premissa de que a matriz de amortecimento é diagonalizável pelos modos do sistema não amortecido pode-se escrever

$$\mathbf{C} = \mathbf{\Phi}_m^{T^{-1}} \begin{bmatrix} 2\zeta_1\omega_{n_1} & & \\ & 2\zeta_k\omega_{n_k} & \\ & & 2\zeta_N\omega_{n_N} \end{bmatrix} \mathbf{\Phi}_m^{-1} \quad (2-46)$$

onde  $\mathbf{\Phi}_m$  é a matriz modal normalizada com relação à matriz de massa. Partindo da relação  $\mathbf{\Phi}_m^T \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{\Phi}_m = \mathbf{I}$  as seguintes relações podem ser estabelecidas

$$\begin{cases} \mathbf{\Phi}_m^{T^{-1}} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{\Phi}_m \\ \mathbf{\Phi}_m^{-1} = \mathbf{\Phi}_m^T \cdot \mathbf{M} \end{cases} \quad (2-47)$$

com isso a matriz de amortecimento pode ser escrita como

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}\mathbf{\Phi}_m \begin{bmatrix} 2\zeta_1\omega_{n_1} & & \\ & 2\zeta_k\omega_{n_k} & \\ & & 2\zeta_N\omega_{n_N} \end{bmatrix} \mathbf{\Phi}_m^T \mathbf{M} = \mathbf{M} \left( \sum_{k=1}^N 2\zeta_k\omega_{n_k} \boldsymbol{\varphi}_{m_k} \boldsymbol{\varphi}_{m_k}^T \right) \mathbf{M} \quad (2-48)$$

Comparando a formulação apresentada com a de Rayleigh, fica evidente que a limitação quanto ao valor do amortecimento nos diferentes modos é eliminada, sendo agora possível prescrever exatamente a razão de amortecimento desejada para cada um dos modos. Em contrapartida, este método gera matrizes de amortecimento cheias, o que pode comprometer a eficiência computacional para sistemas de grande porte (CRAIG JR; KURDILA, 2006; SORIANO, 2014).

Embora pela Equação (2-48) seja possível especificar coeficientes de amortecimento para cada um dos  $N$  modos, em muitos casos há o interesse apenas

na contribuição de alguns modos de baixa frequência nas respostas do sistema dinâmico. Neste caso é possível empregar uma formulação híbrida entre o amortecimento modal e a parcela proporcional a rigidez do amortecimento de Rayleigh, dada por

$$\mathbf{C} = a_1 \mathbf{K} + \mathbf{M} \left( \sum_{k=1}^{N_c-1} 2\zeta_k^* \omega_{n_k} \boldsymbol{\varphi}_{m_k} \boldsymbol{\varphi}_{m_k}^T \right) \mathbf{M} \quad (2-49)$$

onde

$$a_1 = \frac{2\zeta_{N_c}}{\omega_{N_c}} \text{ e } \zeta_k^* = \zeta_k - \zeta_{N_c} \frac{\omega_k}{\omega_{N_c}} \quad (2-50)$$

e  $N_c$  corresponde ao número máximo de modos que se deseja prescrever o coeficiente de amortecimento. Com isso, a construção da matriz de amortecimento por meio da aplicação da Equação (2-49) permite prescrever o amortecimento de todos os modos relevantes e aos demais é atribuído um coeficiente de amortecimento derivado da parcela proporcional a rigidez do amortecimento de Rayleigh, assim como resumido na Equação (2-51) (CRAIG JR; KURDILA, 2006).

$$\zeta_k = \begin{cases} \text{valores prescritos,} & k = 1, \dots, N_c \\ \zeta_{N_c} \frac{\omega_k}{\omega_{N_c}}, & k = N_c + 1, \dots, N \end{cases} \quad (2-51)$$

### 2.3.3 Amortecimento não proporcional

O amortecimento não proporcional está presente em estruturas cuja dissipação de energia seja não uniformemente distribuída com relação à sua massa ou rigidez. Esta situação é frequentemente presente na prática, já que, embora o amortecimento histerético (intrínseco ao material) tenha uma distribuição uniforme o amortecimento devido à fricção nas juntas de ligação da estrutura, ou devido à instalação de dispositivos amortecedores externos não será uniforme. Além disso, estruturas compostas por diferentes materiais também não terão distribuição uniforme de amortecimento (SORIANO, 2014).

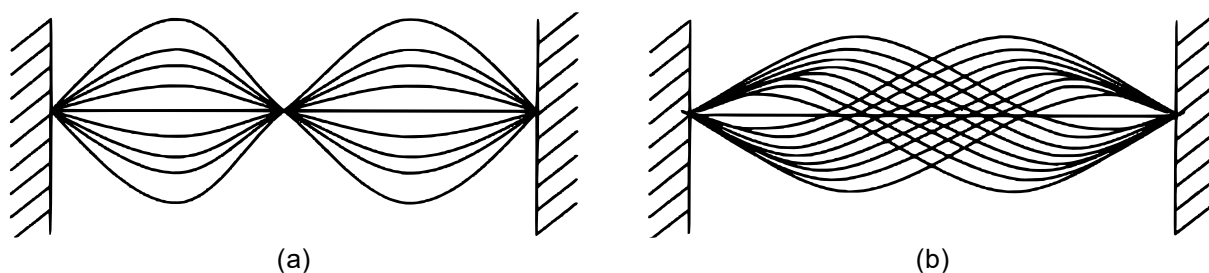
Na condição de amortecimento não proporcional a matriz de amortecimento não é ortogonal aos modos do sistema não amortecido, de modo que a formulação modal, apresentada no item 2.2.2, não se aplica a este caso. No entanto, a formulação



mais geral, desenvolvida no item 2.2.1 por meio de transformadas de Laplace, bem como a formulação em espaços de estado (item 2.2.3) ainda podem ser aplicadas a este caso.

A grande diferença entre os dois tipos de sistema está no fato de que a não proporcionalidade do amortecimento fará com que os modos de vibração sejam números complexos, com magnitude e fase. Em um modo real os graus de liberdade do sistema ou estão em fase ou estão defasados de  $180^\circ$  entre si, fazendo com que todos os pontos atinjam seus máximos de amplitude no mesmo instante de tempo. Diferentemente, em um modo complexo cada coordenada pode possuir um ângulo de fase qualquer, de modo que nem todos os pontos atingem seus extremos ao mesmo tempo. A Figura 2-10 ilustra, por meio de uma sucessão de frames, as diferenças entre modos reais e complexos. Na representação é evidente como no caso de modos reais a onda apresenta características estacionárias e, no caso de modos complexos, ela parece se mover de um lado para o outro (EWINS, 2009).

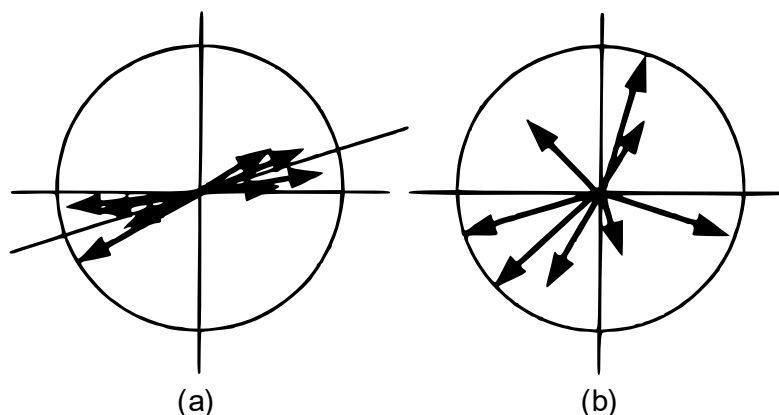
**Figura 2-10 – Formas modais (a) Real e (b) Complexa**



Fonte: Adaptada de (EWINS, 2009).

Em estruturas reais pode-se verificar que, embora a presença de uma não proporcionalidade no amortecimento seja uma condição necessária para que um modo seja complexo, outros aspectos influenciam em quão relevante é a parte complexa de um modo. Mais precisamente, verifica-se que a presença de modos com frequências naturais próximas exerce um impacto significativo no grau de complexidade de um modo. Na Figura 2-11 dois modos com graus de complexidade distintos são representados em um plano de Argand. Nesta representação, cada grau de liberdade é ilustrado por um vetor com magnitude e fase. Pela figura é notável a diferença entre os dois modos e percebe-se claramente que no modo com pouca complexidade quase todos os graus de liberdade estão defasados de aproximadamente  $180^\circ$ , por outro lado no modo muito complexo esta defasagem é arbitrária (EWINS, 2009).

**Figura 2-11 – Representação em plano de Argand (a) Modo pouco complexo e (b) modo muito complexo**



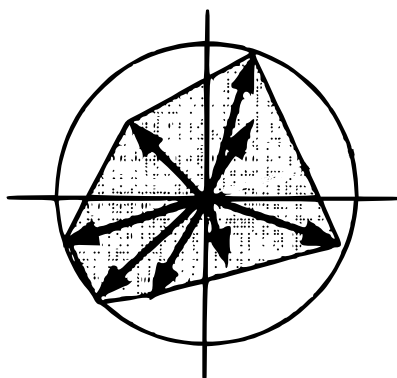
Fonte: Adaptada de (EWINS, 2009).

Na análise experimental de estruturas, o conhecimento do comportamento da estrutura ensaiada atrelado ao conhecimento das condições responsáveis por gerar modos complexos pode ser um bom indicativo da qualidade dos resultados obtidos. Para isso, foram desenvolvidas métricas para se quantificar de forma objetiva a complexidade de um modo, sendo duas delas apresentadas a seguir. A primeira destas métricas, denominada Fator de Complexidade Modal 1 (*MCF1*) é dada por

$$MCF1 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1; j \neq i}^N (\theta_{k_i} - \theta_{k_j}) \quad (2-52)$$

onde  $\theta_{k_i}$  é o ângulo de fase do *i*-ésimo elemento do *k*-ésimo modo. O segundo indicador (*MCF2*) é calculado como a razão entre a área de um polígono cujos vértices coincidem com a ponta dos vetores no plano de Argand, sem que haja reentrância e um círculo cujo raio é igual ao comprimento do maior vetor. A Figura 2-12 a seguir ilustra o processo de obtenção das áreas para cálculo do *MCF2* (EWINS, 2009).

**Figura 2-12 – Cálculo do MCF2**



Fonte: Adaptada de (EWINS, 2009).

### **3 MODELAÇÃO NUMÉRICA E ENSAIOS EXPERIMENTAIS DE VEÍCULOS FERROVIÁRIOS DE CARGA**

#### **3.1 Vagões ferroviários de carga**

Nesta seção, primeiramente, serão descritos de forma sucinta alguns aspectos gerais relativos aos tipos e particularidades construtivas dos vagões ferroviários de carga, bem como os seus principais componentes. Em uma segunda etapa, serão abordados os principais tipos de suspensões utilizadas nestes veículos, com um enfoque mais aprofundado nas suspensões de feixes de molas, que compõe o vagão alvo do estudo de caso deste trabalho. O enquadramento geral dado nesta seção é fundamental para a compreensão das demais partes desta dissertação.

##### **3.1.1 Tipos**

Os vagões de carga geralmente são veículos de concepção bastante simples, podendo assumir formas bem distintas a depender do tipo de carga que foram projetados para transportar, desafiando os projetistas a fornecer soluções econômicas, simples e funcionais para transportar mercadorias com segurança. Isso levou a cinco configurações básicas para os vagões de carga: i) vagões plataforma; ii) vagões fechados; iii) vagão hopper; iv) vagão tanque e v) vagão gôndola, ilustradas na Figura 3-1.

**Figura 3-1 – Principais tipos de vagão: (a) plataforma; (b) fechado; (c) hopper; (d) tanque e (e) gôndola**



(a)



(b)



(c)



(d)

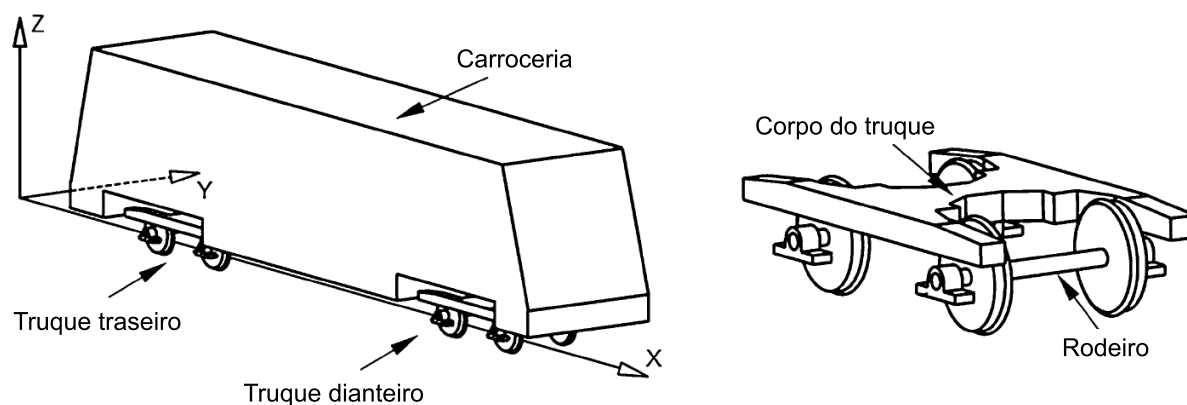


(e)

Fonte: Massa Pesagem e Automação Industrial (2021).

Independentemente do tipo de vagão de carga estes são compostos por basicamente três componentes estruturais principais: i) carroceria, ii) truques e iii) rodeiros representados na Figura 3-2.

**Figura 3-2 – Principais componentes de um vagão**



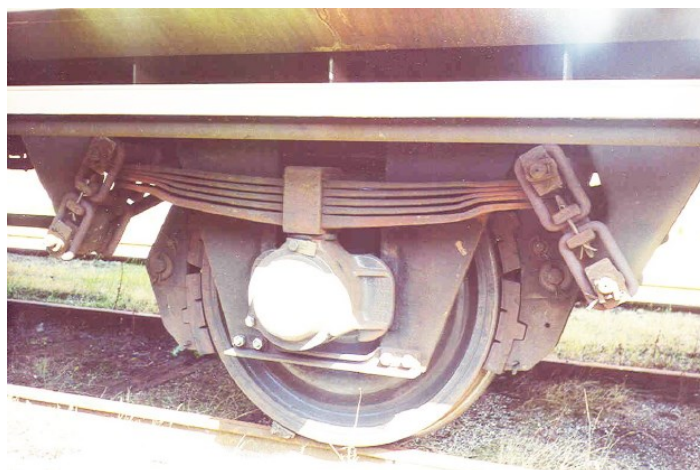
Fonte: Adaptada de (ANTUNES et al., 2019).

A carroceria forma toda a parte superior do vagão onde são acomodadas as cargas e os truques são conectados a estas normalmente por ligações pivotantes. Nos truques é feita a conexão dos rodeiros por meio dos elementos de suspensão, a serem

tratados mais adiante. Vale ressaltar que, diferentemente dos vagões de passageiros em que o conforto é uma prioridade, os vagões dedicados ao transporte de cargas quase que em sua totalidade contam somente com suspensões primárias. Com isso, ao eliminar um nível de suspensão consegue-se uma construção mais robusta e de menor custo.

A não necessidade de suspensões secundárias viabiliza também configurações que não contam com a presença de truques e os rodeiros são conectados diretamente à estrutura da carroceria por meio dos elementos da suspensão, assim como ilustrado na Figura 3-3. Em geral, essa solução é adotada em veículos de apenas dois eixos com suspensões de feixe de mola.

**Figura 3-3 – Detalhe da fixação do rodeiro em um vagão sem truques**



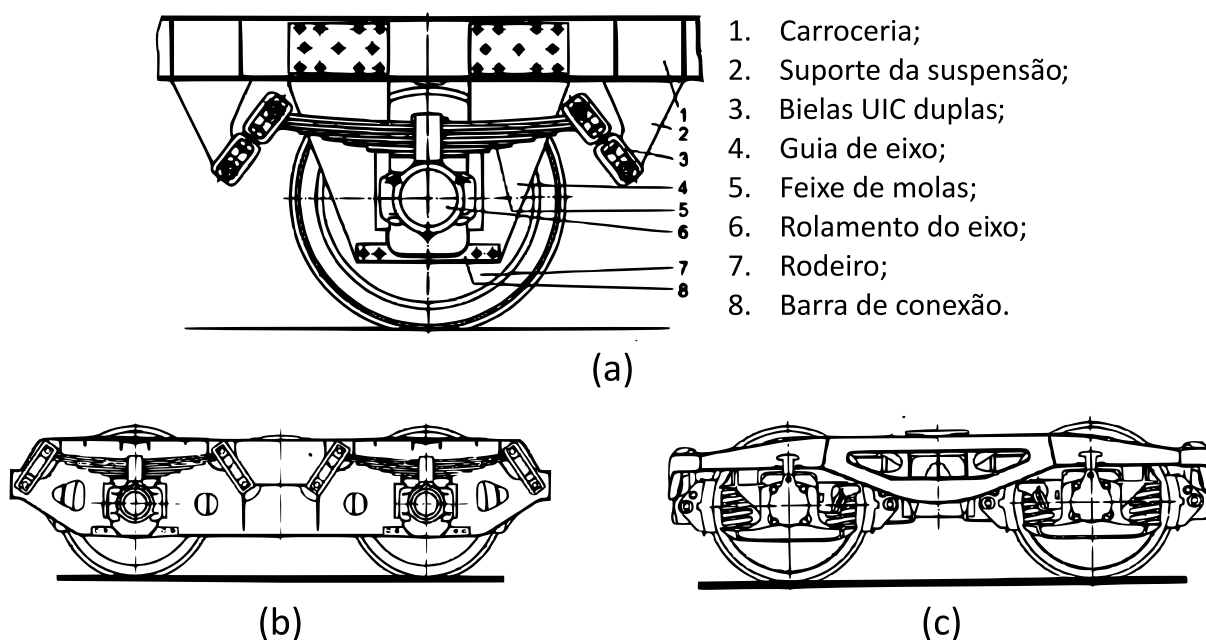
Fonte: (HOFFMANN, 2006).

### **3.1.2 Suspensões**

Não somente os diferentes designs das carrocerias, mas também o projeto das suspensões é bastante desafiador para os projetistas, uma vez que nos vagões de carga a relação entre o peso bruto total e a tara pode ser tão alta quanto 5:1, em comparação com apenas 1,5:1 nos veículos de passageiros. Essas relações de massa forçam os engenheiros a trabalhar com dois vagões completamente diferentes, carregado e descarregado, do ponto de vista de seu comportamento dinâmico (IWNICKI et al., 2015). Estas diferenças de massa tornam o uso de suspensões de rigidez variável muito comum nesses tipos de veículos. Para superar essas dificuldades, foram propostas várias soluções ao longo dos anos, que acabaram convergindo em basicamente três categorias de suspensão aprovadas pela união internacional dos caminhos de ferro (UIC) (HOFFMANN, 2006):

- a) Vagões de dois eixos com feixes de molas e bielas UIC duplas (Figura 3-4a);  
 b) Truques com dois eixos com feixes de mola e bielas UIC simples (Figura 3-4b);  
 c) Truques de dois eixos com molas helicoidais e amortecedores de fricção (Figura 3-4c).

**Figura 3-4 – Diferentes soluções para a suspensão dos vagões de carga:**  
**(a) feixes de mola e bielas UIC duplas, (b) truque com feixe de mola e bielas UIC simples e (c) truque com molas helicoidais**



Fonte: Adaptada de (HOFFMANN, 2006).

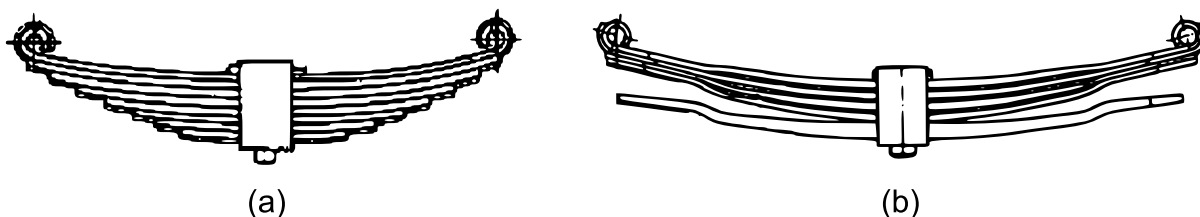
Neste trabalho, será dado um maior enfoque à configuração de suspensão apresentada na Figura 3-4a, pois esta coincide com o sistema de suspensão presente no vagão alvo do estudo de caso apresentado mais adiante na Seção 5. Informações relevantes acerca dos demais tipo de suspensões de vagões de carga podem ser consultados nos trabalhos de (BOSSO; GUGLIOTTA; SOMA, 2004; IWNICKI et al., 2015; MOLATEFI; HECHT; KADIVAR, 2006; SILVA et al., 2021; TRUE; HOFFMANN; JÖNSSON, 2005; WU et al., 2014).

Neste tipo de suspensão, as propriedades de rigidez e amortecimento na direção vertical são providas pelo feixe de mola, enquanto que nas direções transversal e longitudinal são providas pela ação pendular das bielas UIC (HOFFMANN, 2006). Todos estes tem suas dimensões e propriedades normatizadas pela norma UIC 517 (2007).

Os feixes de mola são dispositivos amplamente utilizados nos vagões de carga, principalmente pela sua simplicidade, confiabilidade e baixa exigência de

manutenção, além de serem bastante compactos. Sua construção em geral é bastante simples, feita pela sobreposição de várias lâminas de aço com curvaturas ligeiramente diferentes e presas por um grampo em seu centro. Em vagões de carga são usados basicamente dois conceitos construtivos para essas molas, trapezoidais ou parabólicas, ilustrados na Figura 3-5 (HOFFMANN, 2006).

**Figura 3-5 – Feixes de mola: (a) Trapezoidal e (b) Parabólico**

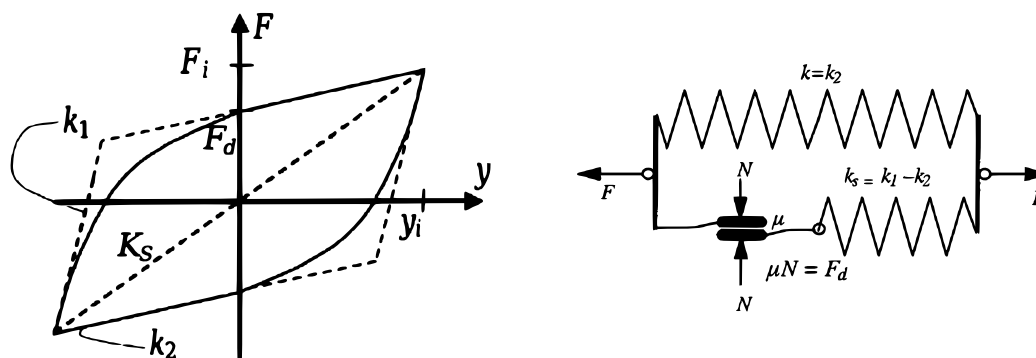


Fonte: Adaptada de (HOFFMANN, 2006).

Nesse tipo de mola, a rigidez é proporcionada pela flexão do conjunto de lâminas de aço, sendo que em alguns casos, como o da Figura 3-5b, uma lâmina extra é adicionada para aumentar a rigidez da suspensão no transporte de cargas muito pesadas. Já o amortecimento é proporcionado pelo atrito seco entre as folhas quando todo o conjunto está em movimento, sendo responsável por um comportamento dinâmico complexo e não linear. Além disso, a resposta da mola é fortemente influenciada pelo seu estado de conservação, lubrificação, amplitude de deslocamento e carga do vagão, tornando ainda mais difícil estimá-la com precisão.

Este comportamento pode ser concebido de maneira idealizada por um amortecedor de Coulomb em série com uma mola ( $k_s$ ) e em paralelo com outra mola ( $k$ ), assim como na Figura 3-6.

**Figura 3-6 – Modelo teórico de uma suspensão com amortecimento por fricção**



Fonte: Adaptada de (IWNICKI et al., 2015).

No início do movimento o amortecedor está preso e a elevada rigidez aparente deve-se à associação destas duas molas  $k_s + k = k_1$ . Quando o atrito estático no

amortecedor é quebrado o sistema passa a assumir uma rigidez  $k = k_2$  e a força total devido ao produto dessa rigidez pela deflexão da mola é somada a força de atrito  $F_d = \mu N$ , assim como representado pelo ciclo histerético tracejado da Figura 3-6. No entanto esta é apenas uma concepção teórica e na prática verifica-se que as bordas do ciclo são curvadas assim como a representação em linhas cheias traçada na mesma figura.

Hoffmann (2006), baseado em trabalhos anteriores realizados por Fancher et al. (1980) e Cebon (1999) relacionados à dinâmica de suspensões de feixes de mola em caminhões, propôs uma metodologia para obter o comportamento dinâmico de uma suspensão de feixe de molas padrão UIC por meio do cálculo de seu ciclo histerético. Foi proposto que a força da mola pode ser obtida pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial F_S}{\partial \delta} = \frac{F_{Env} - F_S}{\beta} \quad (3-1)$$

onde  $F_S$  é a força na mola,  $F_{Env}$  é uma função de envelope,  $\delta$  é a deflexão e  $\beta$  é uma constante de decaimento. A função envelope estabelece os limites para o ciclo histerético e a constante  $\beta$  controla quão abrupta é a transição do comportamento estático para o dinâmico. Como  $F_S$  e  $\delta$  são funções temporais, pela a regra da cadeia pode-se escrever:

$$\dot{F}_S = \frac{F_{Env} - F_S}{\beta} \dot{\delta} \quad (3-2)$$

e a função de envoltória pode ser modelada como

$$F_{Env} = \begin{cases} c_h(1 + \mu_0)z + F_r & z \leq z_0, \dot{z} \geq 0 \quad (\text{Carregamento}) \\ c_z(1 + \mu_0)(z - z_*) + F_r & z \geq z_0, \dot{z} \geq 0 \quad (\text{Carregamento}) \\ c_z(1 - \mu_0)(z - z_*) - F_r & z \geq z_0, \dot{z} \leq 0 \quad (\text{Descarregamento}) \\ c_h(1 - \mu_0)z - F_r & z \leq z_0, \dot{z} \leq 0 \quad (\text{Descarregamento}) \end{cases} \quad (3-3)$$

onde  $c_h$  e  $c_z$  são as rigidezes da mola sem e com a lâmina adicional respectivamente,  $\mu_0$  é um coeficiente de fricção,  $\delta = |z|$  é a deformação da mola,  $z_0$  é a posição em que a lâmina adicional entra em contato,  $F_r$  é a força residual na mola e  $z_*$  é dado por

$$z_* = \begin{cases} (1 - c_h/c_z)z_0 & 0 < z_0 < \infty \\ 0 & z_0 = \infty \end{cases} \quad (3-4)$$

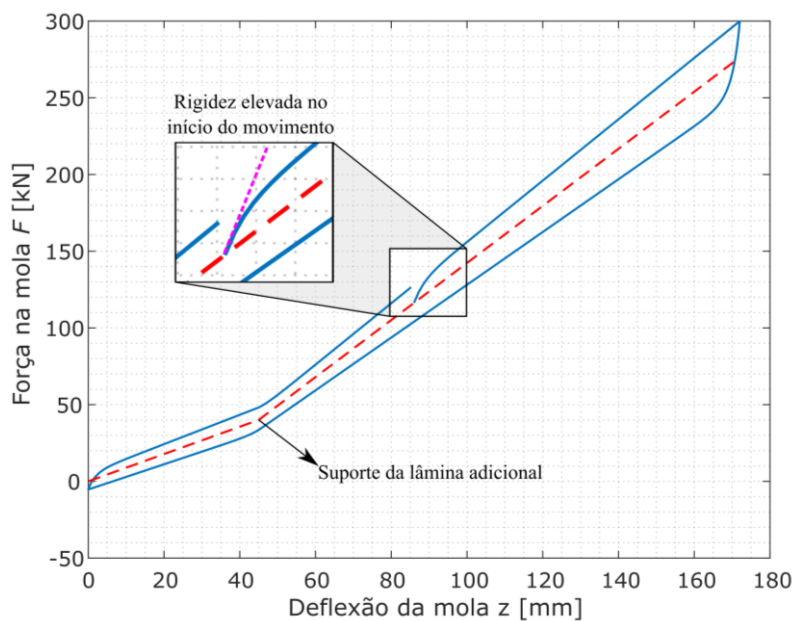
em que um valor de  $z_0 = \infty$  indica uma mola sem lâmina adicional (HOFFMANN, 2006).



Com isso, substituído a expressão da envoltória na Equação (3-2) e pela relação  $\delta = |z|$  esta pode ser resolvida por um procedimento de integração numérica. Detalhes acerca do processo de integração, principalmente com relação ao tratamento das descontinuidades da função, e valores sugeridos para as constantes  $\beta$ ,  $\mu_0$  e  $F_r$  são apresentados por Hoffmann (2006) e dependem da configuração do feixe de mola.

A Figura 3-7 apresenta o loop de histerese calculado com a metodologia proposta por Hoffmann (2006) para uma suspensão por feixes de mola do tipo parabólica com rigidez variável, adotando um hipotético grande deslocamento da mola para melhor ilustração.

**Figura 3-7 – Ciclo histerético de um feixe de mola parabólico com rigidez variável**



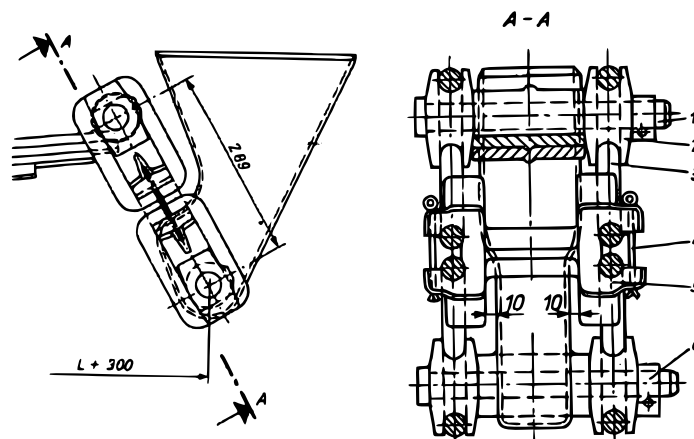
Fonte: Adaptada de (BRAGANÇA et al., 2021).

Neste loop é importante destacar um comportamento interessante, similar ao visto no modelo teórico da Figura 3-6, que é como a rigidez aparente é maior quando o sistema está começando a se mover. Isso acontece toda vez que a mola está passando do repouso para o movimento, pois, enquanto o atrito estático entre as folhas ainda não foi quebrado, as lâminas do feixe fletam como um único conjunto com grande rigidez.

Nas direções transversal e longitudinal as forças restauradoras (rigidez) e dissipadoras (amortecimento) são providas pelas bielãs que conectam o feixe de mola

à carroceria (item 3 da Figura 3-4a) do veículo. A Figura 3-8 a seguir apresenta uma vista em corte desta biela com seus principais detalhes construtivos.

**Figura 3-8 – Detalhes construtivos da biela dupla UIC**

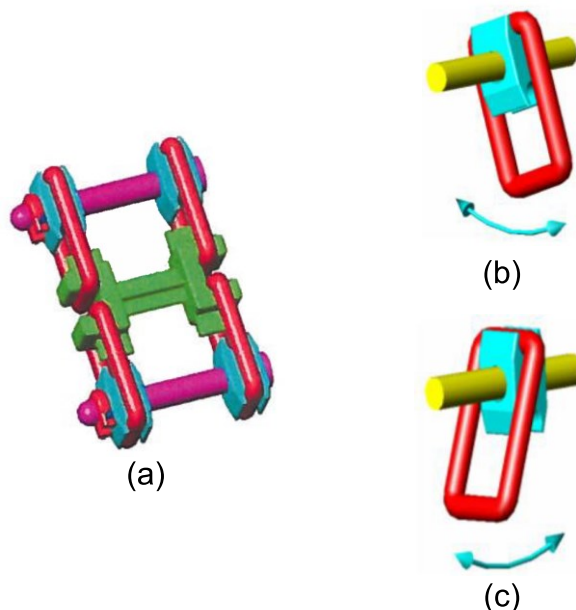


- |                     |                             |
|---------------------|-----------------------------|
| 1) Pino;            | 4) Pino divisor;            |
| 2) Rolamento final; | 5) Rolamento intermediário; |
| 3) Biela;           | 6) Arruela tipo C.          |

**Fonte: Adaptada de (TRUE; HOFFMANN; JÖNSSON, 2005).**

Por ser um dispositivo articulado a biela, em conjunto com o peso do veículo aplicado na mola, forma um sistema de pêndulo responsável por gerar forças restauradoras nas direções longitudinal e transversal. O amortecimento, por outro lado, é provido pelo atrito entre os mecanismos da biela quando esta se movimenta. A Figura 3-9 ilustra este movimento pendular em ambas as direções.

**Figura 3-9 – Movimento pendular da biela dupla UIC: (a) Visão geral, (b) movimento longitudinal, (c) movimento lateral**



Fonte: Adaptadas (a) de (TRUE; HOFFMANN; JÖNSSON, 2005) e (b) e (c) de (HOFFMANN, 2006).

A descrição matemática deste comportamento, que influi nas respostas lateral e longitudinal da suspensão, não é de interesse deste trabalho, mas pode ser encontrada em detalhes nos trabalhos desenvolvidos por Piotrowski (2003) e Hoffman (2006).

### 3.2 Modelos numéricos de veículos ferroviários

O modelo numérico de um vagão ferroviário pode ser desenvolvido tanto com formulações baseadas na dinâmica de corpos rígidos (multicorpo) quanto com abordagens baseadas no método dos elementos finitos (MEF), a depender dos objetivos do estudo. Enquanto a primeira formulação é mais comum e geralmente adotada para avaliar a resposta global do veículo, a segunda só é adotada em situações particulares, quando o objetivo principal do estudo é investigar pormenores relacionados a modos de vibração locais no interior dos veículos, considerando a flexibilidade de seus diferentes elementos, como carroceria, truques e rodeiros. Existem também alguns estudos que combinam ambas as formulações criando modelos híbridos, por exemplo, modelando a carroceria pelo MEF e os truques como corpos rígidos.

Nesta seção serão abordados os princípios que envolvem estas duas técnicas de modelagem, bem como suas vantagens e desvantagens.

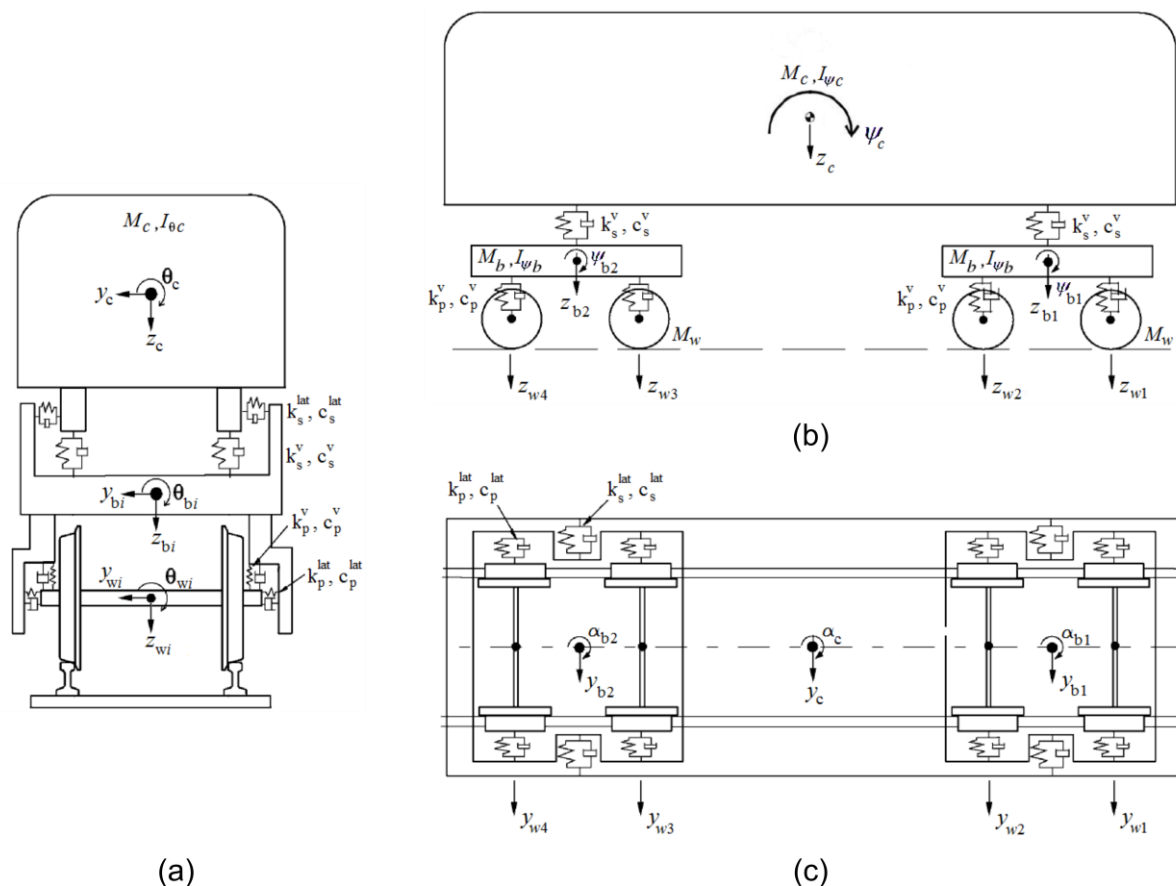
### 3.2.1 Modelos de corpos rígidos

Em uma formulação multicorpo os principais componentes dos veículos (carroceria, truques e rodeiros) são representados por corpos rígidos. A conexão entre estes corpos é feita por conjuntos de molas e amortecedores, representando as suspensões do vagão. As propriedades inerciais dos componentes do veículo são consideradas por meio de elementos de massa e inércia, posicionados no centro de gravidade de cada um dos respectivos corpos rígidos, cujos movimentos são controlados por apenas um conjunto reduzido de graus de liberdade de referência (RIBEIRO, 2012; WEIDEMANN, 2010).

Do ponto de vista matemático estes modelos são descritos por conjuntos de equações diferenciais de movimento, complementadas por expressões algébricas que modelam as restrições cinemáticas dos corpos. Estas equações dependem fundamentalmente das geometrias, massa e momento de inércia dos componentes do vagão, bem como do comportamento de suas suspensões (RIBEIRO, 2012; WEIDEMANN, 2010).

A Figura 3-10 contém uma representação gráfica de um modelo multicorpos de um vagão, na qual estão representados os graus de liberdade, translações e rotações, correspondentes a cada um dos componentes do vagão, bem como suas propriedades inerciais, massa e momentos de inércia ( $M$  e  $I$ ), associadas ao centroide de cada elemento. Além disso, as suspensões são retratadas por conjuntos de molas e amortecedores e suas respectivas constantes elásticas e de amortecimento ( $k$  e  $c$ ).

**Figura 3-10 – Modelo mult corpos de um vagão: (a) Vista superior, (b) Lateral e (c) em planta**



Fonte: Adaptada de (XIA; ZHANG, 2005).

O baixo esforço computacional associado a essas formulações as torna muito atraentes para investigações na área da engenharia ferroviária, permitindo obter resultados satisfatórios acerca da resposta dinâmica global de maneira bastante eficiente, mesmo com o uso de computadores pessoais portáteis. Além disso, os modelos podem ser construídos mesmo sem o total conhecimento de detalhes de projeto do veículo, o que é de grande valia uma vez que estes detalhes muitas vezes são segredos industriais dos fabricantes.

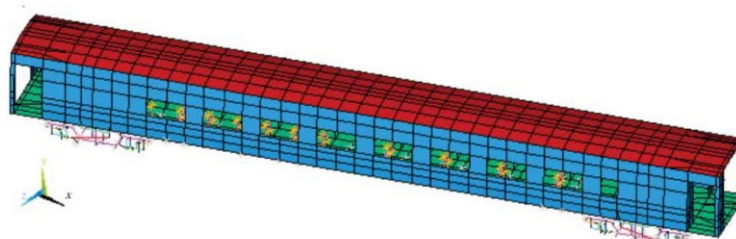
Em estudos recentes, estes modelos de veículos têm sido utilizados no estudo da interação veículo-via, com o objetivo de: i) avaliar a segurança de circulação de trens submetidos a condições severas, como terremotos (MONTENEGRO et al., 2016) e ventos cruzados (MONTENEGRO et al., 2020b), ii) avaliar nível de conforto de passageiros (JIANG; CHEN; THOMPSON, 2019), iii) detectar defeitos nos veículos (MOSLEH et al., 2021), iv) monitoramento das condições da via (TSUNASHIMA, 2019; WEI; LIU; JIA, 2016) e v) estudo interação dinâmica entre pantógrafo e catenária (ANTUNES et al., 2020).

### 3.2.2 Modelos flexíveis

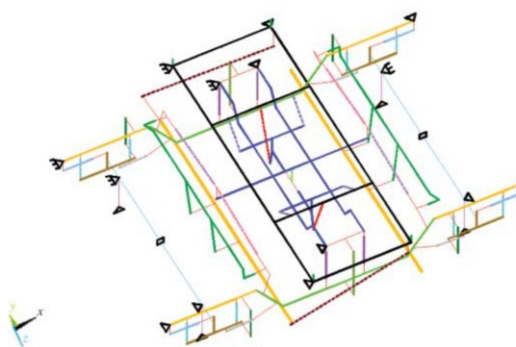
Em formulações baseadas no MEF, os diversos componentes do veículo são modelados levando em consideração suas seções transversais, bem como as propriedades mecânicas dos materiais que os compõe. Em geral, a carroceria é modelada por meio de elementos de casca, enquanto que as partes estruturais dos truques e rodeiros são modeladas utilizando elementos de viga. As suspensões, em geral, continuam a ser modeladas por conjuntos de molas e amortecedores assim como nos modelos multicorpos (RIBEIRO, 2012).

A Figura 3-11 apresenta o modelo de um veículo de passageiros desenvolvido por Ribeiro et al. (2013), por meio de uma abordagem baseada no MEF. Pela figura, verifica-se o cuidado em se representar de forma precisa todas as estruturas reais do vagão.

**Figura 3-11 – Modelo de elementos finitos de um veículo de passageiros: (a) Carroceria e (b) truque**



(a)



(b)

Fonte: Adaptada de (RIBEIRO et al., 2013).

A aplicação de formulações baseadas no MEF para modelar veículos ferroviários não é tão comum quanto a abordagem multicorpo, uma vez que as deformações que ocorrem na estrutura do veículo são geralmente muito pequenas e podem ser desprezadas ao estudar a sua resposta global. Além disso, esta

formulação aumenta significativamente a demanda computacional da análise e, diferentemente da abordagem anterior, requer conhecimento dos dados de projeto dos veículos que em muitos casos são segredos industriais não revelados pelos fabricantes. No entanto, em alguns casos específicos, a consideração da flexibilidade do veículo pode levar a conclusões importantes a nível local, como a análise de vibrações dentro da carroceria.

Para veículos de passageiros, Diana et al. (2002) e Tomioka et al. (2006) mostraram que as vibrações devido à flexão da carroceria estão intimamente relacionadas às vibrações sentidas pelos seus ocupantes, enquanto Kim e Jeong (2006) demonstraram que os passageiros são significativamente afetados pela faixa de frequências associadas a essas vibrações locais. Para veículos de carga, Stichel (2000) demonstrou que considerar a flexibilidade da carroceria é importante ao se estudar o movimento de *Hunting*, enquanto Liu et al (2019) investigou a influência de se considerar a flexibilidade da carroceria na vida em fadiga de um vagão fechado com portas deslizantes, demonstrando que esta vida é significativamente reduzida quando são levados em conta modos flexíveis da carroceria.

### **3.3 Ensaios dinâmicos de vagões ferroviários**

Para obter experimentalmente as propriedades dinâmicas de um veículo ferroviário, particularmente frequências naturais e modos de vibração, testes dinâmicos específicos são normalmente realizados.

Os resultados obtidos com estes ensaios servem como base para as técnicas de identificação modal que serão abordadas em detalhe mais a diante na Seção 4.2. As frequências naturais e modos de vibração obtidos da aplicação destas técnicas são de grande valia para a atualização e melhoramento de modelos numéricos.

Nesta Seção serão tratados os diferentes assuntos que envolvem a realização de ensaios dinâmicos em veículos ferroviários. Primeiramente são apresentados aspectos relativos à instrumentação a ser utilizada, como os principais tipos de transdutores e os sistemas de aquisição de dados. Para cada um destes equipamentos são tratados os aspectos principais que envolvem seu princípio de funcionamento. Em seguida, são discutidas as principais técnicas que envolvem a realização de ensaios dinâmicos de veículos ferroviários. Por fim são apresentadas

algumas recomendações de boas práticas relativas ao posicionamento e fixação de sensores e de verificação e correção de anomalias em registros experimentais.

### **3.3.1 Instrumentação**

Para a realização de ensaios dinâmicos é necessário, primeiramente, que se tenha formas adequadas de mensurar as respostas da estrutura do veículo, sejam elas acelerações, velocidades ou deslocamentos. Para isso são utilizados transdutores de medição de resposta apropriados para cada tipo de grandeza que se pretende medir. A estes transdutores usualmente estão associados sistemas de condicionamento de sinais responsáveis, na maioria dos casos, pela amplificação e/ou filtragem dos dados dentre outras funções específicas a depender do tipo de transdutor (RODRIGUES, 2004).

Após os condicionadores de sinais, normalmente estão presentes sistemas de aquisição de dados. Na atualidade a grande maioria destes sistemas já são digitais e responsáveis pela conversão do sinal analógico, proveniente dos transdutores, em um sinal digital. Posteriormente este sinal digital é armazenado em dispositivos eletrônicos de memória (HD, SSD, etc.) ou mesmo em arquivos em nuvem.

A escolha adequada de todos estes equipamentos da cadeia de medição deve ser sempre feita tendo em conta basicamente três fatores (IMISENSORS, 2016):

- a) Gama de amplitude: Deve-se sempre ter em mente quais são as amplitudes de vibração esperadas em cada um dos pontos de medição. Deste modo é possível selecionar transdutores capazes de trabalhar nessa faixa de amplitudes, sem que haja saturação do sinal. Além disso, estes devem possuir sensibilidade suficiente para detectar as oscilações típicas do mensurando sob avaliação;
- b) Gama de frequências: Assim como no caso da amplitude os equipamentos de medição devem ser capazes de cobrir de maneira adequada todo o leque de frequências que se pretende avaliar naquele ponto;
- c) Resistência a agentes ambientais: Por fim, é sempre importante ter em conta os tipos de agentes externos que o sistema estará exposto (Ex.: chuva, temperaturas extremas, agentes corrosivos, choques mecânicos, entre outros) para selecionar equipamentos com níveis de proteção suficientes.



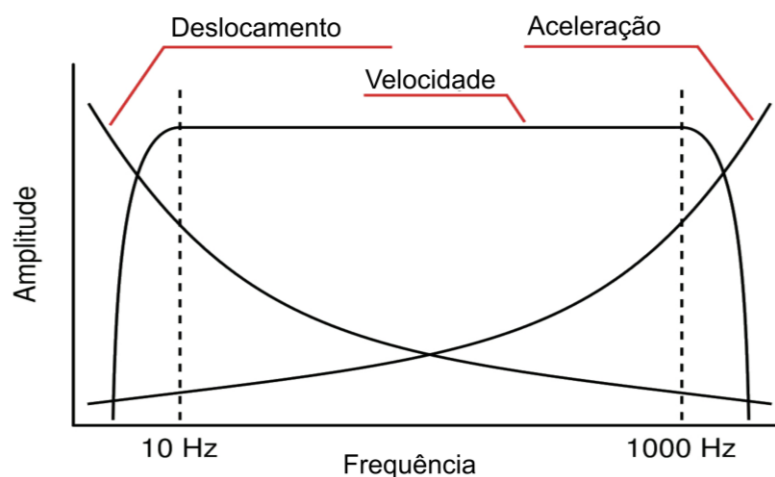
Nesta seção serão apresentados alguns conceitos básicos relativos aos princípios de funcionamento dos sensores e sistemas de aquisição de dados. No entanto, será dado um maior enfoque aos equipamentos mais utilizados para testes dinâmicos de veículos ferroviários, principalmente aos utilizados no estudo de caso a ser apresentado neste trabalho.

### 3.3.1.1 Transdutores de medição de resposta dinâmica

A resposta dinâmica de uma estrutura pode ser medida em termos de qualquer uma das grandezas da equação de movimento (aceleração, velocidade e deslocamento), sendo que com uma delas, teoricamente, as demais podem ser obtidas por integração ou derivação. Para isso, foram desenvolvidos diversos tipos de transdutores capazes de converter essas grandezas físicas em sinais elétricos mensuráveis.

Em tese, é indiferente qual das diferentes grandezas físicas é escolhida para analisar o comportamento dinâmico de uma estrutura. No entanto, como ilustrado na Figura 3-12, cada uma destas grandezas possui uma amplitude de resposta diferente em faixas de frequência distintas (RODRIGUES, 2004).

**Figura 3-12 – Resposta em frequência das diferentes grandezas de resposta**



Fonte: Adaptada de (FERNANDEZ, 2021).

Por apresentar respostas mais expressivas em baixas frequências, em teoria seria mais adequado a medição da resposta de estruturas com modos de baixa frequência, como é o caso dos veículos ferroviários, em termos de deslocamentos. Entretanto, do ponto de vista prático a medição de deslocamentos com os transdutores disponíveis comercialmente é sempre feita em termos do deslocamento

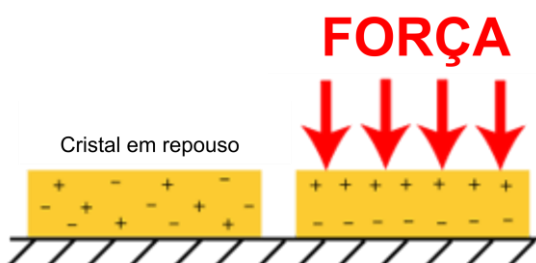
relativo entre dois pontos o que dificulta, e muitas vezes até inviabiliza, a medição em alguns locais. Com isso, na prática dos ensaios dinâmicos para identificação modal em geral mede-se acelerações (RODRIGUES, 2004).

A seguir serão apresentados alguns conceitos básicos relativos aos diferentes transdutores disponíveis para medição da resposta dinâmica dos veículos ferroviários, com maior enfoque nos acelerômetros (Piezoelétricos e MEMS) e nos transdutores de deslocamento variável (LVDT), que serão usados no estudo de caso a ser apresentado na Seção 5.

- Acelerômetros piezoelétricos

Os acelerômetros piezoelétricos têm seu funcionamento baseado no princípio da piezeletricidade. A piezeletricidade é uma propriedade encontrada em cristais de quartzo e alguns materiais cerâmicos artificiais. Quando um material piezoelétrico se deforma, devido à aplicação de um esforço mecânico, seus íons se organizam, gerando uma diferença de potencial diretamente proporcional ao esforço, assim como ilustrado a seguir (PCB PIEZOTRONICS, 2021a).

**Figura 3-13 – Efeito piezoelétrico**

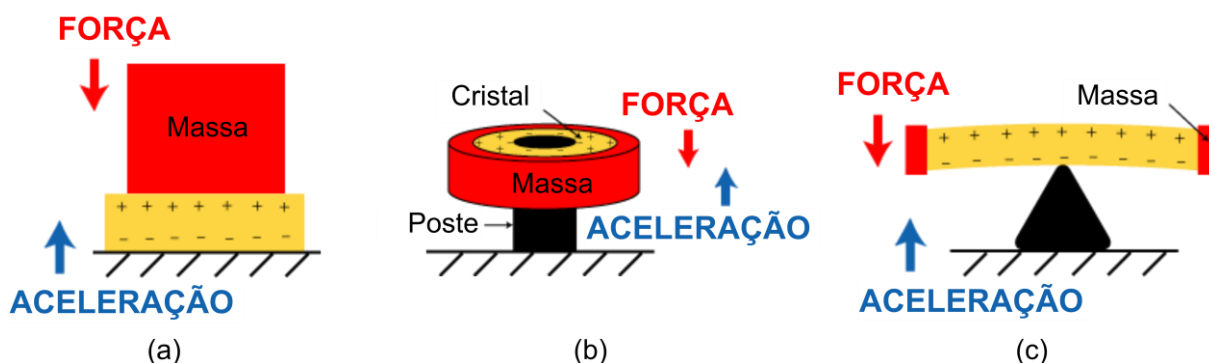


Fonte: Adaptada de (PCB PIEZOTRONICS, 2021a) .

Aproveitando deste princípio os acelerômetros são construídos associando aos cristais uma massa sísmica, de modo que a força aplicada ao cristal, pela segunda lei de Newton ( $F = ma$ ), será diretamente proporcional à aceleração. Com isso, é possível obter uma relação linear entre a aceleração e a diferença de potencial no cristal, cuja constante de proporcionalidade é conhecida como sensibilidade.

Na construção dos acelerômetros podem ser utilizadas diferentes formas de associação entre os cristais piezoelétricos e as massas sísmicas, sendo que as três configurações mais usuais (compressão, cisalhamento e flexão) são ilustradas na Figura 3-14.

**Figura 3-14 – Principais configurações dos acelerômetros piezoelétricos: (a) Compressão, (b) cisalhamento e (c) flexão**



Fonte: Adaptada de (PCB PIEZOTRONICS, 2021a).

Cada configuração possui suas vantagens e desvantagens, resumidas no Quadro 3-1, tornando-a mais ou menos adequada a depender do tipo de aplicação.

**Quadro 3-1 – Comparativo entre as principais configurações dos acelerômetros piezoelétricos**

	Configuração		
	Compressão	Cisalhamento	Flexão
<b>Vantagens</b>	<p>Concepção mais simples e robusta com um menor número de componentes.</p> <p>Elevada rigidez, o que possibilita medições até altas frequências.</p> <p>Alta razão de sensibilidade por massa.</p>	<p>Pouco sensível a deformações da base</p> <p>Pouco sensível a variações de temperatura.</p>	<p>Melhor razão de sensibilidade por massa.</p> <p>Boa performance em pequenas amplitudes e baixas frequências.</p>
<b>Desvantagens</b>	<p>Muito sensível a deformações da base</p> <p>Muito sensível a variações de temperatura.</p>	<p>Baixa razão de sensibilidade por massa.</p>	<p>Muito frágil.</p> <p>Maior sensibilidade a mudanças de temperatura.</p>

Fonte: (PCB PIEZOTRONICS, 2021a; WAGNER; BURGEMEISTER, 2021).




Embora todas as configurações tenham seus campos de aplicação, a mais utilizada é a de cisalhamento, pois apresenta um melhor equilíbrio entre vantagens e desvantagens (PCB PIEZOTRONICS, 2021a; WAGNER; BURGEMEISTER, 2021).

Ao selecionar um acelerômetro piezoelétrico deve-se levar em conta principalmente, mas não unicamente, quatro fatores:

- a) Sensibilidade: É a constante de proporcionalidade entre a aceleração e a diferença de potencial nos terminais do acelerômetro (normalmente medida em V/g);
- b) Faixa de frequência: Intervalo de frequências em que a resposta do sensor é aproximadamente linear;
- c) Gama de amplitude: Intervalo de amplitude em que o sensor opera;
- d) Resolução: Menor variação na aceleração que se consegue medir com o sensor.

O Quadro 3-2 apresenta alguns valores típicos destes parâmetros encontrados em acelerômetros vendidos comercialmente (neste caso tomando como exemplo a fabricante PCB®).

**Quadro 3-2 – Exemplos de especificações encontradas em acelerômetros piezoelétricos comerciais**

	<p>Fabricante: PCB®            Modelo: 393B04            Sensibilidade: 1.000 mV/g            Faixa de frequência (<math>\pm 5\%</math>): 0,06 a 450 Hz            Gama de amplitude (pico): <math>\pm 5.0</math> g            Resolução (rms): 0,000003 g            Configuração: Flexão</p>
	<p>Fabricante: PCB®            Modelo: 333B30            Sensibilidade: 100 mV/g            Faixa de frequência (<math>\pm 5\%</math>): 0,5 a 3.000 Hz            Gama de amplitude (pico): <math>\pm 50</math> g            Resolução (rms): 0,00015 g            Configuração: Cisalhamento</p>
	<p>Fabricante: PCB®            Modelo: 333A22            Sensibilidade: 10 mV/g            Faixa de frequência (<math>\pm 5\%</math>): 1,0 a 10.000 Hz            Gama de amplitude (pico): <math>\pm 500</math> g            Resolução (rms): 0,0005 g            Configuração: Cisalhamento</p>

Fonte: (PCB PIEZOTRONICS, 2021b).

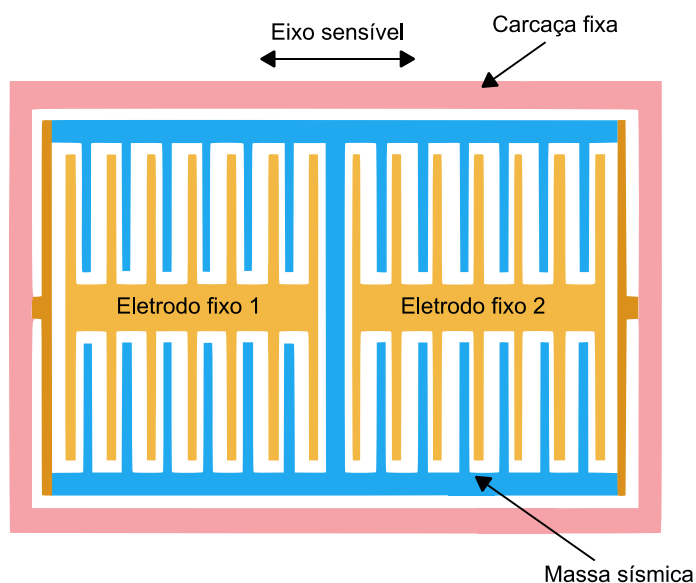
Tomando como base os exemplos apresentados, nota-se que existe claramente um trade-off entre sensibilidade, faixa de frequências e gama de amplitudes. Acelerômetros de alta sensibilidade em geral são capazes de medir até baixas frequências e amplitudes bem pequenas, no entanto sua amplitude e frequência máximas de medição são bastante limitadas. Por outro lado, acelerômetros de baixa sensibilidade perdem performance em baixas frequências e em resolução, mas ganham em gama de amplitude e performance em altas frequências.

Ademais, cabe ressaltar que embora alguns destes acelerômetros, como é o caso do 393B04 apresentado no Quadro 3-2, possam medir em componentes de frequências bastante baixas estes não são capazes de responder até zero Hertz. Ou seja, não é possível medir acelerações constantes com estes dispositivos piezoelétricos.

- Acelerômetros MEMS

Os acelerômetros do tipo MEMS são dispositivos para medição de aceleração fabricados por meio de técnicas de microeletrônica e são sistemas micro eletromecânicos. A Figura 3-15 a seguir representa de maneira esquemática os detalhes construtivos de um acelerômetro MEMS.

**Figura 3-15 – Representação esquemática da construção de um acelerômetro MEMS**



Fonte: Adaptada de (SILICON SENSING SYSTEMS LIMITED, 2017).

Ao sofrer uma aceleração, devido a sua inércia, a massa sísmica tende a permanecer em repouso. No entanto, como esta é fixada à carcaça por meio de

elementos flexíveis, as placas do eletrodo fixo e da massa sísmica vão apresentar um deslocamento relativo proporcional à aceleração. Cada conjunto de placas do eletrodo fixo e da massa sísmica forma um capacitor de placas paralelas cuja capacitância é dada por

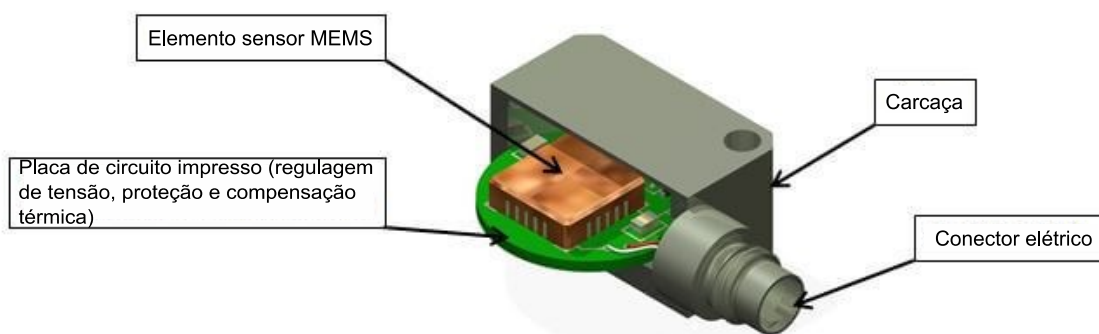
$$C = \varepsilon \frac{A_p}{d_p} \quad (3-5)$$

onde  $A_p$  é a área das placas,  $d_p$  é a distância entre as placas e  $\varepsilon$  é a permissividade elétrica do meio. Com isso, conclui-se que as variações de capacitância, que podem ser facilmente medidas, também são proporcionais à aceleração.

Este tipo de sensor pode ser projetado para operar em diferentes gamas de amplitude e faixas de frequência alterando a massa sísmica e/ou a rigidez dos suportes que a fixam à carcaça. Além disso, o espaço entre as partes mecânicas do sistema é usualmente preenchido com gás o que cria um certo amortecimento prevenindo a saturação do sensor devido a ressonâncias de alta frequência (PCB PIEZOTRONICS, 2020).

Os acelerômetros MEMS usualmente já são vendidos com sistemas eletrônicos de condicionamento de sinais incorporados, como ilustrado na Figura 3-16. Estes circuitos são responsáveis pela alimentação e *output* do sensor, além de, em alguns casos, realizarem regulagem de tensão de alimentação, proteção e compensação automática de efeitos devido à variação de temperatura (PCB PIEZOTRONICS, 2020).

**Figura 3-16 – Eletrônica incorporada a um acelerômetro MEMS comercial**



Fonte: Adaptada de (PCB PIEZOTRONICS, 2020).

O Quadro 3-3 apresenta alguns valores típicos de sensibilidade, faixa de frequência, gama de amplitude e resolução tipicamente encontradas no mercado para acelerômetros MEMS (neste caso tomando como exemplo a fabricante PCB®).

**Quadro 3-3 – Exemplos de especificações encontradas em acelerômetros MEMS comerciais**

	<p>Fabricante: PCB®            Modelo: 3741F122G            Sensibilidade: 1.350 mV/g            Faixa de frequência (<math>\pm 5\%</math>): 0 a 250 Hz            Gama de amplitude (pico): <math>\pm 2</math> g            Resolução (rms): 0,0001 g            Tensão de alimentação: 5 a 32 VDC</p>
	<p>Fabricante: PCB®            Modelo: 3711F1110G            Sensibilidade: 135 mV/g            Faixa de frequência (<math>\pm 5\%</math>): 0 a 1.000 Hz            Gama de amplitude (pico): <math>\pm 10</math> g            Resolução (rms): 0,00035 g            Tensão de alimentação: 5 a 32 VDC</p>
	<p>Fabricante: PCB®            Modelo: 3713F11100G            Sensibilidade: 13,5 mV/g            Faixa de frequência (<math>\pm 5\%</math>): 0 a 1500 Hz            Gama de amplitude (pico): <math>\pm 100</math> g            Resolução (rms): 0,0035 g            Tensão de alimentação: 5 a 32 VDC</p>

Fonte: (PCB PIEZOTRONICS, 2021b).

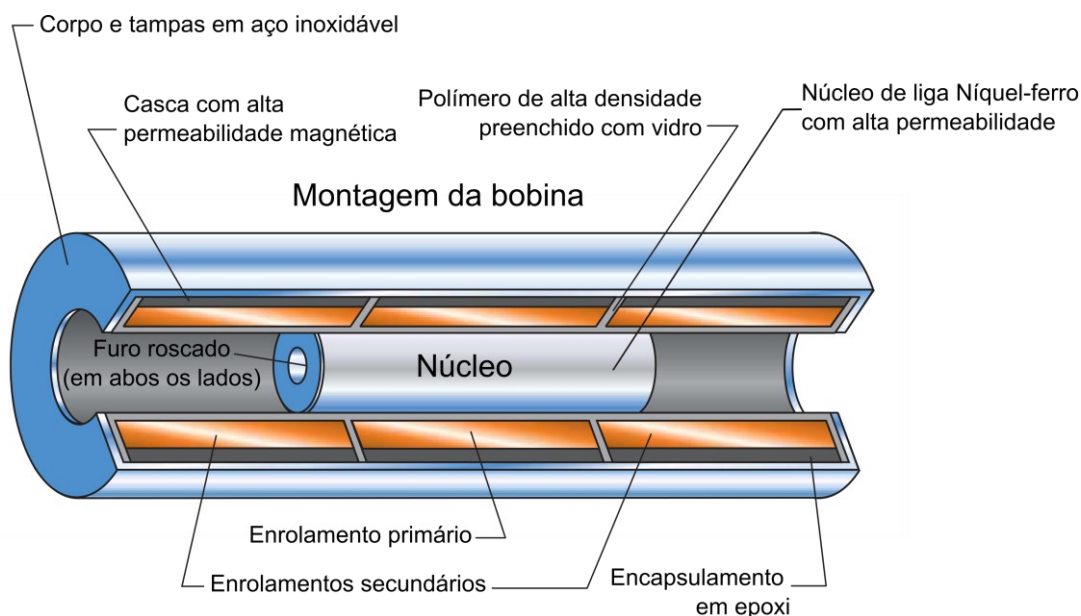
Comparando as especificações apresentadas no Quadro 3-3 com as dos acelerômetros piezoelétricos logo se percebe que os acelerômetros MEMS são capazes de medir frequências tão baixas quanto 0 Hz. Isto é uma enorme vantagem na avaliação de estruturas com modos de baixa frequência, ou mesmo medições de componentes estáticas de aceleração. Ademais, estes sensores também podem ser encontrados com diversos valores de sensibilidade e gama de amplitudes, além de apresentarem um baixo custo. A grande desvantagem destes transdutores, no entanto, está no fato de perderem em capacidade de resolução se comparados aos piezoelétricos.

- Transdutores de deslocamento variável (LVDT)

Os Transdutores de deslocamento variável (LVDT) são sensores utilizados para medição de deslocamento diferencial entre dois pontos. Conforme ilustrado na Figura 3-17 estes são compostos basicamente por três bobinas de cobre e um núcleo

de material com alta permeabilidade magnética. Ao núcleo geralmente é rosqueada uma haste metálica que é presa ao ponto em que se deseja medir os deslocamentos e a carcaça é fixada a um ponto de referência.

**Figura 3-17 – Principais componentes de um LVDT**

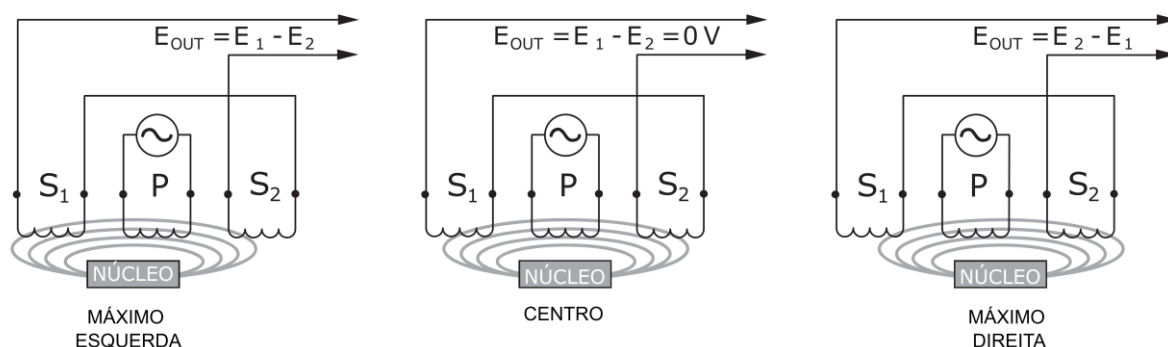


**Fonte: Adaptada de (TE CONNECTIVITY SENSORS, 2017).**

O princípio de funcionamento de um LVDT é ilustrado na Figura 3-18. O enrolamento primário do sensor é excitado com uma corrente alternada (AC) gerando um campo magnético e o núcleo faz com que o campo gerado pelo enrolamento primário seja acoplado aos dos enrolamentos secundários. Quando este se encontra em sua posição central o fluxo é igualmente distribuído entre os enrolamentos  $S_1$  e  $S_2$  e a voltagem diferencial é nula. Quando se move para a esquerda mais fluxo magnético é deslocado para  $S_1$  induzindo mais voltagem neste enrolamento e conseqüentemente gerando a voltagem diferencial ( $E_1 - E_2$ ). Quando se desloca para a direita o oposto ocorre, ou seja,  $S_2$  recebe mais fluxo e a voltagem diferencial ( $E_2 - E_1$ ) é gerada (TE CONNECTIVITY SENSORS, 2017).



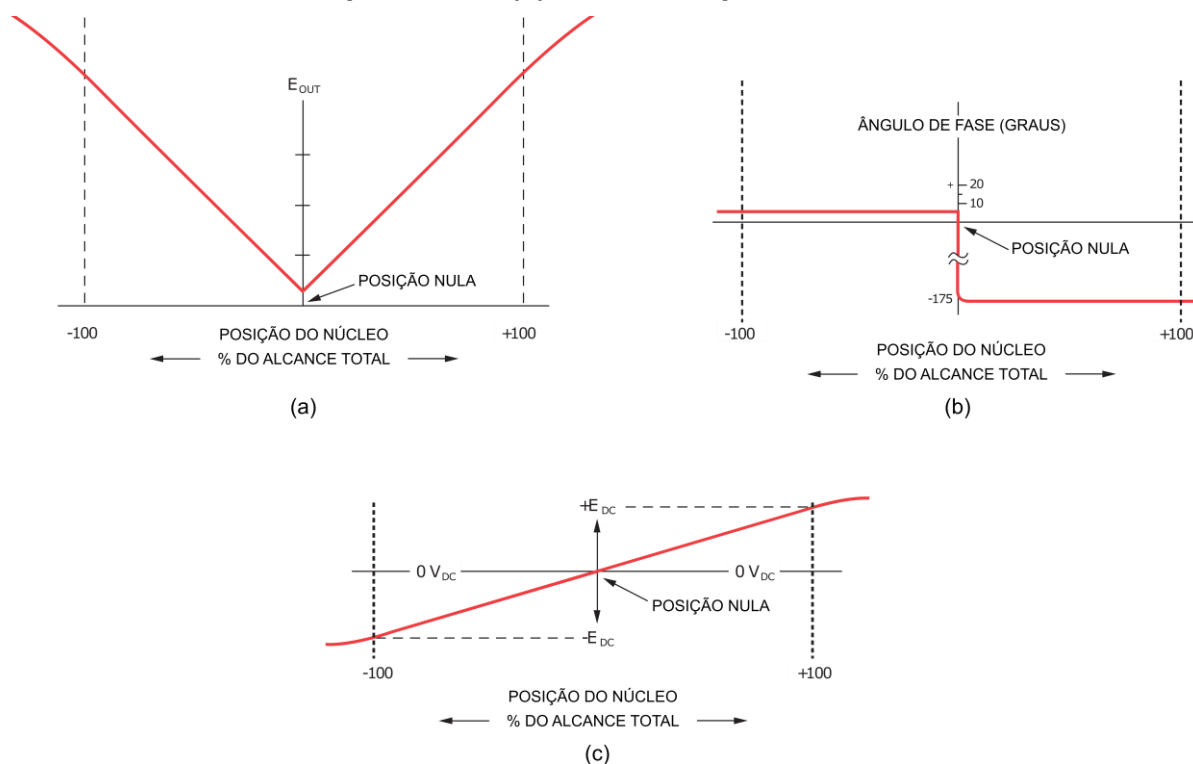
**Figura 3-18 – Princípio de funcionamento de um LVDT**



Fonte: Adaptada de (TE CONNECTIVITY SENSORS, 2017).

A Figura 3-19 ilustra de maneira gráfica a saída de tensão em um LVDT em função da posição do núcleo. Como pode-se observar a magnitude da voltagem diferencial (Figura 3-19a) entre os enrolamentos secundários é proporcional à posição do núcleo, já seu ângulo de fase com relação ao enrolamento primário (Figura 3-19b) é constante, sofrendo apenas uma mudança abrupta ao cruzar a posição nula. Com isso a eletrônica de condicionamento de sinais consegue converter essas leituras na saída em corrente contínua (DC) apresentada na Figura 3-19c (TE CONNECTIVITY SENSORS, 2017).

**Figura 3-19 – Característica das saídas de um LVDT: (a) Magnitude da voltagem diferencial AC; (b) ângulo de fase da voltagem diferencial AC com relação ao enrolamento primário e (c) saída DC após condicionamento**





Fonte: Adaptada de (TE CONNECTIVITY SENSORS, 2017).

Na escolha de um LVDT, deve-se ter em conta algumas especificações básicas, como sua frequência de excitação, gama de amplitudes e sensibilidade. A frequência de oscilação da tensão que excita o enrolamento primário de um LVDT varia bastante, podendo ser desde 50 Hz até mais de 25 kHz. Como regra prática para se obter bons resultados a frequência de excitação deve ser pelo menos 10 vezes superior à maior frequência que se deseja medir (RODRIGUES, 2004). Com relação à amplitude máxima de vibração, podem ser encontrados sensores com as mais diversas configurações, desde alguns com poucos milímetros de curso até sensores com curso na ordem do metro. O mesmo é válido para a sensibilidade, sendo encontrados modelos com os mais diversos valores.

O Quadro 3-4 ilustra algumas especificações comumente encontradas para estes sensores.

**Quadro 3-4 – Exemplos de especificações encontradas em LVDTs comerciais**

	<p>Fabricante: TE Connectivity Sensors®  Série: XS-D  Gama de amplitude (in): <math>\pm 1 / 2 / 3 / 5 / 10</math>  Sensibilidade (V/V/in): 0,28 / 0,16 / 0,12 / 0,13 / 0,05  Frequência de excitação: 400 Hz a 3 kHz</p>
	<p>Fabricante: TE Connectivity Sensors®  Série: GCA  Gama de amplitude (in): <math>\pm 0,05 / 0,125 / 0,25 / 0,5 / 1 / 2</math>  Sensibilidade (V/V/in): 4,2 / 2,4 / 1,6 / 1,1 / 0,84 / 0,34  Frequência de excitação: 400 Hz a 10 kHz</p>

Fonte: (TE CONNECTIVITY SENSORS, 2022).

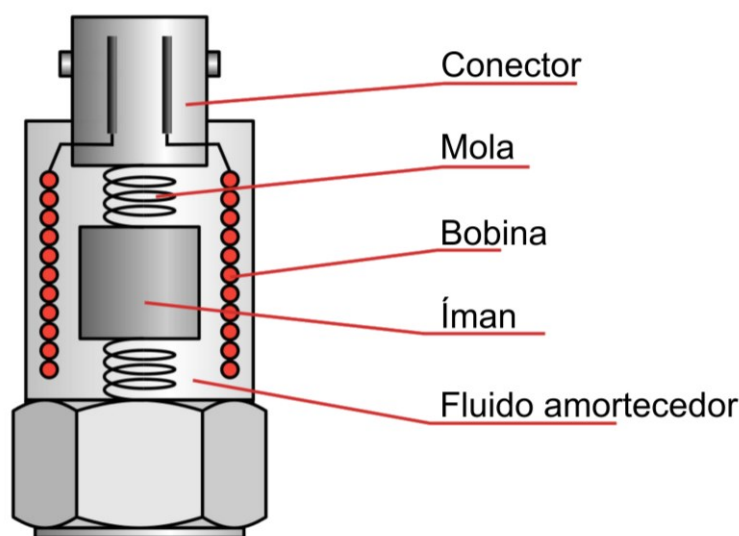
Estes sensores possuem inúmeras vantagens, especialmente pelo fato de, por operarem com base em indução eletromagnética e possuírem mínimo atrito entre suas partes são sensíveis mesmo às menores variações de comprimento, o que gera uma resolução virtualmente infinita. Contam também com uma ótima estabilidade de sua posição nula, uma vez que esta é inerente à construção simétrica do sensor, além de possuírem excelente durabilidade. A grande desvantagem, no entanto, dos LVDTs é o fato de somente serem capazes de medir deslocamentos relativos entre dois pontos, dificultando muito a sua instalação.

- Transdutores de velocidade

Uma outra gama de instrumentos possíveis para medição das respostas dinâmicas dos veículos são transdutores de velocidade, também conhecidos como Geofones. Estes dispositivos também são bastante difundidos no mercado e muito utilizados no Brasil para o monitoramento de vibrações sísmicas devido a operações de desmorte de rocha em minerações.

A Figura 3-20 ilustra de maneira esquemática a concepção teórica de um Geofone. Estes dispositivos são compostos de um ímã permanente que se movimenta em relação a uma bobina. Pela lei de indução de Faraday a força eletromotriz induzida em uma bobina devido à passagem de um ímã é proporcional à velocidade relativa entre ambos. Ou seja, pela medição da diferença de potencial na bobina pode-se obter a velocidade (BRINCKER; VENTURA, 2015).

**Figura 3-20 – Princípio de funcionamento de um Geofone**



Fonte: Adaptada de (FERNANDEZ, 2022).

A grande vantagem em se utilizar este tipo de sensor está no fato de, por medir velocidade, a aceleração ou o deslocamento podem ser obtidos mais prontamente, requerendo apenas uma operação de derivação ou integração respectivamente. A grande desvantagem destes sensores está no fato de sua linearidade estar limitada a frequências superiores à sua frequência natural, que costuma ser entre 4 Hz e 12 Hz (BRINCKER; VENTURA, 2015).

Esta performance ruim em baixas frequências é um limitante ao se monitorar veículos, que frequentemente possuem modos com frequências abaixo destes

valores. No entanto, alguns equipamentos novos vêm conseguindo operar em frequências mais baixas, o que pode abrir novas possibilidades de utilização no futuro.

### 3.3.1.2 Sistemas de aquisição de dados

A grosso modo, todos os sensores apresentados no item anterior nada mais fazem que converter uma grandeza física associada ao movimento em um sinal analógico elétrico de diferença de potencial. Para que estes dados possam vir a ser úteis para as técnicas de identificação modal, que serão apresentadas mais a diante na Seção 4.2, devem ser convertidos em séries temporais discretas, a esta operação é dado o nome de conversão analógico/digital (A/D). Os equipamentos responsáveis por essa operação são conhecidos como sistemas de aquisição de dados.

A operação de conversão analógico digital pode ser dividida em basicamente duas etapas, amostragem e quantização. A amostragem é a operação responsável por “coletar” pontos igualmente espaçados no tempo ao longo do sinal e controla sua resolução em frequência. A quantização consiste-se na conversão da amplitude do sinal contínuo em números discretos e influencia diretamente a resolução em amplitude (RODRIGUES, 2004).

Para que um sinal seja propriamente amostrado, ao selecionar um sistema de aquisição, deve-se sempre ter em conta o teorema da amostragem de Nyquist-Shannon, segundo o qual a máxima frequência que pode ser adequadamente representada em um sinal discretizado é igual à metade da frequência de amostragem, ou seja

$$f_{sp} = 2f_{Nyq} = \frac{1}{\Delta t} \quad (3-6)$$

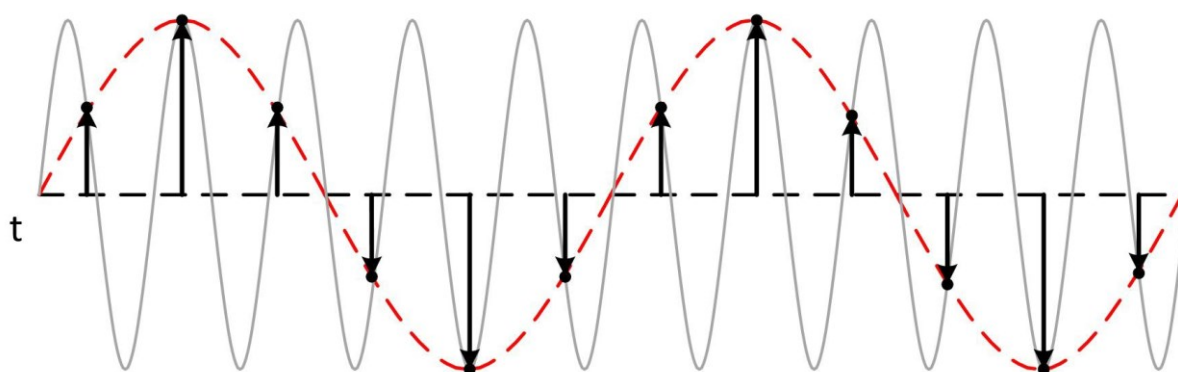
onde  $f_{sp}$  e  $\Delta t$  são a frequência e tempo de amostragem respectivamente e  $f_{Nyq}$  é a máxima frequência que se pode representar com essa taxa de amostragem, também conhecida como frequência de Nyquist (BRINCKER; VENTURA, 2015).

Caso o sinal a ser amostrado contenha frequências superiores à de Nyquist, a energia a elas associada será necessariamente transferida de forma artificial para o intervalo compreendido entre zero e  $f_{Nyq}$ . A prova desta transferência de energia é facilmente derivada do teorema de Parseval, que garante que a potência média de um sinal periódico é necessariamente equivalente à soma da potência média de suas

componentes de Fourier. Este fenômeno é conhecido como *aliasing* e é responsável por vários erros de interpretação dos dados (BRINCKER; VENTURA, 2015).

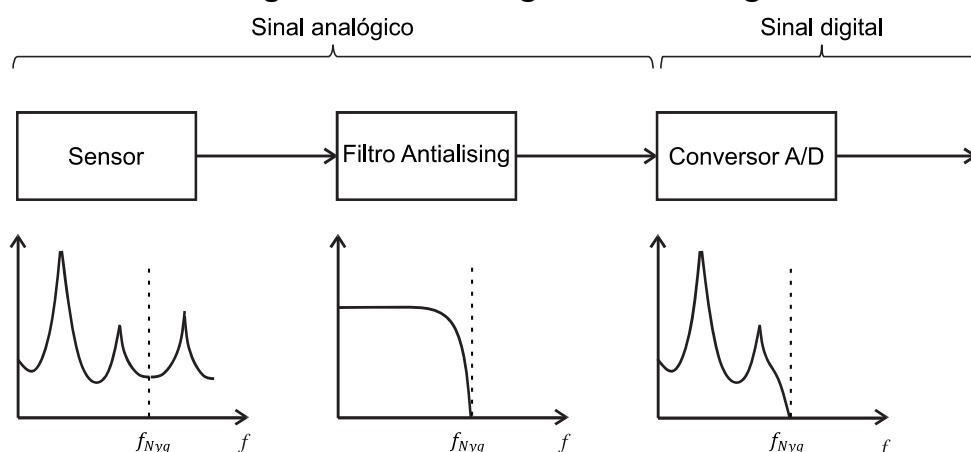
A Figura 3-21 ilustra as consequências de se adotar uma taxa de amostragem insuficiente ao discretizar um sinal. Como pode-se observar, devido à baixa taxa de amostragem, o sinal, após ser amostrado, aparenta possuir uma frequência muito mais baixa do que realmente possui.

**Figura 3-21 – *Aliasing* de um sinal**



Fonte: (NATIONAL INSTRUMENTS, 2019).

Para se evitar o *aliasing* é imprescindível que nos sistemas de aquisição existam filtros passa baixa analógicos para remover quaisquer componentes de frequência superiores à frequência de Nyquist antes de se amostrar o sinal. Na prática, como não existem filtros ideais, não é possível realizar o corte exatamente na frequência limítrofe e, em geral, considera-se que frequências acima de 80 % da frequência de Nyquist já começam a ser afetadas pelo filtro. Com isso, é recomendável que se adote uma frequência de amostragem no mínimo 2,4 vezes superior à máxima frequência que se pretende representar adequadamente. Estas operações estão esquematizadas no fluxograma da Figura 3-22 (BRINCKER; VENTURA, 2015).

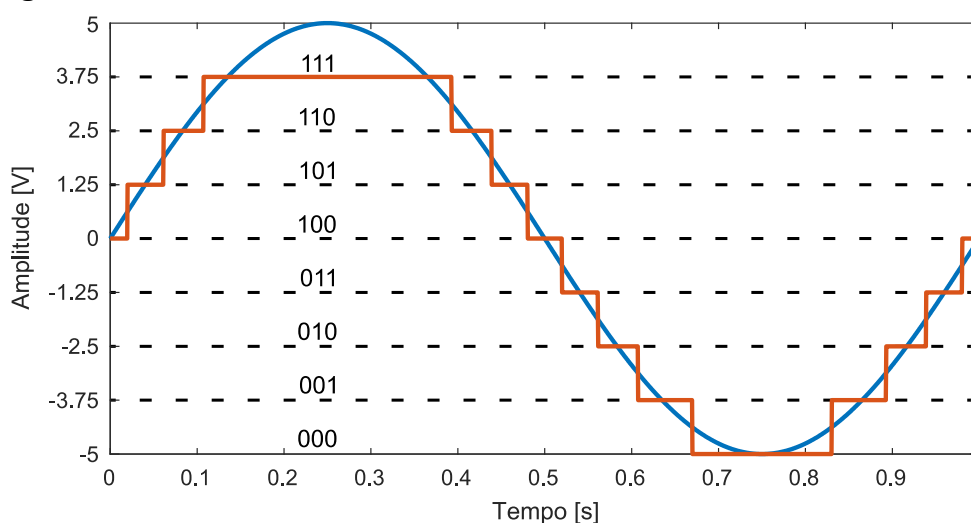
**Figura 3-22 – Filtragem anti-aliasing**

Fonte: Adaptada de (BRINCKER; VENTURA, 2015).

A segunda operação fundamental na conversão analógico-digital, a quantização, consiste-se basicamente na divisão da saída contínua dos sensores em um conjunto finito de números discretos. Nos sistemas digitais a representação de um número é sempre feita com base no sistema binário de numeração, ou seja, a resolução do sinal depende da quantidade de bits do conversor. O número de intervalos disponíveis para discretizar um sinal pode ser calculado por

$$N_{Intervalo} = 2^{N_{bits}} \quad (3-7)$$

em que  $N_{bits}$  é a quantidade de bits do conversor (RODRIGUES, 2004). A título de exemplo a Figura 3-23 ilustra o resultado da quantização de um sinal com amplitude de  $\pm 5$  V por meio de um conversor de 3 bits, sendo este capaz de traduzir essa amplitude em apenas 8 valores distintos.

**Figura 3-23 – Quantização de um sinal com um conversor de 3 bits**

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os sistemas de aquisição de dados são usualmente comercializados na forma de módulos especialmente preparados para um tipo específico de sinal de entrada e com conectores diversos. Estes módulos são usualmente agrupados em chassis responsáveis por transmitir os dados digitais para um local de armazenamento, normalmente um computador. A Figura 3-24 ilustra vários módulos de aquisição de dados agrupados em um chassi da fabricante Brüel & Kjær®.

**Figura 3-24 – Módulos de aquisição de dados acoplados a um chassi**



Fonte: (BRÜEL & KJÆR, 2022).

### 3.3.2 Técnicas de ensaio

No caso de veículos ferroviários os testes podem ser divididos em dois grupos, sendo estes os executados com o veículo em repouso e aqueles realizados com o veículo em sua operação normal. Além disso, os ensaios podem ser classificados como (*input-output*) onde são medidas as forças de excitação e (*output-only*) onde são coletados apenas registros de resposta, sendo que o primeiro se restringe a aplicações com o veículo em repouso. A necessidade de se medir as forças de entrada está intimamente atrelada à técnica de identificação modal que será escolhida.

Nesta seção serão apresentadas as diferentes abordagens que têm sido utilizadas e bem sucedidas para a caracterização da resposta dinâmica de veículos ferroviários, bem como as vantagens e desvantagens associadas a cada tipo de ensaio.

#### 3.3.2.1 Ensaios em condições estacionárias

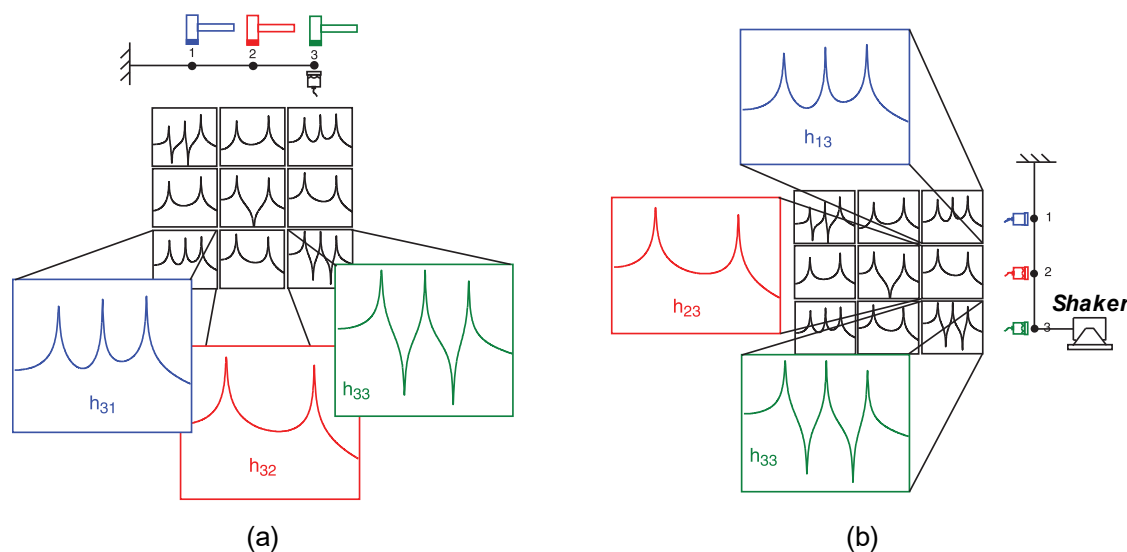
Os ensaios dinâmicos estacionários podem ser divididos em basicamente dois grupos, aqueles baseados em técnicas de análise modal clássica (*input-output*) e

aqueles baseados em técnicas de análise modal operacional (*output-only*). No primeiro caso são coletados registros temporais tanto da força aplicada quanto das respostas da estrutura, normalmente acelerações, permitindo a obtenção direta das FRF's pelas razões, no domínio da frequência, entre acelerações e forças. No segundo caso apenas as repostas da estrutura são medidas a excitações randômicas provenientes de ações ambientais ou impostas externamente.

- Ensaio *input-output*

Para este ensaio martelos e *shakers* instrumentados são os equipamentos mais utilizados para excitar as estruturas ensaiadas. A Figura 3-25 ilustra, de maneira esquemática, a condução deste tipo de ensaio por meio de duas técnicas distintas. Na primeira delas a estrutura é instrumentada em apenas um ponto e excitada com um martelo em três locais distintos, enquanto que, na segunda, a excitação é aplicada a apenas um ponto por meio de um *shaker* e as acelerações são medidas em todos os três pontos. Estas técnicas são conhecidas respectivamente como MISO (*multiple input single output*) e SIMO (*single input multiple output*). Embora em ambas os resultados obtidos sejam idênticos a realização de ensaios MISO com *shaker* é rara devido à dificuldade de se movimentar o *shaker* o que não é um problema com o martelo. Em estruturas de grande porte também pode ser utilizado mais de um shaker em simultâneo para garantir uma excitação mais uniforme (HERLUFSEN, 2004).

**Figura 3-25 – Ensaio de vibração forçada (a) Com martelo e (b) com *shaker***



Fonte: Adaptada de (AVITABILE, 2017).

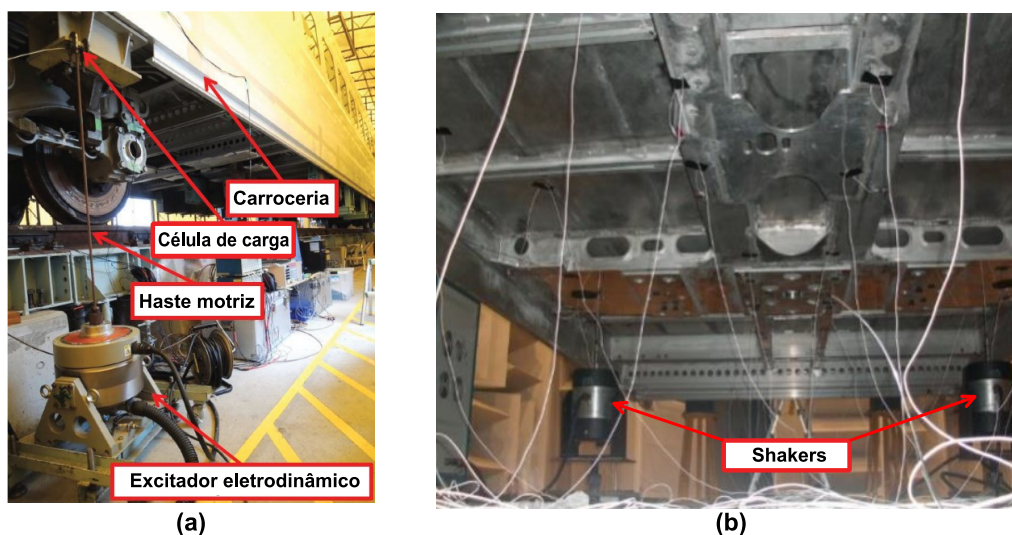
A grande vantagem deste ensaio é que possibilita a obtenção direta das funções de resposta em frequência. Conforme apresentado na Seção 2.2, estas



funções possuem uma expressão bem definida, por meio da qual, facilmente podem ser extraídas as frequências naturais, coeficientes de amortecimento e formas de vibrar.

Entretanto, a aplicação deste tipo de ensaio a veículos ferroviários, embora tecnicamente possível, é muitas vezes inviável do ponto de vista logístico e econômico. Para a adequada condução do ensaio o veículo precisa estar em um local livre de fontes intrusivas de vibração tendo de ser retirado de operação por longos períodos de tempo, o que é especialmente difícil para o caso de vagões de carga que possuem agendas de operação muito intensas. Todas estas dificuldades limitam estes ensaios a apenas investigações de laboratório. A Figura 3-26 a seguir ilustra a complexidade do *setup* experimental para a realização deste tipo de ensaio por meio do uso de *shakers* em dois vagões ferroviários distintos.

**Figura 3-26 – Instalação de um *shaker* em um veículo de passageiros**



Fonte: Adaptadas de (a) (AKIYAMA et al., 2020) e (b) (OUYANG; SUI, 2014).

- Ensaio *output-only*

Nesta abordagem, são medidas somente as respostas do veículo à ações ambientais, como o vento, micro sismos, tráfego de pessoas próximas, dentre outros (LEITE, 2016). No entanto, é corriqueiro no caso de vagões ferroviários que fontes externas de vibração tenham que ser fornecidas, em conjunto com as ações ambientais, para elevar os níveis de vibração e conseguir melhores razões sinal-ruído. Para prover tais excitações é frequente a utilização de martelos de impacto e/ou pessoas pulando de forma aleatória sobre a carroceria do veículo (SILVA et al., 2021).

Diferentemente do caso anterior neste ensaio não é possível obter funções de resposta em frequência de maneira direta. Com isso, para a obtenção das propriedades

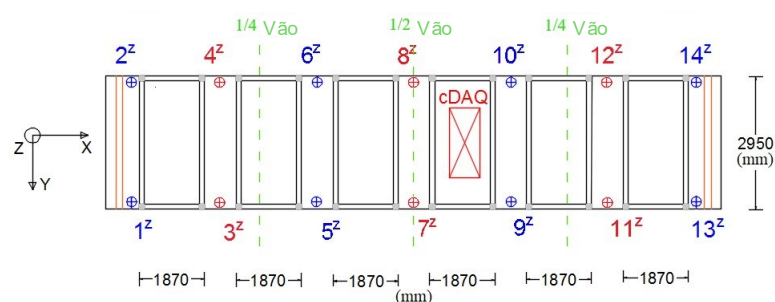
dinâmicas da estrutura é necessária a aplicação de técnicas sofisticadas de identificação modal. Para o sucesso deste tipo de ensaio, todas as técnicas de introdução externa de vibrações referidas a priori devem prover a estrutura uma excitação mais próxima possível de um ruído branco, sendo esta uma premissa comum a todos os métodos de identificação *output-only* que serão detalhados na Seção 4.2.

Nos trabalhos desenvolvidos por Silva et al. (2021) e Ribeiro et al. (2022) foi obtido sucesso na realização deste tipo de ensaio durante a operação de descarregamento de uma composição ferroviária. Em ambos os ensaios fontes externas tiveram de ser utilizadas para garantir níveis detectáveis de vibração. A Figura 3-27 apresenta o *setup* experimental adotado por Silva et al. (2021) para a realização do ensaio.

**Figura 3-27 – Setup experimental de um veículo de carga**



(a)



(b)

Fonte: Adaptada de (SILVA et al., 2021).

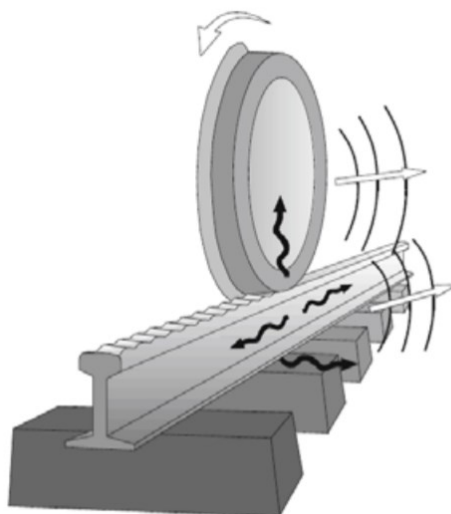
Comparando o aparato experimental necessário para a condução dos dois tipos de ensaio, percebe-se que, por não requerer a instalação de dispositivos instrumentados de excitação e não ser necessário um controle preciso das forças aplicadas ao vagão, os testes baseados em técnicas *output-only* podem ser conduzidos em ambientes pouco controlados gerando menos impacto para a operação.

### 3.3.2.2 Ensaio em condições operacionais

Diferentemente do caso estacionário, em que se pode utilizar diferentes técnicas, os ensaios dinâmicos com o veículo em movimento são sempre baseados em metodologias de análise modal operacional (*output-only*). Para a realização deste ensaio devem ser utilizados sistemas de medição totalmente embarcados no veículo e são coletados registros das respostas dinâmicas, normalmente em termos de aceleração, durante seu percurso normal de operação.

Em condições de movimento, a excitação é fornecida pela interface roda-trilho, essencialmente devido à excitação induzida pelas irregularidades da via somada também a outras ações ambientais. Estas excitações se dão na forma de vários pequenos impactos da roda com as irregularidades e são capazes de mobilizar de maneira eficaz modos até 45 Hz (SICHANI; AHMADIAN, 2006). A Figura 3-28 a seguir ilustra este mecanismo de geração de vibração.

**Figura 3-28 – Mecanismo excitação por rolagem devido às irregularidades**



Fonte: Adaptada de (VENDRAMI; PAUL, 2009).

A eficácia desta metodologia de ensaio foi atestada por Sichani e Ahmadian (2006), que realizaram testes dinâmicos em um mesmo vagão de carga tanto em repouso quanto em movimento. Nestes testes, após a identificação modal foram alcançados resultados semelhantes para a maioria das frequências naturais e formas de vibrar, principalmente relativas a modos estruturais da carroceria, atestando a eficácia desta técnica.

Os ensaios em condições operacionais possuem inquestionáveis vantagens do ponto de vista da interferência na logística de operação dos vagões se comparadas

às demais abordagens, mas, além disso, este é o único tipo de ensaio que permite obter de maneira fiel as propriedades relativas aos modos de vibração associados ao movimento das suspensões de amortecimento por fricção comumente usadas nestes veículos.

Por funcionarem pelo princípio de amortecimento de Coulomb, os amortecedores de fricção são dispositivos muito rígidos até que se imponha uma força suficientemente grande para que o atrito estático entre as superfícies seja vencido, o que fica claro pela curva histerética apresentada no item 3.1.2. Prover forças de tamanha magnitude não é possível com pequenos *shakers* e martelos e nem com as ações ambientais, mesmo que combinadas com outras formas corriqueiras de excitação. Além disso, as demais partes móveis do sistema de suspensão perdem a lubrificação ideal com o uso, além de serem frequentemente contaminadas por sujeira. Esta situação faz com que estes componentes normalmente estejam engripados e que não se movam facilmente.

Estes aspectos resultam em comportamentos distintos das suspensões entre os veículos parados ou em movimento. Consequentemente, tal situação leva a resultados que não se aplicam a condições reais de funcionamento do veículo no que diz respeito às propriedades das suspensões. Estudos recentes (RIBEIRO et al., 2022; SILVA et al., 2021) demonstraram que a rigidez aparente das suspensões em vagões de carga pode ser até mais de dez vezes superior ao seu valor nominal, quando sujeita a baixos níveis de excitação.

### **3.3.3 Instalação de sensores**

Independentemente da metodologia de ensaio adotada, a qualidade dos resultados obtidos está sempre ligada a uma escolha adequada do posicionamento e da forma de fixação dos sensores. A seguir serão abordadas algumas recomendações gerais relativas às boas práticas, tanto para a escolha de locais de medição otimizados, quanto para métodos de fixação dos sensores de medição de resposta.

#### **3.3.3.1 Posicionamento de sensores**

Ao escolher os locais e direções para se posicionar os sensores, deve-se sempre ter em mente a forma, ao menos aproximada, dos modos que se deseja identificar na estrutura. Para isso, pode-se contar com experiências prévias em

estruturas similares, no entanto, é sempre mais aconselhável que estas formas modais sejam obtidas por meio de um modelo numérico prévio da estrutura a ser ensaiada (RODRIGUES, 2004).

Usando as formas modais obtidas do modelo numérico preliminar, os sensores podem ser posicionados em direções e locais estratégicos que possibilitarão, não só a identificação, mas também a distinção entre as diferentes formas modais da estrutura. Ao selecionar estes graus de liberdade deve-se sempre buscar por locais e direções que são efetivamente mobilizados pelos modos da estrutura, evitando posicionar sensores sobre os nós de algum modo de vibração.

Rodrigues (2004) recomenda que uma boa forma de se verificar a escolha é, para estes graus de liberdade, calcular o *Modal Assurance Criterion* (MAC) entre os modos que se deseja identificar. É ideal que o valor de MAC, dado por

$$MAC_{ij} = \frac{|\boldsymbol{\varphi}_i^H \boldsymbol{\varphi}_j|^2}{(\boldsymbol{\varphi}_i^H \boldsymbol{\varphi}_i)(\boldsymbol{\varphi}_j^H \boldsymbol{\varphi}_j)} \quad (3-8)$$

seja próximo a 1,0 quando computado entre modos correspondentes e inferior a 0,1 entre modos distintos. É fácil notar que o MAC nada mais é que uma medida de correlação entre dois vetores, no caso os vetores contendo as ordenadas modais, com isso o critério anterior garante que com estes graus de liberdade os modos poderão ser facilmente distinguidos.

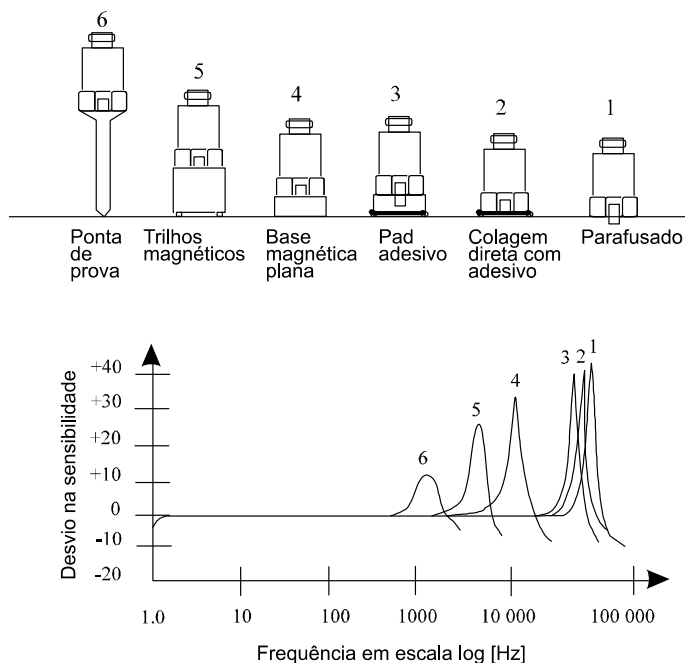
Brincker e Ventura (2015) propõe um critério de verificação um pouco mais sofisticado, sugerindo que se realize uma simulação da resposta dinâmica do modelo de elementos finitos. À resposta numérica dos graus de liberdade escolhidos deve-se adicionar certo nível ruído de modo a simular uma medição. Partindo destes dados, deve-se aplicar técnicas de identificação modal de modo a verificar se serão suficientes para identificar os modos.

Outro aspecto de extrema relevância a se ter em conta na escolha dos graus de liberdade é o chamado escalamento dos modos de vibração. Muitas vezes em um ensaio dinâmico são buscados apenas modos em uma direção específica, ou mesmo de uma parte específica da estrutura. Nestes casos, frequentemente, não é instalado nenhum sensor fora da direção e do componente alvo do estudo. No entanto, modos locais de outras partes da estrutura, ou em outras direções, podem ter ligeiras amplitudes que se confundem com os modos que se pretende identificar. A ausência então de sensores em outras posições impede que estas pequenas amplitudes sejam



formas de fixação de sensores, bem como um gráfico comparativo entre a influência que cada uma destas formas exerce sob a resposta em frequência do sistema de medição.

**Figura 3-30 – Principais formas de fixação de sensores e suas respectivas respostas em frequência**



Fonte: Adaptada de (PCB PIEZOTRONICS, [s.d.]).

Como fica claro pelo gráfico da Figura 3-30 o impacto que o método de fixação exerce sob a resposta em frequência é problemático apenas para valores acima de 1.000 Hz. Com isso, este aspecto não se trata de um problema em ensaios dinâmicos de veículos ferroviários, uma vez que seus modos de vibração encontram-se em frequências muito inferiores a 1.000 Hz, como pode ser verificado nos trabalhos de (RIBEIRO et al., 2013, 2022; SICHANI; AHMADIAN, 2006; SILVA et al., 2021).

Embora a influência em frequência neste caso não seja muito relevante, a resistência mecânica da fixação é um aspecto crucial nos ensaios com os veículos em movimento. Devido às altas acelerações e possíveis impactos, principalmente nos rodeiros, é muito importante nestes casos optar pelas formas mais robustas de fixação, como a colagem ou aparafusamento dos sensores. Deste modo, evita-se que os sensores se desloquem de suas posições, ou até mesmo venham a cair do veículo.

Em complemento às formas de fixação apresentadas, é muito comum a utilização de dispositivos adaptadores, como os ilustrados na Figura 3-31, para o posicionamento dos sensores. Estes adaptadores, quando vendidos comercialmente, são constituídos de cubos metálicos extremamente rígidos. No entanto, podem

também ser fabricados com cantoneiras de aço de seção transversal esfeça. Nas faces dos cubos, são usinadas roscas de fixação que permitem posicionar os acelerômetros em planos ortogonais à face da estrutura a qual o adaptador é fixado. Deste modo, é possível realizar medições pontuais de aceleração em qualquer eixo, por meio de combinações de acelerômetros uniaxiais.

**Figura 3-31 – Adaptadores para montagem de acelerômetros**



Fonte: (PCB PIEZOTRONICS, 2021b).

### 3.3.4 Pré-processamento de registros

Por fim, uma vez coletados e armazenados, em formato digital, é recomendável que os dados dos testes dinâmicos passem por algumas operações de verificação de qualidade e pré-processamento antes da aplicação das técnicas de identificação modal a serem apresentadas na Seção 4.2.

Antes de se partir para as operações de pré-processamento propriamente ditas é importante que se façam verificações quanto a qualidade do sinal. Estas verificações em geral são realizadas inspecionando os registros tanto no domínio do tempo quanto da frequência em busca de possíveis problemas no sinal (RODRIGUES, 2004).

Rodrigues (2004) cita os problemas mais comuns associados aos dados dos ensaios dinâmicos como sendo:

- a) Saturação: Trata-se de cortes nos valores extremos de amplitude do sinal, na maioria dos casos causados por uma exposição do sensor a níveis de vibração fora da sua gama de amplitudes de medição;
- b) Baixa razão sinal ruído: Decorre, na maioria dos casos, do uso de sensores com sensibilidade insuficiente para detectar os níveis de vibração existentes no local, tornando muito difícil a distinção entre o que é ruído e o que é resposta da estrutura;



- c) Ruído intermitente: Ruído que afeta apenas alguns trechos da medição, sendo causados muitas vezes por problemas de mau contato em alguma das conexões do sistema de medição;
- d) Ruído da rede elétrica: Em sistemas de medição alimentados pela rede elétrica é muito frequente a presença de ruídos na frequência da rede de alimentação, 50-60 Hz, e seus harmônicos;
- e) Tendências espúrias: Desvios lentos do valor médio do sinal, que não correspondem a nenhuma resposta física da estrutura que se está medindo. Podem se manifestar como tendências lineares ou mesmo componentes de muita baixa frequência;
- f) Interrupção dos sinais: Pausas na aquisição dos sinais, geralmente causadas por saturação ou falhas na alimentação elétrica dos sistemas de aquisição ou sensores;
- g) Pontos singulares: Valores atípicos no sinal que surgem devido a algum problema no conversor analógico digital e destoam de qualquer resposta física da estrutura. Este problema pode ocorrer tanto de forma isolada, afetando um único dado, como durar por certos intervalos de tempo afetando conjuntos de dados.

A depender do tipo de problema e de sua extensão um conjunto de dados pode ser totalmente comprometido, inviabilizando completamente seu uso. Por este fato é recomendável que ao menos inspeções preliminares dos registros sejam feitas ainda em campo, desta forma na presença de anomalias muito severas os ensaios ainda podem ser repetidos. Por outro lado, algumas dessas anomalias, quando em menor escala, podem ser corrigidas por operações básicas de processamento de sinais durante a fase de pré-processamento.

Rodrigues (2004) apresenta as principais operações de pré-processamento, como sendo:

- a) Remoção de pontos singulares: Quando se tratarem de eventos isolados pode ser feita por meio da substituição do dado espúrio por um valor interpolado entre seus pontos adjacentes. Quando um conjunto mais amplo de dados é afetado não é possível fazer essa interpolação e, nestes casos, a parcela comprometida do sinal deve ser completamente descartada;

- b) Junção de amostras por meio de janelas de transição: Em sistemas de medição que não garantem a continuidade do sinal entre os diferentes arquivos, ou mesmo em casos como o anterior, em que partes do sinal são removidas, é necessário unir os diferentes blocos de sinal. Nestas situações devem ser utilizadas janelas de transição de modo a evitar descontinuidades no sinal;
- c) Escalamento dos registros: Muitas vezes os registros são armazenados em unidades distintas daquelas que se está medindo, por exemplo em Volts. Nestes casos é necessário multiplicar estes dados por um fator de escala que leva em conta a sensibilidade do sensor e possíveis ganhos do sistema de condicionamento de sinal;
- d) Correção da resposta em frequência dos equipamentos: Caso os equipamentos de medição possuam uma resposta em frequência que não seja constante dentro da faixa em estudo é necessário compensar estes efeitos. Esta correção pode ser feita, por exemplo, dividindo os sinais no domínio da frequência pela FRF do sensor e passando estes novamente para o domínio do tempo por meio de uma transformada inversa de Fourier (BRINCKER; VENTURA, 2015);
- e) Remoção de tendências: Essa operação se consiste na remoção de médias e tendências espúrias do sinal. Estes valores médios no sinal não representam nenhuma resposta física da estrutura, exceto em sensores que tem resposta até zero Hertz, mas mesmo nestes casos não possuem interesse para a identificação modal em si. O processo de remoção destas tendências pode ser feito por meio do ajuste e posterior subtração de uma reta dos dados ou mesmo pela utilização de um filtro passa alta com frequência de corte bem próxima de zero;
- f) Filtragem: É empregada quando se deseja remover do sinal frequências fora da banda de interesse do estudo;
- g) Decimação: Em muitos casos os sistemas de aquisição de dados possuem frequências de amostragem muito superiores ao que de fato é necessário para as análises. Nestes casos, é possível tornar os registros mais compactos pela operação de decimação que é capaz de reduzir a frequência de amostragem dos sinais em valores inteiros, descartando conjuntos igualmente espaçados de dados. É importante, no entanto, sempre realizar uma filtragem passa baixo dos dados antes da decimação, de modo a evitar que ocorra *aliasing* no sinal.

Dentre as diversas operações apresentadas a escolha de quais serão utilizadas depende muito do caso específico em análise, além das anomalias presentes nos dados coletados.

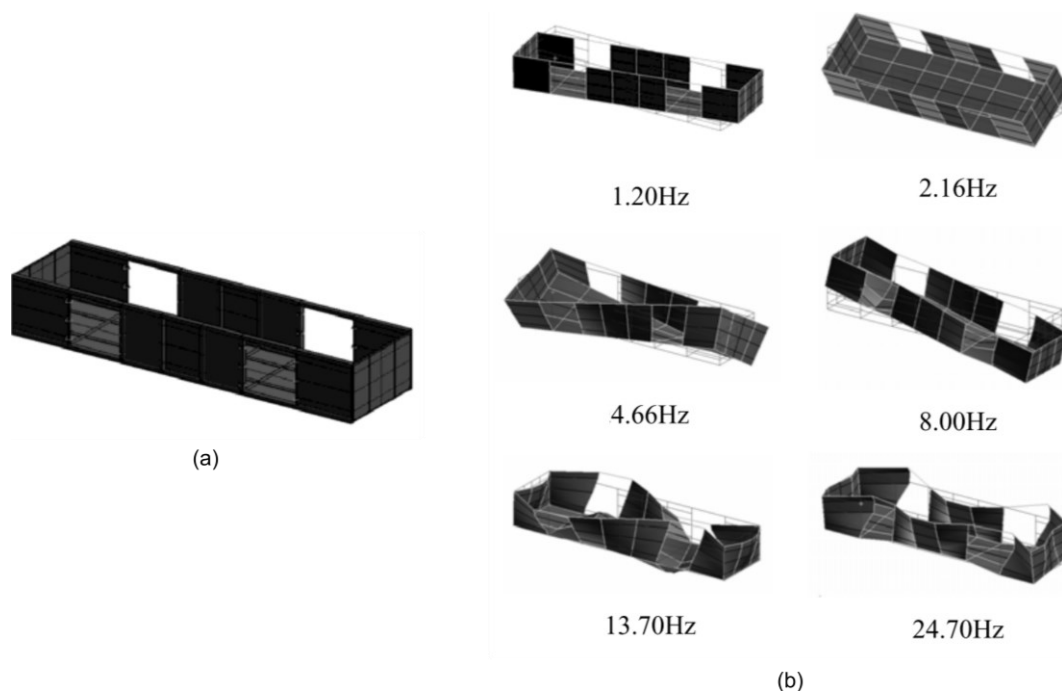
### **3.4 Calibração de modelos numéricos de vagões ferroviários**

Embora ainda não seja um assunto totalmente explorado pela literatura, alguns autores desenvolveram bons trabalhos na área da calibração de modelos numéricos de vagões ferroviários, contribuindo substancialmente para o avanço neste campo de pesquisa:

Sichani e Ahmadian (2007) foram um dos pioneiros em desenvolver trabalhos nesta área, calibrando o modelo numérico de um vagão gôndola (Figura 3-32a) com base em parâmetros modais experimentais. A identificação modal foi feita por meio da técnica de decomposição no domínio da frequência, aplicada a registros experimentais coletados durante a operação normal do vagão. Foram identificados três modos de corpo rígido e 4 modos estruturais da carroceria.

A calibração do modelo se deu pela minimização de uma função objetivo, composta pelas diferenças quadráticas entre frequências naturais numéricas e experimentais, por meio da aplicação de um algoritmo de otimização baseado no cálculo de gradientes. Duas etapas foram utilizadas na calibração, primeiramente as propriedades de rigidez das suspensões foram calibradas com base nos modos de corpo rígido e, por fim, as seções transversais das vigas que estruturam o vagão foram calibradas com base em três dos 4 modos estruturais. As formas modais dos 6 modos utilizados na calibração são apresentadas na Figura 3-32b. Um dos modos estruturais, intencionalmente, não foi utilizado na calibração, de modo que pudesse ser utilizado como uma validação do modelo. Após a calibração o erro de todos os modos utilizados ficou abaixo de 1 % e o erro associado ao modo de controle ficou em somente 1,6 %.

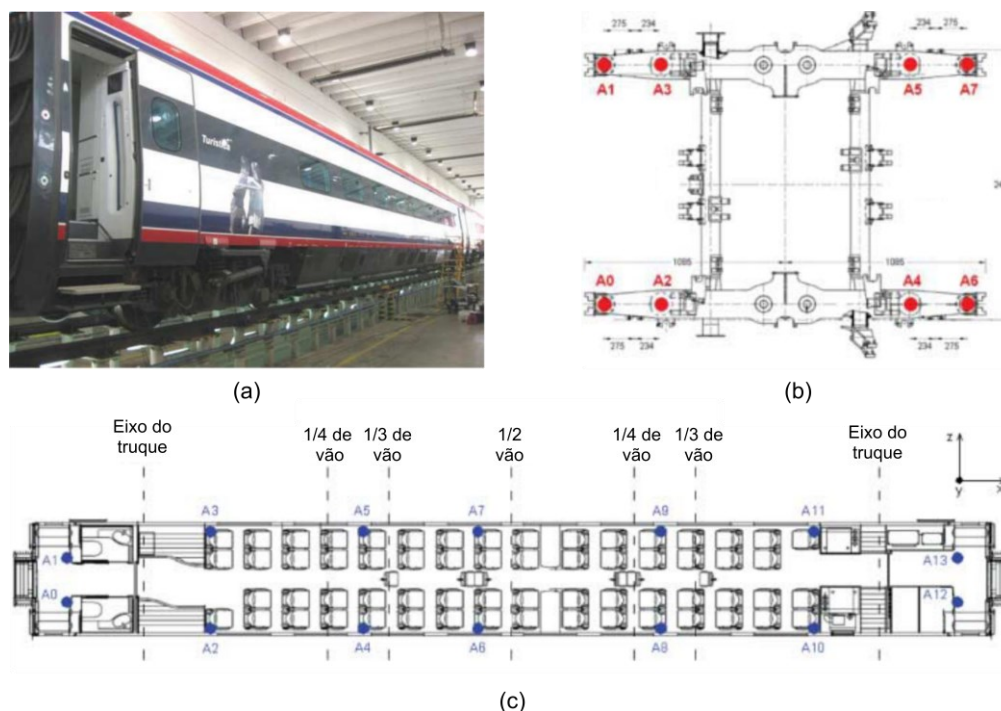
**Figura 3-32 – Vagão gôndola calibrado: (a) Modelo numérico e (b) modos após a calibração**



Fonte: Adaptada de (SICHANI; AHMADIAN, 2007).

Ribeiro et al. (2013) realizou a calibração de um modelo numérico 3D de um vagão de passageiros do tipo (BBN) (Figura 3-33a) baseado em parâmetros modais. A carroceria do veículo foi modelada por meio de elementos de casca, enquanto que os truques foram modelados com elementos de viga a exceção dos componentes da suspensão que foram modelados por meio de conjuntos mola-amortecedor. Foram realizados ensaios dinâmicos da carroceria e dos truques do veículo, nos quais foram utilizados 8 acelerômetros na instrumentação do truque (Figura 3-33b) e para a carroceria foram utilizados 14 acelerômetros instalados em posições estratégicas (Figura 3-33c). Durante os ensaios dos truques foram coletados dados considerando duas situações distintas, com e sem os amortecedores.

**Figura 3-33 – Ensaio dinâmico do vagão tipo BBN: (a) Vista geral, (b) posicionamento dos acelerômetros no truque e (c) posicionamento dos acelerômetros na carroceria**



Fonte: Adaptada de (RIBEIRO et al., 2013).

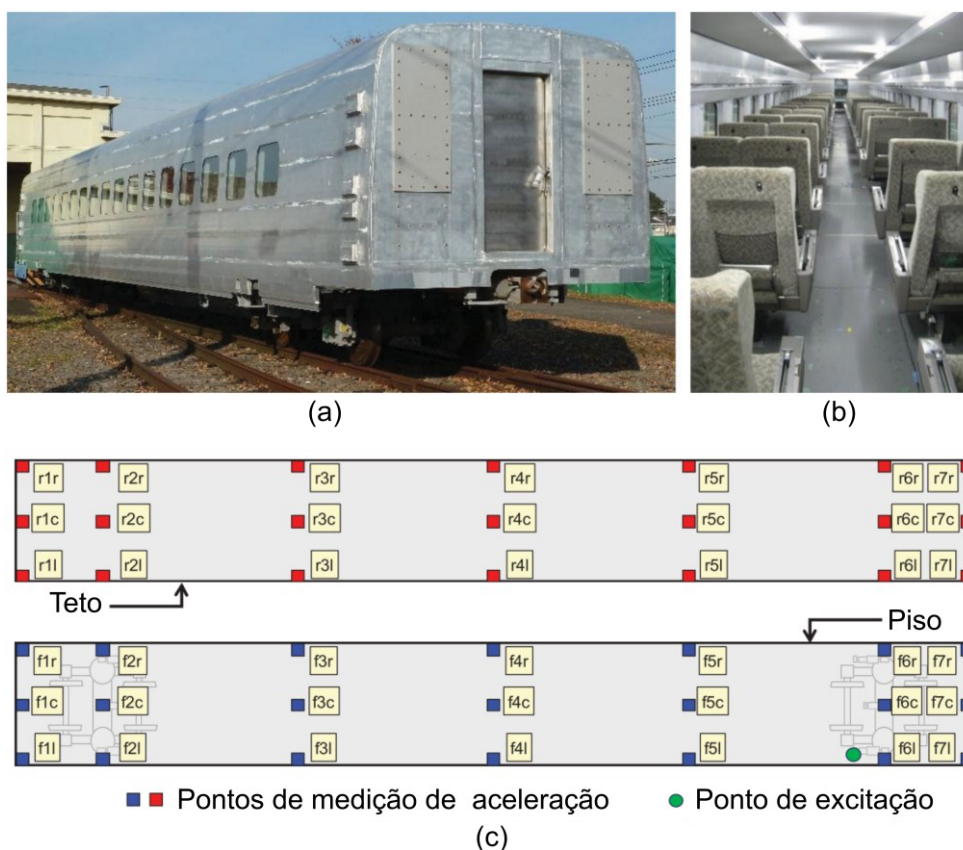
A identificação modal foi feita por meio da aplicação da técnica *Stochastic Subspace Identification* (SSI) implementada no software comercial ARTeMIS® (2009). Foram determinadas frequências e configurações modais de 13 modos de vibração relacionados a movimentos tanto de corpo rígido como estruturais. A calibração do modelo envolveu duas fases, a primeira focada na calibração do truque e a segunda focada na calibração do veículo completo. Em ambas as fases a calibração do modelo se deu por meio de um método iterativo baseado em um algoritmo genético e permitiu obter valores ótimos de 17 parâmetros numéricos.

A comparação das respostas experimentais e numéricas antes e após a calibração revelou melhorias significativas no modelo. Nos modos dos truques, o erro médio nas frequências naturais foi reduzido de 10,6 % para 0,8 % e o MAC médio aumentou de 0,864 para 0,953, enquanto que nos da carroceria o erro médio foi reduzido de 20,3 % para 2,9 % e o MAC médio aumentou de 0,927 para 0,937.

Akiyama et al. (2020) realizou a calibração do modelo da carroceria de um veículo de passageiros do tipo *Shinkansen* (Figura 3-34a,b) usando um método iterativo baseado em um algoritmo de otimização por enxame de partículas. O modelo 3D de elementos finitos da carroceria foi elaborado com base em placas flexíveis

simulando teto, piso e painéis laterais, conectadas por molas simulando a rigidez das conexões semirrígidas. Um teste dinâmico estacionário utilizando um excitador eletrodinâmico, instrumentado com uma célula de carga, e conectado à carroceria do veículo, bem como, acelerômetros posicionados em 42 locais distribuídos ao longo do teto e do piso do veículo (Figura 3-34c), foi realizado. Por meio da aplicação de técnicas clássicas de análise modal, baseadas no cálculo de funções de resposta em frequência, foram estimados 6 modos de vibração da carroceria com frequências naturais entre 9,88 Hz e 18,50 Hz.

**Figura 3-34 – Ensaio dinâmico do vagão tipo *Shinkansen*: (a) Vista geral (b) vista interna e (c) posicionamento dos acelerômetros na carroceria**



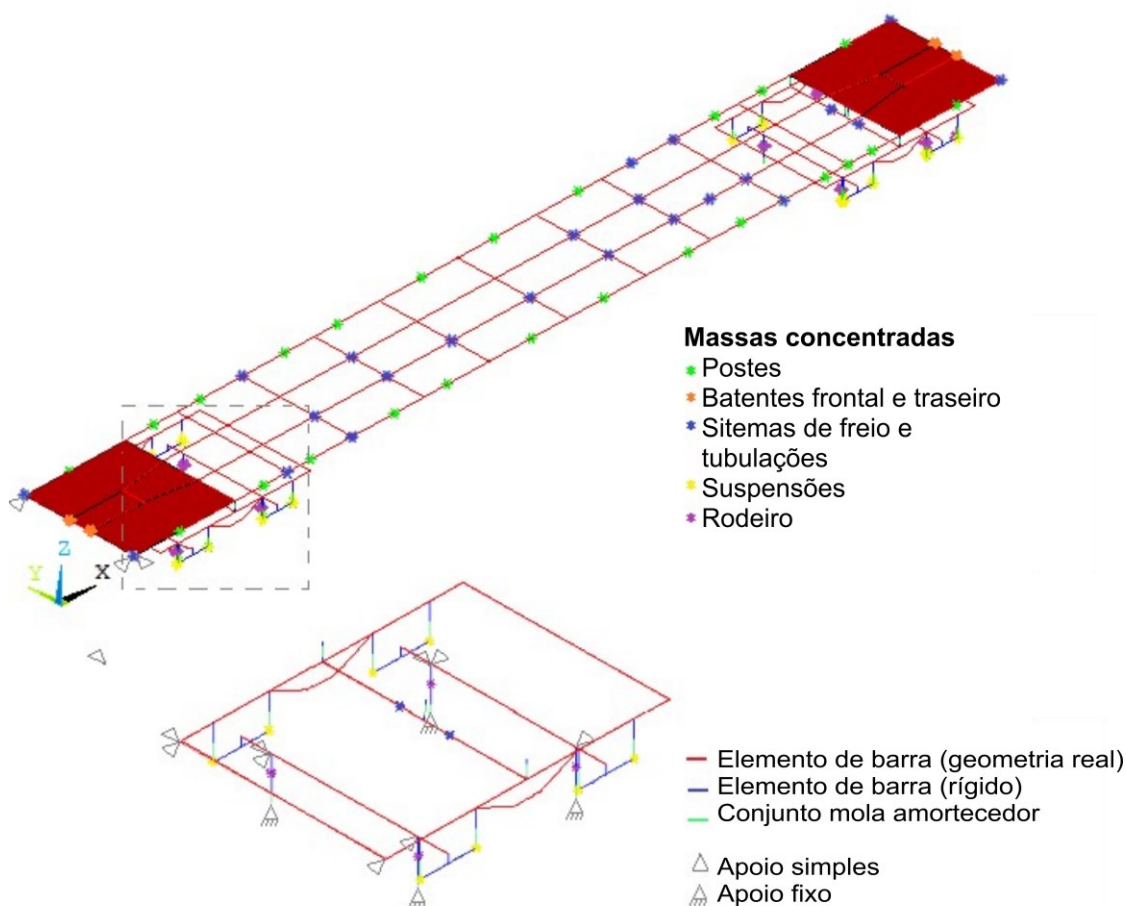
Fonte: Adaptada de (AKIYAMA et al., 2020).

A calibração do modelo envolveu a utilização de 14 parâmetros numéricos, relacionados com o módulo de Young dos materiais dos painéis e os coeficientes de rigidez das molas utilizadas em suas conexões, e permitiu minimizar consideravelmente a diferença entre as frequências experimentais e numéricas, dentro de um erro médio de 0,86%. Além da significativa melhora nos modos utilizados na calibração, a validade do processo pôde ser atestada também pela fidelidade

mantida com um dos modos que foi identificado, mas não fez parte do processo e, mesmo assim, se manteve com um erro de somente 2,4 %.

Silva et al. (2021) fez a calibração de um modelo 3D em elementos finitos de um vagão plataforma tipo Sgnss especialmente adaptado para o transporte de toras de eucalipto. A calibração foi realizada utilizando uma metodologia iterativa baseada em um algoritmo genético, tal como proposto por Ribeiro et al. (2013). Os autores foram inovadores ao realizar a calibração do mesmo veículo sob condições distintas de carregamento (carregado e descarregado) investigando possíveis não linearidades nos componentes do vagão. Os testes dinâmicos foram realizados com o veículo no pátio onde são feitas operações de carga e descarga, sendo coletados registros de aceleração em 20 pontos de medição, 14 na plataforma e 6 nos truques. A excitação necessária ao teste foi provida por meio de pessoas pulando aleatoriamente sob a carroceria e impulsos providos por martelos de impacto.

**Figura 3-35 – Modelo numérico de um vagão tipo Sgnss**



Fonte: Adaptada de (SILVA et al., 2021).

A identificação modal foi feita por meio da técnica da decomposição no domínio da frequência melhorada (EFDD), tendo sido identificados cinco modos dentre os quais há tanto modos de corpo rígido quanto estruturais da carroceria. A calibração do modelo descarregado envolveu 8 parâmetros numéricos relacionados à rigidez das suspensões, rigidez dos suportes laterais dos truques, módulo de elasticidade dos componentes e propriedades de massa da estrutura do vagão. A calibração do modelo carregado envolveu somente 5 parâmetros numéricos relacionados à rigidez das suspensões e a rigidez dos suportes laterais dos truques. Em contraste com os trabalhos apresentados até então, os autores conseguiram sensibilidade suficiente para calibrar a rigidez vertical de cada uma das suspensões de forma independente, o que representa significativo avanço uma vez que não há garantia de uniformidade no estado de conservação das suspensões neste tipo de veículo.

Após a calibração obteve-se significativa melhora nos modelos, tanto carregado quanto descarregado, sendo que o erro médio entre as frequências naturais caiu de 11,8 % para 3,2 % no modelo descarregado e de 20,4 % para 4,8 % para o modelo carregado. Comparando os parâmetros numéricos ótimos em ambos os casos, os autores concluíram que neste vagão apenas os suportes laterais dos truques apresentam comportamento não linear.



## 4 METODOLOGIA DE CALIBRAÇÃO E VALIDAÇÃO DE MODELOS DE VEÍCULOS FERROVIÁRIOS EM CONDIÇÕES OPERACIONAIS

### 4.1 Considerações iniciais

Nos dias de hoje com a popularização dos recursos computacionais a modelagem numérica passou a fazer parte do dia a dia dos engenheiros, permitindo de forma rápida e barata simular os mais diversos fenômenos físicos como o comportamento de estruturas e sistemas mecânicos, escoamento de fluidos, transferência de calor entre muitos outros. Com o estudo do comportamento dinâmico dos veículos ferroviários também não foi diferente e, conforme apresentado anteriormente na Seção 3.2, a modelagem numérica de vagões ferroviários, sejam modelos multicorpo ou de elementos finitos, tem encontrado diversas aplicações.

Quando um modelo numérico de um veículo ferroviário é concebido, por mais que se tente representar suas estruturas da maneira mais fiel possível sempre serão necessárias simplificações que vão introduzir incertezas ao modelo. Outra fonte de incerteza é quanto às propriedades geométricas dos elementos estruturais dos veículos, bem como quanto às propriedades mecânicas dos materiais que as compõe (RIBEIRO, 2012). Neste contexto, trabalhos recentes envolvendo modelos tanto de pontes (TICONA MELO et al., 2020) como de veículos ferroviários (BRAGANÇA et al., 2021; RIBEIRO et al., 2022; RIBEIRO; CALÇADA; MONTENEGRO, 2021; SILVA et al., 2021) tem indicado que a resposta dinâmica destes modelos pode ser significativamente melhorada por meio de procedimentos de calibração e validação com base em dados experimentais.

Em suma, a calibração de um modelo numérico com base em respostas experimentais envolve a variação de parâmetros buscando a redução das diferenças entre resultados numéricos e experimentais. Esta variação pode ser feita tanto de maneira manual como automática, por meio da aplicação de algoritmos específicos que permitem ajustar de maneira bastante eficiente estes parâmetros (RIBEIRO, 2012).

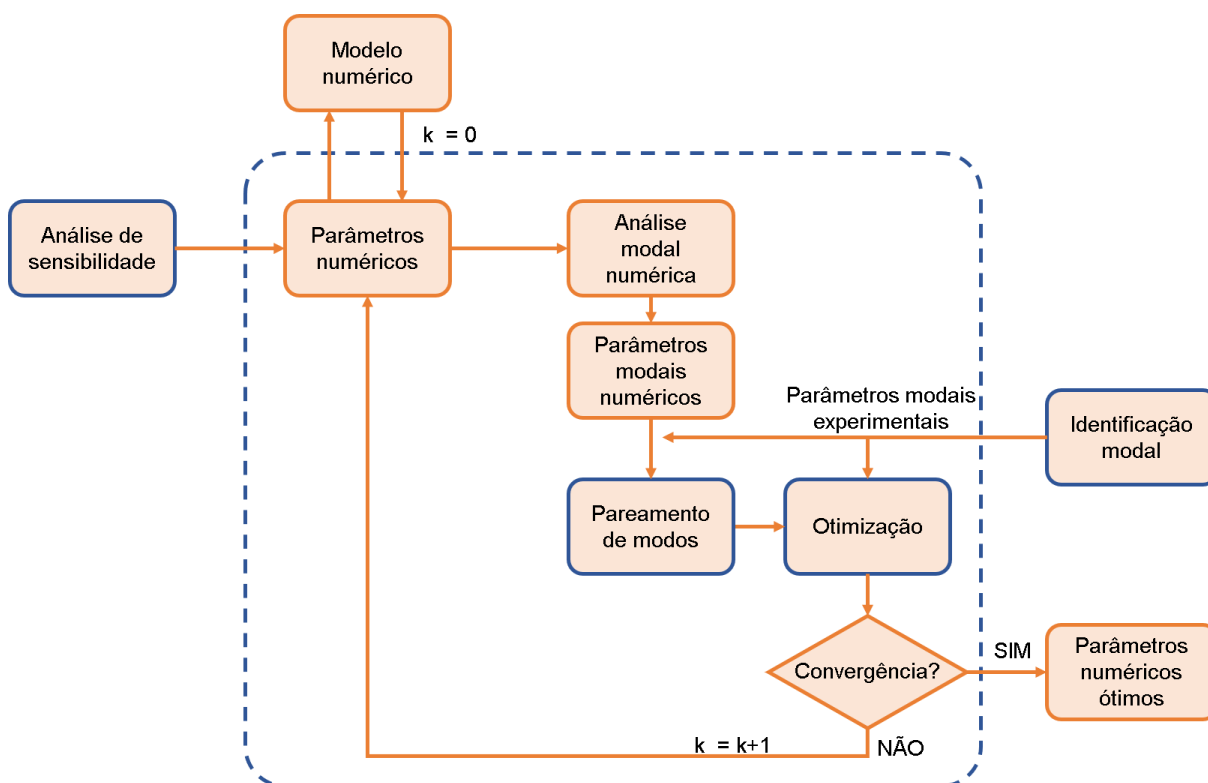
Ribeiro (2012) cita que a calibração destes modelos pode ser feita recorrendo a basicamente duas abordagens distintas, a metodologia direta e a indireta ou iterativa. A metodologia direta consiste-se em modificar diretamente termos das matrizes de massa e rigidez do modelo numérico, forçando-o a ter um comportamento exatamente igual ao experimental. O grande problema associado a este método é

que, frequentemente, as matrizes obtidas perdem completamente qualquer significado físico, uma vez que os parâmetros numéricos não são diretamente relacionados aos termos da matriz.

O método iterativo, por outro lado, é baseado em variações sucessivas de parâmetros numéricos do modelo (massas, densidades, dimensões rigidez, entre outros) buscando a minimização de uma função objetivo. A função objetivo é geralmente definida com base em resíduos entre parâmetros numéricos e experimentais. Ao contrário do método anterior, como estão sendo variados parâmetros físicos dentro de intervalos controláveis, é sempre possível garantir que estes não fujam de valores realistas (RIBEIRO, 2012).

O Fluxograma da Figura 4-1 ilustra as etapas que envolvem a calibração de um modelo numérico, com base em parâmetros modais experimentais (frequências naturais e formas modais), por meio de um algoritmo de otimização.

**Figura 4-1 – Método iterativo para a calibração de modelos numéricos baseado em algoritmos de otimização**



Fonte: Adaptada de (RIBEIRO, 2012).

Parte-se de um modelo elaborado com base em parâmetros numéricos iniciais obtidos recorrendo a dados de projeto e valores disponíveis na literatura. Feito isso, são escolhidos, com base em uma análise de sensibilidade, os parâmetros numéricos

que mais se correlacionam com as respostas modais. É realizada então uma análise modal numérica e os parâmetros modais resultantes são emparelhados com seus correspondentes experimentais, extraídos dos testes dinâmicos por meio da aplicação de técnicas de identificação modal. Por fim, com base em um algoritmo de otimização um novo conjunto de parâmetros é gerado e o modelo original é atualizado. O procedimento é repetido então até que haja a convergência.

As técnicas de calibração descritas acima são importantes para garantir que o comportamento modal do veículo esteja sendo capturado com precisão pelos modelos numéricos. No entanto, para validar a resposta dinâmica numérica deste modelo durante a sua interação com a via é necessário compará-la com dados experimentais. Neste caso, a resposta numérica do veículo, obtida com um modelo de interação veículo-via, é comparada com medições correspondentes obtidas com sensores embarcados no veículo, podendo estas serem realizadas tanto em ensaios de campo quanto em laboratório.

Nesta seção, primeiramente serão abordadas de forma detalhada as metodologias necessárias para se realizar a calibração de modelos numéricos com base em parâmetros modais experimentais, as quais estão destacadas em azul no Fluxograma da Figura 4-1. Na Seção 4.2 serão abordadas técnicas de identificação modal com enfoque em metodologias aplicáveis a ensaios *output-only*. A Seção 4.3 é dividida em três subseções, cobrindo respectivamente técnicas para realização de análise de sensibilidade, pareamento de modos e otimização. No que se refere à otimização serão abordadas as particularidades de funcionamento de um algoritmo genético. Por fim, na Seção 4.4 serão apresentados aspectos relativos à validação da resposta dinâmica dos veículos, mais especificamente metodologias de interação veículo-via, bem como alguns parâmetros e métricas para comparação das séries temporais das respostas dinâmicas.

## **4.2 Técnicas de identificação modal operacional**

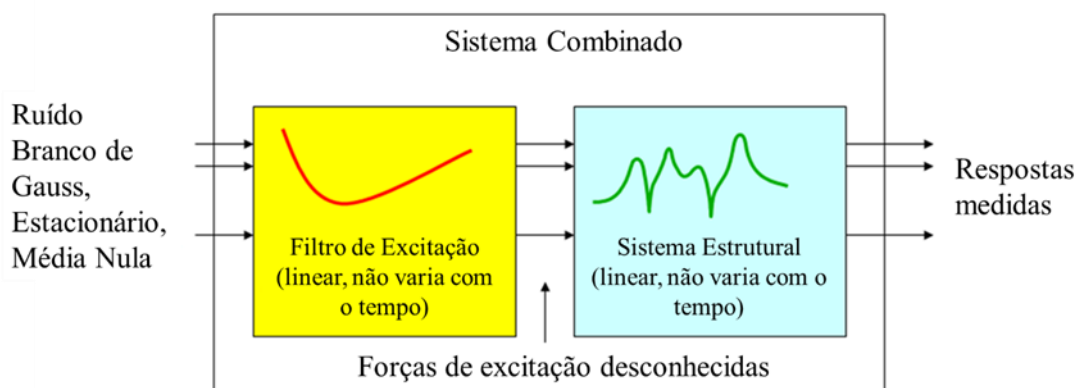
A partir dos dados coletados durante os testes dinâmicos a extração das propriedades dinâmicas do veículo, particularmente frequências naturais e modos de vibração, é feita a partir da aplicação de técnicas de identificação modal. No caso de ensaios realizados com o veículo em operação (ver Seção 3.3.2.2), como é o enfoque deste trabalho, a aplicação de técnicas clássicas, baseadas em funções de resposta em frequência, torna-se completamente inviável devido à necessidade de se conhecer

as forças de entrada aplicadas ao veículo. Faz-se necessário então recorrer a técnicas baseadas somente nas repostas medidas, mais conhecidas como Análise Modal Operacional (OMA).

As técnicas de análise modal operacional podem ser divididas basicamente em dois grupos com base no domínio em que estas são aplicadas, sendo estes: 1) Métodos baseados em respostas espectrais e 2) Métodos baseados em séries temporais. Ambas partem da premissa de que a estrutura está sendo excitada por um ruído branco, que nada mais é que um sinal estocástico com a mesma amplitude abrangendo todo o espectro de frequências. Esta consideração traz muitas simplificações e é necessária ao desenvolvimento dos métodos. Em condições reais, entretanto, não é possível obter exatamente um ruído branco, de modo que em geral o que se consegue é uma excitação de amplo espectro, mas não necessariamente uniforme (MAGALHÃES, 2004).

O fato de não ser possível obter uma excitação ideal obviamente trará implicações ao método. Uma forma de se olhar para este problema é ilustrada na Figura 4-2.

**Figura 4-2 – Princípio da análise modal operacional**



Fonte: Adaptada de (SVIBS, 2022).

Conforme ilustrado na Figura 4-2 as forças de excitação reais que agem sob a estrutura podem ser encaradas como as saídas de um sistema dinâmico imaginário (filtro de excitação), linear e invariante no tempo, sobre o qual age um ruído branco perfeitamente estacionário e com média nula. Os métodos de análise modal operacional vão então fazer a identificação com base no sistema combinado, que compreende tanto o sistema estrutural como o imaginário. Com isso, alguns dos modos identificados poderão ser oriundos deste sistema imaginário e devem ser distinguidos dos modos reais da estruturas (RODRIGUES, 2004).

A distinção entre quais modos realmente representam respostas do sistema estrutural é feita com base no conhecimento prévio do comportamento da estrutura em questão. Muitas vezes estes modos não estruturais vão apresentar coeficientes de amortecimento muito elevados, incompatíveis com a estrutura sob avaliação, ou formas de vibrar irrealis do ponto de vista físico.

Para a identificação das propriedades modais de veículos ferroviários, técnicas no domínio da frequência, como a decomposição no domínio da frequência melhorada (EFDD), e técnicas no domínio do tempo, como a identificação estocástica em subespaços (SSI), vem sendo empregadas com sucesso (RIBEIRO et al., 2013, 2022; RIBEIRO; CALÇADA; MONTENEGRO, 2021; SILVA et al., 2021). Nesta seção serão apresentados os principais conceitos por trás destas duas técnicas, com maior enfoque dado ao método SSI que será utilizado no estudo de caso a ser apresentado no Capítulo 5.

#### **4.2.1 Decomposição no domínio da frequência melhorada (EFDD)**

Para que seja apresentado o método da decomposição no domínio da frequência melhorada, primeiramente deve ser introduzida a decomposição em valores singulares da matriz de densidade espectral proposta por (BRINCKER; ZHANG; ANDERSEN, 2000) no método de base da decomposição no domínio da frequência, o qual deu origem ao método EFDD.

Partindo da formulação modal apresentada na Seção 2.2.2, pode-se decompor o vetor das respostas de um sistema ( $\mathbf{y}(t)$ ) em coordenadas modais como:

$$\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\varphi}_1 q_1(t) + \boldsymbol{\varphi}_2 q_2(t) + \dots + \boldsymbol{\varphi}_n q_n(t) = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{q}(t) \quad (4-1)$$

Tomando as funções de correlação entre estas respostas pode-se escrever uma matriz das ( $\mathbf{R}_y(\tau)$ ) funções de correlação como

$$\mathbf{R}_y(\tau) = E[\mathbf{y}(t)\mathbf{y}^T(t + \tau)] = \boldsymbol{\Phi} E[\mathbf{q}(t)\mathbf{q}^T(t + \tau)] \boldsymbol{\Phi}^T = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{R}_q(\tau) \boldsymbol{\Phi}^T \quad (4-2)$$

em que  $\mathbf{R}_q(\tau)$  é a matriz das funções de correlação em coordenadas modais.

Tomando a transformada de Fourier de ambos os lados

$$\mathbf{G}_y(f) = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{G}_q(f) \boldsymbol{\Phi}^H \quad (4-3)$$

onde a operação de transposto foi trocada por Hermitiano, pois podem haver termos complexos nos modos e a matriz de densidade espectral ( $\mathbf{G}_y$ ) é necessariamente Hermitiana (BRINCKER; VENTURA, 2015).

Assumindo que as coordenadas modais são não correlacionadas a matriz de densidade espectral em coordenadas modais ( $\mathbf{G}_q$ ) é necessariamente diagonal e por ser composta de funções de autocorrelação ela é necessariamente positiva, com isso tem-se

$$\mathbf{G}_y(f) = \Phi[g_n^2(f)]\Phi^H \quad (4-4)$$

onde  $g_n^2(f)$  são as densidades auto espectrais que compõem a diagonal da matriz  $\mathbf{G}_q$  (BRINCKER; VENTURA, 2015).

Uma forma similar à da Equação (4-4) é obtida pela decomposição em valores singulares (SVD) da matriz de densidade espectral ( $\mathbf{G}_y$ ) dada por

$$\mathbf{G}_y(f) = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^H \quad (4-5)$$

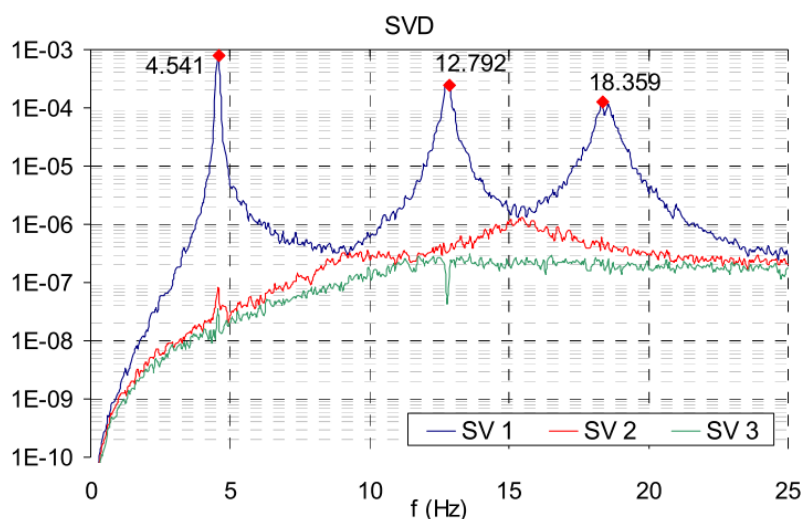
entretanto, como  $\mathbf{G}_y$  é quadrada e Hermitiana temos que  $\mathbf{U} = \mathbf{V}$  são matrizes contendo os vetores singulares e  $\mathbf{S}$  é uma matriz diagonal contendo os valores singulares. Com isso, os termos da matriz  $\mathbf{S}$  representam as densidades auto espectrais e a matriz  $\mathbf{U}$  contém os vetores de ordenada modal (BRINCKER; VENTURA, 2015; MAGALHÃES, 2004).

Com isso, a decomposição SVD da matriz de densidade espectral permite isolar nos valores singulares a contribuição de cada modo na forma de um oscilador de um grau de liberdade. Ao plotar os valores singulares em função da frequência suas ordenadas corresponderão às ordenadas dos espectros de potência dos osciladores de um grau de liberdade daquele modo (MAGALHÃES, 2004).

Como é usual que os algoritmos de decomposição SVD considerem como primeiro valor singular sempre aquele de maior magnitude este vai representar o modo dominante naquela frequência. Em casos de modos bem espaçados apenas o primeiro valor singular terá magnitude significativa, entretanto, se houverem modos próximos aquele que é predominante estará representado no primeiro valor singular, enquanto que os outros modos estarão representados nos demais valores singulares (MAGALHÃES, 2004).

A Figura 4-3 ilustra a decomposição em valores singulares da matriz de densidade espectral de um sistema de três graus de liberdade com modos bem espaçados. Cada um dos picos destacados corresponde a um dos modos de vibração.

**Figura 4-3 – Exemplo de decomposição em valores singulares para um sistema com 3 GDL**



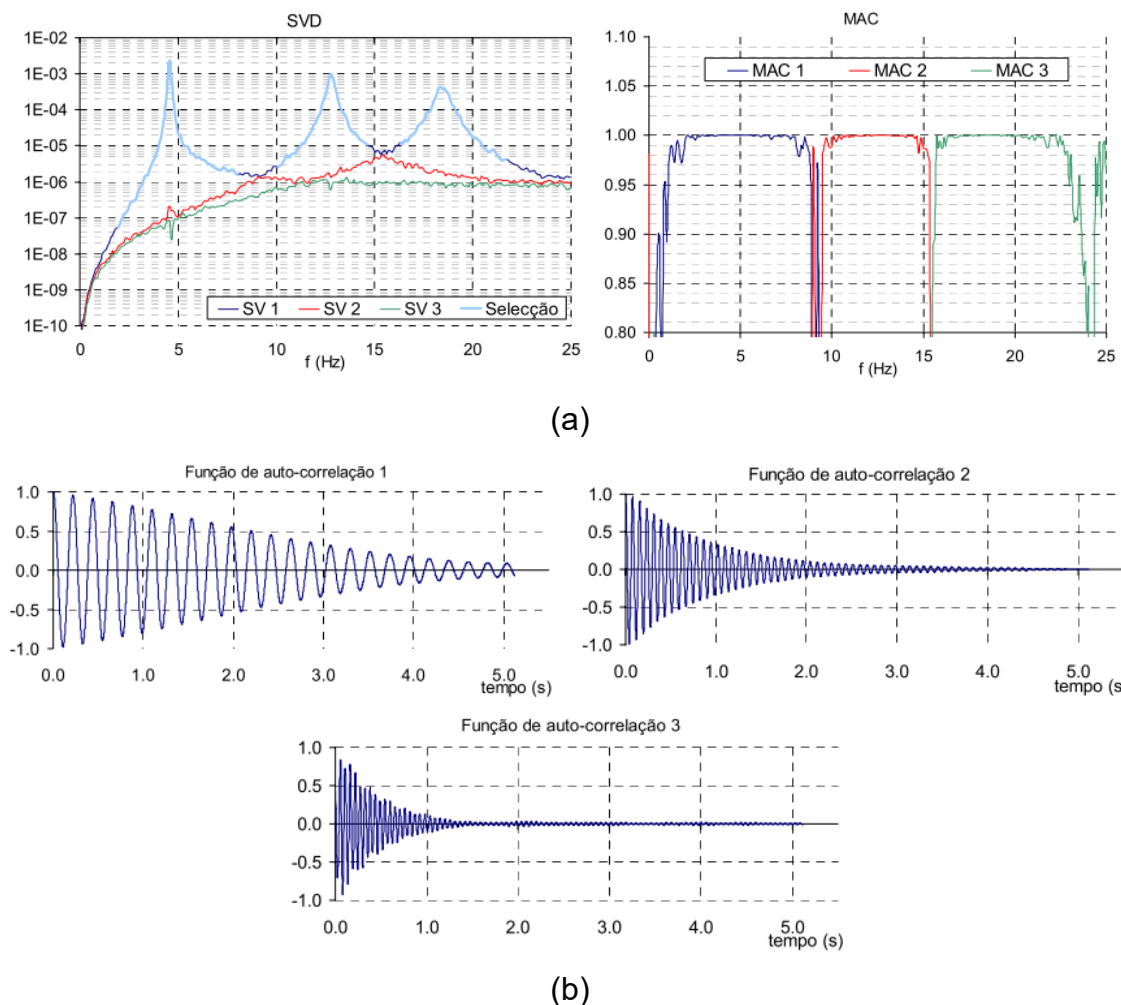
Fonte: (MAGALHÃES, 2004).

As frequências naturais e coeficientes de amortecimento são obtidos por meio da função de autocorrelação no domínio do tempo calculada pela transformada de Fourier inversa dos valores singulares no entorno dos picos de ressonância. Respeitadas das premissas do método com relação à excitação, estas funções serão proporcionais ao decaimento em regime livre do oscilador de um grau de liberdade. Com isso, a frequência natural pode ser obtida com base nos períodos desta oscilação e o amortecimento por meio do ajuste do termo exponencial ( $e^{-\zeta\omega_n t}$ ), extraído da Equação (2-4), à envoltória de decaimento da vibração (BRINCKER; VENTURA; ANDERSEN, 2001; MAGALHÃES, 2004).

A escolha de quais valores singulares serão utilizados no cálculo da autocorrelação é feita por meio dos MACs entre o vetor singular correspondente ao pico com os seus adjacentes. São utilizados no cálculo então todos aqueles valores singulares cujo vetor singular associado tenha um alto valor de MAC com relação àquele do pico (BRINCKER; VENTURA; ANDERSEN, 2001).

A Figura 4-4(a) ilustra o procedimento de seleção dos valores singulares para o cálculo das funções de autocorrelação apresentadas na Figura 4-4(b).

**Figura 4-4 – Cálculo das funções de autocorrelação: (a) Seleção dos valores singulares e (b) funções de autocorrelação**



Fonte: Adaptada de (MAGALHÃES, 2004).

#### 4.2.2 Identificação Estocástica em Subespaços com base nas séries temporais (SSI-DATA)

A ideia central do método de Identificação Estocástica em Subespaços com base nas séries temporais (SSI-DATA) é ajustar diretamente aos dados coletados no domínio do tempo, um modelo de espaços de estado discreto. Nesta seção será apresentada a base matemática por trás deste método de identificação.

Antes de partir para a formulação do método em si é necessário a introdução de alguns conceitos que serão fundamentais para sua compreensão. Para trazer a formulação de estado em tempo discreto, introduzida na Equação (2-38), para um contexto mais realista pode-se reescrevê-la como



$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{D}_d \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (4-6)$$

em que os termos  $\mathbf{w}_k$  e  $\mathbf{v}_k$  são vetores de dimensão  $(2n_2 \times 1)$  e  $(l \times 1)$  representando, respectivamente, os ruídos de processo e medição. Assume-se que estes sejam ruídos brancos com média nula e matrizes de covariância definidas como

$$E \left[ \begin{pmatrix} \mathbf{w}_p \\ \mathbf{v}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_q^T & \mathbf{v}_q^T \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{co} & \mathbf{S}_{co} \\ \mathbf{S}_{co}^T & \mathbf{R}_{co} \end{pmatrix} \delta_{pq} \quad (4-7)$$

em que  $p$  e  $q$  são instantes de tempo quaisquer e  $\delta_{pq}$  é o operador delta de Kronecker (PEETERS; DE ROECK, 1999; RODRIGUES, 2004).

Como a premissa dos métodos de análise modal operacional é de que a excitação do modelo ( $\mathbf{u}_k$ ) também é um processo estocástico do tipo ruído branco com média nula, a Equação (4-6) pode ser reescrita englobando os termos referentes à excitação aos termos de ruído, resultando em

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (4-8)$$

onde é assumido como premissa que o processo estocástico é estacionário, o que implica que sua matriz de covariância  $E(\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T) = \boldsymbol{\Sigma}_{co}$  independe do instante de tempo e tem média nula. Além disso, os ruídos  $\mathbf{w}_k$  e  $\mathbf{v}_k$  não devem possuir correlação com o vetor de estado (PEETERS; DE ROECK, 1999).

Sob estas hipóteses tem-se as seguintes definições para a matriz de covariância das repostas ( $\boldsymbol{\Lambda}_{co_i}$ ) no atraso  $i$  e a matriz de covariância do próximo estado com relação a saída ( $\mathbf{G}_{co}$ )

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Lambda}_{co_i} &\equiv E[\mathbf{y}_{k+i} \mathbf{y}_k^T] \\ \mathbf{G}_{co} &\equiv E[\mathbf{x}_{k+1} \mathbf{y}_k^T] \end{aligned} \quad (4-9)$$

com isso, pode-se deduzir que

$$\boldsymbol{\Sigma}_{co} = \mathbf{A}_d \boldsymbol{\Sigma}_{co} \mathbf{A}_d^T + \mathbf{Q}_{co}, \quad \mathbf{G}_{co} = \mathbf{A}_d \boldsymbol{\Sigma}_{co} \mathbf{C}_d^T + \mathbf{S}_{co}, \quad \boldsymbol{\Lambda}_{co_0} = \mathbf{C}_d \boldsymbol{\Sigma}_{co} \mathbf{C}_d^T + \mathbf{R}_{co} \quad (4-10)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_{co_i} = \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{i-1} \mathbf{G}_{co} \quad (4-11)$$

a propriedade expressa pela Equação (4-11) é de extrema importância para a validade do método, pois expressa uma relação entre a matriz de covariância das respostas,

que é algo mensurável, com a matriz de estado que permite a determinação das propriedades da estrutura. Embora o seu cálculo não seja necessário no método que será apresentado esta propriedade é importante na demonstração de validade do algoritmo (MAGALHÃES, 2004; PEETERS; DE ROECK, 2000).

Um último conceito que vale introduzir de maneira breve é o filtro de Kalman, cujo objetivo é, por meio apenas das repostas até um instante de tempo  $k$  e das matrizes  $\mathbf{A}_d$ ,  $\mathbf{C}_d$ ,  $\mathbf{G}_{co}$  e  $\mathbf{\Lambda}_{co0}$ , produzir uma previsão ótima para o próximo vetor de estado  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1}$  do sistema. Um maior detalhamento acerca das propriedade deste tipo de filtro pode ser consultado em (VAN OVERSCHEE; DE MOOR, 1996). As previsões do vetor de estado são feitas pelo seguinte equacionamento

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{A}_d \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_{a_k} (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_d \hat{\mathbf{x}}_k) \quad (4-12)$$

$$\mathbf{K}_{a_k} = (\mathbf{G}_{co} - \mathbf{A}_d \mathbf{P}_{co_k} \mathbf{C}_d^T) (\mathbf{\Lambda}_{co0} - \mathbf{C}_d \mathbf{P}_{co_k} \mathbf{C}_d^T)^{-1} \quad (4-13)$$

$$\mathbf{P}_{co_{k+1}} = \mathbf{A}_d \mathbf{P}_{co_k} \mathbf{A}_d^T + (\mathbf{G}_{co} - \mathbf{A}_d \mathbf{P}_{co_k} \mathbf{C}_d^T) (\mathbf{\Lambda}_{co0} - \mathbf{C}_d \mathbf{P}_{co_k} \mathbf{C}_d^T)^{-1} (\mathbf{G}_{co} - \mathbf{A}_d \mathbf{P}_{co_k} \mathbf{C}_d^T)^T \quad (4-14)$$

no qual deve ser adotado o valor nulo tanto para as estimativas dos valores iniciais do vetor de estado ( $\hat{\mathbf{x}}_k$ ) quanto para sua matriz de covariância ( $\mathbf{P}_{co0}$ ). As matrizes  $\mathbf{K}_a$  e  $\mathbf{P}_{co}$  são, respectivamente, o ganho do filtro e a matriz de covariância dos estados. Organizando as previsões do vetor de estado como colunas de uma matriz

$$\hat{\mathbf{X}}_i = [\hat{\mathbf{x}}_i \quad \hat{\mathbf{x}}_{i+1} \quad \dots \quad \hat{\mathbf{x}}_{i+j-1}] \quad (4-15)$$

define-se sequência de estados  $\hat{\mathbf{X}}_i$  do filtro de Kalman, cuja identificação será um dos objetivos do algoritmo SSI (PEETERS; DE ROECK, 1999).

O primeiro passo para implementação do método é a organização das séries temporais de saída  $\mathbf{y}_k$  em uma matriz de Hankel conforme abaixo

$$\mathbf{H}_a = \frac{1}{\sqrt{j}} \begin{pmatrix} \mathbf{y}_0 & \mathbf{y}_1 & \dots & \mathbf{y}_{j-1} \\ \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \dots & \mathbf{y}_j \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{y}_{i-1} & \mathbf{y}_i & \dots & \mathbf{y}_{i+j-2} \\ \mathbf{y}_i & \mathbf{y}_{i+1} & \dots & \mathbf{y}_{i+j-1} \\ \mathbf{y}_{i+1} & \mathbf{y}_{i+2} & \dots & \mathbf{y}_{i+j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{y}_{2i-1} & \mathbf{y}_{2i} & \dots & \mathbf{y}_{2i+j-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{0|i-1} \\ \mathbf{Y}_{i|2i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_p \\ \mathbf{Y}_f \end{pmatrix} \begin{matrix} \Downarrow l \cdot i \text{ "Pasado"} \\ \Downarrow l \cdot i \text{ "Futuro"} \end{matrix} \quad (4-16)$$

composta por "2i" blocos de linha em que cada bloco contém "l" linhas, correspondentes ao número de graus de liberdade nos quais é feita a medição, e "j" colunas (PEETERS; DE ROECK, 2000).

Em seguida deve-se projetar as repostas futuras sobre as repostas passadas por meio da expressão

$$Pj_i = Y_f/Y_P = Y_f Y_P^T (Y_P Y_P^T)^\dagger Y_P \quad (4-17)$$

em que o operador  $( )^\dagger$  se refere a operação de pseudo-inversa de Moore-Penrose. A ideia por trás da projeção é de que esta retém todas as informações das séries temporais passadas que são relevantes para prever as séries futuras. O cálculo da projeção pela aplicação da Equação (4-16), embora possível, é computacionalmente muito custoso (MAGALHÃES, 2004). Um algoritmo mais eficiente com base na fatoração QR da matriz de Hankel é apresentado por (PEETERS; DE ROECK, 1999), por meio do qual pode-se reduzir significativamente o custo computacional de implementação do método.

O teorema principal do método SSI, demonstrado por (VAN OVERSCHEE; DE MOOR, 1996), diz que a projeção  $(Pj_i)$  pode ser fatorada no produto da matriz de observabilidade  $(O_i)$  pela sequência de estados  $(\hat{X}_i)$  de um filtro de Kalman

$$Pj_i = \begin{pmatrix} C_d \\ C_d A_d \\ C_d A_d^2 \\ \dots \\ C_d A_d^{i-1} \end{pmatrix} (\hat{x}_i \quad \hat{x}_{i+1} \quad \dots \quad \hat{x}_{i+j-1}) = O_i \hat{X}_i \quad (4-18)$$

decompondo  $Pj_i$  em valores e vetores singulares tem-se

$$Pj_i = USV^T = (U_1 \quad U_2) \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} = U_1 S_1 V_1^T \quad (4-19)$$

em que o número de valores singulares não nulos na matriz  $S$  indica a ordem do modelo de estado que melhor representa o sistema. As matrizes de observabilidade  $O_i$  e a sequência de estados  $(\hat{X}_i)$  são dados então por (PEETERS; DE ROECK, 2000).

$$O_i = U_1 S_1^{1/2}, \quad \hat{X}_i = (O_i)^\dagger Pj_i \quad (4-20)$$

Para que possam ser identificadas as matrizes  $\mathbf{A}_d$  e  $\mathbf{C}_d$ , faz-se necessário o cálculo de mais uma projeção trasladando a divisão entre repostas passadas e futuras na Equação (4-16) um bloco de linhas para baixo, resultando em

$$\mathbf{P}j_{i-1} = \mathbf{Y}_f^- / \mathbf{Y}_P^+ = \mathbf{Y}_{i+1|2i-1} / \mathbf{Y}_{0|i} \quad (4-21)$$

que também pode ser decomposta por

$$\mathbf{P}j_{i-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_d \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^2 \\ \dots \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{i-2} \end{pmatrix} (\hat{\mathbf{x}}_{i+1} \quad \hat{\mathbf{x}}_{i+2} \quad \dots \quad \hat{\mathbf{x}}_{i+j}) = \mathbf{O}_{i-1} \hat{\mathbf{X}}_{i+1} \quad (4-22)$$

a matriz  $\mathbf{O}_{i-1}$ , neste caso, pode ser obtida simplesmente deletando as últimas " $l$ " linhas da matriz  $\mathbf{O}_i$  computada anteriormente. Com isso a sequência  $\hat{\mathbf{X}}_{i+1}$  do filtro de Kalman é dada por

$$\hat{\mathbf{X}}_{i+1} = (\mathbf{O}_{i-1})^\dagger \mathbf{P}j_{i-1} \quad (4-23)$$

finalmente, retornando à Equação (4-8) e reescrevendo-a com base nas sequencias de estado estimadas tem-se

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{i+1} \\ \mathbf{Y}_{i|i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_d \\ \mathbf{C}_d \end{pmatrix} (\hat{\mathbf{X}}_i) + \begin{pmatrix} \mathbf{W}_i \\ \mathbf{V}_i \end{pmatrix} \quad (4-24)$$

em que  $\mathbf{Y}_{i|i}$  é uma matriz de Hankel com apenas um bloco de linhas (PEETERS; DE ROECK, 2000).

Como foram utilizadas diversas estimativas de vetor de estado, o sistema de Equações (4-24) contém mais equações que incógnitas o que faz com que sua solução consista em um problema de otimização por mínimos quadrados. Como  $\mathbf{W}_i$  e  $\mathbf{V}_i$  são, por hipótese, não correlacionados com os vetores de estado o sistema de Equações (4-24) pode ser solucionado de maneira aproximada por

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_d \\ \mathbf{C}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{i+1} \\ \mathbf{Y}_{i|i} \end{pmatrix} (\hat{\mathbf{X}}_i)^\dagger \quad (4-25)$$

Com isso, todo o problema está solucionado, uma vez que das matrizes  $\mathbf{A}_d$  e  $\mathbf{C}_d$  podem ser obtidos frequências naturais, coeficientes de amortecimento e modos de vibração pela aplicação das Equações (2-35), (2-36) e (2-40) e as matrizes  $\mathbf{Q}_{co}$ ,  $\mathbf{R}_{co}$ , e  $\mathbf{S}_{co}$  são obtidas através da covariância dos resíduos  $\mathbf{W}_i$  e  $\mathbf{V}_i$  (ver Equação (4-7)). Por

fim, qualquer uma das matrizes apresentadas nas Equações (4-10) e (4-11) podem ser calculadas (PEETERS; DE ROECK, 2000).

Do modelo de estado identificado, particularmente através das matrizes  $\mathbf{A}_d$ ,  $\mathbf{C}_d$ ,  $\mathbf{\Lambda}_{co0}$  e  $\mathbf{G}_{co}$ , pode-se também calcular analiticamente o espectro das repostas por

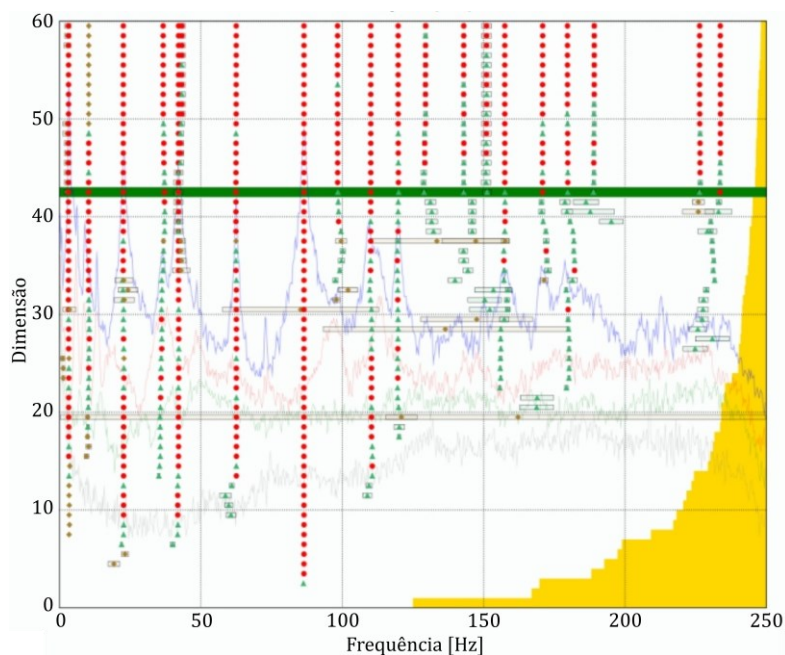
$$\mathbf{S}_{yy}(\omega) = \left[ \mathbf{C}_d (e^{j\omega\Delta t} \mathbf{I}_n - \mathbf{A}_d)^{-1} \mathbf{G}_{co} + \mathbf{\Lambda}_{co0} + \mathbf{G}_{co}^T \left( (e^{j\omega\Delta t})^{-1} \mathbf{I}_n - \mathbf{A}_d^T \right)^{-1} \mathbf{C}_d^T \right] \quad (4-26)$$

em que  $\mathbf{S}_{yy}$  contém em sua diagonal os auto espectros das repostas e fora da diagonal os espectros cruzados (PEETERS; DE ROECK, 1999). Este espectro pode ser plotado em conjunto com os espectros calculados diretamente por meio dos dados medidos, o que fornece um indicativo do quão bem o modelo está a representar o sistema.

Com relação a ordem do modelo de estado, na prática, não haverá termos nulos durante a determinação dos valores singulares pela Equação (4-19), uma vez que os dados estão sempre contaminados por componentes espúrias. O que é recomendado na prática é estimar os parâmetros modais para diferentes ordens do modelo e construir diagramas de estabilização dos parâmetros modais. Nestes diagramas os modos correspondentes às respostas físicas dos sistemas vão apresentar parâmetros modais estáveis para diferentes ordens de modelo, enquanto que aqueles modos espúrios não se manterão estáveis. Como regra prática é usual adotar como critério de estabilidade uma variabilidade máxima de 1 % para as frequências naturais 5 % para coeficientes de amortecimento e 1 % para os MACs (PEETERS; DE ROECK, 2000).

Na Figura 4-5 é apresentado um exemplo típico de diagrama de estabilização, onde são plotadas as frequências naturais calculadas com diferentes ordens de modelo. Os marcadores vermelhos indicam os modos estáveis enquanto que os verdes indicam aqueles modos instáveis, por meio dos quais é fácil notar que estes oscilam com a mudança da dimensão do modelo de estado adotado.

**Figura 4-5 – Exemplo de diagrama de estabilização**



Fonte: Adaptada de (SVIBS, 2019).

Por fim, vale ressaltar que o método aqui apresentado é conhecido como a variante *Unweighted Principal Components* (UPC) do método SSI, uma vez que nenhuma ponderação foi aplicada durante o cálculo das projeções. Outras variantes como a *Principal Components* (PC) e a *Canonical Variate Analysis* (CVA) diferem da UPC pela aplicação de matrizes de ponderação ao cálculo das projeções e podem ser encontradas em detalhe nos trabalhos desenvolvidos por (MAGALHÃES, 2004; RODRIGUES, 2004).

### 4.3 Calibração de modelos numéricos pelo método iterativo

Uma vez tendo sido identificadas as frequências naturais e as formas modais do veículo está formada a base que servirá de referência para a calibração do modelo numérico. O próximo passo então se consiste na formulação de uma estratégia para, por meio de uma variação controlada de certos parâmetros numéricos, minimizar as diferenças entre respostas modais experimentais e numéricas. Nesta Seção serão detalhadas as etapas fundamentais para implementação de uma metodologia iterativa para calibração automática de um modelo numérico com base em algoritmos de otimização.

Primeiramente são descritas metodologias de análise de sensibilidade para a identificação de parâmetros numéricos suficientemente correlacionados às respostas modais. Com relação a este aspecto, é dado maior enfoque a metodologias globais

baseadas em técnicas de amostragem. Em seguida, são apresentadas técnicas de pareamento de modos de vibração, com ênfase na metodologia baseada nos valores de MAC entre modos numéricos e experimentais. Por fim, foi discutida a etapa de otimização do modelo, com enfoque na utilização de algoritmos genéticos. Foram descritas as principais bases teóricas por trás destes algoritmos, destacando as metodologias mais utilizadas para a implementação de cada um dos operadores genéticos.

#### 4.3.1 *Análise de sensibilidade*

A primeira etapa para se realizar a calibração de um modelo numérico é a realização de uma análise de sensibilidade de modo a compreender quais parâmetros numéricos exercem significativa influência sob as respostas modais. Somente aqueles parâmetros numéricos suficientemente correlacionados com estas repostas poderão ser adequadamente estimados durante a fase de otimização.

As análises de sensibilidade podem ser divididas basicamente em dois grupos: Análises de sensibilidades locais e globais.

Uma análise de sensibilidade local é feita por meio da obtenção da primeira derivada de cada resposta modal com relação a cada um dos parâmetros numéricos e, desta forma, são obtidos individualmente os coeficientes de sensibilidade ( $S_{ij}$ ). A Equação (4-27) apresenta o cálculo destes coeficientes

$$S_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial P_j} \cong \frac{R - R_i}{P - P_j} \quad (4-27)$$

onde  $R$  é a resposta na iteração atual,  $P$  é o parâmetro numérico na iteração atual,  $R_i$  a resposta inicial e  $P_j$  o parâmetro numérico inicial. A implementação numérica da Equação (4-27) é feita, em geral, por meio de diferenças finitas, uma vez que na maioria dos casos não se tem uma derivada analítica entre os parâmetros de entrada e as respostas numéricas (RIBEIRO, 2012).

Por outro lado, uma análise de sensibilidade global é baseada no estudo do grau de correlação entre entradas e saídas. Diferentemente da análise local, neste caso todos os parâmetros numéricos são variados simultaneamente, dentro de intervalos pré-definidos, por meio de técnicas apropriadas de amostragem. A definição destes intervalos deve ter em conta o nível de incerteza usualmente associado a cada

parâmetro. Com isso, todas as sensibilidades são obtidas em simultâneo (RIBEIRO, 2012).

As técnicas de amostragem são métodos para a geração de um conjunto de amostras dos parâmetros numéricos. Podem ser estocásticas (Hiper cubo Latino ou método de Monte Carlo) ou sistemáticas do tipo linear, quadrática, fatorial ou fatorial aumentada. Dentre as técnicas de amostragem estocásticas, Ribeiro (2012) demonstrou a maior eficiência da técnica do Hiper cubo latino proposta por (MCKAY; BECKMAN; CONOVER, 1979) quando comparada ao método de Monte Carlo.

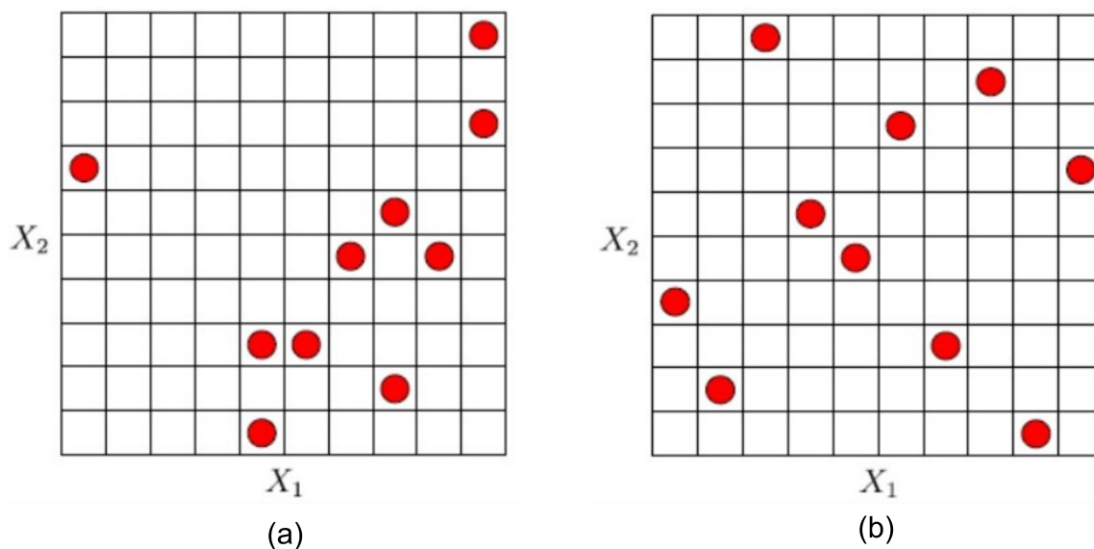
A ideia por trás da técnica do hiper cubo latino consiste em subdividir o domínio de uma variável aleatória em  $n$  intervalos de igual probabilidade de ocorrência. Para cada um destes intervalos é gerada então apenas uma amostra aleatória, totalizando  $n$  amostras (MCKAY; BECKMAN; CONOVER, 1979; SANTOS; BECK, 2015).

Por garantir que haverá ao menos um ponto em cada uma das subdivisões, o método do Hiper cubo latino permite que o espaço amostral seja preenchido de maneira mais uniforme. Desta forma são removidas correlações indesejadas entre as variáveis e bons resultados podem ser obtidos com um número significativamente menor de amostras. Se comparado ao método de Monte Carlo a amostragem pelo Hiper cubo latino permite reduzir em mais de 10 vezes o número de amostras necessárias para a análise de sensibilidade (OPTISLANG, 2008).

A Figura 4-6 apresenta de forma gráfica um comparativo entre as duas técnicas de amostragem para um caso com duas variáveis e 10 amostras. É nítido que o método de Monte Carlo está a introduzir correlações entre as variáveis e deixando muitos “buracos” no espaço amostral. No método do Hiper cubo, por outro lado, não se percebe nenhuma introdução de correlação e o espaço amostral é mais bem preenchido. Além disso, percebe-se que em cada uma das 10 subdivisões adotadas para as variáveis  $X_1$  e  $X_2$  há apenas uma única amostra, formando, em 2D, uma condição análoga a um tabuleiro de xadrez repleto de torres onde nenhuma consegue alcançar a outra.



**Figura 4-6 – Técnicas de amostragem estocástica: (a) Monte Carlo e (b) Hipercubo latino**



Fonte: Adaptada de (RIBEIRO, 2012).

Quando se realiza uma análise de sensibilidade global, a correlação entre os parâmetros é geralmente obtida por meio de coeficientes de correlação, como o coeficiente de correlação linear de Pearson (Equação (4-28))

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}} \quad (4-28)$$

onde,  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  denominam as médias do parâmetro  $x$  e da resposta  $y$  ou coeficientes baseados em esquemas de ordenação como o de Spearman (Equação (4-29))

$$r_{xy}^s = \frac{\sum_{i=1}^N (R(x_i) - \bar{R}(x))(R(y_i) - \bar{R}(y))}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (R(x_i) - \bar{R}(x))^2 \sum_{i=1}^N (R(y_i) - \bar{R}(y))^2}} \quad (4-29)$$

que nada mais é que o coeficiente de Pearson calculado para os vetores de ordenação dos parâmetros, em que  $\bar{R}(x)$  e  $\bar{R}(y)$  representam a média dos valores de ordenação e  $R(x_i)$  e  $R(y_i)$  correspondem ao valor ordenado do  $i$ -ésimo parâmetro  $x$  e  $y$  respectivamente. Estes vetores são organizados de modo que a cada parâmetro é atribuído um valor entre 1 e  $n$ , sendo  $n$  o número de variáveis, em que ao parâmetro de menor valor numérico é atribuído o valor 1 e ao de maior valor é atribuído ao valor  $n$ . A grande vantagem do coeficiente de Spearman está no fato de este, por ser baseado em esquemas de ordenação, ser capaz de identificar correlações em funções monótonas tanto lineares quanto não lineares, diferentemente do coeficiente de Pearson que se limita a relações lineares (RIBEIRO, 2012).

Ambos os coeficientes variam dentro do intervalo de -1 a +1. O módulo do coeficiente indica o quão bem correlacionado é um parâmetro com uma resposta, sendo que um valor igual a 1 indica perfeita correlação. O sinal do coeficiente indica se a correlação é positiva ou negativa. Uma correlação positiva indica que um aumento do parâmetro de entrada gera um aumento da saída e uma correlação negativa indica que um aumento do parâmetro de entrada acarreta uma redução da resposta de saída. Na prática, é comum assumir que coeficientes de correlação acima de 0,7 já indicam uma forte correlação enquanto que valores abaixo de 0,3 indicam correlação fraca (OPTISLANG, 2008).

### 4.3.2 Emparelhamento de modos

O emparelhamento de modos consiste em obter correspondências entre os modos do modelo numérico e aqueles identificados experimentalmente, por meio da semelhança entre suas formas modais. A eficiência e estabilidade deste processo é uma condição crucial para a convergência da otimização (LEITE, 2016).

A dificuldade de conseguir um emparelhamento estável dos modos se deve basicamente a dois fatores: i) a ordem dos modos numéricos se altera a todo momento devido às alterações realizadas nos parâmetros numéricos a cada ciclo de otimização e ii) o reduzido número de pontos dos quais se tem informação dos modos experimentais (pontos instrumentados) muitas vezes dificulta, ou até mesmo inviabiliza, a distinção entre dois modos de vibração (RIBEIRO, 2012).

Ribeiro (2012) apresenta os critérios mais utilizados no emparelhamento de modos de vibração e os classifica em basicamente dois grupos: i) critérios clássicos baseados em correlações entre vetores e ii) critérios baseados em energia, que consistem na atualização dos critérios clássicos com informações físicas da estrutura, nomeadamente a sua distribuição de massa e rigidez.

Dentre os critérios clássicos, o mais utilizado é aquele baseado no valor do parâmetro MAC entre vetores de ordenadas modais numéricas e experimentais, dado por

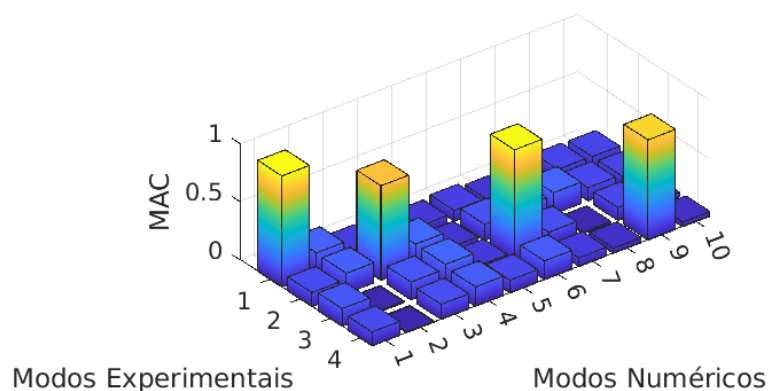
$$MAC_{ij} = MAC(\boldsymbol{\varphi}_i^{exp}, \boldsymbol{\varphi}_j^{num}) = \frac{|\boldsymbol{\varphi}_i^{expH} \boldsymbol{\varphi}_j^{num}|^2}{(\boldsymbol{\varphi}_i^{expH} \boldsymbol{\varphi}_i^{exp})(\boldsymbol{\varphi}_j^{numH} \boldsymbol{\varphi}_j^{num})} \quad (4-30)$$

em que  $\varphi_i^{exp}$  e  $\varphi_j^{num}$  são os vetores associados aos modos, respectivamente, experimental  $i$  e numérico  $j$ , cuja dimensão é igual ao número de graus de liberdade instrumentados (RIBEIRO, 2012).

Após o cálculo dos MACs entre cada um dos modos experimentais e cada um dos numéricos define-se uma matriz de correlação na qual as linhas representam os modos experimentais e as colunas representam os modos numéricos. O valor MAC mais alto em cada linha indica qual modo numérico é melhor correlacionado com o modo experimental. Um valor de MAC igual a 1 indica que ambos os vetores são linearmente dependentes, enquanto que MAC igual a zero indica ortogonalidade entre estes vetores. Na prática não se obtém valores ideais como 0 ou 1 e Ewins (2000) sugere que é razoável considerar que valores acima de 0,8 indicam modos bem correlacionados, enquanto que valores inferiores a 0,2 já indicam ausência de correlação.

A título de exemplo a Figura 4-7 representa uma matriz de correlação MAC hipotética, na qual os modos experimentais 1, 2, 3 e 4 seriam pareados com os modos numéricos 1, 3, 6 e 9, respectivamente.

**Figura 4-7 – Emparelhamento de modos pelo critério MAC**



**Fonte: Elaborada pelo autor.**

Como destaca Ribeiro (2012), a utilização do valor de MAC como critério de emparelhamento é fortemente dependente tanto da posição, como da quantidade dos sensores. Conforme apresentado no item 3.3.3.1, uma escolha insuficiente dos graus de liberdade a se instrumentar pode tornar dois modos distintos completamente indistinguíveis pelo valor de MAC. Além da questão do posicionamento o emparelhamento pelo valor de MAC pode não ser suficiente em casos de estruturas muito complexas, assim como em estruturas contínuas ou com continuidade parcial conforme demonstrado no trabalho desenvolvido por (TICONA MELO et al., 2020).

Em estruturas nas quais o emparelhamento pelo valor de MAC não se mostra suficiente, critérios mais avançados baseados em energia de deformação modal podem ser utilizados. Um destes critérios é o *Energy Modal Assurance Criterion* (EMAC) proposto por Brehm et al. (2010) baseado na ponderação do critério MAC pela energia de deformação modal de conjuntos de graus de liberdade da estrutura conhecidos como *clusters*. Uma descrição detalhada destes critérios mais avançados para o pareamento de modos pode ser consultada em (RIBEIRO, 2012).

### **4.3.3 Otimização**

Tipicamente, a etapa de otimização envolve a minimização de uma função objetivo por meio de iterações sucessivas. No caso da calibração com base em respostas modais, esta função objetivo normalmente é definida com base nas diferenças entre os parâmetros modais numéricos e experimentais. O ajuste entre as respostas modais identificadas experimental e numericamente é baseado na modificação de parâmetros do modelo numérico, previamente identificados, em uma análise de sensibilidade, como sendo correlacionados às respostas modais. Os algoritmos mais utilizados para resolver este tipo de problema de otimização são algoritmos baseados em gradiente, métodos de superfície de resposta e algoritmos inspirados na natureza, nomeadamente algoritmos genéticos e otimização por enxame de partículas.

A grosso modo estes algoritmos podem ser divididos em dois grupos, os de otimização local e global. Algoritmos de otimização local, como aqueles baseados em gradientes ou superfícies de resposta, partem sempre de um ponto inicial e, por meio de gradientes da função objetivo, buscam o mínimo local mais próximo. Por outro lado, algoritmos de otimização global não necessitam de um ponto de partida e são capazes de superar mínimos locais em busca de um mínimo global do problema. Em contrapartida, por serem baseados em técnicas estocásticas, requerem um grande número de variáveis o que os torna computacionalmente pouco eficientes se comparados aos anteriores (MAGALHÃES, 2004).

Dentre estes algoritmos, diversos trabalhos (COSTA et al., 2015; MALVEIRO et al., 2018a; RIBEIRO et al., 2013, 2021, 2022; RIBEIRO; CALÇADA; MONTENEGRO, 2021; SILVA et al., 2021; TICONA MELO et al., 2020) tem demonstrado grande sucesso na utilização de algoritmos genéticos para a calibração de modelos numéricos com base em respostas experimentais.

Nesta seção serão abordados os principais aspectos que envolvem a etapa de otimização do modelo numérico, a começar pela formulação da função objetivo e posteriormente a utilização de algoritmos genéticos para otimização do mesmo. No que tange ao algoritmo genético, será dado enfoque especial a sua implementação conforme as ferramentas disponíveis no MATLAB® (2020) que serão utilizadas no estudo de caso a ser apresentado no item 5.

#### 4.3.3.1 Função objetivo

A função objetivo é definida como um somatório de resíduos, os quais se baseiam nas diferenças entre repostas experimentais e numéricas, sendo expressa por

$$f_o(P) = \sum_{i=1}^n |R_i^{num}(P) - R_i^{exp}| = \sum_{i=1}^n |r_i(P)| \quad (4-31)$$

onde  $R_i^{exp}$  são as respostas experimentais do  $i$ -ésimo modo e  $R_i^{num}(P)$  as respostas numéricas deste mesmo modo para um conjunto de parâmetros numéricos  $P$ . Sendo assim, ficam definidos os resíduos  $r_i$  como as diferenças entre as respostas modais experimentais e numéricas associadas ao  $i$ -ésimo modo.

Neste ponto fica clara a importância da operação de emparelhamento de modos, abordada no item 4.3.2. Erros no emparelhamento levam ao cálculo de diferenças entre modos experimentais e numéricos não correspondentes e, conseqüentemente, à não convergência do processo de otimização devido a instabilidades na função objetivo.

Num processo de calibração com base em repostas modais os resíduos, referidos anteriormente, são normalmente calculados com base em frequências naturais e valores de MAC (RIBEIRO, 2012).

Para se computar o resíduo associado às frequências naturais  $r_f$ , Ribeiro (2012) sugere a adoção da seguinte expressão

$$r_f(P) = \sum_{i=1}^n \left| \frac{f_i^{num}(P) - f_i^{exp}}{f_i^{exp}} \right| \quad (4-32)$$

na qual faz-se a soma das diferenças relativas entre as frequências naturais experimentais  $f_i^{exp}$  e numéricas  $f_i^{num}$ . O uso de diferenças relativas é bastante

conveniente para o processo de ajuste do modelo, uma vez que coloca em mesma ordem de grandeza as diferenças entre modos de baixa e alta frequência, cujas diferenças relativas absolutas costumam ter ordens de grandeza bastante distintas. Desta forma, é possível dar igual relevância a todos os modos durante a otimização.

Com relação aos resíduos baseados no valor de MAC diversas formulações foram propostas sendo que as principais são apresentadas e discutidas no trabalho desenvolvido por (RIBEIRO, 2012). Aqui será apresentada a expressão

$$r_{\text{MAC}}(P) = \sum_{i=1}^n \left| 1 - \text{MAC}(\boldsymbol{\varphi}_i^{\text{exp}}; \boldsymbol{\varphi}_i^{\text{num}}(P)) \right| \quad (4-33)$$

proposta por Brehm (2011), na qual  $\boldsymbol{\varphi}_i^{\text{exp}}$  e  $\boldsymbol{\varphi}_i^{\text{num}}$  correspondem os vetores das ordenadas modais obtidos, respectivamente, por via experimental e numérica.

Por fim, a função do problema como um todo é composta pela soma escalada dos resíduos  $r_f$  e  $r_{\text{MAC}}$  dada por

$$f_o(P) = a.r_f(P) + b.r_{\text{MAC}}(P) \quad (4-34)$$

em que  $a$  e  $b$  são constantes que permitem atribuir diferentes pesos aos resíduos. Ao atribuir um maior peso a um resíduo em específico é possível “forçar” o processo de otimização a melhor estimar os parâmetros numéricos associados diretamente àquele resíduo. Este tipo de estratégia muitas vezes é importante quando se tem resíduos oriundos de repostas estimadas com níveis de incerteza muito distintos, como é o caso de frequências naturais e modos de vibração. Tipicamente as estimativas das frequências naturais são significativamente mais robustas que as das formas modais, fazendo com que, em muitos casos, atribuir um maior peso aos modos leve a melhores resultados (JAISHI; REN, 2005; SILVA et al., 2021).

#### 4.3.3.2 Algoritmos genéticos

Algoritmos genéticos (GA) são metodologias de otimização globais inspiradas na teoria da evolução das espécies de Darwin. O método, proposto inicialmente por Holland (1975), busca simular o comportamento evolutivo natural das espécies, em que um conjunto de indivíduos vai sofrendo, aleatoriamente, pequenas mutações em seus códigos genéticos ao longo do tempo. Estas mutações, quando favoráveis,

levam ao surgimento de indivíduos mais bem adaptados, que serão selecionados pelo meio e vão transmitir suas características a seus descendentes.

No caso da calibração de modelos numéricos cada indivíduo é representado por um vetor contendo os parâmetros do modelo identificados como sendo sensíveis. Cada um destes parâmetros é análogo ao que representa um gene em um ser biológico, ou seja, armazena informação necessária à geração de uma parte do modelo.

Este algoritmo é extremamente versátil, sendo capaz de lidar com problemas de otimização tanto restritos como irrestritos e inclusive problemas que misturam variáveis contínuas e discretas. Além disso, por não impor restrições à função objetivo é capaz de lidar com problemas nos quais esta é descontínua, não diferenciável, estocástica ou altamente não linear, o que seria um problema para algoritmos de otimização tradicionais baseados em cálculos de gradientes. O Quadro 4-1 a seguir sumariza duas diferenças fundamentais entre o GA e algoritmos clássicos baseados em cálculos de gradientes (MATHWORKS, 2021).

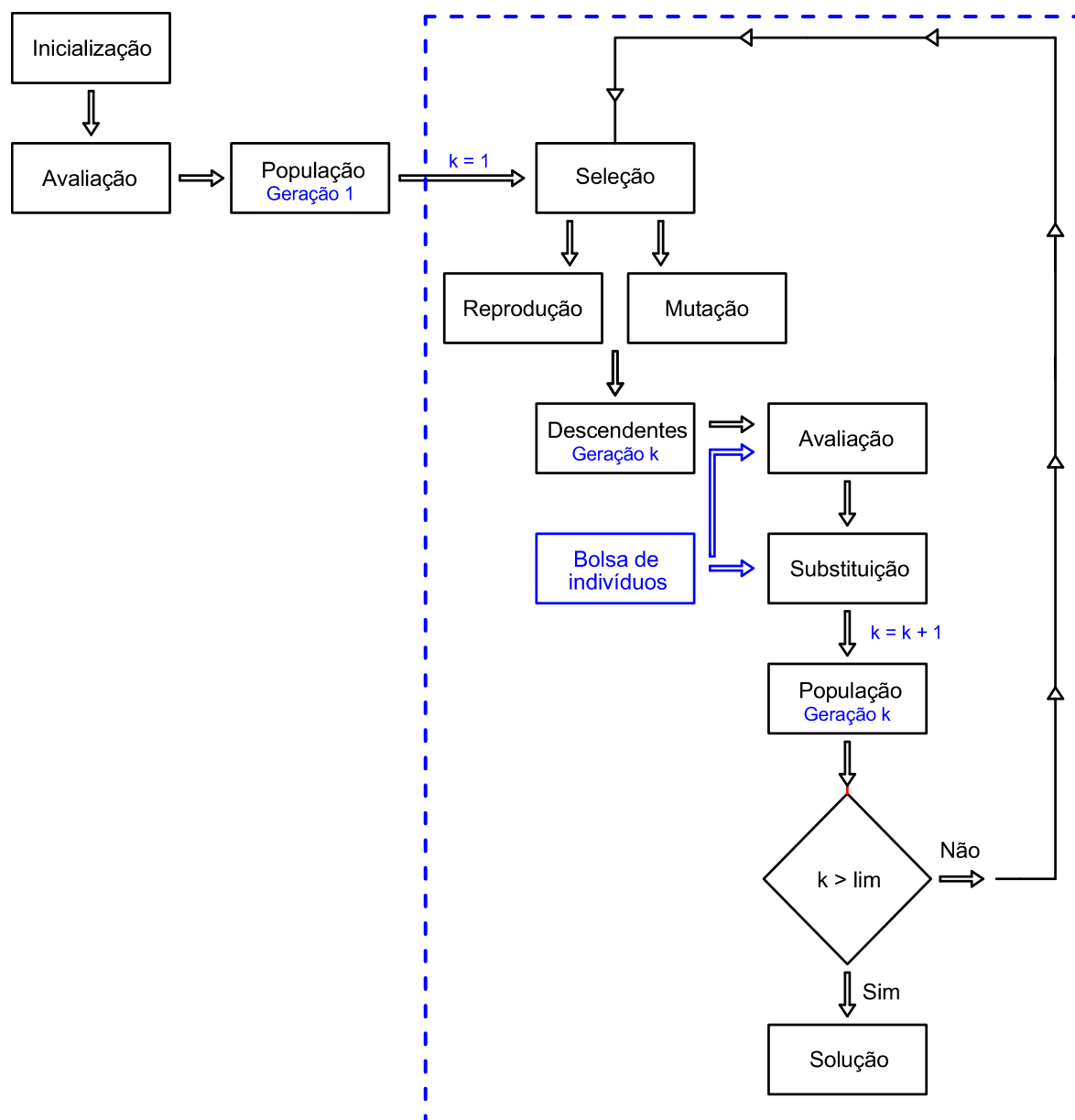
**Quadro 4-1 – Comparativo entre algoritmos clássicos de otimização e algoritmos genéticos**

<b>Algoritmos clássicos</b>	<b>Algoritmos genéticos</b>
Gera um único ponto em cada iteração, sendo que os pontos vão em sequência se aproximando de uma solução ótima.	Gera uma população de pontos em cada iteração. O melhor ponto da população se aproxima de uma solução ótima.
Gera o próximo ponto na sequência por um cálculo determinístico.	Gera a próxima população por técnicas estocásticas baseadas em geradores de números aleatórios.

Fonte: Adaptado de (MATHWORKS, 2021).

O Fluxograma da Figura 4-8 ilustra os passos que envolvem a implementação de um algoritmo genético.

**Figura 4-8 – Fluxograma de um algoritmo genético**



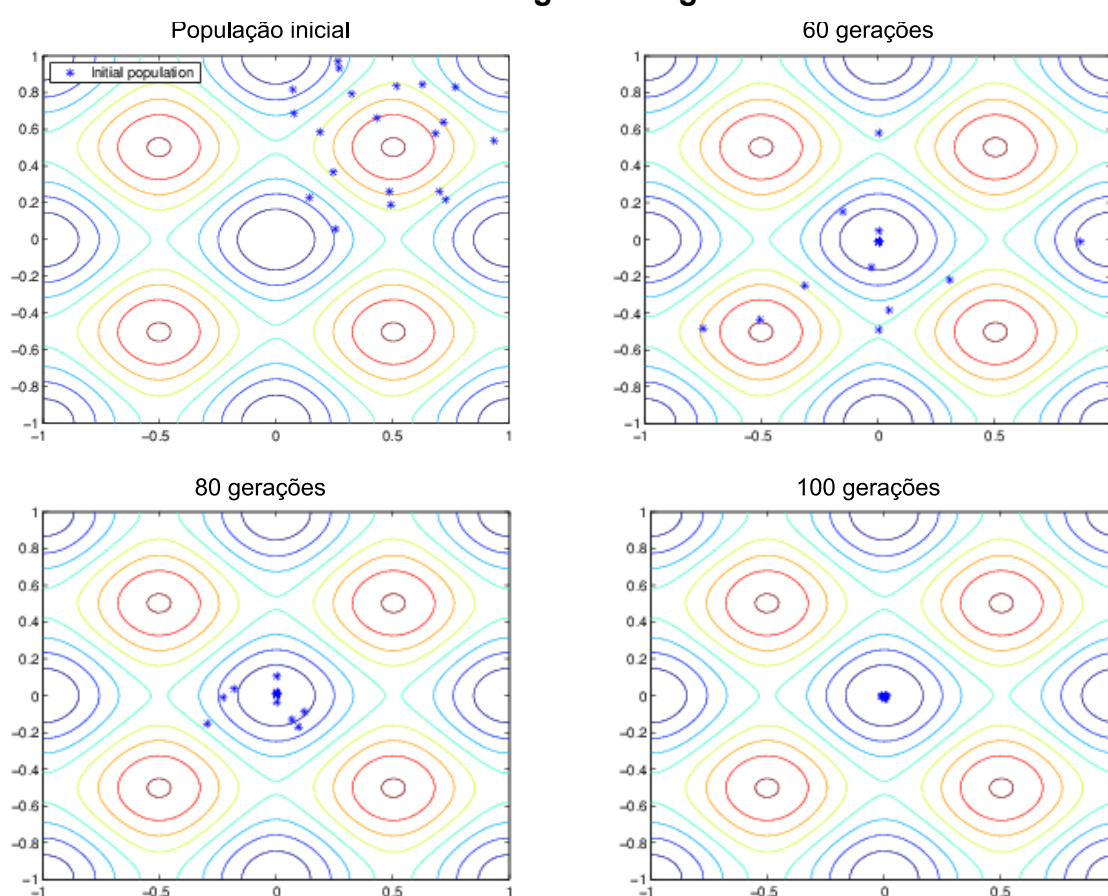
Fonte: Adaptada de (RIBEIRO, 2012).

Conforme ilustrado na Figura 4-8 o algoritmo parte de um processo de inicialização em que um conjunto de indivíduos (possíveis soluções para o problema)   gerado de maneira estocástica. Ao adentrar o ciclo evolutivo estes indivíduos são avaliados quanto a sua aptidão, sendo mais aptos aqueles com menor valor da função objetivo. Com base nas aptidões, uma parcela destes indivíduos   então selecionada e avança para o passo subsequente. Estes indivíduos então podem ter suas características modificadas por mutações ou gerar novos descendentes por meio de cruzamentos, formando assim uma nova geração. O processo então é repetido até que se tenha uma solução ótima (LEITE, 2016).



A Figura 4-9 ilustra como em geral se dá a evolução de uma população rumo à solução ótima em uma otimização baseada em algoritmos genéticos. Como pode-se observar, à medida que as gerações vão se sucedendo uma população que inicialmente era composta por indivíduos esparsos e distantes da solução vai se tornando agrupada e lentamente caminha para a solução ótima do problema. Além disso, é importante ressaltar que mesmo no problema ilustrado que é repleto de mínimos locais o algoritmo consegue caminhar para a solução ótima global.

**Figura 4-9 – Etapas da evolução de uma população em uma otimização baseada em algoritmos genéticos**



Fonte: Adaptada de (MATHWORKS, 2021).

A seguir, serão descritas as operações principais, previamente introduzidas no Fluxograma da Figura 4-8, necessárias à implementação de um algoritmo genético.

#### 4.3.3.2.1 População inicial

A geração da população inicial consiste-se na criação, por meio de técnicas estocásticas, de um conjunto de indivíduos que constituem possíveis soluções para o problema. É importante que estes indivíduos sejam criados respeitando os intervalos

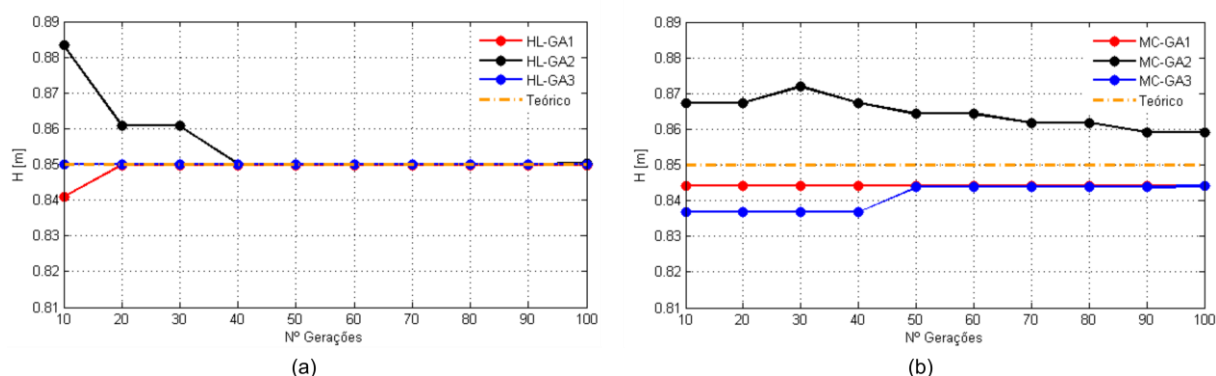
de variação de cada parâmetro numérico, previamente definidos na etapa de análise de sensibilidade.

Outro aspecto a se levar em conta ao gerar a população inicial é quanto ao tamanho da mesma. Estudos empíricos conduzidos por Correia (2003) indicam que valores entre 30 e 100 indivíduos são uma boa escolha para o tamanho da população inicial. A utilização de um número insuficiente de indivíduos pode gerar um cobrimento ruim do espaço amostral e consequentemente a baixa variabilidade dos indivíduos, enquanto que uma população exageradamente extensa pode acarretar em um aumento desnecessário do custo computacional (LEITE, 2016).

Por fim, mas não menos importante o método estatístico para se gerar a população inicial é crucial para o sucesso e a eficiência do processo de otimização. Em suma, quanto mais bem distribuída ao longo do espaço amostral a população inicial estiver melhor é para a otimização. Com isso pode-se fazer uso do método do Hipercubo Latino que, conforme apresentado na Seção 4.3.1, garante uma melhor distribuição para um menor número de amostras.

Ribeiro (2012) demonstrou a maior eficiência da utilização do método do Hipercubo Latino na geração da população inicial. A Figura 4-10 ilustra os resultados obtidos para a altura da seção transversal de uma ponte ferroviária hipotética. Pela Figura fica claro que as otimizações partindo de populações geradas pelo método de Monte Carlo, além de não atingir a solução ótima, tem estabilização significativamente mais lenta se comparada às otimizações que partiram de populações iniciais geradas com o método do Hipercubo Latino.

**Figura 4-10 – Comparativo entre populações iniciais geradas pelo: (a) Hipercubo Latino e (b) Monte Carlo**



Fonte: Adaptada de (RIBEIRO, 2012).

#### 4.3.3.2.2 Avaliação

A etapa de avaliação se consiste basicamente em escalar os valores retornados pela função objetivo de uma maneira que seja apropriada ao funcionamento das funções de seleção a serem apresentadas no item seguinte. A estes valores é dado o nome de valores de aptidão escalados (*scaled fitness values*). Valores de aptidão escalados elevados indicam indivíduos mais bem adaptados e, conseqüentemente, lhes serão atribuídas probabilidades mais altas de seleção (LEITE, 2016; MATHWORKS, 2021).

Durante a avaliação a metodologia de escalamento que se adota exerce impacto direto sob a performance do algoritmo. Se as diferenças entre os melhores e piores indivíduos forem muito acentuadas os genes destes que, inicialmente se mostravam mais aptos, vão de maneira muito prematura dominar toda a população, impedindo que o algoritmo varra o espaço amostral de maneira mais ampla. Por outro lado, caso as diferenças sejam muito singelas todos os indivíduos terão probabilidades muito próximas de ser selecionados, retardando demasiadamente o processo evolutivo (MATHWORKS, 2021).

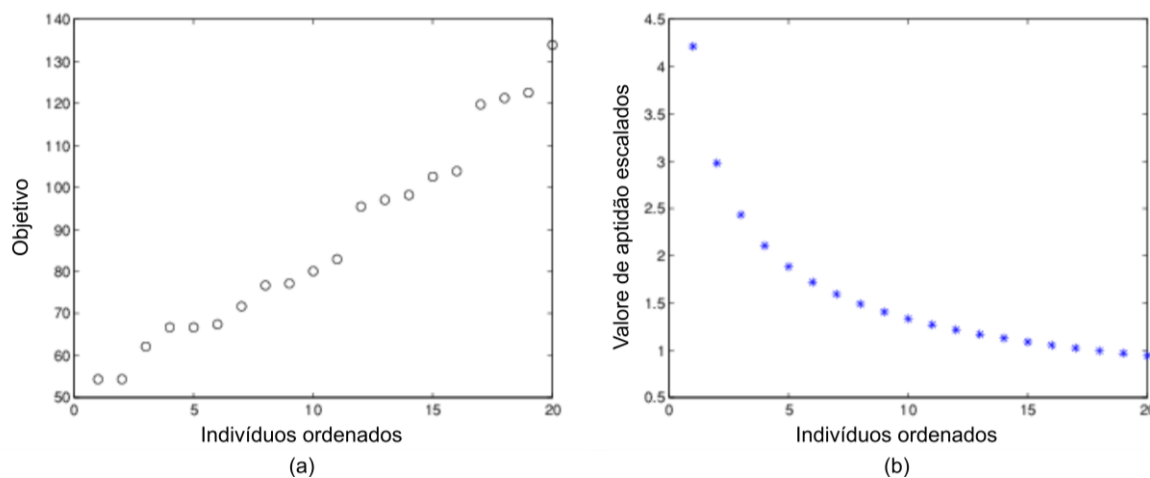
A estratégia que será adotada no estudo de caso deste trabalho e que também é a opção padrão da implementação em MATLAB® (2021) é avaliação por ordenação ('*rank*'). Neste caso os indivíduos são ordenados de forma sequencial onde o mais apto é atribuída a classificação 1, ao segundo mais apto a classificação 2 e assim por diante. O escalamento dos indivíduos é feito então atribuindo a cada um valor de aptidão escalado proporcional a  $1/\sqrt{n_i}$  em que  $n_i$  é o valor da classificação do indivíduo  $i$ . Além disso, os valores de aptidão escalados são normalizados de modo que a soma de todos estes seja sempre igual ao número total de reprodutores ( $N_R$ ) que vão criar a próxima geração. O motivo de sempre adotar essa normalização vai se tornar mais claro ao serem abordados os operadores de seleção (MATHWORKS, 2021).

Os valores de aptidão escalados para a avaliação por ordenação podem ser calculados pela Equação (4-35).

$$\frac{N_R (1/\sqrt{n_i})}{\sum_{i=1}^N 1/\sqrt{n_i}} \quad (4-35)$$

A Figura 4-11 ilustra de maneira gráfica este processo de avaliação para uma população hipotética de 20 indivíduos.

**Figura 4-11 – Processo de avaliação por ordenação: (a) Resultado da função objetivo e (b) valores de aptidão escalados**

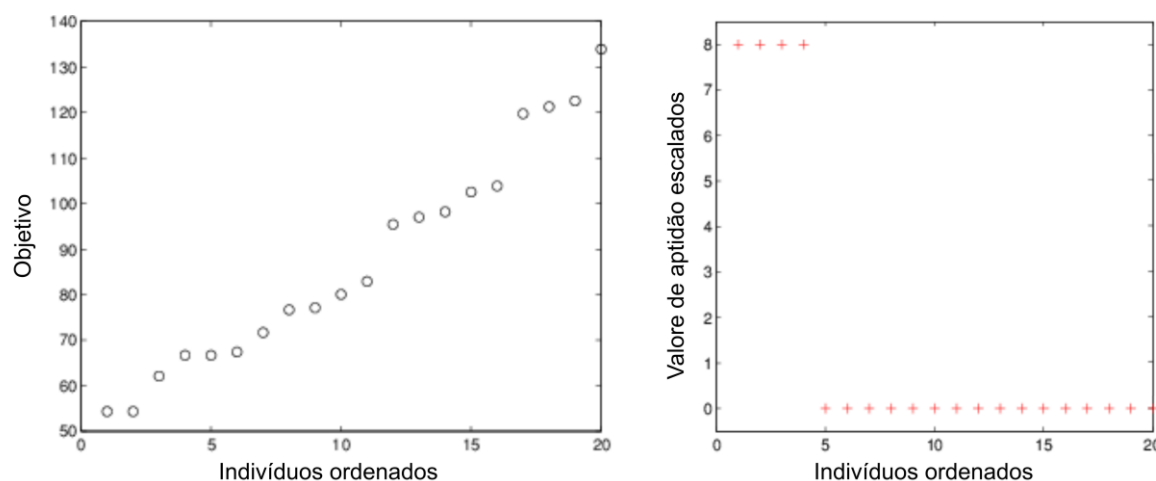


Fonte: Adaptada de (MATHWORKS, 2021).

Outra estratégia de avaliação bastante utilizada é a denominada avaliação por topo (“top”). Neste tipo de avaliação os melhores indivíduos são escalados de maneira igual, enquanto que aos demais é atribuído um valor nulo. O tamanho do conjunto de indivíduos a ser avaliado é geralmente um valor prescrito e o padrão do MATLAB® (2021) é adotar 40 % da população, entretanto este valor pode ser alterado pelo usuário. Assim como no caso anterior os valores são normalizados de modo que a soma de todos seja igual ao número de reprodutores (MATHWORKS, 2021).

A Figura 4-12 apresenta o resultado da aplicação da avaliação por topo ao mesmo conjunto de 20 indivíduos apresentados anteriormente, avaliando os 20 % mais aptos.

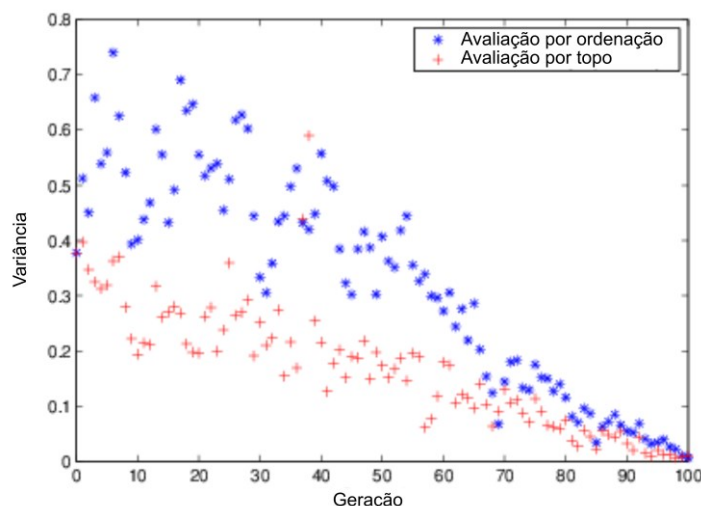
**Figura 4-12 – Processo de avaliação por topo: (a) Resultado da função objetivo e (b) valores de aptidão escalados**



Fonte: Adaptada de (MATHWORKS, 2021).

Como pode-se observar a avaliação por topo acaba por dar a mesma probabilidade de sobrevivência aos 4 melhores indivíduos, enquanto que aos demais não é dada nenhuma chance de prosperar. O resultado prático desta abordagem é uma menor variabilidade nas gerações conforme ilustrado na Figura 4-13.

**Figura 4-13 – Comparação entre a variância ao longo das populações para a avaliação por ordenação e topo**



Fonte: Adaptada de (MATHWORKS, 2021).

Além das técnicas de avaliação referidas anteriormente a implementação do algoritmo genético em MATLAB® (2021) conta ainda com mais duas formas de avaliação da população, nomeadamente a avaliação proporcional (“*proportional*”) e a avaliação por deslocamento linear (“*fit scaling shift linear*”). No primeiro caso os valores de aptidão escalados são definidos em uma escala proporcional aos valores da função objetivo sem nenhuma ponderação. No segundo caso os valores são escalados de modo que a razão entre o indivíduo mais apto e a média de todos os indivíduos seja igual à uma constante  $k$  em que a adoção de  $k = 2$  em geral fornece resultados adequados (MATHWORKS, 2021).

#### 4.3.3.2.3 Seleção

A etapa de seleção consiste-se em escolher, dentre os indivíduos de uma população, quais serão aqueles que vão assumir o papel de reprodutores e dar origem à geração subsequente.

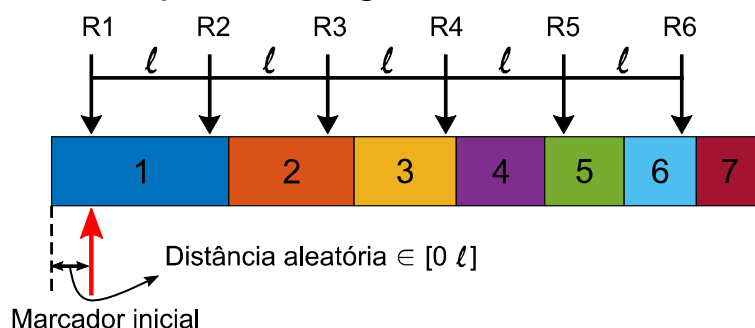
Tipicamente as técnicas adotadas para a seleção destes indivíduos são metodologias estocásticas, que tomam como base os valores de aptidão escalada resultantes da etapa de avaliação. Dentre estas técnicas, as mais recorrentes são:

Método da amostragem universal estocástica (SUS), método da roleta russa, método da amostragem estocástica decimal (*'remainder stochastic sampling'*) e o método dos torneios, sendo todas estas disponíveis na implementação em MATLAB (2021).

O método da amostragem universal estocástica foi proposto inicialmente por Baker (1987) e se baseia na definição de uma linha na qual cada indivíduo ocupa um espaço correspondente ao seu valor de aptidão escalado. Sobre essa linha são distribuídos marcadores igualmente espaçados, sendo que cada um destes simboliza um reprodutor. O espaçamento ( $\ell$ ) entre marcadores deve ser igual ao comprimento da linha dividido pelo número total de reprodutores. Como a soma dos valores de aptidão escalados foi normalizada como sendo igual ao número de reprodutores este espaçamento fica sendo unitário. Por fim, a posição do primeiro marcador com relação à borda da linha é sempre escolhida com base em um número aleatório contido entre zero e o espaçamento entre marcadores. Com isso, a seleção é feita com base nas posições onde cada um dos marcadores se assenta (MATHWORKS, 2021).

A Figura 4-14 ilustra a seleção de seis reprodutores pelo método SUS para uma população hipotética de 7 indivíduos.

**Figura 4-14 – Representação gráfica do método SUS de seleção**

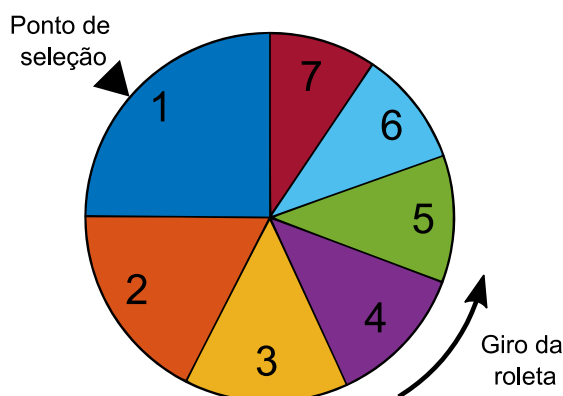


**Fonte: Elaborada pelo autor.**

A seleção com base no método da roleta russa parte da analogia de uma roleta na qual cada indivíduo ocupa uma área correspondente à sua função de aptidão escalada. Sendo assim, ao girar a roleta, cada um dos indivíduos tem uma probabilidade de ser selecionado que é proporcional ao seu valor de aptidão escalado. A cada giro da roleta imaginária um único reprodutor é selecionado, sendo assim, esta deve ser girada a mesma quantidade de vezes que o número de reprodutores a serem selecionados (MATHWORKS, 2021).

A Figura 4-15 apresenta uma representação gráfica do método da roleta, para o mesmo grupo de 7 indivíduos ilustrados no método anterior.

**Figura 4-15 – Representação gráfica da seleção pelo método da roleta**



Fonte: Elaborada pelo autor.

Conforme apontado por Baker (1987) o grande problema da seleção pelo método da roleta é que, em tese, qualquer indivíduo que ocupe uma área maior do que zero poderia ser selecionado todas as vezes. Ou poderia também acontecer o contrário, um indivíduo ocupando uma grande área da roleta poderia não ser selecionado nenhuma vez sequer.

Por outro lado, pelo método SUS tanto o máximo quanto o mínimo número de vezes que um indivíduo pode ser selecionado são limitados, respectivamente, ao primeiro número inteiro maior ou igual e ao primeiro número inteiro menor ou igual ao seu valor de aptidão escalado. Por exemplo, se o valor escalado associado a um indivíduo é 2,3, este será selecionado no mínimo duas vezes e no máximo três vezes. A esta propriedade é dado o nome de espalhamento mínimo (*'Minimum Spread'*), em referência ao menor espalhamento de genes que se pode obter sem enviesar o método de seleção (BAKER, 1987; PENCHEVA; ATANASSOV; SHANNON, 2009).

Uma alternativa para se corrigir o problema de espalhamento no método de seleção pela roleta seria, a cada vez que um indivíduo fosse selecionado, subtrair uma unidade de seu valor de aptidão escalado limitado, obviamente, ao valor zero. Esta técnica é conhecida com método da roleta com reposição parcial. Embora deste modo consiga ser estabelecido um limite superior para o número de seleções isso vem as custas da introdução de enviesamento (*'bias'*) na seleção, além de não garantir um limite inferior satisfatório (BAKER, 1987).

O método da amostragem estocástica decimal (*'remainder stochastic sampling'*) seleciona os possíveis reprodutores em basicamente duas etapas. Primeiramente, um conjunto de reprodutores é selecionado deterministicamente com base na parte inteira dos valores de aptidão escalados de cada indivíduo. Feito isso,

os demais reprodutores são selecionados pelo método da roleta russa, mas adotando uma área proporcional à parcela decimal do valor escalado. Por exemplo, um indivíduo cujo valor de aptidão escalado seja 2,3 será selecionado duas vezes na primeira etapa e na segunda etapa terá uma probabilidade de seleção proporcional à sua parte fracionária (MATHWORKS, 2021).

Graças à primeira etapa de seleção determinística o método referido anteriormente garante um limite inferior adequado para o número de seleções. No entanto, na fase da seleção decimal ainda resta o problema de qualquer indivíduo com parte fracionária não nula poder se selecionado todas as vezes. Devido a este problema surge a variante sem reposição do método da seleção decimal. Nesta variante, após um indivíduo ser selecionado pela roleta na parte decimal, sua probabilidade de seleção é zerada impedindo que este seja novamente escolhido. Assim como no método da roleta russa a utilização dessa estratégia introduz enviesamento na seleção (BAKER, 1987).

O Quadro 4-2 a seguir compara os métodos referidos anteriormente com base em suas propriedades de enviesamento e espalhamento.

**Quadro 4-2 – Comparativo entre os métodos de amostragem estocásticos**

<b>Método de seleção</b>	<b>Enviesamento ('bias')</b>	<b>Espalhamento ('spread')</b>
Amostragem universal estocástica (SUS)	Zero	Mínimo [VAE] → [VAE]
Roleta russa	Zero	Ilimitado $0 \rightarrow N_R$
Roleta russa com reposição parcial	Médio	Limitado superiormente $0 \rightarrow [VAE]$
Amostragem estocástica decimal	Zero	Limitado inferiormente [VAE] → [VAE] + $R_f$
Amostragem estocástica decimal sem reposição	Médio	Mínimo [VAE] → [VAE]

**Legenda:**

VAE → Valor de aptidão escalado;

[ ] → Operador de arredondamento para baixo (piso);

[ ] → Operador de arredondamento para cima (teto);

$R_f$  → Soma da parte fracionária dos valores da aptidão escalados.

**Fonte: Adaptado de (BAKER, 1987).**

Por fim, um método de seleção um pouco diferente dos referidos anteriormente é a seleção por torneios. Na seleção por torneios são selecionados, de maneira aleatória, um número de indivíduos entre 2 e o número total de indivíduos. Dentre este grupo de indivíduos é selecionado aquele mais apto (vencedor do torneio). O número



de indivíduos participando dos torneios está diretamente ligado à pressão seletiva exercida sob a população. Quanto maior o número de participantes mais severa é a pressão seletiva e mais aptos serão os reprodutores selecionados (LEITE, 2016).

Cabe ressaltar que, embora possa parecer que quanto mais alta a pressão seletiva melhor, uma pressão demasiadamente alta elimina rapidamente a diversidade da população. Ao eliminar a diversidade corre-se o risco de ficar estagnado em um mínimo local do problema.

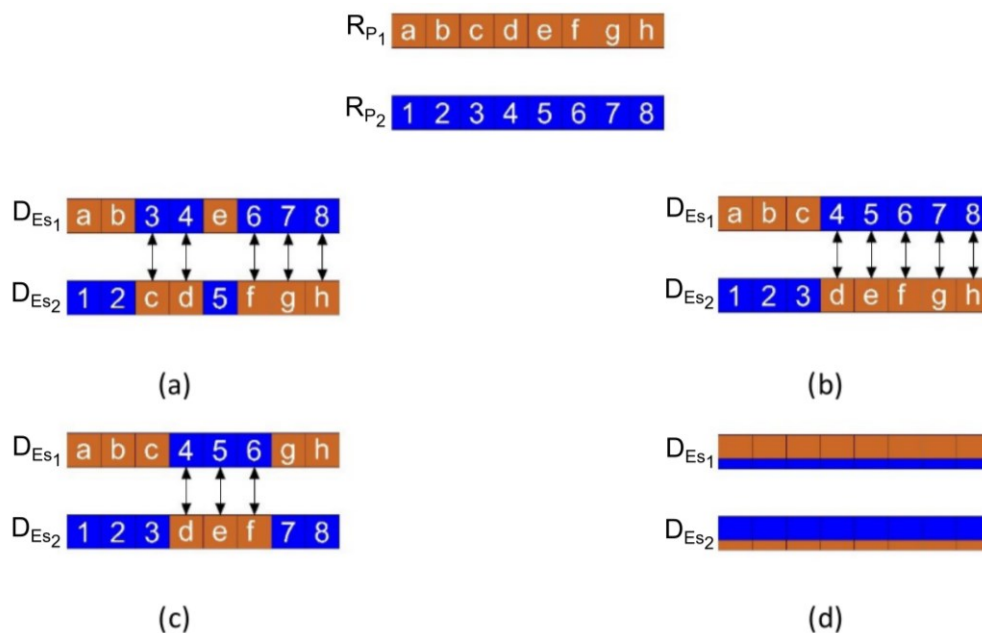
#### 4.3.3.2.4 Cruzamento

A etapa de cruzamento consiste-se na geração de novos indivíduos para a geração subsequente, por meio de combinações entre os genes (parâmetros numéricos) dos indivíduos selecionados como reprodutores. Trata-se de uma operação essencial no processo evolutivo, uma vez que cria a possibilidade de se extrair os melhores genes de indivíduos e recombina-los de forma a gerar descendentes superiores (MATHWORKS, 2021).

As trocas entre os genes dos indivíduos podem ser realizadas recorrendo a diversos tipos de abordagem, sendo que algumas delas envolvem a troca de genes inteiros (discretas), enquanto que outras envolvem combinações lineares destes (agregadas) (RIBEIRO, 2012). As abordagens mais utilizadas são o cruzamento uniforme, cruzamento em um ponto e cruzamento em dois pontos, sendo todas estas abordagens discretas. Dentre as metodologias agregadas a implementação em MATLAB (2021) conta ainda com os cruzamentos: intermédio, de Laplace, heurístico e aritmético.

A Figura 4-16 a seguir ilustra de uma maneira gráfica e didática como se dá cada uma das operações de cruzamento a serem apresentadas. Esta Figura servirá como base para todas as explicações que se seguem.

**Figura 4-16 – Operação de cruzamento: (a) Uniforme; (b) em um ponto; (c) em dois pontos; (d) intermédio, de Laplace, heurístico e aritmético**



Fonte: Adaptada de (LEITE, 2016).

O cruzamento uniforme (Figura 4-16a) parte da geração de um vetor binário responsável pela indexação do cruzamento. Cada posição neste vetor corresponde a um gene, caso o valor seja 1 o gene deve vir do primeiro reprodutor, caso seja 0 o gene deve vir do segundo reprodutor. Por exemplo, sejam os reprodutores  $R_{P_1}$  e  $R_{P_2}$  da Figura 4-16 para um vetor de indexação [1 1 0 0 1 0 0 0] tem-se o descendente  $D_{Es_1} = [a b 3 4 e 6 7 8]$  da Figura 4-16a (MATHWORKS, 2021).

No cruzamento uniforme, algumas implementações permitem que se controle a probabilidade de uma entrada do vetor ser zero ou um por meio de um parâmetro denominado taxa de cruzamento. Na implementação em MATLAB (2021) essa taxa por padrão é de 50 % e, a princípio, não é um parâmetro controlável, embora possa ser alterado por meio de uma simples modificação na função padrão.

O cruzamento em um ponto (Figura 4-16b) começa pela escolha do ponto de cruzamento. O ponto é escolhido como sendo um número aleatório inteiro compreendido entre 1 e o número de genes dos indivíduos. O descendente é então gerado tomando do primeiro reprodutor todos os genes até o ponto de cruzamento, inclusive, e os demais virão do segundo reprodutor. No cruzamento em dois pontos são selecionados aleatoriamente dois pontos de cruzamento. O descendente é então gerado tomando do primeiro reprodutor todos os genes até o primeiro ponto, inclusive, a partir daí toma-se os genes do segundo reprodutor até o segundo ponto, inclusive,

e por fim os genes restantes são novamente do primeiro reprodutor. Como pode-se observar na Figura 4-16c o cruzamento em 2 pontos cria três intervalos de troca de genes (MATHWORKS, 2021).

Diferentemente dos métodos exemplificados até agora, como pode ser observado na Figura 4-16d o grupo dos cruzamentos agregados tem como base a mistura e não a troca entre os genes. Se definirmos dois reprodutores ( $R_{P1}$  e  $R_{P2}$ ) como

$$R_{P1} = \{P_1^1 \dots P_n^1\} \quad (4-36)$$

$$R_{P2} = \{P_1^2 \dots P_n^2\} \quad (4-37)$$

em que  $P_n^1$  e  $P_n^2$  representam, respectivamente, o enésimo parâmetro numérico de ( $R_{P1}$  e  $R_{P2}$ ) temos que o cruzamento intermédio é dado por

$$c_i^1 = P_i^1 + rand * \gamma_{cr} * (P_i^2 - P_i^1) \quad (4-38)$$

em que  $\gamma_{cr} \in [0 \ 1]$  é uma taxa de cruzamento definida pelo usuário,  $rand \in [0 \ 1]$  é um número aleatório e  $c_i^1$  é o i-ésimo gene do descendente  $D_{ES1}$  (MATHWORKS, 2021).

No cruzamento de Laplace os genes do descendente  $D_{ES1}$  são selecionados por uma das expressões abaixo escolhidas de forma aleatória

$$c_i^1 = \begin{cases} P_i^1 + bl * |P_i^1 - P_i^2| \\ P_i^2 + bl * |P_i^1 - P_i^2| \end{cases} \quad (4-39)$$

em que  $bl$  é um número aleatório extraído de uma distribuição de Laplace (DEEP et al., 2009; MATHWORKS, 2021).

O cruzamento heurístico é dado por

$$c_i^1 = P_i^2 + \gamma_{cr} * (P_i^1 - P_i^2) \quad (4-40)$$

em que nesse caso o reprodutor  $R_{P1}$  é escolhido com sendo sempre o indivíduo mais apto. Neste tipo de cruzamento, a taxa de cruzamento  $\gamma_{cr}$  dá ao usuário absoluto controle de quanto, em porcentagem, do gene virá do reprodutor mais apto e quanto do menos apto (MATHWORKS, 2021).

Por fim o cruzamento aritmético se consiste na simples média entre os genes dos dois reprodutores, dada por

$$c_i^1 = \frac{P_i^1 + P_i^2}{2} \quad (4-41)$$

#### 4.3.3.2.5 Mutação

A operação de mutação é a responsável por introduzir variabilidade ao algoritmo, garantindo que este não se mantenha estagnado em gerações iniciais e que consiga atingir um refinamento da solução nas últimas gerações (RIBEIRO, 2012). Além disso, em casos onde são aplicados operadores de cruzamento discretos a operação de mutação é a única capaz de criar novos genes.

Assim como no caso do cruzamento, diversas são as técnicas existentes para se realizar a operação de mutação. Na implementação em MATLAB®(2021) a mutação pode ser do tipo uniforme, gaussiana ou adaptativa.

O operador de mutação uniforme é um processo de duas etapas. Primeiramente, o algoritmo escolhe quais genes do indivíduo vão sofrer mutação. Essa escolha é feita com base em uma taxa de mutação (TM), fornecida pelo usuário, que determina a probabilidade de que um certo gene seja mutado. Os genes escolhidos para mutação são então substituídos por um valor randômico no intervalo  $[Lb \ Ub]$  em que  $Lb$  e  $Ub$  são, respectivamente, os valores inferior e superior daquele gene em específico (MATHWORKS, 2021).

A mutação gaussiana é feita por meio da soma ao gene que será mutado de um valor aleatório extraído de uma distribuição gaussiana com média nula e desvio padrão  $(\sigma_{i,k})$  do  $i$ -ésimo gene na  $k$ -ésima geração dado pela expressão recursiva

$$\sigma_{i,k} = \sigma_{i,k-1} * \left(1 - S_{shrink} \frac{k}{N_{Gen}}\right) \text{ com } \sigma_{i,0} = S_{scale}(Ub_i - Lb_i) \quad (4-42)$$

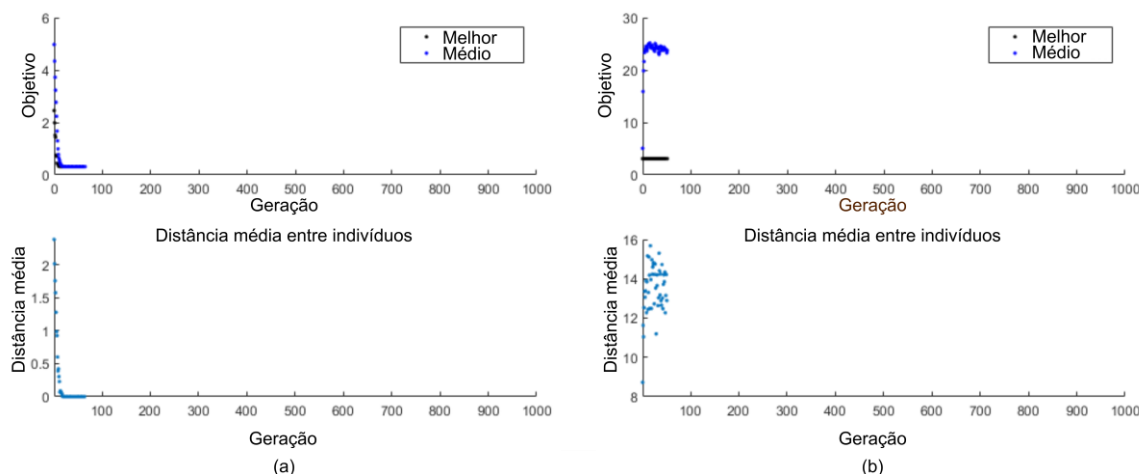
em que  $S_{scale}$  é uma taxa de escala do desvio padrão inicial  $(\sigma_{i,0})$ ,  $N_{Gen}$  é o número máximo de gerações e  $S_{shrink}$  é conhecida por taxa de encolhimento, cujo valor padrão da implementação em MATLAB®(2021) é igual a um (MATHWORKS, 2021).

Por fim, a mutação adaptativa gera taxas de mutação aleatórias a cada geração com base no nível de sucesso dos indivíduos da geração anterior. Ou seja, o processo se torna adaptativo sendo modificado a cada geração (LEITE, 2016).

As operações de mutação e cruzamento são sempre complementares e o sucesso da otimização depende da atuação de ambas. A Figura 4-17 ilustra o efeito

de se realizar uma otimização sem mutação (Figura 4-17a) ou sem cruzamento (Figura 4-17b).

**Figura 4-17 – Comparativo entre um algoritmo genético (a) sem mutação e (b) sem cruzamento**



Fonte: Adaptada de (MATHWORKS, 2021).

No caso da Figura 4-17a, devido à falta de mutação, o algoritmo não é capaz de criar nenhum novo gene apenas de produzir novos indivíduos com base em recombinações dos genes pré-existentes. O resultado prático disso é que, à medida que gerações avançam e a seleção vai atuando a distância média entre os indivíduos vai caindo até que todos se tornam exatamente iguais e a evolução cessa. Ou seja, o algoritmo produz o melhor indivíduo possível com aqueles genes disponíveis na população inicial e, daí em diante, não consegue mais fazer nada (MATHWORKS, 2021).

No caso da Figura 4-17b percebe-se claramente que as mudanças aleatórias, devido ao processo de mutação, são capazes de gerar genes melhores uma vez que o valor médio da função objetivo apresenta uma ligeira tendência de queda. No entanto, como não há cruzamento estes genes nunca são recombinações com os do melhor indivíduo gerando, assim como no caso anterior, total estagnação do algoritmo (MATHWORKS, 2021).

#### 4.3.3.2.6 Substituição

A operação de substituição consiste na troca de descendentes da geração atual por indivíduos bem sucedidos de gerações anteriores armazenados em uma “bolsa” de indivíduos. Avaliando tanto indivíduos da bolsa quanto da população atual, a escolha dos mais adequados é realizada. A substituição pode ser feita com base em

dois esquemas: i) Substituição total: a geração futura será totalmente composta por indivíduos da bolsa e ii) Substituição parcial: a geração subsequente será composta por descendentes da geração anterior e da bolsa (RIBEIRO, 2012).

Além das técnicas de substituição referidas anteriormente, pode-se adotar uma estratégia de eleição de elites. As elites são grupos formados por indivíduos mais aptos de uma geração anterior. A estes indivíduos é garantido o trânsito livre para a geração seguinte, resguardando assim que estes não sejam perdidos na geração subsequente por não terem sido selecionados para reprodução ou serem destruídos em uma operação de mutação ou cruzamento. Em geral adota-se um número reduzido de elites, algo como apenas 1 ou 2 indivíduos (CORREIA, 2003; RIBEIRO, 2012).

#### 4.3.3.2.7 Restrições

Em muitos problemas de otimização, incluindo o caso da calibração de modelos numéricos, os genes dos indivíduos (variáveis do problema) estão sujeitos a limites superiores e inferiores de variação. Em geral estes limites estão relacionados a natureza física do parâmetro que aquele gene representa. Por exemplo, suponhamos que um gene esteja a representar a densidade do aço, sabe-se que esta varia entre algo entorno de 7.800 e 8.000 kg/m<sup>3</sup> portanto, mesmo que, do ponto de vista matemático, haja uma solução ótima para um valor de 5.000 kg/m<sup>3</sup> esta não representa uma solução possível do ponto de vista físico.

Embora sejam as mais comuns, as restrições em problemas de otimização não se limitam apenas a limites superiores e inferiores. Muitas vezes, o conjunto de variáveis deve satisfazer relações entre se expressas por equações ou inequações podendo estas ser tanto lineares quanto não lineares. Um exemplo de tal restrição poderia ser, por exemplo, que a soma de todas as variáveis relacionadas a massa não deve ultrapassar certo valor.

Com isso, o algoritmo deve ter meios para eliminar aqueles indivíduos que, por acaso, violem alguma restrição. Para lidar com este problema pode-se, na etapa de seleção, impor penalidades a estes indivíduos de modo que não venham a ser selecionados e não propaguem estas informações aos demais (RIBEIRO, 2012).

Outra abordagem para limitar os indivíduos é a de se utilizar funções de cruzamento e mutação que, necessariamente, geram indivíduos que não violem estas

restrições. Deste modo, genes fora dos limites de variação não são sequer gerados (LEITE, 2016).

#### 4.3.3.2.8 Critérios de parada

Por fim um último aspecto importante a se ter em conta em um problema de otimização baseado em algoritmos genéticos é o critério de parada. Um critério de parada nada mais é que a decisão de se interromper o processo evolutivo. Estes critérios em geral são definidos com base em: Um número máximo de gerações pré-definido, um limite de tempo, um número máximo de gerações sem nenhuma melhoria ou até mesmo ao atingir um certo valor da função objetivo (LEITE, 2016).

Por se tratar de um processo com diversas operações estocásticas determinar exatamente quando este atingiu a solução ótima e, a partir daí, nenhuma melhora será atingida muitas vezes não é possível. Com isso, é recomendável realizar uma análise da evolução da função objetivo durante a otimização de modo a garantir que não se está interrompendo o processo de maneira muito prematura.

No caso da calibração de modelos em geral, como o tempo gasto no processamento não é tão crucial quanto a acurácia do resultado, uma boa estratégia é adotar um número alargado de gerações, deixando o algoritmo correr algum tempo mesmo após este parecer estar estagnado. Esta recomendação se deve ao fato de que em muitos estudos deste tipo pequenos refinamentos da solução são obtidos nas últimas gerações (SILVA et al., 2021).

## 4.4 Validação de modelos numéricos

Conforme referido a priori a metodologia de calibração apresentada no item anterior, quando bem sucedida, consegue garantir que o modelo numérico representa com fidelidade as propriedades do veículo em termos das frequências naturais e formas de vibrar correspondentes àqueles modos identificados experimentalmente. No entanto, para garantir que de fato o modelo consegue representar a resposta dinâmica do veículo de maneira fiel é fundamental que se faça uma validação com base em repostas dinâmicas coletadas no veículo durante sua operação usual.

O primeiro passo para realizar este tipo de validação é a coleta de informação experimental. A coleta destes dados pode ser realizada tanto em laboratório, por meio de plantas de teste que simulam condições reais da via, ou durante a operação regular do veículo. Caso o teste seja realizado em uma operação normal é fundamental que

se escolha um trecho de via do qual se tenha informações suficientes para modelá-lo. A validação é então realizada pela comparação entre respostas experimentais e aquelas obtidas por meio de uma metodologia de interação veículo-via que já esteja bem consolidada e validada.

A solução numérica para o problema dinâmico da interação entre veículo e estrutura é comumente tratada com base em dois conjuntos de metodologias, desacopladas e acopladas. Nas metodologias desacopladas, tipicamente as equações de movimento do veículo e da estrutura são resolvidas de modo independente por meio de um processo iterativo. Exemplos deste tipo de formulação podem ser encontrados nos trabalhos de Delgado e Santos (1997) e Yang e Fonder (1996). As metodologias acopladas, por outro lado, baseiam-se na solução de equações de movimento do veículo e da estrutura de maneira acoplada. Dentre estes métodos, vale ressaltar os trabalhos de Wu et al. (2001) e Yang et al. (2004) que propuseram o método da condensação e Neves et al. (2012) que propuseram o método direto, no qual se baseia a formulação a ser utilizada no presente trabalho.

No método direto, as equações de compatibilidade que relacionam os deslocamentos dos elementos de contato do veículo ( $CE$ ) com os elementos-alvo ( $TE$ ) da via são adicionadas às equações de equilíbrio dinâmico do sistema de acoplamento. Desta forma, é composto um sistema híbrido de equações com deslocamentos e forças de contato como incógnitas que pode ser resolvido com um método de integração direta, como o método de Newmark ou o método de Hilber-Hughes-Taylor (HHT).

O método direto trata somente do problema de compatibilidade, no entanto a interação veículo-via também envolve o problema do contato entre a roda e o trilho. Em metodologias mais desenvolvidas, como a que será utilizada neste trabalho, proposta por Montenegro et al (2015), deve-se implementar uma formulação para simular este efeito.

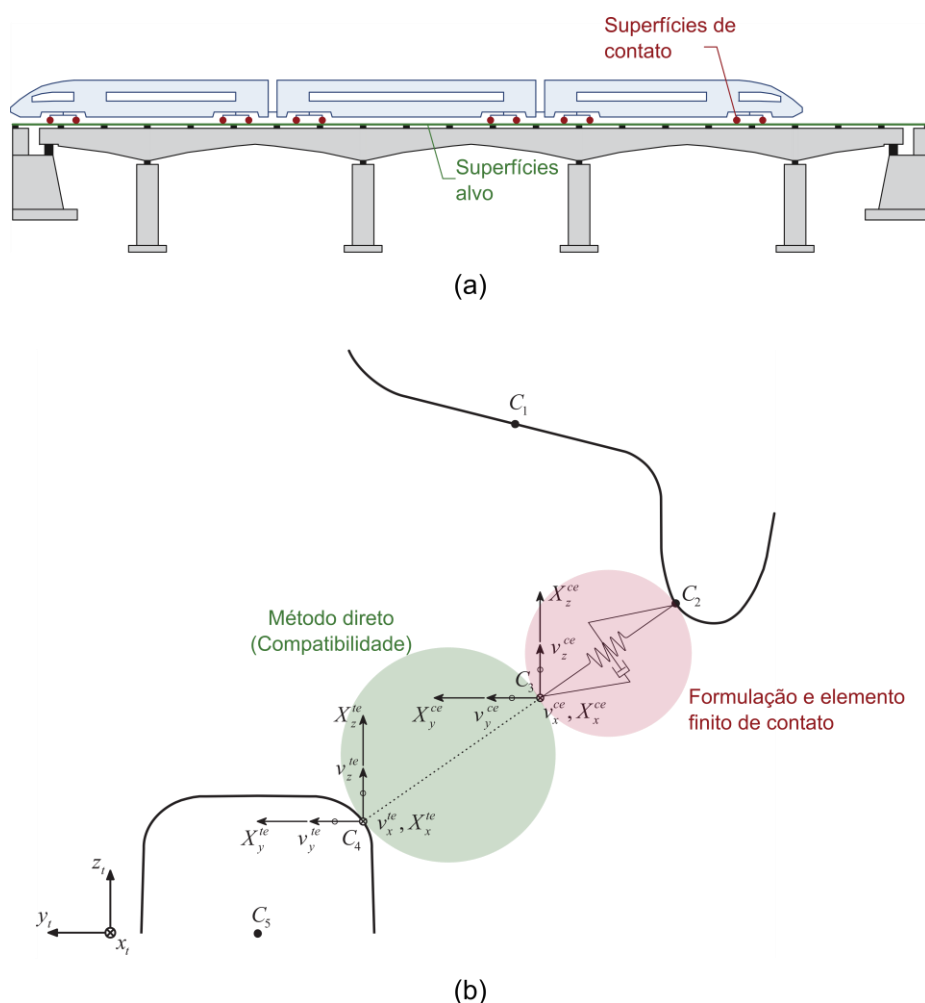
Nesta Seção serão tratados os aspectos que envolvem a validação da resposta dinâmica do modelo de um veículo ferroviário. Primeiramente, será apresentada a metodologia de interação veículo-via desenvolvida por Neves et al. (2014; 2012) e Montenegro et al. (2015), que será utilizada para a validação do estudo de caso a ser apresentado no próximo capítulo. Em seguida, serão abordados aspectos relativos a metodologias e métricas de comparação de respostas dinâmicas.



#### 4.4.1 Metodologia de interação veículo-via

Na Figura 4-18 apresentam-se os principais elementos que envolvem a metodologia de interação veículo-via a ser utilizada, nomeadamente, os elementos de contato ( $CE$ ) e alvo ( $TE$ ). No detalhe do contato (Figura 4-18b), ainda são ilustrados os dois problemas (compatibilidade e modelo de contato) que envolvem a formulação que será utilizada.

**Figura 4-18 – Problema de interação veículo-via: (a) Visão geral e (b) detalhe do contato roda-trilho**

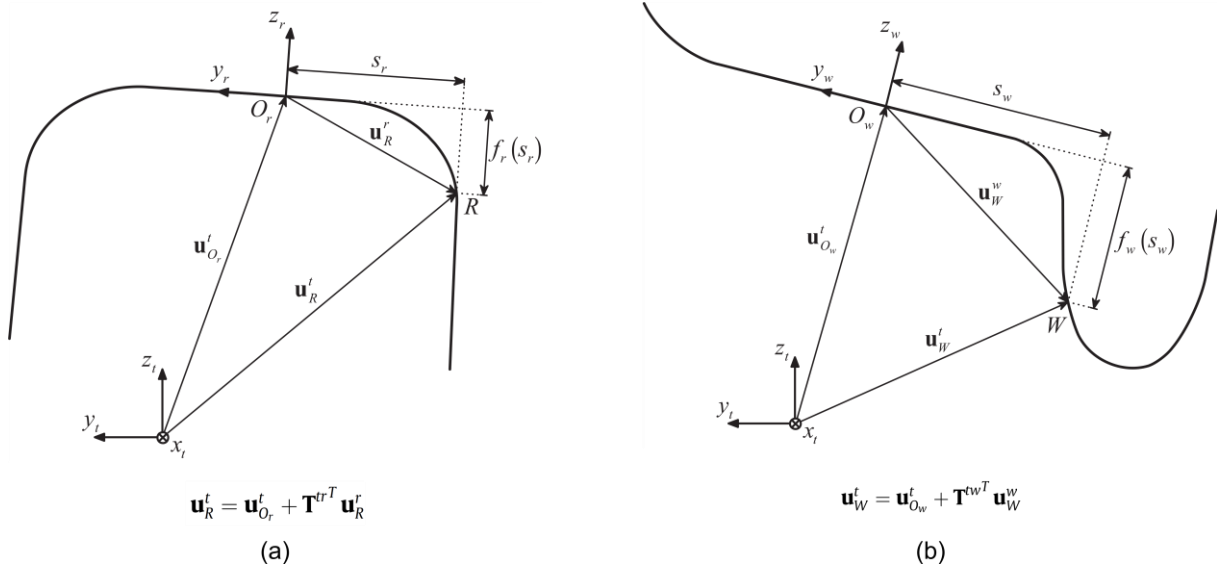


Fonte: Adaptada de: (a) (NEVES et al., 2014) e (b) (MONTENEGRO et al., 2015).

A formulação para a solução do problema de contato a ser utilizada, proposta e implementada por Montenegro et al (2015) e Montenegro (2015), consiste em basicamente três etapas: i) Detecção do ponto de contato, ii) solução do problema de contato normal e iii) solução do problema de contato tangencial.

Para a detecção do ponto de contato, primeiramente, os perfis da roda e do trilho são parametrizados segundo o esquema apresentado na Figura 4-19

**Figura 4-19 – Parametrização dos perfis: (a) Trilho e (b) roda**



Fonte: Adaptado de (MONTENEGRO et al., 2015).

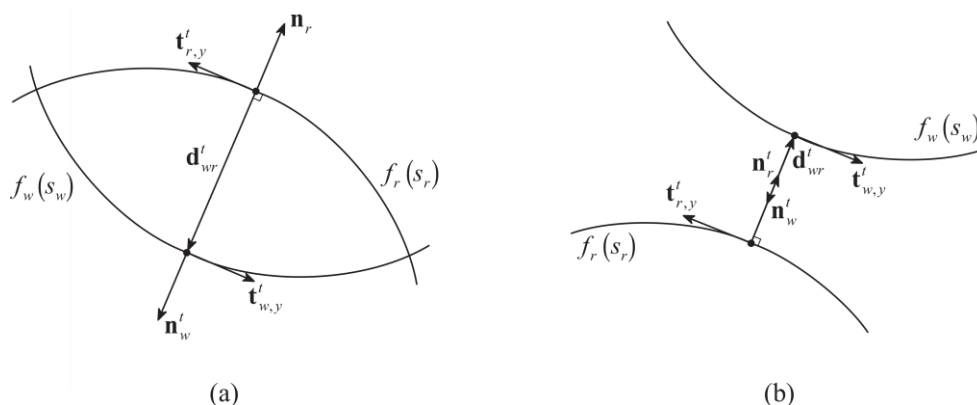
em que  $\mathbf{u}_R^t$  e  $\mathbf{u}_W^t$  são os vetores posição de um ponto na superfície do trilho e da roda, respectivamente, expressos no sistema de coordenadas do elemento alvo,  $\mathbf{T}^{tr}$  e  $\mathbf{T}^{tw}$  são matrizes de transformação do sistema de coordenadas, respectivamente, do trilho e da roda para o sistema de coordenadas do elemento alvo e  $f_r$  e  $f_w$  são funções de parametrização dos perfis do trilho e das rodas, respectivamente (MONTENEGRO et al., 2015).

A busca pelo ponto de contato é feita então resolvendo o sistema não linear de equações

$$\begin{cases} \mathbf{t}_{r,y}^t \cdot \mathbf{d}_{wr}^t = 0 \\ \mathbf{t}_{w,y}^t \cdot \mathbf{n}_r^t = 0 \end{cases} \quad (4-43)$$

em que  $\mathbf{t}_{r,y}^t$  e  $\mathbf{t}_{w,y}^t$  são vetores tangentes às superfícies de contato do trilho e da roda, respectivamente, calculados com base na derivada das funções de parametrização,  $\mathbf{n}_r^t$  é um vetor normal à superfície de contato no trilho e  $\mathbf{d}_{wr}^t$  equivale a  $\mathbf{u}_w^t - \mathbf{u}_R^t$  em que os vetores  $\mathbf{u}_w^t$  e  $\mathbf{u}_R^t$  foram definidos na Figura 4-19. Além de ser solução da Equação (4-43), para que haja contato os pontos identificados devem ainda atender à condição de intercessão das superfícies paramétricas. Na Figura 4-20 são apresentados dois casos que podem ser solução do sistema de Equações (4-43), entretanto em apenas um deles há o contato (MONTENEGRO et al., 2015).

**Figura 4-20 – Possíveis pontos de contato identificados: (a) Contato verdadeiro e (b) separação entre superfícies**



Fonte: (MONTENEGRO et al., 2015).

Pela análise Figura 4-20 conclui-se que somente há contato se a expressão

$$\mathbf{d}_{wr}^t \cdot \mathbf{n}_r^t \leq 0 \quad (4-44)$$

for satisfeita, ou seja,  $\mathbf{d}_{wr}^t$  e  $\mathbf{n}_r^t$  devem apontar em direções opostas. Uma descrição detalhada de cada uma das etapas aqui apresentadas pode ser consultada nas referências (MONTENEGRO et al., 2015; MONTENEGRO, 2015).

Uma vez localizado o ponto de contato, o problema de contato normal é resolvido com base na teoria não linear de Hertz (HERTZ, 1882) em que a força de contato normal ( $F_n$ ) é calculada por

$$F_n = K_h d^{3/2} \quad (4-45)$$

onde  $d$  é a penetração que se relaciona com  $\mathbf{d}_{wr}^t$  por  $d = \|\mathbf{d}_{wr}^t\|$  e  $K_h$  é o coeficiente de rigidez generalizado de Hertz. Por fim, as forças nas direções tangentes ao plano de contato são calculadas com base na teoria de contato de rolamento de Kalker (1979), sendo função das velocidades de “escorregamento” (*creepage*) entre a roda e o trilho e o formato da elipse de contato. Na implementação de (MONTENEGRO et al., 2015) essas forças foram pré-calculadas e armazenadas em uma tabela que é consultada durante a execução do algoritmo. Detalhes a cerca destas formulações de contato podem ser consultados nas referências (MONTENEGRO et al., 2015; MONTENEGRO, 2015).

Conforme referido a priori, na metodologia que será aplicada neste trabalho a solução da compatibilidade (Figura 4-18b) é feita por meio aplicação do método direto, proposto inicialmente por Neves et al. (2012), aprimorado para lidar com problemas não lineares por Neves et al. (2014) e posteriormente conjugado por

Montenegro et al (2015) ao modelo de contato não linear 3D apresentado. A seguir são apresentadas as principais etapas de formulação da interação veículo-via pelo método direto.

Partindo o do método HHT- $\alpha$  (HILBER; HUGHES; TAYLOR, 1977), a equação de movimento do sistema veículo-via pode ser escrita como

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}}^{t+\Delta t} + (1 + \alpha)\mathbf{R}^{t+\Delta t} - \alpha\mathbf{R}^t = (1 + \alpha)\mathbf{F}^{t+\Delta t} - \alpha\mathbf{F}^t \quad (4-46)$$

em que  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa,  $\mathbf{R}$  são as forças internas dos elementos,  $\mathbf{F}$  são forças externas aplicadas aos nós,  $\mathbf{a}$  são deslocamentos e os sobrescritos  $t + \Delta t$  e  $t$  referem-se, respectivamente, ao instante de tempo atual e anterior. As referidas forças aplicadas aos nós podem ser divididas naquelas aplicadas aos graus de liberdade livres (F) e aos prescritos (P) por

$$\mathbf{F}_F = \mathbf{P}_F + \mathbf{D}_{FX}^{ce}\mathbf{X}^{ce} + \mathbf{D}_{FX}^{te}\mathbf{X}^{te} \quad (4-47)$$

$$\mathbf{F}_P = \mathbf{P}_P + \mathbf{D}_{PX}^{te}\mathbf{X}^{te} + \mathbf{S}_r \quad (4-48)$$

em que  $\mathbf{P}$  são forças externas conhecidas aplicadas aos nós,  $\mathbf{S}_r$  são reações de apoio,  $\mathbf{X}$  são forças de contato e as matrizes  $\mathbf{D}$  são matrizes de transformação entre o sistema de coordenadas do elemento alvo, no qual são definidas as forças de contato, para o sistema global (MONTENEGRO et al., 2015).

Como no contato, pela terceira lei de Newton, as forças devem sempre ter mesma magnitude, mas sentidos opostos, tem-se a relação  $\mathbf{X}^{ce} = -\mathbf{X}^{te} = \mathbf{X}$  e com isso as forças externas são reescritas como

$$\mathbf{F}_F = \mathbf{P}_F + (\mathbf{D}_{FX}^{ce} - \mathbf{D}_{FX}^{te}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{P}_F + \mathbf{D}_{FX}\mathbf{X} \quad (4-49)$$

$$\mathbf{F}_P = \mathbf{P}_P - \mathbf{D}_{PX}^{te}\mathbf{X} + \mathbf{S}_r = \mathbf{P}_P + \mathbf{D}_{PX}\mathbf{X} + \mathbf{S}_r \quad (4-50)$$

expandindo a Equação (4-46) em graus de liberdade livres e restritos esta pode ser escrita como

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{FF} & \mathbf{M}_{FP} \\ \mathbf{M}_{PF} & \mathbf{M}_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{a}}_F^{t+\Delta t} \\ \ddot{\mathbf{a}}_P^{t+\Delta t} \end{bmatrix} + (1 + \alpha) \begin{bmatrix} \mathbf{R}_F^{t+\Delta t} \\ \mathbf{R}_P^{t+\Delta t} \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} \mathbf{R}_F^t \\ \mathbf{R}_P^t \end{bmatrix} \\ & = (1 + \alpha) \begin{bmatrix} \mathbf{P}_F^{t+\Delta t} + \mathbf{D}_{FX}^{t+\Delta t}\mathbf{X}^{t+\Delta t} \\ \mathbf{P}_P^{t+\Delta t} + \mathbf{D}_{PX}^{t+\Delta t}\mathbf{X}^{t+\Delta t} + \mathbf{S}_r^{t+\Delta t} \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} \mathbf{P}_F^t + \mathbf{D}_{FX}^t\mathbf{X}^t \\ \mathbf{P}_P^t + \mathbf{D}_{PX}^t\mathbf{X}^t + \mathbf{S}_r^t \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-51)$$

como apenas a solução dos graus de liberdade livres é necessária, tomando a primeira linha da Equação (4-51) e isolando as grandezas desconhecidas no lado esquerdo, tem-se

$$\mathbf{M}_{FF}\ddot{\mathbf{a}}_F^{t+\Delta t} + (1 + \alpha)\mathbf{R}_F^{t+\Delta t} - (1 + \alpha)\mathbf{D}_{FX}^{t+\Delta t}\mathbf{X}^{t+\Delta t} = \bar{\mathbf{F}}_F \quad (4-52)$$

com  $\bar{\mathbf{F}}_F$  sendo dado por

$$\bar{\mathbf{F}}_F = (1 + \alpha)\mathbf{P}_F^{t+\Delta t} - \alpha(\mathbf{P}_F^t + \mathbf{D}_{FX}^t\mathbf{X}^t) - \mathbf{M}_{FP}\ddot{\mathbf{a}}_P^{t+\Delta t} + \alpha\mathbf{R}_F^t \quad (4-53)$$

como trata-se de um problema não linear este pode ser escrito em uma forma residual, para a posterior aplicação do método de Newton, como

$$\boldsymbol{\Psi}_F(\mathbf{a}^{t+\Delta t}, \mathbf{X}^{t+\Delta t}) = \bar{\mathbf{F}}_F - \mathbf{M}_{FF}\ddot{\mathbf{a}}_F^{t+\Delta t} - (1 + \alpha)\mathbf{R}_F^{t+\Delta t} + (1 + \alpha)\mathbf{D}_{FX}^{t+\Delta t}\mathbf{X}^{t+\Delta t} \quad (4-54)$$

em que, para a solução do problema, o resíduo  $\boldsymbol{\Psi}_F$  deve ser nulo (MONTENEGRO et al., 2015).

Tanto as acelerações quanto as velocidades dos nós livres são variáveis que dependem do deslocamento  $\mathbf{a}$  e que, pelo método HHT- $\alpha$  (HILBER; HUGHES; TAYLOR, 1977), podem ser aproximadas por

$$\ddot{\mathbf{a}}^{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta_H\Delta t^2}(\mathbf{a}^{t+\Delta t} - \mathbf{a}^t) - \frac{1}{\beta_H\Delta t}\dot{\mathbf{a}}^t - \left(\frac{1}{2\beta_H} - 1\right)\ddot{\mathbf{a}}^t \quad (4-55)$$

$$\dot{\mathbf{a}}^{t+\Delta t} = \frac{\gamma_H}{\beta_H\Delta t}(\mathbf{a}^{t+\Delta t} - \mathbf{a}^t) + \left(1 - \frac{\gamma_H}{\beta_H}\right)\dot{\mathbf{a}}^t + \Delta t\left(1 - \frac{\gamma_H}{2\beta_H}\right)\ddot{\mathbf{a}}^t \quad (4-56)$$

onde os parâmetros  $\gamma_H$  e  $\beta_H$  controlam a acurácia e estabilidade do algoritmo. Uma análise comparativa da performance do método HHT- $\alpha$  frente a outras técnicas de integração pode ser consultada em (HUGHES, 1987, cap. 9).

Adotando as aproximações das Equações (4-55) e (4-56) e assumindo que o vetor de resíduos na interação de Newton  $i + 1$  satisfaça a condição de nulidade, tem-se

$$\boldsymbol{\Psi}_F(\mathbf{a}^{t+\Delta t,i}, \mathbf{X}^{t+\Delta t,i}) + \left[ -\frac{1}{\beta_H\Delta t^2}\mathbf{M}_{FF} - (1 + \alpha)\left[\frac{\partial\mathbf{R}_F}{\partial\mathbf{a}_F^{t+\Delta t}}\right]_{\mathbf{a}_F^{t+\Delta t,i}} \right] (\mathbf{a}_F^{t+\Delta t,i+1} - \mathbf{a}_F^{t+\Delta t,i}) + (1 + \alpha)\mathbf{D}_{FX}^{t+\Delta t,i}(\mathbf{X}^{t+\Delta t,i+1} - \mathbf{X}^{t+\Delta t,i}) = \mathbf{0} \quad (4-57)$$

reescrevendo a expressão de maneira incremental e de forma matricial tem-se

$$[\bar{\mathbf{K}}_{FF} \quad \bar{\mathbf{D}}_{FX}] \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{a}_F^{i+1} \\ \Delta \mathbf{X}^{i+1} \end{bmatrix} = \Psi_F(\mathbf{a}^{t+\Delta t, i}, \mathbf{X}^{t+\Delta t, i}) \quad (4-58)$$

em que  $\bar{\mathbf{K}}_{FF}$ ,  $\bar{\mathbf{D}}_{FX}$ ,  $\Delta \mathbf{a}_F^{i+1}$  e  $\Delta \mathbf{X}^{i+1}$  são dados por

$$\bar{\mathbf{K}}_{FF} = \frac{1}{\beta_H \Delta t^2} \mathbf{M}_{FF} + (1 + \alpha) \left[ \frac{\partial \mathbf{R}_F}{\partial \mathbf{a}_F^{t+\Delta t}} \bigg|_{\mathbf{a}_F^{t+\Delta t, i}} \right] \quad (4-59)$$

$$\bar{\mathbf{D}}_{FX} = -(1 + \alpha) \mathbf{D}_{FX}^{t+\Delta t, i} \quad (4-60)$$

$$\Delta \mathbf{a}_F^{i+1} = \mathbf{a}_F^{t+\Delta t, i+1} - \mathbf{a}_F^{t+\Delta t, i} \quad (4-61)$$

$$\Delta \mathbf{X}^{i+1} = \mathbf{X}^{t+\Delta t, i+1} - \mathbf{X}^{t+\Delta t, i} \quad (4-62)$$

o processo iterativo é realizado até que

$$\frac{\|\Psi_F(\mathbf{a}^{t+\Delta t, i+1}, \mathbf{X}^{t+\Delta t, i+1})\|}{\|\mathbf{P}_F^{t+\Delta t}\|} < \varepsilon_t \quad (4-63)$$

onde  $\varepsilon_t$  é uma tolerância prescrita (MONTENEGRO et al., 2015).

Por fim, resta ter em conta a condição de compatibilidade

$$\mathbf{v}^{ce} - \mathbf{v}^{te} = \mathbf{r} \quad (4-64)$$

, que deve ser satisfeita quando os nós C<sub>3</sub> e C<sub>4</sub> (Figura 4-18) estão em contato, na qual o vetor  $\mathbf{r}$  contém as irregularidades da via. Os deslocamentos  $\mathbf{v}^{ce}$  e  $\mathbf{v}^{te}$  são dados por

$$\mathbf{v}^{ce} = \mathbf{H}_{XF}^{ce} \mathbf{a}_F^{t+\Delta t, i+1} \quad (4-65)$$

$$\mathbf{v}^{te} = \mathbf{H}_{XF}^{te} \mathbf{a}_F^{t+\Delta t, i+1} + \mathbf{H}_{XP}^{te} \mathbf{a}_P^{t+\Delta t} \quad (4-66)$$

em que  $\mathbf{H}$  são matrizes de transformação entre os deslocamentos dos elementos de contato e alvo definidos no sistema de coordenadas global e o sistema local do elemento alvo. Substituindo estas relações na equação de compatibilidade tem-se

$$\mathbf{r} = (\mathbf{H}_{XF}^{ce} - \mathbf{H}_{XF}^{te}) \mathbf{a}_F^{t+\Delta t, i+1} + (-\mathbf{H}_{XP}^{te}) \mathbf{a}_P^{t+\Delta t} = \mathbf{H}_{XF} \mathbf{a}_F^{t+\Delta t, i+1} + \mathbf{H}_{XP} \mathbf{a}_P^{t+\Delta t} \quad (4-67)$$

substituindo o incremental definido na Equação (4-61) na Equação (4-67) e com algumas manipulações matemáticas pode-se escrever

$$\bar{\mathbf{H}}_{XF} \Delta \mathbf{a}_F^{i+1} = \bar{\mathbf{r}} \quad (4-68)$$

em que  $\bar{\mathbf{H}}_{XF}$  e  $\bar{\mathbf{r}}$  são definidos como (MONTENEGRO et al., 2015).

$$\bar{\mathbf{H}}_{XF} = -(1 + \alpha) \mathbf{H}_{XF} \quad (4-69)$$

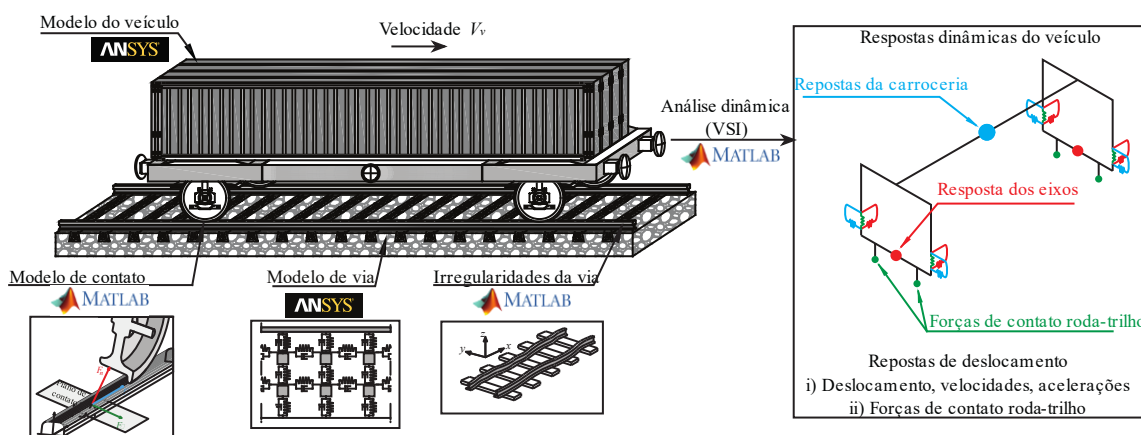
$$\bar{\mathbf{r}} = -(1 + \alpha) (\mathbf{r} - \mathbf{H}_{XP} \mathbf{a}_P^{t+\Delta t} - \mathbf{H}_{XF} \mathbf{a}_F^{t+\Delta t, i}) \quad (4-70)$$

Finalmente as Equações (4-68) e (4-58) formam o sistema de equações misto

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{FF} & \bar{\mathbf{D}}_{FX} \\ \bar{\mathbf{H}}_{XF} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{a}_F^{i+1} \\ \Delta \mathbf{X}^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_F(\mathbf{a}^{t+\Delta t, i}, \mathbf{X}^{t+\Delta t, i}) \\ \bar{\mathbf{r}} \end{bmatrix} \quad (4-71)$$

cujas incógnitas são os deslocamentos nodais incrementais e forças de contato incrementais. Toda esta metodologia apresentada, foi implementada por Montenegro (2015) em MATLAB®(2020) criando a ferramenta numérica *VSI-Vehicle Structure Interaction Analysis*, cuja estrutura de funcionamento é ilustrada na Figura 4-21.

**Figura 4-21 - Estrutura da ferramenta numérica VSI**



Fonte: Adaptado de (BRAGANÇA et al., 2021).

Esta ferramenta numérica escrita em MATLAB® (2020) importa as matrizes estruturais dos modelos de elementos finitos da via e do veículo desenvolvidos em ANSYS® (2018), conforme mostrado na Figura 4-21. Essa conectividade entre ambos os softwares alia a capacidade de um pacote FEM para desenvolver modelos da via e do veículo com qualquer grau de complexidade com a eficiência de uma linguagem de programação otimizada como o MATLAB® (2020).

#### 4.4.2 Métricas para validação dinâmica de modelos

Quando se pretende validar um modelo com base na comparação entre respostas dinâmicas experimentais e simuladas um fator primordial a se ter em conta, especialmente com relação às acelerações, é a faixa de frequências de interesse. Na validação de veículos os dados medidos contêm todas as frequências, inclusive aquelas oriundas de alguns modos locais de componentes específicos do veículo. Estas frequências muitas vezes não são contempladas no modelo numérico, bem como não tem influência sobre a resposta global do veículo e pouco impactam em análises baseadas nesta resposta global.

A EN14363 (2016) apresenta um conjunto de filtros que devem ser aplicados aos sinais com base no tipo de análise que se pretende fazer (Ex.: segurança de circulação, características dinâmicas de operação, características dinâmicas de deslocamentos e etc.), no tipo de grandeza que se está registrando e de qual parte do veículo esta grandeza se refere. Na validação do modelo que será apresentado no estudo de caso (item 5.5) detalhes a cerca destes filtros serão apresentados.

Além de se levar em conta um intervalo adequado de frequências, ao validar modelos numéricos com base em repostas temporais é fundamental a escolha de métricas adequadas para garantir uma comparação objetiva entre modelos. Diversos trabalhos apresentam este tipo de validação apenas por meio de gráficos com repostas numéricas e experimentais sobrepostas, tornando a comparação entre diferentes modelos algo muito subjetivo.

Para a comparação adequada entre séries temporais experimentais e numéricas, Sarin et al. (2008) propôs três métricas para avaliar erros associados a três aspectos distintos dos sinais: i) Desfasamento; ii) Magnitude e iii) Topologia.

Para avaliar o erro ao desfasamento global entre os sinais foi proposta a métrica

$$E_{fase} = e^{\left(\frac{n_* - c_\theta}{r_\theta}\right)} \quad (4-72)$$

na qual  $n_*$  representa o número de amostras desfasadas entre o sinal calculada por meio do método da maior correlação cruzada entre ambos e  $c_\theta$  e  $r_\theta$  representam constantes que determinam o ponto de subida e taxa de incremento da função (SARIN et al., 2008).

Para avaliar erros associados a magnitude ( $E_{mag}$ ) foi proposta a métrica baseada no erro médio absoluto normalizado (nMAE) dada por



$$nMAE_{mag} = \frac{\|A^{[ts+w]} - B^{[ts+w]}\|_1}{\|B^{[ts+w]}\|_1} \quad (4-73)$$

onde  $A^{[ts+w]}$  e  $B^{[ts+w]}$  representam os vetores contendo, respectivamente, dados numéricos e experimentais compensados pela defasagem temporal ( $n_*$ ) e alinhados não linearmente no domínio do tempo por meio do algoritmo *Dynamic time warping* (DTW). O operador  $\| \cdot \|_1$  é a norma vetorial L1, também conhecida como distância de Manhattan (SARIN et al., 2008).

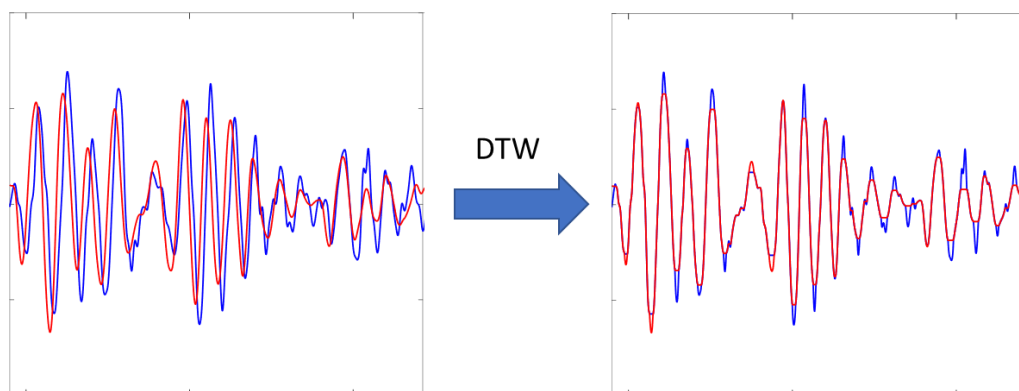
Por fim, para avaliar o erro associado a topologia ( $E_{topo}$ ) (forma do sinal) é proposta a métrica

$$nMAE_{topo} = \frac{\|A^{[ts+d+w]} - B^{[ts+d+w]}\|_1}{\|B^{[ts+d+w]}\|_1} \quad (4-74)$$

também baseada no erro médio absoluto normalizado, entretanto computado com os vetores  $A^{[ts+d+w]}$  e  $B^{[ts+d+w]}$  que representam as derivadas, alinhadas não linearmente no domínio do tempo por meio do algoritmo DTW, dos vetores contendo, respectivamente, dados numéricos e experimentais compensados pela defasagem temporal  $n_*$ . O uso da derivada nos sinais permite que nesta métrica os efeitos da magnitude não sejam levados em conta, uma vez que a derivada só depende das inclinações (SARIN et al., 2008).

O alinhamento não linear dos sinais no domínio do tempo, realizados nas duas últimas métricas, é fundamental para que não sejam computados erros extremos devidos à ligeiras defasagens nas amostras, uma vez que as métricas são comparadas dado a dado. Isto é especialmente importante na validação da resposta dinâmica de um veículo ferroviário em condições operacionais, já que durante sua operação o vagão apresenta pequenas flutuações de velocidade que não podem ser registradas e computadas na simulação com exatidão. A Figura 4-22 ilustra como atua o algoritmo DTW.

**Figura 4-22 – Algoritmo *Dynamic time warping***



Fonte: Elaborada pelo autor.

## 5 ESTUDO DE CASO E DISCUSSÃO

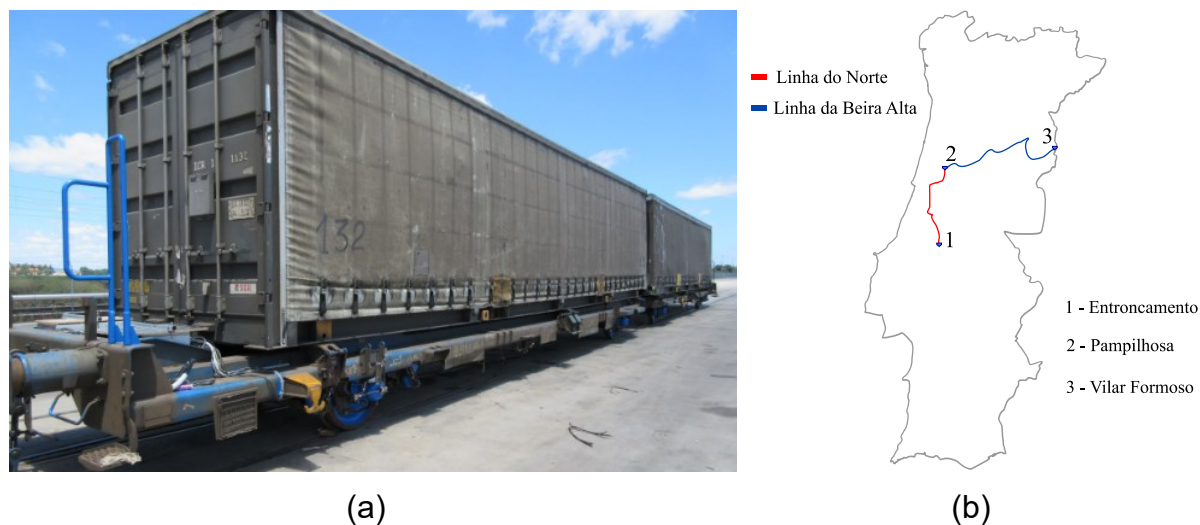
Nesta seção será apresentado um estudo de caso que envolve a aplicação das metodologias discutidas no Capítulo 4 deste trabalho, bem como dos conceitos fundamentais introduzidos nos Capítulos 2 e 3. Os dados experimentais brutos deste trabalho derivaram de ensaios realizados no âmbito do Relatório N° PROC. INV 20140702 (NETO; CALÇADA, 2017), cujo intuito eram realizar análises de descarrilamento. No presente trabalho estes dados brutos foram utilizados em um contexto diferente e inovador para a calibração e validação da resposta dinâmica do modelo numérico de um vagão ferroviário de carga, com base em testes dinâmicos em condições operacionais.

Na Seção 5.1 será apresentada uma descrição do vagão em estudo e na Seção 5.2 serão discutidos aspectos que envolvem sua modelagem numérica. Na Seção 5.3 serão identificadas as frequências naturais e formas modais deste vagão, com base em resultados oriundos de testes dinâmicos em condições operacionais e na Seção 5.4 estes resultados servirão de base para a calibração do modelo. Por fim, na Seção 5.5 o modelo será validado por meio da comparação entre respostas dinâmicas simuladas com o modelo antes e após a calibração e dados experimentais coletados em condições operacionais.

### 5.1 Descrição do vagão *Laagrss*

O *Laagrss* (Figura 5-1a) é um vagão plataforma concebido para o transporte de containers que circula aos pares com uma ligação articulada entre estes, atingindo velocidades até 120 km/h (de acordo com a classificação UIC (UIC, 2022)). Este vagão tem uma tara de 27.100 kg e um peso bruto total de 52.000 kg, levando containers de 45 pés (13.716 m). Este vagão é administrado pelos operadores ferroviários Medway e COMSA, sendo utilizado no transporte de rolos de papel em toda a Península Ibérica. O trajeto regular deste veículo parte da estação do Entroncamento em Portugal e percorre a linha do Norte até ao entroncamento da Pampilhosa, onde muda para a linha internacional da Beira Alta em direção a Espanha (ver Figura 5-1b).

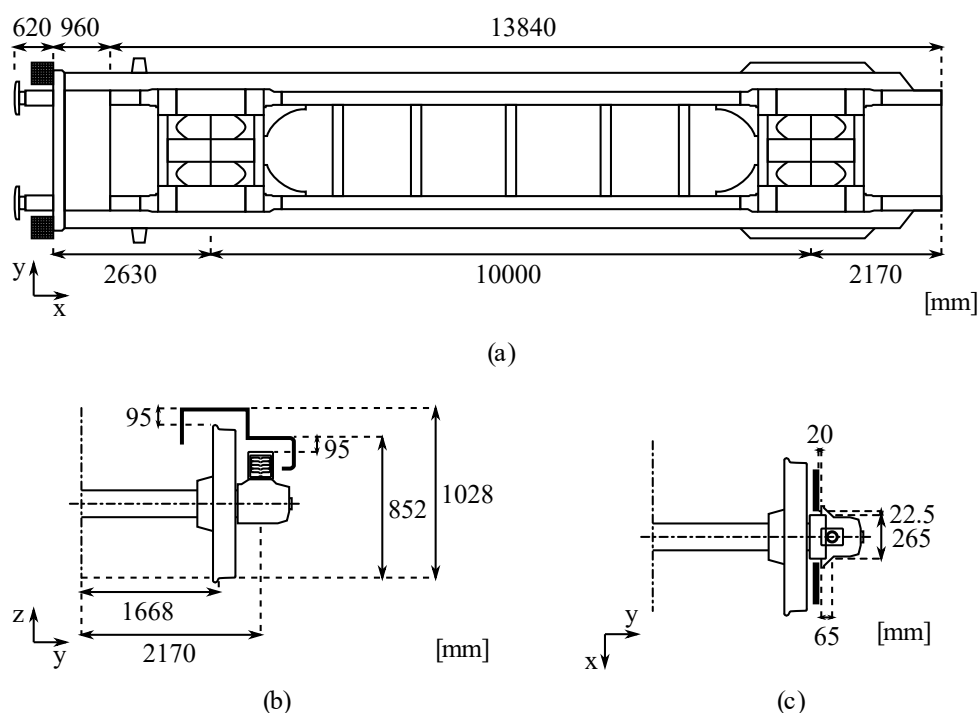
**Figura 5-1 – Vagão de carga Laagrss: (a) visão geral do vagão; (b) rota de viagem típica**



Fonte: Adaptado de (BRAGANÇA et al., 2021).

Cada vagão possui dois eixos com apenas um nível de suspensão composta por um feixe de molas parabólico com rigidez variável. Em relação às suas dimensões, com quase 14 m de comprimento de carga e 10 m de distância entre eixos, pode transportar um único contêiner de 45 pés ou dois menores com 20 pés cada. A Figura 5-2 apresenta as características geométricas e respectivos desenhos técnicos do vagão.

**Figura 5-2 – Características geométricas do vagão Laagrss: (a) vista superior da plataforma; (b) vista frontal do rodeiro; (c) vista superior do rodeiro**

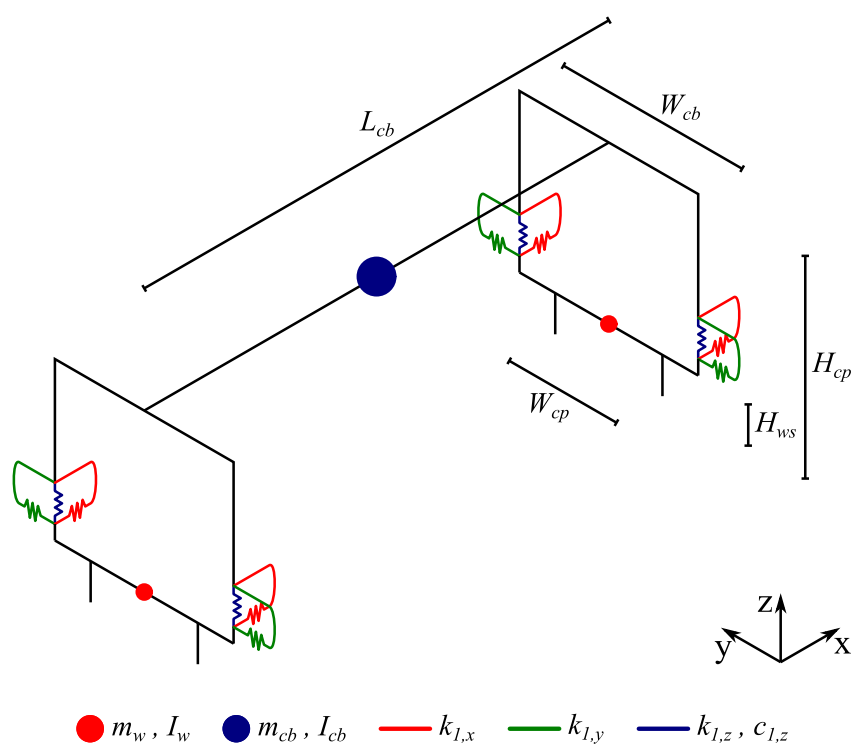


Fonte: Adaptada de (NETO; CALÇADA, 2017).

## 5.2 Modelo numérico

O modelo numérico do veículo foi elaborado com base na dinâmica de corpos rígidos no software comercial ANSYS® (2018). Elementos de viga (BEAM4) são usados para modelar os corpos rígidos que representam a carroceria e os rodeiros, enquanto que elementos de massa (MASS21) concentrada definem todas as suas propriedades inerciais. A flexibilidade do veículo, proporcionada pelas suspensões, é modelada através de conjuntos mola-amortecedor (COMBIN14) que conectam a carroceria aos rodeiros. A Figura 5-3 mostra uma visão geral do modelo numérico do vagão de Laagrss.

**Figura 5-3 – Modelo numérico do vagão *Laagrss***



Fonte: (BRAGANÇA et al., 2021).

A Tabela 5-1 detalha as principais propriedades geométricas e mecânicas do modelo numérico do vagão, bem como os respectivos limites adotados posteriormente no processo de calibração (Seção 5.4).

**Tabela 5-1 – Propriedades mecânicas e geométricas do modelo numérico do vagão Laagrss**

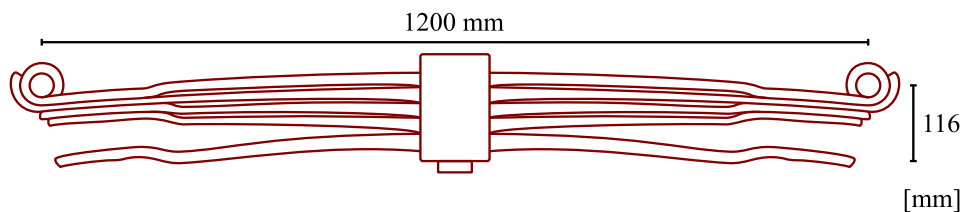
Parâmetro	Símbolo (Unidade)	Limites (inferior/superior)	Valor inicial
<b>Carroceria</b>			
Massa	$m_{cb}$ (ton)	33,2/49,8	41,1
Momento de inércia de rolagem	$I_{cb,x}$ (t.m <sup>2</sup> )	39,2/58,8	49
Momento de inércia de arfagem	$I_{cb,y}$ (t.m <sup>2</sup> )	337/674	673
Momento de inércia de guinada	$I_{cb,z}$ (t.m <sup>2</sup> )	532/798	665
Comprimento	$L_{cb}$ (m)	-/-	10,000
Largura	$W_{cb}$ (m)	-/-	2,170
Altura acima do solo	$H_{cb}$ (m)	-/-	2,297
<b>Rodeiro</b>			
Massa	$m_w$ (kg)	1.250/2.875	1.247
Momento de inércia de rolagem	$I_{w,x}$ (kg.m <sup>2</sup> )	-/-	312
Momento de inércia de guinada	$I_{w,z}$ (kg.m <sup>2</sup> )	-/-	312
Bitola	$W_{cp}$ (m)	-/-	1,668
Altura acima do solo	$H_{ws}$ (m)	-/-	0,450
<b>Suspensões</b>			
Rigidez longitudinal	$k_{1,x}$ (kN/m)	22.500/67.500	44.981
Rigidez lateral	$k_{1,y}$ (kN/m)	15.450/46.350	30.948
Rigidez vertical	$k_{1,z}$ (kN/m)	1.560/2.780	1.860
Amortecimento vertical	$c_{1,z}$ (kN.s/m)	-/-	16,7

Fonte: Adaptado de (BRAGANÇA et al., 2021).

Dada a grande dimensão do contêiner em relação à estrutura da plataforma do vagão, como uma primeira aproximação, foi assumido que as propriedades inerciais dependentes das dimensões, nomeadamente os momentos de inércia, provinham majoritariamente do container. Portanto, e sabendo de antemão que o contêiner estava totalmente carregado com rolos de papel durante a campanha de teste (Seção 5.3), as expressões inerciais de um paralelepípedo retangular foram usadas simplesmente para descrever estas propriedades. As dimensões adotadas são derivadas de um contêiner padrão de 45 pés com massa de 41,1 ton e dimensões de 13,72 m de comprimento, 2,44 m de largura e 2,89 m de altura.

Com relação as suspensões cada vagão conta com 4 feixes de mola parabólicos (dois por eixo) como os ilustrados na Figura 5-4.

**Figura 5-4 – Feixe de mola utilizado na suspensão do vagão Laagrss:  
(a) desenho técnico; (b) detalhe da montagem com a caixa de eixo**



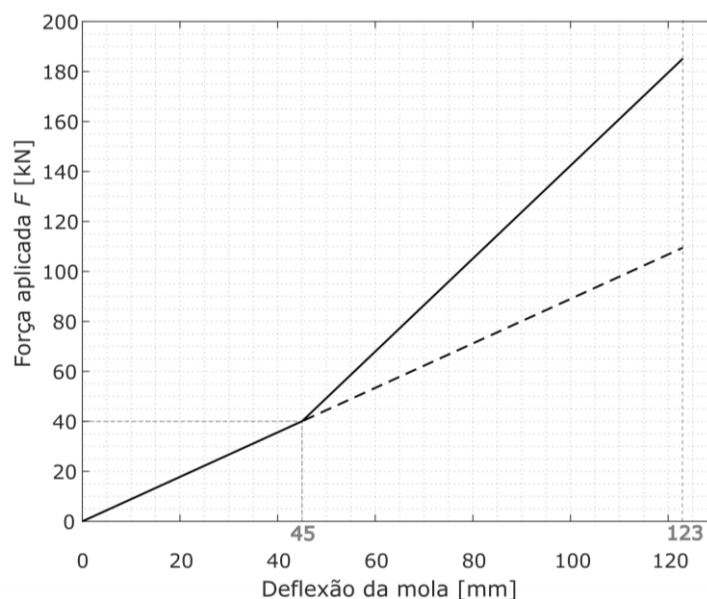
(a)



(b)

Fonte: (BRAGANÇA et al., 2021).

As propriedades geométricas e de rigidez destes feixes de mola são especificadas pelo código UIC517 (2007). Na Figura 5-5 a seguir é apresentada a resposta Força × Deslocamento estática normativa desta suspensão, por meio da qual pode-se derivar a sua rigidez. Com relação a esta curva vale ressaltar a visível transição de rigidez que a mola sofre após os 45 mm de deslocamento devido ao suporte da lâmina adicional, que passa a fazer contato com o feixe. No caso deste estudo, como o vagão estava plenamente carregado, a suspensão estava operando na faixa de rigidez mais elevada, portanto, foi adotado um valor de 1.860 kN/m (Tabela 5-1) para a rigidez inicial, o que corresponde a esta parcela da curva.

**Figura 5-5 – Resposta estática do feixe de molas**

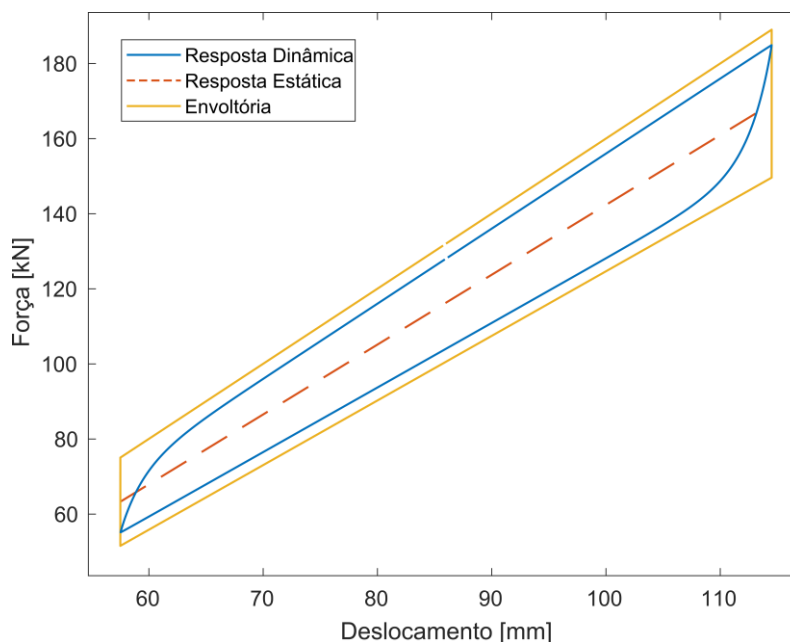
Fonte: Adaptada de UIC517 (2007).

Conforme apresentado no item 3.1.2 o amortecimento deste tipo de suspensão é proporcionado pelo atrito seco entre as lâminas do feixe quando todo o conjunto está em movimento, o que é responsável por um comportamento dinâmico complexo e não linear. Além disso, este comportamento é fortemente dependente do estado de conservação da mola, lubrificação, amplitude de deslocamento e carga do vagão, tornando ainda mais difícil estimá-lo com precisão.

Com base na teoria desenvolvida por Hoffmann (2006), apresentada no item 3.1.2 deste trabalho, o ciclo histerético da mola foi simulado e é apresentado na Figura 5-6. Nesta simulação os coeficientes  $\beta$ ,  $\mu_0$  e  $F_r$ , das Equações (3-2) e (3-3), foram adotados, respectivamente, como 2,0 mm, 0,075 e 7 kN conforme recomendado por (HOFFMANN, 2006 Apêndice B). Além disso, foi assumida uma posição de repouso da mola de 86 mm e uma amplitude de deslocamento de 28,5 mm valores estes calculados com base na massa calibrada da carroceria (Seção 5.4) e nos resultados de deslocamento relativo entre caixa de eixo e carroceria (Seção 5.5).



**Figura 5-6 – Ciclo histerético da mola para uma posição de equilíbrio de 86 mm e amplitude de 28,5 mm**



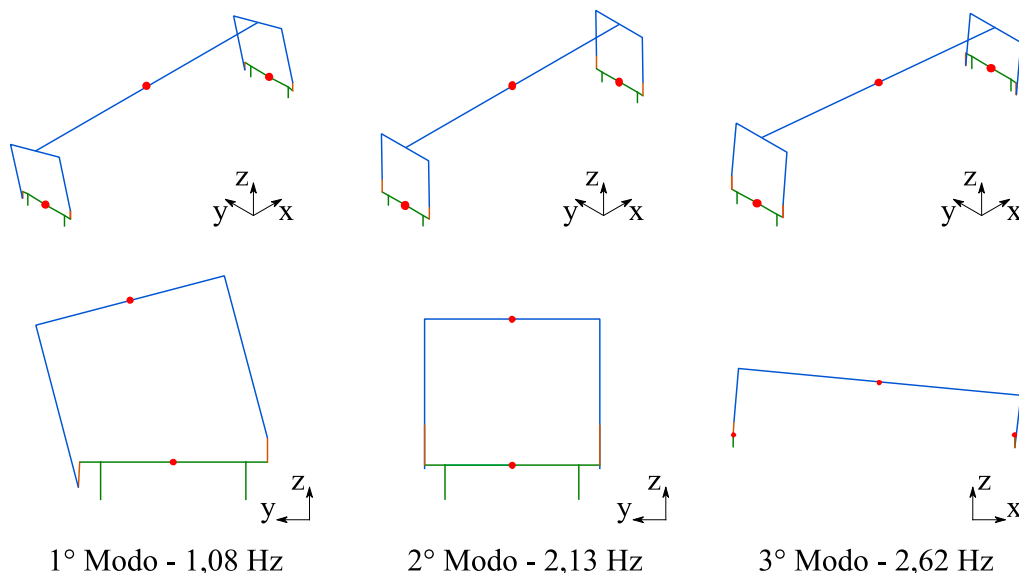
**Fonte: Elaborada pelo autor.**

O conhecimento da curva de histerese, conforme demonstrado na Seção 2.3.1, permite a obtenção de um coeficiente de amortecimento viscoso equivalente ( $c_{1,z}$ ) pela aplicação da Equação (2-41). A energia dissipada em um loop histerético ( $\mathcal{W}_d$ ) é calculada com base em sua área, e as demais variáveis  $\Omega$  e  $U$  são, respectivamente a frequência angular e a amplitude do movimento. Embora simplificado, este coeficiente pode ser usado para modelar o sistema como um amortecedor linear equivalente em condições normais de operação.

Para usar a Equação (2-41) é necessário estimar a área do laço de histerese, a amplitude do movimento e a frequência de excitação principal. Todos esses parâmetros podem variar significativamente dependendo da velocidade do vagão, peso, estado de manutenção, irregularidades da via e muitos outros fatores. Portanto, em condições normais de operação (ver Seção 5.5), foi obtido um coeficiente de amortecimento igual a 35,73 kN.s/m. Este valor assume uma amplitude  $U$  de 28,5 mm (mesma usada na simulação do ciclo histerético) e a frequência de vibração da forma do modo mais mobilizado, que foi assumido como sendo o segundo modo de vibração, igual a 2,22 Hz. A adoção desta constante de amortecimento viscoso equivalente resulta em um coeficiente de amortecimento de 11,0 % para este modo. A justificativa dos valores adotados ficará clara nas Seções 5.3 e 5.5.

Na Figura 5-7 são apresentadas as três principais configurações modais do vagão de carga associadas aos movimentos de corpo rígido da carroceria, bem como as frequências naturais correspondentes, derivadas de uma análise modal numérica.

**Figura 5-7 – Principais modos numéricos iniciais de vibração do vagão Laagrss: (a) *rolling*; (b) *bouncing*; (c) *pitching***



Fonte: Adaptada de (BRAGANÇA et al., 2021).

O primeiro modo corresponde a um movimento de rotação da carroceria ao entorno do eixo  $x$ , acoplado a uma translação ao longo do eixo  $y$ . O segundo trata-se de um movimento de translação vertical pura. Por fim, o terceiro modo é um movimento de rotação pura entorno do eixo  $y$ . Além disso, é possível observar que todos estes modos estão a mobilizar puramente a rigidez vertical das suspensões.

Por fim, como se trata de um modelo baseado na dinâmica de corpos rígidos, como era de se esperar, nenhum destes modos contempla deformações nem da carroceria nem dos rodeiros.

### 5.3 Testes dinâmicos em condições operacionais

Nesta seção é apresentada uma descrição detalhada da campanha experimental realizada no vagão em condições reais de operação com sensores embarcados, realizada no âmbito do projeto Relatório N° PROC. INV 20140702 (NETO; CALÇADA, 2017). A campanha foi executada durante uma viagem regular do vagão de carga do Entroncamento a Vilar Formoso (Ver Figura 5-1b) e vice-versa, correspondendo a mais de 600 km de via férrea e abrangendo toda a linha da Beira Alta. Os dados obtidos nesta campanha são

usados para calibrar o modelo numérico, conforme será descrito posteriormente na Seção 5.4 bem como para a validação de sua resposta dinâmica como será descrito mais à frente na Seção 5.5.

### **5.3.1 Descrição**

O equipamento de bordo foi reduzido ao mínimo e considera as restrições de posicionamento dos sensores para evitar eventuais interferências na operação ferroviária. O layout dos sensores permite a medição das acelerações na carroceria e na caixa de eixo, bem como deslocamentos relativos entre a caixa de eixo e a carroceria. Uma avaliação criteriosa das características do ambiente externo e da magnitude esperada dos sinais levou à seleção dos sensores adequados. De acordo com a literatura, a caixa de eixo normalmente sofre acelerações com amplitude que pode ultrapassar os 100 g, principalmente em vias dedicadas ao transporte de carga como a Linha da Beira Alta. Portanto, os acelerômetros escolhidos devem ser capazes de resistir ao ambiente hostil, para evitar a perda de informações ou o mau funcionamento do sensor. Com relação às excitações da carroceria, eram esperadas amplitudes acima de 10 g devido à rigidez do contêiner, bem como à falta de elementos de suspensão secundários.

Optando por uma estratégia para garantir que todas as preocupações acima sejam atendidas, foi adotado um arranjo de cinco LVDTs e dez acelerômetros de alta precisão, abrangendo todas as direções de medição tanto da carroceria quanto da caixa de eixo. A Tabela 5-2 resume as principais características dos sensores instalados incluindo a descrição, tipo de sensor, faixa de medição, sensibilidade, direções de medição e o componente do veículo onde estão montados.

**Tabela 5-2 – Principais características dos sensores embarcados no vagão**

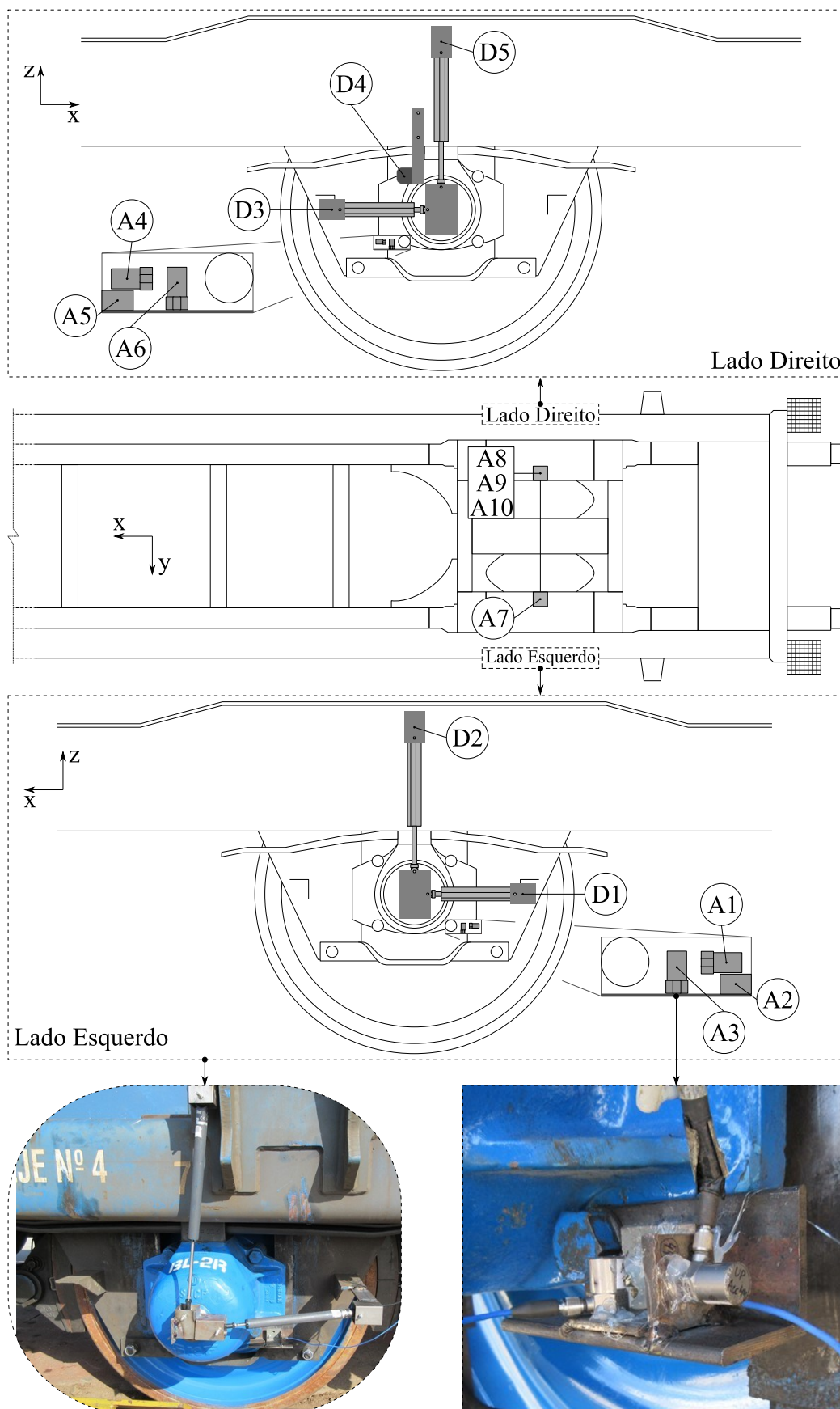
Marca Modelo	Tipo de sensor	Gama de amplitude	Sensibilidade	Componente	Lado	Orientação	ID*
PCB 353B03	Acelerômetro piezoelétrico	± 500 g	10 mV/g (± 5%)	caixa de eixo	Esq.	Long. (x)	A1
						Vert. (z)	A3
					Dir.	Long. (x)	A4
						Vert. (z)	A6
PCB 603C01	Acelerômetro piezoelétrico	± 50 g	100 mV/g (± 10%)	carroceria	Dir.	Long. (x)	A8
						Trans. (y)	A9
						Vert. (z)	A10
PCB 3741B12200 G	Acelerômetro MEMS DC	± 200 g	10 mV/g (± 5%)	caixa de eixo	Esq.	Trans. (y)	A2
					Dir.	Trans. (y)	A5
PCB 3713B11200 G	Acelerômetro MEMS DC	± 200 g	10 mV/g (± 10%)	carroceria	Esq.	Long. (x)	A7
						Trans. (y)	
						Vert. (z)	
Penny & Giles SLS190	Sensores lineares de deslocamento variável	125 mm	20 V/m	carroceria - caixa do eixo	Esq.	Long. (x)	D1
						Vert. (z)	D2
					Dir.	Long. (x)	D3
						Vert. (z)	D5
WayCon SX50	Sensor de deslocamento de fio	500 mm	80 V/m	carroceria - caixa de eixo	Dir.	Trans. (y)	D4

\* Identificação adotada na Figura 5-8

Fonte: Adaptada de (BRAGANÇA et al., 2021).

Na Figura 5-8 é representada a disposição dos sensores instalados no vagão identificados segundo os ID's da última coluna da Tabela 5-2. À exceção do acelerômetro A7, que já era tridimensional, a montagem dos demais exigiu a construção de um suporte feito com cantoneiras de aço como o apresentado no detalhe no canto inferior direito da Figura 5-8. Este suporte desempenha a mesma função que os adaptadores de montagem ilustrados na Figura 3-31, permitindo a aquisição do sinal em três direções com o uso de três acelerômetros uniaxiais. Para que estes pudessem cumprir a sua função de maneira adequada foram usadas cantoneiras bastante espessas, de modo que os suportes podem ser considerados corpos rígidos.

**Figura 5-8 – Representação esquemática da montagem experimental**



Fonte: Adaptada de (BRAGANÇA et al., 2021).

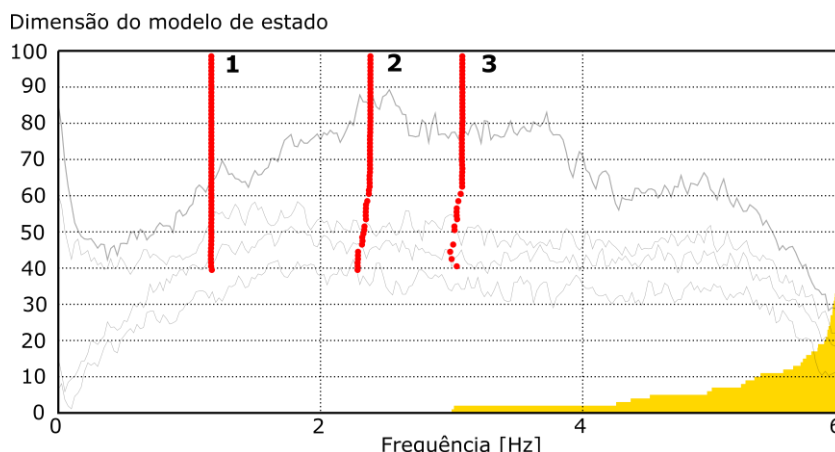
O sistema de aquisição de dados consiste em um controlador cRIO-9024 conectado a um chassi NI 9116 FPGA, utilizando módulos NI 9234 para os acelerômetros IEPE (*Integrated Electronics Piezo-Electric*) e MEMS DC e módulos NI 9239 para os sinais analógicos dos transdutores de deslocamento. Um sistema de três baterias elétricas foi usado para o fornecimento permanente de energia, evitando assim possíveis interferências oriundas da corrente alternada da rede elétrica. A frequência de amostragem foi de 2048 Hz. Os sinais de resposta foram divididos em três blocos de cinco minutos cada, para limitar o tamanho dos arquivos, totalizando então 15 minutos de aquisição.

### **5.3.2 Identificação modal**

Antes de se proceder para a identificação modal propriamente dita os registros experimentais coletados durante os testes dinâmicos foram criteriosamente analisados em busca de possíveis anomalias como saturação, pontos singulares e tendências espúrias (ver Seção 3.3.4). Feito isso os sinais tiveram suas tendências removidas e foram decimados por um fator de 8, reduzindo então sua frequência de amostragem para 256 Hz. Durante a decimação foi tomado o cuidado de se utilizar um filtro passa baixa do tipo Chebyshev I de oitava ordem com frequência de corte de 102,4 Hz (80% da frequência de Nyquist). Desta forma é possível garantir que não houve *aliasing* do sinal. A decimação, além de tornar as amostras mais compactas, segundo Peeters e Roeck (1999) aumenta a acurácia da identificação modal, obviamente, desde que preservado o intervalo de frequências de interesse.

Para a identificação modal foram consideradas para aplicação as técnicas Enhanced Frequency Domain Decomposition (EFDD) e Stochastic Subspace Identification, na variante Unweighted Principal Components (SSI-UPC), apresentadas nas Seções 4.2.1 e 4.2.2 respectivamente, ambas implementadas no software comercial ARTeMIS® (2009). Entretanto, devido à sua maior robustez para identificação modal em sistemas com altos níveis de amortecimento e excitação não ideal, optou-se por utilizar a metodologia SSI-UPC. A Figura 5-9 mostra os diagramas de estabilização que foram estimados com base em modelos de estado de ordem entre 1 e 100. Os alinhamentos destacados na figura correspondem aos três modos de vibração de corpo rígido da carroceria, que foram identificados neste teste com base em informações experimentais limitadas. Dada a informação experimental muito limitada não foi possível a identificação de nenhum modo flexível do veículo.

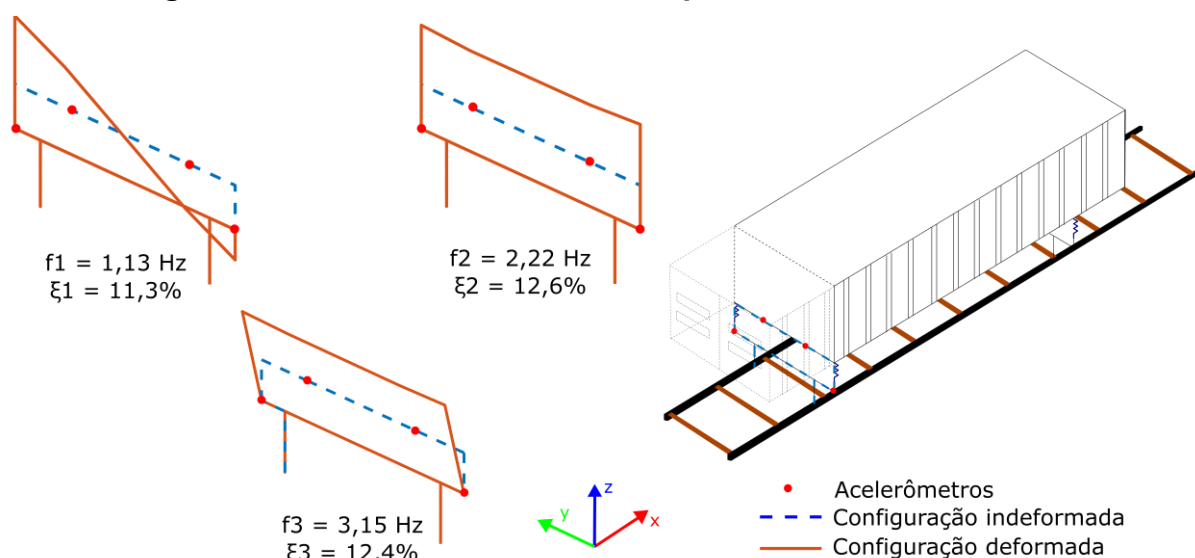
**Figura 5-9 – Identificação dos parâmetros modais através do método SSI-UPC**



Fonte: Adaptada de (BRAGANÇA et al., 2021).

Na Figura 5-10 são representadas de forma gráfica as formas de modais de corpo rígido identificadas, linha marrom, sobrepostas à configuração indeformada do veículo, linha azul tracejada. Também são apresentados os valores das frequências naturais e coeficientes de amortecimento para cada um dos modos. Os valores dos coeficientes de amortecimento encontrados, entre 11,3 % e 12,6 %, são valores típicos para estes vagões em que a presença de feixes de molas acarreta em um alto amortecimento associado a cada um destes modos (SHI et al., 2016). Além disso, vale ressaltar que o coeficiente de amortecimento (12,6 %) obtido experimentalmente para o segundo modo, que foi assumido como o mais mobilizado, é bastante próximo dos 11,0 % calculados na Seção 5.2 com base no ciclo histerético, reforçando a coerência da metodologia adotada.

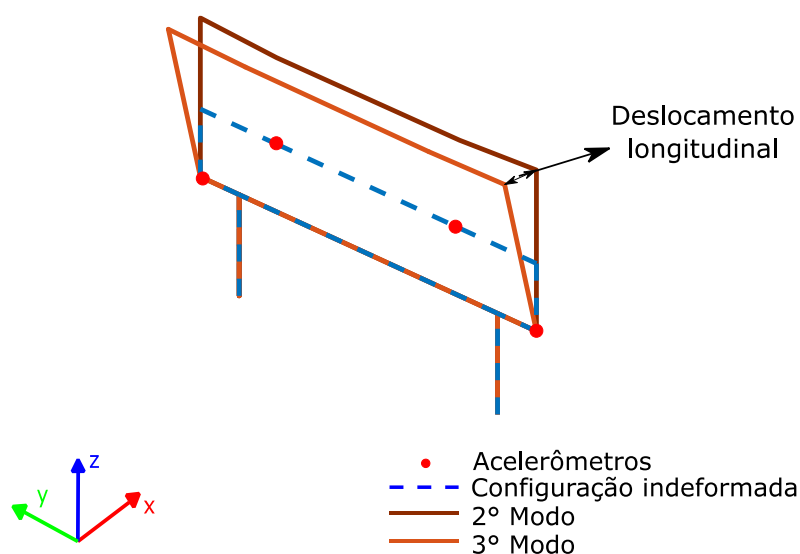
**Figura 5-10 – Parâmetros modais experimentais da carroceria**



Fonte: Adaptada de (BRAGANÇA et al., 2021).

O primeiro modo envolve o movimento de rolamento (*rolling*) da carroceria, uma vez que o lado esquerdo e o direito estão se movendo verticalmente e fora de fase, juntamente com um movimento de translação lateral, similar ao que foi obtido com o modelo numérico. O segundo e terceiro modos apresentam movimento vertical em fase, mas o terceiro é combinado com algum movimento longitudinal dos acelerômetros presos à carroceria, enquanto que no segundo há somente movimento vertical. Graças a este movimento longitudinal e a presença de acelerômetros nesta direção é possível distinguir o terceiro modo do segundo (Figura 5-11). Assim, o terceiro modo está associado a um movimento de arfagem (*pitch*), pois quando a carroceria gira ao longo do eixo transversal (*y*) ocorrem movimentos conjuntos tanto na vertical quanto na longitudinal. O segundo modo está associado ao movimento de translação puramente vertical da carroceria (*bouncing*). Em todos os modos identificados os movimentos na caixa de eixo são desprezíveis.

**Figura 5-11 – Detalhe da segunda e terceira configurações modais**



Fonte: Elaborada pelo autor.

## 5.4 Calibração

Nesta seção serão tratados os detalhes da aplicação da metodologia de calibração iterativa baseada em algoritmos genéticos, apresentada no item 4.3, ao modelo numérico do vagão Laagrss com base nos parâmetros modais identificados na Seção 5.3.2. A calibração envolveu duas etapas, análise de sensibilidade e otimização. Para cada uma destas etapas serão fornecidos detalhes acerca da metodologia adotada para implementação computacional dos métodos, bem como serão apresentados resultados e discussões.



### 5.4.1 Análise de sensibilidade

Para entender melhor quais parâmetros numéricos exercem efeitos significativos nas respostas modais que estão sendo avaliadas foi realizada uma análise de sensibilidade global, segundo a metodologia apresentada na Seção 4.3.1. Apenas os parâmetros com uma correlação significativa com as respostas podem ser estimados corretamente durante o processo de otimização.

Nesta análise foram estudadas a influência da massa e das inércias da carroceria, da massa dos rodeiros e da rigidez das suspensões nas três direções. Optou-se por não incluir nenhum parâmetro relacionado às dimensões do vagão, uma vez que essas informações puderam ser obtidas de forma precisa de dados técnicos do veículo. Com relação ao amortecimento das suspensões optou-se também por não incluir este parâmetro, visto que sua determinação na campanha experimental estava associada a altos níveis de incerteza devido a informação experimental altamente limitada utilizada.

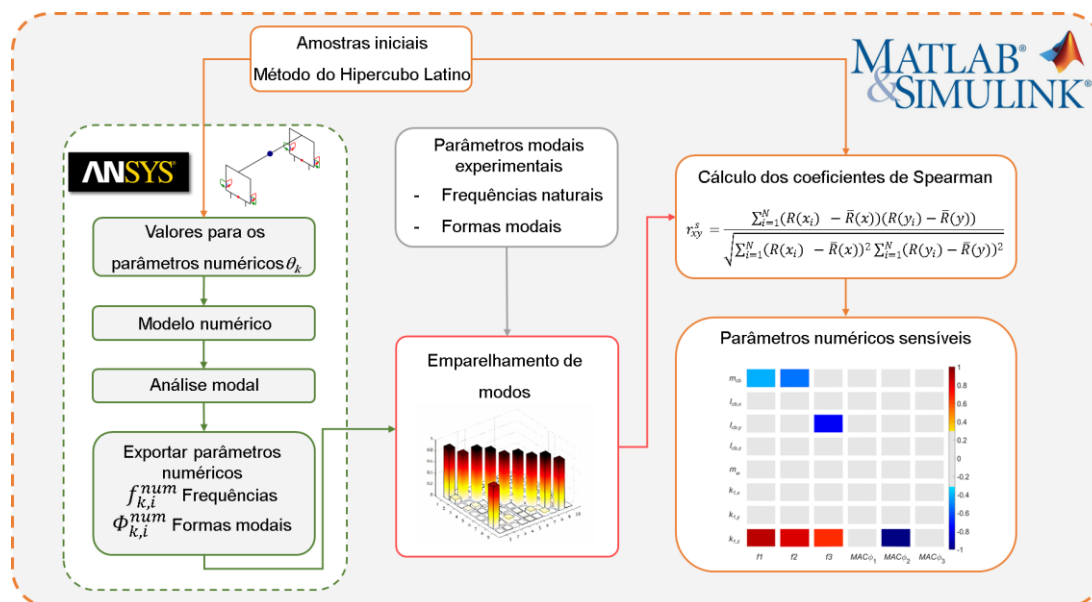
Os intervalos de variação considerados para cada um dos parâmetros numéricos durante a análise de sensibilidade estão discriminados na Tabela 5-1. No presente trabalho optou-se por adotar intervalos bastante alargados especialmente para as inércias e rigidez lateral das suspensões devido ao alto nível de incerteza associado a estes parâmetros.

A Figura 5-12 ilustra a estratégia de implementação computacional adotada para a realização de uma análise de sensibilidade global. Primeiramente, no MATLAB® (2020) é gerado um conjunto de amostras pelo método do Hipercubo Latino, já implementado na função “*lhsdesign*”, dentro dos limites estabelecidos para cada variável. Feito isso cada uma destas amostras é passada ao software ANSYS® (2018) por meio de arquivos de texto. No ANSYS® (2018), para cada amostra, é gerado um modelo numérico e é resolvido o problema de alto valores e alto vetores, exportando frequências naturais e formas modais correspondentes em arquivos de texto.

O MATLAB® (2020) faz a leitura destes arquivos e, posteriormente, o emparelhamento de modos com base no critério do MAC, descrito na Seção 4.3.2. O emparelhamento de modos durante a análise de sensibilidade é fundamental por dois motivos: i) para que se compute o MAC entre o modo numérico e seu correspondente experimental correto ii) para associar corretamente cada frequência numérica ao seu

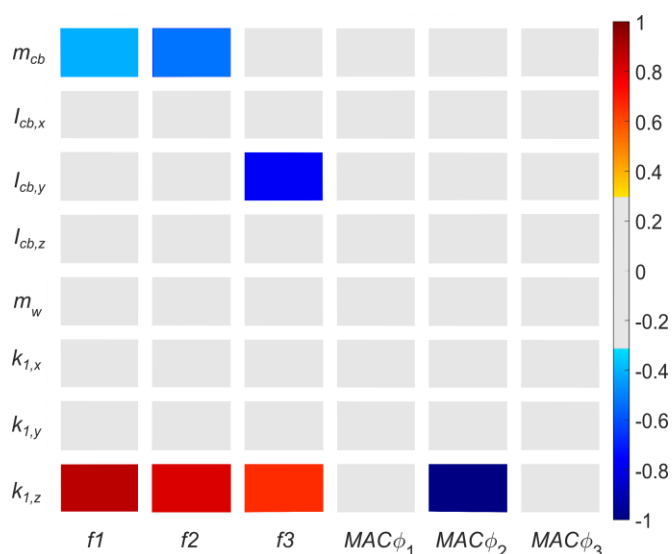
modo correspondente tomando como base a ordem dos modos experimentais. Feito isso, são calculados os coeficientes de correlação de Spearman (Equação (4-29)), por meio dos quais finalmente são identificados os parâmetros numéricos sensíveis.

**Figura 5-12 – Fluxograma de implementação da análise de sensibilidade**



Na Figura 5-13 é apresentada uma representação gráfica dos valores dos coeficientes de correlação de Spearman para um conjunto de 800 amostras que foram geradas usando o método do Hipercubo Latino. Os resultados entre  $[-0,30, 0,30]$  foram excluídos da representação para enfatizar somente aqueles parâmetros com correlação significativa.

**Figura 5-13 – Matriz de correlação de Spearman**



A matriz de correlação mostra que três ( $m_{cb}$ ,  $I_{cb,y}$  e  $k_{1,z}$ ) dos oito parâmetros numéricos avaliados têm relação significativa com as respostas modais. Todas as frequências de vibração são fortemente influenciadas pela rigidez vertical da suspensão, uma vez que o movimento dos três modos mobiliza significativamente seu movimento vertical. As duas primeiras frequências também estão correlacionadas com a massa da carroceria ( $m_{cb}$ ). No caso da primeira frequência, a influência da massa da carroceria é mais pronunciada em comparação com o momento de inércia em x ( $I_{cb,x}$ ). Esta situação é justificada pela existência de movimentos de translação lateral do centro de massa da carroceria acoplados, que são naturalmente mais influenciados pela variação de massa. Por sua vez, o movimento de rolamento (“*rolling*”) não é influenciado pela massa da carroceria, pois a massa se concentra exatamente no eixo de rotação, entretanto intervalo de variação do momento de inércia em x ( $I_{cb,x}$ ) parece ser insuficiente para causar variações nos valores de frequência. Por outro lado, o terceiro modo é puramente rotacional ao longo do eixo transversal y, centrado no centro de gravidade da carroceria, e, como esperado, o elemento de inércia que mais influencia a frequência de vibração deste modo é o momento de inércia transversal da carroceria ( $I_{cb,y}$ ).

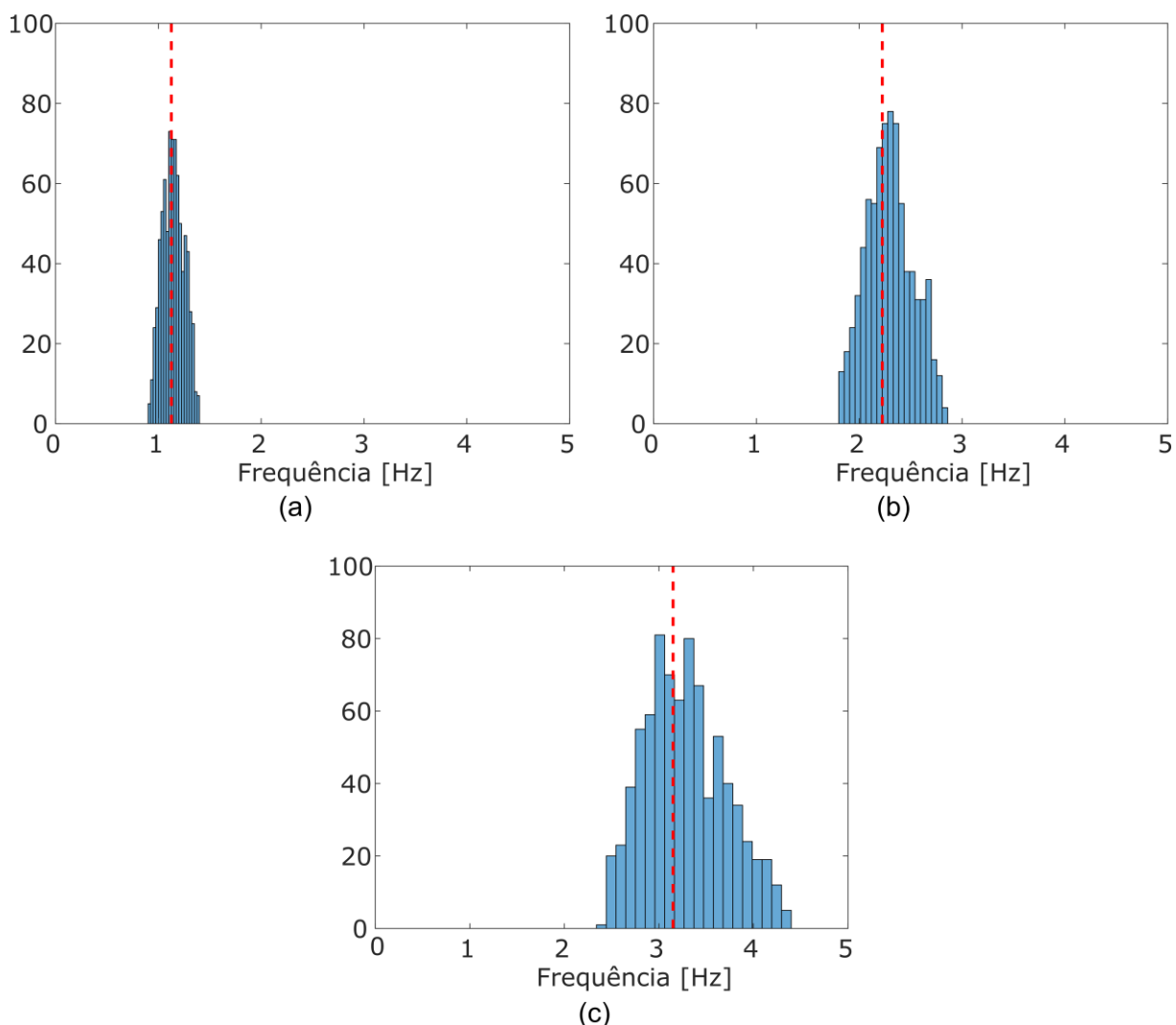
Com relação aos MACs verifica-se que nenhum parâmetro numérico é significativamente correlacionado com os mesmos, exceto a rigidez vertical da suspensão que tem uma correlação negativa alta com o MAC associado ao segundo modo. Embora seja correlacionado, as variações do MAC deste modo são de magnitude pouco expressiva, o que será demonstrado mais a diante na interpretação do histograma da Figura 5-15. Este fato ocorre com o segundo modo, pois mesmo que a influência da rigidez seja muito pequena ela é o único parâmetro que influencia neste MAC, criando assim uma correlação.

Na Figura 5-14 são apresentados os histogramas de frequência natural dos três modos, nos quais a linha vermelha tracejada indica a posição da frequência natural experimental associada àquele modo. Pela análise da figura constata-se que os histogramas assumem uma forma que se assemelha a uma distribuição normal. Além disso, constata-se que as respostas associadas ao conjunto de amostras geradas estão aproximadamente centradas nas frequências naturais experimentais e com nenhum valor muito distante das mesmas. Todos estes aspectos são positivos e

indicam que provavelmente o modelo poderá ser calibrado dentro desta janela de variação escolhida para os parâmetros.

Um último aspecto que vale a pena ressaltar com relação a estes histogramas é o fato de haver uma sobreposição entre as frequências naturais do segundo e terceiro modo no intervalo entre 2 e 3 Hz. Esta sobreposição indica que esses modos poderão ter suas posições trocadas durante a otimização para estes intervalos de parâmetros, reforçando a necessidade de se ter um critério de pareamento de modos estável.

**Figura 5-14 – Histograma de frequências: (a) Primeiro modo, (b) segundo modo e (c) terceiro modo**

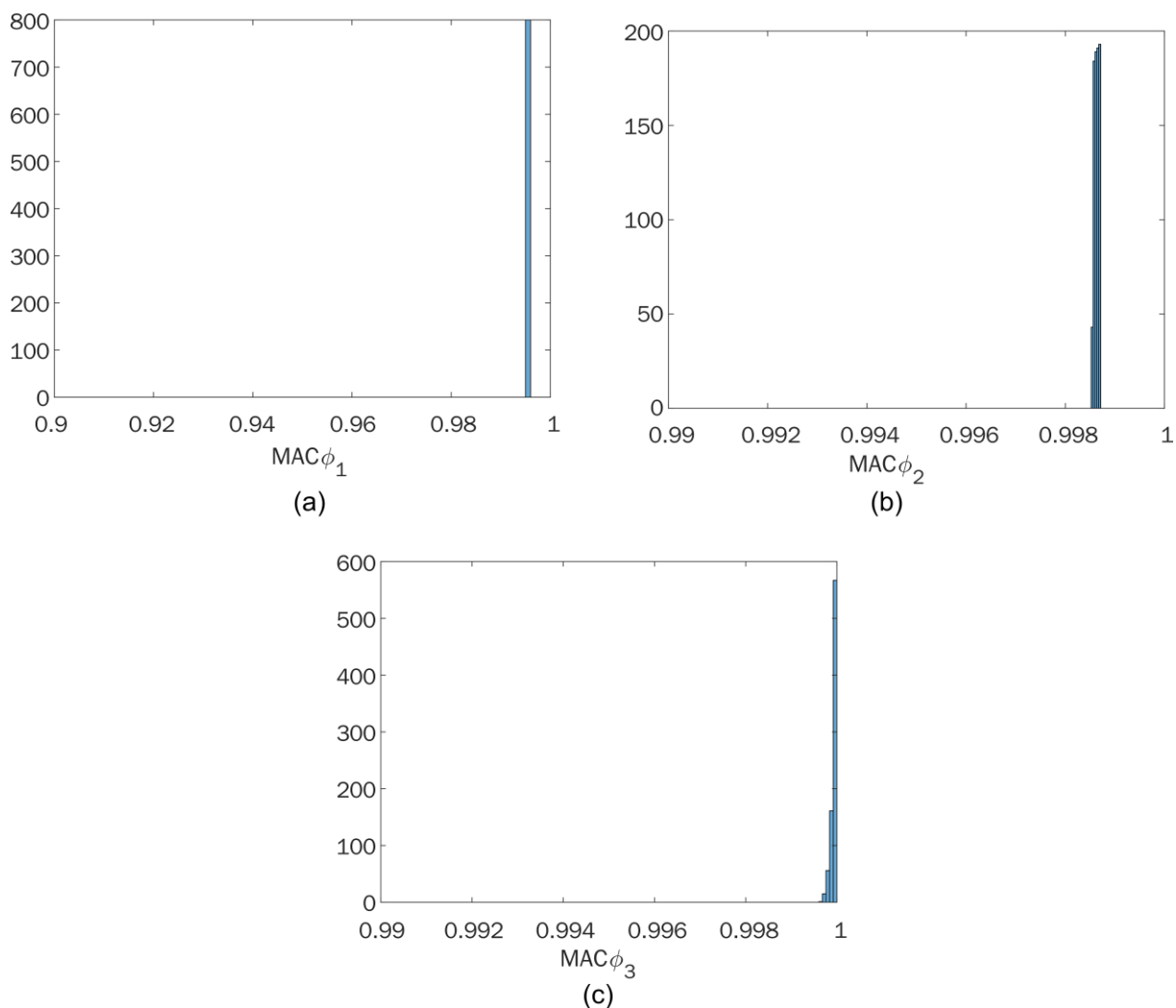


**Fonte: Elaborada pelo autor.**

Na Figura 5-15 são apresentados os histogramas associados aos valores de MAC para os três modos analisados. Com base nestes histogramas constata-se o que a matriz de Spearman já de certa forma indicava. Todos os MACs praticamente não

variam com a mudança dos parâmetros numéricos. Isso se deve muito ao fato de ter sido adotado um *setup* experimental muito minimalista (poucos pontos) e também por este ser um modelo muito simples e a variação destes parâmetros numéricos não altera muito as formas de vibrar, principalmente por ter sido adotada a simplificação de que todas as suspensões possuem mesmo valor de rigidez.

**Figura 5-15 – Histograma de MACs: (a) Primeiro modo, (b) segundo modo e (c) terceiro modo**



**Fonte: Elaborada pelo autor.**

Por fim, desta análise conclui-se que a otimização deve ser feita considerando somente variações dos parâmetros sensíveis, nomeadamente a massa da carroceria ( $m_{cb}$ ) o momento de inércia da carroceria com relação ao eixo y ( $I_{cb,y}$ ) e a rigidez vertical das suspensões ( $k_{1,z}$ ).

### 5.4.2 Otimização

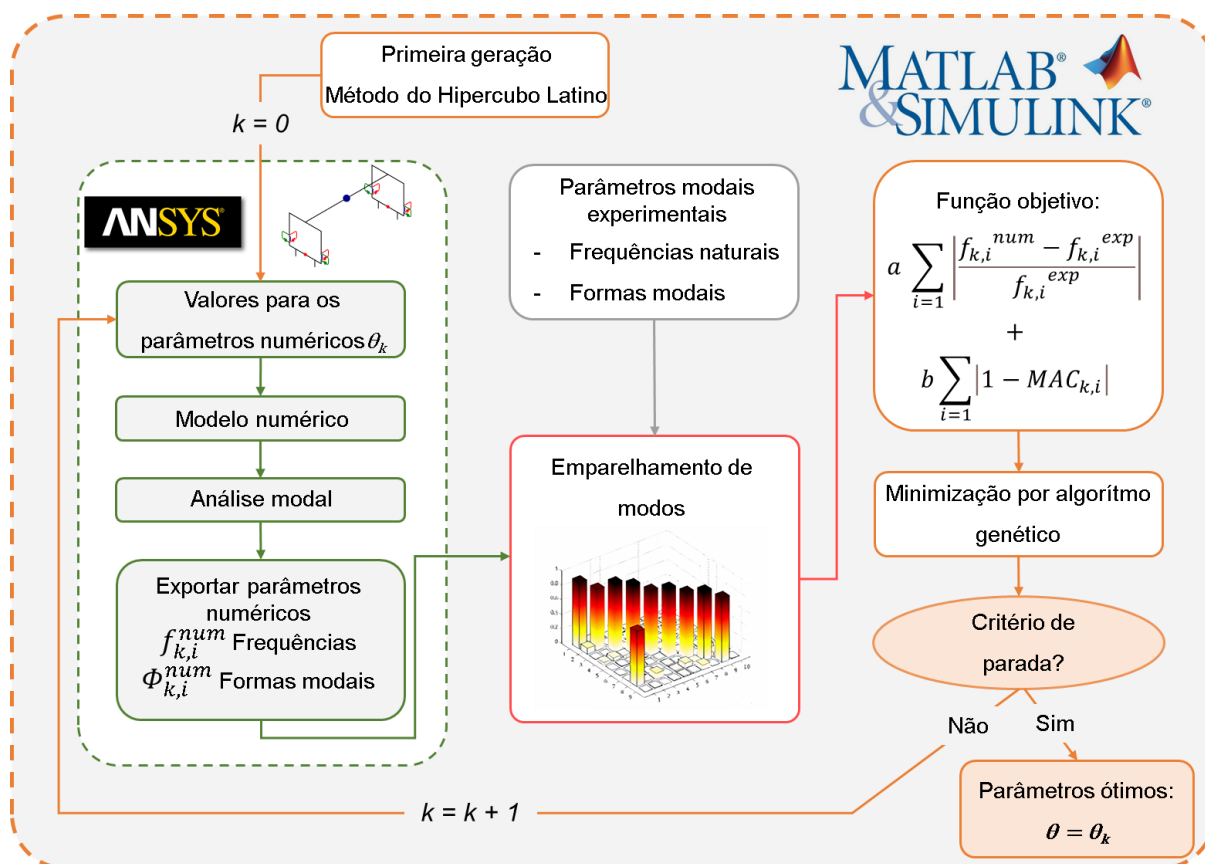
A implementação computacional do método iterativo de otimização baseado em um algoritmo genético, descrito na Seção 4.3.3, envolveu o uso de dois pacotes de software: ANSYS® (2018) e MATLAB® (2020). A Figura 5-16 mostra um fluxograma que ilustra a implementação computacional do método, indicando os softwares envolvidos nas diferentes fases.

No ambiente ANSYS® (2018) o modelo numérico FE é desenvolvido com base em um conjunto de valores de parâmetros iniciais  $\theta_1, \dots, \theta_k$ , onde  $k$  é o número de indivíduos em cada geração. O conjunto de valores de parâmetros da primeira geração é gerado aleatoriamente pelo método do Hipercubo Latino, respeitando os limites máximos e mínimos de cada parâmetro (ver Tabela 5-1). Durante estas operações o MATLAB® (2020) fica a cargo de gerar e exportar estes parâmetros numéricos, bem como controlar a execução do script APDL (ANSYS *Parametric Design Language*) responsável pela análise. Este script deve estar preparado para importar os parâmetros numéricos e, para cada indivíduo, resolver o problema de autovalores e autovetores e exportar, em arquivos de texto, frequências naturais e formas modais resultantes desta análise.

No software MATLAB® (2020), com base nas informações modais experimentais, o emparelhamento entre os modos numérico e experimental é feito com base no critério do MAC (ver Seção 4.3.2). Então, com base em uma função objetivo e na aplicação de uma técnica de otimização baseada em um algoritmo genético, um novo conjunto de parâmetros é estimado com foco na minimização dos resíduos da função objetivo. Este procedimento é repetido iterativamente até que o número máximo de gerações seja atingido.

A interação entre estes dois softwares é feita por meio do comando “system” do MATLAB® (2020). Esta função permite a execução de comandos do sistema operacional Windows® por meio dos quais o ANSYS® (2018) pode ser executado em *batch mode*. Por suprimir a interface gráfica do ANSYS® (2018), a execução em *batch mode* aumenta significativamente a velocidade de processamento das análises.

**Figura 5-16 – Fluxograma de implementação do método iterativo de calibração baseado em algoritmos genéticos**



Fonte: Adaptada de (BRAGANÇA et al., 2021).

A otimização do modelo do vagão de carga envolveu encontrar valores ótimos para os três parâmetros numéricos, identificados como sendo correlacionados com pelo menos uma das seis respostas modais utilizadas como base para a calibração. O objetivo do algoritmo foi minimizar a função objetivo ( $f_o$ ) que compreende dois resíduos, um relacionado às frequências naturais e outro relacionado às configurações modais, conforme apresentado na expressão a seguir

$$f_o = a \sum_{i=1}^3 \left| \frac{f_i^{exp} - f_i^{num}}{f_i^{exp}} \right| + b \sum_{i=1}^3 |1 - MAC(\phi_i^{exp}, \phi_i^{num})| \quad (5-1)$$

onde  $a$  e  $b$  são os pesos de cada resíduo (neste trabalho  $a$  e  $b$  foram considerados como iguais a 1,0),  $f_i^{exp}$  é a frequência natural do  $i$ -ésimo modo experimental,  $f_i^{num}$  é a frequência natural do  $i$ -ésimo modo numérico e  $MAC(\phi_i^{exp}, \phi_i^{num})$  é o valor MAC entre as  $i$ -ésimas configurações modais numéricas e experimentais.

A população inicial foi composta por 30 indivíduos gerados aleatoriamente pelo método do Hiper cubo Latino e seu tamanho foi mantido constante ao longo de 100

gerações. Como critério de parada foi adotado o término das 100 gerações o que faz com que sejam totalizados 3.000 indivíduos.

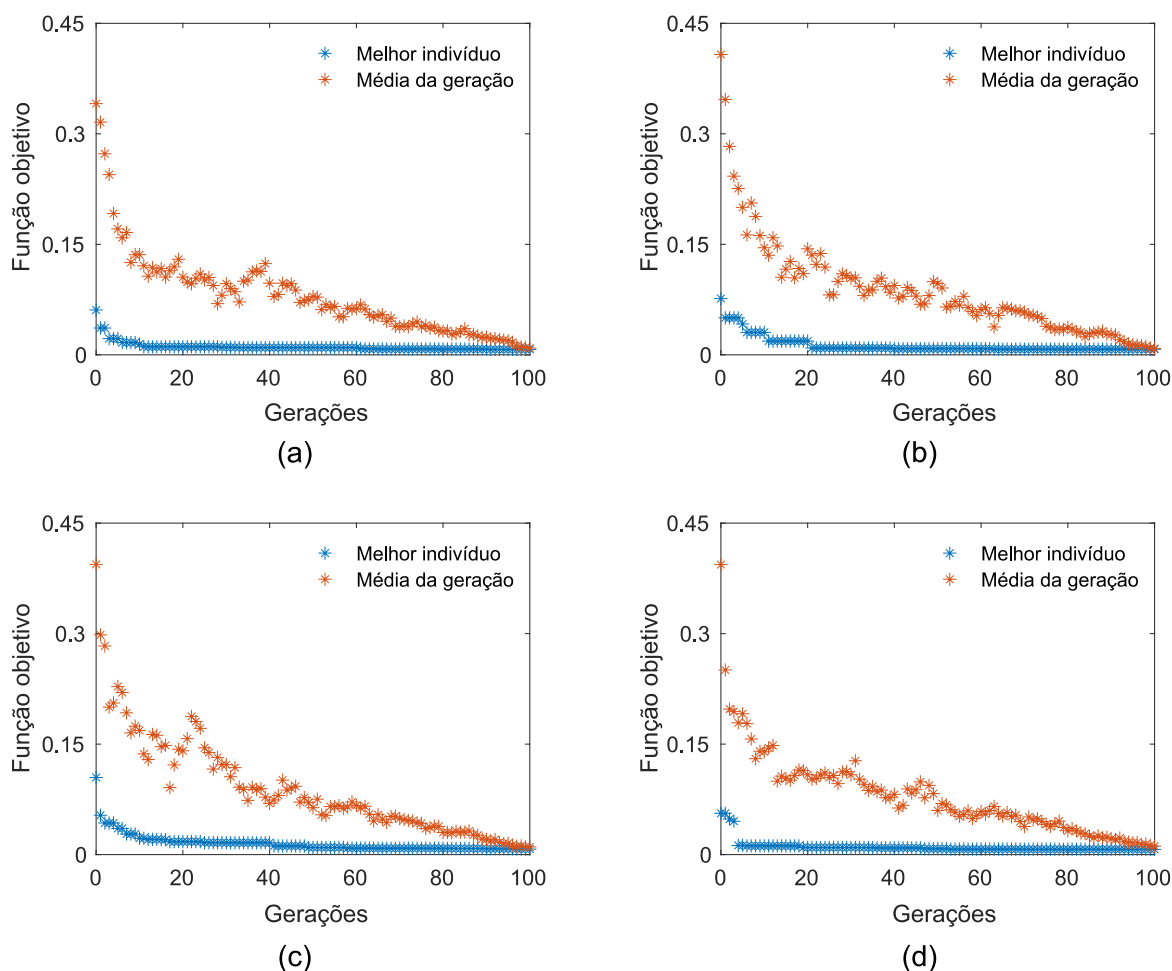
Para a otimização, preliminarmente, foram feitos testes com diversas configurações para os diferentes operadores de avaliação, seleção, cruzamento e mutação apresentados na Seção 4.3.3.2. Com base nestes testes e experiência de outros autores (LEITE, 2016; MALVEIRO et al., 2018a; RIBEIRO et al., 2013; TICONA MELO et al., 2020) optou-se por: Adotar um esquema de avaliação de indivíduos por ordenação ('*rank*') (ver item 4.3.3.2.2) e a seleção dos indivíduos foi feita segundo o método da amostragem universal estocástica (SUS) (ver item 4.3.3.2.3). Foi utilizada uma taxa de cruzamento de 50 % associada ao operador de cruzamento uniforme (ver item 4.3.3.2.4). A mutação foi aplicada por meio da técnica gaussiana apresentada em detalhes no item 4.3.3.2.5, associada a uma taxa de escala do desvio padrão ( $S_{scale}$ ) de 15 % e a taxa de encolhimento ( $S_{shrink}$ ) foi mantida com seu valor *default* unitário (ver Equação (4-42)), o que prevê uma redução da taxa de escala inversamente proporcional ao número de gerações. Por fim optou-se por uma taxa de substituição de 5 % e um número de elites igual a 1.

Devido à natureza estocástica dos algoritmos genéticos, oriunda da amostragem populacional inicial e dos operadores genéticos, foram realizadas quatro execuções de otimização independentes (GA1 a GA4). Cada execução gastou em média 40 minutos em um computador portátil com processador Intel® CORE i7 8<sup>th</sup> Gen. com 8,00 GB de memória RAM, totalizando duas horas e quarenta minutos de simulação.

Na Figura 5-17 é apresentada a evolução da função objetivo para cada uma das otimizações GA1 a GA4, avaliada com base no melhor e na média entre os indivíduos de uma mesma geração.



**Figura 5-17 – Evolução da função objetivo ao longo das gerações (melhor indivíduo e média da população): (a) GA1, (b) GA2, (c) GA3 e (d) GA4**

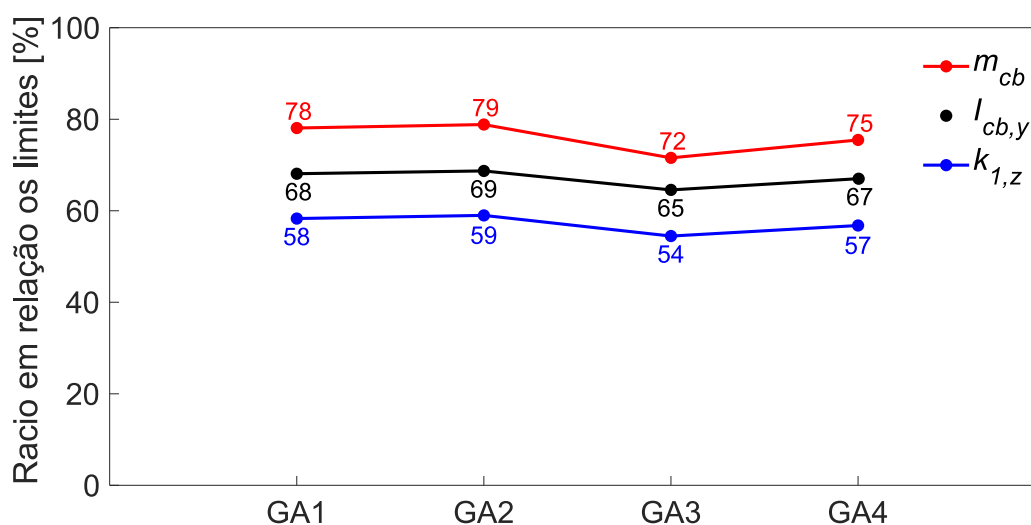


**Fonte: Elaborada pelo autor.**

Pela Figura pode-se ver claramente um comportamento típico dos algoritmos genéticos em que inicialmente a população é bastante dispersa, o que fica claro pela grande disparidade entre o melhor indivíduo e a média da população, no entanto, à medida que as gerações avançam a população como um todo vai se concentrando no entorno da solução ótima. Outro aspecto a ser ressaltado é que, devido à presença de diversos elementos estocásticos no algoritmo, nenhuma das evoluções é igual. Durante essas corridas de otimização, foram obtidos valores da função objetivo de 0,0075, 0,0077, 0,0076 e 0,0072 para as otimizações GA1 a GA4 respectivamente.

A Figura 5-18 apresenta as razões dos valores de cada parâmetro numérico em relação aos limites indicados na Tabela 5-1. Foram tomados como base os valores obtidos no caso de otimização GA4, uma vez que estão associados ao menor valor da função objetivo. Uma razão de 0 % significa que o parâmetro coincide com o limite inferior e uma razão de 100 % significa que este coincide com o limite superior.

**Figura 5-18 – Razão dos valores dos parâmetros numéricos em relação aos limites para as otimizações GA1 a GA4**



Fonte: Adaptada de (BRAGANÇA et al., 2021).

Com base nesses resultados, é possível verificar que todos os parâmetros numéricos permaneceram estáveis, apresentando uma variação máxima de 7 % entre as diferentes otimizações independentes. Também é possível concluir que os limites assumidos não foram um obstáculo ao algoritmo, pois nenhum dos parâmetros se aproximou destes limites. Os parâmetros numéricos derivados da otimização GA4 foram selecionados como ótimos, pois forneceram o menor valor da função objetivo. Na Tabela 5-3 são apresentados os valores dos parâmetros ótimos associados a cada otimização independente.

**Tabela 5-3 – Variáveis de projeto ótimas para cada execução de otimização**

Otimização	Massa da carroceria ( $m_{cb}$ ) [t]	Momento de inércia transversal ( $I_{cb,y}$ ) [t.m <sup>2</sup> ]	Rigidez vertical da suspensão ( $k_{1,z}$ ) [kN/m]
GA1	46,16	566,5	2.271,2
GA2	46,29	568,5	2.279,6
GA3	45,08	554,6	2.224,6
GA4	45,72	562,8	2.252,7

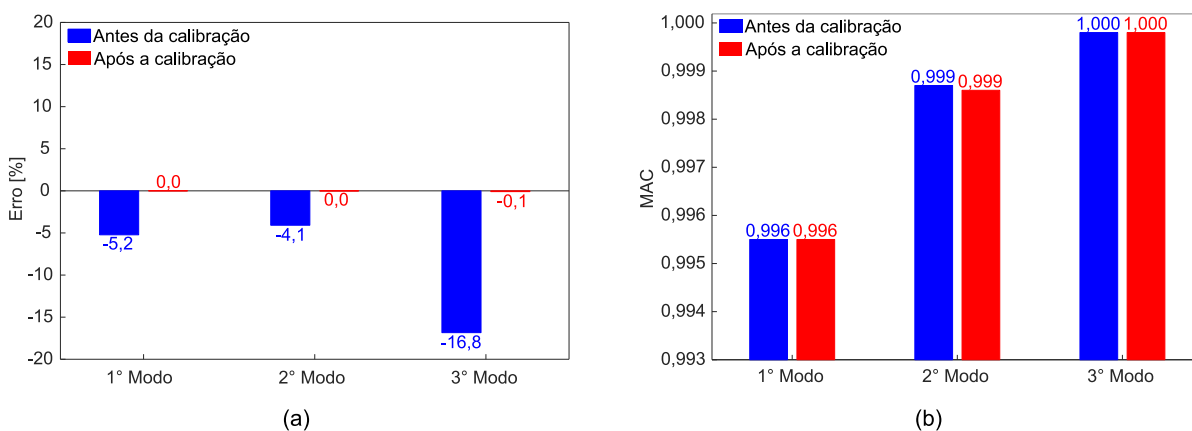
Fonte: Elaborada pelo autor.

Em todos os cenários de calibração apresentados na Tabela 5-3, foi necessário um aumento de massa e rigidez, bem como uma redução do momento de inércia na direção transversal para calibrar o modelo. O aumento de massa é justificado principalmente pelo tipo de carga, rolos de papel, transportada pelo vagão. O papel é um material higroscópico e, portanto, absorve água do ar podendo sofrer grandes

variações de massa dependendo das condições atmosféricas. Kiely (1927) apresenta um estudo da influência da umidade relativa sobre a porcentagem em massa de água no papel, mostrando que esta pode variar de 1,8 % a 21,5 %. O aumento da rigidez é justificado pelo fato de que o comportamento da mola foi modelado como linear, quando na realidade a cada ciclo de carga e descarga há um incremento na rigidez inicial (ver a Figura 3-7 e a Figura 5-6). Variações no momento de inércia eram de alguma forma esperadas, uma vez que a estimativa deste parâmetro no modelo inicial foi realizada com dados escassos, pois este depende significativamente da distribuição de massa ao longo da carroceria.

Na Figura 5-19(a) são ilustrados os valores de erro entre as frequências numéricas e experimentais, antes e após a calibração, tomando como referência os valores das frequências experimentais. Os resultados após a calibração referem-se à otimização GA4, que está associada ao menor valor da função objetivo. E a Figura 5-19(b) compara os valores MAC antes e depois da calibração.

**Figura 5-19 – Erros entre as respostas modais experimentais e numéricas, antes e após a calibração: (a) frequências naturais; (b) MAC**



Fonte: Adaptada de (BRAGANÇA et al., 2021).

O erro médio nas frequências naturais foi reduzido de 8,71% para 0,03% resultando em uma concordância quase que perfeita. No entanto, o processo de otimização praticamente não influenciou os valores de MAC que já eram muito altos antes da calibração e permaneceram praticamente inalterados após ela. Isso é consistente com os resultados obtidos na análise de sensibilidade em que foi encontrada correlação desprezível entre os parâmetros numéricos e os valores de MAC.

## **5.5 Validação das respostas dinâmicas**

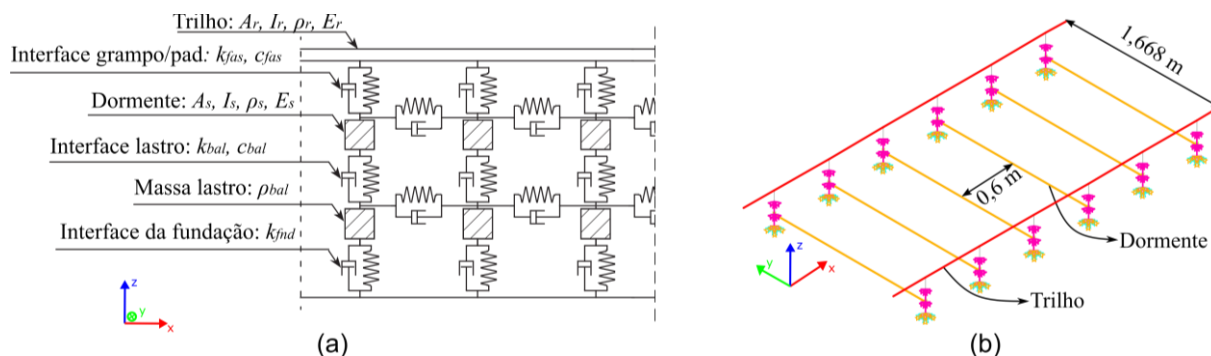
### **5.5.1 Considerações iniciais**

A validação do modelo numérico do vagão de carga envolveu a comparação entre as respostas dinâmicas experimentais e numéricas em diferentes componentes do veículo, em condições normais de operação. Os resultados numéricos foram obtidos por meio da análise de interação dinâmica veículo-via implementada na ferramenta numérica “*VSI – Vehicle Structure Interaction Analysis*” (MONTENEGRO et al., 2015; NEVES et al., 2014), a qual foi descrita em detalhes na Seção 4.4.1. A validação baseou-se em dados experimentais recolhidos durante os ensaios dinâmicos, apresentados na Seção 5.3.1, num trecho reto de 400 m, entre os Km +22,800 e +23,200, da linha da Beira Alta, no qual a velocidade do trem se manteve aproximadamente constante a 84,5 km/h.

### **5.5.2 Modelo da via**

O modelo numérico deste trecho de via foi desenvolvido em ANSYS® (2018) com base no modelo descrito por Neto et al (2020) e se consiste em três camadas representando o lastro, dormente e trilho, que são conectados entre si através de interfaces apropriadas. Ao nível da fundação o modelo é totalmente fixo, enquanto que longitudinalmente a rigidez da via é dada pela rigidez longitudinal das molas das diferentes interfaces. O modelo utiliza elementos finitos de vigas (BEAM4) para modelagem dos trilhos e dormentes, conjuntos de mola-amortecedor (COMBIN14) para modelagem das interfaces de lastro, grampo e fundação, além de massas pontuais (MASS21) nas extremidades dos dormentes, conforme mostrado na Figura 5-20. As propriedades mecânicas associadas aos componentes da via foram adotadas da literatura e são apresentadas na Tabela 5-4.

**Figura 5-20 – Modelo numérico de três camadas da via: (a) Esquematisação e (b) representação tridimensional**



Fonte: Elaborada pelo autor.

**Tabela 5-4 – Propriedades dos diferentes componentes da pista**

Componente	Parâmetro	Designação	Valor	Referência
Trilho (UIC60)	$A_r$	Área (cm <sup>2</sup> )	76,7	
	$I_r$	Inércia (cm <sup>4</sup> )	3038	(EN 13674-1, 2006)
	$\rho_r$	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )	7850	
	$E_r$	Módulo de elasticidade (GPa)	210	
Grampos/Pads	$k_{fas,l/t}$	Rigidez longitudinal/transversal (MN/m)	20	(ZHAI; WANG; CAI, 2009)
	$c_{fas,l/t}$	Amortecimento longitudinal/transversal (kN.s/m)	50	
	$k_{fas,v}$	Rigidez vertical (MN/m)	500	(ERRI D 214, 1999)
	$c_{fas,v}$	Amortecimento vertical (kN.s/m)	200	
	$k_{fas,r}$	Rigidez rotacional (kN.m/rad)	45	(ERRI D 202, 1999)
Dormente	$A_s$	Área (cm <sup>2</sup> )	402,5	
	$I_s$	Inércia (cm <sup>4</sup> )	17620	(WU; YANG, 2003)
	$\rho_s$	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )	2500	
	$E_s$	Módulo de elasticidade (GPa)	40,9	
Lastro	$k_{bal,l}$	Rigidez longitudinal (MN/m/m)	30	(UIC, 2001)
	$k_{bal,t}$	Rigidez transversal (MN/m/m)	7,5	(ERRI D 202, 1999)
	$k_{bal,v}$	Rigidez vertical (MN/m/m)	100	
	$c_{bal}$	Amortecimento nas 3 direções (kN.s/m/m)	50	(WU; YANG, 2003)
	$\rho_{bal}$	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )	1995,9	
Fundação	$k_{fd,v}$	Rigidez vertical (MN/m)	20	(NETO et al., 2020)

Fonte: Adaptada de (BRAGANÇA et al., 2021).

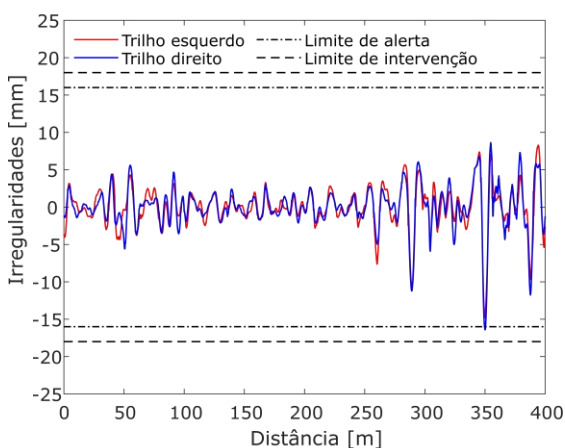
Irregularidades reais da via foram consideradas na análise dinâmica realizada com a ferramenta numérica de interação veículo-via, descrita a priori na Seção 4.4.1. Estas irregularidades foram obtidas com o veículo de inspeção EM120 do gestor da infraestrutura portuguesa (Figura 5-21(a)) durante uma campanha de medição

realizada duas semanas antes dos testes dinâmicos. A Figura 5-21(a,b) apresenta as componentes longitudinais e de alinhamento das irregularidades dos trilhos esquerdo e direito, medidas pelo veículo de inspeção no trecho de 400 m, entre os Km +22,800 e +23,200 da linha da Beira Alta em direção à fronteira de Portugal com a Espanha, estudado no presente trabalho. A figura mostra também os limites de alerta e de intervenção adotados pelo gestor da infraestrutura ferroviária portuguesa, e dentro dos intervalos estipulados pela norma europeia EN13848-5 (2017), correspondendo a uma velocidade de operação entre 80 km/h e 120 km/h.

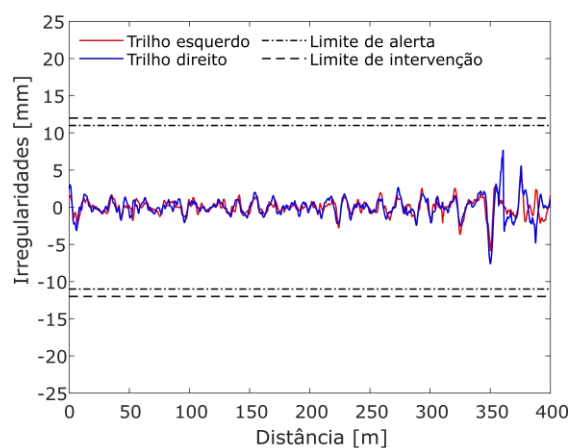
**Figura 5-21 – Irregularidades da via medidas pelo veículo de inspeção correspondente ao trecho estudado da linha da Beira Alta: (a) veículo de inspeção EM120; (b) nível longitudinal (vertical); (c) nível de alinhamento (lateral)**



(a)



(b)



(c)

Fonte: Adaptada de (BRAGANÇA et al., 2021).

### 5.5.3 Simulação do comportamento dinâmico do vagão de carga

Nesta seção serão apresentados e validados os resultados das simulações do comportamento dinâmico do vagão no trecho de via descrito a priori. A validação envolveu a comparação da aceleração vertical numérica e experimental da carroceria, do deslocamento vertical relativo entre carroceria e caixa de eixo e da aceleração

vertical na caixa de eixo, atendendo aos intervalos de frequências especificados na EN14363 (2016). Estas comparações foram realizadas tanto no domínio do tempo quanto da frequência.

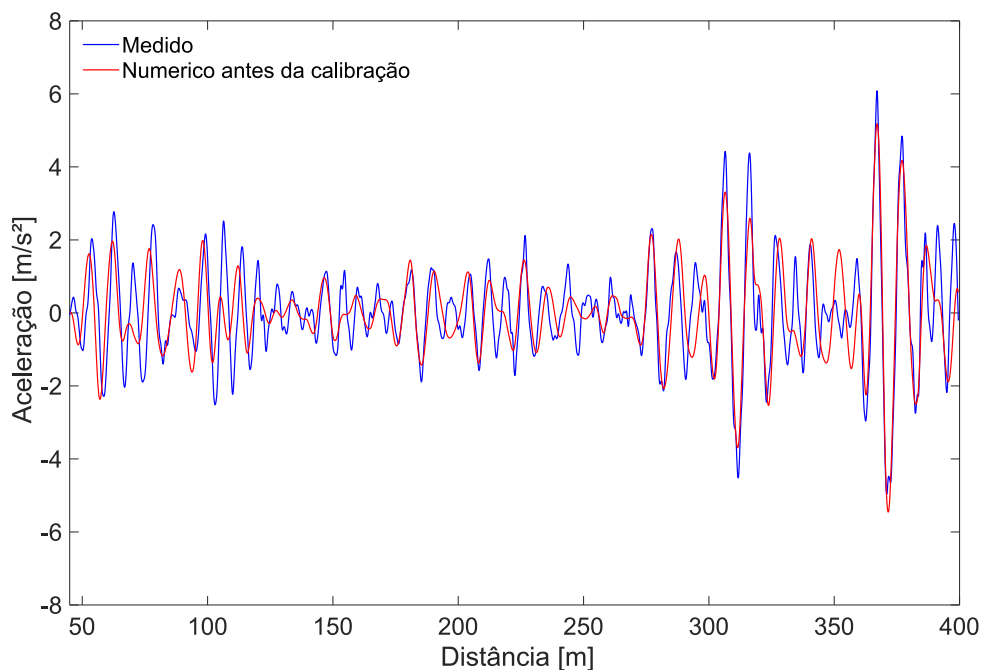
De modo a possibilitar uma comparação de resultados adequada os dados brutos experimentais, amostrados em 2.048 Hz, tiveram suas tendências removidas por meio de uma função de ajuste polinomial linear e, em seguida, foram reamostrados para 500 Hz, para corresponder à frequência de amostragem usada nas simulações. A reamostragem foi feita por meio da função “*resample*” do MATLAB® (2020) que funciona basicamente aumentando a frequência de amostragem, por interpolação dos dados existentes, até o primeiro múltiplo inteiro da frequência que se deseja atingir e depois faz a decimação do sinal para a frequência desejada. Esta estratégia permite superar a limitação da operação de decimação que é restrita a múltiplos inteiros da frequência de amostragem inicial.

Durante as simulações foi adotada a velocidade constante de 84,5 km/h, mesmo ciente de que esse valor pode apresentar flutuações instantâneas, especialmente por se tratar de um longo trecho reto logo após uma curva, com tendência de o veículo aumentar a sua velocidade. Esse efeito de variação de velocidade não pôde ser considerado na simulação numérica, sendo adotadas as métricas propostas por Sarin et al. (2008) (ver Seção 4.4.2) para comparar de maneira mais objetiva os resultados obtidos no domínio do tempo.

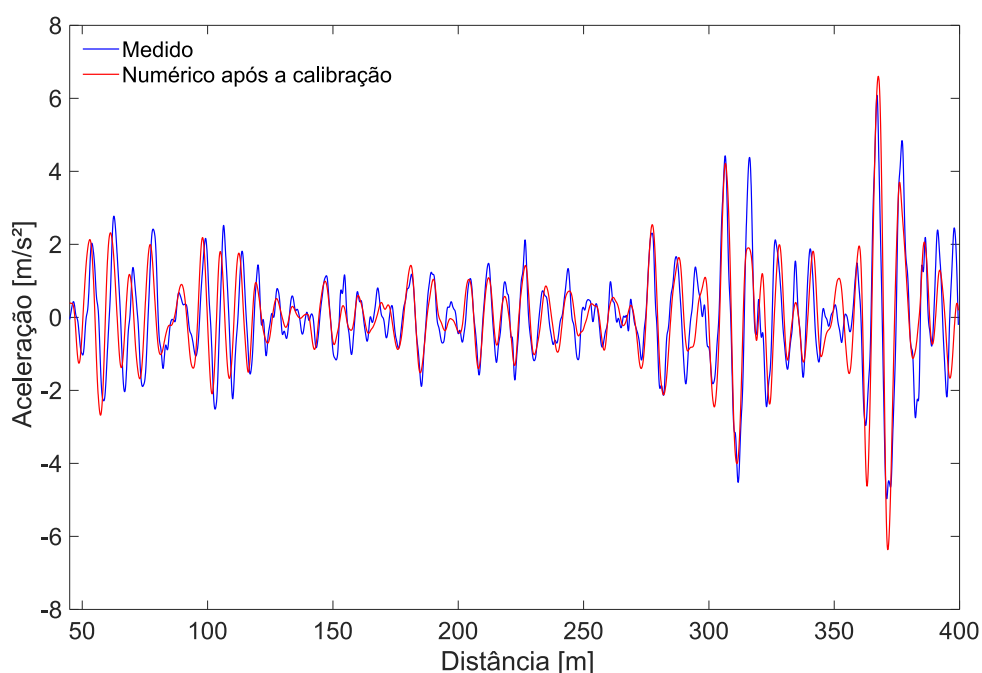
#### *5.5.3.1 Aceleração vertical da carroceria*

Na Figura 5-22 estão ilustradas as acelerações verticais da carroceria simuladas numericamente, antes e após a calibração, comparadas com os dados medidos durante os testes dinâmicos. As respostas numéricas e experimentais são filtradas por meio de um filtro passa-banda Butterworth de 4ª ordem com frequências de corte de 0,4 e 10 Hz, seguindo as recomendações da EN14363 (2016) para avaliar características de operação.

**Figura 5-22 – Comparação das acelerações verticais experimentais e numéricas da carroceria para um veículo em velocidade de 84,5 km/h: (a) antes e (b) após a calibração**



(a)



(b)

Fonte: Adaptada de (BRAGANÇA et al., 2021).

Para comparar o nível de concordância entre as histórias temporais numéricas e experimentais foram calculadas as métricas  $nMAE_{mag}$  e  $nMAE_{topo}$  (SARIN et al., 2008) apresentadas na Seção 4.4.2. O cálculo da métrica relacionada ao desfasamento global neste caso não faz sentido uma vez que, por não se ter registros



precisos do momento em que o veículo ingressa no trecho de avaliação, não é possível garantir que medição e simulação estão começando no mesmo instante de tempo. A utilização destes indicadores é precedida pelo algoritmo Dynamic Time Warping (DTW) que permite compensar os deslocamentos de tempo locais entre históricos numéricos e experimentais devido às variações de velocidade do veículo. Essa capacidade permite remover automaticamente a influência de pequenos desalinhamentos que ocorrem em intervalos específicos dos registros (por exemplo, entre 50 m e 100 m na Figura 5-22) que não representam deficiências do modelo em si e poderiam gerar distorções irreais nos indicadores, uma vez que estes são calculados dado a dado.

Os resultados obtidos com o cálculo destes indicadores são apresentados na Tabela 5-5, na qual pode-se verificar significativa melhora em ambos os indicadores antes e após a calibração. Isto indica que a resposta simulada se aproximou da experimental tanto em magnitude, quanto em topologia (forma).

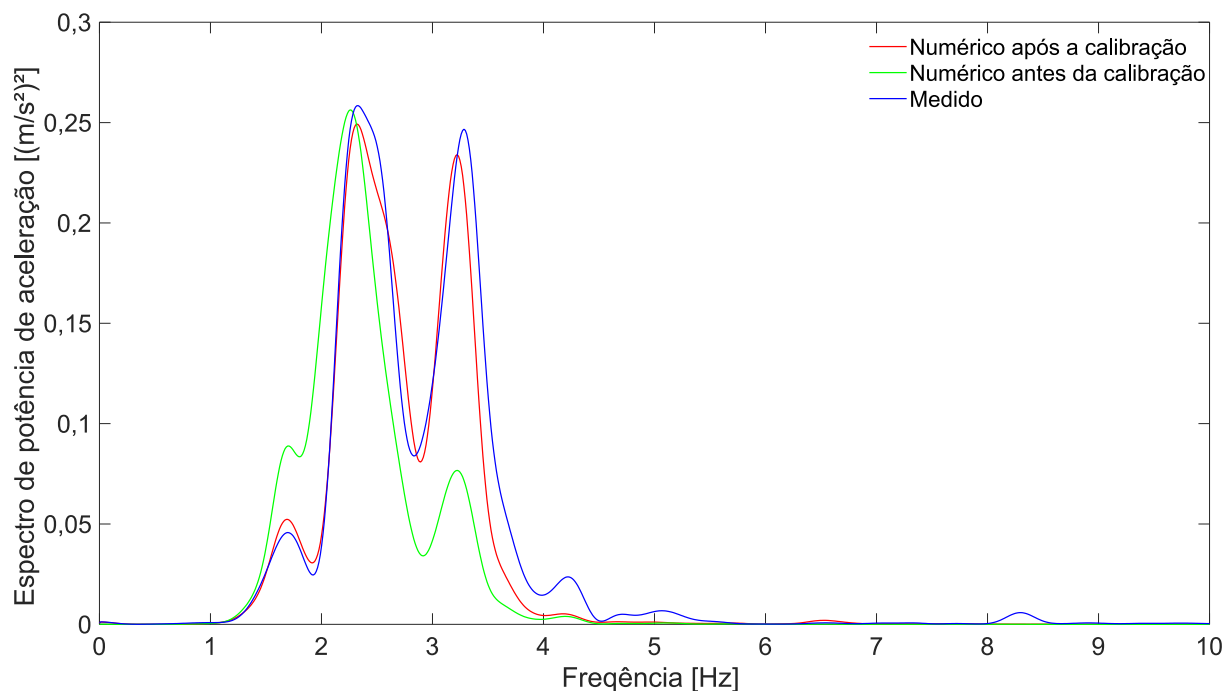
**Tabela 5-5 – Valor dos indicadores  $nMAE_{mag}$  e  $nMAE_{topo}$  calculados com base nas acelerações na carroceria antes e após a calibração do modelo**

Indicador	Antes da calibração [%]	Após a calibração [%]
$nMAE_{mag}$	15,98	11,68
$nMAE_{topo}$	28,51	19,35

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 5-23 são apresentados os espectros de potência dos históricos de tempo de aceleração da carroceria medidos e simulados numericamente no trecho de validação. No domínio da frequência, obteve-se uma melhora significativa dentro da faixa de frequência dos três modos utilizados para calibração do modelo do veículo. A distribuição de energia ao longo do espectro de frequência obtida após a calibração tornou-se significativamente mais semelhante aos dados experimentais, em comparação com o anterior à calibração. Isso é especialmente visível para frequências abaixo de 3,5 Hz, correspondente à faixa de frequência usada no processo de calibração. A partir da Figura 5-23, também é possível concluir que a resposta é predominantemente dominada pelo segundo e terceiro modos de vibração, uma vez que a maior parte da energia está concentrada nos picos em torno de 2,32 Hz e 3,28 Hz.

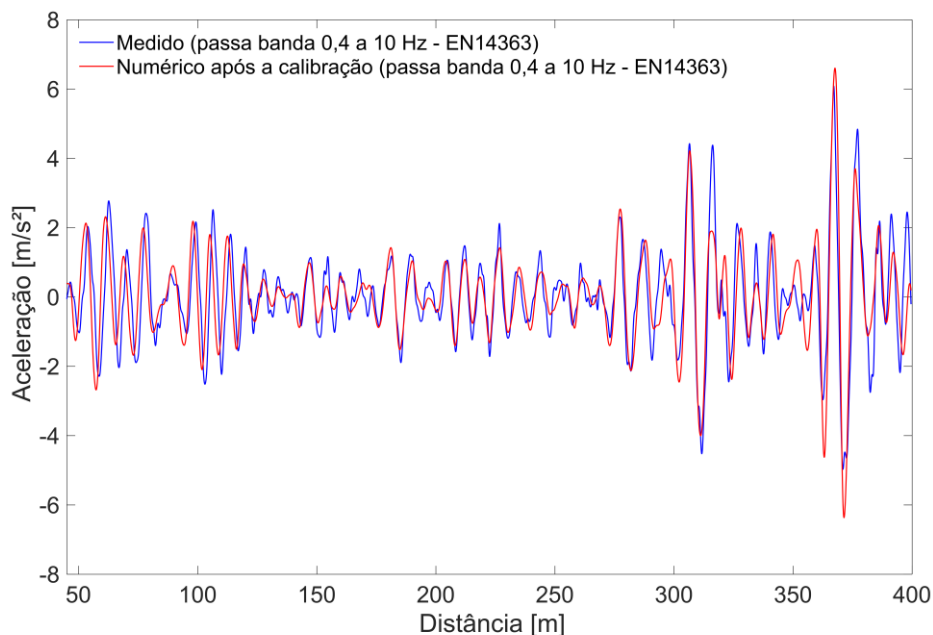
**Figura 5-23 – Comparação do espectro de potência de aceleração vertical experimental e numérica (antes e depois da calibração) da carroceria para um veículo com velocidade de 84,5 km/h**



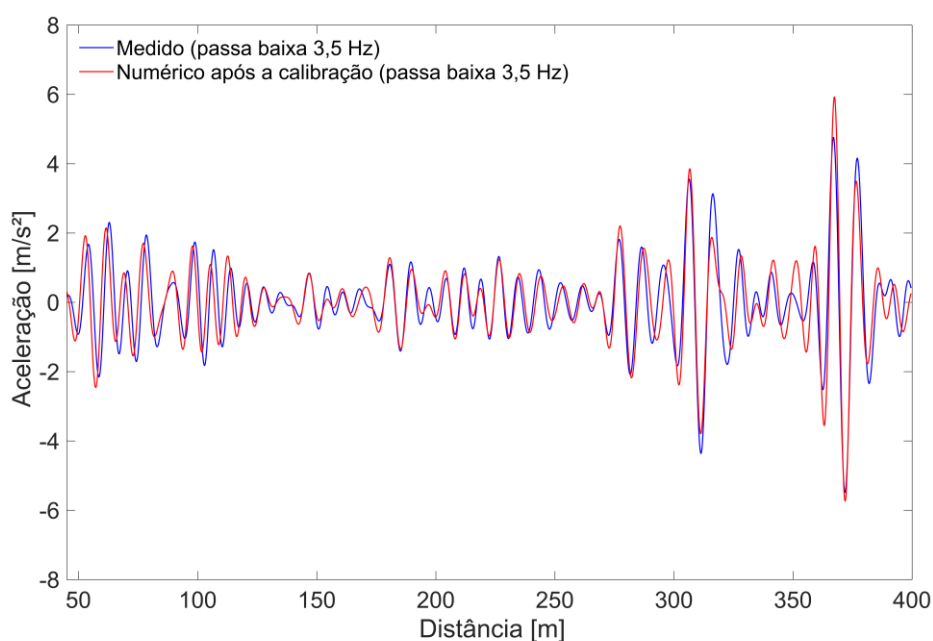
Fonte: Adaptada de (BRAGANÇA et al., 2021).

Levando em consideração as melhorias significativas mostradas na Figura 5-23, dentro da faixa de frequência na qual a calibração foi realizada, a Figura 5-24 retrata a aceleração vertical medida e numericamente simulada da carroceria considerando a aplicação de um filtro passa baixa Butterworth de 4ª ordem com frequência de corte igual a 3,5 Hz, bem como, para fins de melhor comparação, é retratada novamente a situação após calibração com o filtro normativo. Como esperado, obteve-se uma concordância ainda melhor entre os históricos experimentais e numéricos, conforme atestado pelo indicador  $nMAE_{mag}$  entre os históricos experimentais e numéricos após a calibração, que diminuiu para 9,65 % e o indicador  $nMAE_{topo}$  que diminuiu para 9,81 %.

**Figura 5-24 – Comparação das acelerações verticais experimentais e numéricas após calibração da carroceria para um veículo com velocidade de 84,5 km/h: (a) considerando o filtro normativo passa banda de 0,4 a 10 Hz (b) considerando um filtro passa-baixa de 3,5 Hz**



(a)



(b)

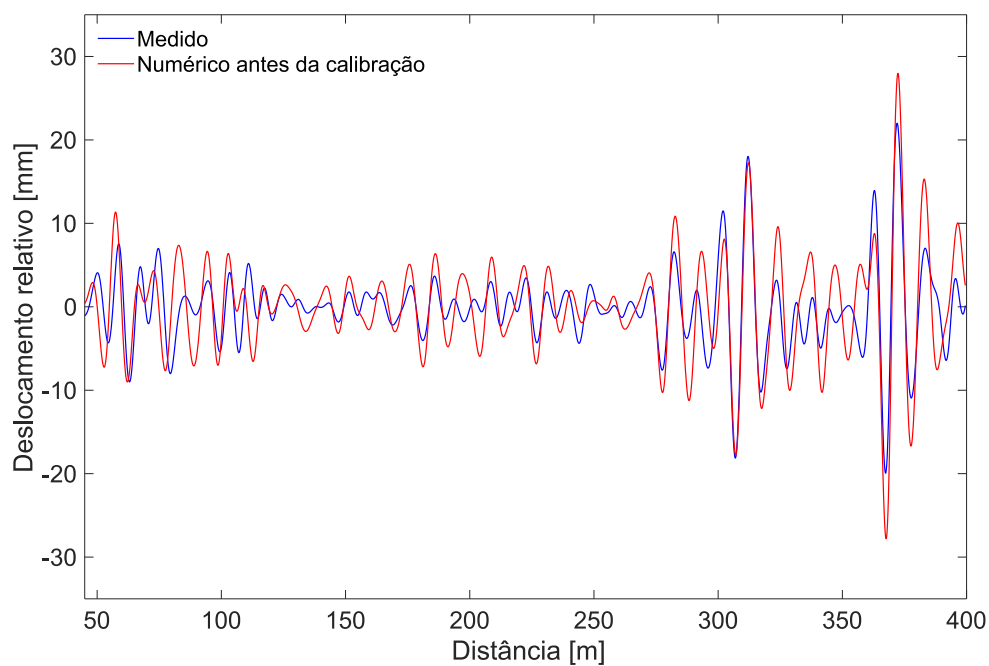
Fonte: Elaborada pelo autor.

### 5.5.3.2 Deslocamento vertical relativo entre carroceria e caixa de eixo

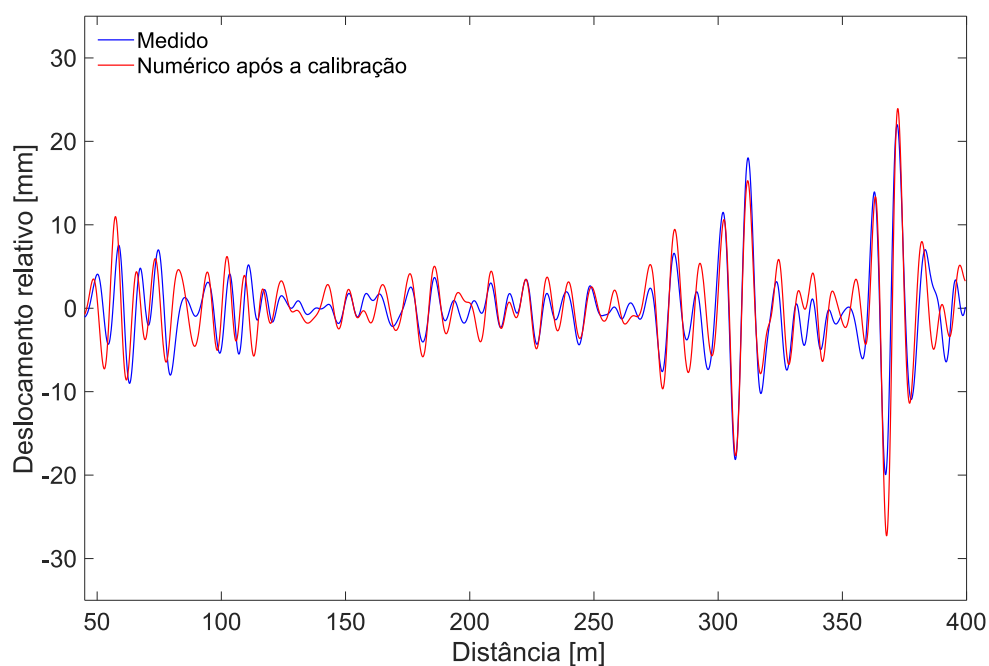
Na Figura 5-25 são comparados os deslocamentos relativos na direção vertical entre a carroceria e a caixa de eixo obtidos numericamente, antes e após a calibração, com os dados medidos dos testes dinâmicos em condições de operação. Uma vez

que a grandeza aqui apresentada se trata de um deslocamento, as respostas numéricas e experimentais são filtradas por meio de um filtro passa-banda Butterworth de 4ª ordem com frequências de corte de 0,1 e 4 Hz, seguindo as recomendações da EN14363 (2016) para avaliar características de deslocamento.

**Figura 5-25 – Comparação dos deslocamentos verticais relativos entre a carroceria e a caixa de eixo experimentais e numéricos para uma velocidade de 84,5 km/h do veículo: (a) antes e (b) após a calibração**



(a)



(b)

Fonte: Adaptada de (BRAGANÇA et al., 2021).

Como fica evidente pelos gráficos apresentados, assim como na aceleração, obteve-se uma correspondência muito boa entre os resultados experimentais e numéricos, principalmente após a calibração. Na Tabela 5-6 são apresentados os indicadores  $nMAE_{mag}$  e  $nMAE_{topo}$ , por meio dos quais fica comprovado também de maneira objetiva melhora do resultado tanto em questão de magnitude como de topologia (forma).

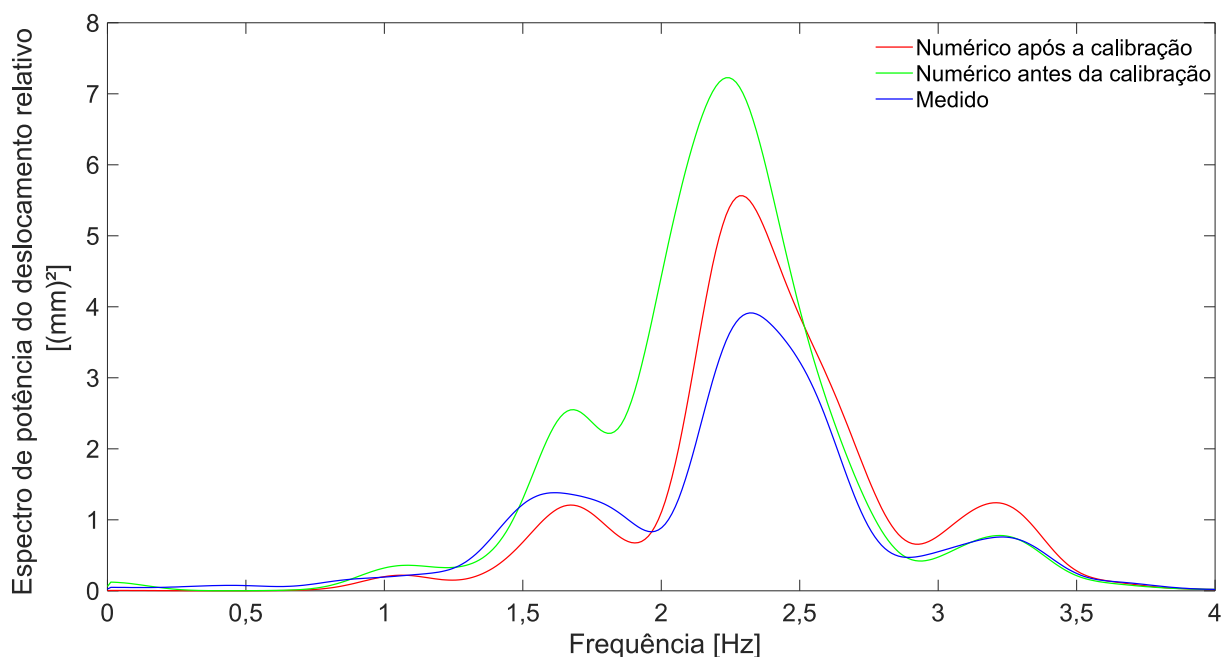
**Tabela 5-6 – Valor dos indicadores  $nMAE_{mag}$  e  $nMAE_{topo}$  calculados com base nos deslocamentos relativos entre carroceria e caixa de eixo antes e após a calibração do modelo**

Indicador	Antes da calibração [%]	Após a calibração [%]
$nMAE_{mag}$	26,36	16,82
$nMAE_{topo}$	19,08	12,86

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os espectros de potência dos deslocamentos relativos entre a carroceria e a caixa de eixo obtidos experimental e numericamente estão representados na Figura 5-26.

**Figura 5-26 – Comparação do espectro de potência de deslocamento vertical relativo entre a carroceria a caixa de eixo experimental e numérico (antes e depois da calibração) para um veículo com velocidade de 84,5 km/h**



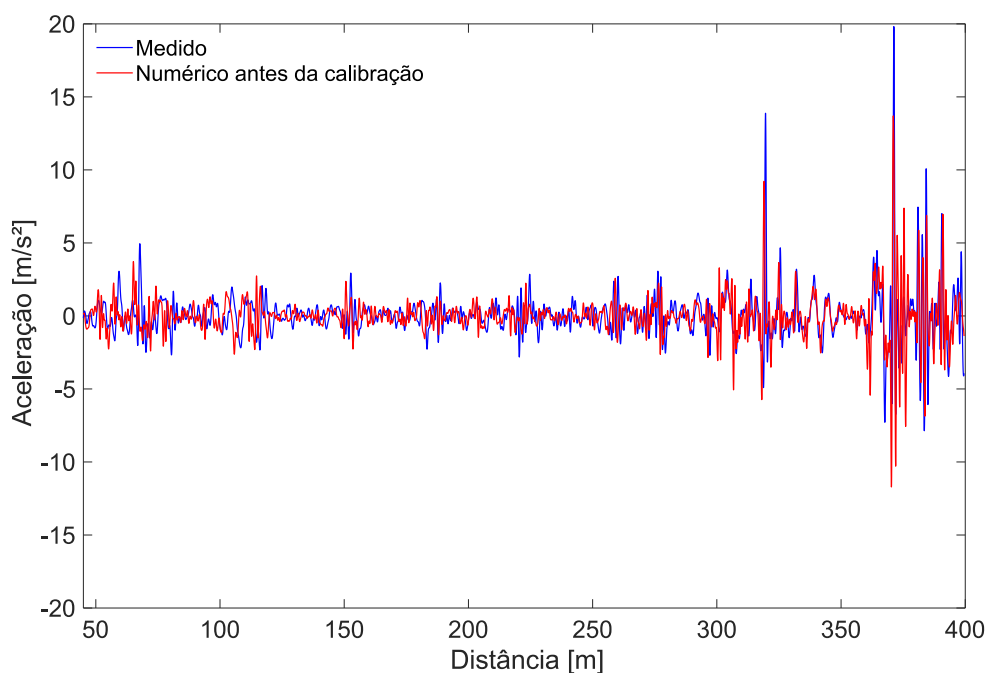
Fonte: Adaptada de (BRAGANÇA et al., 2021).

Mais uma vez, os resultados numéricos mostram uma melhor concordância com os medidos após o processo de calibração, principalmente entre 1,25 Hz e 2,60 Hz, onde os resultados antes da calibração foram significativamente superestimados, o que também ficou claro por uma melhora de quase 10 % no erro relacionado à magnitude.

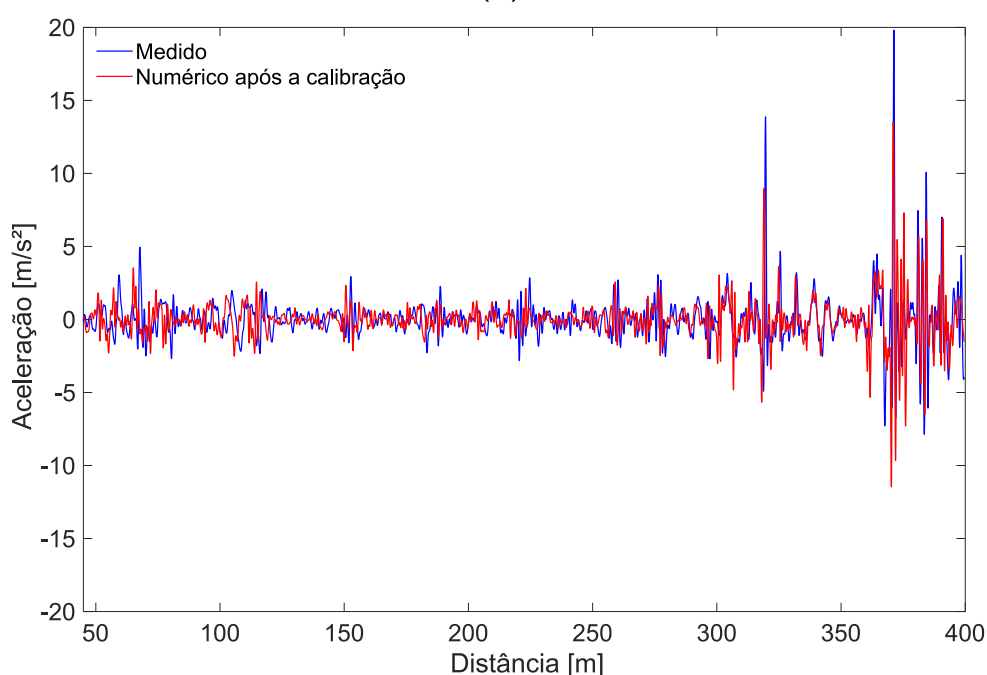
#### *5.5.3.3 Aceleração vertical na caixa de eixo*

Na Figura 5-27 são apresentadas as acelerações verticais simuladas na caixa de eixos, antes e após a calibração, comparadas com dados medidos durante os testes dinâmicos. As respostas numéricas e experimentais são filtradas por meio de um filtro passa-baixa Butterworth de 4ª ordem com frequência de corte de 20 Hz, seguindo as recomendações da EN14363 (2016) para a verificação da estabilidade do contato roda-trilho. Este filtro foi escolhido uma vez que a norma não especifica nenhum filtro em concreto para a aceleração nas caixas de eixo, pelo que se optou pelo filtro associado às características de contacto roda-trilho (forças de contacto), uma vez que existe uma relação bastante próxima entre estas duas grandezas.

**Figura 5-27 – Comparação da aceleração vertical experimental e numérica na caixa de eixo para um veículo em velocidade de 84,5 km/h: (a) antes e (b) após a calibração**



(a)



(b)

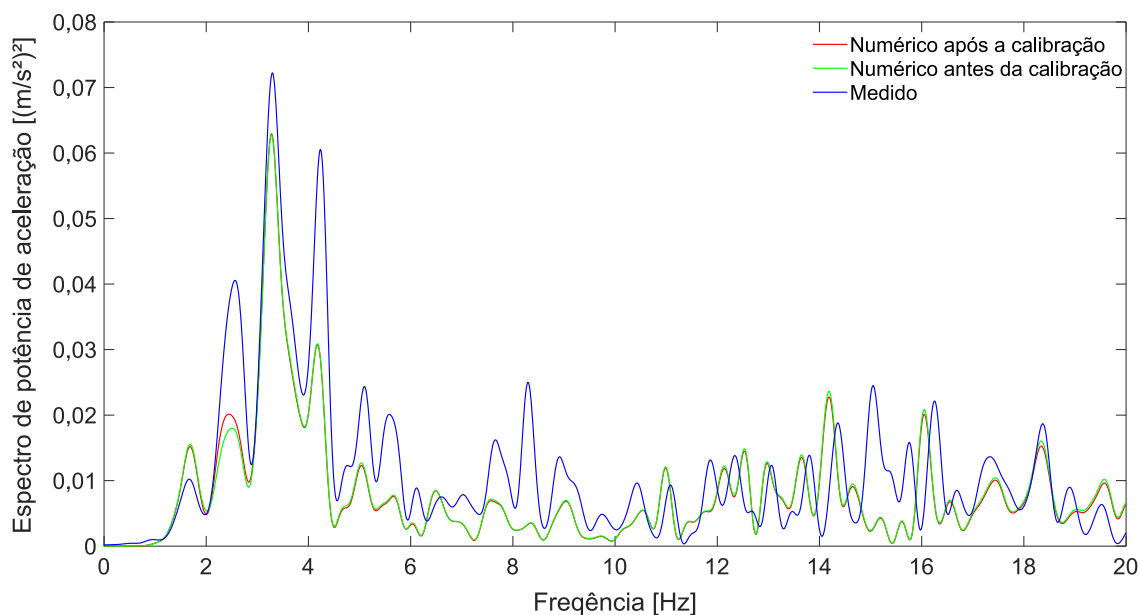
Fonte: Adaptada de (BRAGANÇA et al., 2021).

Conforme indicado pela figura, o processo de calibração não contribuiu em nada para a melhoria da resposta na caixa de eixo, uma vez que a calibração envolveu apenas modos de corpo rígido de baixa frequência da carroceria. Os modos de vibração do rodeiro, onde se fixam as caixas de eixo, tanto de corpo rígido quanto de

flexão, que normalmente possuem frequências bem mais altas, não foram incluídos no processo de calibração. Apesar dessa limitação, é possível observar que os resultados numéricos mantêm uma boa concordância com os dados medidos, comprovando a eficiência e robustez do modelo numérico desenvolvido do veículo e da ferramenta de interação veículo-via utilizada.

Na Figura 5-28 são apresentados os espectros de potência das acelerações na caixa de eixo obtidos a partir das simulações numéricas e do teste dinâmico em condições operacionais. O espectro mostra que o modelo está capturando razoavelmente o conteúdo de frequência na caixa de eixo medido, mas sua magnitude é subestimada para a maioria das frequências analisadas. Além disso, assim como nos resultados no domínio do tempo, o processo de calibração não alterou significativamente as respostas na caixa de eixo no domínio da frequência.

**Figura 5-28 – Comparação do espectro de potência de aceleração vertical experimental e numérica (antes e depois da calibração) da caixa de eixo para um veículo com velocidade de 84,5 km/h**



Fonte: Adaptada de (BRAGANÇA et al., 2021).



## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 6.1 Conclusões

Nesta dissertação foram apresentados os conceitos e metodologias necessárias para a calibração e validação de modelos numéricos com base em respostas dinâmicas experimentais. Um enfoque especial foi dado à calibração de modelos de veículos ferroviários de carga.

No Capítulo 2 foram apresentados conceitos básicos em dinâmica de estruturas, os quais fornecem o embasamento teórico fundamental para compreensão das técnicas e metodologias apresentadas ao longo do texto.

No Capítulo 3 foram tratadas das particularidades construtivas e modelagem numérica dos vagões ferroviários de carga, ensaios dinâmicos nestes veículos e, por fim, uma revisão bibliográfica de pesquisas anteriormente desenvolvidas envolvendo a calibração de modelos de veículos ferroviários.

No Capítulo 4 foram abordadas metodologias aplicáveis à calibração e validação de modelos numéricos com base em informação modal experimental e algoritmos de otimização. Foram apresentadas técnicas de análise modal operacional, calibração de modelos pelo método iterativo, uma metodologia para simular a interação veículo-via e métricas para comparação de séries temporais de respostas dinâmicas.

Para a avaliação da eficiência da metodologia proposta, foi considerado o vagão de carga do tipo plataforma *Laagrss*, projetado para transportar contêineres e trafegar a velocidades de até 120 km/h. A identificação de parâmetros modais foi realizada em condições reais de operação com base em dados experimentais muito limitados, obtidos de sensores embarcados. Os dados experimentais foram utilizados, posteriormente, como referência para calibrar o modelo numérico do veículo e validar os resultados numéricos da análise da interação dinâmica veículo-via.

Um modelo numérico FE simplificado 3D do vagão foi desenvolvido no software ANSYS® utilizando elementos de viga rígida, massa e conjuntos de molas e amortecedores. As suspensões são do tipo feixe de mola parabólico UIC, cujas propriedades de rigidez foram obtidas a partir da curva força-deslocamento bilinear dada pelas normas UIC e o amortecimento estimado através da análise de seu ciclo histerético.

A configuração experimental reduzida foi composta por 10 acelerômetros e 5 LVDT's e tinha em conta as restrições de posicionamento dos sensores impostas pelas eventuais interferências na operação ferroviária. As acelerações na carroceria e caixa de eixo e os deslocamentos relativos entre a caixa de eixo e a carroceria foram monitorados durante a campanha experimental, com o veículo em movimento.

A partir dos dados experimentais, os parâmetros modais foram identificados pelo método de Identificação Estocástica em Subespaços, na variante Unweighted Principal Components (SSI-UPC) implementado no software comercial ARTEMIS®. Três modos de vibração de corpo rígido da carroceria foram identificados, sendo estes: (i) o modo de rolamento (*“rolling”*) da carroceria, caracterizado pelo movimento vertical desfasado dos lados esquerdo e direito da carroceria; (ii) o modo de translação vertical da carroceria (*“bouncing”*), onde a carroceria se move como um todo na direção vertical, e; (iii) o modo de rotação ao entorno do eixo transversal (*“pitching”*). Como os dados experimentais disponíveis estavam limitados ao eixo dianteiro, o terceiro modo pôde ser distinguido do segundo apenas devido ao movimento longitudinal observado neste último. Os valores encontrados para os coeficientes de amortecimento de cada um dos modos foram 11,3 %, 12,6 % e 12,4 %, respectivamente, valores estes frequentes para sistemas com altos níveis de amortecimento devido a presença de suspensões.

Dois etapas foram utilizadas durante a calibração do modelo numérico do veículo. A primeira consistiu de uma análise de sensibilidade, baseada em uma técnica de amostragem estocástica, que visa identificar os parâmetros que mais influenciam as respostas modais. Concluiu-se que: (i) a rigidez vertical da suspensão apresenta forte influência em todas as frequências de vibração; (ii) as duas primeiras frequências estão correlacionadas com a massa da carroceria e (iii) o momento de inércia transversal é a propriedade que mais influencia no terceiro modo de vibração, sendo este caracterizado por uma rotação pura ao longo do eixo transversal. A segunda etapa consistiu no processo de otimização, realizado por meio de um método iterativo baseado em um algoritmo genético. Durante este processo, os parâmetros modais obtidos no modelo numérico são exportados do ANSYS® para o MATLAB®, responsável pela otimização do modelo minimizando uma função objetivo composta por resíduos das formas modais e das frequências naturais. Após os cálculos, foi necessário um aumento de massa e rigidez, bem como uma redução do momento de inércia na direção transversal, para obter a melhor correspondência entre as

propriedades dinâmicas numéricas e experimentais. Após a calibração, o erro nas frequências naturais foi significativamente reduzido de 8,71% para 0,03%, levando a uma correspondência quase perfeita.

Simulações numéricas considerando o veículo calibrado e a interação dinâmica veículo-via foram realizadas e os resultados foram comparados com os dados experimentais coletados durante os testes dinâmicos na linha da Beira Alta. Irregularidades da via medidas no trecho simulado pelo veículo de inspeção EM120, duas semanas antes dos testes dinâmicos, foram introduzidos no modelo e levados em consideração nas análises numéricas. Uma excelente concordância entre as acelerações verticais experimentais da carroceria e os resultados numéricos correspondentes foram observadas, especialmente com o modelo calibrado. Os erros médios absolutos normalizados das respostas temporais ( $nMAE_{mag}$ ) e de suas derivadas ( $nMAE_{topo}$ ) foram adotados como indicadores para comparar as respostas experimentais e numéricas em termos de magnitude e topologia, respectivamente. Obteve-se uma melhora de 15,98 % para 11,68 % do  $nMAE_{mag}$  e de 28,51 % para 19,35 % do  $nMAE_{topo}$ , demonstrando a boa concordância entre os resultados medidos e simulados, tanto em termos de magnitude, quanto topologia. No domínio da frequência, essa melhora também foi notória dentro da faixa de frequência dos três modos utilizados para calibração do modelo do veículo, ou seja, para frequências abaixo de 3,5 Hz. Além disso, foi possível observar que as respostas foram majoritariamente dominadas pelo segundo e terceiro modos. O mesmo comportamento foi obtido para o deslocamento vertical entre a carroceria e a caixa de eixo, uma vez que o  $nMAE_{mag}$  reduziu de 26,36% para 16,82% e o  $nMAE_{topo}$  reduziu de 19,08 % para 12,86 % após a calibração.

Por fim, o mesmo nível de concordância não pôde ser alcançado para a resposta na caixa de eixo em termos de acelerações, uma vez que a calibração envolveu apenas os modos de corpo rígido da carroceria, que se caracterizam por frequências significativamente mais baixas do que as dos modos do rodeiro, onde se fixam as caixas de eixo. No entanto, e embora os dados experimentais limitados disponíveis apenas permitissem uma calibração adequada dos modos de baixa frequência da carroceria, uma boa concordância entre os resultados experimentais e numéricos também foi alcançada neste componente.

A metodologia proposta neste trabalho mostrou-se eficiente para calibrar e validar modelos numéricos de veículos ferroviários, mesmo diante da significativa limitação do *setup* experimental adotado. Tal conclusão é particularmente importante para o estudo de veículos de carga, onde existe grande limitação para a instalação de sensores. Além disso, o presente estudo mostrou que é possível calibrar modelos numéricos com dados adquiridos em operações reais com um nível de precisão significativo. Tal consideração evita a realização de campanhas experimentais com o veículo em posição de repouso, que normalmente são indesejáveis devido ao número limitado de períodos de inoperância associados a esta tipologia de veículos.

## 6.2 Sugestões para trabalhos futuros

Propõem-se alguns trabalhos futuros para a continuação deste, nomeadamente:

- a) Estudo mais aprofundado do comportamento dinâmico das suspensões de feixe de mola com biela UIC dupla nas direções lateral e longitudinal;
- b) Identificação modal em condições operacionais abrangendo também modos flexíveis dos veículos, por meio da utilização de *setups* experimentais mais elaborados e a posterior comparação com ensaios obtidos em condições estacionárias;
- c) Aplicação de metodologias de otimização híbridas que mesclam algoritmos de otimização de busca global com algoritmos computacionalmente mais eficientes baseados em gradientes para o refinamento dos resultados.

## REFERÊNCIAS

AKIYAMA, Yuki; TOMIOKA, Takahiro; TAKIGAMI, Tadao; AIDA, Ken ichiro; KAMADA, Takayoshi. A three-dimensional analytical model and parameter determination method of the elastic vibration of a railway vehicle carbody. **Vehicle System Dynamics**, [S. l.], v. 58, n. 4, p. 545–568, 2020. ISSN: 17445159. DOI: 10.1080/00423114.2019.1590606.

ANSYS INC. **ANSYS® Academic Research Mechanical Release 18.1**. 2018.

ANTUNES, P.; MAGALHÃES, H.; AMBRÓSIO, J.; POMBO, J.; COSTA, J. A co-simulation approach to the wheel–rail contact with flexible railway track. **Multibody System Dynamics**, [S. l.], v. 45, n. 2, p. 245–272, 2019. ISSN: 1573272X. DOI: 10.1007/s11044-018-09646-0.

ANTUNES, Pedro; AMBRÓSIO, Jorge; POMBO, João; FACCHINETTI, Alan. A new methodology to study the pantograph–catenary dynamics in curved railway tracks. **Vehicle System Dynamics**, [S. l.], v. 58, n. 3, p. 425–452, 2020. ISSN: 17445159. DOI: 10.1080/00423114.2019.1583348.

ARTEMIS. **ARTEMIS Extractor Pro - Academic License, User's Manual, SVS**. Aalborg, Denmark Structural Vibrations Solutions, 2009.

ASSIS, A. C. V.; DALTO, E. J.; FERREIRA, M. A. Ferrovias De Carga Brasileiras: Uma Análise Setorial Brazilian Freight Railways: a Sector Analysis. **BNDES Setorial 46**, [S. l.], n. 46, p. 79–126, 2017.

AVITABILE, Peter. **Modal Testing: A Practitioner's Guide**. Hoboken. New Jersey: John Wiley & Sons, 2017. ISBN: 978-1-119-22289-7.

BAKER, J. E. Reducing bias and inefficiency in the selection algorithm. *In*: PROCEEDINGS OF THE SECOND INTERNATIONAL CONFERENCE ON GENETIC ALGORITHMS ON GENETIC ALGORITHMS AND THEIR APPLICATIONS 1987, **Anais [...]**. [s.l: s.n.] p. 14–21.

BOSSO, N.; GUGLIOTTA, A.; SOMA, A. Multibody simulation of a freight bogie with friction dampers. *In*: ASME/IEEE JOINT RAILROAD CONFERENCE 2004, **Anais [...]**. : ASME, 2004 p. 47–56. ISBN: 0-7803-7452-5. DOI: 10.1109/RRCON.2002.1000092.

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems**. 7. ed., Hoboken. New Jersey: John Wiley & Sons, 2000. ISBN: 0471319996.

BRAGANÇA, C.; NETO, J.; PINTO, N.; MONTENEGRO, P. A.; RIBEIRO, D.; CARVALHO, H.; CALÇADA, R. Calibration and validation of a freight wagon dynamic model in operating conditions based on limited experimental data. **Vehicle System Dynamics**, [S. l.], n. May, p. 1–27, 2021. ISSN: 17445159. DOI: 10.1080/00423114.2021.1933091.

BREHM, Maik. **Vibration-based model updating: Reduction and quantification of uncertainties**. 2011. Bauhaus Universitat Weimar, Weimar, Germany, 2011.

BREHM, Maik; ZABEL, Volkmar; BUCHER, Christian. An automatic mode pairing strategy using an enhanced modal assurance criterion based on modal strain energies. **Journal of Sound and Vibration**, [S. l.], v. 329, n. 25, p. 5375–5392, 2010. ISSN: 0022460X. DOI: 10.1016/j.jsv.2010.07.006.

BRINCKER, R.; VENTURA, C. E.; ANDERSEN, P. Damping estimation by frequency domain decomposition. *In*: PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL MODAL ANALYSIS CONFERENCE - IMAC 2001, **Anais** [...]. [s.l.: s.n.] p. 698–703. ISSN: 10466770.

BRINCKER, Rune; VENTURA, Carlos E. **Introduction to Operational Modal Analysis**. [s.l.] : John Wiley & Sons, 2015. ISBN: 9781118535141. DOI: 10.1002/9781118535141.

BRINCKER, Rune; ZHANG, L.; ANDERSEN, P. Modal Identification from Ambient Responses using Frequency Domain Decomposition. **MAC 18: Proceedings of the International Modal Analysis Conference**, [S. l.], p. 625–630, 2000.

BRÜEL & KJÆR. **DATA ACQUISITION (DAQ) SYSTEMS**. 2022. Disponível em: <https://www.bksv.com/en/instruments/daq-data-acquisition>. Acesso em: 6 jan. 2021.

CEBON, David. **Handbook of Vehicle-Road Interaction: Vehicle Dynamics, Suspension Design, and Road Damage**. 1. ed., [s.l.] : Taylor & Francis, 1999.

CHOPRA, Anil K. **Dynamics of structures: Theory and applications to earthquake engineering, 2nd edition**. New Jersey: Prentice-Hall, 1995. v. 17 ISSN: 87552930. ISBN: 0-13-855214-2.

CORREIA, Marisol. Algoritmos Genéticos. **Revista dos Algarves**, [S. l.], v. 12, n. 5, 2003.

COSTA, Cristina; RIBEIRO, Diogo; JORGE, Pedro; SILVA, Rúben; CALÇADA, Rui; ARÊDE, António. Calibration of the Numerical Model of a Short-span Masonry Railway Bridge Based on Experimental Modal Parameters. **Procedia Engineering**, [S. l.], v. 114, p. 846–853, 2015. ISSN: 18777058. DOI: 10.1016/j.proeng.2015.08.038.

CRAIG JR, Roy R.; KURDILA, Andrew J. **Fundamentals of structural dynamics**. 2. ed., Hoboken. New Jersey: John Wiley & Sons, 2006. ISBN: 0471430447.

DEEP, Kusum; SINGH, Krishna Pratap; KANSAL, M. L.; MOHAN, C. A real coded genetic algorithm for solving integer and mixed integer optimization problems. **Applied Mathematics and Computation**, [S. l.], v. 212, n. 2, p. 505–518, 2009. ISSN: 00963003. DOI: 10.1016/j.amc.2009.02.044.

DIANA, Giorgio; CHELI, Federico; COLLINA, Andrea; CORRADI, Roberto; MELZI, Stefano. The development of a numerical model for railway vehicles comfort assessment through comparison with experimental measurements. **Vehicle System Dynamics**, [S. l.], v. 38, n. 3, p. 165–183, 2002. ISSN: 00423114. DOI: 10.1076/vesd.38.3.165.8287.

EN 13674-1. :**2003+A1:2007 Railway applications. Track. Rail. Vignole railway rails 46 kg/m and above**. 2006. ISBN: 9780580638732.

EN 13848-5. **Railway applications - Track - Track geometry quality - Part 5: Geometric quality levels - Plain line, switches and crossings.** 2017.

EN14363. **Railway applications - Testing and Simulation for the acceptance of running characteristics of railway vehicles - Running Behaviour and stationary tests.** European Committee for Standardization (CEN) 2016.

EPL. **Boletim de logística – A retomada dos investimentos ferroviários para para aumentar a eficiência da matriz de transportes.** 2021.

ERRI D 202. RP11 - Improved knowledge of forces in CWR track (including switches): Parametric study and sensitivity analysis of CWERRI Verification of an FEM for the buckling resistance of tracks with continuous welded rails (CWR). [S. l.], 1999.

ERRI D 214. **RP5 - Rail bridges for speeds > 200 km/h: Numerical investigation of the effect of track irregularities at bridge resonance.** European Rail Research Institute Utrecht, 1999.

EWINS, D. J. Model validation: correlation for updating. **Sadhana - Academy Proceedings in Engineering Sciences**, [S. l.], v. 25, n. 3, p. 221–234, 2000. ISSN: 02562499. DOI: 10.1007/BF02703541.

EWINS, David John. **Modal Testing: Theory, Practice and Application.** 2. ed., Baldock, England: Wiley, 2009. ISBN: 978-0863802188.

FANCHER, P. S.; ERVIN, R. D.; MACADAM, C. C.; WINKLER, C. B. Measurement and representation of the mechanical properties of truck leaf springs. In: SAE TECHNICAL PAPERS 1980, **Anais** [...]. [s.l.: s.n.] ISSN: 26883627. DOI: 10.4271/800905.

FERNANDEZ, Alfonso. **Study of vibration | Power-MI.** 2021. Disponível em: <https://power-mi.com/content/study-vibration>. Acesso em: 3 jan. 2022.

FERNANDEZ, Alfonso. **Seismic velocity transducers.** 2022. Disponível em: <https://power-mi.com/content/seismic-velocity-transducers>. Acesso em: 5 jan. 2022.

GILBERT, M. ... Fatigue in railway bridges. In: **Fatigue in Railway Infrastructure.** [s.l.: s.n.]. p. 58–95. DOI: 10.1533/9781845697020.58.

HERLUFSEN, H. **Modal Analysis using Multi-reference and Multiple-Input Multiple-Output Techniques** Brüel & Kjær, Application Note. Nærum, Denmark.

HERTZ, H. R. **Ueber die Berührung fester elastischer Körper (On Contact Between Elastic Bodies).** *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal)* 1882. DOI: 10.1515/crll.1882.92.156.

HILBER, Hans M.; HUGHES, Thomas J. R.; TAYLOR, Robert L. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. **Earthquake Engineering & Structural Dynamics**, [S. l.], v. 5, n. 3, p. 283–292, 1977. ISSN: 00988847. DOI:

10.1002/eqe.4290050306.

HOFFMANN, Mark. **Dynamics of European two – axle freight wagons**. 2006. Technical University of Denmark, Lyngby, Denmark, 2006.

HOLLAND, J. H. **Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence**. Oxford, England: U Michigan Press, 1975. ISBN: 0472084607.

HUGHES, Thomas J. R. **Finite Element Method: Linear Static And Dynamic Finite Element Analysis**. New Jersey: Prentice-Hall, 1987. v. 65 ISSN: 00457825.

IMISENSORS. **Selecting & Installing Accelerometers**. 2016. Disponível em: [http://www.pcb.com/contentstore/mktgcontent/whitepapers/WPL\\_75\\_SelectingInstallingAccelerometers.pdf](http://www.pcb.com/contentstore/mktgcontent/whitepapers/WPL_75_SelectingInstallingAccelerometers.pdf). Acesso em: 3 jan. 2021.

IWNICKI, S. D.; STICHEL, S.; ORLOVA, A.; HECHT, M. Dynamics of railway freight vehicles. **Vehicle System Dynamics**, [S. l.], v. 53, n. 7, p. 995–1033, 2015. ISSN: 17445159. DOI: 10.1080/00423114.2015.1037773.

JAISHI, Bijaya; REN, Wei-Xin. Structural Finite Element Model Updating Using Ambient Vibration Test Results. **Journal of Structural Engineering**, [S. l.], v. 131, n. 4, p. 617–628, 2005. ISSN: 0733-9445. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9445(2005)131:4(617).

JIANG, Yanran; CHEN, Bernard K.; THOMPSON, Cameron. A comparison study of ride comfort indices between Sperling's method and EN 12299. **International Journal of Rail Transportation**, [S. l.], v. 7, n. 4, p. 279–296, 2019. ISSN: 23248386. DOI: 10.1080/23248378.2019.1616329.

KALKER, J. J. The computation of three-dimensional rolling contact with dry friction. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, [S. l.], v. 14, n. 9, p. 1293–1307, 1979. ISSN: 0029-5981. DOI: 10.1002/nme.1620140904.

KIELY, Helen U. **The Effect of Moisture on Paper**. American Writing Paper Company, Inc. Holyoke, Massachusetts American Writing Paper Company, Inc., 1927.

KIM, Jung Seok; JEONG, Jong Cheol. Natural frequency evaluation of a composite train carbody with length of 23 m. **Composites Science and Technology**, [S. l.], v. 66, n. 13, p. 2272–2283, 2006. ISSN: 02663538. DOI: 10.1016/j.compscitech.2005.11.036.

LEITE, Jorge. **Avaliação experimental e numérica do comportamento dinâmico dos degraus de bancada do Estádio do Dragão**. 2016. Instituto Superior de Engenharia do Porto, Porto, Portugal, 2016.

LIU, Xiaoxue; ZHANG, Yahui; XIE, Suming; ZHANG, Qiang; GUO, Hanfei. Fatigue failure analysis of express freight sliding side covered wagon based on the rigid-flexibility model. **International Journal of Structural Integrity**, [S. l.], v. 12, n. 1, p. 98–108, 2019. ISSN: 17579872. DOI: 10.1108/IJSI-11-2019-0122.



MAGALHÃES, Filipe Manuel Rodrigues Leite De. **Identificação modal estocástica para validação experimental de modelos numéricos**. 2004. Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2004.

MALVEIRO, Joel; RIBEIRO, Diogo; SOUSA, Carlos; CALÇADA, Rui. Model updating of a dynamic model of a composite steel-concrete railway viaduct based on experimental tests. **Engineering Structures**, [S. l.], v. 164, p. 40–52, 2018 a. ISSN: 01410296. DOI: 10.1016/j.engstruct.2018.02.057.

MALVEIRO, Joel; SOUSA, Carlos; RIBEIRO, Diogo; CALÇADA, Rui. Impact of track irregularities and damping on the fatigue damage of a railway bridge deck slab. **Structure and Infrastructure Engineering**, [S. l.], v. 14, n. 9, p. 1257–1268, 2018 b. ISSN: 17448980. DOI: 10.1080/15732479.2017.1418010.

MASSA PESAGEM E AUTOMAÇÃO INDUSTRIAL. **Tipos de vagões de trem: Quais são os principais**. 2021. Disponível em: <https://massa.ind.br/tipos-de-vagoes-de-trem/>. Acesso em: 28 dez. 2021.

MATHWORKS. **Global Optimization Toolbox 3.0. Manual**Natick, Massachusetts 2021.

MCKAY, M. D.; BECKMAN, R. J.; CONOVER, W. J. Comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code. **Technometrics**, [S. l.], v. 21, n. 2, p. 239–245, 1979. ISSN: 15372723. DOI: 10.1080/00401706.1979.10489755.

MI. **Conheça as Rotas de Trem de Passageiros no Brasil**. 2018. Disponível em: <http://transportes.gov.br/ultimas-noticias/7943-conheça-as-rotas-de-trem-de-passageiros-no-brasil.html>. Acesso em: 6 abr. 2022.

MOLATEFI, H.; HECHT, M.; KADIVAR, M. H. Critical speed and limit cycles in the empty Y25-freight wagon. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit**, [S. l.], v. 220, n. 4, p. 347–359, 2006. ISSN: 09544097. DOI: 10.1243/09544097JRRT67.

MONTENEGRO, P. A.; BARBOSA, D.; CARVALHO, H.; CALÇADA, R. Dynamic effects on a train-bridge system caused by stochastically generated turbulent wind fields. **Engineering Structures**, [S. l.], v. 211, n. September 2019, p. 110430, 2020 a. ISSN: 18737323. DOI: 10.1016/j.engstruct.2020.110430.

MONTENEGRO, P. A.; CALÇADA, R.; VILA POUÇA, N.; TANABE, M. Running safety assessment of trains moving over bridges subjected to moderate earthquakes. **Earthquake Engineering and Structural Dynamics**, [S. l.], v. 45, n. 3, p. 483–504, 2016. ISSN: 10969845. DOI: 10.1002/eqe.2673.

MONTENEGRO, P. A.; HELENO, R.; CARVALHO, H.; CALÇADA, R.; BAKER, C. J. A comparative study on the running safety of trains subjected to crosswinds simulated with different wind models. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, [S. l.], v. 207, n. June, p. 104398, 2020 b. ISSN: 01676105. DOI: 10.1016/j.jweia.2020.104398.

MONTENEGRO, P. A.; NEVES, S. G. M.; CALÇADA, R.; TANABE, M.; SOGABE, M. Wheel-rail contact formulation for analyzing the lateral train-structure dynamic interaction. **Computers and Structures**, [S. l.], v. 152, p. 200–214, 2015. ISSN: 00457949. DOI: 10.1016/j.compstruc.2015.01.004.

MONTENEGRO, Pedro Aires. **A Methodology for the Assessment of the Train Running Safety on Bridges**. 2015. Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2015.

MONTENEGRO, Pedro Aires; CALÇADA, Rui; CARVALHO, Hermes; BOLKOVY, Alexander; CHEBYKIN, Ivan. Stability of a train running over the Volga river high-speed railway bridge during crosswinds. **Structure and Infrastructure Engineering**, [S. l.], v. 16, n. 8, p. 1121–1137, 2020 c. ISSN: 17448980. DOI: 10.1080/15732479.2019.1684956.

MORENO DELGADO, R.; DOS SANTOS R.C., S. M. Modelling of railway bridge-vehicle interaction on high speed tracks. **Computers & Structures**, [S. l.], v. 63, n. 3, p. 511–523, 1997. ISSN: 00457949. DOI: 10.1016/S0045-7949(96)00360-4.

MOSLEH, Araliya; MONTENEGRO, Pedro; ALVES COSTA, Pedro; CALÇADA, Rui. An approach for wheel flat detection of railway train wheels using envelope spectrum analysis. **Structure and Infrastructure Engineering**, [S. l.], v. 17, n. 12, p. 1710–1729, 2021. ISSN: 17448980. DOI: 10.1080/15732479.2020.1832536.

NATIONAL INSTRUMENTS. **Acquiring an Analog Signal: Bandwidth, Nyquist Sampling Theorem, and Aliasing**. National Instruments 2019.

NETO, José; CALÇADA, Rui Artur Bártolo. **Monitoring the dynamic response of a wagon in the framework of GPIAAF derailment investigation (Report No. PROC. INV 20140702)**. Client: Gabinete de Prevenção e Investigação de Acidentes com Aeronaves e de Acidentes Ferroviários (GPIAAF) Porto, Portugal 2017.

NETO, José; MONTENEGRO, Pedro Aires; VALE, Cecília; CALÇADA, Rui. Evaluation of the train running safety under crosswinds - a numerical study on the influence of the wind speed and orientation considering the normative Chinese Hat Model. **International Journal of Rail Transportation**, [S. l.], p. 1–28, 2020. ISSN: 2324-8378. DOI: 10.1080/23248378.2020.1780965.

NEVES, S. G. M.; AZEVEDO, A. F. M.; CALÇADA, R. A direct method for analyzing the vertical vehicle-structure interaction. **Engineering Structures**, [S. l.], v. 34, p. 414–420, 2012. ISSN: 01410296. DOI: 10.1016/j.engstruct.2011.10.010.

NEVES, S. G. M.; MONTENEGRO, P. A.; AZEVEDO, A. F. M.; CALÇADA, R. A direct method for analyzing the nonlinear vehicle-structure interaction. **Engineering Structures**, [S. l.], v. 69, p. 83–89, 2014. ISSN: 01410296. DOI: 10.1016/j.engstruct.2014.02.027.

OGATA, Katsuhiko. **Modern Control Engineering Fifth Edition**. [s.l.: s.n.]. v. 17 ISSN: 0018-9286. ISBN: 0136156738.

OPTISLANG. - **OptiSLang - the optimizing structural language, 3.0 edition**. Weimar,

Germany Dynardo GmbH, 2008.

OUYANG, Shan; SUI, Fusheng. Experimental modal analysis of high-speed railway carriage. *In: INTERNOISE 2014 - 43RD INTERNATIONAL CONGRESS ON NOISE CONTROL ENGINEERING: IMPROVING THE WORLD THROUGH NOISE CONTROL 2014, Anais [...].* [s.l.: s.n.]

PCB PIEZOTRONICS. **Model 357B54 - Charge Output Accelerometer - Installation and Operating Manual.** [s.d.].

PCB PIEZOTRONICS. **Introduction to MEMS Accelerometers.** 2020. Disponível em: <https://www.pcb.com/resources/technical-information/mems-accelerometers>. Acesso em: 4 jan. 2022.

PCB PIEZOTRONICS. **Sensing Geometries for Piezoelectric Accelerometers.** 2021a. Disponível em: [https://www.pcb.com/sensors-for-test-measurement/accelerometers/sensing\\_geometries](https://www.pcb.com/sensors-for-test-measurement/accelerometers/sensing_geometries). Acesso em: 3 jan. 2022.

PCB PIEZOTRONICS. **Accelerometers / Vibration Sensors.** 2021b. Disponível em: <https://www.pcb.com/sensors-for-test-measurement/accelerometers>. Acesso em: 4 jan. 2022.

PEETERS, B.; DE ROECK, G. Reference based stochastic subspace identification in Civil Engineering. **Inverse Problems in Engineering**, [S. l.], v. 8, n. 1, p. 47–74, 2000. ISSN: 10682767. DOI: 10.1080/174159700088027718.

PEETERS, Bart; DE ROECK, Guido. Reference-based stochastic subspace identification for output-only modal analysis. **Mechanical Systems and Signal Processing**, [S. l.], v. 13, n. 6, p. 855–878, 1999. ISSN: 08883270. DOI: 10.1006/mssp.1999.1249.

PEIXER, Marco Antonio; CARVALHO, Hermes; MONTENEGRO, Pedro Aires; CORREIA, José Antonio; BITTENCOURT, Túlio Nogueira; CALÇADA, Rui Artur Bártolo; GUO, Tong. Influence of the Double Composite Action Solution in the Behavior of a High-Speed Railway Viaduct. **Journal of Bridge Engineering**, [S. l.], v. 25, n. 7, p. 05020002, 2020. ISSN: 1084-0702. DOI: 10.1061/(ASCE)BE.1943-5592.0001563.

PENCHEVA, T.; ATANASSOV, K.; SHANNON, A. Modelling of a Roulette Wheel Selection Operator in Genetic Algorithms Using Generalized Nets. **Tenth Int. Workshop on Generalized Nets**, [S. l.], n. May 2014, p. 1–7, 2009.

PIOTROWSKI, J. Model of the UIC link suspension for freight wagons. **Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv)**, [S. l.], v. 73, n. 7, p. 517–532, 2003. ISSN: 0939-1533. DOI: 10.1007/s00419-003-0305-6.

RAO, Singiresu S. **Vibrações Mecânicas.** 4. ed., São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008. ISBN: 978-85-7605-200-5.

RIBEIRO, D.; BRAGANÇA, C.; COSTA, C.; JORGE, P.; SILVA, R.; ARÊDE, A.; CALÇADA, R.

Calibration of the numerical model of a freight railway vehicle based on experimental modal parameters. **Structures**, [S. l.], v. 38, p. 108–122, 2022. ISSN: 23520124. DOI: 10.1016/j.istruc.2022.01.085.

RIBEIRO, D.; CALÇADA, R.; BREHM, M.; ZABEL, V. Calibration of the numerical model of a track section over a railway bridge based on dynamic tests. **Structures**, [S. l.], v. 34, p. 4124–4141, 2021. ISSN: 23520124. DOI: 10.1016/j.istruc.2021.09.109.

RIBEIRO, D.; CALÇADA, R.; DELGADO, R.; BREHM, M.; ZABEL, V. Finite-element model calibration of a railway vehicle based on experimental modal parameters. **Vehicle System Dynamics**, [S. l.], v. 51, n. 6, p. 821–856, 2013. ISSN: 00423114. DOI: 10.1080/00423114.2013.778416.

RIBEIRO, Diogo; CALÇADA, Rui; MONTENEGRO, Pedro. Calibration of Numerical Models of Railway Vehicles Based on Dynamic Tests. *In: Mechanisms and Machine Science*. [s.l: s.n.]. p. 201–211. DOI: 10.1007/978-3-030-67090-0\_17.

RIBEIRO, Diogo Rodrigo Ferreira. **Efeitos dinâmicos induzidos por tráfego em pontes ferroviárias: modelação numérica, calibração e validação experimental**. 2012. Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2012.

RICHARDSON, Mark H.; FORMENTI, David L. Parameter Estimation From Frequency Response Measurements Using Rational Fraction Polynomials. **Proceedings of the International Modal Analysis Conference & Exhibit**, [S. l.], p. 167–181, 1982.

RODRIGUES, Jorge. **Identificação Modal Estocástica: Métodos de Análise e Aplicações em Estruturas de Engenharia Civil**. 2004. Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2004.

SANTOS, K. R. M. Dos; BECK, A. T. A benchmark study on intelligent sampling techniques in Monte Carlo simulation. **Latin American Journal of Solids and Structures**, [S. l.], v. 12, n. 4, p. 624–648, 2015. ISSN: 1679-7825. DOI: 10.1590/1679-78251245.

SARIN, H.; KOKKOLARAS, M.; HULBERT, G.; PAPALAMBROS, P.; BARBAT, S.; YANG, R. J. A comprehensive metric for comparing time histories in validation of simulation models with emphasis on vehicle safety applications. **Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conference**, [S. l.], v. 1, n. PARTS A AND B, p. 1275–1286, 2008. ISBN: 9780791843253. DOI: 10.1115/DETC2008-49669.

SHI, Huai-long Long; WU, Ping-bo Bo; LUO, Ren; ZENG, Jing. Estimation of the damping effects of suspension systems on railway vehicles using wedge tests. *In: PROCEEDINGS OF THE INSTITUTION OF MECHANICAL ENGINEERS, PART F: JOURNAL OF RAIL AND RAPID TRANSIT 2016*, **Anais** [...]. : SAGE PublicationsSage UK: London, England, 2016 p. 392–406. ISSN: 20413017. ISBN: 0954409714542. DOI: 10.1177/0954409714542861.

SICHANI, M. Teimouri; AHMADIAN, H. Identification of Railway Car Body Model Using Operational Modal Analysis. **Proceedings of the 8th International Railway Transportation Conference (IRTC) Tehran, Islamic Republic of Iran**, [S. l.], 2006.

SICHANI, Mahdi Teimouri; AHMADIAN, Hamid. Model updating of railway car body using operational modal testing results. **Proceedings of the 2nd International Operational Modal Analysis Conference, IOMAC 2007**, [S. l.], 2007. ISBN: 9788791606144.

SILICON SENSING SYSTEMS LIMITED. **Inertial Sensor Technology: Working Principles and Development of MEMS Inertial Sensors**. 2017. Disponível em: <https://www.siliconsensing.com/technology/mems-accelerometers>. Acesso em: 4 jan. 2021.

SILVA, Rúben; RIBEIRO, Diogo; BRAGANÇA, Cássio; COSTA, Cristina; ARÊDE, António; CALÇADA, Rui. Model updating of a freight wagon based on dynamic tests under different loading scenarios. **Applied Sciences (Switzerland)**, [S. l.], v. 11, n. 22, p. 10691, 2021. ISSN: 20763417. DOI: 10.3390/app112210691.

SORIANO, Humberto Lima. **Introdução à dinâmica das estruturas**. 1. ed., Rio de Janeiro: Elsevier, 2014. ISBN: 978-85-352-5154-8.

STICHEL, Sebastian. The influence of underframe structural flexibility on the hunting behaviour of a freight wagon. **Advances in Transport**, [S. l.], v. 7, p. 725–736, 2000. ISSN: 1462608X. ISBN: 1-85312-826-0.

SVIBS. **Artemis Modal Manual**. 2019.

SVIBS. **Technical review - Structural Vibration Solutions**. 2022. Disponível em: <https://svibs.com/technical-review/>. Acesso em: 6 fev. 2022.

SZAFRAŃSKI, Marek. A dynamic vehicle-bridge model based on the modal identification results of an existing EN57 train and bridge spans with non-ballasted tracks. **Mechanical Systems and Signal Processing**, [S. l.], v. 146, p. 107039, 2021. ISSN: 10961216. DOI: 10.1016/j.ymsp.2020.107039.

TE CONNECTIVITY SENSORS. **Linear Variable Differential Transformer (LVDT) Tutorial**. 2017. Disponível em: <https://www.te.com/global-en/industries/sensor-solutions/insights/lvdt-tutorial.html>. Acesso em: 4 jan. 2022.

TE CONNECTIVITY SENSORS. **Linear Position Sensors – LVDT/LVIT**. 2022. Disponível em: <https://www.te.com/usa-en/products/sensors/position-sensors/linear-position-sensors-lvdt-lvit.html?tab=pgp-story>. Acesso em: 5 jan. 2022.

THE MATHWORKS INC. **MATLAB (R2020a)**. Natick, Massachusetts.

TICONA MELO, Ladislao R.; RIBEIRO, Diogo; CALÇADA, Rui; BITTENCOURT, Túlio N. Validation of a vertical train-track-bridge dynamic interaction model based on limited experimental data. **Structure and Infrastructure Engineering**, [S. l.], v. 16, n. 1, p. 181–201, 2020. ISSN: 17448980. DOI: 10.1080/15732479.2019.1605394.

TOMIOKA, T.; TAKIGAMI, T.; SUZUKI, Y. Numerical analysis of three-dimensional flexural vibration of railway vehicle car body. **Vehicle System Dynamics**, [S. l.], v. 44, n. SUPPL. 1,

p. 272–285, 2006. ISSN: 00423114. DOI: 10.1080/00423110600871301.

TRUE, Hans; HOFFMANN, Mark; JÖNSSON, Per Anders. The design and performance of the European freight wagon standard suspensions. *In: AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS, RAIL TRANSPORTATION DIVISION (PUBLICATION) RTD 2005, Anais [...]. : ASMEDC, 2005 p. 9–18. ISSN: 10788883. ISBN: 0791842290. DOI: 10.1115/IMECE2005-79227.*

TSUNASHIMA, Hitoshi. Condition monitoring of railway tracks from car-body vibration using a machine learning technique. **Applied Sciences (Switzerland)**, [S. l.], v. 9, n. 13, 2019. ISSN: 20763417. DOI: 10.3390/APP9132734.

UIC. **Code 774-3-R Track/Bridge interaction - Recomendations for calculation.** 2001.

UIC. **Code 517 - Wagons - Suspension gear - Standardisation.** 2007.

UIC. **UIC – International union of railways.** 2022. Disponível em: <https://uic.org/>. Acesso em: 30 jan. 2022.

VAN OVERSCHEE, Peter; DE MOOR, Bart. **Subspace Identification for Linear Systems.** [s.l.: s.n.]. DOI: 10.1007/978-1-4613-0465-4.

VENDRAMI, C. E.; PAUL, S. Ruído Ferroviário. **Acústica e Vibrações**, [S. l.], v. 41, p. 55–63, 2009.

VIANA, Cristiane Oliveira; CARVALHO, Hermes; CORREIA, José; MONTENEGRO, Pedro Aires; HELENO, Raphael Pedrosa; ALENCAR, Guilherme Santana; JESUS, Abilio M. P. d.; CALÇADA, Rui. Fatigue assessment based on hot-spot stresses obtained from the global dynamic analysis and local static sub-model. **International Journal of Structural Integrity**, [S. l.], v. 12, n. 1, p. 31–47, 2019. ISSN: 17579872. ISBN: 0320190021. DOI: 10.1108/IJSI-03-2019-0021.

WAGNER, Johannes; BURGEMEISTER, Jan. **Piezoelectric Accelerometers - Theory and Application.** MMFRadebeul, Germany 2021.

WEI, Xiukun; LIU, Feng; JIA, Limin. Urban rail track condition monitoring based on in-service vehicle acceleration measurements. **Measurement: Journal of the International Measurement Confederation**, [S. l.], v. 80, p. 217–228, 2016. ISSN: 02632241. DOI: 10.1016/j.measurement.2015.11.033.

WEIDEMANN, Christoph. State-of-the-Art Railway Vehicle Design with Multi-Body Simulation. **Journal of Mechanical Systems for Transportation and Logistics**, [S. l.], v. 3, n. 1, p. 12–26, 2010. ISSN: 1882-1782. DOI: 10.1299/jmtl.3.12.

WU, Qing; COLE, Colin; SPIRYAGIN, Maksym; SUN, Yan Quan. A review of dynamics modelling of friction wedge suspensions. **Vehicle System Dynamics**, [S. l.], v. 52, n. 11, p. 1389–1415, 2014. ISSN: 17445159. DOI: 10.1080/00423114.2014.943249.

WU, Y. S.; YANG, Y. B.; YAU, J. D. Three-dimensional analysis of train-rail-bridge interaction problems. **Vehicle System Dynamics**, [S. l.], v. 36, n. 1, p. 1–35, 2001. ISSN: 00423114. DOI: 10.1076/vesd.36.1.1.3567.

WU, Yean Seng; YANG, Yeong Bin. Steady-state response and riding comfort of trains moving over a series of simply supported bridges. **Engineering Structures**, [S. l.], v. 25, n. 2, p. 251–265, 2003. ISSN: 01410296. DOI: 10.1016/S0141-0296(02)00147-5.

XIA, He; ZHANG, Nan. Dynamic analysis of railway bridge under high-speed trains. **Computers and Structures**, [S. l.], v. 83, n. 23–24, p. 1891–1901, 2005. ISSN: 00457949. DOI: 10.1016/j.compstruc.2005.02.014.

YANG, Fuheng; FONDER, Ghislain A. An iterative solution method for dynamic response of bridge-vehicles systems. **Earthquake Engineering and Structural Dynamics**, [S. l.], v. 25, n. 2, p. 195–215, 1996. ISSN: 00988847. DOI: 10.1002/(SICI)1096-9845(199602)25:2<195::AID-EQE547>3.0.CO;2-R.

YANG, Y. B.; YAU, J. D.; WU, Y. S. **Vehicle–Bridge Interaction Dynamics**. [s.l.] : WORLD SCIENTIFIC, 2004. ISBN: 978-981-238-847-6. DOI: 10.1142/5541.

ZHAI, Wanming; WANG, Kaiyun; CAI, Chengbiao. Fundamentals of vehicle-track coupled dynamics. **Vehicle System Dynamics**, [S. l.], v. 47, n. 11, p. 1349–1376, 2009. ISSN: 00423114. DOI: 10.1080/00423110802621561.

ZHAI, Wanming; WANG, Shaolin; ZHANG, Nan; GAO, Mangmang; XIA, He; CAI, Chengbiao; ZHAO, Chunfa. High-speed train–track–bridge dynamic interactions – Part II: experimental validation and engineering application. **International Journal of Rail Transportation**, [S. l.], v. 1, n. 1–2, p. 25–41, 2013. ISSN: 23248386. DOI: 10.1080/23248378.2013.791497.